

На правах рукописи

Лебедева Елена Владимировна

**ДВУМЕРНЫЕ ЗАРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ НА
ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ И
РЕКОНСТРУКЦИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПЛЕНОК
ЖИДКОСТИ.**

01.04.07 — физика конденсированного состояния

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2006

Работа выполнена в Институте физики твёрдого тела Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Шикин Валерий Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Кравченко Владимир Яковлевич

доктор физико-математических наук,
профессор
Фальковский Леонид Александрович

Ведущая организация: РИЦ Курчатовский институт

Защита состоится “ _____ ” _____ 2006 в _____ на заседании диссертационного совета Д 002.100.01 при Институте физики твёрдого тела Российской академии наук по адресу: 142431, г. Черногоровка, ул. Институтская 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФТТ РАН.

Автореферат разослан “ _____ ” _____ 2006.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

В. Н. Зверев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы. Двумерные заряженные системы на поверхности жидкого гелия и водорода при низких температурах изучаются давно, и интерес к ним не ослабевает. В данной диссертации рассматриваются лишь некоторые аспекты этой неисчерпаемой тематики. И хотя предпринятые теоретические исследования относятся к достаточно разнородному набору объектов, имеются существенные обобщающие моменты. Во-первых, свойства двумерных заряженных систем исследуются в основном методами электростатики, т.е. рассматривается только такой круг явлений, где квантовые характеристики частиц, составляющих 2D систему, можно не принимать в расчет. Во-вторых, главное внимание уделяется определению тех условий, при которых данные 2D системы устойчивы.

Проблема устойчивости заряженной поверхности жидкости возникла в 30-е годы в связи с обнаружением распада тяжелых атомных ядер. Капельный сценарий этой неустойчивости, предложенный Френкелем [1], и независимо Бором и Уилером [2] оказался первой приемлемой моделью, объясняющей происхождение данного фундаментального явления. Более ранний и менее знаменитый плоский вариант задачи о спектре колебаний заряженной поверхности жидкости (Френкель [3, 4], Тонкс [5]), оказался востребованным по существу лишь в 70-е годы, когда начались интенсивные исследования свойств различных низкоразмерных заряженных образований. Одно из них - 2D заряженная система на поверхности жидких диэлектриков (гелия, водорода и т.п.) в большой степени контролируется эффектом Френкеля, Тонкса [3]-[5], т.к. предсказанная ими неустойчивость ограничивает сверху плотность заряженных частиц на поверхности жидкого диэлектрика.

Среди этапных работ о развитии неустойчивости и реконструкции заряженной поверхности жидкости фигурируют работы Горькова, Черниковой [6, 7], обобщающие "металлические" результаты [3]-[5], на случай жидких диэлектриков с поверхностным зарядом на свободной границе вакуум-жидкость или границе двух жидкостей; обнаружение такой неустойчивости (Володин, Хайкин, Эдельман [8, 9]); прямые измерения закона дисперсии колебаний заряженной границы двух жидкостей с демонстрацией

его критического поведения (Лейдерер [10]); предсказание возможности реконструкции заряженной поверхности жидкости в закритичных условиях (Горьков, Черникова [11, 12], Икези [19]) и его экспериментальное подтверждение (Лейдерер, Ваннер [13, 14]). Термин "реконструкция", используемый здесь и ниже, не является общепринятым (но нет и ничего адекватного). Речь идет о переходе заряженной поверхности жидкости из плоского состояния в деформированное (периодически или аperiodически) с амплитудой и периодом, зависящими определенным образом от близости к точке перехода.

Интенсивно развиваясь в последние годы, проблема устойчивости поверхности жидкости оказалась весьма продвинутой в нескольких направлениях: реконструкция свободной границы жидких диэлектриков и феррожидкостей [15] - [18], неустойчивость и реконструкция плоской, массивной заряженной поверхности жидкости [6] - [14], устойчивость цилиндрических и сферических жидких поверхностей, гравитационная неустойчивость жидкой поверхности в инверсионных условиях, и т.д. В частности, вполне самостоятельно выглядит задача об устойчивости и реконструкции тонких заряженных пленок. Многие детали этого явления установлены лишь недавно и в совокупности не обсуждались.

В последнее время большой интерес привлекают эксперименты по внедрению в гелий наночастиц. Эти частицы формируют в жидкости структуры с новыми, необычными свойствами (см. например, [38, 39]). Имеется возможность связать такую тяжелую частицу с электроном [40]. Полученные в результате тяжелые заряженные кластеры, локализованные у поверхности гелия действием сил Ван-дер-Ваальса, могли бы стать еще одной необычной реализацией 2D системы. Другая возможность - получение связанного состояния электрона над поверхностью гелия с нейтральной наночастицей под его поверхностью. Такого рода системы тяжелых частиц могли бы стать объектом для визуального наблюдения двумерной кулоновской кристаллизации.

В цели диссертационной работы входило

1. Решение вопроса о наличии или отсутствии реконструкции заряженной поверхности слоя жидкости, имеющего конечную толщину, в раз-

личных условиях. Реконструкцией мы называем устойчивое искривленное состояние жидкости, которое реализуется при внешних параметрах, соответствующих потере линейной устойчивости.

2. Проанализировать соответствие теоретических результатов, полученных при изучении неустойчивости и реконструкции, имеющимся экспериментам.
3. Обосновать возможность существования на поверхности жидкого гелия системы заряженных кластеров, а также системы заряженных комплексов электрон - нейтральный кластер.

Для достижения этих целей требовалось решение следующих задач:

1. Решить задачу об устойчивости тонкой незаряженной, а затем заряженной ограниченной пленки жидкости, удерживаемой на твердом потолке силами Ван-дер-Ваальса.
2. Построить теорию метастабильных стационарных состояний сильно заряженных пленок жидкого водородода с произвольным значением параметра d - расстояния между поверхностью жидкости и управляющим электродом.
3. Найти решения нелинейного уравнения, описывающего стационарное состояние сильно заряженной, ограниченной и неограниченной поверхности водорода с малым значением параметра $d \ll a$ (a - капиллярная длина) при условии сохранения полного объема жидкости.
4. Проанализировать различия критических условий для бесконечной и ограниченной заряженной пленки, когда последняя имеет незаряженные края.
5. Описать поведение тонкой ($d \ll a$), сильно заряженной пленки гелия в условиях, когда жидкость вытекает из конденсатора конечных размеров под действием сил электрического давления.
6. Показать, что нейтральные кластеры, связанные с электроном, и заряженные кластеры у поверхности гелия имеют достаточно большую

энергию связи и являются устойчивыми в широких диапазонах таких параметров как внешнее поле и размер частицы, внедренной в гелий. Обосновать возможность существования двумерных заряженных систем, образованных такими частицами.

Научная новизна. В данной работе впервые обосновано существование устойчивого деформированного состояния нейтральной пленки жидкости конечных горизонтальных размеров, висящей на твердом потолке (инверсионной пленки). Это состояние реализуется, даже когда средняя толщина пленки больше значения, соответствующего потере устойчивости по отношению к малым (линейным) колебаниям.

В теории до сих пор вопрос о реконструкции сильно заряженной поверхности жидкости решался отрицательно - нельзя доказать наличие устойчивого состояния такой поверхности при больших значениях внешнего электрического поля в рамках нелинейной теории малых колебаний (см. [11, 12, 19]). В настоящей работе обоснована возможность существования метастабильного состояния сильно заряженной поверхности, соответствующего локальному минимуму энергии, которое реализуется в виде гексагональной структуры.

В работе впервые изучено влияние конечных горизонтальных размеров заряженной поверхности и условия сохранения объема жидкости на устойчивость такой системы. Доказать, что реконструированные состояния тонких ($d \ll a$), сильно заряженных объектов могут быть реализованы, в рамках примененных в диссертации методов не удалось.

В диссертации впервые предложены новые, интересные для экспериментальной реализации объекты - связанные состояния электрона и макроскопического нейтрального кластера у поверхности жидкого гелия. Показано, что в сильном электрическом поле такие связанные состояния реализуются даже для "гигантских" кристаллов размера $R \sim 10^3 \text{ \AA}$. Исследованы также заряженные комплексы, состоящие из нейтральной частицы большого радиуса ($R > 50 \text{ \AA}$) и электрона, которые формируются под поверхностью гелия во внешнем электрическом поле силами поляризационного притяжения, когда электрон локализуется вблизи поверхности частицы. Двумерные системы, состоящие из таких элементов, могут стать новым,

перспективным объектом для экспериментального изучения, в частности для наблюдения кулоновской кристаллизации.

Основные положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Тонкая незаряженная ограниченная пленка жидкости, удерживаемая на твердом потолке силами Ван-дер-Ваальса, демонстрирует устойчивое поведение, когда средняя толщина пленки превышает критическое значение, соответствующее потере линейной устойчивости. При этом происходит реконструкция - жидкость переходит из плоского в деформированное состояние, которое вдали от критической точки представляет собой единичную каплю, описанную Френкелем [22].
2. Сильно заряженные пленки жидкого водородода с произвольным значением расстояния между поверхностью жидкости и управляющим электродом в рамках теории возмущений неустойчивы при значениях внешнего электрического поля больших критического. Однако для достаточно толстых пленок ($d \geq 2a$) в надкритичной области могут быть реализованы метастабильные состояния в виде гексагональной структуры с периодом, зависящим от толщины пленки.
3. Реконструкцию сильно заряженной, ограниченной и неограниченной поверхности водорода с малым значением параметра $d \ll a$ (расстояния между поверхностью жидкости и управляющим электродом) в электрических полях выше критического не удастся описать решением нелинейного уравнения с учетом поправок второго порядка.
4. Неустойчивость неограниченной и ограниченной пленки имеют разную природу. В первом случае она обусловлена ростом амплитуды малых колебаний. Во втором случае добавляются еще два фактора: кулоновская деформация поверхности, возникающая из-за ее неравномерной заряженности и конечный размер пленки, определяющий минимальное волновое число для линейной неустойчивости. Критические условия для неограниченной и ограниченной пленки могут сильно различаться.
5. Тонкая сильно заряженная пленка гелия ($d \ll a$), в условиях, когда

жидкость имеет возможность вытекать из конденсатора конечных размеров под действием сил электрического давления теряет устойчивость при внешних напряжениях меньших критического напряжения $V_c = \sqrt{4\pi\rho g d^3}$.

6. Нейтральные кластеры, связанные с электроном, и заряженные кластеры у поверхности гелия имеют достаточно большую энергию связи и являются устойчивыми в широких диапазонах таких параметров как внешнее поле и размер частицы, внедренной в гелий.

Личный вклад автора. Материал, представленный в диссертации получен при непосредственном участии автора в постановке задач исследований, в выполнении теоретических и численных расчетов и в обсуждении полученных результатов. Диссертационная работа выполнена в лаборатории квантовых кристаллов ИФТТ РАН в период с 1998 г. по 2004 г.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. "Quantum Fluids and Solids", (Констанц, Германия, 2001).
2. "Chernogolovka Workshop on Low Temperature Physics in Microgravity Environment — CWS-2002", (Черноголовка, Россия, 2002).
3. "Frontiers in Condensed Matter Physics". (Израиль, 2003).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 8 статьях, список которых приведёт в конце автореферата. Общее количество публикаций по теме диссертации — 11. Работы, вошедшие в диссертацию были выполнены при поддержке РФФИ грант № 03-02-16121.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав и заключения. Общий объём диссертации — **137** страниц текста, включая **38** рисунков и список литературы из **92** наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 является введением. Глава 2 содержит подробный обзор теоретических и экспериментальных результатов по исследованию устойчивости и реконструкции заряженной поверхности массивного гелия. В деталях описаны два возможных варианта реконструкции - периодический и лучный. Этот раздел очень важен, поскольку автор в дальнейшем активно использует применявшиеся здесь методы.

Глава 3 посвящена решению задачи об устойчивости инверсионной пленки жидкости в нейтральном и заряженном вариантах.

Раздел 3.1. Обсуждаются особенности задачи о неустойчивости и реконструкции тонких пленок по сравнению с массивным случаем. Развитие неустойчивости в таких объектах происходит на малых волновых числах без участия выделенной специальной длины типа капиллярной постоянной. Реконструкция тонких пленок существенно более разнообразна (по сравнению с массивной) параметрически. Кроме толщины пленки h на ее устойчивость влияет наличие сил Ван-дер-Ваальса, качество подложки, отношение r_s/h , где r_s - среднее расстояние между электронами. Одной из двумерных систем, демонстрирующих механическую неустойчивость, является жидкая пленка, висящая на твердом потолке (инверсионная пленка). Образование подобных пленок осуществляется различными способами. Наиболее известным из них является конденсация жидкости на охлажденные стенки резервуара, в частности, на его потолок [21].

Чисто гравитационное поведение инверсионной пленки абсолютно неустойчиво [20]. Учет сил Ван-дер-Ваальса ведет к появлению конечного интервала толщин, в пределах которого возможно механическое равновесие однородной пленки. С ростом ее толщины, в окрестности некоего, критического значения h_* теряется механическая устойчивость пленки.

В разделе 3.2 исследуется линейная неустойчивость инверсионной пленки толщины h , обусловленная действием сил гравитации и Ван-дер-Ваальса

$$P = -\rho gh - P_w(h). \quad (1)$$

Здесь ρ - объемная плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести, P_w -

давление Ван-дер-Ваальса:

$$P_w(\zeta) = \frac{f}{\zeta^3} \left(1 + \frac{\zeta}{d_w}\right)^{-1}. \quad (2)$$

Выражение (2) для сил Ван-дер-Ваальса записано для общего случая пленки переменной толщины $\zeta(x, y)$. Эта интерполяционная формула, учитывающая эффекты запаздывания, была предложена в [24], [25]. Она содержит константу взаимодействия Ван-дер-Ваальса f и характерную толщину d_w .

Функция (1) имеет максимум в точке h_* :

$$\partial P / \partial h|_{h_*} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) существует при любых значениях f и d_w , ибо $\partial P / \partial h < 0$. Неустойчивость инверсионной пленки в точке h_* была впервые отмечена в ([1*]).

Для того, чтобы оценить критическую толщину пленки h_* , имеет смысл рассмотреть два предельных случая: $h \ll d_w$ и $h \gg d_w$. В первом случае можно пренебречь эффектами запаздывания, а во втором они будут играть определяющую роль. Тогда для h_* в случае $\zeta(x, y) = h = const$

$$h_* = (4fd_w/\rho g)^{1/5} \quad (h_* \gg d_w), \quad (4)$$

$$h_* = (3f/\rho g)^{1/4} \quad (h_* \ll d_w). \quad (5)$$

В условиях $h > h_*$, силы Ван-дер-Ваальса недостаточны для удержания плоской пленки на потолке, и в задаче возникает неустойчивость. Однако, если пленка с $h > h_*$ перестает быть плоской,

$$\zeta(x) = h + \xi(x), \quad \int_{-L/2}^{+L/2} \zeta(x) dx = Lh, \quad (6)$$

(L - размеры пленки в горизонтальном направлении) то благодаря появлению лапласовского давления можно ожидать сохранения механического равновесия в некоем интервале значений параметра δ , характеризующего степень надкритичности

$$\delta = (h - h_*)/h_*, \quad (7)$$

в условиях $h > h_*$, где h - средняя толщина пленки из (6). Схема реконструкции приведена на рис. 1.

В разделе 3.3 рассмотрена реконструкция пленки бесконечных размеров при $\delta > 0$ ([3*]). Новая система уравнений, описывающая равновесную форму поверхности, включает условие постоянства давления:

$$\frac{\alpha \Delta \zeta}{[1 + (\nabla \zeta)^2]^{3/2}} + \rho g \zeta + P_w + p = 0. \quad (8)$$

и условие сохранения полного объема жидкости в слое V :

$$\int d^2 \mathbf{r} \zeta(\mathbf{r}) = V, \quad (9)$$

Для получения основных количественных характеристик явления реконструкции можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи. Полагая угол наклона поверхности к горизонтальной плоскости малым

$$|\zeta'| \ll 1, \quad (10)$$

и пренебрегая эффектами запаздывания, можно упростить уравнение (8):

$$\alpha \zeta'' + \rho g \zeta + \frac{f}{\zeta^3} + p = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) при $h > h_*$ имеет нелинейные периодические решения для неограниченной по оси x пленки. Если обозначить через $\zeta = z_i$, $i = 1, \dots, 4$, $z_4 < z_3 < z_2 < z_1$ корни полинома

$$\rho g \zeta^4 + 2p \zeta^3 - 2\alpha C \zeta^2 - f, \quad (12)$$

то такое нелинейное решение, отвечающее новому, реконструированному состоянию поверхности можно записать в интегральной форме:

$$\int_{z_2}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{2[C - U(\zeta)]}} = x - x_0. \quad (13)$$

Интеграл в левой части (13) можно выразить через эллиптические интегралы первого и третьего рода $F(\mu, r)$ и $\Pi(\mu, n, r)$. При этом период нелинейной стационарной волны поверхностной деформации также выражается через эти функции:

$$T = \frac{4a}{\sqrt{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}} \left[(z_2 - z_3) \Pi \left(\frac{\pi}{2}, \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, r \right) + z_3 F \left(\frac{\pi}{2}, r \right) \right]. \quad (14)$$

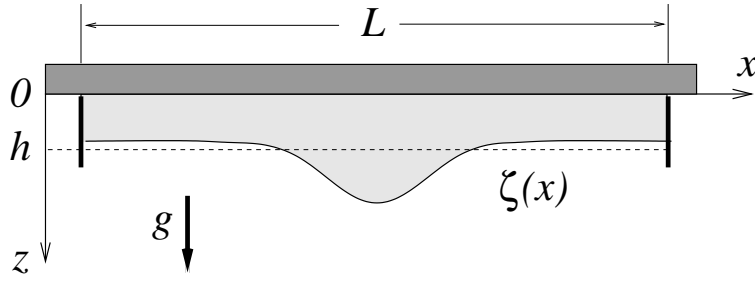


Рис. 1. схема реконструкции

Здесь $a = (\alpha/\rho g)^{1/2}$ - капиллярная длина. Из уравнений (13) и (14) с учетом условия нормировки (9) следует, что форма реконструированной поверхности инверсионной пленки представляется в виде однопараметрического семейства периодических функций.

В разделе 3.4 изучается реконструкция ограниченной нейтральной пленки. Чтобы однозначно определить форму реконструированной поверхности, рассматривается слой жидкости, ограниченный в горизонтальном направлении вертикальными стенками, расположенными на расстоянии L друг от друга. Граничные условия заданы нулевым углом смачивания

$$\zeta' |_{\pm L/2} = 0. \quad (15)$$

Численный анализ условий устойчивости инверсионного слоя при средних значениях уровня надкритичности $\delta < 10$, $\delta = h/h_* - 1$ показал, что устойчивым является решение с периодом, равным размеру ячейки L , т.е. в виде одиночной "капли".

В предельном случае $h > 10h_*$ такая капля имеет очень тонкие края, объем жидкости в которых пренебрежимо мал. Это позволяет использовать для описания ее формы решение Френкеля [22]:

$$\zeta(x) = \frac{A_0}{2}(1 + \cos x/a), \quad (16)$$

где

$$A_0 = S/\pi a \quad (17)$$

- вертикальный размер капли, $S = hL$ - двумерный "объем" капли. Итак, при переходе через нулевой уровень надкритичности, на плоском пьедестале, толщина которого определяется, в основном, силами Ван-дер Ваальса,

постепенно формируется одиночная капля, высота которой растет, а поперечный размер стремится к $2\pi a$ с ростом надкритичности. В пределе $\delta \gg 1$ эта капля хорошо описывается формулой, полученной Френкелем.

Изменение формы капли с ростом надкритичности демонстрирует рис. 2 из [3*]. Средняя толщина пленки для кривых 1, 2, и 3 равна соответственно $h = 2h_*$, $h = 5h_*$, $h = 7h_*$. Видно, что характерный горизонтальный размер капли составляет несколько капиллярных длин и слабо зависит от уровня надкритичности. Толщина жидкого слоя вблизи стенок меньше h_* , и она уменьшается с ростом h . В случае $h \gg h_*$ большая часть объема жидкости концентрируется в капле.

На рис. 3 ([3*]) показана зависимость вертикального размера капли $A = \zeta(0) - \zeta(L/2)$ от параметра надкритичности δ (7) при $L = 9a$. Чтобы сравнить результаты с макроскопической моделью [22], высота капли A нормирована на высоту A_0 капли Френкеля из (17). При высоком уровне надкритичности $\delta \gg 1$ высота капли A близка к высоте капли Френкеля того же объема. При $h \sim h_*$ вертикальный размер капли A значительно отличается от A_0 .

В разделе 3.5 решена задача о реконструкции заряженной инверсионной пленки и выполнено сравнение полученных результатов с экспериментами ([2*], [3*]). Геометрия рассматриваемой системы (см рис. 1) соответствует экспериментам [23], когда капля водорода конденсируется на верхней горизонтальной пластине круглого конденсатора, и поверхностный заряд полностью экранирует электрическое поле в объеме жидкости. Характерная толщина водородного слоя в рассмотренной ситуации значительно превышает критическую толщину h_* , связанную с силами Ван-дер-Ваальса. При этом, как показано выше, интегральный вклад тонких краев капли в общий объем жидкости можно не учитывать. Взаимодействие жидкости с твердой подложкой описывается только на краях капли граничным условием $\zeta' = 0$, за пределами капли $\zeta = 0$.

Основные параметры задачи следующие. Форма капли описывается аксиально симметричной функцией $z = \zeta(|\mathbf{r}|)$, d - расстояние между пластинами конденсатора, U - приложенное напряжение. Для эффективного радиуса капли R выполняется соотношение $d/R \ll 1$. Для дальнейших вы-

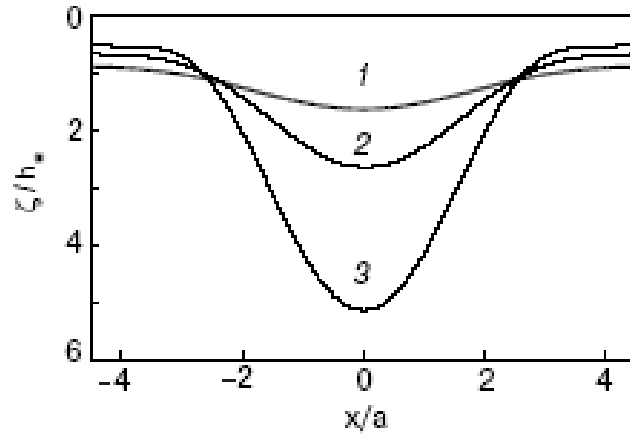


Рис. 2. изменение формы капли с ростом надкритичности

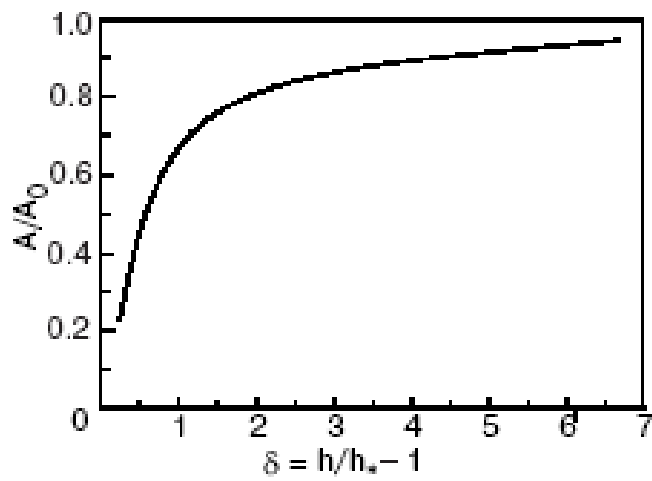


Рис. 3. вертикальный размер капли в зависимости от надкритичности

числений существенно также, что высота капли A мала по сравнению с d . Полная энергия системы при этом есть

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\zeta)^2 - \frac{1}{2} \rho g \int d^2\mathbf{r} \zeta^2 - \frac{U^2}{8\pi d} \int d^2\mathbf{r} \left(\frac{\zeta^2}{d^2} + \frac{\zeta^3}{d^3} \right). \quad (18)$$

Устойчивая равновесная форма капли должна соответствовать минимуму энергии при выполнении условия сохранения полного объема жидкости. Зависимость $\zeta(r)$ можно искать в виде $\zeta(r) = Af(x)$, $x = r/R$. Подстановка этой пробной функции в (18) дает зависимость энергии системы от вариационных параметров A и R , а равновесная форма капли определяется из следующих вариационных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial R} = 0, \quad (19)$$

где $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - pAR^2$, p - множитель Лагранжа. Отсюда легко получить зависимость высоты капли от внешнего напряжения:

$$A = k_1 V \left(\frac{U^2}{4\pi d^3} + \rho g \right) \left(\alpha - \frac{k_2 U^2 V}{4\pi d^4} \right)^{-1}, \quad (20)$$

Для оценки по величине констант, входящих в (20) можно задать функцию $f(x)$ как линейную комбинацию функций Бесселя, удовлетворяющую граничным условиям на краях капли, что дает $k_1 = 0.0754$, $k_2 = 0.106$. Как следует из (20) высота капли A бесконечно возрастает, когда внешнее напряжение достигает значения $U_{c2} = (4\pi\alpha d^4/k_2 V)^{1/2}$. При $U > U_{c2}$ уравнения (19) не имеют решения, (отсутствует минимум энергии капли), капля теряет устойчивость: поверхность разряжается, и заряды с захваченными каплями жидкости уходят на нижнюю пластину конденсатора.

На рис. 4 из [3*] показана зависимость высоты капли A от напряжения U . Рис. 5 демонстрирует зависимость вертикального размера капли от ее объема при $U = 0$ и $U = 360$ V. Точки соответствуют эксперименту, а кривые - расчету по формуле (20). Теория и эксперимент находятся в хорошем соответствии.

Итак, инверсионная задача являет собой удачный пример, в котором общие тенденции (апериодичность реконструкции) сочетаются с возможностью количественно описывать и наблюдать это явление.

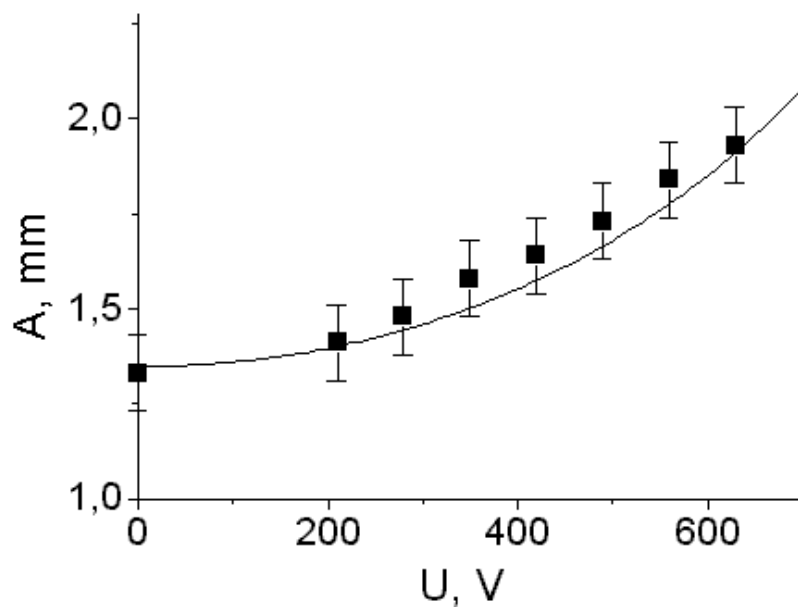


Рис. 4. зависимость высоты капли от напряжения

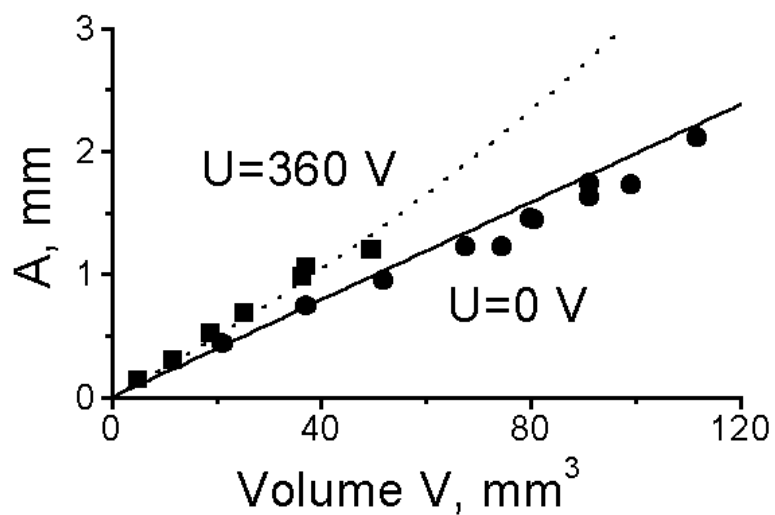


Рис. 5. зависимость вертикального размера капли от ее объема

Глава 4 посвящена изучению устойчивости и реконструкции тонкой заряженной пленки жидкости. Раздел 4.1 является введением. Раздел 4.2 содержит обширный литературный обзор данной проблемы. Затронуты такие ее аспекты, как параметры линейной устойчивости, влияние сил электронного давления на толщину пленки и связанная с этим модификация критических условий, повышение устойчивости пленки под влиянием сил Ван-дер-Ваальса, устойчивость в условиях образования двумерного кулоновского кристалла (см. [26]-[34]).

В разделе 4.3 решается задача о реконструкции заряженной положительными ионами поверхности водорода в условиях, когда толщина вакуумного слоя, где есть электрическое поле, при полной экранировке имеет произвольную конечную величину d . Решение такой задачи ищется по аналогии с [17]. Считается, что однородное электрическое поле E над заряженной поверхностью отличается от критического значения E_0 , соответствующего потере линейной устойчивости на малую величину γ (степень надкритичности):

$$E^2 = E_0^2(1 + \gamma). \quad (21)$$

Рассматривая выражение, связывающее энергию системы $U(\zeta_0)$ с амплитудой стационарной деформации, полученное, например, в [19] и имеющее вид полинома 4-й степени, легко видеть, что при сильной заряженности у функции U нет абсолютного минимума, что означает отсутствие устойчивых состояний поверхности. Однако возможно существование локального минимума, то есть метастабильного стационарного состояния, отвечающего надкритическим электрическим полям. Если такое состояние существует, то большая заряженность поверхности должна увеличивать его время жизни. Действительно, воздействие, под влиянием которого может произойти выход системы из метастабильного состояния, должно быть достаточно мощным, чтобы затронуть все электроны (которых много).

Процедура вычислений в одномерном случае заключается в разложении функции $\zeta(x)$, описывающей деформацию поверхности, в ряд:

$$\zeta = A\cos(kx) + bA^2\cos(2kx) = \zeta_1(x) + \zeta_2(x). \quad (22)$$

Электростатический потенциал $\varphi(x, z)$, удовлетворяющий уравнению Ла-

пласа внутри конденсатора, и принимающий значение $V = -Ed$ на верхнем электроде, также представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) = & -Ez + F_1\zeta_1 sh(k(z - d)) + \\ & + F_2\zeta_2 sh(2k(z - d)) + A^2 F_3\zeta_1 sh(k(z - d)). \end{aligned} \quad (23)$$

На поверхности жидкости выполняются условия постоянства давления и электростатического потенциала:

$$\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \rho g \zeta + \frac{(\partial\varphi(x, z)/\partial x)^2 + (\partial\varphi(x, z)/\partial z)^2}{8\pi} \Big|_{z=\zeta} = P, \quad (24)$$

$$\varphi(x, z) \Big|_{z=\zeta} = const. \quad (25)$$

Далее, выполняется разложение уравнения (25) по ζ , функции (22), (23) подставляются в уравнения (24), (25), что позволяет получить значения всех констант, входящих в разложения (22), (23). В результате определяется связь между амплитудой деформации A и параметром γ :

$$\epsilon k^3 A^3 + \gamma k c t h(\kappa_0) A = 0, \quad \kappa_0 = kd. \quad (26)$$

Анализ показывает, что константа ϵ больше нуля при любых d . Это означает, что полином (26) не имеет действительных, отличных от нуля корней, и, следовательно, устойчивая стационарная структура вида (22) в одномерной задаче не реализуется.

Двумерная задача решается аналогично. Разложение функции $\zeta(x, y)$ для двумерной периодической деформации с гексагональной симметрией имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1(x, y) + \zeta_{21}(x, y) + \zeta_{22}(x, y), \\ \zeta_1 &= A \sum_{i=1}^3 \cos(\theta_i), \quad \zeta_{22} = A^2 b_2 \sum_{i=1}^3 \cos(2\theta_i), \quad \zeta_{21} = A^2 b_1 \sum_{i+j=3}^3 \cos(\theta_i - \theta_j), \\ \theta_1 &= kx, \quad \theta_2 = k(x/2 + \sqrt{3}/2y), \quad \theta_3 = k(-x/2 - \sqrt{3}/2y). \end{aligned} \quad (27)$$

С помощью (27) и соответствующего разложения для φ можно получить выражение для функционала энергии системы в виде

$$U_- = -c_3 \zeta_0^4 - c_2 \zeta_0^3 - \frac{\gamma}{2} \zeta_0^2. \quad (28)$$

Устойчивое решение (27) должно соответствовать абсолютному минимуму функции U_- . Эта функция может иметь один локальный минимум, если $c_3 > 0$ и два минимума, (локальный и абсолютный), если $c_3 < 0$. Оказывается, что $c_3 > 0$ для любых d , т.е. имеется один локальный минимум, соответствующий метастабильному состоянию системы. Условие малости амплитуд нелинейных волн накладывает ограничения на диапазон значений d , где существует метастабильное состояние: $d > 2a$. Картина развития неустойчивости при этом выглядит так: при $\gamma < 0$ (область полей ниже критического) сильно заряженная плоская поверхность $\zeta_0 = 0$ является метастабильным состоянием, а при переходе к $\gamma > 0$ реализуется метастабильное состояние вида (27) с амплитудой, изменяющейся от нуля до $\zeta_0^c = -c_2/2c_3$ с ростом γ :

$$\zeta_0 = -\frac{c_2}{2c_3} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4c_3^2} - \frac{\gamma}{2c_3}}. \quad (29)$$

Состояние поверхности при $\gamma = 0$ является неустойчивым.

Диапазон надкритических полей, в котором реализуется гексагональная реконструкция, оказывается достаточно узким: $\gamma_c \sim 0.01$. Другое ограничение по параметрам - толщина вакуумного слоя. Она должна быть не очень мала: $d = d_* > 2a$, только в этом случае применение теории возмущений корректно.

В разделе 4.4 рассмотрено критическое поведение поверхности жидкого водорода с малым параметром $d \ll a$ ([4*]). Особенностью данной работы является решение нелинейного уравнения, возникающего из условия постоянства давления на поверхности жидкости, при заданном значении потенциала на управляющем электроде. Детали постановки задачи аналогичны случаю нейтральной инверсионной пленки. Для определения функции $\xi(x)$, описывающей деформацию поверхности при напряжениях больше критического, система уравнений

$$\xi'' + \gamma\xi + \frac{3V^2}{2}\xi^2 + p = 0, \quad (30)$$

$$\int \xi(x) dx = 0, \quad (31)$$

$$\xi'(-L/2) = \xi'(L/2) = \theta, \quad (32)$$

где $\gamma = V^2/V_0^2 - 1 > 0$, $V_0^2 = 4\pi\rho g d^3$, решалась численно. Вычисление энергии деформированных состояний для случая $\theta = 0$ показало, что они являются неустойчивыми.

Раздел 4.5 посвящается изучению деформации тонкой пленки ограниченных размеров. Вначале обсуждается геометрия имеющихся экспериментов по обнаружению неустойчивости и реконструкции. Один из вариантов ячейки схематически представлен на рис. 6.

Показано, что в такой ячейке с ростом напряжения в конденсаторе из-за наличия незаряженных участков поверхности происходит ее деформация, которая, в свою очередь, приводит к изменению критических условий [35]:

$$V_c^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_0^2 \frac{g^*}{g}, \quad V_0^2 = 4\pi\rho g d^3, \quad (33)$$

где

$$g^* = g \left(1 + \frac{L}{L_0 - L}\right) \quad (34)$$

Диаграмма, описывающая развитие неустойчивости с учетом деформационных эффектов при различных g^* , приведена на рис. 7. Кривые, выходящие из точки $d = 1$, показывают, как увеличивается деформация заряженной поверхности в центре ячейки с ростом напряжения. Соответствующие им кривые, изображающие зависимость $(3/2)^3 V_c^2 = 4\pi\rho d^3 g^*/g$, демонстрируют рост критического напряжения с увеличением толщины пленки. Точка пересечения кривых с одинаковым индексом соответствует потере устойчивости, связанной с деформацией жидкости.

В рамках того же подхода построена теория развития неустойчивости тонкой, ограниченной, сильно заряженной пленки гелия (управляющим является нижний электрод), когда несжимаемая жидкость может вытекать из конденсатора под действием сил электрического давления ([5*]). Система уравнений, описывающая ситуацию в одномерном случае имеет вид

$$\rho g \xi - \alpha \xi'' + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi)^2} = 0, \quad (35)$$

$$\xi(L) = \xi(-L) = 0, \quad V = const, \quad -L \leq x \leq L. \quad (36)$$

Для определения формы деформированной пленки и критических параметров задачи эта система решалась численно. Результаты приведены на

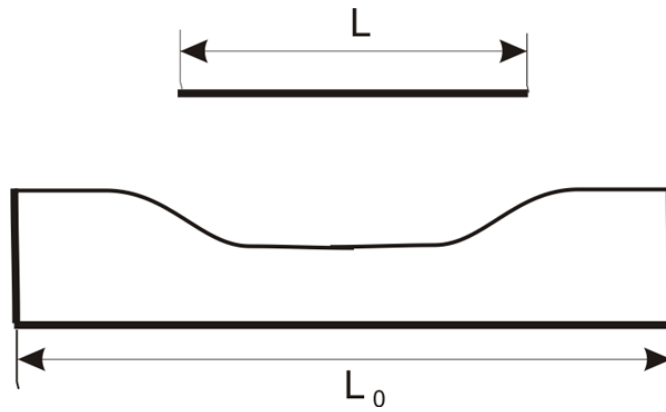


Рис. 6. схема ячейки с жидкой пленкой

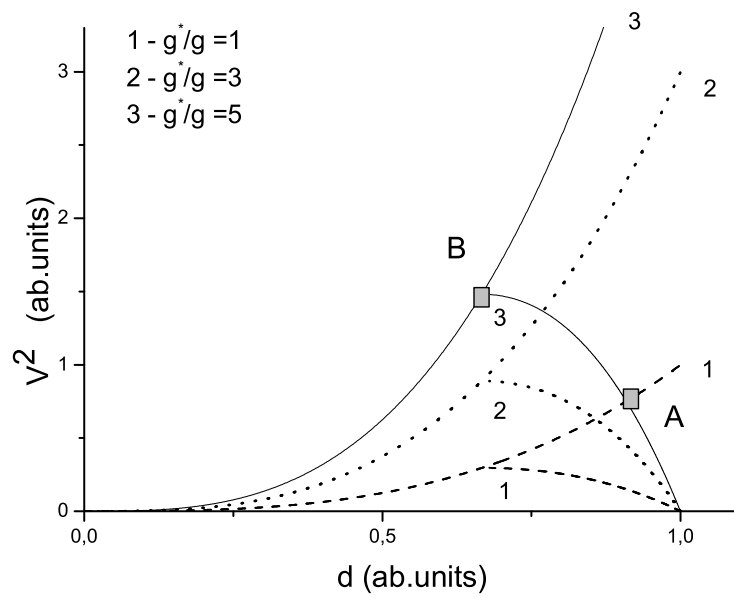


Рис. 7. картина развития неустойчивости с учетом деформационных эффектов

рис. 8. Анализ поведения кривых 1-3 показывает, что для ячейки любого размера имеется критическая разность потенциалов V_{cr} , выше которой существование пленки становится невозможным. Величина V_{cr} оказывается значительно ниже критического поля $V_0^2 = 4\pi\rho g d^3$ для бесконечного одномерного случая. На рис. 9 представлена зависимость критического поля V_c^2/V_0^2 от размера ячейки L . Как видно из рисунка, уменьшение L стабилизирует ячейку. Это естественно, поскольку неустойчивость тонкой заряженной пленки начинает развиваться на малых волновых числах.

Далее рассмотрена задача о многозарядных лунках на тонких пленках жидкости ([6*]). Вначале вычисляется энергия лунки размера R , которая с учетом эффективного прижимающего поля, и сил Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$W = \frac{Q^2 E_{\perp}^2}{8\pi\alpha} \exp\left(\frac{\tilde{\kappa}^2 R^2}{2}\right) Ei\left(-\frac{\tilde{\kappa}^2 R^2}{2}\right) + V_c(Rd), \quad (37)$$

где R является варьируемым параметром, а значения N , E_{\perp} и d фиксированы. Условие

$$W(E_k^{crit}) \simeq 0, k = d_*/d_0 \quad (38)$$

(d_* - характерная длина, возникающая в теории сил Ван-дер-Ваальса при учете эффектов запаздывания), позволяет построить диаграмму стабильности многоэлектронной лунки. прижимающих полях, которая показывает, что равновесная энергия лунки зависит от эффективной толщины пленки, но не зависит от числа электронов в ней.

В разделе 4.6 анализируется соответствие теории, развитой в главе 4 экспериментам [9], [21], [23]. Геометрия установки [9], соответствующая рис. 6, позволяет утверждать, что на величину критического поля влияет как эффект перенормировки g (34), так и уменьшение эффективной толщины пленки. Первый стабилизирует поверхность, а второй приводит к уменьшению критического поля. Результаты эксперимента по определению критического поля в области тонких ($d < a$) пленок, представленные в [9], демонстрируют систематическое значительное отклонение от формулы для V_0 из (33) для критического поля бесконечной пленки в сторону меньших полей. Это расхождение можно объяснить геометрией эксперимента в соответствии с (33).

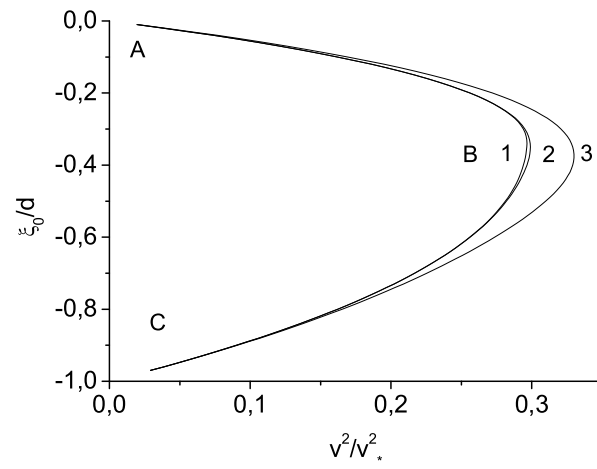


Рис. 8. диаграмма устойчивости гелиевой пленки

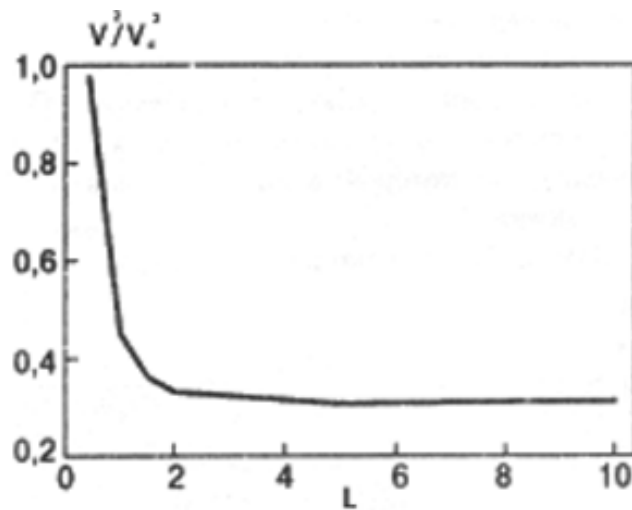


Рис. 9. зависимость критического напряжения от размеров ячейки.

В экспериментах [21], [23] изучалась устойчивость заряженных пленок водорода. Схема ячейки изображена на рис. 10. Пленка помещалась в плоский, цилиндрически симметричный конденсатор. Наблюдения проводились в условиях полной экранировки поля в объеме жидкости $E_+ = 0$ при различных значениях внешнего напряжения на пластинах конденсатора. Наблюдаемые критические поля находятся в хорошем соответствии с формулой для V_0 из (33). Это можно объяснить наличием охранного кольца, которое, несмотря на то, что вся жидкость находится в зоне действия внешнего поля, формирует на поверхности заряженное пятно, радиус которого L меньше радиуса пластин конденсатора L_0 . В данном случае перенормировка g играет большую, чем в [9], роль, так как L и L_0 различаются мало.

В экспериментах [21], [23] была поставлена и другая цель - обнаружить (или нет) стационарную реконструкцию заряженной пленки жидкости в условиях насыщения. Экспериментально наблюдалось возникновение одиночной стационарной волны деформации заряженных пленок гелия и водорода, сконденсированных на нижней поверхности плоского конденсатора. Такая волна на поверхности водорода возникала при увеличении внешнего напряжения до величины $U_{c1} \sim 1200 - 1500$ В. Поскольку напряжение превышало критическое значение, заряженная пленка наблюдалась в новом, реконструированном состоянии.

Нужно отметить, что параметр $d = 3mm$ в описываемых экспериментах попадает в ту область, для которой теория разделов 2 и 3 главы 4 предсказывает отсутствие реконструкции, а размеры ячейки недостаточно велики, чтобы в ней могло определенно поместиться более одного элемента гексагональной метастабильной структуры, описанной в разделе 2. Только в этом случае мы могли бы не считаться с цилиндрической симметрией задачи, для которой нелинейная теория предсказывает существование углубления, а не холма в центре ячейки.

Поэтому интерпретация экспериментов с заряженной поверхностью жидкого водорода в свете разработанных в данной диссертации теоретических методов в настоящий момент не представляется возможной. Очевидно, что в ячейке таких размеров нужно более аккуратно учитывать краевые

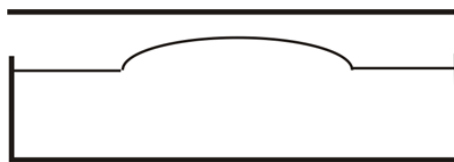


Рис. 10. схема ячейки из [23]

эффекты, связанные с тем, что поверхность заряжена неравномерно.

В главе 5 рассмотрена возможность существования у поверхности жидкого гелия устойчивых заряженных комплексов. Для более глубокого понимания природы многочисленных интересных явлений, которые демонстрирует система поверхностных электронов над жидким гелием, было бы полезно увеличивать массу электрона, что позволило бы рассматривать его как классическую частицу. Такую возможность дает взаимодействие электронов, формирующих двумерный электронный газ на поверхности жидкого гелия, или внедренных в его объем, с другими, заряженными или нейтральными частицами. При этом могут образоваться локализованные устойчивые комплексы.

В разделе 5.1 дан обзор работ, посвященных обоснованию возможности существования у поверхности жидкого гелия диполов и ионов большого радиуса [36]-[37].

Раздел 5.2 посвящен заряженным комплексам, которые образуют электроны с нейтральными частицами, внедренными в гелий. В последние годы интенсивно изучаются свойства атомов, молекул и кластеров небольшого размера в гелии, полученных методом лазерного распыления. Для более крупных частиц ($R > 50 \text{ \AA}$) существует хорошо разработанная экспериментальная методика внедрения в гелий через его поверхность [38, 39]. В связи с этим интересен вопрос о существовании вблизи поверхности гелия заряженных комплексов частиц, состоящих из электрона на поверхности гелия и макроскопического кластера (кристалла) под его поверхностью. Кроме того, теоретически возможным оказывается образование под поверхностью гелия заряженных кластеров, в которых электрон прижимается к нейтральной макроскопической частице силами поляризационного притяжения. Объекты такого рода образуют вблизи поверхности гелия двумерную систему, которая должна демонстрировать новые по сравнению с

двумерными электронами свойства.

В работе [7*] рассматриваются заряженные комплексы, состоящие из нейтральной частицы большого радиуса ($R > 50 \text{ \AA}$) и электрона, которые формируются под поверхностью гелия во внешнем электрическом поле силами поляризационного притяжения. При этом электрон локализуется вблизи поверхности частицы (рис. 11). Энергия связи электрона и нейтрального кластера достаточно велика ($\sim 0.1 - 1 \text{ эВ}$). Внешнее электрическое поле E_{ex} прижимает такие тяжелые заряженные объекты к поверхности гелия, где они образуют двумерную систему.

Равновесное расстояние между кластером и поверхностью гелия z_B^{opt} определяется минимумом потенциальной энергии, которая обусловлена внешним электрическим полем, действием сил изображения, возникающих из-за наличия границы раздела гелий-вакуум, силой гравитации (учет которой имеет смысл только для очень больших кластеров радиуса $R > 10^4 \text{ \AA}$) и потенциалом изображения дипольного момента кластера. Различают два случая: $e/R^2 \gg E_{ex}$ и $e/R^2 \ll E_{ex}$, соответствующие малым и большим размерам кластеров. Для первого случая при $E_{ex} = 3000 \text{ В/см}$ $R \ll 700 \text{ \AA}$, и при определении z_B^{opt} учитывается только внешнее поле и потенциал изображения заряда.

Для больших кластеров (в поле $E_{ex} = 3000 \text{ В/см}$ и $R \gg 700 \text{ \AA}$) следует учитывать диполь-дипольный потенциал изображения, возрастающий как R^6 . Условие $z_B^{opt} < R$, необходимое для существования кластера, выполняется для обоих случаев при достаточно больших внешних полях. Из того факта, что существует макроскопическое равновесное расстояние z_B^{opt} вытекает возможность формирования двумерной системы заряженных кластеров под поверхностью гелия. При низких температурах амплитуды колебаний тяжелых заряженных комплексов вблизи положения равновесия малы, и можно обсуждать вопрос о кулоновской кристаллизации кластеров. Вычисление энергии взаимодействия двух комплексов позволяет оценить температуру плавления кулоновского кристалла, которая оказывается довольно высокой: $T = 3 \text{ К}$. Для анализа устойчивости двумерной системы заряженных комплексов необходимо рассмотреть силы притяжения Ван-дер-Ваальса, действующие между ними. Расчет показывает, что

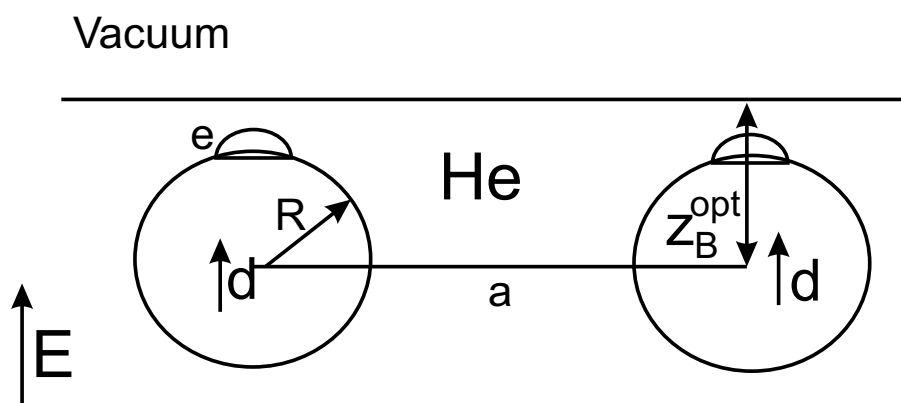


Рис. 11. система заряженных кластеров под поверхностью гелия

имеется большой интервал параметров, при которых в рассматриваемой 2D системе не происходит слипания кластеров.

Возможность существования связанных состояний электрона и макроскопического нейтрального кластера у поверхности жидкого гелия теоретически обоснована в работе [8*]. Показано, что в сильном электрическом поле такие связанные состояния реализуются даже для "гигантских" кристаллов размера $R \sim 10^3 \text{ \AA}$. Суть явления состоит в том, что поверхность гелия выступает для электрона и кластера в роли третьего тела, понижающего размерность задачи. Электрон не проникает в гелий, так как энергия его внедрения в жидкость очень велика: $V_0 \sim 1 \text{ eV}$, что отвечает пробойному электрическому полю $E_0 \approx 10^8 \text{ В/см}$. Кластер же удерживается жидкостью, т.е. отталкивается от ее поверхности силами Ван-дер-Ваальса. Оказывается, что при включении взаимодействия электрона и кластера в сильном электрическом поле существует эффект самолокализации. Положение кластера фиксируется на некотором расстоянии z_{B0} под поверхностью гелия, а движение электрона вдоль плоскости жидкости ограничено и носит осцилляторный характер (рис. 12).

Потенциальная энергия системы электрон+кластер складывается из потенциальной энергии электрона, потенциальной энергии кластера и энергии их взаимодействия. При расчете этих составляющих учитывались: эффект поляризации кластера электрическим полем и электроном, электростатическое отталкивание поляризованного кластера от поверхности, Ван-дер-Ваальсово взаимодействие кластера с поверхностью гелия, дополни-

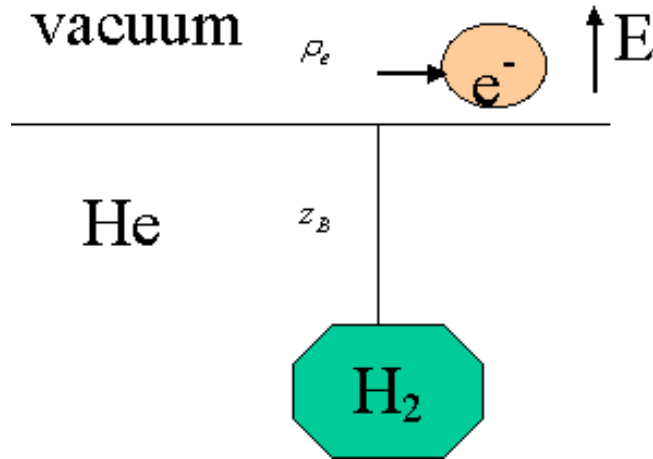


Рис. 12. система нейтральный кластер+электрон у поверхности жидкого гелия

тельная энергия электрона в поле, создаваемом поляризованным кластером. Решение задачи о движении электрона в адиабатическом приближении позволяет определить зависимость расстояние z_{B0} , соответствующее минимуму энергии системы, от внешнего поля

$$z_{B0} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{E}} \quad (39)$$

в единицах СГСЭ. Оценка энергии связи электрон-кластер дает $U_0 \sim 3 - 4K$ в полях $E \sim 3000 - 30000$ В/см для кластеров размеров $R_* \sim 100 - 500$ Å.

Интересен вопрос о критической концентрации описанных выше комплексов над поверхностью жидкого гелия. Максимальная поверхностная плотность свободных электронов над толстой пленкой гелия составляет $\sim 10^9$ электронов на квадратный сантиметр. При более высокой концентрации поверхность гелия линейно неустойчива. Эта неустойчивость связана с большой подвижностью электронов. Описанная выше система заряженных комплексов обладает значительно меньшей подвижностью, которая зависит от размера кластера и напряженности прижимающего поля. Механизм, приводящий к неустойчивости заряженной поверхности гелия при большой концентрации электронов может не работать или быть ослаблен в системе заряженных комплексов.

Основные результаты и выводы.

1. Предсказан и описан новый вид неустойчивости - тонкая пленка жидкости, удерживаемая на твердом потолке силами Ван-дер-Ваальса теряет устойчивость по отношению к малым колебаниям, когда ее толщина превышает критическое значение h_* .
2. Показано, что при толщине ограниченной инверсионной пленки большей критического значения h_* , происходит реконструкция - пленка переходит из плоского в устойчивое искривленное состояние. В центре ячейки образуется капля, амплитуда которой растет, а края утончаются с увеличением средней толщины слоя жидкости.
3. Построена теория метастабильных стационарных состояний сильно заряженных пленок жидкого водородорода с произвольным значением параметра d - расстояния между поверхностью жидкости и управляющим электродом. Показано, что теория возмущений не может объяснить возможность таких состояний в одномерном случае. Решение двумерной задачи показывает, что метастабильные состояния поверхности могут возникать в виде гексагональной структуры. Определены пределы изменения параметров d , и γ , в которых осуществляется реализация таких состояний.
4. Найдены решения нелинейного уравнения, описывающего стационарное состояние сильно заряженной, ограниченной и неограниченной поверхности водорода с малым значением параметра $d \ll a$, при условии сохранения полного объема жидкости. Показано, что состояния, описываемые такими решениями, неустойчивы.
5. Для ограниченной пленки, когда края жидкого слоя оказываются незаряженными, критические условия определяются двумя факторами: деформацией поверхности и развитием линейной неустойчивости малых колебаний. Показано, что критические условия для бесконечной и ограниченной пленок могут сильно различаться.
6. Описано поведение тонкой сильно заряженной пленки гелия ($d \ll a$), в условиях, когда жидкость вытекает из конденсатора конечных раз-

меров под действием сил электрического давления. Определены критические значения напряжения в конденсаторе, при котором поверхность теряет устойчивость, в зависимости от размеров ячейки.

7. Построена диаграмма стабильности многоэлектронной лунки на пленке гелия в условиях действия сил Ван-дер-Ваальса. Показано, что равновесная энергия лунки зависит от эффективной толщины пленки, но не зависит от числа электронов в ней.
8. Предложены и описаны новые объекты, существование которых возможно вблизи поверхности гелия при наличии электрического поля - заряженные комплексы и связанные состояния электрона и нейтрального кластера. Показано, что такие объекты имеют достаточно большую энергию связи и являются устойчивыми в широких диапазонах таких параметров как внешнее поле и размер частицы, внедренной в гелий.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих публикациях:

- [1*] V. Shikin and E. Lebedeva, Anti-Gravitational Instability of the Neutral Helium Film, *Journal of Low Temperature Physics*, **119** (3/4), 469 (2000).
- [2*] G.V. Kolmakov, E.V. Lebedeva, A.A. Levchenko, L.P. Mezhov-Deglin, and V.B. Shikin, Instability and Reconstruction of Thin Liquid Layer under Inverted Gravitational Conditions, *Journal of Low Temperature Physics*, **126** (1/2), 385(2001).
- [3*] G.V. Kolmakov, E.V. Lebedeva, A.A. Levchenko, L.P. Mezhov-Deglin, A.B. Trusov, and V.B. Shikin, Stationary nonlinear waves at the surface of a thin liquid layer under inverted gravitation conditions, *Low. Temp. Phys.* **30** (1), 58,(2004).
- [4*] Г.В. Колмаков, Е.В. Лебедева Длинноволновая структура на заряженной поверхности жидкости, *ЖЭТФ* **115**, 43, (1999).

- [5*] В.Б. Шикин, Е.В. Лебедева, Об устойчивости ограниченной, заряженной пленки гелия с металлической подложкой, ФНТ **24**, 299 (1998).
- [6*] В.Б. Шикин, Е.В. Лебедева, Многоэлектронные лунки на толстой пленке гелия, Письма ЖЭТФ **57**, 126 (1993)
- [7*] A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev, E.V. Lebedeva, and Peter Wyder, Various charged complexes at the surface of liquid helium, НАИТ Journal of Science and Engineering **1** (2), 297 (2004).
- [8*] Е.В. Лебедева, А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, Связанные состояния электрона и нейтрального кластера у поверхности жидкого гелия, ЖЭТФ **125**, 441 (2004).

Список цитированной литературы:

- [1] Я.Френкель ЖЭТФ , (1939), 641
- [2] N.Bohr, J.Wheeler Phys.Rev. **56**, 71, (1939).
- [3] Ya.Frenkel, Zs der Sowietunion **8**, 675, (1935).
- [4] Я.Френкель ЖЭТФ **6**, 347, (1936).
- [5] T.Tonks Phys. Rev. **48**, 562 , (1935).
- [6] Л.Горьков, Д.Черникова Письма ЖЭТФ **18**, 119, (1973).
- [7] Д. М. Черникова ЖЭТФ **68**, 250 (1975).
- [8] А.Володин, М.Хайкин, В.Эдельман Письма ЖЭТФ **23**, 524, (1976).
- [9] А.Володин, М.Хайкин, В.Эдельман Письма ЖЭТФ **26**, 707, (1977).
- [10] P.Leiderer Phys.Rev. **B 20**, 4511, (1979).
- [11] Л.Горьков, Д.Черникова ДАН СССР **228**, 829, (1976).
- [12] Д. М. Черникова ФНТ **6**, 1513, (1980).
- [13] P.Leiderer, M.Wanner Phys.Lett. **A 73**, 189, (1979).
- [14] M.Wanner, P.Leiderer Phys.Rev.Lett. **42**, 315, (1979).
- [15] G.Taylor, A.McEwan J.Fluid Mech. **22**, 1, (1965).
- [16] M.Cowley, R.Rosenswieg, J.Fluid Mech. **30**, 671, (1967).

- [17] В.Зайцев, М.Шлиомис ДАН **188**, 1261, (1969).
- [18] М.Шлиомис УФН **112**, 437, (1974).
- [19] Н.Ikezi Phys.Rev.Lett. **42**, 1688, (1979).
- [20] Н.Иногамов, А.Демьянов, Э.Сон "Гидродинамика перемешивания", Изд. МФТИ, стр. 464.
- [21] А.А. Levchenko, E. Teske, G.V. Kolmakov, P. Leiderer, L.P. Mezhov-Deglin, and V.B. Shikin, JETP Lett. **65**, 572, (1997).
- [22] Ya.I. Frenkel, Z. Eksp. Teor. Phys. **18**, 659, (1948); Ya.B. Aron, Ya.I. Frenkel, Z. Eksp. Teor. Phys. **19**, 807, (1949).
- [23] А.А. Levchenko, G.V. Kolmakov, L.P. Mezhov-Deglin, M.G. Mikhailov, and A.B. Trusov, Low Temp. Phys. **25**, 242, (1999).
- [24] E. Sabisky, E. Anderson, Phys. Rev. A **7**, 720 (1973).
- [25] S. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, North Holland Publish Company, New York, 1974.
- [26] Д. М. Черникова ФНТ **2**, 1374 (1976).
- [27] F. Peeters, Phys. Rev. **B 30**, 159, (1984).
- [28] В.В.Татарский ФНТ **10**, 435, (1984).
- [29] Вильк, Ю. Монарха ФНТ **10**, 901, (1984).
- [30] В.В.Татарский ФНТ **12**, 451, (1986).
- [31] Ю. Монарха, ФНТ **8**, 215, (1982).
- [32] Ю. Монарха, ФНТ **8**, 1133, (1982).
- [33] В.В.Татарский, Н. Шикина, В. Шикин, ФНТ **10**, 117, (1984).
- [34] A. Dahm, Zeitschrift fur Physik, **B 98**, 333.
- [35] В.Шикин, П. Лейдерер, ФНТ **23**, 624, (1997).
- [36] Ю.П. Монарха, Ю. З. Ковдря, ФНТ **8**, 215 (1982). (1979).
- [37] П.Д. Григорьев, А.М. Дюгаев, ЖЭТФ **115**, 593 (1999).
- [38] Л.П.Межов-Деглин, А.М. Кокотин, Письма в ЖЭТФ **70**, 744 (1999).
- [39] Л.П.Межов-Деглин, А.М. Кокотин, ФНТ **28**, 235 (2002).
- [40] P. Savich and A. Shalnikov, Journ. Phys. USSR **10**, 441 (1946).