III

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

1950

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА ССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ТОМ
III

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ
НАУК
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ ТРУДОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1950

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ ТРУДОВ

III

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФЕССОРА
С. М. РЫТОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1950

ОТ РЕДАКТОРА

В III том вошли материалы двоякого рода. Первую часть (статьи 57—69) составляют доклады Л. И. Мандельштама, популярные статьи, статьи методического характера и различные предисловия. Весь этот материал, расположенный в хронологическом порядке, уже был ранее опубликован. Вторую часть тома (статьи 70—75) составляют впервые публикуемые работы, найденные в архиве Л. И. Мандельштама и относящиеся к весьма различным периодам времени. Степень доработанности рукописей также очень различна.

Статьи 70, 71 относятся ко времени пребывания Л. И. Мандельштама в Одессе (см. примечания на стр. 328) и написаны начисто. Вступительная лекция (статья 72) относится к тому же периоду и тоже не потребовала доработки. Напротив, статьи 73—75, написанные Л. И. Мандельштамом частично во время эвакуации в Боровом, частично же — после возвращения в Москву, пришлось в значительной степени обработать (см. примечания на стр. 366 и 410).

57

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ [К РЕЧИ Ф. БРАУНА][1]

[Совм. с Н. Д. Папалекси]

Настоящая речь была произнесена проф. Брауном 11 декабря 1909 г. в Стокгольме при получении премии Нобеля. Речь сопровождалась пояснительными демонстрациями диапозитивов, с которых сделаны клише для помещенных в тексте рисунков. Первая часть представляет собою дословный перевод рукописи, в которую вошла речь в том виде, в каком она была произнесена, лишь с некоторыми незначительными дополнениями. Новой является вторая часть — „Дополнения и литература“ и вошедшие в нее рисунки.

В своей речи Браун касается многих вопросов, принципиально важных для рассматриваемых им областей. Обилие материала и ограниченность времени, естественно, обусловили некоторую сжатость изложения. Помещенные во второй части дополнения имеют целью пояснить некоторые вопросы, которые в речи были только затронуты.

Читателю, знакомому с основами физики и следившему за развитием беспроволочной телеграфии, не составит, по нашему мнению, труда следовать за изложением Брауна. Несмотря на это, мы считаем нелишним предпослать несколько вступительных слов.

Когда теперь говорят о беспроволочной телеграфии, то подразумевают обыкновенно определенный род телеграфии без проводов, а именно телеграфию при помощи электромагнитных волн. Осно-

---

1 Ф. Браун. Мои работы по беспроволочной телеграфии и по электрооптике. Пер. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Одесса, изд-во „Матезис“, 1910.

ванием ее служат следующие физические явления, открытие и разработка которых связаны с именами Фарадея, Максвелла и Герца.

Представим себе проводник, например проволоку, по которой протекают переменные токи большой частоты, т. е. токи, очень часто (например, несколько сот тысяч раз в секунду) меняющие свою силу и свое направление. Такой проводник излучает в окружающее пространство *электромагнитные* волны, подобно тому как быстро (несколько сот раз в секунду) колеблющееся тело излучает в окружающий воздух *звуковые* волны. Это сравнение должно, конечно, как всякое сравнение, служить только некоторой иллюстрацией: в данном случае оба сравниваемые процесса обладают также и существенными различиями. Но не всякий проводник, через который протекают токи высокой частоты, одинаково хорошо излучает электромагнитные волны. Излучательная способность зависит от его формы.

Мы можем представить себе это так: разобьем мысленно проводник на очень маленькие части, которые мы вправе рассматривать, как отрезки прямой. Излучение каждого такого прямолинейного элемента зависит от его длины, силы и частоты тока в нем и *ориентировки* по отношению к тому направлению, в котором мы рассматриваем излучение. Действие всего проводника складывается *геометрически* из действий отдельных элементов. С совершенно аналогичным *геометрическим* сложением мы имеем дело в оптике при вопросах так называемой интерференции света. Отсюда ясно, что замкнутый проводник, имеющий, например, форму кольца, петли или спирали, в большинстве случаев излучает сравнительно мало, так как в одной части его ток идет в одном направлении, а в другой — в тот же момент времени — в другом, так что действие одной половины отчасти уничтожает действие другой. Прямолинейная же проволока является, например, одной из форм проводника, обладающей большой излучательной способностью. Мы видим, таким образом, что недостаточно уметь возбуждать токи высокой частоты в проводниках вообще, но что нужно быть в состоянии возбуждать их в проводниках, обладающих особыми свойствами.

Рассмотрим теперь, как возбуждаются токи большой частоты. Если зарядить конденсатор, например лейденскую банку, до некоторой разности потенциалов и затем разрядить его через проводник, обладающий не слишком большим сопротивлением (например, через спираль из металлической проволоки), то в проводнике возникают переменные токи, частота которых зависит от емкости конденсатора и от самоиндукции проводника. Другими словами, заряд конденсатора при своем исчезании не постепенно убывает, как это можно было бы предположить, и ток течет не только в *одном* направлении, а происходит так называемый *колебательный* разряд.

Проведем следующую аналогию. Представим себе висящую вертикально спиральную пружину, неподвижно прикрепленную верхним концом к штативу. Подвесим к этой пружине груз; пружина несколько вытянется и придет в некоторое положение равновесия. Растянем пружину еще больше. Вся наша система обладает теперь некоторой потенциальной энергией, равной той работе, которую мы затратили на растяжение пружины, подобно тому как заряженный электричеством конденсатор обладает запасом электрической энергии. Отпустим пружину с прикрепленным к ней грузом: упругие силы пружины приведут груз в движение, сообщая ему все бо̀льшую и бо̀льшую скорость. Когда груз достигнет положения равновесия, движение его не прекратится. Наоборот, он имеет в этом месте наибольшую скорость: потенциальная энергия всецело перешла в кинетическую энергию груза. Груз будет продолжать двигаться дальше наверх до тех пор, пока вся его кинетическая энергия не истратится на подъем. Дальнейший ход явлений ясен: груз будет колебаться вертикально около своего положения равновесия, размахи колебаний будут постепенно уменьшаться благодаря неизбежному трению, пока, наконец, груз окончательно не успокоится в своем положении равновесия. Период колебаний тем больше, чем слабее пружина, т. е. чем больше растяжимость ее и чем больше масса груза. Уменьшение размахов колебаний, т. е. затухание колебаний, тем сильнее, чем больше трение и чем больше масса приводимого в движение воздуха, т. е. чем сильнее излучение воздушных волн.

Совершенно аналогично протекает колебательный разряд конденсатора. Электрическая энергия заряженного конденсатора переходит в магнитную энергию тока. В тот момент, когда конденсатор разряжен, ток наиболее силен. При своем исчезании он перезаряжает конденсатор, так что обкладка, заряженная первоначально положительно, приобретает отрицательный заряд и наоборот. После того как ток сделался равным нулю, разряд протекает в обратном направлении и т. д. Размахи колебаний, т. е. в данном случае амплитуды тока, постепенно уменьшаются, так как часть энергии тратится на нагревание проводника и на излучение электромагнитных волн. Эти потери совершенно аналогичны потерям от трения и от излучения воздушных волн в случае пружины. Большей или меньшей растяжимости пружины соответствует бо́льшая или меньшая емкость конденсатора, сила тока соответствует скорости груза. Подобно тому как кинетическая энергия груза равняется $\frac{1}{2} mv^2$, где v — скорость груза, а m — его масса, точно так же магнитная энергия тока равняется $\frac{1}{2} pi^2$, где i — сила тока, а p — некоторая величина, характерная для проводника и зависящая от его геометрических размеров и окружающей его среды. Эта величина называется *коэффициентом самоиндукции* или, просто, *самоиндукцией*. Коэффициент самоиндукции характеризует, если можно так выразиться, „электромагнитную инерцию" проводника. Период электрических колебаний τ в полном согласии с механической аналогией тем больше, чем больше емкость c и самоиндукция p, точнее: $\tau = 2\pi\sqrt{pc}$. Теория колебательного разряда конденсаторов была дана лордом Кельвином, а экспериментальное подтверждение ее — впервые Феддерсеном.

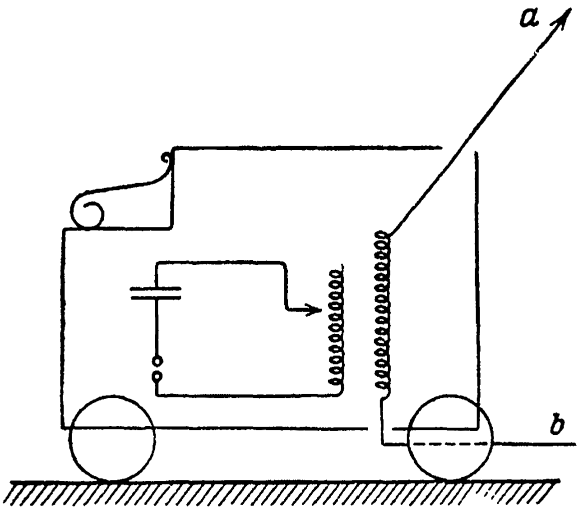


Рис. 1.

Итак, разряд конденсаторов дает нам средство возбуждать токи желаемой частоты. Заметим, что *до сих пор* это единственный практический способ для достижения тех периодов, которые употребляются на практике в беспроволочной телеграфии.[1] Только что рассмотренное нами расположение изображено, например, на рис. 1 посередине. Две параллельные черточки изображают здесь обе обкладки конденсатора, спиральная линия представляет проводник, обладающий самоиндукцией (стрелка, упирающаяся острием в спираль, обозначает подвижной контакт, позволяющий включать в цепь большее или меньшее число витков спирали и таким образом изменять самоиндукцию цепи), а маленькие кружки — шарики искрового промежутка. Достаточно, однако, взглянуть на рисунок, чтобы убедиться в том, что описанные схемы не обладают вторым необходимым свойством — излучательной способностью.

[1] Способ электрической дуги Дудделя — Паульсена пользуется тоже колебательным разрядом конденсаторов.

Действительно, обе обкладки конденсатора находятся весьма близко друг от друга. Это условие необходимо для достижения больших емкостей; емкость же должна быть возможно более велика, так как величина энергии, которой мы располагаем, прямо пропорциональна величине емкости.[1] По этим и иным соображениям, обкладки обыкновенных конденсаторов находятся весьма близко одна от другой. Отсюда ясно, что проводник, соединяющий одну обкладку с другой, необходимо должен иметь почти вполне замкнутую форму. Схему с таким проводником называют, поэтому, замкнутым колебательным контуром. Как мы видели выше, она именно вследствие своей замкнутой формы не пригодна в качестве рационального излучателя.

До сих пор мы ничего не сказали о значении искрового промежутка, играющего столь важную роль в технике возбуждения электрических колебаний. Дело в том, что теория построена в предположении, что искры нет; практически же ее пока избежать невозможно. Одна из главных задач беспроволочной телеграфии, разрешенная Брауном, заключалась в рациональном выключении вредных качеств искры. Неизбежность искры при вышеописанных явлениях разряда ясна из следующего соображения. Представим себе, что мы хотим разрядить заряженный до высокого напряжения конденсатор (электрическая энергия растет, как известно, прямо пропорционально квадрату разности потенциалов обкладок конденсатора и поэтому употребляемые на практике напряжения весьма велики). Мы соединяем один конец проводника, в котором должны возбудиться токи высокой частоты, с одной обкладкой и подносим другой конец к другой обкладке. Прежде чем нам, однако, удалось коснуться второй обкладки, между свободным концом провода и обкладкой необходимо проскакивает искра, так как никакой изолирующий слой, а тем менее воздух, при достаточно малой толщине не выдерживает высокой разности потенциалов, а разрывается (искровой разряд). Правда, искра соединяет свободный конец провода со второй обкладкой и дает возможность конденсатору разрядиться, но в то же время она *поглощает большую часть электрической энергии*. Из только что сказанного, между прочим, ясно, что нет надобности подносить один конец проводника к обкладке, а можно получить разряд гораздо более простым способом: достаточно соединить один конец проводника с одним полюсом искро-

[1] На практике увеличению емкости ставится предел между прочим растущим вместе с ней периодом колебаний.

вого промежутка надлежащей длины, другой полюс которого соединен с свободной обкладкой конденсатора, и затем увеличивать разность потенциалов соединенного с полюсами искрового промежутка (или с обкладками конденсатора) источника, дающего высокое напряжение, до тех пор пока не проскочит искра и не произойдет разряд. На практике пользуются почти исключительно этим способом. На рис. 2 параллельные стрелки *b*, ведущие от обеих обкладок конденсатора, изображают провода, при посредстве которых конденсатор заряжается индуктором, электрической машиной или другим источником, дающим высокое напряжение. Искровой промежуток представлен двумя кружочками.

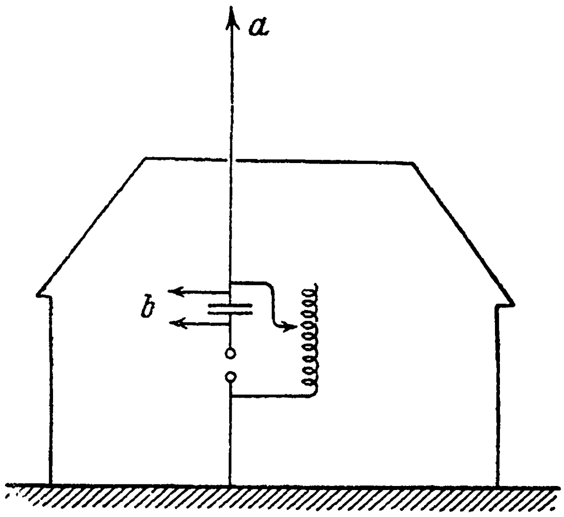


Рис. 2

Обратимся теперь ко второй задаче — к возбуждению электрических колебаний в проводах, обладающих большой излучательной способностью. Прототипом расположений, служащих для этой цели, является осциллатор Герца. Представим себе прямолинейный провод, прерванный посередине изолирующим промежутком, и зарядим одну половину положительно, а другую отрицательно. Перед нами теперь заряженный конденсатор некоторой емкости. Если разность потенциалов между обеими половинами сделать достаточно большой, то через изолирующий промежуток проскакивает искра и происходит разряд.

Мы можем применить к этому случаю, — по крайней мере, в отношении качественной стороны явлений — те же рассуждения, что и прежде, и приходим к заключению, что при известных условиях, и здесь происходит колебательный разряд. В количественном отношении такая „развернутая“ система отличается, конечно, от замкнутого колебательного контура. Там мы могли бы с большим приближением считать проводник, в котором возбуждаются колебания, свободным от емкости, так как его емкость мала по сравнению с емкостью конденсатора. Здесь же линейный проводник играет роль обкладок конденсатора и в то же время проводника, несущего ток: здесь емкость и самоиндукция непрерывно распределены по всей длине провода.

Это отличие влечет за собой и другое, весьма существенное: в замкнутом колебательном контуре в любой момент времени сила тока во всех точках проводника одна и та же, в линейном же проводе сила тока в данный момент различна для различных точек. Она постоянно равняется нулю на концах проводника (в узлах) и имеет максимальное значение в середине (в пучности). Иллюстрацией того, как распределяется сила тока в таком проводнике, может служить колеблющаяся струна. Подобно струне, линейный проводник может колебаться в основном тоне, представляя собой в этом случае полволны, или в обертонах. Так как скорость распространения электрических магнитных колебаний в линейных проводах приблизительно равна скорости распространения электрических магнитных волн в свободном пространстве, т. е. 300 000 000 м/сек, то число электрических колебаний для линейного провода, колеблющегося в основном тоне, равняется числу 300 000 000, деленному на двойную длину провода, выраженную в метрах. Итак, мы видим, что в линейном проводе возникают переменные токи большой частоты. Нетрудно убедиться, что в таком колеблющемся в основном тоне проводнике в каждый момент времени ток имеет во всех точках одно и то же направление, подобно тому как скорости *всех точек* колеблющейся в основном тоне струны направлены в одну и ту же сторону. Действия отдельных элементов проводника на отдаленную точку пространства взаимно усиливаются; линейный проводник обладает, таким образом, хорошей излучательной способностью. Вследствие сравнительно малой емкости развернутой системы энергия, могущая быть превращена в токи высокой частоты, а следовательно, излучаться, вообще говоря, невелика.

Мы можем теперь охарактеризовать значение работ Брауна, открывших новые пути для беспроволочной телеграфии, следующим образом.

Браун пришел к убеждению, что задача создать мощный передатчик распадается на две отдельные задачи: на задачу получения мощных токов высокой частоты и на задачу достижения рационального излучения электромагнитных волн. Передатчик представляет собой хороший излучатель, в качестве же *генератора* (производителя) токов высокой частоты она мало пригодна. Нужно сначала получить мощные токи *вне* антенны и затем поставлять эти токи антенне, предоставив ей исполнять свои функции: излучать электромагнитные волны. Простой передатчик (рис. 2) нерационален, поскольку антенна несет функцию как генератора, так и излучателя. В качестве генератора Браун ввел замкнутый колебательный контур. Получающиеся в нем переменные токи передаются антенне, например, следующим образом. Самоиндукция колебательного контура состоит из первичной обмотки трансформатора (без железного сердечника). Один конец вторичной обмотки соединяется с воздушным проводом, другой заземлен или соединен с противовесом — трансформаторное соединение. Схема такого сложного передатчика изображена на рис. 1.

Одним из существенных преимуществ такого разделения функций является возможность уменьшить вредное влияние искры. Как мы видели, искра в настоящее время практически неизбежна в *генераторе;* в расположении Брауна она находится в замкнутом контуре. Здесь она значительно менее вредна, чем в антенне. Представление, руководившее Брауном при создании его схем, было следующее. После разрыва искрового промежутка в замкнутом контуре возникают быстрые электрические колебания. Эти колебания передаются антенне. Через некоторое время бо́льшая часть энергии находится в ней. Обратно в замкнутый контур энергия переходить не будет, так как искра потеряет свою способность проводить. Начиная с этого момента, ее вредное влияние прекратится.

Опытные исследования Брауна и его учеников показали, что это представление не вполне соответствует действительности. Искры обыкновенных размеров (например, свыше 1 мм) сохраняют сравнительно долго свою проводимость; несмотря на это, вредное влияние искры в замкнутом контуре несравненно меньше, чем в антенне.

В 1906 г. М. Вин нашел, что предположенной Брауном способностью отрывания обладают *маленькие* искры (0.3 мм и меньше).

Скажем еще несколько слов о приемнике. Здесь, как и в передатчике, задача распадается на две: нужно сначала уловить электромагнитные волны, а затем превратить их в доступный наблюдению другой вид энергии. Соображения, совершенно аналогичные приведенным на стр. 8, при рассмотрении излучающей способности проводников, показывают, что проводник, обладающий хорошей способностью улавливать электромагнитные волны, должен удовлетворять тем же условиям, что и проводник с хорошей излучательной способностью. Таким образом, мы имеем на приемной станции прежде всего заземленную антенну. Возбужденные в ней падающими на нее электромагнитными волнами колебания поставляются при помощи колебательных контуров, подобранных соответственным образом, так называемому детектору. В нем происходит трансформация энергии токов высокой частоты, недоступной непосредственному наблюдению, в другую, удобную для наблюдения форму. Одним из первых детекторов был так называемый когерер. Когерер представляет собой трубку из изолирующего материала, в которой между двумя металлическими проводами, служащими электродами, находятся металлические опилки. В обыкновенном состоянии такой когерер практически не проводит тока. Если же он подвергается действию возбужденных в антенне токов, то он делается хорошим проводником.

Приемный аппарат состоит из следующих частей: из гальванического элемента, реле и когерера. Как только когерер становится проводящим, якорь реле притягивается, замыкая другую электрическую цепь, в которой находятся гальванические элементы, пишущий аппарат Морзе и ударник. Этот последний, ударяя по когереру, приводит его в первоначальное непроводящее состояние — декогерирует — и делает его готовым к приему нового сигнала. Комбинация воздушного провода с когерером, реле, ударником и регистрирующим аппаратом была впервые употреблена [для приема электромагнитных колебаний] Поповым.

С течением времени были введены новые виды детекторов, каковы, например, магнитный детектор, электрический детектор Шлёмильха и т. д. и, наконец, новый класс так называемых термодетекторов, введенных Брауном.

Дадим краткое описание одного из таких термодетекторов, например детектора из сернистого свинца. Отполированная поверхность кристалла сернистого свинца служит одним электродом, штифтик из графита, прижатый острием к полированной поверхности, — другим электродом. Переменные токи антенны поставляются этому детектору подобно тому, как в описанном выше случае когереру. Приемный же аппарат состоит здесь из детектора и телефона, причем нет надобности в особом гальваническом элементе. Всякий раз, как в антенне приходящей группой электромагнитных волн возбуждаются переменные токи, они передаются детектору, а в ответвленном от него телефоне слышен „толчок“. Такой детектор, очевидно, превращает переменные токи высокой частоты, на которые телефон не реагирует, в токи одного направления, которые, суммируясь, дают вышеописанный толчок.

До сих пор не удалось еще окончательно выяснить: происходит ли это превращение благодаря термоэлектрическим свойствам детектора, или же детектор действует здесь подобно клапану, пропускающему ток только в одном направлении. Возможно также, что оба действия соединяются вместе или же что здесь мы имеем дело с каким-нибудь иным явлением.

Только что описанный способ приема называется слуховым приемом или приемом на слух. Огромным преимуществом такого приема является бо̀льшая сравнительно с когерером чувствительность, а также его бо̀льшая простота — нет ни реле, ни ударника, ни пишущего аппарата. Недостатком является отсутствие возможности вызвать станцию в том случае, если телеграфист на ней не держит телефона у уха. В последнее время удалось, однако, построить специальные аппараты для вызова. Отсутствие возможности контроля при приеме на слух (тогда как при приеме на пишущем аппарате Морзе остается лента с знаками) считалось долгое время крупным недостатком. Опыт, однако, показывает, что надежность приема на слух, повидимому, не только не уступает, но даже превышает надежность приема на ленту, причем число принимаемых в минуту слов значительно больше. На многих станциях поэтому прием на ленту совершенно упразднен. Между прочим аналогичная тенденция наблюдается также и на обыкновенных телеграфах. Успехи, достигнутые при приеме на слух в связи с системой звучащих искр, изложены в примечании 35 („Дополнения и литература").

Вторая часть речи Брауна отведена главным образом описанию им своих опытов по электрооптике. Довольно обширные примечания к этой части ценным образом дополняют и поясняют ее.

Настоящее вступление отличается схематичностью изложения. Специалист, для которого сама речь представляет много интересного и оригинального, в нем, конечно, не нуждается. Нашей целью было только напомнить читателю некоторые общие термины и положения. Мы надеемся, таким образом, устранить те трудности, которые могут встретиться неспециалисту при чтении этой речи, заслуживающей, по нашему мнению, общего интереса.

58

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ В БЕСПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИИ

[„Природа", № 2, 147—186, 1916]

Несмотря на то, что беспроволочная телеграфия, как область электротехники, еще очень молода, успехи ее за этот короткий промежуток времени громадны.

Успехи достигнуты, несомненно, благодаря тесному сотрудничеству науки, опытной и теоретической, с одной стороны, и техники — с другой. Лабораторная и теоретическая разработка выяснила физическую сторону относящихся сюда явлений, техника применяла и совершенствовала полученные результаты. Обе стороны одинаково важны и в одинаковой мере способствовали и способствуют общему развитию занимающей нас области.

Физические явления, лежащие в основе беспроволочной телеграфии, весьма разнородны, и поэтому удобно их так или иначе классифицировать. Мы это можем сделать, обращаясь, например, к самому процессу телеграфирования.

Чисто схематически телеграфирование без проводов представляется в следующем виде. На станции отправления, в ее воздушном проводе, или „антенне", возбуждаются электромагнитные колебания или, точнее, переменные токи большой частоты. Часть возбужденной в антенне энергии излучается в окружающее пространство в виде электромагнитных волн. Эти волны, распространяясь от передатчика по всем направлениям, достигают до воздушного провода приемной станции. Тогда в этом проводе возникают, в свою очередь, переменные токи. При помощи включенных в воздушный провод приемника аппаратов эти токи тем или иным способом воспринимаются.

Раз такая связь между станцией отправления и приемной станцией установлена, то тем самым, конечно, дана возможность телеграфирования, т. е. передачи букв, слов и т. д.; известные условные комбинации более долго длящихся сигналов, так называемых „тире", с короткими „точками" означают различные буквы. В беспроволочной телеграфии принят тот же шрифт, что и в обыкновенной, так называемый шрифт Морзе.

Сообразно со сказанным весьма удобно различать при телеграфировании без проводов три отдельных процесса: возбуждение электромагнитных колебаний; излучение их; прием.

Цель настоящей статьи не заключается в том, чтобы дать систематический обзор физической стороны беспроволочной телеграфии вообще. По нашему мнению, беспроволочная телеграфия вышла из той стадии, когда такого рода обзор, в рамках журнальной статьи, является целесообразным. Мы хотим посвятить последующие страницы *одной определенной* группе вопросов, имеющей весьма важное практическое и теоретическое значение и представляющей самостоятельный интерес. Мы имеем в виду вопрос об *излучении электромагнитных колебаний* в условиях беспроволочной телеграфии.

Практическое значение этого вопроса очевидно. Излучение является звеном, связывающим передачу с приемом. Поэтому ясно, что, для того чтобы иметь возможность заранее учитывать действие наших установок, например радиус действия станции и т. д., мы должны знать законы, которым излучение подчиняется; громадная же практическая ценность такой возможности не нуждается, конечно, в пояснении.

Но и с чисто научной стороны излучение электромагнитных волн антенной представляет несомненный интерес. Правда, мы здесь имеем дело с явлениями, принципиально не новыми. Не говоря уже о классических работах Герца и последующих исследователей в области собственно электромагнитных колебаний, вспомним, что ведь и световые волны суть волны электромагнитные. Таким образом, вся оптика есть не что иное, как учение об электромагнитном излучении.

И если, несмотря на это, излучение волн антенной представляет самостоятельный интерес, то это объясняется тем, что условия, при которых происходит излучение здесь, существенно отличаются от тех, с которыми приходилось иметь дело до сих пор. Благодаря этому в беспроволочной телеграфии возникают новые, до этих пор неизвестные явления. Больше того, осуществляя соответственные условия в области чистой оптики, мы и там наталкиваемся на новые факты.

Итак, мы не преувеличивая можем сказать, что вопросы об излучечении принадлежат к наиболее важным в беспроволочной телеграфии.

К сожалению, как теоретическая, так и опытная обработка этих вопросов наталкивается на большие трудности, так что в настоящее время мы еще далеки от сколько-нибудь общего их решения.

И все-таки мы считаем изложение уже добытых результатов вполне своевременным. При этом мы руководимся следующими соображениями. Во-первых, тем, что во всяком вопросе, имеющем самостоятельную ценность, интересны не только окончательные выводы, но интересен и тот путь, которым идет исследование, методы, которыми пользуются, встречаемые затруднения и способ их преодоления и т. д. В этом же направлении, в вопросе об излучении, особенно за последние годы, сделаны действительно большие успехи. Во-вторых, в нашем случае теория развивалась не абстрактно, а шла рука об руку с практикой, так что все ее отдельные этапы связаны с выяснением тех или иных важных практических задач. Сюда относятся, например, вопросы о горизонтальных и вертикальных антеннах, о направленной телеграфии, о телеграфии по морю и суше и т. д.

Приступая теперь к нашей теме, мы, сообразно с вышесказанным, оставим в стороне вопросы, касающиеся возбуждения колебаний. Другими словами, мы принимаем за данное, что возбуждать колебания мы умеем. Ссылаться на какие-нибудь специальные положения из этой области нам, впрочем, не придется.

Но прежде всего что подразумевают под термином „электромагнитные колебания“?

Чтобы ответить на этот вопрос, начнем несколько издалека. Если по проводнику, например по медной проволоке, течет ток, постоянный по силе и направлению, то, как известно, в самом проводнике и во всем окружающем его пространстве действуют магнитные и электрические силы, также постоянные по величине. В этом смысле говорят, что все пространство представляет собой постоянное электромагнитное поле. Если ток не постоянен, а только сила его или и сила и направление с течением времени меняются, то эти изменения, конечно, отражаются на всем поле. Теперь мы можем ответить на поставленный вопрос так: электромагнитными колебаниями (в широком смысле этого слова) называют всю совокупность явлений в непостоянном электромагнитном поле. Заметим, впрочем, что в употреблении этого термина на практике поступают часто непоследовательно. Так, например, употребляют его как синоним непостоянного тока. Говорят: возбудить в проводе электромагнитные колебания или возбудить ток и т. д.

Очень важную роль в применениях играет особый вид непостоянного тока, так называемый переменный ток. Этим именем называют такой ток, который меняет свою величину и направление *периодически*. Графическое изображение такого тока дано на рис. 1. В качестве абсциссы нанесено время, ординатами служат сила тока в данный момент. Максимальное значение тока (на рисунке величина AB) называется его амплитудой. Дальнейшей характерной особенностью переменного тока является частота, с которой он меняет силу и направление, или число колебаний в секунду. Время одного колебания (на рисунке — отрезок ab) называется его периодом. Токи, вырабатываемые нашими центральными станциями, например для освещения городов, имеют сравнительно малое число колебаний, обыкновенно около 50 в секунду. В беспроволочной телеграфии употребляют токи значительно большей частоты, и притом число колебаний здесь, в зависимости от различных обстоятельств, различно. В общем оно колеблется между 100 000 и миллионом, причем бывает отклонение в ту и другую сторону.

Рис. 1. Кривая переменного тока

Вопросы терминологии, о которых только что шла речь, могут показаться несколько формальными, и, пожалуй, чересчур элементарными. Однако в данном случае выяснение их является не совсем излишним, и вот по какой причине. Почти всегда, когда идет речь о колебаниях малой частоты, т. е. таких, с которыми работает обыкновенно электротехника, например, при освещении, при приводе в движение моторов и т. д., говорят о переменном токе и лишь очень редко пользуются здесь термином „электромагнитные колебания“. Наоборот, в беспроволочной телеграфии почти исключительно говорят об электромагнитных колебаниях. Таким образом, создается впечатление, что мы имеем дело с двумя принципиально различными явлениями. Между тем, в действительности такого различия нет. Явление, конечно, в широком смысле одно и то же. Но нас интересуют различные стороны его. В первом случае нам важна передача энергии вдоль проводов, а затем утилизация ее. В беспроволочной телеграфии задача другая. Здесь важно, говоря несколько образно, чтобы энергия отделилась от проводника — нам важно ее излучение. Но сила излучения, как мы увидим дальше, зависит от частоты тока. Она равна нулю при постоянном токе и возрастает, во всяком случае в известных пределах, с увеличением частоты. Поэтому беспроволочная телеграфия есть область применения токов большой частоты.

После этих общих замечаний перейдем к более детальному рассмотрению интересующих нас явлений. Мы поставим себе прежде всего задачу — проследить, в чем заключается различие между полем постоянного и переменного тока, и выяснить, какие свойства этого последнего делают его пригодным для беспроволочной телеграфии.

Итак, предположим сначала, что по нащему проводнику течет постоянный ток. В пространстве, как бы далеко от проводника мы ни находились, существуют магнитные силы. Казалось бы, налицо все данные для телеграфирования при помощи постоянного тока. Для этого нужно только поместить на приемной станции прибор, реагирующий на магнитную силу, и связь между приемником и передатчиком будет установлена. И действительно, такое телеграфирование возможно, но только на маленькие расстояния. Дело в том, что поле постоянного тока чрезвычайно быстро убывает по мере удаления от проводника, так что на более или менее значительных расстояниях сила поля настолько мала, даже при самых сильных токах и больших размерах цепи, что ни один из находящихся в нашем распоряжении аппаратов и не в состоянии на нее реагировать.

Чтобы найти силу магнитного поля данного проводника в какой-нибудь точке пространства, мы можем поступить так: разобьем мысленно весь проводник на очень маленькие части, которые мы в праве рассматривать как отрезки прямой. Закон Био-Савара[1] дает возможность вычислить магнитную силу, порожденную каждым таким элементом в отдельности. Затем, складывая все вычисленные этим путем элементарные поля по правилу параллелограма сил, мы найдем поле всего проводника. Мы не станем подробно разбирать простого по форме закона Био-Савара; напомним только,

[1] Введем обозначения: i — сила тока, l — длина элемента, r — радиус-вектор, соединяющий элемент с точкой O, в которой ищется поле, d — угол между l и r, H — сила магнитного поля в O. Тогда закон Био-Савара устанавливает, как известно, следующую зависимость: $H = \frac{i}{r^2} l \sin d$; направление H дается известным правилом буравчика.

что сила магнитного поля в какой-нибудь точке, соответствующая одному отрезку, обратно пропорциональна квадрату расстояния точки от отрезка.

Применяя же закон Био-Савара к геометрически замкнутому контуру (а постоянный ток только в таком контуре и может течь), мы найдем, что здесь сила поля изменяется еще скорее, а именно: обратно пропорционально третьей степени расстояния от проводника. Конечно, последняя зависимость верна только в отдаленных точках. Вблизи, ввиду того что контур имеет некоторую протяженность, „расстояние от проводника“ не имеет смысла, так как оно вообще неопределенно. В отдаленных же точках эта неопределенность, во всяком случае практически, отпадает. Мы не будем сейчас останавливаться на обосновании этой зависимости. Для нас важен результат: поле постоянного тока убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния.

Перейдем теперь к рассмотрению поля переменного тока, причем согласно со сказанным выше, вопрос о том, как возбуждаются такие токи, мы оставим в стороне. Мы опять займемся сперва полем одного прямолинейного элемента. Чтобы перейти от постоянного тока к переменному, казалось, проще всего предположить следующее: все поле, как целое, следует за изменениями тока. Другими словами, во всех точках силы увеличиваются и уменьшаются одновременно с увеличением и уменьшением самого тока, причем их пространственное распределение, или, вернее, — так как силы переменны, — распределение их *амплитуд* остается тем же, что и при постоянном токе. Тогда здесь мог бы быть опять применен закон Био-Савара, и все сделанные нами выводы остались бы и здесь в силе. Приблизительно так смотрели на этот вопрос в прежние времена. Теперь мы знаем, что дело обстоит совершенно иначе. Мы знаем, что всякое электромагнитное возмущение распространяется в мировом пространстве или, если угодно, в эфире, правда с большой, но вполне определенной скоростью. Эта скорость равна скорости света, т. е. 300 000 км/сек. А если это так, то предположение, что изменению тока соответствует изменение электромагнитных сил, одновременное во всех точках пространства, не может быть верным. Нужно время, чтобы отдаленные точки „почувствовали“ происшедшее изменение тока. Другими словами, изменение электромагнитных сил в отдаленных точках должно во всяком случае запаздывать относительно тока, и это запаздывание должно быть тем более, чем точка отдаленнее.

Итак, непосредственный переход от постоянного тока к переменному невозможен, ввести простую поправку на запаздывание тоже не удается, нам поэтому не остается ничего другого, как изучить поле переменного тока само по себе.

Рассмотрим сперва распространение электромагнитных возмущений в одном частном случае, отличающемся большой простотой и наглядностью. Предположим, что мы замкнули ток на чрезвычайно короткое время и сейчас же его опять разомкнули. За это время поле успеет распространиться лишь на небольшое расстояние. Этим импульсом мы создали, таким образом, местное ограниченное возмущение. Пусть область возмущения имеет первоначально форму шара, как это указано на рис. 2. Далее это возмущение предоставлено самому себе. Что произойдет? Возмущение будет распространяться во все стороны со скоростью света. Это значит: через некоторое время электромагнитное поле будет находиться уже не в области A, а будет занимать шаровой слой C, равный по *толщине* диаметру A, причем радиус этого шарового слоя растет со скоростью света, или, иными словами, радиус слоя, в котором в данный момент находится поле (мы предполагаем толщину слоя настолько малой, что можно говорить о радиусе всего слоя), равен времени, протекшему с момента возбуждения, помноженному на скорость света. Во всех точках, лежащих в данный момент внутри слоя, *уже* нет поля, во всех внешних точках его *еще* нет. Полем захвачены только точки самого слоя. Конечно, постепенно все точки пространства захватываются полем, но только на время прохождения толщины слоя.

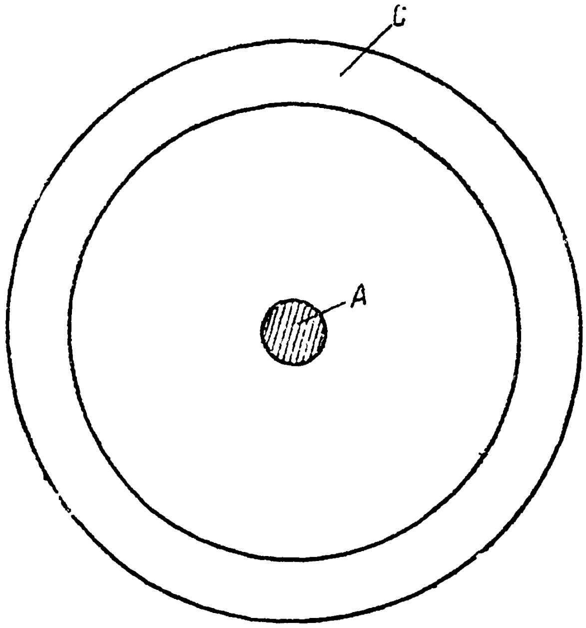


Рис. 2. Схема шаровой волны

Распространяясь все дальше и дальше, электромагнитные силы уменьшаются. Чтобы уяснить себе точнее, как идет это уменьшение, мы остановимся на момент на понятии об электромагнитной энергии, понятии, имеющем, между прочим, капитальное значение во всех вопросах, связанных с электромагнитными явлениями.

Из опыта известно, что когда магнитные и электрические силы пропадают, когда поле, как говорят, спадает, взамен возникает какой-нибудь из известных нам видов энергии, например в проводнике развивается теплота. И вот, чтобы удовлетворить закону сохранения энергии, каждому электромагнитному полю приписывают некоторую особенную электрическую и магнитную энергию и считают, что, когда поле пропадает, эти энергии превращаются в другой род, например в энергию тепловую. Кроме того, магнитная энергия может, конечно, превращаться в электрическую и обратно. Электрическая и магнитная энергии выражаются очень просто через соответственные силы: плотность магнитной энергии, т. е. энергия, заключенная в единице объема, пропорциональна квадрату магнитной силы; то же соотношение существует и между электрической силой и электрической энергией.

Вернемся теперь к нашему случаю. В предоставленном самому себе электромагнитном возмущении общее количество энергии не может ни увеличиваться, ни уменьшаться, так как превращения в другой род энергии здесь не происходит. Но объемы шаровых слоев, занимаемых последовательно полем (ввиду того, что толщина слоя остается неизменной), относятся между собой, как квадраты радиусов. Значит, плотность энергии убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Далее, мы знаем, что плотность энергии прямо пропорциональна второй степени магнитных и электрических сил. Если мы еще прибавим, что вся энергия распределяется равномерно на электрическую и магнитную, то станет очевидным, что сами эти силы убывают обратно пропорционально *первой* степени расстояния.

Резюмируя изложенное, мы можем сказать так: импульс порождает изолированную электромагнитную волну, уносящую с собой энергию первоначального возмущения. Эта волна распространяется со скоростью света, причем электромагнитные силы убывают *обратно пропорционально расстоянию.*

Мы здесь имеем дело с типичным процессом излучения.

Но нас интересует, главным образом, излучение не одного изолированного импульса, а излучение, сопровождающее периодически изменяющийся ток. Мы предпослали этому случаю разбор изолированной волны оттого, что здесь особенно наглядно иллюстрируются характерные особенности всех процессов излучения — скорость распространения и движения энергии. Эти понятия в общем случае далеко не так просты. Так, например, само понятие „скорость распространения“ требует в различных случаях различного определения

Но мы на этих общих вопросах останавливаться не будем, а перейдем прямо к изучению излучения проводника, питаемого переменным током.

Подробное изучение этого случая приводит к следующему результату. В каждой точке поле может быть разложено на две части. Одна по распределению амплитуд не отличается от поля постоянного тока, только в различных точках колебание происходит с указанным запаздыванием. Вторая часть всецело специфична для переменного тока. Ею мы займемся подробнее.

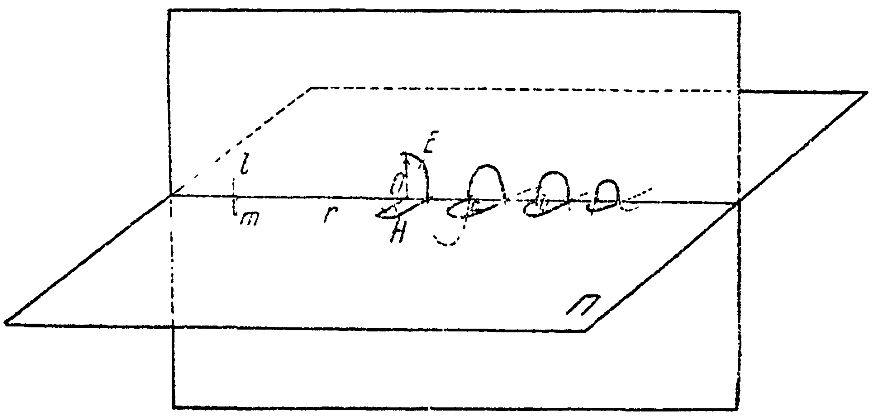


Рис. 3. Распределение электрических и магнитных сил

Представим себе, что в какой-нибудь определенный момент мы зафиксировали поле. Исследуя электрические и магнитные силы в некоторой точке O (рис. 3; излучающий элемент проводника lm расположен вертикально), мы найдем следующее: электрическая сила лежит в плоскости, проходящей через проводник и точку O (в данном случае в вертикальной), и ее направление перпендикулярно к расстоянию от O к lm, или, как говорят, к радиусу-вектору. Направление магнитной силы перпендикулярно как к радиусу-вектору, так и к электрической силе. Соответственные направления указаны на чертеже стрелками (E — электрическая, H — магнитная силы).

Исследуя далее силы в различных точках пространства, лежащих на равном расстоянии от источника, но в различных направлениях, мы найдем, что как электрические, так и магнитные силы тем меньше, чем меньше угол, образуемый радиус-вектором с направлением отрезка проводника (в данном случае — с вертикалью). Обе силы пропадают совсем в точках, расположенных на продолжении lm. В этом направлении элемент, значит, не излучает. Вернемся в точку O

и будем двигаться в нашем, мысленно зафиксированном поле по радиусу-вектору, удаляясь от источника. Мы увидим, что как электрические, так и магнитные силы периодически увеличиваются и уменьшаются. Наряду с этим периодическим изменением наблюдается, по мере удаления от источника, и постепенное, равномерное уменьшение амплитуд, а именно: *амплитуды обратно пропорциональны расстоянию от источника.* Такова картина пространственного распределения поля в какой-нибудь момент времени. Графическое изображение его вдоль направления, лежащего в экваториальной плоскости, данное на рис. 3, вряд ли нуждается в дальнейшем пояснении.

Исследуя теперь, как изменяется поле в какой-нибудь определенной точке со временем, мы найдем, что все силы колеблются с тем же периодом, что и сам ток, причем в различных точках колебания происходят опять не одновременно, а с запаздыванием, обусловленным скоростью распространения. Если, например, в данный момент в некоторой точке силы имеют максимальное значение, то в точке, лежащей дальше от источника, силы еще не достигли максимума. Там он будет достигнут несколько позже, а именно — через то время, которое нужно, чтобы двигающийся со скоростью света максимум прошел расстояние от первой точки до второй. Говоря коротко, мы здесь имеем дело с типичными поперечными шаровыми волнами, распространяющимися со скоростью света. Так как здесь дело идет об электромагнитных силах, то и все явление получило название „распространения электромагнитных волн“. Ввиду того что электрические и магнитные силы в какой-нибудь точке имеют все время одно и то же направление, говорят, что колебания „поляризованы“. Плоскостью поляризации считают плоскость *П*. Подобно тому как в случае изолированной волны, так и здесь часть энергии тока уносится волнами в пространство.

Как известно, длиной волны называется расстояние между двумя, находящимися на одном радиусе-векторе, последовательными максимумами (на рис. 3., отрезок ab). При всяком волнообразном движении между длиной волны, периодом колебания и скоростью распространения существует зависимость

$$\text{длина волны} = \text{скорость} \times \text{период}.$$

В нашем случае скорость нам известна. Она равна скорости света, т. е. 300 000 км/сек. Значит, по данному периоду можно вычислить длину волны и обратно. Мы, таким образом, найдем, например, что току с 50 колебаниями в секунду соответствует длина волны в 6000 км, току с миллионом колебаний — волна в 300 м и т. д.

Итак, все поле переменного тока состоит из двух частей. Одна быстро убывает с расстоянием, это та, которая сближает этот случай с постоянным током. Назовем ее квази-постоянным током. Другая, подробно нами рассмотренная, называемая иногда полем волновой зоны, убывает значительно медленнее. Вблизи от источника будет, следовательно, преобладать первая, в то время как в далеких расстояниях — вторая. Но что значит близко и далеко? Указания такого рода имеют, конечно, точный смысл только тогда, когда указана та мера, с которой сравнивают. Здесь этой мерой служит длина волны. Мы можем теперь сказать так: на расстояниях, малых по отношению к длине волны, преобладает квази-постоянное поле, на расстояниях же, превышающих длину волны во много раз, мы имеем дело с чистыми электромагнитными волнами. Оказывается дальше, что сила квази-постоянного поля или его амплитуда не зависит от периода колебаний. Отсюда следует, что амплитуда волн в какой-нибудь точке, или излучение, тем сильнее, чем короче волна, или, что совершенно то же самое, чем быстрее колебания.[1]

Какое громадное практическое значение имеет медленное убывание амплитуды волн сравнительно с быстрым убыванием поля постоянного, или, что практически то же самое, очень медленно переменного тока, показывает следующий пример. Возьмем сначала проводник — антенну, питаемую переменным током, скажем с 200 000 колебаниями в секунду. Длина волны равна, следовательно, 1500 м. Пусть на расстоянии 5 км, т. е. практически в волновой зоне, амплитуда магнитного поля будет равна некоторой величине; назовем ее H. Какова сила поля на расстоянии 500 км? Так как мы знаем, что амплитуда волн обратно пропорциональна расстоянию, то, очевидно, что искомая амплитуда равна $H/100$.

Противопоставим теперь этому случаю случай с постоянным током. Выберем проводник таких размеров и возьмем ток такой силы, чтобы на расстоянии 5 км магнитное поле имело ту же величину, что и в первом случае, т. е. было равно H. Как велико теперь

---

[1] Сохраняя обозначения (ср. примечание на стр. 21) с той только разницей, что теперь i и H обозначают *амплитуды* тока и поля, и вводя для длины волны обозначение λ, можно выразить приведенные результаты так: вблизи от источника: $H = \frac{i}{r^2} l \sin d$; в волновой зоне: $H = \frac{2\pi i}{\lambda r} l \sin d$.

поле на 500 км? Здесь при постоянном токе сила поля, как мы знаем, обратно пропорциональна третьей степени расстояния. Значит, на расстоянии 500 км она будет $H/1\,000\,000$, т. е. в 10 000 раз меньше, чем в первом случае!

Этот пример достаточно ясно иллюстрирует преимущество работы с электромагнитными волнами.

В заключение этих рассуждений приведем механический пример, представляющий собой, правда, лишь весьма грубую аналогию с интересующими нас явлениями, но отличающийся зато большой наглядностью. Представим себе довольно тяжелую, весьма длинную веревку, укрепленную одним концом, скажем, где-нибудь в стене. Возьмем другой конец в руку так, чтобы вся веревка провисла не касаясь земли. Если теперь в какой-нибудь точке, несколько удаленной от нас, веревка обо что-нибудь зацепилась, то нам не всегда удастся освободить ее тем, что мы приподнимаем, даже сравнительно высоко, наш конец. Ближайшие к концу части, следуя за рукой, отклоняются от первоначального положения кверху, но чем дальше находится точка от нас, тем меньше она отклонится, и это отклонение убывает так быстро, что уже на небольшом расстоянии веревка останется практически в покое. Но если мы вместо этого дадим концу веревки, даже не сильный, но резкий толчок, то по ней побежит волна, подбрасывая на своем пути также и отдельные ее части. В первом случае — быстро убывающее „поле" постоянного отклонения, во втором — волна, порождаемая большим ускорением, несущая хоть в объеме и небольшую, но концентрированную энергию.

Прежде чем применить полученные результаты к выяснению дальнейших вопросов, относящихся непосредственно к нашей теме, мы позволим себе немного отклониться в сторону и сделать несколько замечаний общего характера.

Выше мы уже упоминали о том, что электромагнитные волны распространяются со скоростью света. Это, конечно, не случайное совпадение. Со времен Максвелла и бессмертных опытов Герца мы знаем, что световые волны и электромагнитные волны только что описанного типа — тождественны по существу. Различие заключается исключительно в длине волны, или, что совершенно то же самое, в периоде колебаний. Конечно, говоря о световых волнах, мы подразумеваем не только видимую часть спектра, но и всю совокупность инфракрасных и ультрафиолетовых лучей. Однако и этим еще не ограничивается вся область известных нам электромагнитных волн. Излучение лучей Рентгена и лучей радия уже давно привело к убеждению, что и тут мы имеем дело с электромагнитными возмущениями и волнами, но еще значительно более короткими, чем световые. Открытия последних лет не только блестяще подтвердили этот взгляд, но и дали возможность действительно определить длину этих волн. Она оказалась порядка 10^{-8} мм. Таким образом, область известных нам теперь электромагнитных колебаний обнимает колоссальный интервал. Правда, есть еще пробелы, которые не удалось пока заполнить; самые короткие электромагнитные волны, т. е. такие, которые удалось получить при помощи переменных токов, имеют в длину приблизительно 2—3 мм. Самые же длинные из исследованных инфракрасных волн равны 0.3 мм. Промежуток от 2 мм до 1.3 мм еще не был исследован.[1] Далее, ультрафиолетовые лучи могли быть прослежены приблизительно до длины волны в 100 mμ (длина волны, соответствующая желтому цвету, равна 0.0006 миллиметра). Затем идет неисследованная область вплоть до очень коротких волн лучей Рентгена. Здесь кроется, вероятно, еще много интересных явлений, и вряд ли можно сомневаться в том, что дальнейшее развитие блестящих открытий последних лет даст тут обильную жатву.

Различие в длине волны между собственно электромагнитными колебаниями и световыми или между этими последними и лучами Рентгена является причиной того, что одно и то же тело обладает весьма различными свойствами по отношению к различным лучам; так, например, каучуковая пластинка задерживает совершенно свет и свободно пропускает длинные электромагнитные волны. Стекло, прозрачное для видимых лучей, абсорбирует рентгеновские лучи несравненно больше, чем совершенно непрозрачный алюминий, и т. д. Мы не можем подробно останавливаться на всех этих вопросах; заметим только, что зависимость свойств тел от длины волны не является неожиданной. Ведь даже в весьма ограниченной области видимого спектра эта зависимость сказывается чрезвычайно сильно. Разложение света призмой, различная окраска тел — все это и многое другое есть, как известно, следствие зависимости коэффициента преломления и абсорбции от света, т. е. от длины волны.

После того как была выяснена тождественность волн, порождаемых переменными токами, и волн световых, естественно было

[1] [Этот участок электромагнитного спектра был перекрыт проф. А. А. Глаголевой-Аркадьевой в 1922 г. при помощи так называемого „массового излучателя“ — прибора, в котором излучателями являются мелкие металлические опилки.]

предположить, что и процессы *возбуждения* в обоих случаях аналогичны. Современная электронная теория действительно стоит на этой точке зрения. Согласно этой теории, источником световых волн является колебательное движение электронов, мельчайших, заряженных электричеством частиц, находящихся внутри атомов всех тел. Колеблющийся электрон по своим электромагнитным действиям вполне аналогичен элементу проводника с переменным током. Более того, электронная теория считает обратно, что всякий ток есть не что иное, как поток движущихся электронов.

Рассмотренный нами процесс излучения электромагнитных волн переменным током является, таким образом, также моделью светящейся точки, но так как в самосветящемся теле электроны колеблются не в одном определенном направлении, а во всевозможных, то и электромагнитные силы не лежат постоянно в одной и той же плоскости. Колебания будут, в противоположность поляризованным колебаниям, рассмотренным нами, — не поляризованными. Впрочем, переход от одного случая к другому, не представляет затруднений, так как неполяризованный луч может быть рассматриваем, как сумма двух лучей, поляризованных в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Электронная теория сводит к колебательному движению электронов не только процесс излучения, но также и все оптические свойства тел вообще. Электромагнитная волна, падая на какое-нибудь тело, приводит в колебательное движение его электроны. Колеблющиеся электроны излучают, как мы видели, в свою очередь волны, которые мы можем назвать, в противоположность падающей волне, вторичными. Совокупность первичной волны и всех таких элементарных вторичных волн и дает в результате явления отражения, преломления и т. д.

Возвращаясь к нашей теме, мы займемся теперь применением полученных результатов к вопросу об антеннах. До сих пор мы изучали излучение одного элемента проводника. Но в действительности у нас, конечно, есть не элемент — разложение на элементы вообще ведь только фикция, — а весь проводник. В какой зависимости находится общее излучение такого проводника от его формы, его размеров и т. д. — вот те вопросы, на которые мы постараемся теперь ответить.

Общий рецепт нахождения поля всего проводника в какой-нибудь точке чрезвычайно прост. Разбив мысленно проводник на отдельные элементы, мы вычислим поле каждого элемента в отдельности и, сложив все поля, получим желаемый результат.

При сложении нужно принимать во внимание разность фаз отдельных полей. Иными словами, мы должны поступить так, как поступают при разборе вопросов интерференции света.

Конечно, такое сложение, или собственно интегрирование, может быть, смотря по случаю, сопряжено с бóльшими или меньшими математическими трудностями, но принципиально вопрос этим исчерпывается. А так как на практике всегда нужно только известное приближение, то и практически задача разрешима.

Мы не станем разбирать отдельные частные случаи, а постараемся установить некоторые общие, относящиеся сюда положения, Это можно сделать почти без помощи вычисления.

Чтобы освоиться с приемами, рассмотрим сначала, как складываются поля двух каких-нибудь элементов.

Но сперва заметим следующее. Два колебания могут иметь одинаковые амплитуды и одинаковый период, но отличаться друг от друга тем, что одно запаздывает по отношению к другому. Так например, мы видели, что колебания электромагнитных сил в точках, более удаленных от источника, запаздывают по отношению к колебаниям в более близких точках. В этих случаях говорят, что колебания имеют различные фазы. Понятие разности фаз имеет, таким образом, смысл только при сравнении двух процессов. Оно применимо, конечно, ко всякого рода колебаниям. С волнами оно, понятно, не связано. Разность фаз, как мы ее понимаем, характеризует временное, а не пространственное соотношение.

Разность фаз играет, как мы это сейчас увидим, существенную роль при сложении колебаний. Возвратимся теперь к нашим двум элементам и рассмотрим следующие случаи. Предположим, во-первых, что в обоих элементах токи имеют одинаковые фазы, другими словами, в каждый момент времени оба тока равны по величине и направлению. Если расстояние между элементами мало по сравнению с длиной волны, то, очевидно, что и поля обоих элементов в какой-нибудь отдаленной точке тоже равны между собой и равно направлены. Значит, поле двух элементов будет вдвое больше поля каждого в отдельности. Совсем иное получится, если разность фаз в двух элементах, как говорят, равна 180°, другими словами, если запаздывание равно половине целого колебания. Тогда в тот момент, когда один ток имеет максимальное значение и, скажем, направлен вертикально вверх, другой также имеет максимум, но направление его прямо противоположно. Тогда отдельные поля будут также равны по величине, но противоположны по направлению и поэтому будут, очевидно, взаимно уничтожаться. Комбинация двух таких элементов — и это мы запомним — не излучает.

Если разность фаз имеет промежуточное между нулем и 180° значение, то и амплитуда результирующего поля лежит между двумя только что рассмотренными пределами.

Еще одно, важное для последующего замечание: если оба элемента находятся не на близком расстоянии друг от друга, то очевидно, что разность фаз отдельных полей в какой-нибудь точке O не будет равна, как это мы считали только что, разности фаз самых токов. Причина та, что ввиду большего расстояния одного из элементов от O его поле будет больше запаздывать и это запаздывание вносит дальнейшую разность фаз.

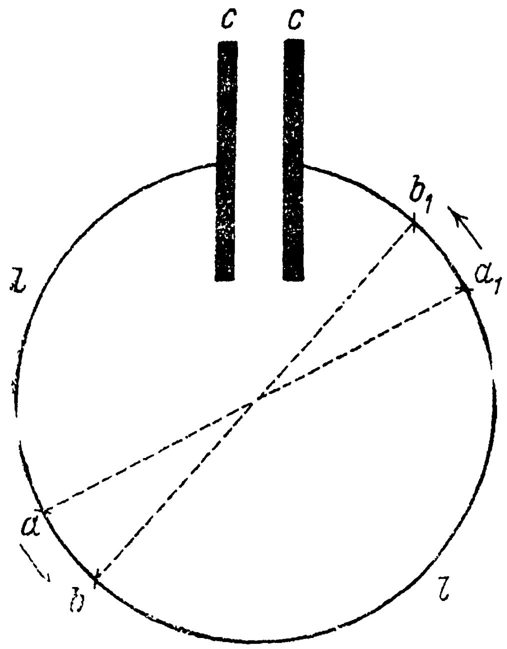


Рис. 4. Схема колебаний в контуре, состоящем из емкости и самоиндукции

После этой подготовки рассмотрим теперь один важный практический случай, а именно случай переменного тока, текущего по замкнутому или почти замкнутому контуру. Схематически этот случай представлен на рис. 4, где l — проводник, например медная проволока, по которой течет ток. Через cc мы схематически обозначили две обкладки конденсатора. Этот конденсатор пока не имеет для нас никакого значения. Мы ввели его здесь потому, что изображенная схема, так называемая замкнутая конденсаторная цепь, является действительной практической установкой для возбуждения электромагнитных колебаний. Но теперь эта сторона вопроса нас не интересует. Мы принимаем за данное, что по проводнику l течет переменный ток определенного периода и спрашиваем, как велико его излучение. Пусть размеры проводника, в данном случае — диаметр круга, малы по сравнению с длиной волны. Тогда ясно, что весь проводник будет излучать ничтожно мало. Действительно, если мы разобьем его на отдельные элементы, то, например, элементу ab соответствует другой элемент a_1b_1, действие которого уничтожает по вышеуказанному действие первого. Ведь сила тока во всем проводнике, а значит и в обоих элементах, одна и та же, а направление противоположное. Но мы только что видели, что такая комбинация не излучает. А так как замкнутый проводник может быть разбит на такие пары, то очевидно, что и излучение всего проводника также равно нулю. Аналогичное рассуждение может быть применено и к замкнутому не круговому контуру.

Итак, замкнутый контур, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, практически не излучает электромагнитных волн.

Было бы, конечно, ошибочно думать, что *всякий* замкнутый контур не излучает. Из сказанного ясно, что этим свойством обладает только замкнутый контур малых, по сравнению с волной, размеров.

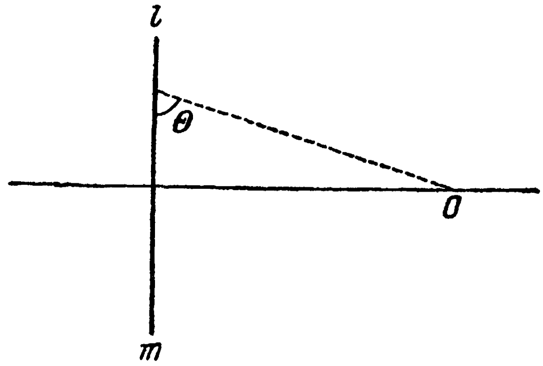


Рис. 5

Полученный нами результат имеет весьма важное практическое значение. Дело в том, что только что разобранная схема весьма пригодна для возбуждения токов большой частоты и большой энергии, т. е. является хорошим генератором электромагнитных колебаний. Мы видим теперь, что она непригодна в качестве излучателя.

Таким образом, уже здесь намечается важность разделения двух функций: возбуждения колебаний и излучения их. Заметим, что принцип такого разделения, принцип, оказавшийся чрезвычайно важным для всего дальнейшего развития беспроволочной телеграфии, был введен впервые Брауном в его так называемых связанных системах.

Мы перейдем теперь к самому важному для нас случаю — к излучению антенны. Схематически антенна представляет собой вытянутый в прямую линию проводник. Пусть ток во всех точках проводника имеет одну и ту же фазу; каково его излучение? Рассмотрим поле в некоторой отдаленной точке O, в плоскости, перпендикулярной к проводнику (рис. 5). Пусть расстояние этой точки от проводника превышает его размеры во много раз. Это именно тот случай, который представляется на практике. Тогда расстояния точки O от отдельных элементов проводника можно считать все равными между собой, а углы Θ прямыми. Теперь очевидно, что поля в точке O, соответствующие отдельным элементам проводника, в противоположность замкнутому контуру, также имеют все одну и ту же фазу. Другими словами, результирующее поле равно арифметической сумме отдельных полей. Здесь все элементы поддерживают, если можно так выразиться, друг друга, а не взаимно уничтожаются, как это было в первом случае. Больше того, при данной силе тока это, очевидно, самая выгодная форма излучателя. Ведь больше, чем арифметическую сумму мы ни в коем случае получить не можем.

Если мы рассмотрим поле не в плоскости, перпендикулярной к проводнику, а в точках, лежащих на продолжении его, т. е. на продолжении отрезка lm, то там поле равно нулю. Действительно, как мы уже видели, каждый элемент в отдельности, а значит и весь проводник, в своем собственном направлении не излучает. Во всех промежуточных направлениях величина излучений лежит между этими двумя пределами и может быть для каждого отдельного случая найдена при помощи рассуждений, вполне аналогичных приведенным, хотя несколько более сложным.

Может еще возникнуть вопрос, возможен ли вообще переменный ток в таком линейном проводнике, вопрос, тем более уместный, что мы знаем, что постоянный ток может течь только по замкнутому контуру. Мы не будем детально рассматривать этого вопроса. Он относится к общему вопросу о возбуждении колебаний. Теперь же скажем только, что решается он утвердительно: в линейном проводнике переменный ток может быть возбужден. Правда, его сила неодинакова во всех точках проводника. Она увеличивается по мере удаления от концов, достигая в середине максимума. Но это обстоятельство нисколько не уменьшает правильности наших рассуждений.

Итак, прямолинейный проводник является отличным излучателем, причем он излучает особенно сильно в экваториальной плоскости и не излучает совсем в своем собственном направлении.

С таким проводником-осциллатором были произведены Герцем его знаменитые опыты, которыми он впервые доказал существование электромагнитных волн. Эта же форма проводника является, как сказано, прототипом излучающего органа всякой станции беспроволочной телеграфии, ее антенной или воздушным проводом. Здесь этот провод имеет вертикальное направление. Задача тех, подчас весьма сложных сооружений в виде мачт, башен и т. д., которые первыми бросаются в глаза при приближении к такой станции, — это поддерживать вертикальную антенну. Отметим еще, что в действительности антенна соединена своим нижним концом с землей — заземлена — и представляет собой, так сказать, верхнюю половину описанного нами прямолинейного осциллатора. Мы еще вернемся к этому вопросу, когда будем говорить о роли земли в распространении волн.

Здесь же будет уместным указать на то, что прямолинейный проводник является только прототипом практической установки. Современные антенны всегда состоят из нескольких проводов и, наряду с вертикальной частью, имеют в качестве продолжения еще и часть горизонтальную, но основной частью служит вертикальный отрезок, обыкновенно высотой в несколько десятков метров, а на больших станциях и гораздо больше. К нему применимы только что приведенные рассуждения. Экваториальной плоскостью вертикальной антенны является, очевидно, поверхность земли. В этой плоскости ее излучение, как это очевидно из соображений симметрии, равномерно. Вверх вертикальная антенна не излучает совсем. Но это направление нас, конечно, мало интересует, так как наши приемные станции находятся на поверхности земли.

Посмотрим теперь, каков будет результат, если мы применим наши рассуждения к прямолинейному проводнику, имеющему горизонтальное направление. Для удобства выражения, предположим, что это направление совпадает с направлением север—юг. Тогда очевидно, что экваториальная плоскость проводника вертикальна и проходит через направление восток — запад. Мы знаем, что излучение проводника наиболее сильно в экваториальной плоскости. Значит, наша горизонтальная антенна будет излучать сильно, так же сильно, как и вертикальная, в восточно-западном направлении. Излучение постепенно убывает с отклонением к югу или северу и пропадает в обоих этих направлениях совсем. Теоретический результат, к которому мы пришли относительно горизонтальной антенны, если бы он соответствовал действительности, говорил бы вполне определенно в пользу таких антенн по сравнению с вертикальными. Если принять во внимание, насколько затруднительно возведение высоких сооружений, требуемых при вертикальных антеннах, и если иметь в виду, что преобладание излучения в определенном направлении представляло бы скорей преимущество, чем недостаток, так как этим осуществлялась бы возможность направленной телеграфии, то наше утверждение о преимуществе горизонтальных антенн перед вертикальными становится очевидным. Однако на практике дело обстоит не так. Высокая вертикальная антенна, или, правильнее антенна с высокой вертикальной частью, является в настоящее время необходимым органом всякой работающей на большие расстояния станции.

Правда, известны случаи, где и с горизонтальными антеннами были достигнуты хорошие результаты. Мы к этому вопросу еще вернемся, но, вообще говоря, заменить вертикальную антенну горизонтальной нельзя. В чем же состоит недостаток тех соображений, которые привели нас к неправильному результату? Ответ на это дать нетрудно; мы до сих пор предполагали, что имеем дело с пустым неограниченным пространством, мы не учитывали роли земли в распространении электромагнитных волн. Правда, в последних строках упоминалось о земле, но не как о физическом теле, а как об идеальной плоскости, по отношению к которой мы ориентировали так или иначе нашу антенну. Мы, конечно, поступали так умышленно, желая изучить основные положения, служащие, так сказать, базой во всех вопросах, связанных с излучением, при возможно более простых условиях. Теперь, после того как это сделано, мы расширим рамки нашей картины. Наша теперешняя задача будет состоять в том, чтобы показать, какие изменения вносит присутствие земли в процесс распространения волн, и проследить ту постепенную эволюцию, которая произошла в наших теоретических воззрениях на этот предмет.

Заметим уже сейчас, что эти изменения весьма существенны. Как мы увидим дальше, некоторые явления изменяются не только количественно, но и качественно.

Как во всяком физическом вопросе, так и здесь, изучение шло двояким путем — опытным и теоретическим. Постановка опытов для выяснения вопросов, связанных с излучением электромагнитных волн тех размеров, которыми работает беспроволочная телеграфия, связана с большими трудностями. Такие опыты в лаборатории производить, конечно, нельзя. Нужны настоящие станции, работающие на большие расстояния. И нельзя ограничиться двумя постоянными станциями, так как нужно иметь возможность варьировать условия: ведь задача состоит именно в том, чтобы выяснить влияние различных факторов — расстояния, различных профилей земной поверхности и тех или иных физических свойств частей земли, которые лежат по пути распространения волн.

Конечно, есть некоторые бросающиеся в глаза явления, которые не могли остаться незамеченными уже при практической работе. Так, например, уже с самого начала было известно, что расстояния, достигаемые на море, значительно превосходят расстояния, на которые можно телеграфировать с теми же средствами на суше.

В последнее время были предприняты также в большом масштабе специальные опыты для выяснения законов распространения электромагнитных волн. Сюда относятся, например, в высшей степени интересные исследования Остина, давшие много важных результатов.

Но этого всего недостаточно, чтобы сделать общие выводы. Чтобы иметь возможность получить действительно полное представление о влиянии земли, нужен громадный систематический материал, которого в настоящее время, ввиду отмеченных трудностей, не существует.

Поэтому в названном вопросе важное место следует отвести теории. Что же касается этой стороны, то здесь дело обстоит так. Никакая физическая проблема в том виде, как она ставится действительностью, недоступна теоретической обработке: ее нужно сначала упростить настолько, чтобы она поддавалась математическому вычислению, но чтобы в то же время за ней сохранились все важные для практики черты.

Общий рецепт правильной идеализации дать невозможно. Но в нашем случае путь намечается, так сказать, сам собой. Нельзя и думать о том, чтобы ввести в рассмотрение все неправильные изменения профиля и неправильно чередующиеся изменения физических свойств поверхности. Идеализация должна здесь заключаться в том, чтобы считать землю по ее физическим качествам однородной, а ее поверхность геометрически простой.

Но и при этой постановке вопроса можно еще поступать различно. Можно, например, считать поверхность земли плоской или итти дальше и принять во внимание ее кривизну и т. д. Как развивалась теория в действительности, это мы сейчас увидим.

До последних лет довольствовались следующей, весьма грубой схематизацией.

Принимали, что все пространство разделяется поверхностью земли, которую считали плоскостью, на две части. Одна часть занята атмосферой; ее считали абсолютно непроводящей. Другая, занятая землей, считалась, наоборот, обладающей абсолютно хорошей проводимостью. Последнее предположение весьма существенно. Благодаря ему поставленная нами теперь задача — найти влияние земли на распространение волн делается крайне легкой: мы можем, как оказывается, свести ее непосредственно на уже рассмотренный случай излучения в пустом пространстве. Покажем, как этот переход делается. Начнем с вертикальной антенны. На рис. 6, T — поверхность земли, lm — заземленная антенна. Стрелка показывает направление тока в антенне в какой-нибудь момент времени. Простые рассуждения, приводить которых мы, однако, не будем, показывают: чтобы найти поле в какой-нибудь точке O над или на поверхности земли, нужно поступить так: нужно построить зеркальное изображение антенны, считая зеркалом поверхность земли (на рис. 6 это изображение показано пунктиром). И вот оказывается, что поле от заземленной антенны в присутствии земли — то же самое, что поле без земли, т. е. в пустом пространстве, но вычисленное в предположении, что излучает не только действительная антенна, а действительная антенна плюс ее изображение. При этом надо принять, что ток фиктивной части антенны имеет направление, указанное на рисунке пунктирной стрелкой, а его величина в какой-нибудь точке фиктивной части та же, что в симметрично расположенной точке действительной антенны.

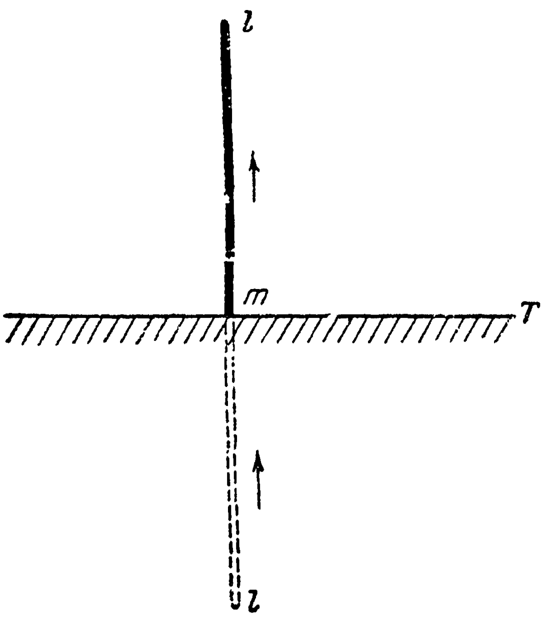


Рис. 6. Заземленная антенна

Итак, чтобы найти излучение антенны lm в присутствии земли, нужно мысленно удалить землю и найти излучение в пустоте антенны ll! Отсюда ясно, что присутствие земли не только не уменьшает излучения вертикальной антенны, но даже увеличивает его вдвое.

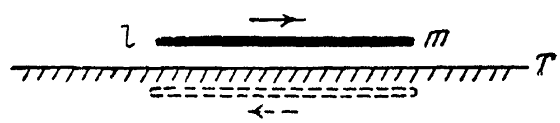


Рис. 7. Горизонтальная антенна

Только что описанный метод нахождения поля при помощи зеркального изображения применим к любой антенне, но опять, конечно, только в том случае, если земля считается абсолютно проводящей.

Посмотрим, что дает этот метод в применении к антенне горизонтальной. Поступаем, как в первом случае. Мысленно удаляем землю и заменяем действительную антенну (рис. 7) комбинацией из нее самой плюс ее изображение. Излучение, соответствующее этой комбинации в пустом пространстве, есть в то же время излучение одной антенны в присутствии земли. Теперь нетрудно видеть, что это излучение ничтожно. Действительно, каждому элементу настоящей антенны соответствует такой же элемент фиктивный, но с противоположным направлением тока; далее, расстояние этих элементов друг от друга мало (мы ведь предполагаем, что антенна расположена очень близко от земли). А мы знаем, что такая комбинация двух элементов излучения не дает. Итак, присутствие земли в том схематическом виде, в каком мы его ввели в наше рассуждение, дает объяснение различному действию вертикальной и горизонтальной антенны и обусловливает непригодность последней для телеграфирования.

Мы знаем, что этот результат в общем согласуется с наблюдениями. В этом грубом согласии с опытом и в той необычайной простоте, которая, как мы видели, присуща „гипотезе“ абсолютной проводимости, нужно искать причину того, что ею довольствовались все время вплоть до последних лет. По существу же эта гипотеза совершенно недостаточна. В этом можно убедиться даже на только что разобранном примере горизонтальной антенны.

Действительно, как мы уже упоминали, опыты, предпринятые со специальной целью выяснить действие горизонтальных антенн, показали, что в известных случаях такие антенны все же дают весьма благоприятные результаты. Наша теперешняя теория утверждает, что это невозможно. Это противоречие может быть объяснено именно тем, что при тех условиях, при которых были произведены опыты, землю считать абсолютно проводящей нельзя. Но помимо этих опытов есть много других явлений, которые, очевидно, необъяснимы, если приписывать земле это свойство. Сюда относится, очевидно, столь общеизвестный факт, как различие действия суши и воды, а также зависимость достигаемого расстояния от длины волны и т. д. Сюда же нужно отнести и вопросы, связанные с направленной телеграфией.

Итак, схематическая теория, только что нами рассмотренная, недостаточна. Ее нужно заменить другой.

Но прежде чем мы это сделаем, покажем эту недостаточность по отношению к направленной телеграфии.

Мы считаем желательным это сделать потому, что еще очень недавно в специальной литературе существовало мнение, что для объяснения направленной телеграфии нет надобности расширять теорию. Многие думали, что все явления удовлетворительно объясняются с точки зрения абсолютной проводимости. Как мы сейчас увидим, все теории, основанные на этом предположении, должны быть неправильными.

Направленная телеграфия, или вернее, тот род ее, который мы имеем теперь в виду, заключается в следующем. Опыт показал, что антенна, состоящая из двух частей, вертикальной и горизонтальной (рис. 8), излучает не одинаково сильно во все стороны. Ее излучение более сильно в сторону, указанную на рисунке стрелкой, и наиболее слабо в обратном направлении. Во всяком другом направлении сила излучения заключена между этими двумя пределами. То же самое относится mutatis mutandis к действию такой согнутой антенны в качестве приемника. Практическое значение этого явления очевидно. Мы имеем тут возможность по желанию направлять наибольшее излучение в любую сторону, т. е. делать принципиально то же самое, хотя и далеко не в той же совершенной степени, что делают, когда направляют лучи прожектора на долженствующий быть освещенным предмет. На этом же принципе удалось построить аппарат, позволяющий судам ориентироваться при входе в гавань и т. д. Мы не можем здесь, конечно, входить в детальное обсуждение всех практических применений направленной телеграфии, для нас теперь важно лишь следующее.

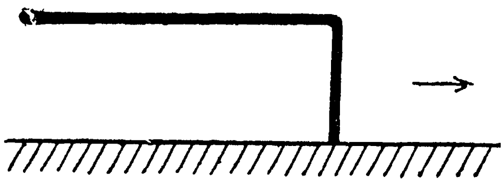


Рис. 8. Изогнутая антенна

Доказанное опытом существование направления наибольшего действия, другими словами асимметрия в излучении, распространяющаяся, как показал тот же опыт, на большие расстояния, не может быть объяснена, если считать землю абсолютно проводящей. В этом очень легко убедиться при помощи рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые мы применяли к горизонтальной антенне. Как там, так и здесь, излучение горизонтальной части уничтожается излучением ее изображения. Различие между этими двумя случаями заключается только в том, что там расстояние между горизонтальной частью и ее изображением было очень мало, в согнутых же антеннах, употребляемых для направленной телеграфии, эта часть сравнима с величиной волны. Но это дела не изменяет. Ведь практически нам важно поле в точках на поверхности земли. Относительно этих точек горизонтальная часть и ее изображение расположены симметрично, и поэтому, как легко видеть, уничтожают друг друга независимо от взаимного расстояния. В качестве излучателя в такой согнутой антенне остается одна лишь вертикальная часть. Она излучает здесь так же, как излучает вертикальная антенна вообще, т. е. симметрично по отношению к поверхности земли.

Итак, повторим: целый класс явлений указывает на то, что, считая землю абсолютно проводящей, мы схематизируем слишком грубо. Благодаря этой схематизации, математическая обработка становится очень легкой, но зато пропадают весьма существенные черты реального явления.

В последнее время появился ряд работ, преследующих цель при помощи соответственных предпосылок подойти ближе к действительности. Сюда относятся работы Ценнека, Улерра и др.

В 1909 г. появилось исследование Зоммерфельда, имеющее чрезвычайно важное значение для занимающего нас вопроса. Это исследование было затем развито в ряде работ его учеников; часть работ относится к самым последним годам.

В своей первой работе Зоммерфельд ставит задачу так: поверхность земли он опять считает плоской. Эта плоскость разделяет все пространство на две половины, из которых каждая снова считается однородной. Шаг вперед, и существенный шаг, заключается в том, что Зоммерфельд не считает землю абсолютно проводящей, а атмосферу абсолютным изолятором, а приписывает каждой части некоторую диэлектрическую постоянную и проводимость, или, в оптической терминологии, показатель преломления и абсорбцию, и выводит формулы для любых значений этих величин. Подставляя в эти формулы значения постоянных для морской воды, пресной воды и для различных образцов суши, мы получаем возможность изучить законы распространения волн во всех этих случаях.

Но уже в этой постановке задача оказывается далеко не простой, и Зоммерфельд ограничивается разбором излучения одного вертикального элемента, находящегося непосредственно на поверхности земли.

В дальнейших работах исследование было распространено и на случай двух элементов, одного вертикального и одного горизонтального. В то время как вертикальный элемент является моделью вертикальной антенны, комбинация из двух элементов есть модель согнутой антенны. Таким образом, был сделан шаг вперед также в изучении действия таких антенн.

Наконец, в последнее время теория получила развитие и в том направлении, что была введена в рассмотрение кривизна поверхности земли. В самом деле, когда дело идет о больших расстояниях, например при трансатлантической телеграфии, поверхность земли, очевидно, нельзя уже считать плоскостью.

Названными работами далеко не исчерпываются все связанные с распространением электромагнитных волн вопросы, но благодаря им в этом направлении сделаны бесспорно весьма существенные успехи.

Мы постараемся на следующих страницах изложить некоторые результаты этих работ.

Но прежде всего нам кажется необходимым ответить на один вопрос, который здесь должен невольно возникнуть: задача, в том виде как ее ставит Зоммерфельд, в переводе на язык оптики, очевидно, означает: изучить преломление и отражение световых волн в случае двух различных сред, принимая, что поверхность раздела есть плоскость. Но эта задача одна из наиболее элементарных оптических задач. Она давно решена в общем виде для любых сред и для волн любой длины.

Мы знаем далее, что волны беспроволочной телеграфии по существу ничем не отличаются от световых волн. Спрашивается, зачем понадобилась новая теоретическая обработка вопроса, и почему нельзя непосредственно применить к данному случаю уже известные формулы?

Ответ заключается в следующем: при выводе общеизвестных формул преломления и отражения всегда предполагается, хотя это предположение большей частью и не оговаривается, что источник света находится далеко от поверхности раздела, т. е. что его расстояние от этой поверхности велико по отношению к длине волны.

Можно сказать, что во всех приведенных до самого последнего времени оптических опытах это предположение действительно осуществлялось. Это впрочем и не удивительно. Ведь световая волна, например волна желтого цвета, имеет в длину около 0.6 тысячных миллиметра. Расстояние, скажем, в 0.1 мм уже огромно по отношению к этой волне.

В беспроволочной телеграфии дело обстоит совершенно иначе. Так как волны, употребляемые здесь, имеют длину в сотни и тысячи метров, то ясно, что тут источник всегда в указанном смысле весьма близок к поверхности земли. По этой причине здесь и не применимы обычные оптические формулы. Вот в этой близости источника к поверхности раздела (в связи с неабсолютной проводимостью земли) и заключаются те условия, которые придают излучению электромагнитных волн антенной специфический характер.

Этот результат интересен, так сказать, и с обратной стороны. Действительно, если это так, если близость источника обусловливает изменение основных законов преломления, то следует ожидать, что и в чисто оптических опытах, если только мы достаточно приблизим источник света к поверхности раздела, мы найдем новые, до сих пор неизвестные оптические явления. Этот вывод, оказалось, легко проверить. Прежде всего сообразно с несколько другими условиями наблюдения мне пришлось в одном направлении несколько обобщить теорию Зоммерфельда. Затем были произведены соответственные опыты, причем одной средой служило стекло, другой — вода. Я не стану описывать опытов, а приведу лишь результаты. Опыты показали, что если источник света находится близко от поверхности раздела, то обыкновенные законы преломления действительно нарушаются и заменяются другими. Заметим еще, что опытный и теоретический результат, во всяком случае качественно, находится в полном согласии.[1]

Мы несколько отклонились в сторону. Но мы желали показать, что работа Зоммерфельда, предпринятая им с определенной целью — объяснить распространение волн беспроволочной телеграфии, имеет и общее физическое значение.

Обратимся теперь к тем результатам, которые дала теория Зоммерфельда для беспроволочной телеграфии. Так как нам часто придется сравнивать выводы этой теории с результатами, полученными в предположении, что земля абсолютно проводима, то удобно будет ввести для последнего случая какое-нибудь короткое название. Условимся, когда речь идет о земле как об абсолютном проводнике, говорить об „идеальном случае".

Начнем с практически наиболее существенного вопроса — об убывании амплитуды поля с расстоянием. Рассматриваемая теория приводит к результату, что вблизи от источника поле почти не отличается от идеального случая. В *отдаленных* же точках оно всегда, имеем ли мы дело с водой или сушей, меньше. Этот результат уже сам по себе может иметь некоторое практическое значение, так как он показывает, что идеальный случай, который легко поддается учету, представляет собой optimum того, чего можно вообще при данных условиях ожидать.

Главная причина этого более быстрого убывания амплитуд заключается в следующем: электромагнитные волны, распространяясь по поверхности земли, индуцируют в земле, которая, по нашему теперешнему предположению, имеет некоторое определенное сопротивление, токи. Но, как известно, в проводнике, по которому течет ток, всегда развивается теплота. Очевидно развитие теплоты идет здесь за счет электромагнитной энергии волн, и вследствие этого амплитуды волн должны по мере удаления от источника убывать.

---

[1] [См. т. I, статья 20.]

В идеальном случае убывание амплитуд обусловливалось тем, что при неизменности общего количества электромагнитной энергии плотность ее, а значит, и амплитуды силы уменьшались вследствие захвата волнами все большего и большего пространства. Эта причина, конечно, остается и здесь, но к ней присоединяется, как мы теперь видим, еще другая, существенно отличная от нее, заключающаяся, как сказано, в том, что часть электромагнитной энергии по пути теряется, превращается в теплоту.

Качественная сторона этого результата, конечно, не неожиданна. Что при сделанных предпосылках такая абсорбция должна существовать, ясно без всякой теории. Но формулы Зоммерфельда дают, конечно, гораздо больше, чем это общее указание. Они устанавливают численную зависимость между амплитудами в различных состояниях, длиной волны и физическими свойствами поверхности земли или, другими словами, показывают, как зависит количественно дальность телеграфирования от разных условий.

Мы не будем приводить этих формул в общем виде, а поступим, следуя Зоммерфельду, так: сравним те результаты, которые они дают в некоторых характерных частных случаях, с хорошо знакомым нам идеальным случаем.

Удобство такой постановки вопроса заключается, между прочим, в том, что идеальный случай легко поддается вычислению. Значит, если формулы Зоммерфельда покажут, что какой-нибудь реальный случай мало отличается от идеального, то отсюда будет следовать, что и всё, касающееся этого реального случая, также известно.

Указанное сравнение мы проведем, следуя Зоммерфельду, следующим образом. Мы уже знаем, что на достаточно близком расстоянии от передатчика поле при всех условиях мало отличается от идеального. Это „достаточно близкое расстояние“ от случая к случаю различно. И вот мы спрашиваем: до какого расстояния в различных случаях поле отличается не больше чем на $10^0/_0$ от идеального случая?

Зоммерфельд берет $10^0/_0$, чтобы иметь что-нибудь определенное. С таким же успехом можно было бы взять 8 или $9^0/_0$. Практически этот выбор объясняется тем соображением, что поля, отличающиеся друг от друга не больше чем на $10^0/_0$, могут еще считаться тождественными.

Теория Зоммерфельда дает следующий ответ на поставленный вопрос: искомые расстояния зависят как от физических свойств поверхности, так и от длины волны. Выберем какую-нибудь определенную волну, например 2 км. Тогда оказывается, что для морской воды искомое расстояние равно 20 000 км, для пресной воды оно равно 4 км, для суши же еще меньше. Отсюда мы выводим, что при волне в 2 км распространение волн по морю идет для всех практических расстояний так, как будто бы земля была абсолютным проводником. Сюда применимы, значит, — и в этом заключается существенное значение полученного результата — все выведенные нами для этого случая законы. При распространении же по суше эти законы ни в одном практическом случае не применимы. Ведь все встречающиеся на практике расстояния значительно превышают 4 км.

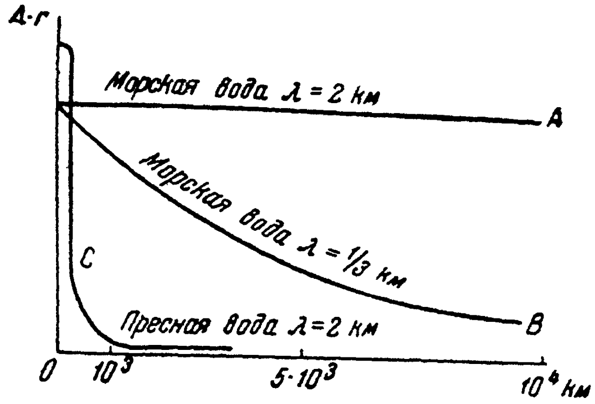


Рис. 9

Возьмем теперь волну в 0.5 км; тогда оказывается, что искомое расстояние на море уменьшается до 500 км, в то время как на пресной воде или на суше оно практически равно нулю.

Итак, при короткой волне, даже при телеграфировании по морю, идеальный случай может быть применен лишь на сравнительно небольших расстояниях.

Дадим теперь графическое изображение убывания поля для морской и пресной воды на расстояниях, бо́льших, чем указанные пределы, ясно обнаруживающее значение различных факторов. На рис. 9[1] в качестве абсциссы нанесены расстояния в километрах, в качестве же ординаты — амплитуды поля, помноженные на расстояния. Это произведение в идеальном случае должно оставаться постоянным, так как мы знаем, что здесь амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию. Соответственная этому случаю параллельная абсциссе прямая не нанесена на чертеже. Для всех других случаев кривые лежат ниже, указывая на большее или меньшее убывание амплитуд. Кривая *A* (морская вода, длина волны 2 км), сообразно сказанному выше, почти не отличается от идеального случая, но уже кривая *B* (морская вода, длина волны 0.5 км) показывает, что на значительных расстояниях амплитуды быстро уменьшаются. Наконец, кривая *C* (пресная вода, волна 2 км) очень наглядно показывает колоссальное убывание амплитуд с расстоянием в этом случае.

[1] Рис. 9 взят из статьи Зоммерфельда.

Заметим, что кривая, соответствующая суше, лежала бы еще ниже, чем кривая *C*.

Подведем итог: теория Зоммерфельда показывает, в согласии с опытом, громадное преимущество работы по морю и, что еще важнее, пользу длинных волн для достижения больших расстояний. Последняя зависимость, иллюстрированная нами для двух волн, справедлива вообще: земля ceteris paribus оказывает тем более вредное действие на распространение волн, чем меньше длина волны.

Раз мы уже заговорили о длине волны, то сделаем здесь, ввиду чрезвычайной важности этого вопроса с практической стороны, несколько дальнейших замечаний.

В общей форме вопрос этот может быть поставлен так: какую длину волны следует выбрать при данных условиях, чтобы иметь оптимум действия? Такой вопрос должен в сущности возникнуть при проектировании всякой станции беспроволочной телеграфии. Однако ответить на него вполне определенным образом в настоящее время не представляется возможным. Слишком много разнообразных моментов имеют здесь значение и слишком многим, подчас противоречащим требованиям, приходится удовлетворять.

Вы видели в самом начале, что элемент тока излучает при равной амплитуде тем больше, чем короче волна. Комбинируя это с только что выясненным значением длины волны при распространении, мы можем сказать так: начальное излучение растет с уменьшением волны, но зато параллельно увеличиваются, и притом весьма значительно, потери в пути.

Итак, уже это указывает на необходимость известного компромисса. Но помимо этого длина волны или частота играет роль и при возбуждении колебаний. Так, например, оказывается, что коэффициент полезного действия передатчика хорош только тогда, когда между длиной волны и размерами антенны существует определенное соотношение. Но так как размерам антенны практически положены известные пределы, то этим налагается ограничение и на длину волны. В выборе длины волны имеет значение также и вопрос о беспрепятственной работе нескольких станций между собой и т. д.

Словом, вопрос чрезвычайно сложен. Важное значение теории Зоммерфельда в вопросе о длине волны заключается — подчеркнем это здесь еще раз — в том, что она обнаруживает то огромное преимущество, какое имеют длинные волны при телеграфировании на большие расстояния.

Следует впрочем отметить, что практика сама, помимо всякой теории, успела оценить это преимущество длинных волн. Если проследить, как эволюционировал этот вопрос за последние годы, то легко заметить постепенный переход все к более и более длинным волнам, в особенности в больших станциях.

Вряд ли думали еще несколько лет тому назад, что можно успешно работать с волнами до 10 км! А между тем опыты последних лет с волнами такого порядка длины дали отличные результаты. Конечно, по сравнению с обыкновенным переменным током мы все еще находимся в области „быстрых колебаний".

Мы хотели бы упомянуть еще об одном явлении, которое не укладывается пока в рамки теории, но при котором опытно установлено также весьма выраженное влияние длины волны. Мы имеем в виду хорошо известную всем работающим практически по беспроволочной телеграфии зависимость интенсивности сигналов от часа дня. Ночью сигналы в общем значительно сильнее, чем днем. С другой стороны, днем они равномернее. Пробовали это объяснить ионизацией верхних слоев воздуха под влиянием солнечного света, но вряд ли можно считать данные объяснения исчерпывающими. Одно несомненно, и на это мы хотели обратить внимание, — что различие между ночными и дневными сигналами значительно уменьшается с увеличением длины волны. Значит, и с этой точки зрения длинные волны представляют преимущество.[1]

Обратимся теперь к тому, что дает теория Зоммерфельда относительно направленной телеграфии. Вопрос этот заключался в том, является ли конечная проводимость земли достаточной причиной для той асимметрии в излучении согнутой антенны, которая наблюдается в действительности.

Ответ, данный теорией, разрешает этот вопрос качественно в положительном смысле. Правда, формулы, несмотря на то, что в основание вычислений была положена упрощенная, чисто схематическая антенна, очень сложны и не особенно удобны для практических вычислений, но качественный результат на них читается легко: при конечной проводимости земли и в особенности той части ее, которая прилегает непосредственно к антенне, асимметрия должна существовать, причем по своим свойствам эта асимметрия совпадает с наблюденной на опыте.

[1] [Не следует упускать из виду, что данная статья написана в 1916 г., т. е. задолго до того, как радиотехника обратилась к использованию ионосферы и коротких волн.]

Также легко подтвердить при помощи этих формул установленный нами выше результат, что при абсолютной проводимости асимметрия должна пропасть. Практически это означает: при длинных волнах на море, например на судне, согнутая антенна не должна иметь направляющего действия.

Другой вопрос, насколько эта теория количественно согласуется с наблюдениями и, что еще важнее, насколько ценной она окажется в качестве руководительницы дальнейших опытов. Об этом судить ввиду недостаточности опытного материала пока еще не представляется возможным.

До сих пор мы рассматривали теорию Зоммерфельда, так сказать, с утилитарной точки зрения, интересуясь, главным образом, ее результатами относительно наиболее выгодных условий для достижения больших расстояний.

Но эта теория бросает также новый свет и на самый процесс распространения электромагнитных волн вдоль поверхности земли. Нам кажется желательным посвятить и этой стороне вопроса несколько строк.

Говоря о волнах вообще, мы можем различать два типа — волны пространственные и волны поверхностные. Не пытаясь дать здесь общего определения каждому типу в отдельности, мы заметим следующее. В предельных случаях ясно, что́ под этими терминами подразумевают; например, звуковые волны относятся к пространственным, в то время как волны на поверхности воды, очевидно, представители второго типа. Характерной особенностью поверхностных волн является то, что их свойства — скорость распространения, затухание, и т. д. — зависят от свойств обеих соприкасающихся сред. Так, например, распространение волн на поверхности воды изменилось бы, если бы воздух был заменен какой-нибудь жидкостью, например маслом. Кроме того, поверхностные волны как бы прикреплены к самой поверхности. Мы хотим этим сказать, что амплитуды таких волн большей частью быстро убывают по мере удаления от нее.

Процесс распространения электромагнитных волн в пустом пространстве относится всецело к типу пространственных волн. Анализ Зоммерфельда показал — и на это именно мы хотели обратить внимание, — что в тех случаях, когда земля не абсолютно проводима, наряду с пространственными волнами возникают и типичные поверхностные.[1]

[1] [В дальнейшем эта концепция Зоммерфельда оказалась, как известно, неправильной. Подробное освещение вопроса содержится, в частности, в статье 73, стр. 366.]

Какой из двух типов преобладает в данной точке, зависит от расстояния, источника, длины волны, свойств поверхности и т. д. Общее действие получается, конечно, сложением пространственной и поверхностной волн.

В заключение мы должны еще рассмотреть вкратце влияние на распространение электромагнитных колебаний кривизны земной поверхности. Изложенные нами выше теории рассматривали поверхность земли как плоскость. Но очевидно, что такое допущение справедливо только тогда, когда обе станции, передающая и приемная, находятся на близком расстоянии друг от друга. Если же станции расположены далеко одна от другой, то, ввиду сферической формы земли, приемная станция совершенно заслонена выпуклостью поверхности от передатчика. Тут уже нельзя рассуждать так, как будто бы земля была плоской.

Опыт показывает, что несмотря на заслон, волны до приемника доходят. Ярким примером этому служит возможность трансатлантической телеграфии. Каким же образом волны преодолевают кривизну земли? Первое объяснение, которое приходит в голову и которое действительно часто дается, — это диффракция. Под диффракцией, как известно, подразумевается явление, заключающееся в том, что поставленное на пути распространения волн препятствие, размеры которого невелики по отношению к длине волны, не дает геометрической тени. Волны, так сказать, обходят его. В оптике диффракция имеет большое значение; она там очень подробно изучена. Что явление, вполне аналогичное оптической диффракции, играет важную роль в беспроволочной телеграфии при преодолении мелких препятствий, как то: лесов, гор и т. д., в этом не приходится сомневаться. В этом огибании препятствий заключается, между прочим, одно из преимуществ длинных волн, употребляемых здесь, по сравнению с короткими световыми.

Но когда речь идет о преодолении кривизны земли, то ссылка на оптическую диффракцию вряд ли может считаться объяснением. Здесь применимо то же замечание, которое мы предпослали разбору теории Зоммерфельда, а именно: случай, который представляется здесь, — сфера и источник волн на самой ее поверхности — не был исследован в оптике. Тут не оставалось опять ничего другого, как специально поставить и решить эту задачу сначала. Ее решение и должно дать искомое объяснение.

Так и было поступлено в ряде работ, из которых мы назовем работы Никольсона, Макдональда, Пуанкаре и др.

Названная задача представляет довольно большие математические трудности. Ввиду этого не всегда представляется возможным оценить погрешности приближенного результата. Этим объясняется, что до самого последнего времени результаты отдельных работ не совсем сходились. Мы здесь, конечно, вдаваться в детали не будем, а скажем только следующее: теория действительно обнаруживает существование довольно значительного огибания, быть может достаточного для объяснения наблюдений. Мы говорим „быть может достаточного“ потому, что сравнить теорию с опытом пока не представляется возможным, а мнения на этот счет расходятся.

Убывание амплитуд, обусловленное кривизной земли, идет по так называемому экспоненциальному закону, как и при поглощении, другими словами увеличению расстояния, измеряемого здесь по длине большого круга, в арифметической прогрессии соответствует убывание амплитуд в геометрической. Это убывание ceteris paribus идет скорее при коротких волнах, чем при длинных, хотя значение длины волны здесь не особенно велико.

Вот в главных чертах в чем должно выражаться с точки зрения теории влияние кривизны земной поверхности.

Мы не хотели бы умолчать о том, что для объяснения преодолевания волнами кривизны была предложена еще одна гипотеза. Некоторые ученые считают возможным, что лучи, направляясь от передатчика более или менее прямолинейно, отражаются от верхних слоев атмосферы и попадают таким образом на приемник. При этом ссылаются на то, что специфичное влияние атмосферы безусловно существует, иначе нельзя было бы, например, объяснить зависимости процесса распространения волн от часа дня, которая стоит вне сомнения. Названная гипотеза не получила пока ни опытного, ни теоретического развития. Мы не будем поэтому на ней дольше останавливаться.

Этими замечаниями мы закончим наш обзор.

В заключение резюмируем вкратце изложенное на предыдущих страницах. Мы видели, что по мере развития беспроволочной телеграфии накоплялся значительный опытный материал, связанный с вопросами излучения антенной электромагнитных волн. Большинство данных поставлялось наблюдениями при практической работе. Специальные систематические опыты, постановка которых сопряжена с большими трудностями, но которые, с другой стороны, обещают дать очень ценный материал, произведены пока лишь в небольшом количестве.

Наряду с обогащением фактического материала шло развитие теории. В первое время развития беспроволочной телеграфии вопросам излучения уделяли сравнительно мало внимания. Все усилия были направлены на усовершенствование методов возбуждения колебаний и методов приема. В вопросах же излучения ссылались вначале на результаты Герца; при этом поверхность земли рассматривалась как плоскость, самую же землю наделяли абсолютной проводимостью.

Мало-помалу недостаточность такой схематизации становилась очевидной. Целый ряд явлений не находил себе, как мы видели, объяснения в рамках теории абсолютной проводимости. Тогда начали вводить в теоретическое исследование предпосылки, более соответствующие действительным условиям. Ввиду значительных трудностей, встретившихся здесь, вопрос был поставлен не сразу в общем виде, а ставились, так сказать, отдельные задачи с таким расчетом, чтобы иметь возможность выяснить влияние на распространение волн тех или иных факторов. Это, конечно, нужно иметь в виду при оценке результатов.[1]

Мы видели, что в выяснении отдельных вопросов теория действительно, особенно за последнее время, сделала весьма много.

Выяснено, во всяком случае в общих чертах, влияние свойств поверхности земли, лежащей между приемной и передаточной станцией, на дальность расстояния; освещены вопросы направленной телеграфии; сделан разбор влияния кривизны земли и пр.

Правда, пока теория больше объясняла и подтверждала то, что уже было раньше наблюдено. Но было бы ошибочно ее поэтому низко оценивать. Уже не малая заслуга теории заключается в том, что она ставит количественную зависимость на место эмпирических результатов, имеющих лишь качественный характер. А затем не надо забывать, что таков путь почти во всех технических вопросах. В первой стадии теория приспособляется к фактам и только мало-помалу и постепенно она принимает на себя роль руководительницы.

Когда наступит эта вторая стадия в вопросе беспроволочной телеграфии и насколько она будет плодотворна, на это ответит, вероятно, ближайшее будущее.

---

[1] Так, например, на рис. 9 показаны величины амплитуд на расстояниях от источника до 10 000 км, причем вычисление сделано в предположении, что поверхность земли — плоскость; но при этих расстояниях кривизна земли играет огромную роль. Таким образом, кривые собственно не дают действительного значения амплитуд. Их ценность заключается в том, что они позволяют учесть значение определенного фактора, именно свойств поверхности земли на распространение волн.

59

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И РАДИОТЕХНИКИ[1]

[Успехи физических наук, **13**, *вып. 2, 161—194, 1933]*

Я хотел бы привлечь сегодня ваше внимание к некоторым вопросам, относящимся к электромагнитным колебаниям, и специально к вопросам, связанным с проблемами, выдвигаемыми современной радиотехникой. При этом я чувствую некоторую неловкость, которая обусловливается тем, что в рамках того обширнейшего и разнообразнейшего материала, о котором трактует теория колебаний вообще, выбранная тема охватывает довольно узкую область. Некоторое оправдание выбора этой сравнительно узкой, на первый взгляд, темы я вижу в том своеобразии, которым указанные проблемы обладают.

Проблемы, выдвигаемые радиотехникой, специфичны. Методы, применяемые здесь, как экспериментальные, так и теоретические, несут на себе печать этой специфичности и, мне кажется, что то, что уже создано, и то, что создается и будет создаваться здесь дальше, по своему значению далеко перерастет те задачи, для которых эти методы были задуманы первоначально.

На одну характерную черту, отличающую нашу область от ряда других областей техники, в которых колебания также играют важную роль, позвольте мне обратить внимание сейчас же.

Проблемы колебаний в машиностроении, в инженерном деле в последнее время, особенно с увеличением размеров машин и ско-

[1] [Доклад, прочитанный при открытии Всесоюзной конференции по колебаниям при Институте физики МГУ 12 ноября 1931 г.]

ростей, приобретают все большее и большее значение. Но здесь задача состоит главным образом в том, чтобы избежать тех вредных, а иногда и губительных для сооружений действий колебаний, которые наступают при некоторых критических скоростях или периодах главным образом благодаря резонансу.

Нужно избежать расшатывания корпуса судна от работы машины, разрушения моста под действием периодической нагрузки и т. д. Какие катастрофические последствия резонанс может иметь, — общеизвестно. К его губительному влиянию нужно отнести наблюдавшиеся в прежнее время разрушения мостов, поломки валов мощных машин и многое другое. Задача состоит в том, чтобы предотвратить эти явления. Конечно, только углубленная теория колебаний может здесь дать в руки радикальные средства для обезвреживания влияния колебаний.

Основная задача радиотехники — как раз в противоположном. Здесь задача состоит в том, чтобы создать возможно мощные колебания определенного типа (они должны быть незатухающими, стабильными, должны иметь определенный спектр и т. д.). И вторая столь же важная задача — создать такое устройство — в этом заключается задача приема, — которое возможно сильнее „раскачивалось“ бы даже чрезвычайно слабыми, приходящими от удаленного передатчика колебаниями.

При решении задачи о рациональном генераторе колебаний, с одной стороны, и чувствительном приемнике колебаний, с другой — возникает ряд физических и математических проблем. Новая эра для радиотехники началась с появлением трехэлектродной катодной трубки. Создались устройства для генерации и приема, в основу которых легли новые физические явления, мало изученные раньше и изучение которых не закончено и сейчас. Для овладения новыми радиотехническими проблемами те математические методы, которыми теория колебаний главным образом пользовалась до сих пор, оказались недостаточными. Понадобилось обращение к такому математическому аппарату, который был бы адэкватен новым задачам.

На некоторых относящихся сюда физических и математических вопросах я и хотел бы сегодня остановиться. Разрешите мне начать несколько издалека.

Когда мы приступаем к изучению какой-либо области науки, то совершенно естественно возникает желание дать определение этой области, т. е. резко очертить тот круг вопросов и явлений, которые в нее входят. И каждый раз мы здесь наталкиваемся на большие трудности. Определение в науке — одна из самых трудных вещей. Попытки же дать точное и полное определение какой-нибудь области науки обычно кончаются неудачей. Вообще возникает вопрос, целесообразно ли оцеплять колючей проволокой жестких определений отдельные области науки и тем самым затруднять их взаимное проникновение? Я не думаю, что следует особенно гнаться за такого рода определениями. Зато весьма желательно выделить те руководящие точки зрения, которые позволяют нам объединить целый класс проблем. Вот нахождение таких руководящих точек зрения, по-моему, вещь существенная. Они позволяют нам создать стройную, цельную теоретическую концепцию, они позволяют связать в одно целое кажущиеся разнородными проблемы и дают возможность придать планомерный характер дальнейшим исследованиям.

И вот, если мы обратимся к проблемам колебаний, о которых идет речь, то мы придем к следующему заключению. Нас интересуют здесь в подавляющем большинстве случаев не колебания сами по себе, а главным образом действие колебательных процессов на системы — на колебательные системы, или, может быть, более обще — нас интересует взаимодействие различных колебательных систем между собой. И перед нами встает задача — выявить ту точку зрения, которая позволила бы охарактеризовать данный колебательный процесс (это может быть электромагнитное поле, переменные механические силы) в отношении его влияния на резонатор. Или конкретнее. Представим себе, что у нас какой-нибудь резонатор, электрический или механический — все равно, и на него действует переменная сила $y=f(t)$.

Что нам известно? Мы знаем, что в некоторых случаях резонатор отзывается чрезвычайно сильно, в других случаях он почти на воздействие не реагирует — остается почти глухим. Когда наступает первый и второй случай? Часто говорят так: здесь дело в периодичности действующей силы y. Если период действующей силы совпадает с собственным периодом резонатора, то тогда и наступает сильное действие. Но это неверно. Возьмем простой пример. Пусть

$$y=\sin 2\pi mt+\sin 2\pi(m+1)t,$$

где m — целое число. Эта функция имеет основным периодом единицу и не имеет периодов $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m+1}$. Между тем резонатор, настроенный на ее период, т. е. на период единицы, почти не будет отзываться, а резонатор, настроенный на период $\frac{1}{m}$ или $\frac{1}{m+1}$, отзовется очень сильно. С другой стороны, вы можете взять вообще непериодическую силу, например такую:

$$y = \sin 2\pi\, mt + \sin 2\pi\, nt,$$

где m и n несоизмеримы. А между тем наш резонатор, настроенный на период $\frac{1}{m}$ или $\frac{1}{n}$, отзовется очень сильно. Значит, периодичность силы и совпадение ее периода с периодом резонатора и не необходимы и не всегда достаточны. Что же важно? Нужно оценивать функцию по следующему принципу. Нужно представить ее как сумму простых (гармонических) колебаний — сумму косинусов и синусов. Если в разложении есть член с периодом резонатора, то резонанс наступает, в противоположном случае — нет. Таким образом, периоды отдельных слагаемых и их амплитуды, совокупность этих чисел — вот что характеризует мою силу в отношении ее действия на колебательную систему.

Ряд Фурье является частным случаем такого разложения. Более общий случай — разложение почти периодических функций, которыми математики в последнее время много занимаются.

Итак, для оценки эффективности данного колебательного действия соответственная функция должна быть разложена в ряд по гармоническим функциям, после чего и амплитуды и периоды слагаемых дают нам требуемое мерило. Это в сущности весьма тонкая оценка данной функции. Она учитывает, так сказать, всю форму процесса на протяжении всего времени в противоположность, например, таким характеристикам, как максимальное значение, среднее, среднее квадратичное и т. д. Те, кто много занимаются колебаниями, привыкли к этому приему, но по существу это глубокая и тонкая оценка. Вот такой подход, когда мы оцениваем функцию путем разложения ее в ряд, в данном случае по гармоническим колебаниям, мы будем называть спектральным. Для нас это руководящая точка зрения.

Ценность спектральной точки зрения в том, что, зная спектр данной силы, мы знаем и действие на резонатор. Все наши резонаторы, поскольку они линейны, являются как бы реактивами на синус-функции. Линейный резонанс выделяет именно синус-функции, а не какие-нибудь другие. Он может придать каждому члену такого разложения как бы самостоятельное существование. Сюда присоединяется и то обстоятельство, что гармонические колебания — единственные колебания, которые, будучи подведены к линейной, даже сложной системе, проходят через все ее звенья без искажения формы.

Теперь нам ясен и ответ на часто задаваемый вопрос. Мы можем разложить функцию в ряд по самым разнообразным функциям, а не непременно по синусам и косинусам. Почему разложение именно на эти функции играет такую роль в физике? Ответ ясен: это вопрос не математический, а вопрос физический. Целесообразность разложения по тем или иным функциям, соответствующая этому разложению оценка определяются физической проблемой. В нашем случае целесообразность разложения на синусы обусловливается свойствами воспринимающей системы, реагирующей именно на синус-функции. Позвольте мне на минуту отвлечься от нашей непосредственной темы. Позвольте указать на то, что значение спектральной оценки как принципа, отличного от обычных подходов, только сформулированного, конечно, в гораздо более общей форме, чем это надо нам, приобретает все большее и большее значение. Один из основателей волновой механики, Шрёдингер, видит в этом принципе оценки действия вообще коренную характеристику и своеобразие современной волновой механики. С этой точки зрения очень правильный для нас, но не претендующий на высокое принципиальное значение подход был бы в известном смысле только частным случаем или примером принципиального подхода к исследованию явлений; более того — подхода, являющегося неотъемлемой частью определенных воззрений, которые теперь владеют нашим физическим миропониманием. К сожалению, я не могу останавливаться подробнее на этих вещах.

Но вернемся к нашим скромным задачам.

Хотя то, что я выше говорил, и хорошо известно, но я считал желательным подчеркнуть руководящую роль спектрального подхода по многим соображениям. Во-первых, потому, что этот момент не всегда проникает в достаточной мере в сознание людей, работающих в этой области. Позвольте мне привести один пример. Мы знаем, что если мы модулируем телефонный передатчик самым простым образом

$$y = a\,(1 + b \sin 2\pi\, mt) \sin 2\pi\, nt,$$

то испускаемый им спектр состоит из трех линий — несущей волны и двух боковых частот. Нам ясно, что это значит. Резонатор, настроенный на боковую волну, выделит ее так же, как резонатор, настроенный на несущую, выделит несущую. Спектральный подход дает нам возможность проследить взаимодействие передатчика и приемника, дает указание, как их нужно целесообразно строить и т. д. Он вносит ясность во всю проблему радиотелефонии. Это все отлично известно. И несмотря на это, многие из вас знают, что приблизительно два года назад на страницах „Nature" разразилась полемика, начатая Флемингом, причем Флеминг начисто отрицал „физическое" существование боковых волн. Понадобилось, кажется, около 15 писем, чтобы привести дело снова в порядок. Вот пример, который показывает, что даже ведущие люди, хотя, конечно, они и знают теорию, не всегда достаточно проникаются „спектральным мышлением".

Второе обстоятельство заключается в том, что привычка подходить к разнообразным колебательным явлениям со спектральной оценкой помогает нам приводить в связь между собой на первый взгляд чрезвычайно различные явления.

В качестве примера позвольте привести один случай. Физики в последнее время интересуются и исследуют следующее явление. Если через прозрачное тело, например кристалл или жидкость, пропустить сильный пучок света, то молекулы тела часть, правда малую, этого света рассеивают во все стороны, являясь как бы антеннами, возбуждаемыми падающей волной. Пусть наш падающий свет будет монохроматичный. Что же оказывается? Если вы снимете спектр рассеянного света, то в нем наблюдаются, помимо несущей волны, еще боковые частоты, и общий спектр рассеяния в своих существенных чертах воспроизводит спектр модулированного телефонного радиопередатчика. И тогда невольно возникает вопрос, не есть ли рассматриваемое оптическое явление более или менее полная аналогия радиотелефонной модуляции. И вот, если эту мысль проследить дальше, то оказывается, что мы здесь, говоря несколько схематично, действительно имеем не что иное как модуляцию падающей волны собственными колебаниями молекулы или молекулярных агрегатов. И тогда совершенно ясно, что, так же как спектр обычного телефонного передатчика несет в себе весь ваш разговор, все, что вы хотите сказать, так и спектр рассеянного света несет то, что молекула говорит о себе. Изучая его, вы изучаете свойства молекулы, вы изучаете ее строение.

Наконец, последнее замечание по поводу спектральной точки зрения. Раз мы выяснили, что́ лежит в основе применения этого принципа, мы легко сможем отдать себе уже заранее отчет, когда и чем его применимость ограничена. Это обстоятельство, мне кажется, весьма существенно. Во всем спектральном подходе нужно различать два момента. Один вам может показаться тривиальным. Он состоит в том, что мы для оценки функции разлагаем ее на сумму отдельных слагаемых. Второй момент заключается в том, что в качестве слагаемых мы берем определенные функции, в данном случае синусы. Когда целесообразно оценивать действие, разлагая на сумму? Это целесообразно постольку, поскольку в нашей проблеме справедлив принцип суперпозиции: зная, как действует каждое слагаемое, мы тем самым знаем, как действует вся сумма, или иначе: разложение целого на слагаемые имеет смысл, когда действие суммы равно сумме действий отдельных слагаемых. В тот момент, когда мы имеем перед собой случай, где принцип суперпозиции несправедлив, нужно подвергнуть пересмотру целесообразность всякого спектрального метода.

Что касается второго момента — выбора в качестве слагаемых специальных функций, то здесь возникает вопрос: нет ли таких колебательных задач, при которых целесообразнее выбрать в качестве основных другие функции от времени, чем синусы. Мне кажется, что такие случаи вполне реальны, и мы как раз заняты в настоящее время вопросами, когда спектральный подход остается целесообразным, но в качестве основных функций надо взять не синусы, а другие периодические функции от времени.

Разрешите на этом закончить общую часть и перейти к рассмотрению некоторых основных проблем радиотехники.

Все проблемы радиотехники, я думаю, могут быть разделены на три категории: создание (генерация) колебаний, излучение колебаний и их распространение и, наконец, прием колебаний. Позвольте мне сегодня не касаться вопросов, относящихся к излучению и распространению колебаний, не потому, что они менее важны и интересны, чем остальные два. Но, во-первых, на все у меня нехватило бы времени, а во-вторых, потому, что наши работы относятся к вопросам генерации и приема. Я думаю, что будет в духе задач конференции, если я более подробно коснусь некоторых работ, которые проводятся у нас („у нас“ — это значит, как здесь, в Физическом институте, так и в ЦРЛ и отчасти в ГФТИ в Ленинграде, в лабораториях, руководимых проф. Н. Д. Папалекси, потому что работы, которые ведутся здесь, и те, которые ведутся там, настолько тесно переплетены друг с другом, что просто не представляется возможным их друг от друга отделить).

В чем основная проблема, которая стоит перед нами, когда мы говорим о генерации, о создании колебаний? Совершенно ясно: мы должны создать устройство, которое делает возможным возникновение устойчивых незатухающих колебаний. Эти колебания должны быть мощными, должны генерироваться с хорошим коэффициентом полезного действия и т. д. Здесь есть очень много побочных, привходящих моментов. Кроме того, преимущества тех или иных устройств оцениваются в высокой мере (теперь мы знаем это) и тем спектром, который они дают. В настоящее время мы считаем большей частью желательным, чтобы этот спектр был наиболее простым, т. е. чтобы он состоял из одной спектральной линии. Это значит, что мы хотим, поскольку это возможно, приблизиться к генерации синусообразных колебаний. С математической точки зрения дело сводится к установлению и интегрированию соответствующих дифференциальных уравнений, которые позволили бы нам теоретически исследовать зависимость, с одной стороны, между параметрами системы, как она нам дана, и с другой стороны, свойствами тех колебательных процессов, которые в этой системе происходят.

Классификацию как систем, так и процессов удобно делать, во-первых, с точки зрения физической, во-вторых, конечно, с точки зрения дифференциальных уравнений. Классификации здесь могут быть самые разнообразные. Можно, например, производить деление на системы, которые имеют конечное число степеней свободы, в предельном случае с одной степенью свободы, и системы сплошные или имеющие бесконечное число степеней свободы. И те и другие чрезвычайно важны, и те и другие играют очень большую роль как в электротехнике, так и в других областях. Первые управляются системой простых дифференциальных уравнений, вторые — уравнениями в частных производных.

Но можно и нужно итти дальше и характеризовать системы по типу тех дифференциальных уравнений, которым они подчиняются. Например, мы говорим о линейных системах или нелинейных, в зависимости от того, линейны или нелинейны уравнения, которыми они управляются.

Я должен сказать, что линейные системы до сих пор играли в теории колебаний самую большую, превалирующую роль. И действительно, громадная область как в применениях, так и в физических вопросах связана с такими системами, и математически эта область чрезвычайно интересна. Вся область классических краевых задач по существу относится именно к линейным системам дифференциальных уравнений, т. е. характеризуется тем, что их уравнения в частных производных суть уравнения линейные.

Но в тех проблемах, о которых я буду говорить, мы будем иметь нелинейные уравнения. Чтобы не усложнять вопроса и выделить принципиальные моменты, мы будем рассматривать уравнения с конечным числом степеней свободы, даже главным образом с одной степенью. Под эту схему подходит схематизированный обычный катодный передатчик. Мы постараемся изучить его уравнение и уточнить задачу, которая здесь нас интересует.

Если я возьму обычный контур и введу в него переменную электровозбудительную силу, то в нем возникнут колебания; и по существу это есть генератор колебаний. Но, если я буду его исследовать, я не охвачу вопроса о генерировании электромагнитных колебаний, потому что сейчас же явится вопрос, откуда я взял переменную электровозбудительную силу. Я только отодвинул этот вопрос. Значит, чтобы решить вопрос полностью, нужно обратиться к таким системам, которые не нуждаются в чужих колебаниях. Вот такие системы, которые производят колебания, грубо говоря, из себя, т. е. пользуются постоянным источником энергии, которые не нуждаются в других источниках колебаний, мы будем называть автономными колебательными системами. Более уточненная их математическая характеристика состоит в следующем: дифференциальные уравнения, которыми они управляются, явно времени не должны содержать. В математическом смысле это очень важное ограничение. Оно диктуется в данном случае именно нашими физическими соображениями.

Посмотрим, какая самая простая, с точки зрения математической, физическая система, которая была бы автономной системой. Какой тип дифференциальных уравнений самый простой? Несомненно, линейные уравнения. Если это автономная система, то коэффициенты уравнения не должны зависеть от времени, значит, они должны быть постоянными. Значит, самый простой тип автономной колебательной системы есть система, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно, такие системы существуют и таких систем очень много. Все системы, которые основаны на (достаточно малых) упругих колебаниях, системы, основанные на применении электрической цепи, состоящей из конденсатора и самоиндукции, например кабель и т. д., — все они с достаточным приближением описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Если мы обратимся к такой системе (остановимся на дискретных системах), то мы знаем всю математику, которая сюда относится. Мы знаем и мы умеем интегрировать уравнения. Предельный случай незатухающих колебаний — это синусообразные колебания или сумма синусообразных колебаний — вот все, что данная система может дать. Затем могут быть колебания с затухающей амплитудой и с возрастающей, причем возрастание (поскольку система остается линейной) и затухание происходят экспоненциально. Вот три типа, которые возможны в системах с постоянными коэффициентами. Таким образом, мы знаем здесь не только общий характер решений, но и все решение до конца.

Вот отсюда-то мы и можем заключить, что, для того чтобы создать устройства, которые дадут нам нужные колебания, линейные системы непригодны, потому что основное их свойство, непосредственно связанное с линейностью, заключается в том, что их амплитуда или, в конце концов, энергия, которую они дают, не есть свойство системы как таковой, а зависит вполне от начальных условий. Если вы зарядите в начальный момент такую систему определенной энергией, то и весь процесс на всем протяжении времени в смысле энергии существенным образом зависит от этих начальных условий.

Между тем, если вы посмотрите на все современные устройства, от которых требуется устойчивость, фактические устройства, с которыми мы работаем, они, конечно, этим свойством, или, вернее, этим недостатком, не обладают. Они обладают тем свойством, что колебания их устойчивы в том смысле, что если вы запустите их из какого-нибудь, в широких пределах произвольного, состояния, то они колеблются с определенным периодом и с определенной амплитудой. Они имеют стремление, независимо от начальных условий, устанавливаться в определенном режиме. Фактические устройства имеют это свойство. Я думаю, рационально требовать это свойство от хороших генераторов. Поэтому данное свойство мы можем положить в основу наших требований. И другие соображения, на которых не буду останавливаться, приводят к заключению, от которого, по-моему, нельзя уйти: требования, предъявляемые нами к генераторным устройствам, несовместимы с линейностью, а значит, те системы, которые нам нужны, должны удовлетворять нелинейным дифференциальным уравнениям.

Я думаю, что когда Майснер открыл свой принцип обратной связи, который лежит в основе современной радиотехники как приемной, так и передаточной, он меньше всего думал о дифференциальных уравнениях. Но теперь, когда дело идет о том, чтобы углубить и использовать эту основную идею, чтобы разнообразно ее применить, когда дело идет о все более и более увеличивающемся развитии устройств, на это ссылаться нельзя, а нужно обратиться к тому математическому аппарату, который адэкватен данной проблеме. И другого такого математического аппарата как аппарат, относящийся к нелинейным дифференциальным уравнениям, нет. Физика колебаний поставлена сейчас перед задачей ознакомиться серьезно с теорией нелинейных дифференциальных уравнений.

Но традиция и навыки — большая вещь. И естественно, что это так. И поэтому, не только в первое время, но даже и теперь в применении к заведомо нелинейным системам стараются все-таки подойти линейным способом. Я не могу отрицать, что некоторые результаты были при этом достигнуты. Но мы видели, что целый ряд принципиальных ответов не мог быть таким образом получен. Тогда вводили дополнительные предположения, которые не были включены в основную постановку и были сделаны ad hoc, но приводили к частичным успехам, потому что знали, что должно получиться. Иногда такой способ помогает, иногда не помогает, но всегда это паллиатив. Это во-первых. Во-вторых, мы знаем из опыта, что линеаризирование таких проблем приводило и прямо к ошибкам. Известная ошибка, которая тянется через литературу, заключается в следующем: дело идет о нахождении условий возникновения колебаний в генераторе. Тогда делают так: заведомо нелинейные колебания рассматривают при очень малых величинах отклонений, разлагают в ряд, ограничиваются первым членом и получают действительно линейные уравнения. Их мы можем решать. И вот, если получается амплитуда возрастающая, мы говорим, что у нас неустойчивое состояние, у нас нарастающий процесс. То, что можно и нужно при помощи линейных уравнений находить условия, которые необходимы для возникновения колебаний, это верно. Но потом поступают иногда так. Известно из теории линейных уравнений, что если вы будете дальше увеличивать „отрицательное" затухание, практически дальше увеличивать обратную связь, то тогда решения линейного уравнения перестают быть осцилляторными. Тогда рассуждают так: значит, наступает такой момент, после которого не может быть колебаний. Это вообще ошибочно. Заключить, какой процесс установится в нелинейных системах из поведения линейных систем нельзя.

А между тем это рассуждение, которое опытом и теорией опровергается, вы можете встретить и до сих пор.

Таким образом, нужно перестроиться и перейти к аппарату, который адэкватен данной проблеме. Это было осознано очень давно, вскоре после введения таких нелинейных систем в практику, после того как такие системы получили громадное распространение, громадное значение для действительного осуществления практических целей. И сама практика наталкивала на то, что нужно это делать так, как нужно. Появились работы, вполне сознательно стоящие на нелинейной точке зрения. Сюда особенно следует отнести работы ван-дер Поля, который это делал и правильно делал и результаты которого до сих пор имеют для нас основное значение. Он правильно поступал в том отношении, что знал, что эта нелинейная задача, и сразу к ней так и подходил. Но первоначальные работы, что весьма естественно, не имели той общности, которая, несомненно, желательна. Очень многие вещи просто постулировались. Например, очень часто постулировалось существование периодических решений, ряды, которые получались, часто не исследовались на сходимость. Кроме того, из-за отсутствия общего подхода, каждый случай трактовался отдельно. Несмотря на это, результаты были часто хорошие. Но тот математический современный аппарат, который существует, не был использован, а между прочим, такой аппарат существовал и существовал уже давно. Он находит свое основание, он заложен, так сказать, в знаменитых работах Пуанкаре восьмидесятых годов.[1] На ту связь, которая существует между этими работами Пуанкаре, работами, которые потом, особенно Биркгофом, были сильно углублены, на связь этих математических работ с нашими физическими проблемами указал А. А. Андронов. Он вместе с А. А. Виттом приспособил потом этот аппарат к нашим проблемам, применил его к целому ряду конкретных задач, проверил им решения задач, полученных другими авторами раньше, и сделал его более или менее рабочим аппаратом в нашей области. Оказалось, что основные результаты ван-дер Поля сохраняют свою силу. И теперь они являются частным случаем хорошо обоснованных общих теорем. Сам ван-дер Поль в одной из последних своих работ так на это дело и смотрит.

---

[1] Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles. Oeuvres, t. I. [Русский перевод — Анри Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.]

Но кроме того, оказалось возможным найти новые вещи. И затем некоторые вопросы, которые при прежнем подходе оставались или открытыми, или недостаточно освещенными, удалось таким образом, имея в руках общую теорию, осветить гораздо полнее. К этим вопросам я потом еще вернусь. А теперь позвольте мне обратить внимание на следующее.

Уравнения и математические вопросы, которые возникают при постановке проблем генерации электрических колебаний, оказывается, имеют гораздо более широкое значение, чем это может показаться на первый взгляд. Есть целый ряд вопросов, которые по существу приводят к той же самой постановке теоретической задачи. Я назову только некоторые из них: целый ряд проблем акустических, например звучание струны под действием смычка, звучание органных труб, звучание большинства музыкальных инструментов, за исключением ударных и щипковых, относятся сюда. Эти задачи и физически, конечно, чрезвычайно близки тем, которыми занимается радиотехника. Затем вопросы, относящиеся к теории регулирования машин (одна из чрезвычайно важных задач техники), находятся в близкой связи с этими же вопросами. Вопросы общей динамики полета имеют очень много общих черт и решаются этими же средствами. Но и некоторые другие, еще более далекие области сюда относятся. Например, вопрос о переменных звездах типа цефеид, вопрос колебательный, повидимому, сводится к задаче о нелинейных системах: там, повидимому, схематически говоря, устанавливаются такие же колебания, как и в генераторе. Далее, вы знаете, что в химии существуют так называемые периодические реакции. Нам кажется, что этот вопрос относится к этой же категории математических задач. Наконец, совсем уже из другой области: появилась несколько лет назад математическая работа Вольтерра, относящаяся к вопросу о сосуществовании двух биологических видов в зависимости от борьбы за существование. Повидимому, и этот вопрос приводит к совершенно аналогичной математической постановке.

Таким образом, вы видите, что эти методы Пуанкаре теперь получают все большее и большее значение. Не говоря о том, что они дают непосредственное направление для решения наших проблем, они и в других областях приобретают руководящее значание. Поэтому я думаю, вы позволите мне в нескольких словах остановиться на сущности этих методов в самом простейшем случае, хотя должен сказать, что более или менее вникать в это на нашем общем собрании едва ли имеет смысл. Все эти вопросы гораздо более углубленно будут разбираться на секциях. Здесь я ограничусь самыми поверхностными указаниями, причем я попросил бы математиков извинить меня за то, что я не буду стремиться к особой строгости изложения, не буду делать оговорок, которые с математической точки зрения следовало бы сделать, но я не буду их делать потому, что это утяжелит изложение, а моя цель — дать только самое общее представление.

Если написать уравнение, которому подчиняется самый простой генератор, который схематизирован, но сохраняет типичные свойства действительного генератора, то вы получите следующие выражения для тока или для напряжения на его конденсаторе:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = f(y, \dot{y}).$$

Вид функции f задается характеристикой катодных ламп, и дело здесь идет об интегрировании уравнения такого типа. При этом автономность нашей системы выражается в том, что явно время в эту функцию здесь не входит.

Положим $\dot{y} = x$. Тогда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\omega^2 y + f(y, x)}{x}. \tag{1}$$

Если несколько обобщим задачу, то решение нашей проблемы сведется к решению системы таких уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Система двух таких уравнений, очевидно, равносильна первому, если положить

$$P(x, y) = -\omega^2 y + f(y, x), \quad Q(x, y) = x.$$

Если я поделю одно на другое, я получу одно дифференциальное уравнение между x и y, и именно вышенаписанное уравнение (1). Вопросам интегрирования такого уравнения посвящены работы Пуанкаре.

Что значит проинтегрировать такое уравнение? Если мы назовем интегрированием нахождение функций, известных нам (это немного расплывчатое понятие), которые удовлетворяют этому уравнению, то эта задача вообще неразрешима — таких „известных“ функций, вообще говоря, нет. Если бы мы ставили вопрос так, что нужно выразить x в известных функциях в явном виде или в квадратурах от таких функций, то большинство задач физики и техники выпало бы потому что функции, определяемые этим уравнением, именно этим уравнением и определяются; другого определения, известного нам, они не имеют. Значит, является задача, как говорит Пуанкаре, из самого уравнения вывести основные интересующие нас свойства функции, им определяемой.

Эту задачу он себе и ставит и в первую очередь — выявить качественные свойства решений этого уравнения. Мы называем теперь такой способ подхода качественным интегрированием дифференциальных уравнений. Физически это означает следующее. Если мы сумеем качественно проинтегрировать, то мы получим картину качественного протекания процесса, т. е. мы сможем знать такие, например, вещи: может ли система быть в равновесии, может ли система создавать колебания, быть в колебательном состоянии, как зависят колебания от тех или иных свойств? Мы не сможем, вообще говоря, дать численного значения амплитуд, численного значения периодов. Но и такое, довольно ориентировочное знание дало бы чрезвычайно много.

К сожалению, проблемы нелинейных колебаний по существу своему гораздо сложнее проблем линейных колебаний. И поэтому требовать того, чтобы здесь мы получили те полные знания, которые мы имеем там, в настоящее время мы, наверное, не можем. Поэтому мы часто должны удовлетворяться этим качественным решением задач. Но и эти качественные результаты играют для нас, как сказано, громадную роль.

Обратимся к математической стороне вопроса. Мы хотим исследовать y как функцию от x, причем зависимость y от x дана уравнением

$$\frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Геометрически это значит: найти поведенне интегральных кривых в плоскости XY. Я напомню физическое значение величин x и y в наших простых случаях: если y напряжение на конденсаторе, то x — ток. Плоскость XY мы будем называть фазовой плоскостью. Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения на фазовой плоскости весьма удобна и существенно помогает выражать и интерпретировать аналитические соотношения.

Известно следующее: пусть P и Q будут регулярными функциями; в наших физических задачах это так. Тогда, вообще говоря, через каждую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Но что значит точка на фазовой плоскости? Это значит одновременное значение тока и напряжения. Вы задали ток и напряжение и на фазовой диаграмме этому соответствует одна из точек. Значит, при заданном начальном токе и напряжении у нас поведение системы задано однозначно. Но есть и исключения в поведении интегральных кривых. Исключение составляют именно те точки в которых как P, так и Q обращаются в нуль. Эти точки называются особыми точками. И вот оказывается, что эти особые точки соответствуют положению равновесия нашей физической системы. Другими словами, это значит следующее: наш передатчик, вообще говоря, будучи включен, колеблется, т. е. не находится в равновесии. Но мы хотим знать, есть ли такие состояния передатчика, т. е., такие значения напряжения и тока, при которых колебаний нет, которые могут оставаться неизменными. И теперь мы знаем, как это узнать. Если в фазовой плоскости есть особые точки, положения равновесия существуют, и координаты этих точек дают значение тока и напряжения, при которых это равновесие имеет место. Аналитически это сводится к решению двух совместных алгебраических или трансцендентных уравнений

$$P(x, y)=0, \quad Q(x, y)=0.$$

Вид функций P и Q известен, коль скоро дано устройство передатчика.

Теперь вот что интересно. Пуанкаре обратил внимание на то что есть (если отвлечься от совсем исключительных случаев) четыре рода равновесия нашей системы.

Это очень интересное исследование, которое вообще делит все возможные положения равновесия на четыре класса (рис. 1). Если теперь обратимся к уравнению (1), то мы можем сказать: один класс всегда неустойчивый, т. е. соответствует неустойчивому равновесию, другой соответствует устойчивому равновесию, а два остальных могут соответствовать и устойчивому и неустойчивому равновесию. Но в исследованиях Пуанкаре самое интересное заключается в следующем. Количество и свойства особых точек, их расположение в известном смысле предопределяют поведение интегральных кривых. Значит, уже одно существование условий равновесия ограничивает и возможности движения. Оно, с одной стороны, говорит, что в такой-то системе, обладающей такими-то условиями равновесия, колебания вообще невозможны в такой-то вообще могут быть, не всегда будут, но возможны.

Какие же интегральные кривые особенно для нас важны? Совершенно особый интерес представляют для нас замкнутые интегральные кривые. Почему нас интересуют замкнутые интегральные кривые? Легко видеть, что замкнутая кривая в плоскости XY отображает физический процесс колебательного движения и именно установившийся периодический процесс. Действительно, предположите, что у нас есть такая замкнутая кривая. Что это значит? x и y — отображение тока и напряжения или координаты и скорости. Если мы проследим процесс во времени, то изображающая точка движется по интегральной кривой. Если интегральная кривая замкнута, то она, двигаясь по ней, возвратится в первоначальное положение через некоторое конечное время (мы предполагаем, что на кривой нет особой точки). Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что если точка возвратилась в первоначальное положение, т. е. если координаты обе одновременно вернулись к первоначальному значению, то точка продолжает дальше двигаться совершенно так же, как в промежутке времени, за который она пробежала замкнутую кривую в первый раз, т. е. процесс повторяется второй, а также третий раз и т. д. Интегральная замкнутая кривая изображает периодическое решение уравнений. Она отображает незатухающий колебательный процесс. Поэтому разыскание замкнутых кривых — это основная задача в вопросе о решении наших колебательных задач в линейных и нелинейных системах.

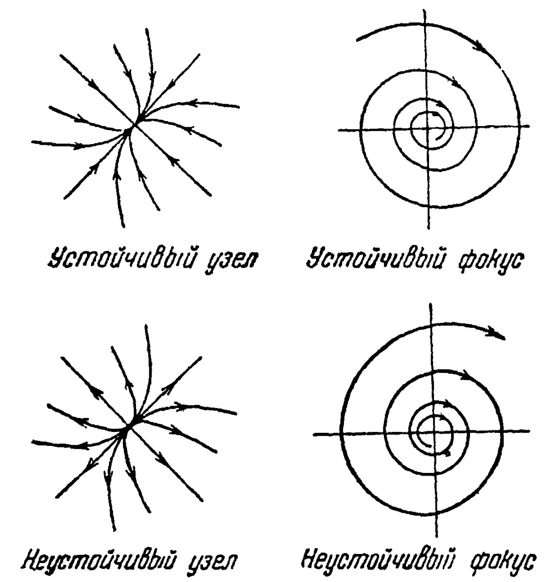


Рис. 1. Характерные типы особых точек и схема поведения интегральных кривых вблизи этих точек. Устойчивый узел, например, соответствует апериодическому разряду конденсатора, устойчивый фокус — колебательному разряду конденсатора

Итак, вторым существенным элементом теории Пуанкаре, играющим наряду с особыми точками особо важную для нас роль, являются замкнутые интегральные кривые, потому что они изображают периодические колебательные процессы, которые мы хотим изучать. И оказывается, как я уже указал (отчасти, конечно, я говорю несколько суммарно), в зависимости от свойств особых точек и расположение этих замкнутых интегральных кривых различно.

Позвольте мне остановиться несколько подробнее на одном относящемся сюда, для нас чрезвычайно существенном вопросе.

Мы различаем, как известно, системы консервативные и неконсервативные. Первые характеризуются тем, что они управляются уравнениями гамильтонова типа (или, если хотите, соответствующие уравнения допускают интеграл энергии). Оказывается, что для консервативных систем возможны, если мы исключим особые точки высших порядков, только два рода особых точек, так называемые центр и седло (рис. 2). Рассмотрим наипростейшую картину: существует одна особая точка. Тогда справедливо следующее: если мы имеем седло, то замкнутых интегральных кривых нет, установившиеся колебания невозможны. Если особая точка — центр, то через каждую точку плоскости проходит одна замкнутая кривая, т. е. возможно бесконечное множество незатухающих колебательных процессов.

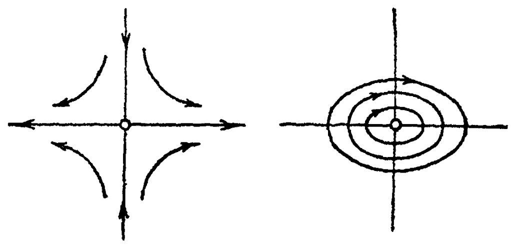


Рис. 2. Характерные типы особых точек

a — седло — всегда неустойчиво. Пример—обычный маятник в верхнем положении равновесия; *b* — центр, устойчив, соответствует идеальному (без трения) маятнику около нижнего положения равновесия

Действительно, если все интегральные кривые замкнутые, то где бы вы ни поместили вашу точку, т. е. с какими бы начальными значениями точки и напряжения вы ни пустили бы передатчик, он будет совершать сразу незатухающие колебания. И при различных начальных условиях все эти процессы будут различны, т. е. для нелинейной, но консервативной системы мы имеем опять то, что установившийся колебательный процесс совершенно зависит от начальных условий. Как его период, так и энергия не присуща, так сказать, самой системе, а задается начальным положением. А ведь мы требуем, чтобы с каких бы начальных положений мы ни начали, наша система установилась бы в определенных устойчивых колебаниях. Консервативные системы нам не годятся.

Как обстоит дело с неконсервативными системами? Здесь, оказывается, существуют замкнутые интегральные кривые, но совсем другого типа (рис. 3,*a*). Они встречаются изолированно. Другие же интегральные кривые, не замкнутые, спирально приближаются к ним и навиваются на них с внутренней и внешней стороны. Вот системы, которые обладают такими изолированными, замкнутыми интегральными кривыми, это то, что нам нужно. Это значит, что если вы начинаете с некоторой точки, система бежит по этой спиральной кривой и приходит к некоторой замкнутой кривой и там остается. Это действительно изображает тот факт, что наши генераторы обладают стремлением к одному определенному, точно выраженному колебательному процессу. Такие кривые Пуанкаре называет предельными циклами, и важность этих кривых наряду с особыми точками теперь очевидна.

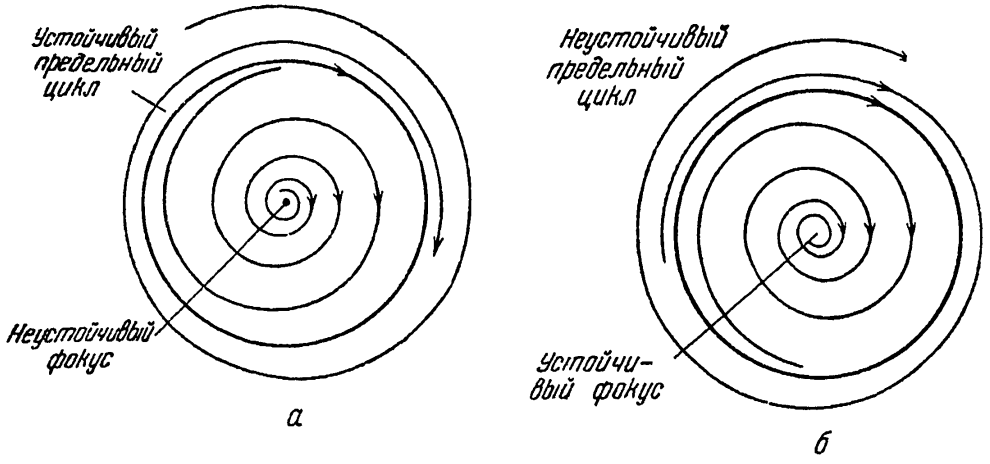


Рис. 3. Предельные циклы и схема хода интегральных кривых вблизи циклов
a — устойчивый цикл; *b* — неустойчивый цикл

Значит, наша задача при постановке той или иной физической проблемы заключается в следующем: нужно установить дифференциальные уравнения и постараться выяснить, как расположены и какого типа особые точки, как расположены предельные циклы, каков их тип и какого рода связь между особыми точками и предельными циклами. Эта задача по существу не особенно легка. Я говорю о типах предельных циклов. Я бы хотел указать на то, что есть предельные циклы, на которые интегральные кривые навиваются, — это те, которые нам нужны, это устойчивые системы. И есть предельные циклы, от которых разворачиваются интегральные кривые. Это нам не годится, это неустойчивые системы. Нам главным образом важны предельные циклы устойчивые. И вот теория Пуанкаре дает в качественном отношении указания, как сожительствуют особые точки и циклы, т. е. положения равновесия и периодические решения между собой. По расположению одних, по их форме, их роду вы многое можете предсказать относительно других. И это для нас чрезвычайно ценно. Для иллюстрации я укажу на один, правда чрезвычайно простой пример: внутри замкнутой кривой должна находиться всегда по крайней мере одна особая точка. В переводе на наш язык это значит, что колебание может совершаться только по обе стороны от положения равновесия. И далее, оказывается, что не все положения равновесия могут дать начало таким циклам. В механических примерах эти простые положения, которыми, конечно, не ограничивается теория (это само собой понятно), тривиальны. Мы видим часто эти соотношения без всякой специальной теории, но уже в электричестве эта очевидность нас оставляет, и во многих случаях мы можем сделать важное, далеко не очевидное заключение. Укажу на некоторые вопросы: вопрос о срыве, о жестком и мягком возбуждении, чрезвычайно важные для нас вопросы, которые находят ясное выражение на языке предельных циклов и особых точек. Я не могу на этом больше останавливаться, скажу только, что я убежден, что это наглядное геометрическое представление, дающее, правда, качественную, но очень хорошую картину возможных процессов, через короткое время войдет в обиход физика и, пожалуй, инженера.

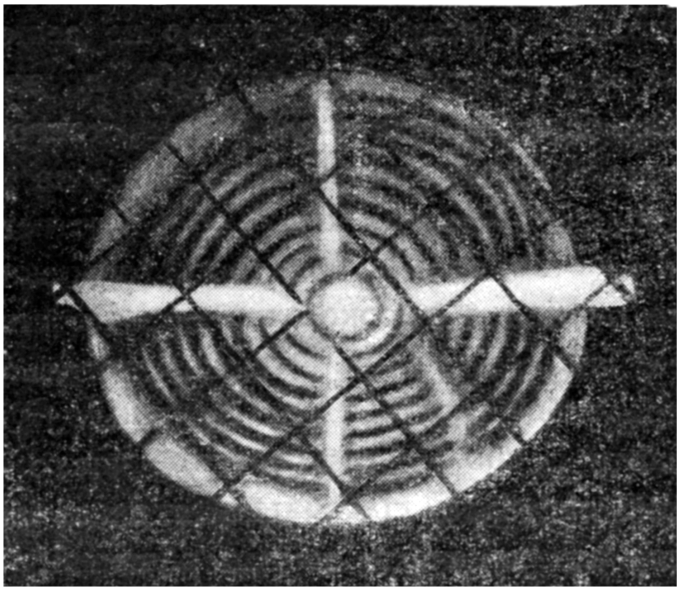


Рис. 4. Фотография экспериментального предельного цикла (по работе Г. Остроумова)

Может быть, все рассуждения станут нагляднее, если я покажу вам экспериментальный предельный цикл (рис. 4). Можно заставить генератор зачертить такой предельный цикл. Если вы будете действовать соответствующим образом на брауновскую трубку, на катодный осциллограф, то можно сделать так, что одно отклонение будет пропорционально току, другое — пропорционально напряжению и тогда такая точка просто начертит предельный цикл.

Одна из первых задач, которая ставится, когда вы исследуете новые устройства, это вопрос, существует ли цикл вообще. Часто можно сравнительно простым рассуждением доказать существование цикла. Я не знаю, где он лежит, не знаю ни амплитуды, ни формы колебания, но я знаю, что он есть. Это уже очень много, но, к сожалению, мы во многих случаях и этого сделать не можем. И я должен характеризовать этот качественный метод интегрирования дифференциальных уравнений так: он дает аппарат, который позволяет мыслить образами, чрезвычайно адэкватными, и часто позволяет сделать ценные заключения о поведении системы. Но здесь еще очень много нужно и, повидимому, можно сделать. Эта теория несовершенна, и в том виде, как она существует сейчас, как с математической, так и с физической стороны подлежит еще углублению. Укажу, например, на такую математическую задачу, которая, насколько я знаю, до сих пор не решена, хотя, казалось бы, она довольно проста. Еще в 1900 г. знаменитый немецкий математик Гильберт на математическом конгрессе в Париже поставил ряд основных, по его мнению, задач из различных математических дисциплин. Одна из них непосредственно к нам относится. Пусть P и Q — полиномы некоторой степени. Это довольно хорошо, при не особенно высокой их степени, апроксимирует наш практический случай генератора. Нужно указать наибольшее возможное число предельных циклов при заданных P и Q. Физически это значит — найти наибольшее возможное число колебательных состояний данной системы. Насколько я знаю (я, правда, не математик), до сих пор эта задача не нашла решения.

Что нам нужно было бы — это следующее. Нам дана характеристика, например, графически. Является вопрос такого рода: можно ли из некоторых свойств ее, не входя в большие детали этой функции, например из существования асимптотических значений (физически это значит существование тока насыщения), заключить что-либо относительно тех колебательных возможностей, которыми данная система обладает. Во многих случаях мы не можем этого сделать, в частных случаях мы это сделать можем. Решение этой задачи было бы очень полезно.

Но я принужден оставить этот вопрос и обратиться к следующему. Изложенный выше подход к нашим вопросам качественный. Но, конечно, физик и в особенности техник качественными ответами, вообще говоря, удовлетвориться не может. Ему нужно получить численные данные, ему нужно предоставить, конечно с приближением, процессы при помощи известных ему функций или, говоря конкретно, при помощи функций, для которых существуют таблицы. Вот что ему нужно, чтобы вычислять и предвидеть то, что будет, чтобы построить соответствующим образом свои устройства.

Что же мы можем сказать относительно количественных вычислений даже в простейшем случае одной степени свободы? К сожалению, немного. Нам нужно было бы найти возможно простой алгоритм, который позволил бы приближенно вычислять эти предельные циклы для общих случаев в виде ряда Фурье или чего-нибудь вроде этого. Но пока мы этого сделать не можем. В одном случае, а именно если нелинейные члены достаточно малы (а этот случай достаточно часто на практике встречается), пользуясь работами Пуанкаре (которые развиты им совершенно для других целей, именно для целей небесной механики), оказалось, возможным довести решение до конца. Здесь можно не только решить вопрос о том, существует или не существует предельный цикл, но довести и количественно решение задачи до такой степени, что оно позволяет систематизировать добытый экспериментальный материал и служит руководством для постановки новых опытов, их оценки, оценки того, что нужно сделать для того, чтобы получить тот или иной эффект. Одним словом, мы можем для этих, повторяю, практически важных случаев получить то, что нам нужно. Есть и другой предельный случай, к которому также можно подойти количественно. Я имею в виду релаксационные колебания, но, к сожалению, я на них останавливаться не могу.

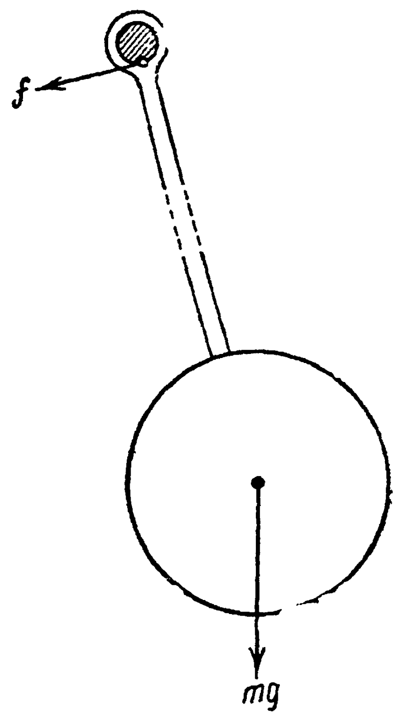


Рис. 5. Схематический чертеж маятника Фроуда

Я уже указал, что эти вопросы относятся не только к нашим задачам электромагнитных колебаний. Я перечислил ряд вопросов, где предельные циклы имеют точно так же большое значение. Чтобы привести еще один интересный пример, я укажу на следующее: если дело идет о динамике полета, специально об аэроплане, летящем в вертикальной плоскости, с постоянным углом атаки и некомпенсированной тягой пропеллера, то вопрос о мертвых петлях сводится при соответственных исходных уравнениях на разыскание предельных циклов. Это показал Дюляк, это же воспроизвели Андронов и Витт.

Кроме тех случаев, о которых я говорил, есть одна очень простая механическая модель, которая подчиняется в первом приближении тому уравнению, которому подчиняется и наш генератор. Это прибор, который мы называем маятником Фроуда. Устройство его состоит в следующем (рис. 5). Представим себе жесткий маятник не на острие, а снабженный муфтой. В муфту входит ось, которой можно придать постоянное вращение посторонней силой, например привести во вращение мотором. Если вы напишите уравнение для малых отклонений этого маятника, то получите с достаточным приближением следующее уравнение:

$$\ddot{\varphi}+n^2\varphi=f(\omega-\dot{\varphi}).$$

Справа будет момент вращения, который действует на маятник со стороны вращающейся оси благодаря трению. Этот момент будет функцией от постоянной скорости вращения вала ω и от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$. Вы видите не что иное, как наше исходное уравнение. При соответствующих условиях маятник должен начать раскачиваться в собственном периоде (вал вращается мотором с постоянной скоростью), а затем должно наступить, и во всяком случае возможно, установление незатухающих колебаний.

Нас занимала мысль исследовать такой маятник по следующим соображениям: на такой механической модели явления, которые нас интересуют, например, в генераторе неустойчивость положения равновесия, нарастание колебаний, установление стационарных колебаний, могут быть прослежены и изучены чрезвычайно просто. Здесь мы просто видим, как все происходит.

Такой маятник построен и исследован С. П. Стрелковым. Стрелков, действительно, во всяком случае качественно, наблюдал те явления, которые предсказывает теория и с которыми мы знакомы из области электромагнитных колебаний. Неустойчивость положения равновесия, нарастание, т. е. спиральные интегральные кривые, установившийся режим — предельный цикл. Правда, здесь не было того постоянства, которое желательно было бы для количественных исследований, но этого можно, вероятно, достигнуть. Замечу, что такого рода маятник в свое время был построен Н. Е. Жуковским. Но Жуковский, насколько я знаю, интересовался созданием подвеса без трения. На нашем языке разница между интересом Жуковского и нашим выражается так: Жуковский интересовался случаем центра и интегральными кривыми, соответствующими этому случаю. Мы же интересуемся предельными циклами, чем, повидимому, Жуковский тогда не интересовался. Это две различные проблемы, а поэтому и условия должны быть подобраны иначе.

Но помимо того, эта модель, если ее соответственно развить, может быть, окажется полезной в другом смысле. Дело в том, что весь процесс связан с видом функции f, а вид этой функции зависит от характеристики трения, т. е. от того, как зависят коэффициенты трения от скорости. Таким образом, изучая эту модель, мы, может быть, получим способ изучения зависимости трения от скорости. Этот вопрос ведь играет большую роль в технике вообще, и этот способ может оказаться более полезным, чем имеющиеся до сих пор, потому что он прямой, потому что он может давать не только само трение, но и непосредственно производную трения по скорости, между тем как сейчас эта производная строится из кривой трения. Такой прямой метод может, конечно, иметь преимущества.

То, о чем мы говорили до сих пор, относится к разысканию периодических решений, к выяснению вопроса об их числе, о том, какой они формы и т. д. Но физик требует еще дополнительного исследования. Физик требует (техник, конечно, также) ответа на следующее. Пусть найдено периодическое решение. Возникает вопрос, устойчиво ли оно или не устойчиво, т. е. здесь возникает такой же вопрос, как и при исследовании положения равновесия. Если окажется, что ваше решение неустойчиво, например пусть это будет предельный цикл, но такой, с которого разворачиваются кривые, то, конечно, оно для генератора служить не может. Малейшее удаление сейчас же повлечет к нарушению стационарных колебаний, например срыву. И вот возникает вопрос об устойчивости периодических решений, возникающих в нелинейных неконсервативных системах.

Как же здесь обстоит дело? Оказывается, полный математический аппарат для этого существует и именно в работах Ляпунова. Ляпунов с большой полнотой решил вопрос как об устойчивости равновесия, так и об устойчивости периодических решений в неконсервативных системах.

Здесь интересно отметить следующее. Когда Ляпунов делал свою работу, эти технические задачи еще не возникали, да и радио не знали еще. Он создал эту теорию главным образом из абстрактного математического интереса. А потом положение известным образом обратилось: когда создавали технические и физические устройства, о которых я говорил, о Ляпунове не знали. И физическая практика потребовала методов, которые позволили бы решать задачу об устойчивости по отношению к конкретным физическим вопросам. И оказалось, что благодаря тому, что Ляпунов заинтересовался математическим вопросом, у нас аппарат есть, и мы ничего другого не должны делать, как просто этот аппарат привлечь. Это и делается, и получаются ответы, которые нужны.

Вот что получается. Вопрос об устойчивости и неустойчивости положения равновесия нелинейных систем приводит к разбору специального линейного уравнения (мы знаем, как его составлять)- это линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Вопрос же об устойчивости или неустойчивости периодических решений может быть сведен тоже к линейным уравнениям, но с периодическими коэффициентами. И таким образом в поле нашего зрения необходимо вступает теперь новый класс дифференциальных уравнений — линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Теория такого линейного уравнения известна. Я бы хотел только показать ее отличительные черты. Самое простое такое дифференциальное уравнение выглядит следующим образом:

$$\ddot{y} + \alpha^2 (1 + q \cos 2t) y = 0.$$

(Я пишу в канонической форме, выбрав определенные единицы для периода изменения коэффициента.) Это так называемое уравнение Матьё. И на подобный тип уравнений сводится вопрос об устойчивости и неустойчивости периодических решений. И вот что оказывается. Эти уравнения имеют вообще решения различного типа. Смотря по тому, в каком соотношении находится величина q, которая дает амплитуду колебания коэффициента, и величина α, которая дает среднюю частоту, положение может быть таково, что колебания из начальных границ не выходят, т. е. если они (решения или колебания) были вначале малы, то и остаются малыми. Если положение таково, то мы говорим, что решение устойчиво. Если, наоборот, соотношения другие, то бывает, что решение этого уравнения обладает таким свойством, что каким бы малым вы его ни задавали вначале, оно экспоненциально растет в гору, все увеличивается и увеличивается. В этом случае наше уравнение, которое мы вывели в качестве критерия для устойчивости и неустойчивости, показывает, что наше первоначальное решение неустойчиво. Таким образом, мы можем решить, исследуя соответственные линейные уравнения с периодическими коэффициентами, вопрос об устойчивости колебательного процесса, даваемого нашим исходным нелинейным уравнением.

Для нас решение этих задач уравнения с периодическими коэффициентами играет служебную роль. Они призваны решать вопрос о стабильности или нестабильности решений уравнений, которые сами по себе нелинейны. Но физик начинает подходить к этому и с другой точки зрения. Есть целый ряд больших физических проблем, которые приводят к такому же типу уравнений, например вопрос о колебаниях эллиптической мембраны, а также колебаниях спарников в электровозах.

Я укажу еще на проблемы из совершенно другой области. Одна из существеннейших задач современной волновой механики — это вопрос о металлах. И вот, вопросы о металлической проводимости и многие другие вопросы, относящиеся к металлу, непосредственно сводятся к таким линейным уравнениям с периодическими коэффициентами.

Там они играют громадную роль, там вопрос об устойчивых и неустойчивых решениях этих уравнений как таковых имеет первенствующее значение, но, правда, там усложняется дело тем, что имеется не одна степень свободы, а $3n$, потому что там есть пространственная решетка и уравнение более сложное, но принципиально оно одно и то же. К этому же типу уравнений приводит ряд задач и из других областей. На одной из них позвольте остановиться несколько подробнее.

В самом деле, представьте, что у вас есть контур, в котором вы берете емкость или самоиндукцию и периодически изменяете ее величину. Тогда уравнение для колебания в этом контуре есть уравнение с периодическими коэффициентами и период коэффициента задан, поскольку задано изменение емкости или самоиндукции во времени.

Чего же мы должны ожидать, если мы только что сказанное применим к данному физическому случаю? При известных соотношениях (а именно при тех, при которых решение уравнений устойчиво) ничего не произойдет. Вы немного зарядите конденсатор, но ничего интересного не будет, будет маленькое изменение, и оно скоро затухнет. Но мы знаем, что есть такие соотношения между α и q, при которых, как бы ни мало было начальное состояние, как бы ни малы были начальные токи, они нарастают все больше и больше. Значит, чего нужно ожидать? Если вы возьмете контур с емкостью и самоиндукцией и будете, скажем, емкость в определенном темпе, с определенным размахом изменять периодически (а темп можно всегда подобрать такой, чтобы условие, которому нужно удовлетворить было выполнено), то что случится? Так как во всяком контуре малые токи всегда существуют, хотя бы в силу статистических флуктуаций, то значит, если вы не дадите никакой электровозбудительной силы, а просто будете изменять емкость, то в таком контуре должны спонтанно возникнуть колебания.

Совершенно аналогичное заключение справедливо и для того случая, когда периодически меняется самоиндукция контура. Мы, таким образом, можем сказать, что создаем электрические колебания из ничего, поскольку первоначально нам нет надобности создавать ни электрических, ни магнитных полей. Здесь мы, конечно, имеем превращение механических колебаний непосредственно в электрические. Мы имеем особый тип генератора переменного тока. Теперь мы знаем это. Нам нужно сказать, что на эту возможность обратил внимание еще лет пятьдесят назад Релей. У него об этом сказано немного, но указание на возможность такого явления у него есть.

Теперь такой генератор специальной, весьма простой конструкции осуществлен нами в лаборатории ГФТИ, руководимой проф. Папалекси.

Очень просто уяснить себе физически, как происходит в таком генераторе процесс нарастания колебаний.

Разрешите мне коротко остановиться на этом и взять для простоты схематический случай. Я буду предполагать, что мы периодически изменяем емкость. В осуществленной модели меняется, как мы увидим дальше, самоиндукция. Но случай с меняющейся емкостью, мне кажется, несколько более нагляден. А по существу можно, конечно, перенести почти без изменений все рассуждения на изменение самоиндукции. Я скажу об этом очень кратко, чтобы не задерживать, но идею все-таки скажу.

Представьте, что мы поступаем следующим образом. Возьмите цепь, состоящую из емкости и самоиндукции, причем конденсатор состоит, скажем, из двух параллельных пластин. Представьте себе, что на конденсаторе находится как угодно малый заряд, а тока в этот момент нет. И в этот момент раздвиньте пластины. Так как заряд есть, то вы затратите некоторую работу. Теперь идет разряд, вся потенциальная энергия обратится в кинетическую, в данном случае — магнитную. Та работа, которую мы затратили на раздвижение, также обратится в магнитную энергию. Ток будет, значит, несколько более сильным, чем был бы, если бы вы этого раздвижения не сделали. Через четверть периода заряд равен нулю, вся энергия находится в магнитном поле и в этот момент вы можете сдвинуть опять пластины, но не производя при этом никакой работы, и прождать еще четверть периода. Теперь вся энергия перешла опять в электростатическую, но теперь ее больше, чем было вначале, именно на ту энергию, которую вы создали, раздвигая пластины конденсатора. Вся же цепь в смысле емкости и самоиндукции пришла в прежнее положение. Значит, при одном таком цикле вы получили увеличение заряда. Повторяя тот же прием дальше и дальше, вы будете получать непрерывное нарастание зарядов.

Из всего того, что мы здесь сказали, ясно, как нужно действовать: нужно менять емкость вдвое быстрее, чем собственный период нашей цепи. За полный период собственных колебаний нужно два раза сдвинуть и раздвинуть пластины. Вот тот физический механизм, который лежит в основе математической трактовки вопроса. Более подробный анализ показывает: 1) что нет надобности делать изменение параметров скачками; качественно тот же результат получится и при плавном периодическом изменении емкости или самоиндукции; 2) нет надобности, чтобы период изменения был ровно вдвое меньше собственного периода; здесь допустимы известные отклонения; наконец, 3) качественно те же явления получаются при наличии в контуре не слишком большого сопротивления. Как уже отмечено выше, в осуществленной модели изменялась самоиндукция. Практически это ведет к более выгодной конструкции. При соответственном числе оборотов наступает то явление, о котором шла речь выше. Напряжение и ток нарастают. Это напряжение, если специально не демпфировать, доходило в наших опытах до 15 тыс. вольт в очень короткое время. Дальше нельзя было итти, потому что изоляция не выдерживала. Если включить сопротивление, величина которого зависит от тока, то можно получить стационарное состояние. Замечу, между прочим, что стационарное состояние из линейного уравнения получить, конечно, никак нельзя. Такое состояние может установиться и действительно устанавливается только при наличии в цепи нелинейных проводников. Получилось несколько сот ватт. Ротор приводился в движение мотором с редуктором, причем число оборотов оси достигало при этом 15 тыс. в минуту, число периодов было приблизительно 1700 в секунду. Это соответствовало возбуждению колебаний половинной частоты, значит, генератор давал частоту в 850 периодов в секунду. Ток устанавливался, горели лампы и т. д. Будет ли этот генератор иметь практическое значение и какое, об этом пока преждевременно что-нибудь сказать.

Позвольте мне на этом закончить общие вопросы, относящиеся к одной степени свободы. Вы видите, что этот простейший случай требовал большого нового математического аппарата. Но на этом остановиться мы не могли. Практика физика требует настоятельно и теоретической обработки более сложных систем, именно систем со многими степенями свободы. И тут я могу ограничиться очень коротким замечанием, потому что должен откровенно сказать, что в этом отношении с теоретической точки зрения мы знаем немного. Вместо фазовой плоскости для одной степени свободы мы здесь должны иметь дело с фазовым пространством многих измерений. В качестве стационарного предельного установившегося состояния при одной степени свободы возможны или положения равновесия или периодический процесс. Квазипериодические явления, т. е. колебания с двумя несоизмеримыми периодами там возникнуть не могут. В более сложной системе, уже в системе с двумя степенями свободы, возможны, во-первых, состояния равновесия, затем периодические процессы, затем квазипериодические и другие еще более сложные.

Явления в системах с двумя и более степенями свободы представляют большой интерес. Ведь сюда относятся явления биений, имеющие чрезвычайно существенное значение. Однако, как я уже сказал, здесь у нас нет полной теоретической ясности. Замечу, что если мы будем говорить даже только о состояниях равновесия и периодических решениях, то в случае $n>2$ законы сожительства будут совершенно иными. Благодаря увеличенному числу измерений интегральные кривые приобрели, так сказать, большую свободу.

Я думаю, математики действительно могут нам здесь помочь. Вряд ли мы справимся с этими математически, повидимому, трудными вопросами без помощи математиков.

Позвольте мне закончить этот отдел еще одним общим замечанием. Я говорил, я часто напоминал, что мы требуем доказательства существования периодических решений, что это очень важная часть наших теоретических исследований. Часто приходится слышать следующие соображения: действительно, очень важно иметь теорию, которая позволяет нам рассчитывать амплитуду, рассчитывать периоды, но зачем вам заниматься вопросом о существовании периодических решений? Не есть ли это просто математическая забава, потому что мы ведь на опыте убеждаемся, что такие процессы в данной системе существуют. Когда вы пишете дифференциальные уравнения какой-нибудь физической задачи, вы всегда и неизбежно данную проблему чрезвычайно упрощаете. Вы всегда пишете уравнение не для данной проблемы, а для идеализированной, упрощенной. Откуда вы знаете, что вы учли все существенные черты данной проблемы? И вот, если доказательство существования приводит к тому, что существуют периодические решения и это на опыте оправдывается, то это уже известный аргумент, что вы не упустили существенных черт, потому что существенными чертами мы считаем те, которые обусловливают возможность колебания.

Но это только косвенные указания. Что же будет, когда в процессе доказательства существования вы натолкнулись на то, что наши дифференциальные уравнения не имеют периодического решения, а объект, для которого вы его создали, имеет? Тогда вы, наверное, можете быть убеждены, что не учли самых существенных черт. Тогда вы начинаете искать, какие черты вы упустили. И практика знает примеры, когда поиски доказательств существования наводили на соображение о том, где искать эти упущения, помогали найти нужное и поставить, таким образом, всю проблему на правильные рельсы.

Я приведу совершенно элементарный пример. Конечно, вы все знаете, как во многих учебниках, особенно более старых, излагается теория простого электрического звонка или, скажем, электромагнитного прерывателя. У вас ударник или якорь в положении равновесия замыкает контакт электрической цепи, в которую включен электромагнит, действующий на якорь. Когда вы включаете батарею, электромагнит притягивает ударник, ток разрывается, сила магнитов пропадает, пружина гонит ударник обратно, контакт опять замыкается и, как сказано — я нарочно посмотрел в одном хорошем учебнике, — „das Spiel geht weiter", или „игра продолжается дальше".

И вот, если вы эти соображения перенесете на язык дифференциального уравнения, то легко доказать, что существующее дифференциальное уравнение не позволяет, чтобы игра начиналась сначала, оно не имеет периодического решения. Значит, здесь что-то существенное упущено. И действительно, теория прерывателей не так проста, как кажется. Мы знаем, например, какую существенную роль в вопросе о возможности колебаний играет самоиндукция. Успех в задаче прерывателя сделан работой М. А. Леонтовича. Из нее с ясностью видно, как влияет самоиндукция, которая определяет не только возможность самого процесса, но и период колебания, который отличен от периода камертона или самого ударника. Таким образом исследование существования или несуществования периодических решений указывает на существенные черты, указывает, как их надо учесть. Я мог бы привести и другие примеры, где ясно было бы, что польза от таких исследований вполне реальна.

Позвольте мне теперь еще вкратце сказать несколько слов о второй основной проблеме, о проблеме приема. Поскольку дело идет о приеме линейными системами, я думаю, принципиальных вопросов не возникает. Здесь дело обстоит примерно следующим образом. Изучением спектра приходящего сигнала и спектра помех задача с принципиальной стороны исчерпывается. В конкретных случаях иногда быстрее приводят к цели отличные, во всяком случае — по форме, от спектрального подхода приемы, но это, конечно, принципиально не нарушает правильности высказанного положения.

Практически важные и интересные вопросы обусловливаются здесь, как известно, антагонизмом между двумя требованиями — селективностью приема и быстротой приемной работы. Вы знаете, в чем состоит этот антагонизм. Если вы хотите, вы можете построить приемник так, чтобы он практически реагировал на одну определенную длину волны, одно определенное колебание, одну определенную синусоиду. Если взять достаточно маленькое затухание, то мы этого достигнем с достаточным приближением. А сегодня мы имеем средство делать затухание очень малым. Тогда этот приемник почти не будет реагировать даже на колебание, близкое к его собственному. Он себя очень оберегает от посторонних колебаний, в том числе и от атмосферных помех. Эта нечувствительность к чужому воздействию на первый взгляд очень хороша. Но, к сожалению, такое приемное устройство не решает основной проблемы связи. Такой приемник не может сообщать ни о чем другом, как только о том, что передатчик включен.

Предпосылкой для связи является возможность принимать сигналы. Сигнал же заключается в том, что на передающей станции определенным образом в определенном темпе мы изменяем форму колебания передатчика, или, как мы говорим, модулируем его, давая точки и тире ключом, или изменяя амплитуду в темпе акустических колебаний нашего разговора.

Но такое модулированное колебание уже имеет сложный спектр. Этот спектр несет в себе характеристику или форму сигнала. Чтобы принять сигнал неискаженным, нужно принять весь его спектр. Приемное устройство, которое оберегает себя от посторонних влияний тем, что принимает только очень узкую область спектра, неспособно также принять и спектр сигнала.

И здесь существует замечательная зависимость: чем короче точка или тире, чем выше акустический тон, модулирующий передатчик, тем шире область частот в спектре сигнала, тем менее селективен должен быть приемник, для того чтобы иметь возможность принять спектр предназначенного ему сигнала. Быстрая работа несовместима с большой селективностью. Я замечу, что соотношение, о котором только что была речь (его можно схематично сформулировать так: чем короче длится синусообразное колебание во времени, тем шире занимаемая им спектральная область, или более обще: точная локализация процесса во времени несовместима с узким спектром), играет большую роль и в других областях физики; например, в вопросе об изображениях объектов при помощи оптических аппаратов, вопросе, несомненно, очень важном, связанном с такими проблемами, как разрешающая сила оптических приборов и т. д., мы наталкиваемся в этих случаях на аналогичную ситуацию, но только относящуюся к пространственным, а не временным соотношениям.

Но совершенно принципиальное значение приобрел этот антагонизм между точной локализацией процесса и шириной его спектра в современной волновой механике, которая, как я уже указал вначале, пропитана спектральной точкой зрения. Им обусловливается известное соотношение неопределенностей Гейзенберга, считающееся сейчас краеугольным камнем нашего физического мировоззрения. К сожалению, я не могу остановиться на этом подробно и должен ограничиться этими немногими замечаниями. Скажу только следующее. Тому, кто проникся этим антагонизмом в радиотехнике, будет гораздо легче, чем другому, освоиться с этим основным положением волновой механики.

Но все это относится к линейным системам. Сейчас же благодаря введению в приемные устройства нелинейных систем мы располагаем другими возможностями.

Я полагаю, что принципиально антагонизм между селективностью и быстротой работы существует и здесь. Но здесь у нас есть целый ряд новых явлений, дающий надежду на возможность добиться более выгодных условий работы.

Я не буду перечислять те очень интересные явления, которые отличают существенным образом нелинейные системы от линейных. Вообще часть из них общеизвестна. Я укажу, например, на явление „захватывания", специфичное для нелинейных систем, которое распространяется и на акустические явления (этими вопросами заняты в последнее время К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин).

Но об одном применении нелинейных систем к приему я хотел бы сказать несколько слов. До сих пор даже при применении нелинейных систем пользовались, главным образом, обычным резонансом, правда протекающим здесь иначе, чем в линейном случае, но все же не так уже сильно отличающимся, все же имеющим аналогичных характер, обусловливающий и характерные недостатки. Теоретическое исследование поведения нелинейных систем при воздействии внешней силы, исследование, в основе которого опять же лежат методы Пуанкаре, разработанные им для небесной механики, показало, что здесь можно ожидать между прочим и совсем других „резонансных" явлений, а именно следующего. Если взять нелинейную систему в определенном предсказываемом теорией режиме, то наблюдается такое явление. Пока частота сигнала существенно отлична от двойной частоты системы, ничего особенного не происходит. Система ведет себя приблизительно, как линейная. Но есть при соответствующем режиме приемника довольно узкая полоса частот в окрестности двойной частоты самой системы, обладающая тем свойством, что если частота сигнала в эту полосу попадает, то система становится неустойчивой и сразу вскакивает на половинную частоту сигнала. Это явление существенно отлично от обычного резонанса, наступающего, как известно, при равенстве частот. И здесь можно говорить о резонансных кривых — резонансных кривых второго рода, существенно отличных по всему характеру от обычных резонансных кривых. Вот это явление и может быть положено в основу приемного устройства.

В разработке этого явления Н. Д. Папалекси и мною в экспериментальной части нашими сотрудниками были: Э. М. Рубчинский, М. М. Вайсбейн и И. М. Борушко, а в теоретической — нам помогали сотрудники нашего института А. А. Андронов и А. А. Витт. Опыты вышли из стадии лабораторной разработки. Под непосредственным руководством Н. Д. Папалекси соответственные устройства были испробованы и испытаны в эксплоатации.

Оправдают ли себя эти приемные устройства, например, в смысле более эффективного освобождения от помех, что является одной из основных задач радиотехники, покажет будущее. Пока результаты довольно хорошие. В смысле освобождения от помех и селективности новое устройство, повидимому, имеет преимущество перед другими.

Я упомянул об этих опытах для того, чтобы закончить следующим. Я совершенно убежден в том, что введение нелинейной системы в приемные устройства, давшее уже очень много, таит в себе еще очень большие технические возможности. Разнообразие физических явлений здесь гораздо больше, чем в системах линейных. Очень возможно, что часть этих явлений, еще неиспользованных, можно использовать и получить ценные практические результаты. Физический интерес их для меня, конечно, давно уже несомненен.

Теперь, если вы, что очень естественно, пожелаете сделать количественный расчет некоторых вопросов, скажем, расчет того, каких здесь нужно ожидать преимуществ в смысле помех, то хотя качественно вы известный ответ получите, но при количественном расчете вы натыкаетесь на принципиальные затруднения. И одно из таких затруднений, которое встречается не только здесь, но и раньше, как только вы обращаетесь к нелинейному приему, заключается в следующем. Предположим, вы знаете, как влияет на прием сигнал станции, которую вы принимаете отдельно, знаете, как действует помеха отдельно. Но вас интересует не это, а интересует, что будет, когда и станция и помеха действуют одновременно. Так вот, при линейных системах, зная, как действует одна станция или одна помеха, вы знали, как действуют они совместно. Теперь же, зная, как действует каждая часть, вы еще не можете сказать, что будет, когда будут действовать обе. Принцип суперпозиции здесь неприменим.

Вы видите, уже этого одного достаточно, для того чтобы убедиться, что громадное количество, я думаю, ценнейших практических и физических экспериментальных возможностей покупается не очень дешевой ценой, оно покупается тем, что нарушается та стройная и цельная теоретическая концепция, которая у нас была до сих пор.

Здесь ведь дело обстоит так. В начальные времена радиотелеграфии, ее физическое и техническое содержание было сравнительно бедно. Она строилась в своей главной части на линейных системах. Но математическая сторона явлений и специально спектральный поход, который имел решающую роль, были прозрачны, ясны, цельны. Введение нелинейных передатчиков усложнило картину. Но в оценке передаваемого сигнала и в приеме мы и по сие время мыслим главным образом спектральным методом, т. е. стоим на точке зрения, которая по существу адэкватна линейным системам. Теперь с нарушением линейности и в приеме этот подход теряет почву, и нам приходится и в приеме отказаться, во всяком случае частично, от этой точки зрения. Спектральная точка зрения мало-помалу начинает себя изживать. А наряду с этим возникает и такой вопрос: является ли гармоническое колебание, вообще говоря, „элементарным“ колебанием? Насколько целесообразно требовать от передатчика отсутствия обертонов и вообще периодичности и т. д. И конечно, это неприятно.

Цельность теоретической картины всегда желательна. Мы находимся уже довольно долго в положении, когда с введением нелинейных систем, сильно отличающихся от линейных, в передатчиках и приемниках, мы должны отказаться от большинства руководивших нами теоретических концепций. Как отнестись к этому — жалко это или не жалко? С одной стороны, да, но, с другой стороны, вторжению нового препятствовать никогда нельзя. И моя точка зрения заключается в следующем. Можно, и я сам к этому инстинктивно иногда склонен, рассуждать приблизительно так: пока вещь мне теоретически неясна, я постараюсь ее избежать и постараюсь строить так свои системы, свои устройства, чтобы эти вещи, которые мне неясны, туда не пугались. Тогда ясна вся картина, но я лишаю себя очень ценных возможностей. Нет, мне кажется правильный путь такой: искать новые теории, новые точки зрения, не печалясь о том, что мы теряем вначале стройность. И мы принуждены теперь на этот путь стать.

Я считаю, что в колебательных вопросах, в теории колебаний современное положение вещей в смысле теоретическом довольно остро. Мы фактически теряем мало-помалу часть тех принципов, которыми мы руководились до сих пор. Но исход не в том, чтобы стремиться сузить эксперимент, а в том, чтобы расширить теорию. Я помню, как в прежние времена лица, занимавшиеся радиотелеграфией, знали: надо избегать железа. Это был лозунг, потому что о поведении железа на высоких частотах очень мало знали, считали железо загрязнением и поступали правильно, так как не знали действия его. Оно один раз мешало, другой раз помогало, лучше было бы от него избавиться. Теперь мы лучше знаем, как ведет себя железо, и уже теперь много схем работают с применением железа. Не то ли самое повторилось в газовых лампах, в газовых кенатронах: мы плохо знали разряды в газах и потому пришли к безгазовым лампам. Помните, был лозунг: газ всегда вредит. Я думаю, что теперь вряд ли кто-нибудь станет это утверждать. По мере того как мы больше и больше изучаем явления, мы ими овладеваем и уже не боимся их, а, напротив, считаем все более и более полезными.

Поэтому я считаю, что наша задача теперь, наряду с полным развертыванием экспериментальной работы, стараться найти и разрабатывать адэкватный теоретический метод. Я думаю, что без помощи математиков нам не обойтись, и я думаю, что наша конференция даст толчок и позволит нам и в этом отношении продвигаться вперед. Позвольте мне на этом закончить.

60

ВВЕДЕНИЕ

[к вып. 1 тома IV Журнала технической физики, 1934. Совм. с Н. Д. Папалекси]

В настоящем номере „Технической физики" помещен ряд работ, выполненных сотрудниками лаборатории Высокочастотной физики ЦРЛ, Научно-исследовательского института физики при 1-м Московском государственном университете, группы нелинейных систем ЛЭФИ и университета в г. Горьком. Эти работы продолжают и развивают исследования, ведущиеся уже в течение ряда лет в указанных лабораториях по электрическим колебаниям. По своему содержанию эти работы распадаются на несколько групп. В то время как в предыдущих работах, посвященных колебаниям в нелинейных системах, главное внимание было обращено на исследование происходящих в них периодических процессов, в одной из групп помещаемых ниже исследований речь идет, главным образом, о явлениях непериодических. Сюда относятся, с одной стороны, вопросы установления и, с другой стороны, установившиеся, но практически непериодические процессы. (Не входя в детали, укажем в качестве примера процесса, который мы называем практически „непериодическим", на процесс, выражающийся через $a \sin nt + b \sin mt$, где n и m либо несоизмеримы, либо их отношение равно отношению очень больших взаимно простых чисел.)

С физической и практической точек зрения эти вопросы имеют существенное значение. Всякая радиотелеграфная проблема связана в конце концов с вопросом установления. Вопросы же об установившихся непериодических процессах возникают почти всегда, когда дело идет о системах с больше чем одной степенью свободы или о явлениях в неавтономных системах (вне полосы захватывания) и при одной степени свободы.

Математически исследование таких явлений не просто. Помещаемые здесь работы, давая приближенное качественное объяснение явлений и основания для практических расчетов, не претендуют, однако, на строгое обоснование теоретической стороны трактуемых вопросов. Так, например, в этих работах не затрагиваются весьма существенные вопросы об условиях существования действительно непериодических процессов, об изменении характера решений в зависимости от изменения параметров и т. д., без исследования которых вряд ли возможна строгая трактовка.

Другая группа работ посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию генерации колебаний в системах, в которых параметры периодически изменяются механическим способом. Часть сообщаемых здесь результатов была получена уже несколько лет тому назад, но по патентным соображениям не могла быть опубликована раньше.

Кроме работ, относящихся к этим двум основным группам, здесь помещены еще работы, рассматривающие важные для теории и практических применений вопросы автоколебаний в системах с бо́льшим, чем одна, числом степеней свободы, а также и другие как, например, „об измерении разности фаз“, трактующие вопросы хотя и не „нелинейные“, но связанные с исследованием явлений в рассмотренных нами нелинейных системах.

61

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ[1]

[Совм. с Н. Д. Папалекси, А. А. Андроновым, А. А. Виттом, Г. С. Гореликом и С. Э. Хайкиным]

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая брошюра содержит краткий обзор работ по нелинейным колебаниям (а также некоторых тесно связанных с ними работ, касающихся линейных систем), выполненных за последние годы, главным образом, в Научно-исследовательском институте физики МГУ (НИИФ), Центральной радиолаборатории в Ленинграде (ЦРЛ), Ленинградском электрофизическом институте (ЛЭФИ) и Горьковском физико-техническом институте (ГИФТИ). Некоторые из работ последнего времени выполнены в Физическом институте Академии Наук (ФИАН) в Москве и в научно-исследовательском секторе Индустриального института в Ленинграде.

Исследования по нелинейным колебаниям ведутся во всех этих лабораториях сообща, тесно связаны между собой и составляют одно направление. Настоящий обзор охватывает только это определенное направление и поэтому не может претендовать на исчерпывающую полноту. Некоторые важные исследования по нелинейным колебаниям, выполненные за последние годы в советских научных институтах, но не принадлежащие к этому единому направлению, не вошли в наш обзор.

Происхождение настоящего обзора вкратце таково. В 1934 г. голландский физик ван-дер Поль, председатель физической секции Международного научного радиотехнического союза (URSI), обратился

[1] [Госуд. изд-во по вопросам радио. Москва, 1935].

к нам с предложением представить конгрессу Международного радиотехнического союза доклад о наших работах по нелинейным колебаниям. Настоящий обзор в своем первоначальном виде был представлен в качестве доклада конгрессу, состоявшемуся в Лондоне в сентябре 1934 г., и был опубликован на французском языке в журнале „Technical Physics of the USSR“ (т. II, № 2—3, 1935). Обзор сейчас публикуется в значительно дополненном виде. Тем не менее, мы принуждены ограничиться в нем лишь указаниями на некоторые общие точки зрения, положенные в основу наших работ, с одной стороны, и кратким сообщением о полученных результатах — с другой.

ВВЕДЕНИЕ

Еще до сравнительно недавнего времени так называемые линейные системы играли превалирующую роль в учении о колебаниях; к линейным проблемам относятся, например, обычные „малые“ механические колебания в системах с конечным числом степеней свободы, обычные электрические цепи и вся область классических краевых задач, и т. д. В настоящее же время, в связи с тем, что нелинейные колебательные процессы начинают приобретать все большее и большее значение во всех областях науки и техники (физика, механика, электротехника, биология и особенно радиотехника с момента появления электронной лампы), наблюдается перелом в сторону нелинейных систем.

Системы, с которыми мы теперь имеем дело как в передающих, так и в приемных радиоустройствах, как известно, существенно нелинейны, и это не случайно. Легко видеть на самом простом примере самовозбужденного лампового генератора, что линейная автономная система, т. е. физическое устройство, в котором ток или напряжение подчиняются линейному уравнению, не содержащему явно времени (системы, подчиняющиеся дифференциальному уравнению, не содержащему явно времени, мы будем называть автономными), не может обладать теми свойствами, которыми обладают и должны обладать подобные схемы. Требование автономности означает, что мы хотим исследовать систему, к которой извне не подводятся колебания — это и естественно. В противном случае возник бы вопрос, как создать подводимые колебания. Для того чтобы решить вопрос о генерации колебаний, необходимо рассмотреть системы, которые для своего функционирования не требуют внешних переменных электродвижущих сил. Как известно, основной признак линейных автономных систем заключается в том, что амплитуда тока не определяется свойствами самой системы, а зависит полностью от начальных условий. Между тем современные колебательные устройства отличаются тем, что если мы их приведем в действие из какого-нибудь — в широких пределах произвольного — начального состояния, в них устанавливается режим с вполне определенным периодом и амплитудой. Таким образом, современная радиотехника должна была обратиться к тем физическим представлениям и к тому математическому аппарату, которые были бы адэкватны нелинейным системам. Разнообразие физических явлений в нелинейных системах делает их чрезвычайно интересными с чисто физической стороны. Оно же в связи с их, если можно так выразиться, гибкостью обусловливает те обширнейшие применения, которые нелинейные системы получили в настоящее время.

Так как исследование нелинейных дифференциальных уравнений гораздо труднее и сложнее, чем исследование линейных уравнений, то естественно появилось стремление „линеаризировать" проблемы, т. е. подойти к заведомо нелинейным системам с „линейной точки зрения". Нельзя отрицать того, что для выяснения некоторых сторон явлений такое линеаризирование может иногда оказаться полезным. Но, не говоря уже о том, что оно, естественно, никогда не полно, искусственно и требует введения дополнительных утверждений, сделанных ad hoc, оно часто приводит к прямым ошибкам. Одна из таких ошибок, еще до сих пор часто встречающаяся в литературе, указана ниже.[1]

После того как нелинейные системы завоевали общее признание, сама практика, обнаруживая чуждые линейным системам явления, наталкивала на переход к математическому аппарату, адэкватному этим новым проблемам, и уже давно появились работы, сознательно ставшие на нелинейную точку зрения. Сюда следует, в частности, отнести работы ван-дер Поля, результаты которых имеют для всей интересующей нас области основное значение и на которые нам часто придется ссылаться. Однако первоначальные работы, что вполне естественно, больше стремились к тому, чтобы притти к определенным результатам, чем к общности и строгости. Так, например, существование периодических решений постулировалось; часто вопрос о сходимости применяемых рядов не подвергался дискуссии, но, как уже было указано, результаты все же получались хорошие.

---

[1] См. стр. 98.

Однако после того, как при помощи этих методов, в первую очередь благодаря работам ван-дер Поля, было получено большое количество весьма ценных результатов, естественно было желание обратиться к более общим точкам зрения и подыскать математический аппарат, адэкватный этим нелинейным проблемам. Часть наших работ и была направлена по этому пути.[1]

Математический аппарат, адэкватный проблемам нелинейных колебаний в целом, оказалось, существовал уже давно. Он заключается в знаменитых работах Пуанкаре (1), (2), с одной стороны, и в замечательных исследованиях Ляпунова (3), с другой. На связь между работами Пуанкаре, которые были потом углублены Биркгофом (4), а также работами Ляпунова, с нашими физическими проблемами было указано одним из нас (5). Здесь нужно различать три стороны вопроса. Во-первых, так называемая качественная теория дифференциальных уравнений, развитая Пуанкаре (1), оказалась весьма пригодной для качественного исследования тех физических процессов, которые происходят в системах, применяемых в настоящее время в радиотехнике. Однако ни физик, ни тем более инженер не может ограничиться одним лишь качественным рассмотрением. В другом цикле работ Пуанкаре был найден тот аппарат, который позволил трактовать наши проблемы при помощи этих методов и количественно. Наконец, в работах Ляпунова содержатся основы математической трактовки вопросов устойчивости.

В первой части настоящего реферата мы кратко излагаем эти математические методы в том виде, как мы их применяем для решения тех или иных проблем. Во второй части нашего реферата мы останавливаемся на теоретической и экспериментальной стороне некоторых конкретных вопросов. Частично здесь дело идет и об уточнении и подведении более строгой математической базы под уже известные и полученные другими авторами результаты. Мы рассматриваем отдельно вопросы резонанса n-го рода, а также кратко излагаем некоторые теоретические и экспериментальные исследования ряда других новых явлений в нелинейных системах и в системах с периодически меняющимися параметрами. Наконец, в последней части мы кратко касаемся роли статистики в колебательных процессах.

---

[1] Ссылки на литературу приводятся в скобках. Список литературы помещен в конце.

§ 1. Геометрическое представление поведения колебательной системы. Фазовая плоскость

Несомненно, что математический аппарат, о котором здесь будет итти речь, значительно сложнее и труднее, чем те математические методы, которыми приходится пользоваться при изучении линейных систем. Эта сложность лежит в самом существе вопроса, и она обусловлена сложностью самой физической задачи. Но этот аппарат не может быть назван громоздким. Как нам кажется, в математической сложности и громоздкости можно обвинить с известным основанием, да и то далеко не всегда, такой аппарат, при помощи которого мы получаем результаты лишь после ряда сложных операций, причем каждая из них в отдельности не имеет физического толкования. Совсем иначе обстоит дело в геометрическом аппарате, связанном с именем Пуанкаре, о котором здесь идет речь. Здесь каждый геометрический образ имеет чрезвычайно наглядное физическое содержание. Поэтому этот геометрический аппарат, несмотря на свою сложность, не затрудняет, а, наоборот, облегчает описание и понимание физических явлений.

Плодотворный прием изображения поведения колебательной системы при помощи геометрических образов был введен в науку уже давно. Сущность его, как известно, заключается в следующем. Чтобы характеризовать состояние системы, имеющей n степеней свободы, нужно задать $2n$ чисел (n координат и n импульсов). Но $2n$ чисел можно рассматривать как задание некоторой точки в $2n$-мерном пространстве, и тогда каждой точке в этом $2n$-мерном пространстве будет соответствовать одно вполне определенное состояние (определенная „фаза“) системы. Поэтому такое пространство носит название „фазового пространства“. В случае системы с одной степенью свободы это пространство двумерно, в простейших случаях оно превращается в фазовую плоскость.

Рассмотрим простейший пример гармонического осциллятора. Как известно, уравнение такого осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

или

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x, \qquad \dot{x} = y. \tag{2}$$

Аналогичным уравнением описывается поведение электрического контура с емкостью и самоиндукцией, но без сопротивления, если x есть, например, заряд конденсатора. Условимся изображать поведение осциллатора на плоскости с прямоугольными осями $(x, \dot{x})$, т. е. на плоскости напряжение — ток, которая для нашей задачи и является *плоскостью состояния* или *фазовой плоскостью*. Каждому новому состоянию системы соответствует новая „представляющая" точка на фазовой плоскости и, значит, известному последовательному изменению состояния системы соответствует некоторое движение представляющей точки на фазовой плоскости или некоторая *фазовая траектория*.

Физикам хорошо известны траектории на фазовой плоскости для гармонического осциллатора — семейство подобных эллипсов, охватывающих друг друга, а также начало координат. В силу $\dot{x}=y$, движение представляющей точки на фазовой траектории должно быть таково, чтобы, например, в первом квадранте x возрастало. В рассматриваемом случае (как и во всех остальных) это соответствует движению по часовой стрелке. Начало координат представляет собой эллипс, выродившийся в точку.

Для системы уравнений (2) точка $x=0$ и $y=0$ является особой точкой, так как для нее

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0},$$

т. е. направление фазовых траекторий становится неопределенным. По принятой в математике классификации особых точек такая особая точка, охватываемая семейством эллипсов, носит название *центра*. Ясно, что вопрос об особых точках представляет для нашего рассмотрения специальный интерес. Ведь для того, чтобы было соблюдено условие

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0},$$

определяющее особую точку, во всяком случае достаточно соблюдения условий

$$\frac{dy}{dt}=0, \qquad \frac{dx}{dt}=0.$$

Но если напряжение и ток в простом контуре равны одновременно нулю, то это соответствует состоянию равновесия системы и, следовательно, все состояния равновесия системы лежат в особых точках системы дифференциальных уравнений (2).

Каждый эллипс, каждая замкнутая траектория соответствуют периодическому процессу, возникающему при соответствующих начальных условиях. Начало координат соответствует устойчивому состоянию равновесия в том смысле, что отклонение, которое в начальный момент было мало, и дальше остается малым. В рассматриваемом случае система при всевозможных начальных условиях совершает периодическое движение за исключением единственного случая, когда начальные условия соответствуют началу координат.

Подобным же образом мы получим картину на фазовой плоскости (рис. 1) для затухающего осциллатора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (3)$$

или

$$\dot{y} = -2hy - \omega_0^2 x, \qquad \dot{x} = y \qquad (3')$$

при условии, что $h^2 < \omega_0^2$.

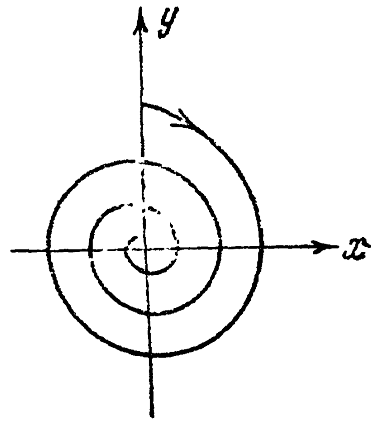


Рис. 1

Таким уравнением описывается, например, колебательный контур с сопротивлением, если x есть заряд на обкладках конденсатора. Все интегральные кривые — спирали, асимптотически навертывающиеся на начало координат. Каждая такая спираль изображает затухающее колебание, возникающее при тех или иных начальных условиях. Начало координат попрежнему соответствует состоянию равновесия и является особой точкой, но уже другого типа. Особые точки,

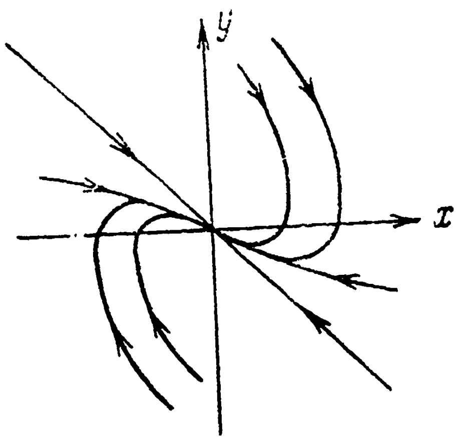


Рис. 2

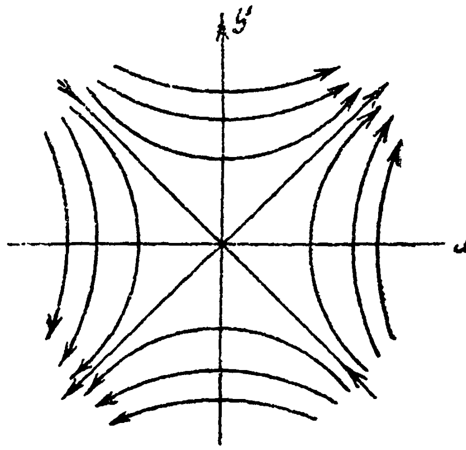


Рис. 3

являющиеся асимптотическими точками семейства спиралей, носят название *фокуса*. В рассматриваемом случае мы имеем дело с *устойчивым фокусом*.

Если рассматривать картину на фазовой плоскости для системы, описываемой теми же уравнениями (3) или (3′), но при большом затухании, т. е. при $h^2 > \omega_0^2$, то мы получим вместо спиралей кривые параболического типа, проходящие через начало координат (рис. 2). Начало координат здесь попрежнему соответствует состоянию равновесия и в этом случае представляет собой особую точку типа *узла*. Интегральные кривые отображают апериодическое движение системы к состоянию равновесия, и поэтому мы имеем *устойчивый узел*.

Кроме особых точек типа центра, фокуса и узла, существует еще один важный для нас тип особой точки — так называемое *седло* (рис. 3). Седлу, например, соответствует верхнее состояние равновесия маятника, или единственное состояние равновесия в схеме мультивибратора Абрагама—Блоха. Поведение интегральных кривых вблизи седла показывает, что система всегда удаляется от состояния равновесия, следовательно, седло всегда неустойчиво.

Если мы обратимся к наиболее простому случаю лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки, то для напряжения v на обкладках конденсатора будет, как известно, иметь место следующее уравнение:

$$L\ddot{v} + R\dot{v} + \frac{v}{C} = \frac{M}{C} f(v, \dot{v}), \tag{4}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}, \qquad \frac{di}{dt} = -\omega_0^2 v + f(v, i),$$

где i — сила тока в колебательном контуре; $\omega_0^2 = 1/LC$.

Вид функции $f(v, i)$ задается характеристикой лампы (для простоты мы пренебрегаем сеточным током). Исследуя это уравнение чисто математически, мы получим следующую картину на фазовой плоскости. Для случая мягкого режима при малой обратной связи (малом M) интегральные кривые суть спирали, идущие из бесконечности и наворачивающиеся на замкнутую кривую. Внутри замкнутой кривой фазовые траектории представляют собой также спирали, раскручивающиеся с начала координат, соответствующего состоянию равновесия, и накручивающиеся на замкнутую кривую с внутренней стороны (рис. 4). Здесь легко связать основные черты геометрической картины с характерными свойствами рассматриваемой физической системы. Начало координат попрежнему соответствует состоянию

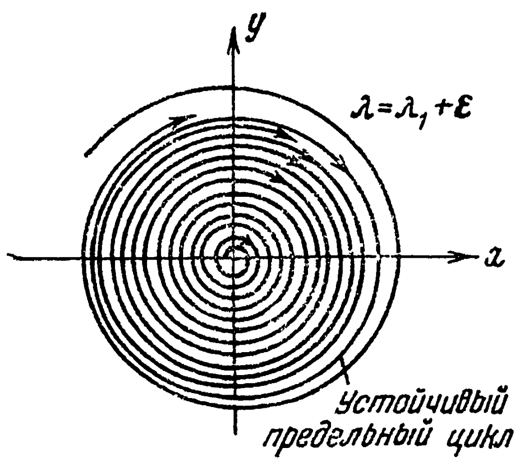


Рис 4

равновесия и является особой точкой типа фокуса. Однако теперь оно уже не является устойчивым состоянием равновесия и представляет собой *неустойчивый фокус*.

При начальных значениях напряжения и тока, хотя бы очень мало отличающихся от нулевых (например, начальные значения i_0, v_0, получившиеся в силу флуктуаций), в контуре генератора возникнут колебания, размахи которых начнут возрастать, а дальше это нарастание будет замедляться до тех пор, пока, наконец, не установится стационарный колебательный режим, изображаемый на фазовой плоскости замкнутой кривой. Если начальные условия соответствуют точке, находящейся вне замкнутой кривой, то генератор также начнет колебаться, однако размахи колебаний будут затухать до тех пор, пока генератор не приблизится к стационарному режиму.

Замкнутые интегральные кривые, на которые накручиваются или с которых скручиваются другие интегральные кривые, носят название *предельных циклов Пуанкаре*. Это математическое понятие имеет, очевидно, простую физическую интерпретацию: оно отображает стационарный периодический режим. Так же как и особые точки, предельный цикл может быть *устойчивым* (если все другие интегральные кривые на него накручиваются) или *неустойчивым* (если все интегральные кривые с него скручиваются). Очевидно, что только устойчивые циклы отражают периодические процессы в реальной физической системе.

Если рассматривать тот же случай мягкого режима и сильную обратную связь (большое M), то и здесь при соответствующей характеристике попрежнему существует предельный цикл, на который накручиваются интегральные кривые как изнутри, так и снаружи, однако поведение системы вблизи начала координат оказывается существенно иным. Интегральные кривые уходят из особой точки не *осцилляторно*, а *апериодически*, и особая точка представляет собой *неустойчивый узел*. Наличие цикла и в этом случае показывает, что при любых начальных условиях в конце концов устанавливается периодический процесс с определенной „амплитудой“, не зависящей от начальных условий, только характер установления процесса в обоих случаях различный. Для решения вопроса о характере установления вначале, т. е. при малых отклонениях, можно было бы ограничиться линейной идеализацией системы. Но тот факт, что во втором случае (в случае неустойчивого узла) не существует колебательных процессов в линейной системе, отнюдь не дает права делать заключение об отсутствии колебательных периодических процессов вдали от положения равновесия в тех областях, где систему нельзя рассматривать как линейную.

Случай узла, охватываемого устойчивыми предельными циклами, является наиболее ярким примером „беспомощности“ линейной трактовки вопроса о существовании периодического процесса в автоколебательной системе. Забывая об этой беспомощности, можно впасть в грубую ошибку, иногда встречающуюся в литературе.[1]

Структура фазовой плоскости может быть исследована экспериментально, независимо от математической теории. Для электрических систем это исследование удобно вести при помощи брауновской трубки. Г. А. Остроумов впервые получил на экране брауновской трубки картину установления колебаний в ламповом генераторе.

В. М. Бовшеверовым (ГИФТИ) был разработан метод, позволявший задавать системе много раз подряд одни и те же произвольные начальные условия (11). Вследствие этого представляющая точка проходит много раз один и тот же путь и прочерчивает каждый раз одну и ту же интегральную кривую. При помощи особой схемы включения брауновской трубки эта интегральная кривая отображается на экране трубки и может быть сфотографирована. Таким образом, Бовшеверову удалось сфотографировать ряд интегральных кривых, соответствующих различным начальным условиям.

Особые точки и предельные циклы — это те геометрические элементы, которые в случае систем с одной степенью свободы характеризуют стационарное движение. Согласно Пуанкаре, знание этих элементов уже дает нам возможность судить о свойствах остальных движений. Совместное существование этих элементов также управляется общими топологическими законами. Так, зная свойства одних из них, можно обнаруживать существование других. Если, например, мы знаем, что где-то далеко от начала координат интегральные кривые все направлены к началу, где имеется неустойчивый фокус или узел и других особых точек нет, то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Если имеется ряд предельных циклов, охватывающих один другой, между которыми нет особых точек, то устойчивые и неустойчивые циклы чередуются между собой. Топологически это почти очевидно, однако соответствующие этим геометрическим свойствам особенности физической системы далеко не тривиальны. Ценность качественной теории Пуанкаре заключается именно в том, что эта сравнительно простая

---

[1] Например, в распространенной книге: Gutton, La lampe à trois électrodes.

и наглядная трактовка дифференциальных уравнений дает часто возможность сразу разобраться в качественной картине физического процесса. Приведем следующий простой пример, хотя и не имеющий практического значения, но наглядно иллюстрирующий сказанное.

Пусть характеристика лампы генератора имеет вид, изображенный на рис. 5. Спрашивается, когда в такой системе возможны установившиеся (периодические) колебания? Для того, чтобы знать, как ведет себя система в бесконечности, можно, конечно, предположить, что рабочая точка находится в точке сгиба характеристики. Тогда, очевидно, в зависимости от наклона возможны два случая: либо цикл в бесконечности устойчив, т. е. все интегральные кривые стремятся к бесконечности (это наступает при наклоне меньше критического), либо же цикл неустойчив в бесконечности при большем наклоне. Далее легко видеть, что для конечных значений возможно существование только одного цикла. Если рабочая точка находится в горизонтальной части характеристики, то особая точка устойчива, и, следовательно, по общим топологическим соображениям устойчивый цикл невозможен и в этом случае установившиеся колебания невозможны.

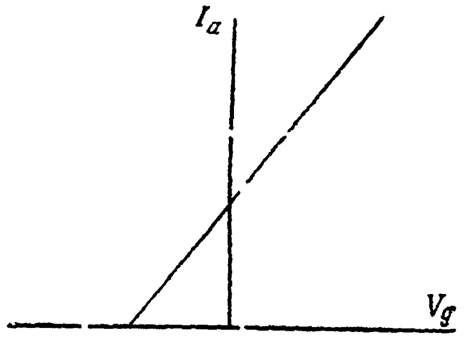


Рис. 5

В случае же, если рабочая точка лежит на наклонной части характеристики, то возможны три случая: особая точка устойчива — колебаний нет; при увеличении крутизны особая точка становится неустойчивой, и цикл в бесконечности также неустойчив, т. е. колебания наверное существуют; при переходе наклона через некоторую критическую величину „цикл" в бесконечности становится устойчивым — установившиеся колебания опять невозможны.

§ 2. Приближенные аналитические методы исследования нелинейных систем

Общая качественная теория дифференциальных уравнений, первые элементы которой были изложены выше, еще весьма мало разработана. Сколько-нибудь эффективное исследование можно проводить лишь в случае двух, в крайнем случае и притом неполно — трех автономных уравнений, если в правых частях стоят либо полиномы не слишком высокой (третьей, пятой) степени, либо функции, достаточно просто характеризуемые геометрически. Однако, как уже сказано выше, техника не может ограничиться только качественными методами исследования проблемы. Она нуждается в количественном рассмотрении, ибо только количественная теория может лечь в основу технического расчета. С другой стороны, техника охотно мирится с тем, что такая количественная теория является не строгой и приближенной, лишь бы она только удовлетворительно описывала практически важные случаи.

Отсюда возникает потребность в создании приближенных методов исследования нелинейных систем, но само собой разумеется, таких методов, которые учитывали бы специфику нелинейных систем, их характерные черты. Таким адэкватным приближенным количественным методом исследования нелинейных систем является так называемый метод медленно меняющихся коэффициентов, или, как мы его будем называть, метод ван-дер Поля. Хотя этот метод, в сущности, применялся давно в небесной механике, но ван-дер Поль первый последовательно применил этот метод к задачам радиотехники. Он получил, как мы уже упоминали, ряд фундаментальных результатов, относящихся к теории мягкого и жесткого режимов, к теории принудительной синхронизации, к теории затягивания и т. д. ([6]), ([7]).

Однако вплоть до самого последнего времени этот метод не был обоснован математически, больше того, даже рецептура применения его не была вполне однозначной. Главная трудность в этом направлении была устранена указанным ниже способом ([8]).

Рассмотрим в виде примера уравнение

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x},t), \tag{5}$$

где правая часть есть периодическая функция от t с периодом 2π (коэффициент при x в левой части уравнения всегда может быть сделан равным единице соответствующим выбором масштаба времени), а μ — „малый параметр“, от величины которого, как мы увидим дальше, будет зависеть степень приближения.[1] Для решения задачи ван-дер Поль полагает

$$x=u\cos t+v\sin t, \tag{6}$$

где u и v суть так называемые „медленно меняющиеся“ функции времени t, т. е. такие функции, первые производные которых малы

---

[1] К этой форме можно, как известно, привести уравнение регенеративного приемника (лампового генератора)

по сравнению с самими u и v, а вторые производные малы по сравнению с первыми. Вставляя при этих предположениях выражение (6) в уравнение (5) и пренебрегая всеми членами высшего порядка, а также всеми гармониками, ван-дер Поль получает приближенные уравнения, которые можно записать в виде

$$\frac{du}{d\tau} = a_0(u, v), \qquad \frac{dv}{d\tau} = b_0(u, v),$$

где $\tau = \mu t$, а $a_0(u, v)$ и $b_0(u, v)$ суть некоторые функции от u и v.

Подойдем к задаче несколько иначе, а именно введем вместо переменного x две новых переменных u и v, определив их так:

Так как вместо одного переменного x мы вводим две новых переменных u и v, то мы можем наложить на них добавочное условие

$$\dot{u}\sin t - \dot{v}\cos t = 0$$

и, вместо уравнения (5), мы будем иметь два уравнения

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu f(u\sin t - v\cos t,\ u\cos t + v\sin t)\cos t, \\ \dot{v} &= \mu f(u\sin t - v\cos t,\ u\cos t + v\sin t)\sin t. \end{aligned} \tag{7}$$

Усредняя правые части, получаем уравнения ван-дер Поля или так называемые „укороченные уравнения". При этом способе вывода мы получаем ясную задачу о приближении: дело идет о том, чтобы выяснить, в какой мере (в зависимости от величины μ) введение укороченной системы правильно представляет решение первоначальной системы. Чисто математический вопрос, когда и насколько уравнения типа (7) апроксимируются уравнениями „укороченного" типа, как мы узнали позже, уже разбирался раньше Фату (9). (Эта работа была нам не известна при нашем исследовании метода ван-дер Поля.)

На основании как наших работ, так и математических результатов Фату, примененных к нашим задачам, можно показать, когда и насколько укороченные уравнения ван-дер Поля дают достаточное приближение при исследовании неустановившихся процессов, с которыми приходится иметь дело, например, при телеграфировании. Далее, исходя из результатов Пуанкаре, можно сказать, что если μ достаточно мало, то каждому состоянию равновесия укороченной системы непременно соответствует периодическое решение полной системы. В этом случае можно также утверждать, что если состояние равновесия устойчиво, то и периодическое движение устойчиво. Таким образом, за последнее время в вопросе обоснования метода ван-дер Поля достигнута ясность и можно надеяться, что использование метода ван-дер Поля будет обосновано и для более сложных случаев.

Поясним теперь коротко, чего мы достигаем, используя метод ванд-дер Поля. Для многих автономных систем с одной степенью свободы уравнения ван-дер Поля легко могут быть приведены к одному уравнению, которое легко решается в квадратурах. В случае неавтономной системы с одной степенью свободы — случай, который мы только что рассмотрели, уравнения ван-дер Поля автономны и могут быть исследованы методами Пуанкаре. Для более сложных систем, например для систем с двумя степенями свободы (как автономной, так и под действием внешней силы), уравнения ван-дер Поля приводятся к системе автономных уравнений первого порядка — в простейших случаях к двум уравнениям — и, следовательно, опять-таки могут быть исследованы методами Пуанкаре. Таким образом, при пользовании методом ван-дер Поля мы заменяем изучение одной системы нелинейных уравнений другой, более простой системой нелинейных уравнений. При исследовании уравнений ван-дер Поля можно с успехом пользоваться понятиями: фазовое пространство (в случае, если число уравнений ван-дер Поля равно двум, оно является плоскостью — „плоскость переменных ван-дер Поля"), особые точки, предельные циклы и т. д. Как мы увидим дальше, благодаря применению методов Пуанкаре к приближенным уравнениям ван-дер Поля удалось продвинуться вперед и получить некоторые новые результаты, имеющие физический интерес ([10]). Заметим, что так же фазовая плоскость, плоскость переменных ван-дер Поля электрической системы может быть изучена экспериментально при помощи брауновской трубки ([12]).

Аналогичный метод может быть также применен к математическому исследованию систем, описываемых дифференциальным уравнением 3-го порядка:

$$\dddot{x}+\dot{x}=\mu f(x, \dot{x}, \ddot{x}), \tag{8}$$

где μ достаточно малый параметр; решение этого уравнения можно искать в виде

$$x=A\cos t+B\sin t+C. \tag{9}$$

На коэффициенты A, B и C налагаем дополнительные условия

$$\dot{A}\cos t+\dot{B}\sin t+\dot{C}=0, \tag{10}$$

$$-\dot{A}\sin t+\dot{B}\cos t=0. \tag{11}$$

Подставив (9) и (8) и принимая во внимание условия (10) и (11), получаем систему уравнений

$$\dot{A}=f_1(A, B, C, t),$$
$$\dot{B}=f_2(4, B, C, t),$$
$$\dot{C}=f_3(A, B, C, t).$$

Усредняя по времени, получаем опять автономную систему, которую можно свести к двум уравнениям, выбирая за переменные $A^2+B^2=\rho^2$ и C

$$\dot{\rho}=\psi_1(\rho, C),$$
$$\dot{C}=\psi_2(\rho, C).$$

Особые точки этой системы соответствуют периодическим движениям, близким к синусоидальным; предельный цикл соответствует колебаниям, модулированным низкой частотой (самомодуляция). Этим методом Г. Бендриковым была рассмотрена схема, изображенная на рис. 6, а И. Домбровским — обычная схема с гридликом. Оказалось, что огибающая модулированных колебаний имеет при незначительной глубине модуляции почти синусоидальную форму; с возрастанием глубины модуляции она становится все более и более несинусоидальной. При помощи брауновской трубки были экспериментально засняты ([12]) кривые на плоскости ρ, C. На рис. 7 изображена фотография семейства таких кривых, соответствующих различным глубинам самомодуляции. Рис. 8 изображает типичные разрывные колебания; в рассматриваем й схеме можно наблюдать непрерывный переход от синусоидальной к разрывной самомодуляции.[1]

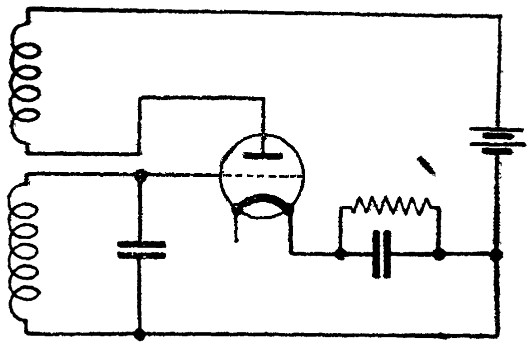


Рис. 6

Исследуя методом ван-дер Поля автоколебания в генераторе с двумя колебательными контурами, Чихачев (ЦРЛ) обнаружил, что при известных условиях в таком генераторе возможны устойчивые бигармонические колебания, т. е. устойчивый режим, при котором колебание близко к виду $A\cos\omega_1 t+B\cos\omega_2 t$, где ω_1, ω_2 —

[1] Эта разрывная самомодуляция (прерывистая генерация) была исследована Ржевкиным и Введенским ([97]), а также одним из нас совместно с Кузовкиным и Секерской ([98]).

нормальные частоты (частоты связи) колебательных контуров генератора. Эти колебания были им наблюдены экспериментально.[1]

В самое последнее время Е. Н. Секерской (ГИФТИ) удалось получить на экране брауновской трубки картину плоскости ван-дер Поля генератора с двумя степенями свободы.

Как мы видели, метод ван-дер Поля следует считать вполне обоснованным, по крайней мере в простейших случаях. Он описывает процессы только в нулевом приближении, что для многих

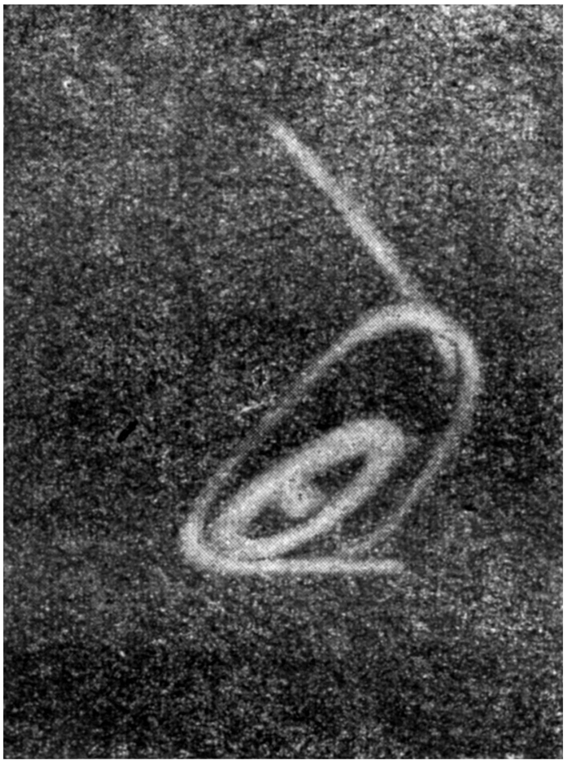


Рис. 7

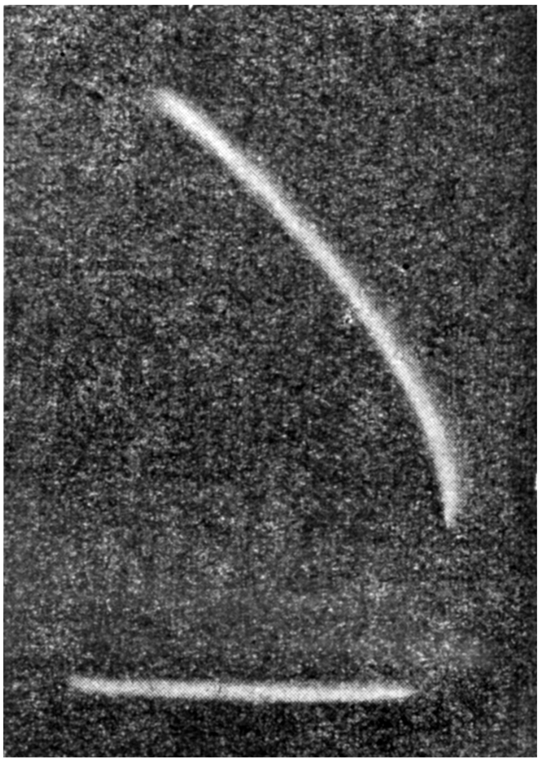


Рис. 8

вопросов радиотехники уже вполне достаточно. Однако существует целый ряд вопросов, где появляется нужда и в дальнейших приближениях: сюда особенно относятся вопросы поправки на частоту, которая во многих задачах заметна только во втором приближении. Здесь приходится обращаться к более точным теориям. В математическом аппарате, развитом Пуанкаре, такая теория существует только для исследования чисто периодических процессов.[2]

---

[1] Для несколько отличной схемы такой же результат был получен независимо (теоретически) Белявской (НИИФ).

[2] Н. Крылов и Н. Боголюбов развили методы рассмотрения решений, которые в нулевом приближении хорошо могут быть апроксимированы квазипериодическими функциями. Интересующихся этими вопросами мы отсылаем к книге указанных авторов „Новые методы нелинейной механики“. М., 1934.

При помощи так называемого метода малого параметра Пуанкаре впервые строго доказал существование периодических движений очень общего характера в задаче о трех телах. Метод этот в основном сводится к следующему. Пусть при $\mu=0$ существуют известные периодические движения нашей системы; тогда движение системы при $\mu\neq0$ разыскивается в виде степенного ряда по μ, где нулевым приближением является решение при $\mu=0$. Этот метод особенно удобен, когда в нулевом приближении (при $\mu=0$) система линейна.[1] Особенно интересным является тот случай, когда при $\mu=0$ система имеет *непрерывную* и при $\mu\neq0$ *дискретную* совокупности периодических решений. Здесь нужно сначала определить, к каким из решений для $\mu=0$ близки решения для $\mu\neq0$. Этот случай аналогичен так называемому „вырожденному" случаю в шредингеровской теории возмущений.

Чтобы найденные периодические решения могли быть наблюдаемы в действительности, необходимо, чтобы они были устойчивы по отношению к малым отклонениям, неизбежным во всякой реальной системе (случайные толчки, флуктуации и т. д.).

То понятие об устойчивости движения, которым мы здесь пользуемся, было строго сформулировано Ляпуновым, который дал также методы для решения вопроса об устойчивости движений в нелинейных системах. По Ляпунову, движение устойчиво, если при достаточно малых возмущениях представляющая точка, изображающая возмущенное движение, всегда остается достаточно близкой к представляющей точке, изображающей исходное, невозмущенное движение.

Выяснение вопроса об устойчивости движений в нелинейных системах Ляпунов свел к исследованию свойств решений некоторых линейных дифференциальных уравнений, так называемых „уравнений первого приближения". При этом, когда речь идет об устойчивости периодических движений, уравнения первого приближения оказываются линейными уравнениями с периодическими коэффициентами (методы исследования таких уравнений были развиты Флоке). Потребовалось лишь немного дополнить результаты исследований Ляпунова для того, чтобы иметь возможность решать вопросы об устойчивости периодических движений в автоколебательных

---

[1] Л. С. Понтрягин дал общий метод рассмотрения автоколебательных систем, которые в нулевом приближении превращаются в консервативные, но нелинейные ([13]).

системах [14] (самые решения при этом должны быть, конечно, заранее известны с достаточным приближением).

Пусть, например, мы имеем нелинейную систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t), \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

и в этой системе происходит движение, подчиняющееся уравнениям

$$x_i=\bar{x}_i(t). \tag{13}$$

Введем малые возмущения исходного движения и рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$x_i=\bar{x}_i(t)+\xi_i, \tag{14}$$

где ξ_i — достаточно малые величины. Подставляя эти уравнения возмущенного движения в исходные уравнения (12), мы получим

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}(t)\xi_\alpha+R_i, \tag{15}$$

где

$$p_{ij}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{x_\alpha=\bar{x}_\alpha}$$

и R_i — совокупность членов высших порядков относительно ξ_i. Отбросив нелинейные члены R_i, мы получим линейные дифференциальные уравнения — „уравнения первого приближения"

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}(t)\,\xi_\alpha. \tag{16}$$

Для того чтобы решить вопрос о том, устойчиво ли исходное движение, нужно исследовать характер решений уравнения (16). Если решения для ξ_i не нарастают, то исходное решение устойчиво.

Если исследуемое решение (13) было периодическим, то, как легко видеть, p_{ij} суть периодические функции и задача сводится к исследованию уравнений с периодическими коэффициентами. Характер решений ξ_i определяется некоторыми неравенствами, накладывающими условия на периодические коэффициенты p_{ij}. Эти неравенства аналогичны известным неравенствам Раута-Гурвитца, играющим роль при исследовании характера решений для уравнений с постоянными коэффициентами. Таким образом, пользуясь методами

Пуанкаре и Ляпунова, оказывается возможным отыскивать периодические движения в нелинейных системах и решать вопрос об их устойчивости.

Эти методы были применены нами к решению целого ряда автоколебательных задач ([15, 16, 17, 18]).

§ 3. Зависимость от параметра. „Устойчивость в большом"

При рассмотрении важного вопроса о том, как меняется характер фазовой плоскости при изменении параметра (для простоты предполагаем, что изменяется только один параметр), мы должны обратиться опять к Пуанкаре. Правда, такой общей задачи Пуанкаре не ставил, но он поставил и полностью разрешил вопрос о зависимости состояний равновесия консервативной системы от параметра в связи со своей знаменитой теорией равновесия вращающейся жидкой массы. Введенные там Пуанкаре понятия о „бифуркационных" значениях параметра могут быть надлежащим образом обобщены и использованы для поставленной здесь задачи. За недостатком места мы не можем здесь подробно останавливаться на этих вопросах. Укажем только на то, что, как оказалось, ряд весьма важных для радиотехники явлений, как то явления „мягкого" и „жесткого" режимов возбуждения, получают здесь на языке „особых точек", „предельных циклов" и „бифуркационных" значений параметра свое естественное и адэкватное объяснение. Пусть исследуемая система уравнений зависит от некоторого параметра. Мы назовем значение параметра $\lambda = \lambda_0$ обыкновенным, если существует конечное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ такое, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, мы имеем одну и ту же топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые: всякое другое значение параметра мы назовем „бифуркационным".

В общем случае теория зависимости качественной картины интегральных кривых от параметра весьма сложна и еще недостаточно разработана; однако в простейшем случае для колебаний, близких к синусоидальным, эта теория весьма проста и ее можно свести к теории Пуанкаре о зависимости положений равновесия консервативной системы от параметра ([19]). Только вместо координат положений равновесия x, y мы здесь будем иметь I^2 — квадраты амплитуд стационарных движений, к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и состояние равновесия.

Не излагая самой теории Пуанкаре, приведем пример ее применения.

Рассмотрим два основных случая возникновения колебаний — так называемые случаи „мягкого“ и „жесткого“ самовозбуждения.

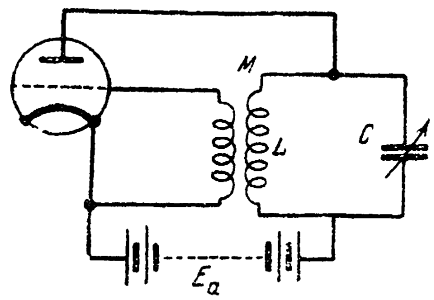


Рис. 9

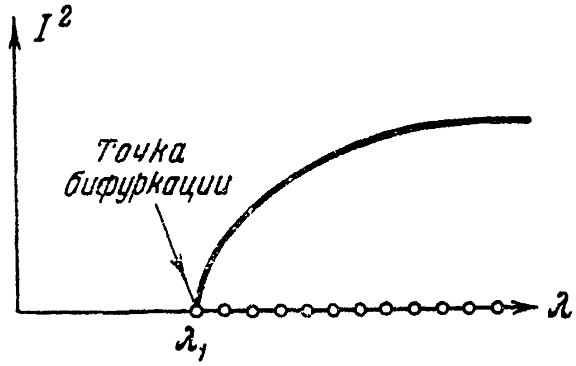


Рис. 10

Мы дадим для каждого из этих случаев бифуркационные диаграммы и вытекающие из этих диаграмм картины фазовой плоскости, а также кривые изменения квадрата силы тока. Начнем с мягкого режима и остановимся на схеме, изображенной на рис. 9. Это обыкновенный ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода. Как уже было указано выше, I^2 есть „квадрат амплитуды“; за параметр λ мы выберем коэффициент взаимоиндукции между цепью сетки и колебательным контуром и рассмотрим, как будет меняться структура фазовой плоскости при изменении λ.

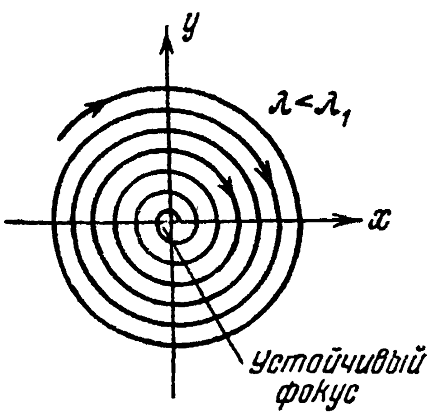


Рис. 11

Пусть значение $\lambda = \lambda_1$ как раз соответствует моменту возникновения колебаний (рис. 10).

Нетрудно видеть, что в случае $\lambda < \lambda_1$ мы имеем дело только с одним устойчивым состоянием равновесия — с особой точкой типа фокуса (рис. 11). Где бы ни находилась изображающая (представляющая) точка, она через некоторое время окажется в ближайшем соседстве с этим состоянием равновесия; λ_1 есть бифуркационное значение параметра; при дальнейшем увеличении λ состояние равновесия становится неустойчивым и от особой точки отделяется, отпочковывается устойчивый предельный цикл (рис. 12).

Изображающая точка начинает бегать по предельному циклу. На физическом языке это значит, что в системе имеет место само-возбуждение колебаний. При увеличении λ радиус предельного цикла увеличивается (рис. 13), при уменьшении — все идет попреж-

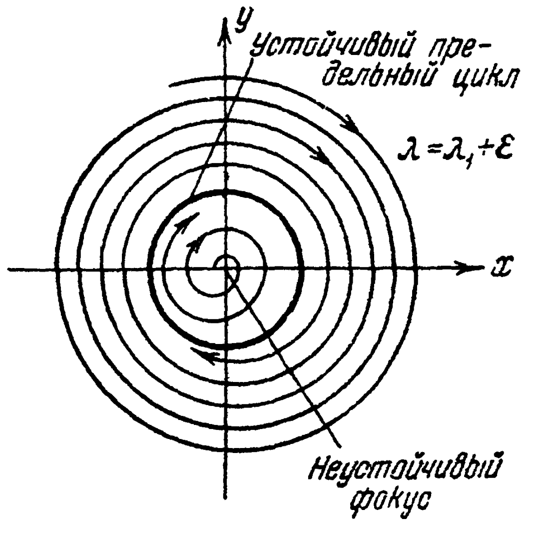


Рис. 12

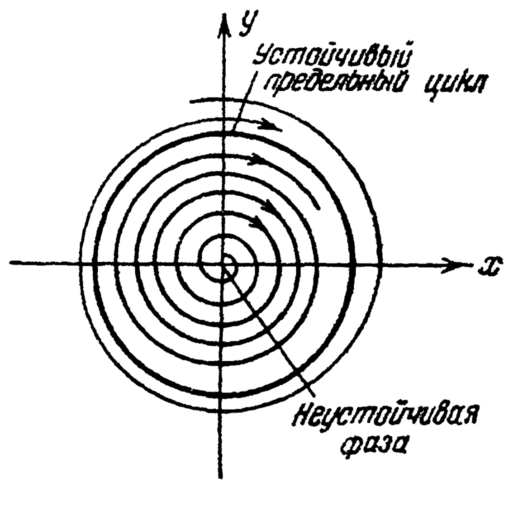


Рис. 13

нему, но в обратном порядке, предельный цикл сжимается в точку, колебания исчезают. На „физической“ диаграмме I^2, λ, где I —

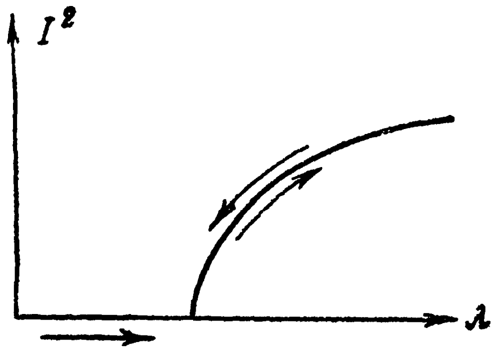


Рис. 14

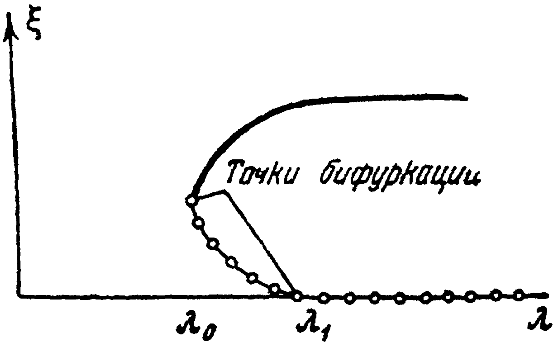


Рис. 15

амплитуда электрического тока, мы получим плавный („мягкий“) переход от состояния покоя к периодическим движениям с постепенным увеличением амплитуды и обратно (рис. 14).

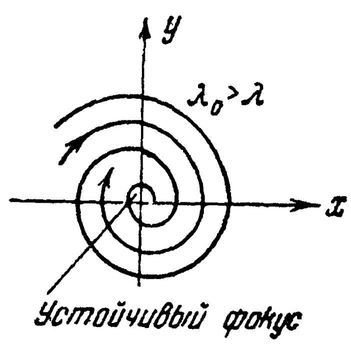


Рис. 16

Перейдем к жесткому возбуждению (рис. 15). Если для малых λ система находилась вблизи состояния равновесия, то она и будет находиться вблизи состояния равновесия до $\lambda=\lambda_0$ (рис. 16, 17). То, что при $\lambda=\lambda_0$ (сравни с рис. 18) у нас появляется сразу пара предельных циклов — из них один устойчивый, не касается нашей изображающей точки, так как устойчивый характер равновесия при этом не меняется. При дальнейшем увеличении λ неустойчивый цикл начинает уменьшаться и при $\lambda = \lambda_1$ исчезает, так сказать, „заразив" особую точку своей неустойчивостью. Изображающая точка, конечно, при этом „пере-

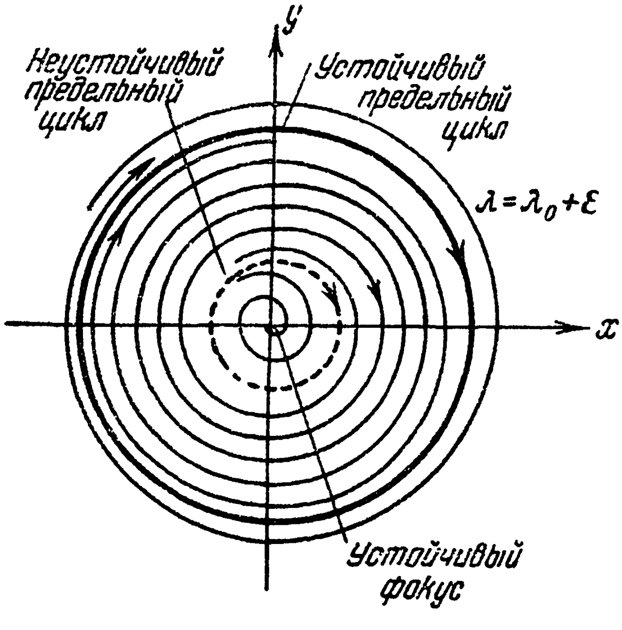


Рис. 17

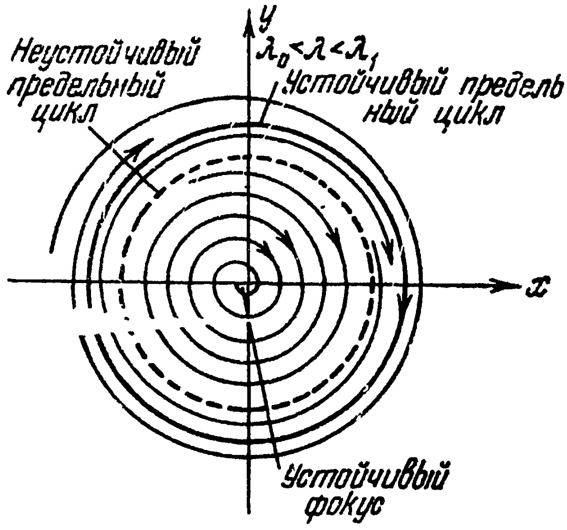


Рис. 18

скакивает", следуя интегральным кривым, на устойчивый предельный цикл, амплитуда которого все время возрастала (рис. 19), начиная с $\lambda = \lambda_0$. При уменьшении параметра дело теперь пойдет по-другому. Изображающая точка остается на предельном цикле до $\lambda = \lambda_0$, когда оба цикла совпадут, и изображающая точка будет вынуждена „перескочить" в состояние равновесия. Опять-таки „ей не будет никакого дела" до того, что при $\lambda = \lambda_0$ состояние равновесия сделается устойчивым — это не изменит характера того предельного цикла, по которому она движется.

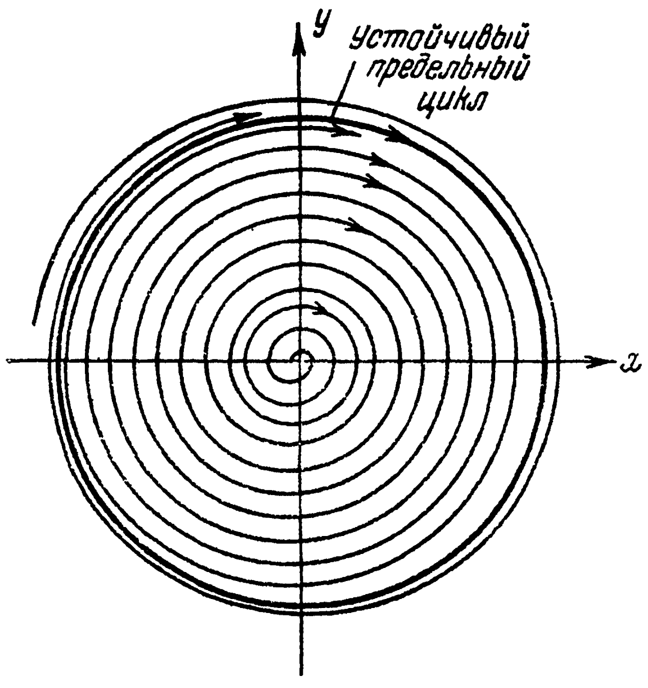


Рис. 19

Диаграмма I^2, λ (рис. 20) обнаруживает явление резкого („жесткого") изменения амплитуды и „гистерезисный" характер этого изменения — „затягивание в обратной связи". Это весьма интересное для радиотехники явление жесткого возбуждения получает здесь на языке особых точек, предельных циклов и бифуркационных значений параметра естественное, наглядное объяснение.

Так, например, сразу видно, что если λ немного больше λ_0, изображающая точка может быть „переброшена“ из одного стационарного состояния в другое достаточно сильным толчком.

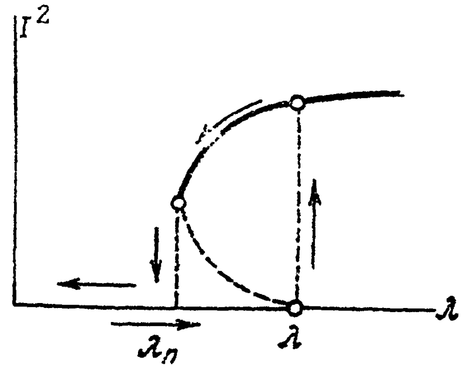


Рис. 20

Остановимся еще на одном понятии, которое было бы бессмысленным по отношению к консервативной системе, но которое весьма интересно для неконсервативных систем. Пусть мы имеем устойчивую стационарную траекторию. Мы можем выделить на фазовой плоскости ту область начальных положений изображающей точки, из которых она в конце концов (при $t \to \infty$) попадает на данную стационарную траекторию. Эта область носит название области „устойчивости im Grossen“ (устойчивости в большом) или области притяжения для рассматриваемого движения.

Рассмотрим два примера.

Пусть у нас имеется фазовая плоскость с тремя особыми точками (рис. 21), двумя устойчивыми узлами и одним седлом. Здесь

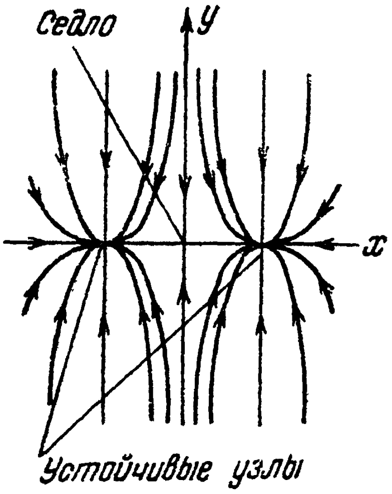


Рис. 21

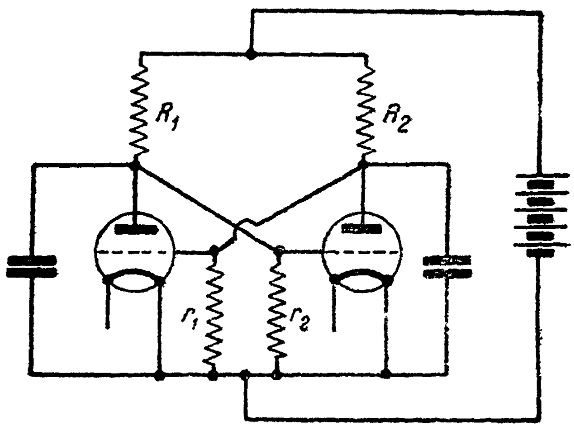


Рис. 22

сразу видно, что областью притяжения узла A является правая полуплоскость, а узла B — левая полуплоскость. К подобной структуре фазовой плоскости приводит схема так называемого кипп-реле (рис. 22), если сопротивления R_1 и R_2 достаточно велики.

Такие схемы применяются в качестве быстродействующих реле в некоторых измерительных устройствах, например в осциллографе Роговского.

Рассмотрим другой пример: устойчивую особую точку, неустойчивый цикл, устойчивый цикл (рис. 23). Очевидно, что областью „устойчивости im Grossen" для положения равновесия является область, заключенная внутри неустойчивого цикла. Вся остальная часть плоскости является областью притяжения устойчивого цикла. Однако с определением понятия областей „устойчивости im Grossen", с разделением всей фазовой плоскости на такие области имеются, даже в этом простейшем случае $n = 2$, известные затруднения. Повидимому, даже здесь нельзя обойтись без некоторых рассмотрений, связанных с вопросами теории вероятностей.

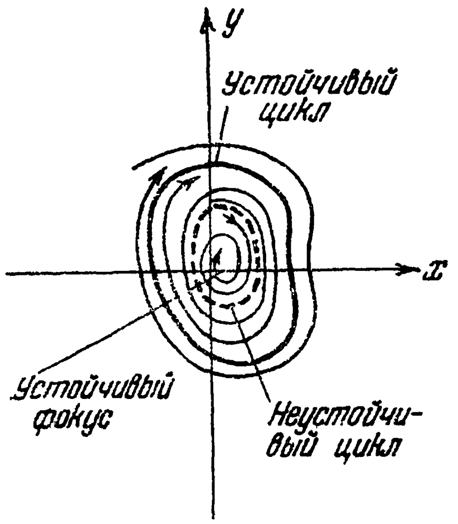


Рис. 23

Только в связи с этим понятием об областях „устойчивости im Grossen" полностью раскрывается физический смысл неустойчивых предельных циклов и сепаратрис. Они являются граничными движениями, аналогичными линиям водоразделов, и определяют, куда будет стремиться система при тех или иных начальных условиях.

§ 4. Разновидности автоколебательных систем

Для иллюстрации основных положений теории мы пользовались до сих пор в качестве примера только одной нелинейной системой — ламповым генератором. Само собой разумеется, что эта общая теория может быть также применена и к другим разновидностям нелинейных систем, в той или иной степени аналогичных ламповому генератору.

Для всех подобных систем характерна возможность существования автоколебаний, т. е. таких стационарных колебаний, которые создаются самой колебательной системой без воздействия какихлибо внешних, меняющихся во времени сил, за счет местного постоянного источника энергии (например, батареи). Примеры подобных автоколебательных систем встречаются весьма часто не только среди электрических, но и среди механических систем. Одной из наиболее простых и наглядных механических автоколебательных систем является так называемый маятник Фроуда, изученный С. П. Стрелковым ([20]). Маятник Фроуда представляет собой полную механическую аналогию обычного лампового генератора.

При изучении поведения автономной системы возникают вопросы качественные и отчасти количественные, ответ на которые получается непосредственным применением тех методов, которые были нами здесь изложены. Мы уже указывали, какое освещение получает на основании этих методов рассмотрение таких проблем, как вопросы о том или ином роде возбуждения (жестком или мягком), о характере установления колебаний и т. д. Приближенные количественные методы, как уже указывалось, дают возможность определить, например, амплитуду автоколебаний и поправку на частоту в том случае, когда колебания близки к синусоидальным. Нужно отметить, что в этой области указанные методы во всяком случае, поскольку дело касается первого приближения, пока лишь подводят более строгую математическую базу под уже известные раньше результаты.[1] Так, например, в известных случаях можно строго доказать существование периодических решений, строго показать, что те или иные решения устойчивы. Нам кажется, что такого рода доказательства имеют существенное значение и вот по какой причине.

Когда мы пишем дифференциальные уравнения какой-нибудь физической задачи, мы всегда и неизбежно данную проблему упрощаем. Мы всегда пишем уравнение не для данной проблемы, а для идеализированной, упрощенной. Откуда же мы знаем, что мы учли все существенные черты данной проблемы? Если доказательство существования приводит к тому, что имеются периодические решения, и это на опыте оправдывается, то это уже служит известным аргументом, что мы не упустили существенных черт, потому что существенными чертами мы считаем те, которые обусловливают возможность стационарных колебаний. Но это только косвенные указания. Если же в процессе доказательства существования периодических решений мы натолкнулись на то, что наши дифференциальные уравнения не имеют периодического решения, а объект, для которого мы их составили, имеет, то тогда мы

[1] Выяснению связи между хорошо известными радиотехникам методами Баркгаузена — Мёллера и строгой теорией автоколебаний посвящена недавняя работа Безменова ([100]).

наверное можем быть убеждены, что мы не учли некоторых существенных особенностей системы. Тогда мы начинаем искать, какие особенности мы упустили. И практика знает примеры, когда „доказательство существования“ наводило на соображения, где искать эти упущения, помогало найти нужное и поставить, таким образом, всю проблему на правильные рельсы.

Приведем совершенно элементарный пример. Всем известно, как во многих учебниках, особенно более старых, излагается теория простого электрического звонка или, скажем, электромагнитного прерывателя. Ударник или якорь в положении равновесия замыкает контакт электрической цепи, в которую включен электромагнит, действующий на якорь. Когда мы включаем батарею, электромагнит притягивает ударник, ток разрывается, сила магнитов исчезает, пружина гонит ударник обратно, контакт опять замыкается и, как сказано между прочим и в одном хорошем немецком учебнике, „das Spiel geht weiter“ — игра продолжается дальше. Если мы эти соображения перенесем на язык дифференциального уравнения, то легко доказать, что соответствующее дифференциальное уравнение не имеет периодического решения. Значит, здесь что-то существенное упущено.

И, действительно, теория прерывателей не так проста, как кажется. Мы знаем, например, какую существенную роль в вопросе о возможности колебаний играет самоиндукция. Ясность в задачу о прерывателе была внесена работой М. А. Леонтовича ([21]). Из нее видно, как влияет самоиндукция, которая не только определяет возможность периодического процесса, но определяет и период колебания, который отличен от периода самого ударника. Таким образом, исследование существования или несуществования периодических решений указывает на существенные черты, указывает, как их надо учесть. Можно привести и другие примеры, из которых ясно было бы, что польза от таких исследований вполне реальна.

Условие близости колебаний к синусоидальным в радиотехнике соблюдается довольно часто. Однако за последние годы возрос интерес к системам, совершающим сильно несинусоидальные, так называемые релаксационные колебания. На характер этих колебаний существенное влияние оказывает сопротивление и эквивалентные ему параметры. Это значит, что в уравнении, описывающем автоколебательную систему

$$L\ddot{q}+\frac{q}{C}=f(q,\dot{q})-R\dot{q}=\varphi(q,\dot{q}); \qquad (1)$$

функция $\varphi(q, \dot{q})$ не ограничена малыми значениями (как в случае колебаний, близких к синусоидальным), а, как указано ван-дер Полем, может принимать большие значения. Поскольку здесь идет речь о периодических решениях, этот случай полностью укладывается в качественную теорию Пуанкаре. Неустойчивая особая точка здесь — узел, а периодическое решение соответствует предельному циклу.

В простейшем случае, когда характеристика лампы передается кубической параболой, уравнение после соответствующих преобразований принимает вид

$$\ddot{v}+\mu(1-v^2)\dot{v}+v=0.$$

Полагая $\dot{v}=y$, его можно написать в виде

$$\frac{dy}{dv}-\mu(1-v^2)+\frac{v}{y}=0.$$

Если $\mu \ll 1$, то мы имеем дело с колебаниями почти синусоидальными, с колебаниями томсоновского типа. Качественная теория, изложенная выше, охватывает общий случай, независимо от величины μ. При $\mu \ll 1$ особая точка есть фокус, при $\mu \gg 1$ эта точка есть узел. Предельный цикл имеется в обоих случаях.

Однако при количественном рассмотрении релаксационных колебаний, когда L достаточно мало, можно поступить иначе: можно сразу идеализировать проблему, полагая $L=0$. Тогда у нас вместо уравнения второго порядка будет уравнение первого порядка

$$\dot{v}=\frac{v}{\mu(1-v^2)}, \tag{2}$$

которое легко интегрируется. Это уравнение, конечно, не допускает периодических решений. Но, с другой стороны, если процесс подчиняется этому уравнению, то через некоторый конечный промежуток времени скорость v (электрический ток, скорость изменения тока) обращается в ∞. Для того чтобы при этой идеализации передать приближенно физическое явление, нужно ввести новое условие, заключающееся в данном случае в том, что в известный момент времени происходит скачок тока, но что напряжение остается при этом неизменным. Это последнее условие равносильно ограничению, что энергия не изменяется скачком. Таким образом, этот постулат — так называемое „условие скачка“ — может быть сформулирован в виде требования непрерывности изменения энергии системы.

Применяя обычное „непрерывное рассмотрение" в комбинации с условиями скачка, можно выделить „разрывные" периодические движения, определить „амплитуды" и период этих „разрывных" колебаний. Эта разрывная трактовка может быть применена как к электрическим, так и к механическим системам. Такой метод идеализации релаксационных колебаний аналогичен, но конечно, не тождественен тому, как, например, в механике рассматривается удар упругих шаров.

Там считают, что в момент удара скорость изменяется разрывно. Из закона сохранения энергии и сохранения моментов выводятся скорости шаров после удара, если они заданы до удара. При этом способе принципиально исключается из рассмотрения то, что происходит за чрезвычайно короткое время самого соударения.

Полученный при таком способе рассмотрения ответ во многих случаях дает нам все, что мы хотим знать, и это потому, что самый процесс соударения происходит чрезвычайно быстро. Если же нам существенно знать, как протекает самый процесс соударений, то вся задача становится неизмеримо более сложной. Точно так же и в рассматриваемом нами случае релаксационной системы, мы, идеализируя, как только что было указано, нашу задачу, весьма упрощаем ее математически, но зато отказываемся от рассмотрения самого процесса скачка.

Этот способ был применен нами к рассмотрению электрических систем с одной степенью свободы, в которых самоиндукция играет второстепенную роль ([22]), а также к механической автоколебательной системе, в которой мала масса и велико трение ([23]). Такого рода малые параметры, как, например, малая самоиндукция в электрических релаксационных системах и масса в механических, мы будем называть *паразитными*. Пренебрежение паразитными параметрами весьма существенно упрощает рассмотрение.

Нужно заметить, что в данном случае учет паразитной самоиндукции вряд ли мог бы дать что-нибудь интересное в физическом отношении. Принимая ее во внимание, мы все же отказываемся от учета паразитной емкости проводов и т. д., а учесть все паразитные параметры не представляется возможным. Идя по пути указанной идеализации, мы получаем то преимущество, что становится возможным рассмотрение более сложных релаксационных систем. Такой более сложной системой и является, например, мультивибратор Абрагама и Блоха, представляющий собой релаксационную систему с двумя степенями свободы. Эта система была в свое время рассмотрена ван-дер Полем ([24]), но при большом ограничении, а именно в предположении полной симметрии самого процесса. Это предположение лишает нас возможности рассматривать установление процесса при несимметричных начальных условиях. Только благодаря этому предположению ван-дер Поль получил одно уравнение второй степени относительно v. Для общего же случая получилось бы два уравнения второй степени, что весьма усложнило бы задачу. При нашей идеализации мы получаем для общего случая два уравнения первого порядка, которые при помощи указанных выше методов могут легко быть исследованы ([25]). Этим способом был исследован не только установившийся режим (определены амплитуды и период), но также и процесс установления в мультивибраторе Абрагама и Блоха при отсутствии указанной симметрии. Полученные результаты были качественно подтверждены на опыте Дивильковским.

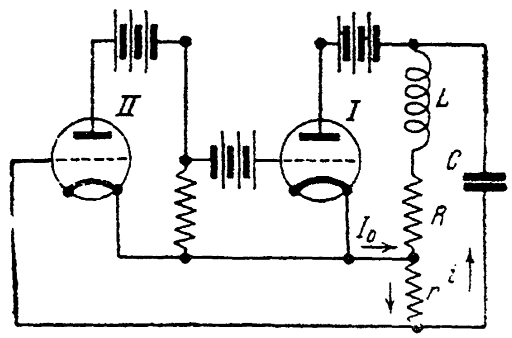


Рис. 24

Разрывную трактовку оказывается возможным применить не только в тех случаях, когда один из колебательных параметров мал. И при наличии в контуре как емкости, так и самоиндукции все же возможны случаи, когда в некоторых областях скорость изменения состояний настолько велика, что можно движение с большой, но конечной скоростью заменить скачком и определить конечный результат движения в этой области при помощи скачка. Избавляясь от необходимости рассматривать области, наиболее трудные в смысле количественного исследования, мы можем решить с достаточной для практики точностью целый ряд вопросов, касающихся колебаний, существенно отличных от синусоидальных. Подобным методом была рассмотрена, например, схема, изображенная на рис. 24 ([26]).

В связи с вопросом о паразитных параметрах остановимся коротко еще на одном заслуживающем внимания обстоятельстве ([27]). Исследуя какую бы то ни было колебательную систему, мы, как уже было изложено, так или иначе ее идеализируем. Другими словами, мы математически формулируем проблему (например, составляем дифференциальное уравнение) без учета тех или иных параметров. Так, например, мы часто не учитываем самоиндукции конденсатора или емкости катушки самоиндукции и т. д. Несмотря на это, полученные теоретические результаты очень часто достаточно хорошо описывают явление. Причина этого лежит довольно глубоко в свойствах математического аппарата, но мы сейчас на этом останавливаться не будем. Здесь мы хотели бы только указать на возможность таких случаев, когда неучет соответствующих параметров, как бы малы они ни были, может качественно изменить картину. Рассмотрим пример, изображенный на рис. 25. Здесь цепь состоит из батареи E, сопротивления R и вольтовой дуги, зашунтированной емкостью C. Если мы, исходя из обычной характеристики дуги, поставим вопрос о том, какие возможны стационарные токи в такой цепи, то обычное графическое построение (рис. 26) даст для возможных токов три значения. Исследуя хорошо известными методами устойчивость этих значений, мы найдем, что два из них — A и B — устойчивы. Если же мы теперь включим в цепь дуги сколь угодно малую самоиндукцию (рис. 27), то положение B становится неустойчивым, т. е. практически оно неосуществимо. Таким образом, неучет сколь угодно малого паразитного параметра может исказить физическую картину. Легко отдать себе отчет, чем обусловливаются подобные случаи.

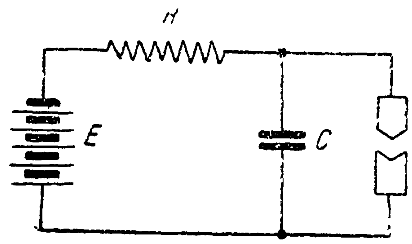


Рис. 25

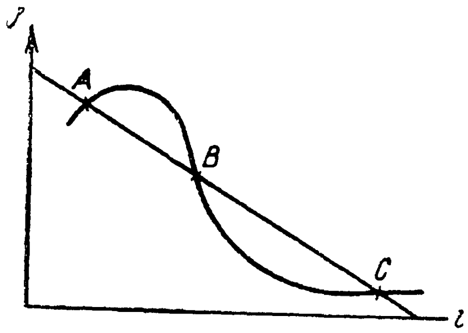


Рис. 26

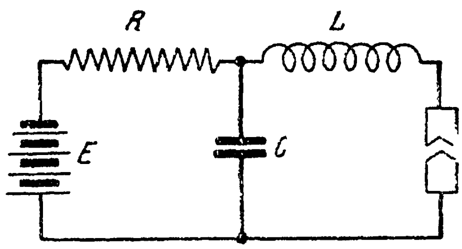


Рис. 27

Если заключение о стабильности или нестабильности сделано на основании исследования дифференциального уравнения (так как вопрос идет о статической стабильности, то исследуется линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами) и если учет паразитного параметра не повышает степени уравнения, то, поскольку этот паразитный параметр достаточно мал, ничего нового произойти не может. Если же учет паразитного параметра влечет за собой повышение порядка уравнения, то может случиться, что положения равновесия, которые на основании первоначального уравнения оказывались стабильными, теперь перестанут быть таковыми. Физический смысл этого нетрудно себе уяснить. Ведь содержание всякого исследования стабильности состоит в том, что даются все возможные начальные условия в окрестности состояния равновесия и исследуется вопрос, удаляются ли от состояния равновесия представляющие точки, соответствующие этим начальным условиям, или нет. Если мы свели математическую задачу на уравнение n-го порядка, то мы ограничили себя начальными условиями, всецело заданными n начальными значениями. Например, в данном случае дуги при отсутствии самоиндукции все характеризуются только заданием одного тока. Если, учитывая паразитный параметр, мы повышаем порядок уравнения, то мы тем самым признаем возможность большего разнообразия начальных условий и тогда, конечно, вполне возможно, что среди новых начальных условий будут и такие, при которых система не возвращается в исходное положение равновесия, а от него уходит. Мы считали желательным упомянуть об этих возможностях, так как эти соображения показывают, что ввиду невозможности учета всех параметров нужно соблюдать осторожность при введении той или иной идеализации.

До сих пор речь шла о системах с конечным числом степеней свободы. Остановимся еще несколько на автоколебательных системах с распределенными параметрами, играющих существенную роль как в радиотехнике, так и в механике и акустике. В виде примеров таких систем можно назвать генераторные лампы для дециметровых волн с колебаниями в проводе сетки (разработанные Греховой и др.), колеблющиеся аэропланные крылья, смычковые музыкальные инструменты, органные трубы и т. д.

Для ряда таких систем можно провести теоретическое рассмотрение; прежде всего сюда относится случай, когда в отсутствие сил возбуждения система — линейная и распределение ее обертонов не гармонично ([28, 29, 30, 31]). В этом случае форма стационарных колебаний может быть близка к синусоидальной. При помощи теории, аналогичной теории малого параметра для систем с конечным числом степеней свободы, можно вычислить амплитуду, решить вопрос об устойчивости и т. д. (однако в силу того, что эта теория в применении к распределенным системам строго не обоснована, пользоваться даваемыми ею результатами нужно с осторожностью).

Указанная теория предсказывает возможность различных колебательных режимов при одних и тех же параметрах системы, аналогично тому, что имеет место в системах с конечным числом степеней свободы, хотя здесь есть свои специфические особенности, причем осуществление того или иного режима зависит либо от начальных условий, либо от истории. Эти явления были получены и исследованы экспериментально Бендриковым и Браило (НИИФ), а также Гапоновым (ГИФТИ).

Так, например, возбужденную в лехеровой системе волну определенной длины можно сорвать, трогая пальцем пучность напряжения; при этом система перескакивает на другую волну. Если палец отнять, то система не вернется опять на старую волну, а будет колебаться на новой. Такое перескакивание с одной волны на другую можно вызывать и другими способами, например отводя энергию резонансным контуром. Аналогичные явления происходят, повидимому, и в музыкальных инструментах.

Аналогичные опыты со струной, возбуждаемой потоком воздуха или струей воды, были произведены С. П. Стрелковым. Опыты эти очень просто поставить и на них легко продемонстрировать ряд существенных черт распределенных автоколебательных систем.

Отметим, кстати, хотя это не относится к области распределенных систем, что в потоке воздуха можно наблюдать незатухающие колебания маятника, например шаровой формы. Это явление также было изучено С. П. Стрелковым.

Раз при заданном состоянии системы возможны различные устойчивые режимы колебательного характера, то возникает вопрос, какой из них устанавливается при включении системы. Теоретически этот вопрос для распределенных систем еще пока не исследован. Как уже было сказано, экспериментально эти явления можно довольно легко наблюдать. Аналогичные явления, как известно, наблюдаются также и в органных трубах.

Другой случай, который с теоретической стороны допускает совершенно строгое рассмотрение, — оно было дано одним из нас ([101]) — это тот, когда в отсутствие сил возбуждения, предполагаемых безинерционными, система линейна и имеет гармоническое распределение обертонов; примером может быть скрипка, возбуждаемая смычком. Математическая задача здесь может быть сведена к исследованию некоторых функциональных уравнений. Оказывается, что в этом случае (в отличие от случаев с негармоническим распределением обертонов) стационарные колебания всегда резко несинусоидальны;[1] их ход во времени изображается ломаными линиями, состоящими из отрезков прямых, примерно так, как указано на рис. 28. Такие колебания экспериментально хорошо известны еще из работ Гельмгольца. Далее оказалось, что в таких системах возможны унтертонные колебания, т. е колебания с периодом, являющимся целым кратным периода основного тона струны без смычка. Унтертоны высших порядков представляют собой релаксационные колебания струн, возбуждаемые при медленном движении смычка; они обязательно синхронизированы собственными колебаниями системы. Унтертоны низших порядков (на октаву или на две октавы ниже основного колебания струны без смычка) наблюдал экспериментально Г. Д. Малюжинец (НИИФ).

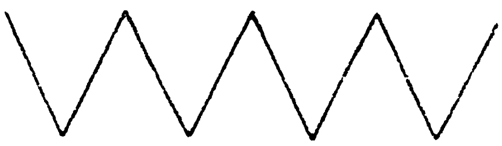


Рис. 23

Аналогичные явления должны наблюдаться при известных условиях и в лехеровых системах с гармоническим распределением обертонов, обратная связь в которых аналогична безинерционной в механических системах; правда, в силу отличных характеристик, явления должны носить несколько иной характер, но можно ожидать, что колебания и в этом случае будут резко несинусоидальны по форме.

Несколько раньше В. М. Бовшеверов рассмотрел при помощи функциональных уравнений, аналогичных тем, к которым приводит задача о скрипичной струне, другой тип колебательных систем, а именно безинерционные колебательные системы, в которых связь между некоторыми органами обусловлена бегущими волнами. Например, он рассмотрел систему, в которую входят репродуктор и микрофон, связь между которыми осуществляется через бегущую акустическую волну, а также лехерову систему, в которой устранена отраженная волна; он показал, что и в таких системах получаются колебания ломаного характера, причем период определяется временем распространения бегущей волны.

Близко к системам, рассмотренным В. М. Бовшеверовым (по природе возбуждения), примыкают системы, частью колебательного контура которых служат пути электронов, причем время пролета электронов сравнимо с периодом возбуждаемых колебаний. Сюда относят генераторы Баркгаузена и Курца, Джилля и Мореля,

[1] Работа Артемьева ([32]), который получил для систем с гармоническим распределением обертонов колебания, близкие к синусоидальным, повидимому, неверна.

генераторы с магнетронами и т. д. Однако здесь дело осложняется тем обстоятельством, что для электронов время пролета не постоянно, а зависит от напряжения в контуре; поэтому уравнения движения таких систем носят характер интегрофункциональных. Кроме того, здесь дело осложняется вторичным излучением электронов.

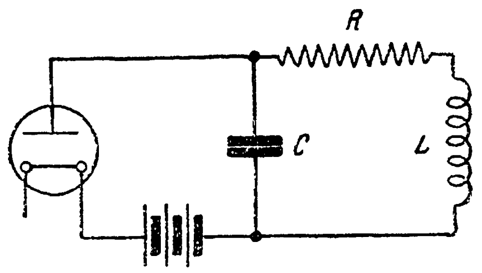


Рис. 29

Одним из нас был рассмотрен простейший тип таких систем ([33]), а именно был рассмотрен диод с накаленным катодом, присоединенный к колебательному контуру (рис. 29). Ток эмиссии был принят постоянным (ток насыщения), ток в контуре полагался равным электронному току на аноде (вторичное излучение электронов не учитывалось). При этом условия самовозбуждения должны иметь вид

$$\frac{\sin \omega T}{\omega T} - \cos \omega T + 2\rho < 0, \tag{3}$$

где $\omega = 1/\sqrt{LC}$, T — время пробега под действием постоянного напряжения E_0, $\rho = \frac{RE}{\omega^2 L^2 I_0}$, I_0 — электронный ток катода; асимптотически для больших n и малых ρ имеем

$$\lambda_n^2 E = \frac{2c^2 l^2}{n^2 \gamma},$$

где λ_n — длина волны обертона n-го порядка, l — расстояние между электродами, γ — отношение заряда к массе электрона, c — скорость света.

При первоначальном рассмотрении ([33]) была допущена ошибка, не играющая принципиальной роли, но меняющая вид условия (3). Действительно общий ток (ток смещения + ток электронов) должен быть одинаков на катоде и аноде. Так как мы предполагаем, что электронный ток анода равен колебательному току, то тем самым мы предположили, что ток смещения на аноде равен нулю. На самом деле ток смещения равен по абсолютной величине и противоположен по знаку на катоде и аноде, в чем легко убедиться, так как движущиеся электроны образуют плоскости, параллельные плоскостям электродов; следовательно, мы имеем

$$i_{\text{а}} + i_{\text{см}} = i_{\text{к}} - i_{\text{см}} = i_{\text{кол}}.$$

Исключая $i_{\text{см}}$, имеем

$$i_{\text{конт}} = \frac{i_{\text{к}} + i_{\text{а}}}{2},$$

т. е. ток в контуре равен среднему из электронных токов анода и катода: переменная часть тока в колебательном контуре равна половине тока катода.

Вследствие этого, условия самовозбуждения были получены первоначально в несколько ином виде, нежели (3), а именно:

$$\frac{\sin \omega T}{\omega T} - \cos \omega T + \rho < 0.$$

Асимптотическое выражение остается прежним. Заметим, что в отличие от систем, рассмотренных Бовшеверовым, в этих колебаниях возбуждающие силы малы и „инерция“ играет существенную роль, поэтому и колебания имеют почти синусоидальную форму.

Отметим в заключение выполненные в ГИФТИ работы по исследованию поведения двух связанных самовозбужденных систем (ламповых генераторов). Этот вопрос был исследован теоретически Майером ([34]) и экспериментально Гапоновым ([35]). Был выяснен вид областей бигармонических колебаний.

§ 5. Действие внешней силы на автоколебательную систему

Одно из наиболее характерных свойств автоколебательных систем, весьма важное для всей радиотехники, проявляется в эффекте так называемой принудительной или автоматической синхронизации или захватывания частоты.

Это явление, наблюдавшееся еще Гюйгенсом на механических системах — часах, висящих на одной стенке, было впервые обнаружено в области радиотехники Мёллером ([36]) и Винсентом ([37]).

В дальнейшем оно явилось предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований, из которых особенно отметим работы ван-дер Поля ([6]). В простейшем виде это явление, как известно, заключается в следующем. Если на автоколебательную систему частоты ω_0 действует внешняя сила частоты ω, то оказывается, что, когда расстройка $\omega - \omega_0$ достаточно мала, система не дает биений, как это дала бы линейная незатухающая система, а автоматически синхронизируется частотой внешней силы. Такое явление наблюдается и тогда, когда на системы действует не периодическая, а квазипериодическая сила с несколькими частотами.

В этом случае захватывание частоты наступает тогда, когда частота системы близка к одной из частот внешней силы или их комбинационных частот, а также их унтертону, как это наблюдали ван-дер Поль и ван-дер Марк ([38]) в релаксационных системах и Кога ([39]) в обычном ламповом генераторе.[1]

Когда расстройка превышает некоторую границу, которую называют границей захватывания, начинаются биения. В том случае, когда расстройка далека от границы захватывания, то, как известно, в системе в основном существуют два колебания: одно с частотой внешней силы и другое с собственной частотой системы. Если же

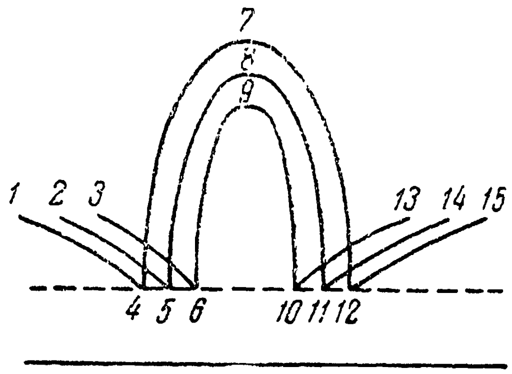


Рис. 30

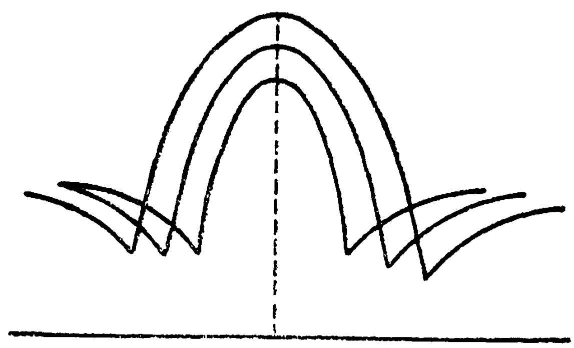


Рис. 31

расстояние от границы мало, эта последняя частота несколько смещается в сторону действующей частоты и все явление значительно усложняется.

Теоретическое исследование явления захватывания сводится к отысканию стационарных решений дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu f(y, \dot{y}) + \sum_s A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{1}$$

В простейшем случае действия внешней синусоидальной силы на ламповый генератор с мягким установлением, автоколебания которого почти синусоидальны, „амплитудные кривые“, как известно, имеют вид, изображенный на рис. 30.

Здесь части *4*, *7*, *12*; *5*, *8*, *11* и т. д. изображают режим синхронизации; части *1*, *4*, *12*, *15* — режим биений. Кривые эти имеют симметричный вид, однако на опыте они большей частью получаются несимметричными (рис. 31). Такое искажение может быть, например,

---

[1] Аналогичные явления, имеющие место в автоколебательных системах с несколькими степенями свободы, при воздействии частотой, равной комбинационной частоте собственных колебаний системы, исследованы в ФИАН В. В. Мигулиным [см. ЖТФ 7, 627, 1937].

объяснено присутствием сеточного тока. Это было подтверждено исследованием, проделанным Бакуловым (НИИФ).

В своей основной работе ([6]) ван-дер Поль рассмотрел случай воздействия на автоколебательную систему с мягким режимом установления, причем принял характеристику лампы в виде кубической параболы. В этой работе ван-дер Поль выяснил ряд основных черт явлений синхронизации (захватывания частоты). Однако некоторые вопросы, относящиеся к этим явлениям, остались неисследованными. Сюда относится, например, вопрос о существовании при явлении захватывания частоты порога для действующей э. д. с. Следует отметить, что Оллендорф предполагал, что такой порог существует ([40]).

Применяя к „укороченным“ уравнениям ван-дер Поля для этой задачи топологический анализ Пуанкаре, удалось показать, что такого порога не существует ([41]). Эти „укороченные“ уравнения имеют вид

$$\frac{dx}{d\tau} = -ay + x(1-r^2), \qquad \frac{dy}{d\tau} = A + ax + y(1-r^2), \tag{2}$$

где

$$a = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{\omega}$$

— расстройка, ω_0 — частота автоколебаний, $A = B\frac{\omega_0}{\alpha a_0}$, α — константа, определяемая параметрами лампы, B — амплитуда внешней силы, a_0 — амплитуда автоколебаний и $\tau = \frac{\alpha t}{2}$ (t — время).

Легко было дальше показать количественно, что при слабых сигналах относительная ширина полосы захватывания $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}$ равна отношению амплитуды сигнала к a_0 — амплитуде автоколебаний. Эти количественные соотношения, так же как отсутствие порога для явления захватывания, были подтверждены экспериментально ([42]).

Заметим, что эти результаты позволяют применить указанный Эппльтоном метод определения напряженности поля по ширине полосы захватывания ([43]) и для слабых сигналов. Для этой цели он был нами разработан и применен ([44]). Так же как и в электрических системах, явление захватывания было обнаружено и в акустических системах как чисто механических, так и электромеханических ([45]). Явление захватывания поэтому может быть также использовано и для исследования напряженности акустического поля. Метод измерения напряженности полей при помощи явления захватывания был разработан одним из нас ([46]), а также К. Ф. Теодорчиком и

Е. Н. Секерской ([16]). Резонансный характер этого метода делает его нечувствительным ко всем звукам, кроме измеряемых. Благодаря этому он позволяет производить измерения в любых условиях и на открытом воздухе. При помощи этого метода в НИИФ произведены измерения направленности излучения репродукторов на открытом воздухе.

Вернемся к анализу уравнений (2).

Если по оси ординат отложить квадрат амплитуды A^2, а по оси абсцисс — расстройку a, то мы получим картину, изображенную на рис. 32. Сами резонансные кривые, приведенные на нашем рисунке, вполне соответствуют кривым, полученным ван-дер Полем, но здесь, в дополнение к этим последним, указаны области, соответствующие различным типам установления процесса.

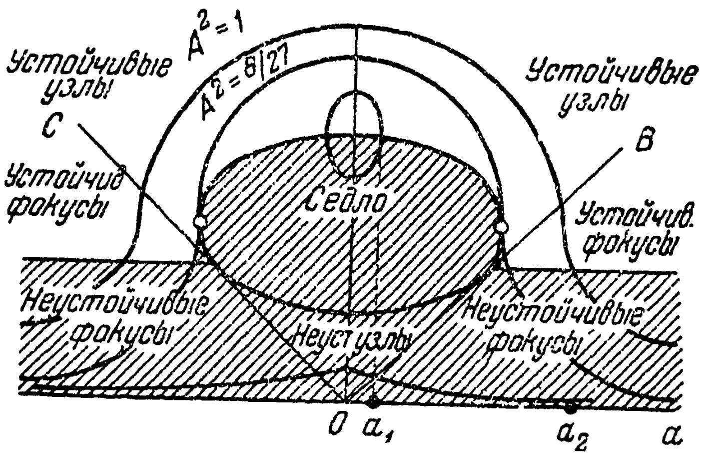


Рис. 32

Заметим прежде всего следующее: в вопросах установления необходимо различать два основных случая, а именно установление колебаний при включении внешней силы, когда генератор предварительно уже пущен в ход, или же включение генератора, когда внешняя сила уже действует. Мы рассмотрим только первую возможность, которая с физической стороны представляет больший интерес. Теоретическое исследование нестационарных колебаний сводится к исследованию нестационарных решений уравнения амплитуд (2), т. е. к исследованию зависимости компонент амплитуд x и y от времени. Результаты этих исследований и изображены на диаграмме (рис. 32), которая показывает следующее. Пусть мы хотим знать, как устанавливаются колебания при заданной настройке и заданной внешней э. д. с. Для этого нужно найти резонансную кривую, соответствующую заданной э. д. с., и на этой кривой точку, соответствующую данной расстройке.

Если эта точка лежит в области устойчивого узла, то это значит, что при данных условиях установление режима происходит апериодически, т. е. что медленно изменяющиеся коэффициенты u и v в решении ван-дер Поля апериодически стремятся к постоянным значениям. Если же точка лежит в области *устойчивого фокуса* то это значит, что установление происходит *осциллаторно*. Наконец, если точка попадает в область *неустойчивых точек*, то это означает *отсутствие* при данных условиях *периодических решений*. Указанные результаты нашли экспериментальное подтверждение в работах П. Рязина ([47]), получившего осциллограммы процессов установления различных видов в зависимости от характера установившегося движения. Он исследовал уравнение (2) методом численного интегрирования и одновременно с этим снял осциллограммы на медленных колебаниях, подтверждающие его теоретическое исследование. Вычисленные кривые для области апериодического установления приведены на рис. 33, для осциллаторного — на рис. 34, а соответствующие осциллограммы — на рис. 35 и 36. До включения сигнала мы должны были бы иметь на осциллограмме чистую синусоиду — эта часть на осциллограмме не показана.

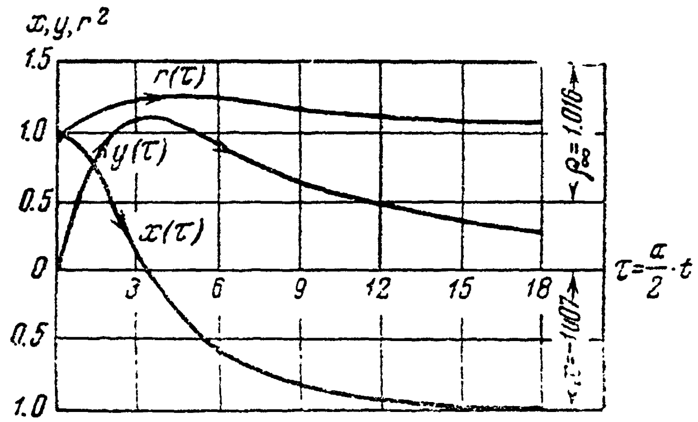


Рис. 33

Тем же способом численного интегрирования был исследован и вопрос о поведении автоколебательной системы вблизи полосы принудительной синхронизации. В этом случае, как известно, нестационарное решение уравнения (2), будучи изображено на фазовой плоскости, стремится не к особой точке, как в области захватывания, а к предельному циклу („накручивается" на предельный цикл). Соответствующие этому случаю кривые зависимости от времени и предельный цикл изображены на рис. 37 и 38.

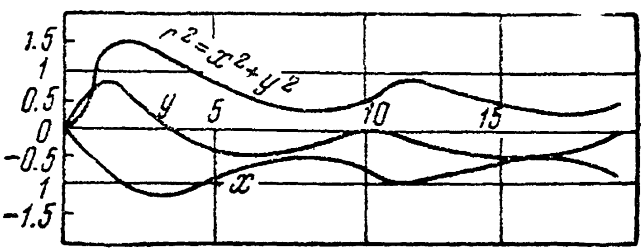


Рис. 34

Эти теоретические результаты хорошо согласуются с результатом эксперимента (рис. 39). В частности, как на теоретических кривых, так и на осциллограмме нарастание амплитуд при биениях происходит заметно быстрее, чем спадание.

Для установления спектрального состава биений Рязин произвел агрмонический анализ кривых, изображенных на рис. 37. Из рис. 40, изображающего полученный спектр, видно, что под действием внешней силы в автоколебательной системе вблизи области принудитель-

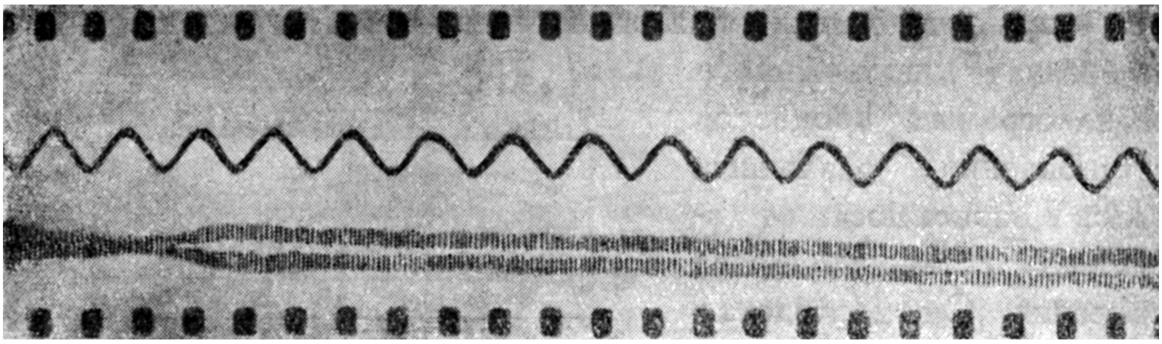


Рис. 35

ной синхронизации возникает спектр частот с интенсивными комбинационными тонами, расположенными на равном (по частоте)

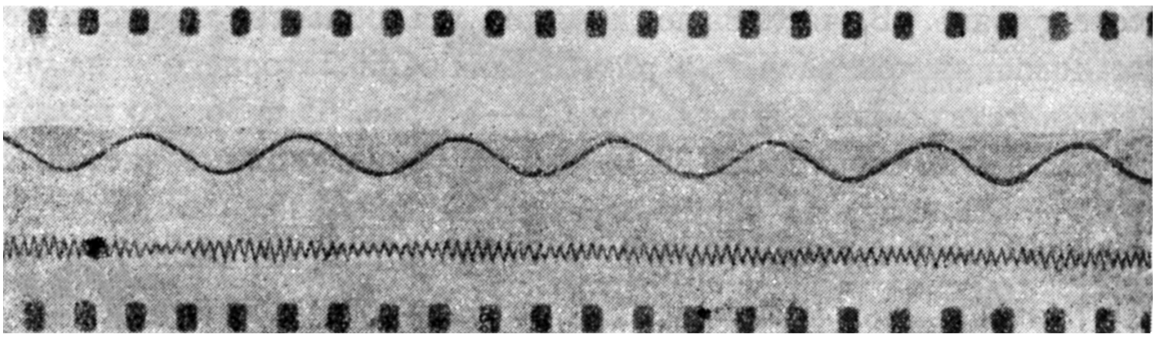


Рис. 36

расстоянии друг от друга. Были также получены осциллограммы для режима биений вблизи полосы принудительной синхронизации для случая соотношения частот 1:2, 1:3, 1:4 и 1:5.

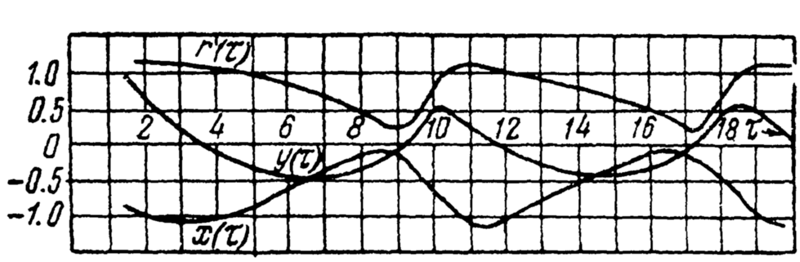


Рис. 37

Из этих осциллограмм видно, что вблизи границы принудительной синхронизации, так же как и в предыдущих случаях, при отношении 1 : 1 имеют место пульсации амплитуд — биения. Огибающая во всех случаях различных соотношений частот вблизи областей принудительной синхронизации остается более или менее неизменной по форме: амплитуда возрастает быстрей, спадает значительно медленнее. Подчеркнем тот факт, что вблизи полосы захватывания колебания не могут быть выражены при помощи только двух синусоидальных колебаний, как это обычно делалось. В упомянутых выше исследованиях было обнаружено наличие трех колебаний с почти одинаковой амплитудой.

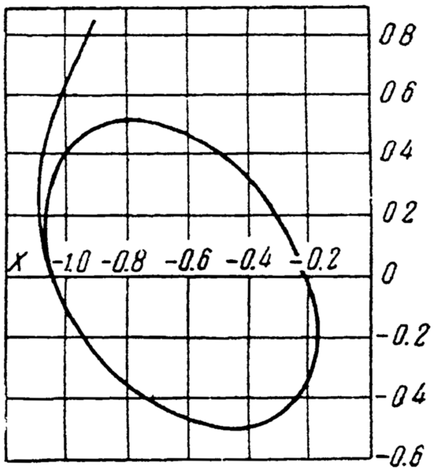


Рис. 38

Переход от несинхронизированного режима к синхронизированному, т.е. от биений к захватыванию при изменении расстройки при „слабых“ внешних сигналах совершается путем *уменьшения частоты биений до нуля.* В этом случае все тона „спек-

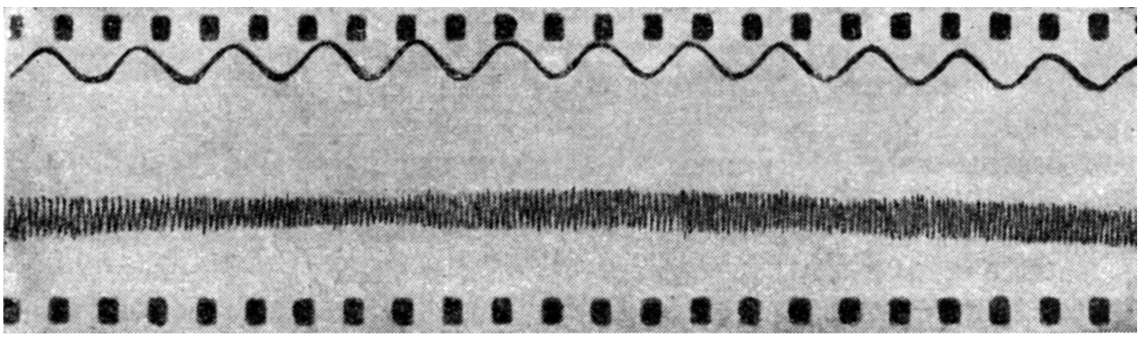


Рис. 39

тра автоколебаний“, обладая конечными амплитудами, сливаются в один тон (увлечение). При „сильных“ сигналах переход к захватыванию с уменьшением расстройки происходит путем *уменьшения глубины биений до нуля.* В этом случае все тона спектра автоколебаний, не сливаясь в один тон, исчезают путем постепенного уменьшения их интенсивности до нуля (тушение), причем на границе области синхронизации частота биений Ω не равна нулю и определяется по формуле

$$\Omega_{\text{гран}} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}\,.$$

Двум отмеченным типам перехода от биений к синхронизации соответствуют два типа кривых зависимости частоты биений от расстройки. На рис. 41 первому типу соответствует кривая mn ($A < 0.5$), второму — кривая pqr ($A = 1$).

Е. Секерской было исследовано явление захватывания при жестком режиме ([48]). При этом особенно интересной оказалась область так называемых потенциальных автоколебаний, т. е. область, где при отсутствии внешней силы автоколебания невозможны (см. § 6). В этой области получаются резко обрывающиеся резонансные кривые, аналогичные кривым, которые были нами получены при исследовании явлений резонанса n-го рода, о которых речь будет ниже (§ 6). В последнее время В. В. Мигулин ([92]) показал, что аналогичные явления имеют место вообще при соотношении между частотой ω внешней э.д.с. и собственной частотой ω_0 потенциально-автоколебательной системы $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2}{n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, и что эти явления

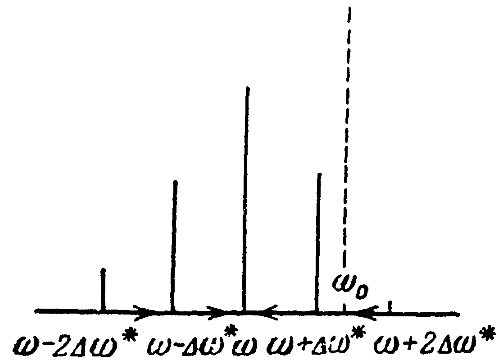


Рис. 40

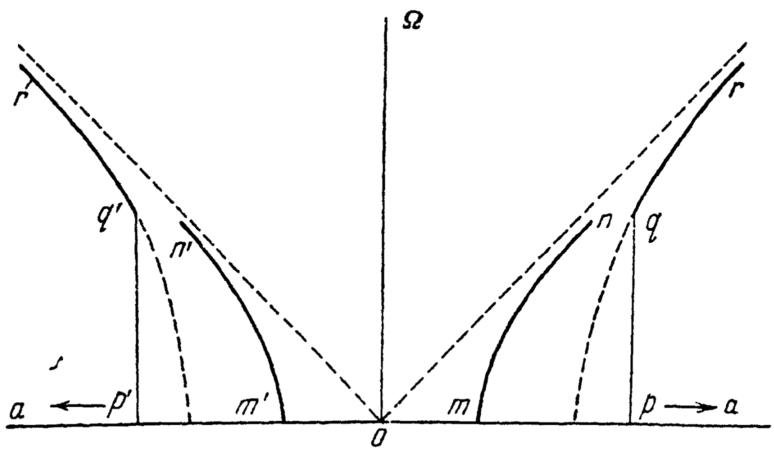


Рис. 41

целесообразно рассматривать как явления автопараметрического возбуждения (см. § 6, 7). Кроме того, здесь также наблюдается явление так называемого асинхронного возбуждения (см. § 6).

Кроме обычных случаев захватывания на основном тоне или унтертоне, наблюдается еще захватывание на комбинационных тонах. Мы здесь остановимся на одном частном случае, наблюдавшемся нами еще несколько лет назад, а именно на так называемом захватывании на середине: генератор настроен приблизительно на частоту $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, где ω_1 и ω_2 — частоты двух действующих внешних сил. В этом случае наблюдается вполне ясное захватывание, особенно резко выраженное, если, кроме того, частота генератора находится в простых кратных соотношениях с частотами внешних сил. Это явление, очевидно, может играть роль при радиоприеме без несущей частоты: дело в том, что, создавая несущую частоту в месте приема, практически очень трудно настроиться точно на середину, что является, однако, существенно необходимым. Описанное явление приходит на помощь; боковые полосы автоматически синхронизируют частоту генератора на середине — для этого достаточно только приблизительно настроить генератор. Аналогичные явления наблюдаются, например, и при настройке генератора на частоту $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$, а также на другие комбинационные частоты и их унтертоны. Теоретически явление захватывания на середине было разработано Гольдштейном ([94]), а также Кобзаревым ([95]) и Петросяном ([93]).

В. В. Мигулиным и Я. Л. Альпертом (ФИАН) показано, что можно не только „захватить", но и возбудить колебания на середине ([96]).

§ 6. О явлениях резонанса *n*-го рода

Мы выделяем в особый параграф явления, которые можно назвать резонансом *n*-го рода. Математические основы теории этого явления в общей форме, безотносительно к каким-либо физическим устройствам, содержатся в работах Пуанкаре ([2]). Общая теория Пуанкаре показала, что в нелинейных системах могут наступать периодические колебания с периодом, кратным периоду действующей силы („solutions périodiques de la deuxième espèce").

Прежде чем перейти к рассмотрению этих явлений, целесообразно ввести для краткости термины, характеризующие системы (без внешней силы), с которыми мы будем иметь дело. Мы будем разбирать случаи, когда система либо самовозбуждена, либо, когда уменьшением обратной связи или изменением другого параметра она переведена в несамовозбужденное состояние. Мы будем говорить в первом случае об автоколебательной системе, а во втором случае о потенциально-автоколебательной системе.

В предыдущем параграфе был указан ряд своеобразных явлений, наблюдаемых в автоколебательной системе при синусоидальном воздействии на нее с частотой, близкой к ее собственной частоте.

Особый интерес здесь представляет характерное вообще для автоколебательных систем явление принудительной или автоматической синхронизации частоты (см. § 5). Как наблюдали Кога ([39]) и ван-дер Поль и ван-дер Марк ([38]), аналогичные явления имеют место и при воздействии на автоколебательную систему с частотой, кратной ее собственной частоте.

Со своеобразными явлениями возбуждения синхронных колебаний мы встречаемся в потенциально-автоколебательной системе, когда частота ω действующей на нее э. д. с. точно или приблизительно кратна ее собственной частоте или вообще находится в известном рациональном отношении (см. ниже). При этом наблюдается следующее: при определенном режиме возбуждаемые в потенциально-автоколебательной системе „вынужденные" колебания очень слабы до того момента, когда собственный период ее начинает приближаться к величине, кратной периоду действующей силы. Когда собственный период потенциально-автоколебательной системы достаточно приблизился, например, к удвоенному (вообще к n-кратному) периоду внешней силы, в ней возникают интенсивные колебания с частотой, равной $\omega/2$ (вообще ω/n). Это явление и есть *резонанс второго* (вообще *n-го*) рода.[1]

При экспериментальном исследовании явления резонанса n-го рода мы наталкиваемся и на другое явление, о котором уже было упомянуто. Для того чтобы осуществить резонанс n-го рода, необходимо подобрать определенный режим лампы. Если этот режим несколько изменить в сторону увеличения обратной связи, но до такой величины, чтобы система все еще продолжала оставаться потенциально-автоколебательной, то при соблюдении известных условий в ней возбуждаются, независимо от периода действующей силы, интенсивные колебания, почти совпадающие с собственными колебаниями системы. Наряду с этими интенсивными колебаниями имеются и слабо выраженные „вынужденные" колебания, так что весь процесс является с физической стороны квазипериодическим. Это явление может быть названо *асинхронным возбуждением* ([51]), ([52]), ([53]).

В простейшем случае для $n=2$, когда внешняя э. д. с. $E=E_0 \sin \omega t$ действует на колебательный контур, находящийся в анодной цепи лампы, характеристика которой может быть представлена в виде полинома 3-й степени, уравнение для силы тока в колеба-

[1] О возможности возбуждения в несамовозбужденной системе колебаний с частотой, равной половине частоты воздействия, упоминает также Грошковский ([50]).

тельном контуре i (в предположении отсутствия сеточного тока) может быть написано в виде

$$CL\frac{d^2 i}{dt^2}+CR\frac{di}{dt}+i=f_0\left(\frac{di}{dt}\right)+CE_0\,\omega\cos\omega t, \qquad (1)$$

где

$$f_0\left(\frac{di}{dt}\right)=i_0+\alpha_0\frac{di}{dt}+\beta_0\left(\frac{di}{dt}\right)^2+\gamma_0\left(\frac{di}{dt}\right)^3,$$

причем здесь $\gamma_0<0$.

Заметим кстати, что, представляя характеристику лампы в виде полинома 3-й или 5-й степени, мы не можем, конечно, охватить всех особенностей реальной характеристики. Это представление позволяет, однако, передать наиболее существенные черты характеристики играющие роль в исследуемых нами вопросах.

Уравнение (1) после соответствующих преобразований и введения следующих обозначений:

$$\tau=\frac{\omega t}{2},\quad 2\vartheta=\frac{2R}{\omega L},\quad \xi=\frac{\omega^2-4\omega_0^2}{4\omega_0^2},\quad q=4M\frac{E_0}{v_0},\quad x=M\frac{di}{dt} \qquad (2)$$

(v_0 — напряжение насыщения) может быть приведено к виду

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x})-3q\sin 2\tau. \qquad (3)$$

Здесь

$$\mu f(x,\dot{x})=\frac{d}{d\tau}\left[\frac{f_1(x)}{1+\xi}-2\vartheta x\right]+\frac{\xi x}{1+\xi}=\mu\left[(k+2x+\gamma_1 x^2)\dot{x}+\frac{\xi}{\beta}x\right],$$

причем

$$\gamma_1=\frac{3\gamma}{\beta}<0,\quad \mu=\frac{\beta}{1+\xi} \qquad (4)$$

и „фактор регенерации“

$$k=\frac{\alpha-2\vartheta(1+\xi)}{\beta}.$$

Применяя к уравнению (3) рассмотренный выше прием ван-дер Поля, мы с помощью подстановки

$$\begin{aligned} x&=u\sin\tau-v\cos\tau+q\sin 2\tau,\\ \dot{x}&=u\cos\tau+v\sin\tau+2q\cos 2\tau \end{aligned} \qquad (5)$$

получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\dot{u}=\frac{\mu}{2}\left\{\left[k+\frac{\gamma_1}{4}(z+2q^2)\right]u-\left(q+\frac{\xi}{\beta}\right)v\right\}, \qquad (6)$$

$$\dot{v}=\frac{\mu}{2}\left\{\left[k+\frac{\gamma_1}{4}\left(z+2q^2\right)\right]v-\left(q-\frac{\xi}{\beta}\right)u\right\}, \qquad (7)$$

где $z=u^2+v^2$ есть квадрат амплитуды.

Уравнения (6) и (7) легко решаются введением новых переменных: $\psi = \frac{u}{v}$ и z.

Обозначая начальное значение ψ через ψ_0 и z через z_0 и полагая

$$m = \sqrt{\frac{q + \frac{\xi}{\beta}}{q - \frac{\xi}{\beta}}}, \quad 2p = \mu\sqrt{q^2 - \frac{\xi^2}{\beta^2}}, \quad M = \mu\left(k + \frac{\gamma_1 q^2}{2}\right), \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{\xi}{pq}, \quad z_{st} = \frac{4(M + 2p)}{\mu|\gamma_1|},$$

мы получаем в качестве решения следующие выражения для ψ:

$$\psi = m\,\frac{m + \psi_0 - (m - \psi_0)\,e^{-2p\tau}}{m + \psi_0 + (m - \psi_0)\,e^{-2p\tau}} \tag{9}$$

и для z

$$z = z_{st}\frac{C^2 - 2\sigma C e^{-2p\tau} + e^{-4p\tau}}{\left[\frac{z_{st}}{z_0}(C^2 - 2\sigma C + 1) - C^2 - 2\sigma\frac{M + 2p}{M}C + \frac{M + 2p}{M - 2p}\right]e^{-(M+2p)\tau} + \left[C^2 - 2\sigma\frac{M + 2p}{M}Ce^{-2p\tau} + \frac{M + 2p}{M - 2p}e^{-4p\tau}\right]}. \tag{10}$$

Здесь

$$C = \frac{m + \psi_0}{m - \psi_0}.$$

Выражения (9) и (10) и передают приближенно рассматриваемый процесс, начиная от любых начальных условий z_0 и ψ_0, как при $k < 0$ (несамовозбужденная система), так и при $k > 0$ (самовозбужденная система — автоколебания). При $q = 0$, $\xi = 0$, $p = 0$, т. е. в случае отсутствия внешнего воздействия, (10) переходит в данное уже раньше ван-дер Полем выражение для автономной системы.

Из выражения (10) видно, что z только тогда стремится к постоянному значению z_{st}, отличному от нуля, когда p действительно и $M + 2p > 0$, т. е. когда

$$q^2 > \frac{\xi^2}{\beta^2} \tag{11}$$

и

$$k + \frac{\gamma_1 q^2}{2} + \sqrt{q^2 - \frac{\xi^2}{\beta^2}} > 0. \tag{12}$$

Эти условия и обусловливают наличие постоянных стационарных значений u и v, а это означает, что при их выполнении в системе возникают периодические колебания [см. формулу (5)] с частотой, в два раза меньшей, чем частота внешней э. д. с. Так как эти колебания половинной частоты возникают лишь в узком интервале настроек, их можно рассматривать как особый вид резонанса. Поэтому целесообразно назвать явление возникновения таких колебаний резонансом второго рода (вообще n-го рода), имея в виду, что теория этого явления тесно связана с периодическими решениями второго рода по терминологии Пуанкаре (2).

Так как $\gamma_1 < 0$, то для потенциально-автоколебательной системы ($k < 0$) условие (12) может быть выполнено лишь при значениях q (т. е. внешней э. д. с.), не меньших некоторой q_{min} и не больших некоторой q_{max}. Иными словами, существует как „порог", так и „потолок" для величины внешней э. д. с., которая может возбудить в потенциально-автоколебательной системе колебания половинной частоты. Для системы автоколебательной ($k > 0$) условие (12) выполняется при любом как угодно малом q, т. е. для автоматической синхронизации автоколебательной системы на обертоне порога не существует.

Квадрат амплитуды стационарных колебаний половинной частоты при резонансе второго рода в потенциально-автоколебательной системе дается формулой

$$z_{st} = \frac{4}{|\gamma_1|}\left[R + \frac{\gamma_1 q^2}{2} + \sqrt{q^2 - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right], \tag{13}$$

которая и выражает зависимость z_{st} от расстройки ξ, амплитуды внешней э. д. с., фактора регенерации k и характеристики лампы

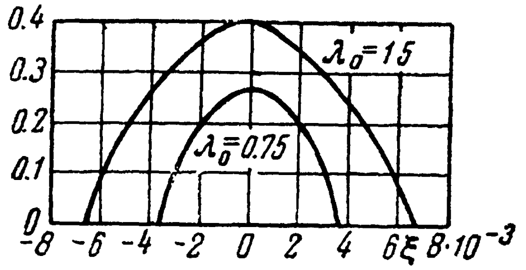


Рис. 42

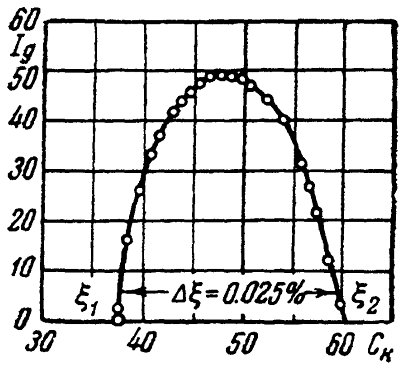


Рис. 43

(коэффициенты β_1, γ_1). Как видно из этой формулы, зависимость стационарной амплитуды от расстройки имеет здесь существенно другой характер, чем при обычном резонансе. Кривые, изображающие эту зависимость, которые можно назвать кривыми резонанса второго рода, показаны на рис. 42 (теоретическая) и на рис. 43 (экспериментальная).

Формула (13) дает, кроме того, своеобразную зависимость (уже отмеченную нами раньше) стационарной амплитуды от величины внешней э. д. с. Графически эта зависимость (так называемые амплитудные характеристики) представлена на рис. 44 (теоретическая кривая) и рис. 45 (экспериментальная). Заметим, что ширина

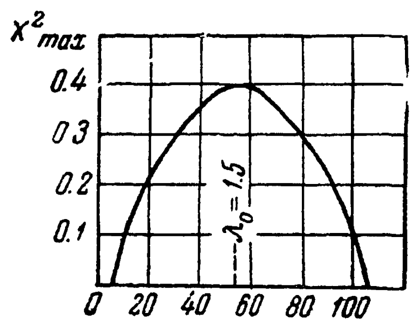


Рис. 44

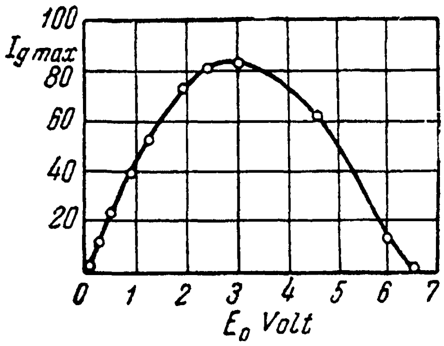


Рис. 45

полосы возбуждения, т. е. интервал частот, в котором возможен резонанс второго рода, начинается от нуля при величине внешней э. д. с., равной „порогу возбуждения", затем растет с увеличением ее до некоторого максимума и затем снова уменьшается до нуля — при $q = q_{max}$ (потолок).

Весьма существенное и, как ниже будет сказано подробнее, повидимому, весьма важное для практических применений отличие от явлений обычного резонанса наблюдается и в самом характере установления стационарной амплитуды. Кривая 2 (рис. 46) представляет собой кривую нарастания амплитуды при резонансе второго рода, начиная от момента, соответствующего началу действия внешней э. д. с. Легко видеть, что она существенно отличается от кривой 1, изображающей нарастание при резонансе в обычном линейном контуре с одной степенью свободы. Отметим сходство между кривой 1 и кривой нарастания амплитуды при возникновении автоколебаний. Что это сходство не случайно, следует и из того, что, в то время как при обычном резонансе возбуждение колебаний принципиально имеет место при любых начальных условиях, начиная, в частности, непосредственно из состояния абсолютного покоя

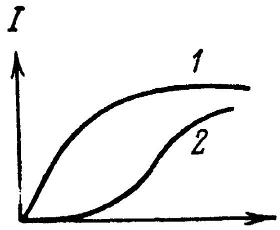


Рис. 46

$$i = 0, \qquad \frac{di}{dt} = 0,$$

при резонансе второго рода, так же как и при возникновении автоколебаний, принципиально необходимы некоторые, хотя бы очень малые толчки (флуктуации) для того, чтобы вывести систему из начального положения ($z_0 = 0$).

Пользуясь не вполне законно языком предельных циклов и особых точек (незаконно потому, что этот язык, строго говоря, применим только для автономных систем), можно сказать, что начальное положение потенциально-автоколебательной системы, удовлетворяющей условиям возникновения резонансных колебаний второго рода, становится при внешнем воздействии *неустойчивой особой точкой типа фокуса* и что в фазовой плоскости появляется *устойчивый предельный цикл*. Как уже упоминалось выше, особый характер кривой нарастания амплитуды при резонансе второго рода может быть использован для практических целей. К этому вопросу мы еще вернемся ниже.

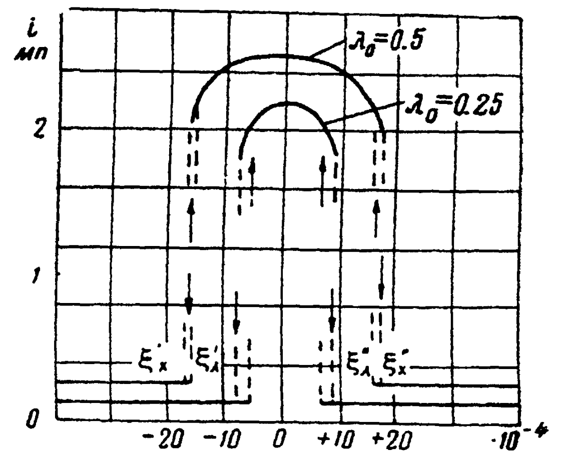


Рис. 47

При режиме „жесткого" возбуждения системы явления резонанса второго рода обнаруживают целый ряд новых особенностей. Так, здесь на границах области возбуждения наблюдаются явления затягивания, обусловливаемые частичным перекрытием различных областей динамической устойчивости. Если для этого случая выразить характеристику лампы в виде полинома 5-й степени, как это с успехом делали Эпльтон и ван-дер Поль ([54]) и другие авторы ([55]) для автоколебаний, то можно, применяя изложенные в § 2 методы Пуанкаре, дать приближенную теорию, которая удовлетворительно передает все характерные черты явления резонанса второго рода при „жестком" режиме возбуждения.

На рис. 47 приведены „резонансные" кривые для этого случая, вычисленные по формулам, полученным из этого теоретического рассмотрения. Сравнение их с полученными экспериментальными кривыми (рис. 48) показывает, что расчет действительно удовлетворительно передает все характерные черты явления. При экспериментальном исследовании явлений резонанса второго рода в системах с „жестким" возбуждением следует обратить особое внимание на возможность возникновения „асинхронного" возбуждения (квазипериодических колебаний), о котором была речь выше. Как было показано теоретически ([51]), а затем подтверждено экспериментально

Э. М. Рубчинским ([56]) в ЦРЛ, асинхронное возбуждение возможно только при жестком режиме и притом при определенных условиях, а именно при определенной величине как обратной связи, так и внешней э. д. с. На рис. 49 изображено расположение различных

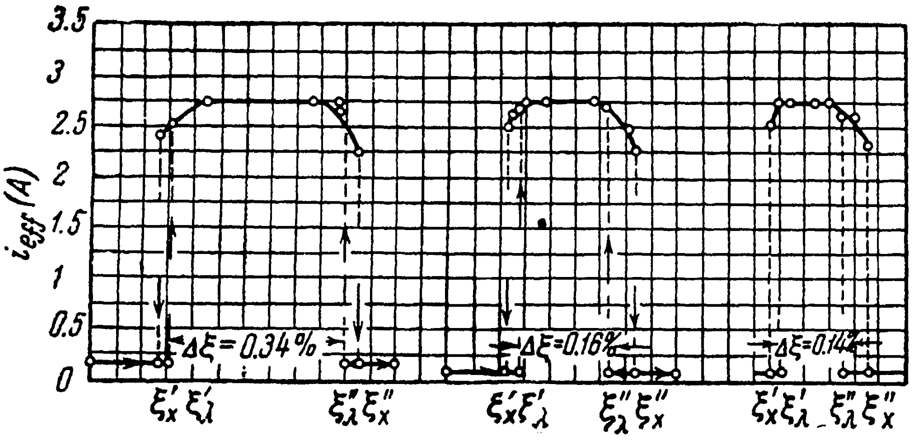


Рис. 48

режимов регенеративной системы в зависимости от фактора регенерации k. Область, лежащая вправо от начала координат O, есть область самовозбуждения. Между O и A $\left(0 > k > -\frac{\gamma_1^2}{8|\xi_1|}\right)$ лежит „область затягивания".

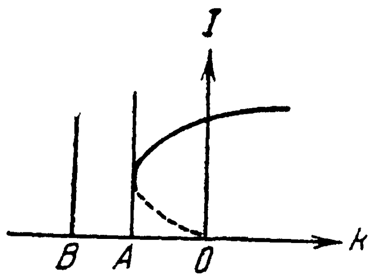


Рис. 49

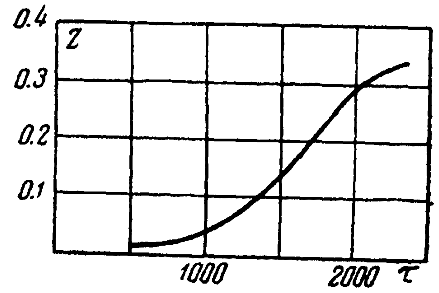


Рис. 50

В области, лежащей влево от A, между A и B

$$\left(-\frac{\gamma_1^2}{8|\xi_1|} > k > -\frac{\gamma_1^2}{6|\xi_1|}\right)$$

при определенной настройке системы и определенной величине внешней э. д. с. возможно и асинхронное возбуждение. Таким образом, для того чтобы осуществить чистый резонанс второго рода, необходимо так подобрать фактор регенерации, чтобы работать влево от B. Это обстоятельство имеет весьма существенное значение при использовании резонанса второго рода для целей приема, о чем будет сказано ниже.

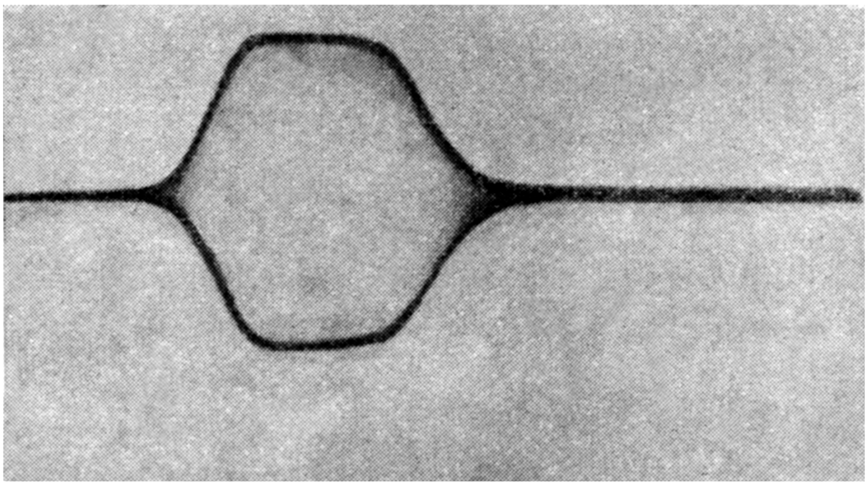


Рис. 51

Процессы установления резонанса второго рода при жестком режиме были изучены А. Меликьяном ([57]). Его опыты показали,

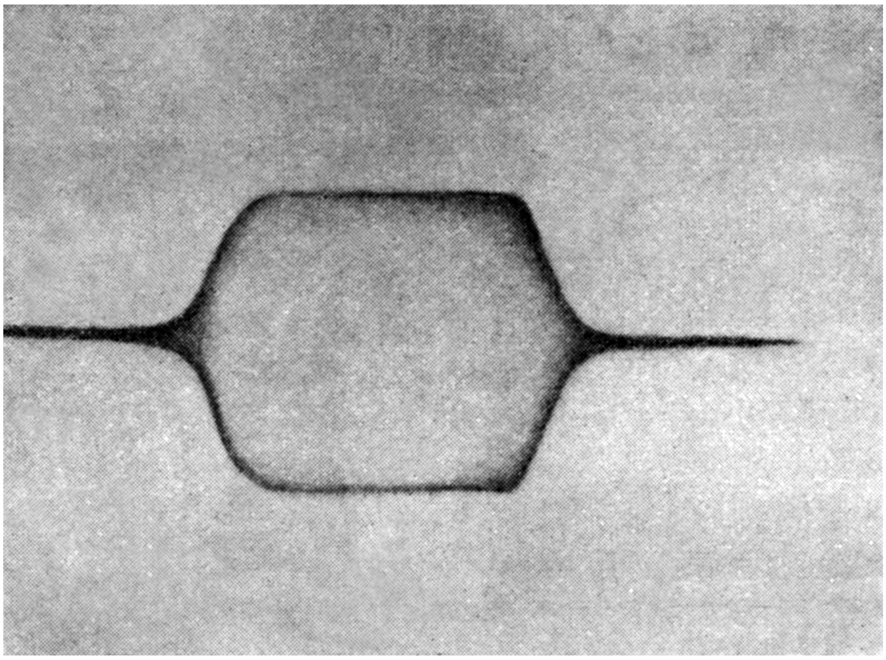


Рис. 52

что фаза стационарного режима устанавливается гораздо быстрее, чем амплитуда. Теория дает для обычных численных значений параметров такой же результат. Принимая это положение как гипотезу, Меликьян получил для случая жесткого режима сравнительно простые выражения закона нарастания амплитуд. На рис. 50 приведена одна из кривых нарастания, полученных теоретически. На рис. 51, 52, 53 приведены некоторые осциллограммы установления

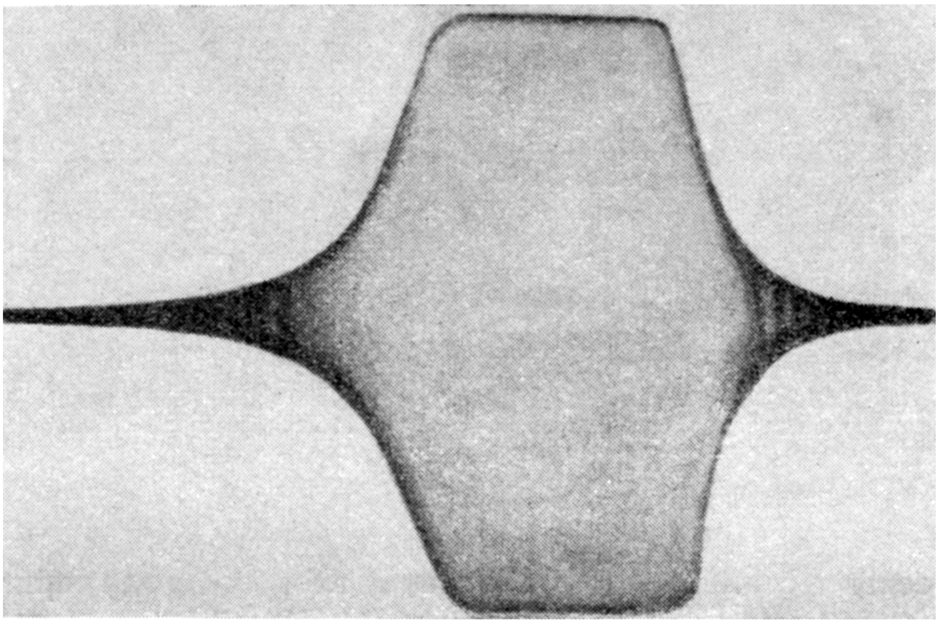


Рис. 53

и прекращения колебаний, снятые при помощи катодного осциллографа, на рис. 51 и 52 — фотографии установления и прекращения колебаний в потенциально-автоколебательной системе (автопара-

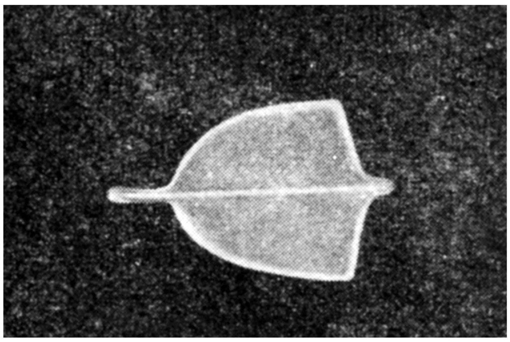


Рис. 54

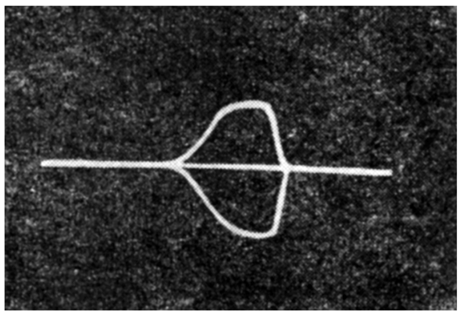


Рис. 55

метрическом фильтре — см. ниже) под действием внешнего сигнала, причем частота сигнала была вдвое больше частоты системы. Для сравнения на рис. 53 приведена осциллограмма установления и прекращения колебаний в обычном триодном генераторе.

Наконец, на рис. 54 и 55 приведены для сопоставления осциллограммы нарастания и спадания вынужденных колебаний в недовозбужденном регенеративном приемнике (рис. 54) и колебаний в автопараметрическом фильтре (рис. 55).

Развитая для резонанса n-го рода теория позволяет также проанализировать и случай кратного воздействия на самовозбужденную автоколебательную систему ([49]).

Как уже было указано, мы в этом случае имеем дело с автоматической синхронизацией на обертоне. Подобно обычному случаю захватывания частоты и здесь нет порога для величины, синхронизирующей э. д. с., и с уменьшением величины э. д. с. суживается только область синхронизации. Величина этой области уменьшается также и с порядком обертона. Теория и опыт согласно показывают также, что при увеличении внешней э. д. с. больше определенного значения амплитуда автоколебаний начинает уменьшаться и при дальнейшем увеличении внешней э. д. с. она может дойти до нуля; иными словами, при некоторой величине внешней э. д. с. автоколебания „тушатся“, и в системе остаются только вынужденные колебания с частотой внешней э. д. с.

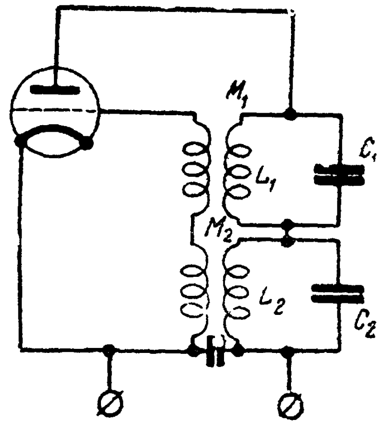


Рис. 56

Исследование, произведенное в ЦРЛ, показало, что в потенциально-автоколебательной системе с одной степенью свободы при мягком режиме (полином 3-й степени) получение резонансных колебаний третьего рода невозможно. Опыты (Чихачев) показали, что синхронизированные на 3-м обертоне или асинхронно-возбужденные колебания можно „затянуть“ левее A (рис. 49).

В потенциально-автоколебательных системах с двумя и несколькими степенями свободы возможно получение резонансных колебаний и более высоких порядков.[1] Так, Чихачевым были получены и исследованы резонасные явления четвертого рода, осуществленные в схеме, изображенной на рис. 56. Своеобразные явления „комбинационного“ резонанса, а именно возбуждение колебаний частоты ω_1 и ω_2 в потенциально-автоколебательной системе с двумя степенями свободы при воздействии на систему э. д. с. с частотой ω, равной „комбинационной“ частоте собственных колебаний системы (например, $\omega = \omega_1 \pm \omega_2$), исследовались экспериментально

[1] Резонанс n-го рода в системе с двумя степенями свободы был теоретически исследован Рытовым ([99]) при помощи методов Пуанкаре-Ляпунова.

и теоретически В. В. Мигулиным (ФИАН). Особенно интересны рассмотренные им случаи

$$\omega:\omega_1:\omega_2=3:2:1 \quad \text{и} \quad \omega:\omega_1:\omega_2=5:3:2.$$

В заключение заметим, что явления резонанса n-го рода стоят в связи с явлением возбуждения колебаний путем периодического изменения параметров системы — так называемым параметрическим резонансом, о котором речь будет итти в следующем параграфе. Чисто качественно мы можем рассматривать процесс возбуждения резонансных колебаний n-го рода следующим образом. Под действием внешней силы в потенциально-автоколебательной системе, работающей в соответствующем режиме, вначале возникают „вынужденные" колебания с периодом внешней э. д. с. Рассуждая аналогичным образом, как при рассмотрении динамической устойчивости системы по Пуанкаре и Ляпунову, мы можем рассматривать (вблизи вынужденных колебаний) нашу нелинейную систему как линейную, но с параметрами, зависящими от величины вынужденного решения $q \sin n\tau$. Поведение линейной системы с периодически изменяющимися параметрами нам хорошо известно (см. ниже § 7).

Если система находится в критических областях нестабильности и если изменения параметра под действием вынужденных колебаний достаточно велики, то это „вынужденное" колебание становится неустойчивым и в системе возникают и нарастают „дробночастотные" колебания. Таким образом, явление резонанса n-го рода связано с периодическим изменением параметров системы.

Ввиду этой связи представляется целесообразным рассматривать явления резонанса n-го рода как некоторый род параметрического возбуждения. Мы назовем этот род возбуждения *автопараметрическим* для того, чтобы отличить его от параметрического возбуждения колебаний в собственном смысле слова (т. е. при изменении параметров внешней силой, электрической или механической, о котором речь идет в § 7), которое мы называем *гетеропараметрическим*. Как было указано выше (§ 5), к области автопараметрического возбуждения относятся явления, исследованные Е. Секерской ([48]) и В. Мигулиным ([92]).

Описанные выше явления резонанса второго рода отличаются рядом особенностей, которые дают основание ожидать известных преимуществ при их практическом использовании. Произведенные опыты показали, что резонанс второго рода может быть действительно с успехом использован во многих случаях. Прежде всего, как это совершенно очевидно, для целей целочисленной трансформации частоты вниз, а затем во всех случаях, когда требуется большое усиление при условии сохранения постоянства частоты с большой точностью, как, например, в мощных усилительных каскадах передатчиков с посторонним возбуждением и главным образом, повидимому, для целей радиоприема. Уже самый характер резонансных кривых второго рода с резко ограниченными краями, а также существование „порога" и „потолка" для величины внешней э. д. с., вызывающей эффект возбуждения колебаний, позволяет ожидать новых возможностей для селективного приема. Однако здесь следует, разумеется, иметь в виду, что при приеме, особенно быстродействующем автоматическом приеме, мы имеем дело не с установившимися стационарными процессами, а с процессами нарастания и спадания, которые, как мы видели выше, протекают существенно иначе, чем стационарные явления.

Опыты, проведенные в 1930—1931 гг. в практических условиях показали, что применение для приема несамовозбужденной регенеративной системы в режиме резонанса второго рода в качестве селективного фильтра (так называемого автопараметрического фильтра) действительно дает очень хорошие результаты. На рис. 57 приведена фотография ленты с записью станции WCI ($\lambda = 16\,317$ м), полученной в феврале 1931 г. в радиоприемном центре в Бутове (вблизи Москвы).

Лента сня́та с приемного устройства, снабженного автопараметрическим фильтром, и показывает полное отсутствие помех.

Продолжительные испытания приемного устройства с автопараметрическим фильтром в местности с очень сильными атмосферными помехами (Сагареджо вблизи Тифлиса) показали, что такой фильтр является очень хорошим средством для отделения длительного гармонического воздействия от воздействий, носящих характер короткого импульса.

Как уже было сказано выше, такое поведение резонансной системы второго рода несомненно связано с особенностью кривой нарастания колебаний. В то время как в линейном фильтре кратковременный (по сравнению с длительностью точки), но достаточно сильный импульс может вызвать сравнимую с сигналом (и даже ее превосходящую) амплитуду колебаний, здесь он, вследствие особенностей характера нарастания, вызывает лишь слабые колебания. Таким образом, автопараметрический фильтр практически не пропускает атмосферных помех в форме кратковременных импульсов, если только они не достигают значительных величин.

Эта нечувствительность автопараметрических систем к атмосферным помехам импульсного типа сохраняется и при одновременном воздействии на них и помехи и сигнала. Однако при особо сильных атмосферных разрядах наблюдается эффект „дробления“ сигнала

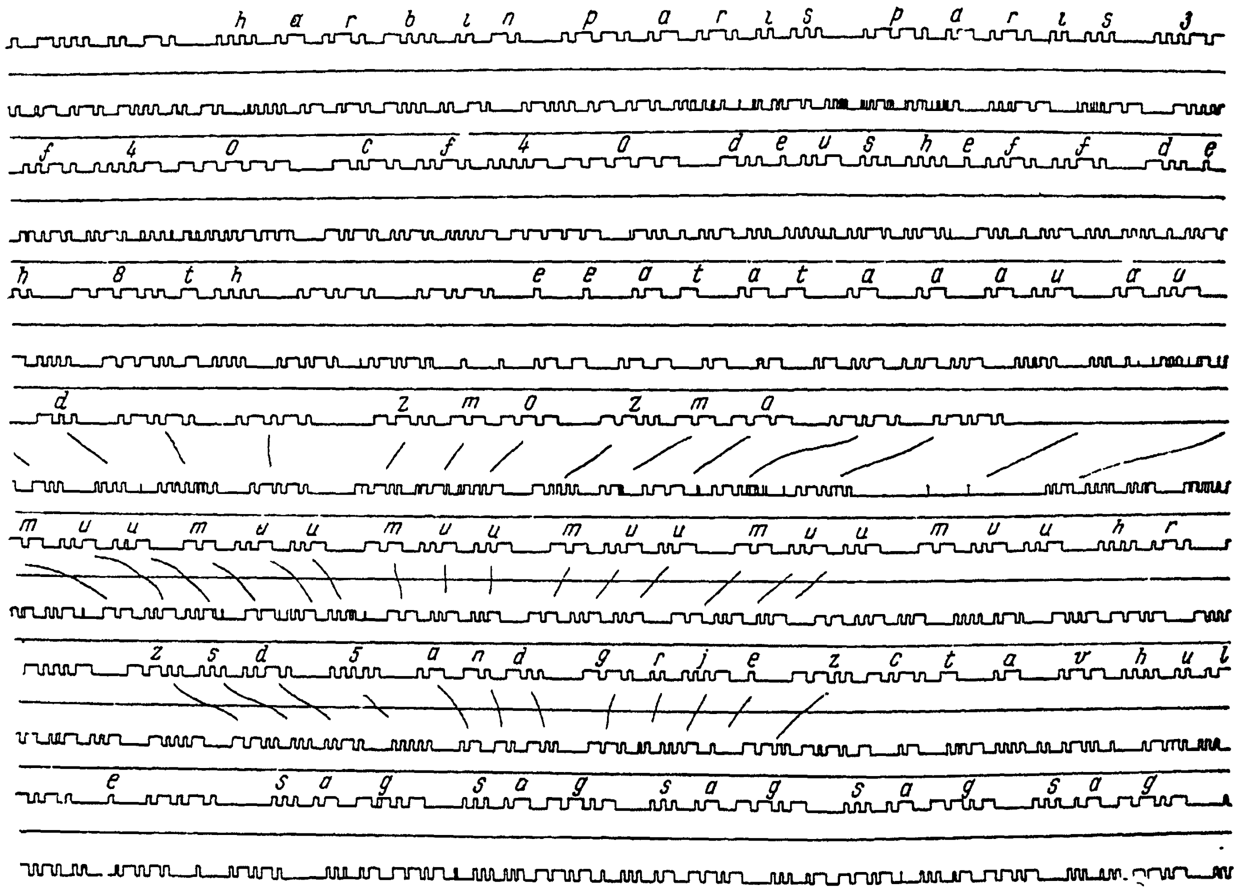


Рис. 57

(наблюдения И. Борушко и М. Вейсбейна в 1931 г.), заключающийся в том, что при записи на ленту в некоторых знаках (точках или тире) имеются провалы. Эти явления были детально исследованы в нашей лаборатории в ЦРЛ А. Б. Меликьяном. Очень искусно использовав осциллографический метод, он детально исследовал случай одновременного воздействия на автопараметрическую систему сигнала и кратковременного импульса (в виде затухающего колебания) и показал, что, кроме упомянутого выше эффекта „дробления“, наступающего в том случае, если импульс начинает действовать тогда, когда возникшие под действием сигнала колебания половинной частоты уже почти установились, наблюдается еще другой эффект „ускорения“ процесса нарастания колебаний, имеющий место в тех случаях, если импульс действует на систему в то время, когда колебания половинной частоты еще малы.

Следует, однако, заметить, что хотя приведенные опыты и выясняют многие стороны поведения автопараметрической системы как антипаразитного фильтра, все-таки нельзя еще считать, что этот вопрос в настоящее время вполне выяснен.

§ 7. О параметрическом возбуждении электрических колебаний

Рассмотренные выше явления, имеющие место при воздействии на нелинейные колебательные системы, непосредственно примыкают к явлениям возбуждения колебаний в системах путем периодического изменения их параметров. Это последнее явление, которое можно кратко назвать *параметрическим возбуждением* колебаний, известно в физике уже давно ([58]), ([59]). Известно также большое значение этого рода возбуждения и для техники.

Однако, несмотря на то, что указания на возможность параметрического возбуждения в электрических колебательных системах делались и раньше [Рейлей ([60]), Пуанкаре ([61],) Брилуэн ([62]), позднее ван-дер Поль ([63])], только в последние годы оно было сознательно осуществлено и было приступлено к его систематическому исследованию. Упомянем здесь опыты Хегнера ([64]) и Гюнтер-Винтера ([65]), касающиеся возбуждения электрических колебаний в области акустических частот посредством периодического намагничивания железного сердечника катушки самоиндукции, а также опыты Гюнтер-Винтера ([66]) и И. Ваганабе, Т. Саито и И. Каито ([67]) над возбуждением электрических колебаний механическим периодическим изменением магнитной цепи катушки самоиндукции электрической колебательной системы.[1]

[1] Следует заметить, что опыты В. Л. Барроу (W L. Barrow, Proc. of the Inst. of Radio Eng., 22, 201, 1934) отнюдь не доказывают, как это ошибочно предполагает автор, возможности параметрического возбуждения посредством периодического изменения емкости колебательной системы, ибо в примененной им схеме изменяется не емкость колебательного контура, а омическое сопротивление емкостного шунта к этой емкости. Поскольку изменение положительного сопротивления (переключение) может происходить (и практически происходит) без затраты энергии, здесь принципиально отсутствует сама возможность вложения в систему за счет механической работы энергии, необходимой для возникновения и поддержания колебаний. В опытах Барроу мы, несомненно, имеем дело не с параметрическим возбуждением колебаний посредством изменения емкости,

Нами также были произведены опыты параметрического возбуждения электрических колебаний посредством периодического (механического) изменения как самоиндукции ([68]), так и емкости ([69]) колебательной системы, о которых мы сообщаем ниже подробнее. Осуществление параметрического возбуждения периодическим изменением самоиндукции колебательной системы в наших опытах отличается от установок Гюнтер-Винтера и Ватанабе. Кроме того, указанные авторы ограничиваются при рассмотрении теории явления ссылкой на линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, которое дает, конечно, только условие возникновения колебаний и не может дать ничего относительно установления стационарной амплитуды. Между тем этот вопрос является таким же основным, как и первый. Мы поэтому считаем нужным остановиться несколько подробнее на теории всего процесса параметрического возбуждения, которая возможна только, если исходить из нелинейного дифференциального уравнения.

Легко, исходя из энергетических соображений, отдать себе отчет в том, что в колебательном контуре с периодически изменяемой емкостью[1] должны при соответствующих соотношениях возникнуть колебания. Предположим, что в какой-нибудь начальный момент $t=0$, когда на конденсаторе имеется случайный заряд q, а ток равен нулю, мы уменьшим несколько (на ΔC) емкость конденсатора. При этом мы совершим работу $\frac{\Delta C}{2C^2} q^2$. Предоставим затем конденсатору разряжаться и через промежуток времени, когда вся энергия перейдет в магнитную и заряд на обкладках конденсатора будет равен нулю (этот промежуток равен примерно четверти периода колебаний), вернемся снова к начальному значению емкости. Это возможно сделать, не совершая никакой работы. Еще через $^1/_4$ периода ток в контуре снова будет равен нулю, а конденсатор перезарядится до напряжения, которое будет больше или меньше первоначального в зависимости от того, будет ли вложенная при уменьшении емкости в систему энергия больше или меньше потерь в ней. Таким образом, через $^1/_2$ периода собственных колебаний системы цикл изменения емкости закончен, и мы можем повторить его снова.

а с побочными явлениями, связанными с наличием электронной лампы и обратной связи. Ошибка Барроу повторяется в его совместной работе с Смитом и Бауманом, появившейся в 1936 г. в Journ. of the Franklin Institute.

[1] Аналогичные рассуждения применимы, конечно, и в случае изменения самоиндукции.

При дальнейшем повторении процесса колебания в системе будут непрерывно нарастать, как бы ни был мал начальный случайный заряд, если только будет выполнено следующее условие:

$$\frac{\Delta C}{2C^2} q^2 > \frac{Ri^2}{2} \frac{\pi}{\omega},$$

где i — амплитуда тока; это условие сводится к следующему:

$$m > \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\pi R}{L\omega} \tag{1}$$

есть средний логарифмический декремент системы, а

$$m = \frac{\Delta C}{2C} = \frac{C_{max} - C_{min}}{C_{max} + C_{min}} \tag{2}$$

— относительная величина изменения емкости, так называемая „глубина модуляции“ параметра.

В случае синусоидального изменения емкости вместо условия (1) для нарастания колебаний необходимо соблюдение условия

$$m > \frac{2}{\pi} \varepsilon. \tag{3}$$

Заметим, что даже при отсутствии каких-либо (практически всегда имеющих место) случайных индукций (электрические линии передачи, атмосферные разряды, трение о воздух и т. д.) мы принципиально всегда должны иметь в колебательном контуре случайные заряды в силу статистических флуктуаций.

Таким образом, изменяя периодически, например механическим путем, емкость или самоиндукцию колебательной системы, в которой отсутствуют какие-либо источники тока или напряжения, с частотой в два раза больщей собственной частоты системы, мы можем возбудить в ней колебания, не воздействуя на нее никакой электродвижущей силой.

Уже такое грубое рассмотрение явлений параметрического возбуждения указывает, что для его возникновения необходимо соблюдение следующих двух условий:

1) определенной зависимости между частотой изменения параметра и средней собственной частотой системы (в рассмотренном случае $2:1$, вообще $2:n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$);

2) соблюдения определенного соотношения между глубиной модуляции параметра и величиной среднего логарифмического декремента системы.

Более полное рассмотрение явления возникновения колебаний при параметрическом возбуждении приводит, как известно, к исследованию так называемых „нестабильных" решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Например, в случае изменения емкости по закону

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_0}(1+m\cos\nu t),$$

мы имеем следующее уравнение для заряда q:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1+m\cos\nu t}{C_0}q=0. \tag{4}$$

Это уравнение легко приводится к виду

$$\ddot{x}+\lambda^2(1+m_1\cos 2\tau)x=0, \tag{5}$$

где

$$q=xe^{-\frac{R}{2L}t},\qquad \tau=\frac{\nu t}{2},\qquad \lambda^2=\frac{2(\omega_0^2-\delta^2)}{\nu^2}=\frac{2\omega_1^2}{\nu^2},$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC_0},\qquad 2\delta=\frac{R}{L},\qquad m_1=m\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\delta^2}.$$

Таким образом, математически задача сводится в рассматриваемом случае к простейшему линейному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами (5), известному под именем уравнения Матьё. С математической стороны эти уравнения хорошо исследованы в работах Матьё, Хилла, Пуанкаре и др.

В применении к интересующей нас проблеме они были исследованы еще Релеем, а позднее — у нас ([70]), а также ван-дер Полем и Страттом ([71]). Заметим, что, как указано ван-дер Полем и Страттом, к уравнениям этого типа приводятся многие проблемы в области астрономии, оптики, теории упругости, акустики и т. д.

Как известно, решение дифференциального уравнения типа (5) может быть представлено в виде

$$x=C_1e^{h\tau}\chi(\tau)+C_2e^{-h\tau}\chi(-\tau),$$

где χ — периодическая функция периода π или 2π, и, следовательно, вопрос о параметрическом возбуждении сводится к нахождению условий, при которых вещественная часть характеристического показателя h решения уравнения Матьё будет больше δ.

Эти условия, зависящие от двух параметров λ и m, определяют так называемые области „неустойчивых“ решений уравнения (5), которые получаются около значений:

$$\frac{2\omega_1}{\nu}=n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Пользуясь приближенным методом Релея ([72]), можно найти границы этих областей неустойчивости и, следовательно, и области неустойчивости для уравнения (4). Так, первая область неустойчивости $\left(\text{около значения } \frac{2\omega_1}{\nu}=1\right)$ определяется с точностью до m^2 условиями

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}} \geqslant \frac{2\omega_1}{\nu} \geqslant \sqrt{1-\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\vartheta^2}}, \tag{6}$$

где

$$\vartheta=\frac{2R}{L\nu}.$$

Для нахождения второй области „неустойчивости“ (около $n=2$) нужно учесть члены порядка m^4. Мы здесь имеем

$$\sqrt{4+\frac{2m^2}{3}+\sqrt{m^4-64\vartheta^2}} \geqslant \frac{2\omega_1}{\nu} \geqslant \sqrt{4+\frac{2m^2}{3}-\sqrt{m^4-64\vartheta^2}}. \tag{7}$$

Дальнейшие области неустойчивости уменьшаются с ростом n как m^n.

Как видно из (6), возможность возникновения колебаний связана с необходимостью выполнения определенных соотношений между m и ϑ. Для первой области неустойчивости должно быть выполнено соотношение

$$m>4\vartheta, \tag{8}$$

для второй $(n=2)$

$$m>2\sqrt{2\vartheta}. \tag{9}$$

Как видно из (8) и (9), условие параметрического возбуждения при приблизительной настройке системы на частоту, равную частоте изменения параметра, значительно труднее выполнить, чем условие возбуждения при настройке на половинную частоту, так как оно при данном затухании требует гораздо большей глубины модуляции параметра m.

Еще более тяжелы условия параметрического возбуждения при соотношении частот $\frac{2\omega_1}{\nu}=3$, 4 и т. д.

Поэтому наибольший практический интерес представляет случай $n=1$, который почти исключительно и разбирается в настоящем обзоре.

Из всего сказанного следует, что вопрос об условиях возникновения колебаний при параметрическом воздействии решается исследованием областей неустойчивости уравнений с периодическими коэффициентами, в рассматриваемом случае — соотношениями (6) и (7). Эти соотношения, с одной стороны, указывают, каким условиям должно удовлетворять затухание системы, чтобы в ней при данном изменении параметра могли возникать колебания, а с другой стороны, они показывают, в каких пределах мы можем менять либо сопротивление системы (нагрузку), либо расстройку системы от точного „параметрического" резонанса (т. е. $n=1$), не нарушая возможности возникновения колебаний. Однако эти соотношения не дают, да и не могут дать ответа на вопрос о том, установится ли стационарная амплитуда колебаний и каково будет ее значение. В самом деле, исходное уравнение (4) как линейное уравнение ответа на это дать не может. Иными словами, если бы система действительно все время подчинялась этому уравнению, то при соблюдении условий (6) амплитуда колебаний неограниченно возрастала бы.

Таким образом, линейная система с периодически меняющимися параметрами служить генератором переменного тока не может. Для того чтобы в системе установилась стационарная амплитуда, необходимо, чтобы она подчинялась нелинейному дифференциальному уравнению.[1] Рассмотренное нами уравнение может явиться только приближенным для некоторого конечного амплитудного интервала. Здесь оно сохраняет полный смысл и позволяет решить вопрос о возникновении колебаний.

Что явление происходит именно так, вполне подтверждают и описываемые ниже опыты. Если не вводить в колебательную систему нелинейности, то при периодическом изменении в ней параметра наблюдается следующая картина. Как только условия возбуждения соблюдены, в контуре возникает ток, амплитуда которого непре-

[1] Задача о модуляции частоты в ламповом генераторе посредством периодического изменения одного из параметров есть также нелинейная задача. Она была исследована С. М. Рытовым (73).

рывно возрастает. В наших опытах это нарастание доходило до того, что изоляция конденсатора или подводящих проводов не выдерживала и приходилось прекращать опыт.

Для получения стационарного состояния в систему приходится вводить проводник с нелинейной характеристикой, например, катушку с железным сердечником, лампы накаливания и т. д. Математически в случае введения в рассматриваемую систему, например, катушки с железным сердечником, мы имеем дело уже с уравнением

$$\frac{d}{dt}\varphi(\dot{q})+R\dot{q}+\frac{1+m\cos 2\omega t}{C_0}q=0, \tag{10}$$

где нелинейная зависимость между током и магнитным потоком в контуре $\varphi(\dot{q})$ дана, например, в виде степенного ряда.

Таким образом, для того чтобы дать теорию наблюдаемых явлений, необходимо решить двоякую математическую задачу: с одной стороны, требуется найти условия, при которых положение равновесия системы становится неустойчивым (условие возбуждения колебаний) и, с другой стороны, необходимо исследовать периодические решения некоторого нелинейного уравнения (определить величину стационарной амплитуды, условия ее устойчивости и т. д.).

В случае, если величины „нелинейной" части самоиндукции (самоиндукция катушки с железным сердечником) малы по сравнению с постоянной частью самоиндукции системы и m есть малая величина, к этим уравнениям можно применить указанные выше методы. Сделаем предположение, что зависимость между током в контуре $\dot{q}$ и магнитным потоком $\varphi(\dot{q})$ может быть представлена в виде

$$\varphi(\dot{q})=A+L_0\dot{q}+\beta\dot{q}^2+\gamma\dot{q}^3. \tag{11}$$

Тогда, полагая

$$\tau=\omega t,\qquad \omega_0^2=\frac{1}{L_0C_0},\qquad \xi=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2},\qquad \gamma_1=\frac{3\gamma\omega^2q_0^2}{L_0},$$

получаем для

$$x=q\,q_0$$

уравнение типа

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x},\tau),$$

приближенное решение которого, как уже было указано выше, дается решением „укороченных" уравнений

$$\dot{u}=-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{m(1-\xi)}{2}+2\vartheta\right]u+\left(\xi+\frac{\gamma_1 z}{4}\right)v\right\},$$

$$\dot{v}=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{m(1-\xi)}{2}-2\vartheta\right]v+\left(\xi+\frac{\gamma_1 z}{4}\right)u\right\},$$

где

$$z = u^2 + v^2.$$

Эти уравнения могут быть исследованы указанными выше способами. В частности, стационарное решение получается в виде

$$\frac{\gamma_1 z}{4} = -\xi + \operatorname{sign}\gamma_1 \cdot \sqrt{\frac{m^2(1-\xi)^2}{4} - 4\vartheta^2}, \tag{12}$$

откуда имеем условие

$$m(1-\xi) > 4\vartheta, \tag{13}$$

практически идентичное с (8).

На рис. 58 и 59 представлены кривые зависимости квадрата амплитуды стационарных колебаний от расстройки ξ, которые можно

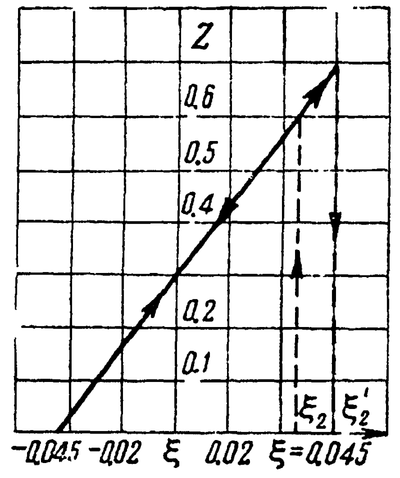


Рис. 58

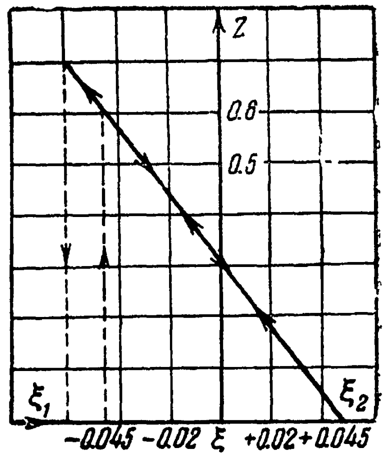


Рис. 59

назвать кривыми *гетеропараметрического резонанса*. Легко видеть, что эти кривые существенным образом отличаются как от обычных резонансных кривых, так и от кривых резонанса второго рода.

Как видно на рис. 58, пока

$$\xi < \xi_1 = -\sqrt{\frac{m^2(1-\xi)^2}{4} - 4\vartheta^2}$$

(при $\gamma_1 < 0$), никаких заметных колебаний в системе нет. При

$$\xi = \xi_1$$

параметрические колебания возникают, начинаясь с очень малых амплитуд, и усиливаются при дальнейшем увеличении ξ; z растет при этом линейно до тех пор, пока при некотором значении

$$\xi > \xi_2 = \sqrt{\frac{m^2(1-\xi)^2}{4} - 4\vartheta^2}$$

колебания резко обрываются.

Как видно из (12), теория в нулевом приближении ограничивает расстройку только с одной стороны, т. е. возможны устойчивые значения амплитуды и за пределами интервала значений ξ, определяемого условием возникновения колебания. Иными словами, параметрически возбужденные колебания „затягиваются". При обратном ходе расстройки колебания возникают уже только при $\xi=\xi_2$ и затем при дальнейшем уменьшении колебания уменьшаются до тех пор, пока при $\xi=\xi_1$ снова не исчезают. Таким образом, петля затягивания имеется только с одной стороны. Как далеко простирается эта наблюдаемая на опыте „область затягивания", из полученных приближенных выражений для амплитуды не вытекает. Для того чтобы получить ответ на этот и другие относящиеся сюда вопросы, необходимо более детальное рассмотрение.

Как видно из рис. 59, при $\gamma_1>0$ мы имеем обратную картину: z растет с уменьшением ξ и петля затягивания имеет место при $\xi=\xi_1$.

Заметим, что, как следует из приведенных ниже опытов В. А. Лазарева (78), оба эти случая наблюдаются в действительности. К тем же результатам приводит, как показали В. Гуляев и В. Мигулин (74), и предположение, что магнитный поток передается согласно Дрейфусу (75) и Ценнеку (76) аркустангенсоидой

$$\varphi\dot{q}=\varphi_0\operatorname{arc}\operatorname{tg}(k\dot{q})+L_2\dot{q}.$$

Для получения эффекта параметрического возбуждения и проверки изложенной выше теории нами в последние годы был поставлен ряд опытов, о которых сообщим вкратце следующее. Первые опыты касались возбуждения колебаний при помощи периодического изменения самоиндукции системы. В качестве устройства, позволяющего удобно и с требуемой частотой периодически изменять эффективную величину самоиндукции, была применена следующая конструкция (рис. 60 и 61). Переменная самоиндукция состоит из двух групп плоских катушек (по семи в каждой), смонтированных на двух параллельных досках (рис. 60); катушки расположены на двух параллельных окружностях и между обращенными друг к другу сторонами катушек образуется узкое пространство в виде щели.

В этой щели помещался металлический диск (видный на рис. 61), имеющий на периферии семь вырезов в виде зубцов, по числу катушек, расположенных таким образом, что при вращении середины зубцов в определенные моменты совпадают с центрами катушек. Таким образом, периодическое изменение самоиндукции здесь достигается тем, что при вращении диска зубцы попеременно то входят в поле катушки, то выходят из него. В первом случае самоиндукция будет, очевидно, минимальной, а во втором — максимальной (при этом изменение величины самоиндукции происходит не по синусоидальному, а по какому-то более сложному закону). Так как легкий и прочный диск (например, из дюралюминия) допускает очень большие скорости вращения (в наших опытах периферийная скорость достигала до 220 м/сек), то, следовательно, при указанном способе изменения самоиндукции можно было осуществить большие частоты изменения параметра (1700—2000 пер/сек) и получить колебания достаточной мощности. Заметим, что для увеличения самоиндукции, а также для большей концентрации поля в пространстве между катушками они были снабжены сердечниками из подразделенного железа.

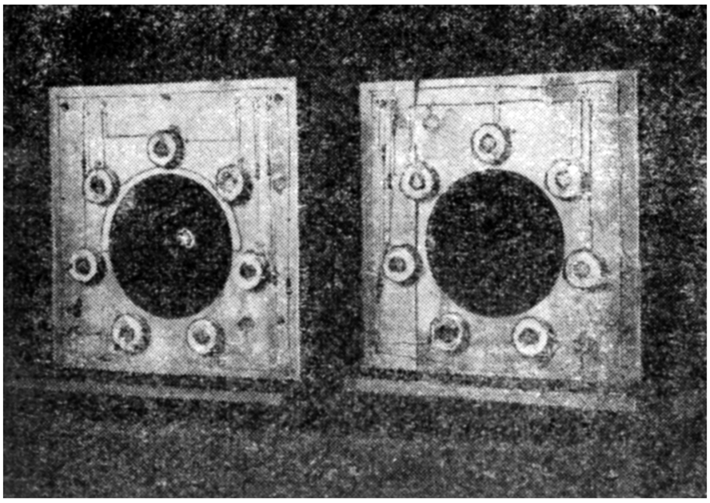


Рис. 60

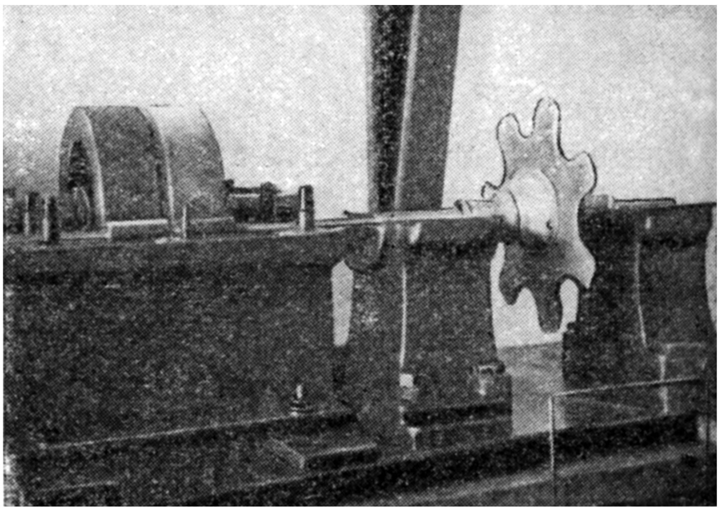


Рис. 61

С помощью такого устройства (в собранном виде оно изображено на рис. 62) удалось получить параметрическое возбуждение колебаний в схеме, изображенной на рис. 63, в которой отсутствуют какие-либо явные источники тока или напряжения. При настройке этой системы с помощью переменного конденсатора на частоту, равную или близкую половинной частоте изменения самоиндукции системы, в ней возникают мощные колебания с частотой, точно равной половине частоты изменения самоиндукции. Амплитуда колебаний при этом быстро возрастает до тех пор, пока не наступает пробой изоляции либо конденсаторов контура, либо подводящих про-

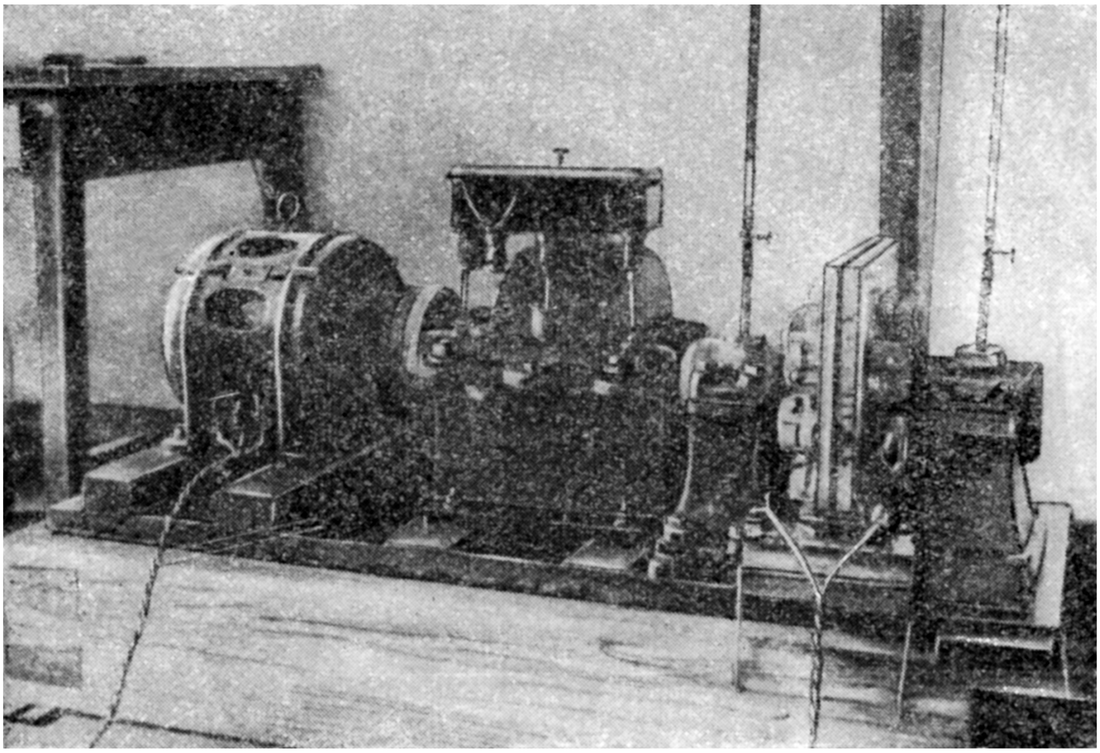


Рис. 62

водов. В наших опытах напряжение достигало 12000 -15000 вольт. Для того чтобы получить стационарный режим, необходимо было, в согласии с теорией, ввести в систему проводник с нелинейной характеристикой. В качестве такого проводника при первых опытах была взята группа лампочек накаливания (по 100 ватт), которые можно было, соединив параллельно, включить в колебательный контур.

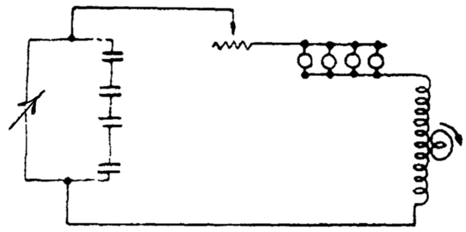


Рис. 63

Дальнейшие более детальные опыты были произведены в нашей лаборатории (ЛЭФИ) В. А. Лазаревым ([78]) с устройством, позволяющим получить бо́льшую глубину модуляции самоиндукции (до 40% вместо 14% первого устройства) и значительно бо́льшую мощность (до 4 квт общей мощности при к. п. д. около 50%). Детали этого устройства для изменения самоиндукции представлены на рис. 64. Так как дюралюминиевый ротор имел здесь 8 зубцов, то самоиндукция изменялась периодически с частотой приблизительно 1900 гц, а следовательно, частота получаемых колебаний равнялась около 950 гц.

Стационарный режим здесь достигался нелинейностью в самоиндукции, обусловливаемой либо железным сердечником статора,

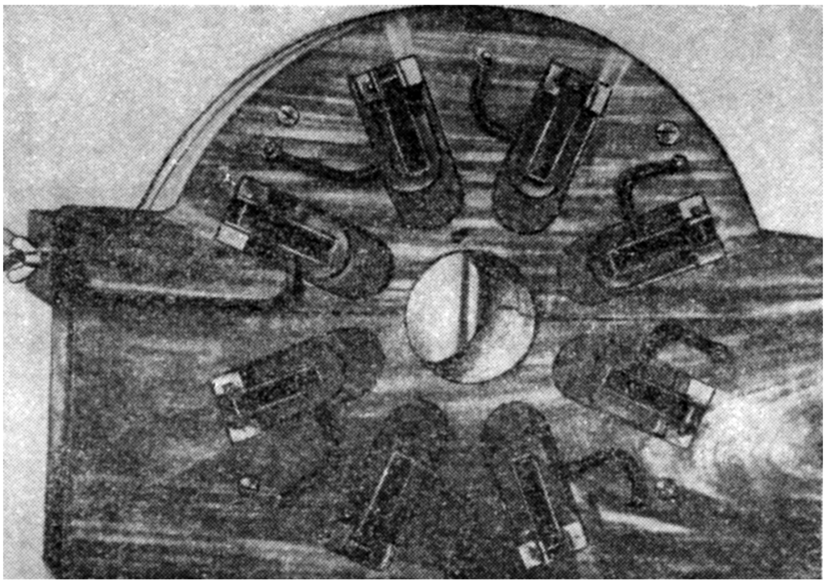


Рис. 64

либо железным сердечником дросселя, специально вводимого в колебательный контур системы. Так как этот дроссель имел две обмотки, то можно было, пропуская через одну из них постоянный ток, изме-

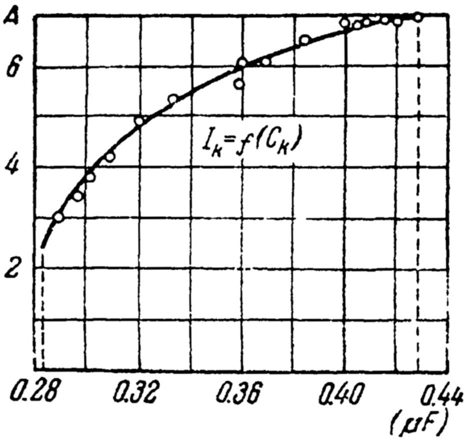


Рис. 65

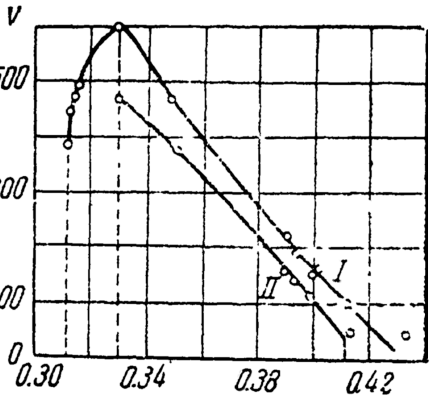


Рис. 66

нять по желанию начальную точку на кривой намагничивания железа и таким образом изменять характер нелинейности [коэффициенты в формулах (11) и (12)].

Произведенная в ЛЭФИ экспериментальная проверка соотношения (3) путем определения предельного затухания ϑ, при котором еще возможно возникновение колебаний, показала вполне удовлетворительное согласие между наблюдаемыми и „теоретическими" значениями. Нужно учесть, что теоретически было рассмотрено изменение самоиндукции по синусоидальному закону, между тем как на опыте это не было обеспечено полностью. Указанный выше характер кривых „гетеропараметрического" резонанса получился и на опыте

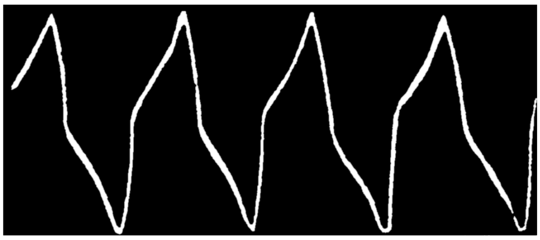


Рис. 67

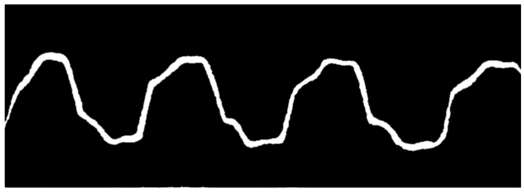


Рис. 68

(рис. 65 и 66). Мы здесь также имеем оба указанных теорией вида кривых, как подымающихся с увеличением расстройки (при использовании нелинейности в самой самоиндукции), так и опускающихся с увеличением расстройки (при включении в контур в качестве нелинейности особого дросселя с подмагничиванием). Для характеристики генерируемых колебаний приводим осциллограммы стационарного тока (рис. 67, ток 4 A и рис. 68, ток 8 A), а также осциллограммы установления колебаний (рис. 69).

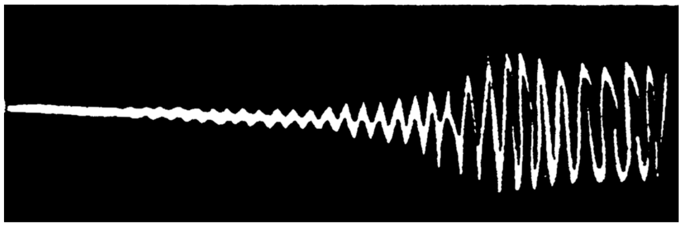


Рис. 69

Эффект возбуждения колебаний в электрической системе, не содержащей в себе каких-либо источников тока или напряжения, путем периодического (механического) изменения ее емкости был нами получен в установке, схема которой приведена на рис. 70. Колебательная система образована конденсатором периодически изменяемой емкости C и самоиндукцией L (без железного сердечника). Конденсатор с периодически изменяемой емкостью состоял из двух систем обкладок — неподвижной (статор) и подвижной (ротор). Общий вид конденсатора изображен на рис. 71. Первую систему составляли 26 неподвижных квадратных алюминиевых пластинок, снабженных каждая 14-ю симметрично расположенными радиальными вырезами, а вторая (ротор) была образована 25-ю круглыми (диаметр 30 см) алюминиевыми пластинками с аналогичными вырезами. Подвижная система была насажена на ось мотора постоянного тока, который мог делать до 4000 об/мин. Таким образом, при вращении мотора со скоростью n об/сек емкость колебательной системы периодически изменялась с частотой, равной $14\,n$ пер/сек.

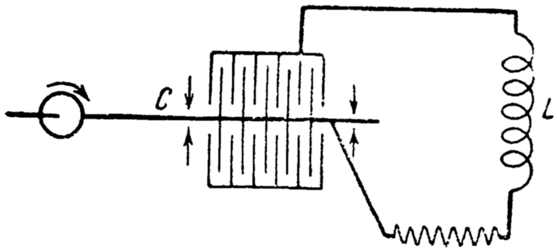


Рис. 70

Для суждения о возникновении колебаний, а также об их интенсивности параллельно конденсатору была приключена цепочка из 6 неоновых ламп (на 220 в) и статический вольтметр на 1200 в. Неоновые лампочки служили одновременно и для ограничивания колебаний.

Опыты, произведенные с этой установкой, показали следующее. При определенной скорости вращения подвижной системы конденсатора C в некоторой области настройки колебательной системы, приблизительно совпадающей с ее настройкой на половинную частоту изменения емкости, вольтметр дает отклонение и неоновые лампочки загораются. Проверка частоты возникших колебаний на слух сравнением с камертоном показала, что эта частота равна половине частоты изменения емкости, т. е. $7n$ (число оборотов мотора проверялось

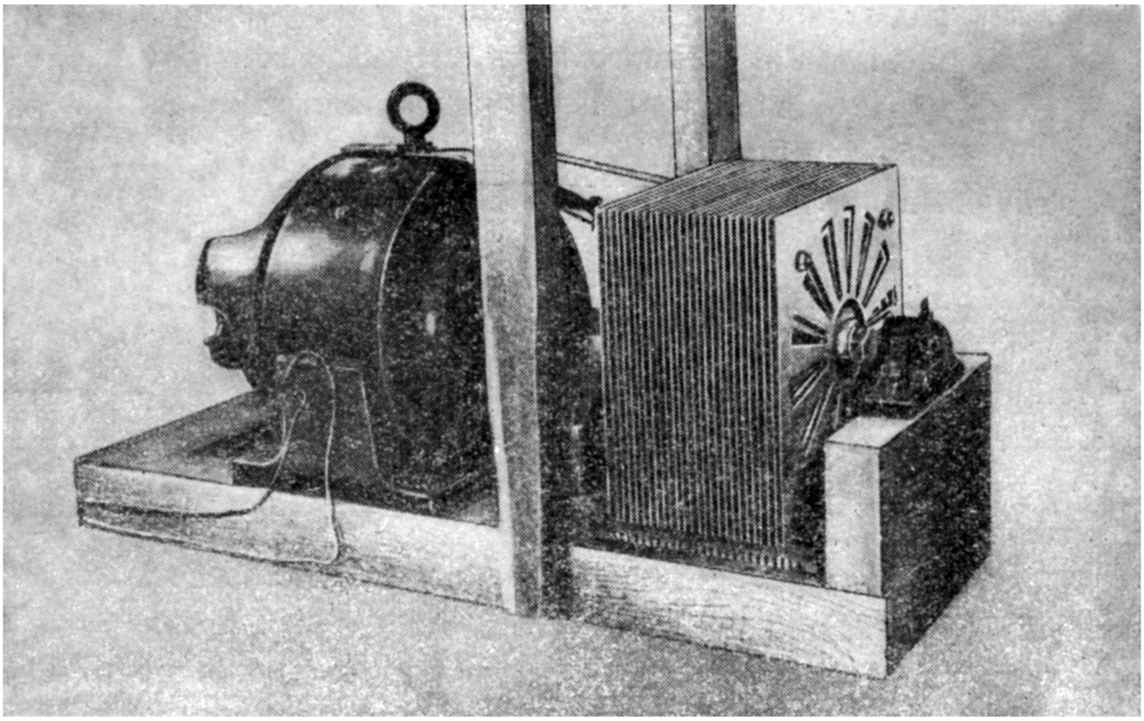


Рис. 71

по тахометру). Она остается неизменной при изменении настройки контура во всей области возбуждения и следует за изменением числа оборотов мотора.

Так как исследованная нами колебательная система в отсутствие неоновых лампочек является практически линейной, то ее поведение описывается линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами, которое, как уже указывалось, не дает внутри нестабильных областей стационарных решений. Поэтому следовало ожидать, что при отключении неоновых лампочек возникшие в системе колебания будут непрерывно возрастать до тех пор, пока не пробьется изоляция. Опыты действительно показали, что напряжение на конденсаторе, которое при наличии в контуре неоновых лампочек достигало 600—700 в и было устойчиво, в отсутствие лампочек не устанавливалось, а продолжало нарастать до тех пор (2000—3000 в) пока не проскакивали искры между обкладками конденсатора. Интересно отметить, что, в согласии с теорией, частота искры по мере расстройки колебательной системы (в обе стороны от настройки на половинную частоту изменения емкости) постепенно уменьшалась соответственно уменьшению скорости нарастания колебаний при приближении к границам области возбуждения (нестабильной области соответствующего линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами). Глубина модуляции параметра (в описываемом опыте) равнялась 0.175, а число оборотов мотора равнялось 62.38 об/сек. Измеренная на слух сравнением с камертоном частота параметрически возбужденных колебаний равнялась 435 пер/сек, что в пределах точности измерений совпадает с вычисленной частотой — 436.3 пер/сек.

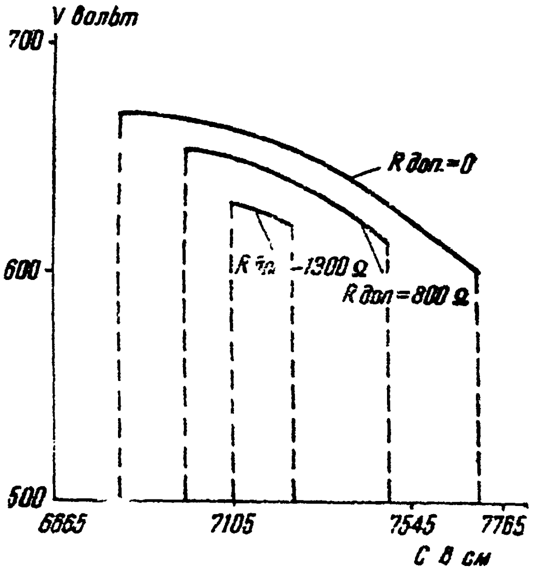


Рис. 72

Общий характер зависимости между амплитудой колебаний (напряжение на конденсаторе), расстройкой и затуханием системы представлены на рис. 72. Здесь видно, как с увеличением затухания системы уменьшается ширина области параметрического возбуждения. Полученная экспериментально величина интервала параметрического возбуждения также совпадает в пределах точности измерений с теоретической.

Заметим еще, что Е. Н. Секерской был исследован (НИИФ) способ, позволяющий осуществить явление Мельде, т. е параметрическое возбуждение струны путем периодического изменения ее натяжения. Груз, величину которого можно менять, висящий на струне, позволяет настраивать собственные колебания последней на различные частоты. Струна замыкает цепь 50-периодного переменного тока. При этом с частотой 100 пер/сек изменяется температура, а вследствие этого и натяжение струны. Когда одно из собственных колебаний струны настроено примерно на частоту 50, то наблюдается при достаточной силе тока явление параметрического возбуждения.

§ 8. Резонанс в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. Параметрическая связь

Исследования последних лет значительно обогатили содержание, вкладываемое в понятия *резонанса* и *связанных колебаний*, развившиеся первоначально в применении к линейным системам с постоянными параметрами. Мы в этом параграфе вкратце очертим некоторые, уже доказавшие свою плодотворность, обобщения этих понятий.

Начнем с резонанса. Как известно, если на гармонический осциллятор (линейную систему с постоянными параметрами с одной степенью свободы) действует сила, являющаяся заданной функцией времени $f(t)$, установившееся вынужденное колебание — стационарное решение уравнения вида

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t)$$

— будет, вообще говоря, оставаться конечным при $\delta \to 0$. Но в тех „исключительных" случаях, когда $P^2 + Q^2 \neq 0$, причем[1] P, Q пропорциональны соответственно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin \omega_0 t\, dt, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos \omega_0 t\, dt, \tag{1}$$

стационарное возбужденное колебание растет при $\delta \to 0$ как $1/\delta$. Эти случаи носят название резонанса. Таким образом, результат

[1] В дальнейшем мы будем пользоваться сокращенной записью

$$(fg) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) g(t)\, dt.$$

При такой записи P, Q пропорциональны соответственно $(f \sin \omega_0 t)$, $(f \cos \omega_0 t)$.

действия силы $f(t)$ на гармонический осциллатор определяется функционалом P^2+Q^2, зависящим, как показывают выражения (1), от всего хода изменения силы со временем. Небольшое изменение интенсивности силы при сохранении ее „формы"[1] вызывает лишь небольшое изменение вынужденного колебания; но сколь угодно малое изменение „формы" силы может, при постоянной ее интенсивности, изменить P^2+Q^2 от некоторого конечного значения до значения нуль; следовательно, если δ мало, достаточно небольшого изменения формы силы для того, чтобы очень сильно изменилась интенсивность вынужденного колебания.

Зависимость характера явлений от всего хода изменения воздействия со временем, большое изменение результата воздействия при малом изменении его формы — эти черты типичны не только для классического резонанса в гармоническом осцилляторе, они встречаются в весьма разнообразных колебательных системах, испытывающих изменяющееся со временем по заданному закону внешнее воздействие. Поэтому понятие резонанса напрашивается на обобщения. С некоторыми обобщениями понятия резонанса мы познакомились выше: резонанс n-го рода и комбинационные резонансы в нелинейных системах (§ 6), параметрический резонанс (§ 7). Но наибольшую аналогию, несмотря на ряд существенных отличий, с резонансом в гармоническом осцилляторе представляют явления, наступающие при действии внешней силы $f(t)$ на линейные системы с периодически меняющимися параметрами[2] ([79]). Такими системами являются — при известных физических ограничениях (отсутствие нестабильности) и при известной идеализации (малые колебания) — все системы с периодически меняющимися параметрами, рассмотренные выше, а также многие другие устройства, например суперрегенеративный приемник (где основную роль играет периодическое изменение сопротивления).

Математическая задача о действии внешней силы на линейную систему с периодически меняющимися параметрами сводится при одной степени свободы к исследованию дифференциального уравнения вида

$$\ddot{y}+2\delta\dot{y}+2\sigma(t)\dot{y}+\rho(t)y=f(t), \tag{2}$$

[1] Под интенсивностью силы $f(t)$ мы понимаем (ff), под ее формой — вид функции $f(t)/\sqrt{(ff)}$.

[2] Идеи, лежащие в основе цитируемых работ, были высказаны одним из нас в докладе на Конференции по колебаниям ([68]).

где $\delta > 0$, $\sigma(t)$ имеет среднее значение нуль, $\rho(t)$ имеет положительное среднее значение ρ_0. Единицу времени будем считать выбранной так, чтобы период функций σ, ρ был равен π. Для простоты предположим, что σ — нечетная, ρ — четная функция.

В отличие от резонансных явлений, о которых шла речь в § 6, 7, здесь для воздействия $f(t)$ справедлив принцип суперпозиции.

Резонансные явления, охватываемые уравнением (2), весьма разнообразны. Поэтому целесообразно различать несколько случаев.

Случай I. Уравнение

$$\ddot{y} + 2\sigma(t)\dot{y} + \rho(t)y = 0, \tag{3}$$

получающееся из (2) при $f = 0$, $\delta = 0$, соответствует некоторой „идеальной" системе, находящейся в стабильной области.

В этом случае решения уравнения (3) квазипериодичны (что соответствует модулированным колебаниям). Назовем u, v два линейно-независимых решения (3), удовлетворяющих условиям $(uu) = 1$, $(uv) = 0$, $(vv) = 1$. При этом u может быть выбрана четной, а v — нечетной.

Под действием периодической или квазипериодической силы $f(t)$ в системе, описываемой уравнением (2), устанавливается стационарное (квазипериодическое) колебание, которое, вообще говоря, остается конечным при $\delta \to 0$. Но в исключительных случаях, характеризуемых тем, что функционал

$$P^2 + Q^2 \neq 0, \tag{4}$$

где теперь

$$P = \frac{(fSv)}{(\dot{u}Sv)}, \qquad Q = \frac{(fSu)}{(\dot{v}Su)}, \tag{5}$$

причем

$$S(t) = e^{2\int_0^t \sigma(x)\,dx}, \tag{5a}$$

стационарное вынужденное колебание растет при $\delta \to 0$ как $1/\delta$. По аналогии с гармоническим осциллятором естественно назвать случай, когда $P^2 + Q^2 \neq 0$, случаем резонанса. Существенным отличием от „классического" резонатора является то, что здесь вопрос о наступлении резонанса решается функционалом, зависящим вместо функций $\sin\omega_0 t$, $\cos\omega_0 t$, от функций Su, Sv.[1] Поэтому разложение $f(t)$ в ряд Фурье, отвечающее на вопрос о том, в каких

[1] Или, если $\sigma(t) = 0$, просто u, v.

гармонических осциллаторах эта сила может вызвать резонанс, не может сказать, вызовет ли она резонанс в системе (2).

Легко показать, что если сила $f(t)$ гармонична с частотой ω, то $P^2+Q^2\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\omega=h+2n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, где h — константа, определяемая из уравнения (3). Таким образом, резонанс наступит при ряде эквидистантных частот внешней силы. Это явление „кратного резонанса" было впервые обнаружено Г. Гинцем и одним из нас ([80]) при исследовании суперрегенеративного приемника.[1]

Гармонический резонатор *выделяет* при резонансе из состава внешней силы $f(t)$ составляющую типа $-P\sin\omega_0 t+Q\cos\omega_0 t$. Определеннее: при любой $f(t)$, удовлетворяющей его условиям резонанса, мы имеем со сколь угодно большой точностью при достаточно малом δ для установившегося вынужденного колебания

$$2\delta\dot{y}=-P\sin\omega_0 t+Q\cos\omega_0 t.$$

Наша линейная система с периодически меняющимися параметрами обладает аналогичным свойством *селективности*, она также выделяет при резонансе из состава внешней силы составляющие определенной формы. Но отличие в том, что эти составляющие не гармоничны, а имеют вид $P\dot{u}+Q\dot{v}$: при любой функции $f(t)$, удовлетворяющей условию (4), (5), со сколь угодно большой точностью, при достаточно малом δ, имеет место для установившегося вынужденного колебания равенство

$$2\delta\dot{y}=P\dot{u}+Q\dot{v}.$$

Отсюда следует, что синусообразные функции времени теряют при переходе к линейным системам с периодически меняющимися параметрами то особое значение „простых колебаний", которое им придают явления, происходящие в обычных спектральных приборах.[2]

Действительно, пусть на нашу систему с периодически меняющимися параметрами действует сила $f=\cos ht$. Система *разложит*

[1] Заметим, что при некоторых режимах существенную роль в суперрегенеративном приемнике играют *нелинейные* явления (например, гашение шума сигналом). Один из нас дал теоретическое исследование некоторых из этих явлений ([81]).

[2] Обычные спектральные приборы (волномер, диффракционная решетка, призма) действуют как „набор" гармонических резонаторов, настроенных на разные частоты, и осуществляют разложение колебания $f(t)$ на его „простые" гармонические составляющие.

гармоническое колебание $\cos ht$, выделив из него составляющую, пропорциональную $\dot{v}$. Составляющую такой же формы она выделит из гармонических колебаний $\cos(h+2)t$, $\cos(h+4)t$ и т. д. Поэтому, например, в суперрегенеративном приемнике гармонические силы различной частоты возбуждают при резонансе совпадающие по форме вынужденные колебания. Это же замечание имеет значение для понимания резонансных явлений при комбинационном рассеянии (как известно, комбинационное рассеяние происходит при действии света на молекулу с периодически меняющейся поляризуемостью).

Переходя к остальным случаям, мы предположим для простоты, что $\sigma(t)$ тождественно равно нулю.

Случай II. Пусть уравнение (3) соответствует системе, находящейся на границе нестабильной области. Оно имеет при этом периодическое решение[1] u и нарастающее решение[2] $\gamma ut+v$, где γ — константа, v — периодическая функция, причем

$$(uu)=1, \qquad (uv)=0, \qquad (vv)=1.$$

Решения уравнения (3) остаются, вообще говоря, конечными при $\delta \to 0$, но возможны также исключительные случаи, когда стационарное вынужденное колебание неограниченно растет с уменьшением δ, и притом как $1/\delta$. Это будет тогда, когда $P \neq 0$, $Q=0$, где

$$P=\frac{(vf)}{(v\dot{u})}, \qquad Q=\frac{(uf)}{(u\dot{v})}. \tag{6}$$

Чем меньше δ, тем точнее в этом случае выполняется равенство

$$2\delta\dot{y}=P\dot{u},$$

означающее, что сила трения компенсируется внешней силой. Этот случай мы называем резонансом *первой* степени, в отличие от другого случая, не имеющего непосредственного аналога в гармоническом осцилляторе и наступающего при $Q\neq 0$. Если выполнено это неравенство, стационарное вынужденное колебание y также неограниченно растет при $\delta \to 0$, но не как $1/\delta$, а как $1/\delta^2$, и, чем меньше δ, тем точнее выполняется равенство

$$2\delta^2\dot{y}=\gamma Q\dot{u}.$$

Мы называем этот случай *резонансом второй степени.*

---

[1] Для краткости мы здесь, как и в дальнейшем, употребляем слово „периодический" в смысле „периодический с периодом π или 2π".

[2] При сколь угодно малом $\delta > 0$ колебания становятся затухающими.

При резонансе второй степени средняя мощность, потребляемая из-за трения, $2\delta(\dot{y}\dot{y})$ растет с уменьшением δ, как $\frac{1}{\delta^3}$.

Средняя мощность $(f\dot{y})$, доставляемая источником силы, растет при этом по абсолютной величине[1] не сильнее,[2] чем $\frac{1}{\delta^2}$.

Ясно, таким образом, что здесь (в отличие от всех рассмотренных выше случаев резонанса) не имеет места компенсация потерь работой внешней силы f. Потери компенсируются в основном работой устройства, модулирующего параметр.

Случай III. Пусть „идеальная" система без трения, которой соответствует уравнение (3), находится внутри одной из областей нестабильности.

При этом, для того чтобы „реальный" резонатор с трением был стабилен, коэффициент трения должен быть достаточно велик. Обозначим через $h\,(h>0)$ тот минимальный коэффициент трения, которым должна обладать система, чтобы при данном виде функции $\rho(t)$ не было параметрического возбуждения. Тогда уравнение

$$\ddot{y}+2h\dot{y}+\rho(t)\,y=0 \tag{7}$$

соответствует системе, находящейся на границе нестабильности. Оно имеет периодическое решение u и затухающее решение $e^{-2ht}v$, где v — периодическая функция, причем

$$(uu)=1, \qquad (vv)=1.$$

Мы теперь будем обозначать через δ не полный коэффициент трения, а разность между последним и h. Таким образом, наша система стабильна при $\delta>0$. При этом уравнение (2) принимает в случае отсутствия внешней силы вид

$$\ddot{y}+2h\dot{y}+\rho(t)\,y+2\delta\dot{y}=0. \tag{8}$$

Ограничимся для краткости простейшим (и наиболее замечательным) случаем, когда уравнение (7) описывает систему, находящуюся в наинизшей точке границы нестабильности. Тогда $(uv)=0$; кроме того, уравнение (8) имеет при $\delta\ll h$ решение вида

$$e^{-\delta t}u_1, \qquad e^{-(2h+\delta)t}v_1,$$

где u_1, v_1 — периодические функции, близкие к u, v.

---

[1] Существенная оговорка! Иногда (например, если $f=\dot{u}+\dot{v}$, $\gamma<0$) эта мощность отрицательна, резонатор *отдает* в среднем энергию источнику силы f.

[2] Более того, в некоторых случаях резонанса второй степени она растет только, как $1/\delta$ (например, если $f=\dot{v}$).

Решения первого типа изображают колебания, затухающие слабее, чем в отсутствие модуляции (показатель затухания равен δ вместо $h \gg \delta$ при $\rho = \rho_0$). Решения второго типа изображают колебания, затухающие сильнее, чем при $\rho = \rho_0$. Один и тот же начальный толчок может породить либо слабо затухающее, либо сильно затухающее колебание, смотря по тому, в какой момент он приложен — свойство, специфичное для неавтономной системы.

Под действием внешней силы в системе устанавливается некоторый стационарный режим, описываемый стационарным решением уравнения

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \rho(t)\, y + 2\delta\dot{y} = f(t). \tag{9}$$

Вообще говоря, y останется конечным при $\delta \to 0$. Но возможны исключительные случаи, когда при $\delta \to 0$ y неограниченно растет, и притом как $1/\delta$. Эти случаи мы будем называть резонансом. Они наступают тогда и только тогда, когда

$$(fv) \neq 0.$$

При этом интенсивность вынужденных колебаний пропорциональна $(fv)^2$.

Наиболее простой случай резонанса — тот, когда $f = \dot{u}$. При этом, очевидно,

$$2\delta\dot{y} = \dot{u}.$$

Но, чем меньше δ, тем с большей точностью для любой $f(t)$, удовлетворяющей условию резонанса, справедливо с точностью до постоянного множителя это же соотношение; система выделяет из состава внешней силы колебание типа $\dot{u}$. Так как при достаточной глубине модуляции δ может быть сделано весьма малым, чувствительность нашей системы при резонансе может намного превосходить чувствительность при резонансе в отсутствие модуляции. Это связано с тем, что внешняя сила должна компенсировать лишь небольшую часть потерь на трение, а именно ту, которая обусловлена составляющей силы трения $-2\delta\dot{y}$. Что касается потерь, обусловленных составляющей силы трений $-2h\dot{y}$, то они компенсируются работой модуляционного устройства. По аналогии с тем, что наблюдается в регенеративном приемнике, можно сказать, что здесь происходит *регенерация* посредством периодического изменения параметра, или короче, параметрическая регенерация ([82]). Резонанс второй степени (см. выше) можно также рассматривать как явление параметрической регенерации.

Если $\rho=\rho_0+q\cos 2t$, $f=\cos(t-\varphi)$, вычисление показывает, что с точностью до постоянного множителя

$$(fv)=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, интенсивность вынужденных колебаний сильно зависит от фазы внешней силы. При $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4}$ резонанс исчезает.

Зависимость характера вынужденных колебаний от фазы внешней силы непосредственно связана с неавтономностью самого резонатора, с тем, что в нем с заданным периодом и с *заданной фазой* меняется параметр. Разумеется, физическое значение имеет не фаза силы φ сама по себе, а соотношение фаз между внешней силой и параметрическим воздействием.

Легко связать последний результат с тем, что характер колебаний, вызываемых данным толчком, зависит от того, когда он приложен. Действие внешней силы можно рассматривать как периодическое чередование толчков. Меняя фазу силы, мы сдвигаем все толчки во времени.[1]

Если $(fv)=0$, как мы знаем, стационарное колебание, описываемое уравнением (9), остается конечным при $\delta=0$. Но, *расстраивая* резонатор путем изменения его средней жесткости, можно иногда получить колебания, интенсивность которых при достаточно малом δ может быть сделана сколь угодно большой. Поясним это на примере $f=u$.

Уравнение вынужденных колебаний расстроенного резонатора

$$\ddot{y}+2h\dot{y}+\rho(t)y+\xi y+2\delta\dot{y}=u,$$

где константа ξ есть изменение средней жесткости (расстройка), обладает стационарным решением, мало отличающимся при малых δ и ξ от

$$y=\frac{\xi}{\delta'+\xi^2}u,$$

где $\delta'=\delta\beta$, β — некоторая константа, отличная от нуля.

Кривая зависимости интенсивности (yy) от расстройки ξ имеет два симметричных максимума при $\xi=\pm\sqrt{\delta'}$ и минимум при $\xi=0$. В то время как интенсивность в минимуме не зависит от δ,

---

[1] В случае II тип колебаний, возбуждаемых одинаковым толчком, также сильно зависит от момента толчка, и там также изменение фазы силы может сильно влиять на характер вынужденных колебаний; меняя фазу силы, можно изменить степень резонанса.

максимумы неограниченно растут (и неограниченно сближаются) при $\delta \to 0$. В максимумах

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\, u.$$

Можно сказать, что при $\xi = \pm \sqrt{\delta'}$ наступает резонанс половинной степени.

Заметим еще, что если в случаях II и III период силы f мало отличается от одного из значений, при котором она дает резонанс, стационарное вынужденное колебание имеет вид медленных биений.

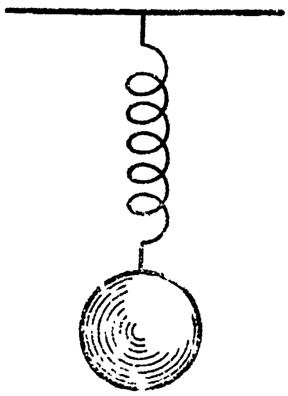


Рис. 73

Ряд явлений параметрической регенерации был исследован экспериментально в ЦРЛ Дивильковским и Рытовым ([83]) и Рубчинским ([84]).

Перейдем к изложению некоторых результатов, относящихся к области *связанных* колебаний. Мы коснемся главным образом колебаний „параметрически связанных" систем.

Поясним это понятие и сущность охватываемых им явлений на примере одного весьма несложного устройства: пружинного маятника,[1] т. е. груза, висящего на пружине ([85]) (рис. 73). Дадим ему вертикальное отклонение, после чего предоставим систему самой себе. Она начнет совершать вертикальное колебание с частотой $\sqrt{k/m}$ (k — упругость пружины, m — масса груза). Это колебание не развивает никаких сил, стремящихся отклонить груз от вертикали, проходящей через точку подвеса. Тем не менее, если $\sqrt{k/m}$ близок к $2\sqrt{g/l}$ (g — ускорение тяжести, l — длина маятника), т. е. к удвоенной частоте угловых колебаний груза, мы заметим постепенное раскачивание последних. Это — не что иное, как параметрическое возбуждение, вызванное тем, что при вертикальных колебаниях периодически меняется в нужном темпе длина пружины — параметр, влияющий на величину энергии угловых колебаний.

Но между явлениями в пружинном маятнике и явлениями параметрического возбуждения, описанными в § 7, существует важное отличие. По мере нарастания угловых колебаний, вертикальные

[1] Толчком к исследованию пружинного маятника послужила работа Ферми ([86]), давшего квантово-механическую теорию параметрической связи между колебаниями молекулы CO_2.

колебания пружинного маятника ослабевают и наступает такой момент (если $\sqrt{k/m}$ равен в точности $2\sqrt{g/l}$), когда они прекращаются. Затем происходит постепенное ослабление угловых колебаний и усиление вертикальных до тех пор, пока первые не исчезнут. Тогда все начинается снова. Между тем, в системах, о которых шла речь в § 7, параметрическое воздействие вызывало монотонное нарастание колебаний.

Ясно, где следует искать причину различия. В системах, описанных в § 7, существуют источники энергии, поддерживающие определенную глубину модуляции, не зависящую (практически) от интенсивности параметрически возбуждаемых колебаний. В пружинном маятнике нет источников энергии, угловые колебания могут нарастать лишь за счет энергии вертикальных колебаний. Возбуждаемые колебания оказывают заметное *обратное действие* на величину возбуждающих колебаний.

Соотношение между возбуждением колебаний при изменении параметра по заданному закону (§ 7) и тем, что наблюдается в пружинном маятнике, аналогично соотношению между поведением системы, состоящей из двух связанных контуров в том случае, когда в одном из них поддерживается (при помощи внешнего источника энергии) заданное колебание, создающее заданную силу, действующую в резонанс на второй, и в том случае, когда, сообщив первому контуру некоторую начальную энергию, мы предоставляем затем систему самой себе. В первом случае мы будем иметь монотонное нарастание колебаний, в последнем случае, если частоты контуров равны между собой, обратное действие второго контура на первый вызовет периодическую перекачку всей энергии из одного контура в другой.[1]

Подобно тому как в последнем случае мы говорим о связанных колебаниях (в отличие от вынужденных, происходящих под действием заданной силы), мы можем сказать, что в пружинном маятнике угловые и вертикальные колебания являются *связанными* колебаниями. Но так как в отличие от связанных контуров здесь одно из колебаний (вертикальное) действует на другое не посредством создания явной силы, а посредством периодического изменения параметра, мы будем говорить о *параметрически* связанных колебаниях.

---

[1] Для простоты изложения мы пренебрегаем трением (омическим сопротивлением).

Нетрудно видеть, в чем заключается обратное действие угловых колебаний на вертикальные. При отклонении груза от вертикали возникают силы, стремящиеся деформировать пружину: статическая сила $-\frac{mg\varphi^2}{2}$ (φ — угол отклонения) и центробежная сила $ml\dot{\varphi}^2$. Обе эти силы меняются с частотой, равной удвоенной частоте угловых колебаний. При $\sqrt{k/m}=2\sqrt{g/l}$ они действуют в *резонанс* на вертикальное колебание. Таким образом, при различном характере „прямого" действия (параметрического) и „обратного" („силового") между ними существует характерная симметрия: соотношение частот, наиболее благоприятное для воздействия вертикального колебания на угловое, является вместе с тем и наиболее благоприятным для действия углового колебания на вертикальное.

Для того чтобы написать дифференциальные уравнения системы, учитывающие явления параметрической связи, необходимо принять во внимание в выражении для лагранжевой функции пружинного маятника члены, пропорциональные $z\dot{\varphi}^2$ и $z\varphi^2$, где z — удлинение пружины, что приводит к нелинейным уравнениям

$$\begin{gathered}\ddot{z}+\frac{k}{m}z+l\left(\frac{g}{2l}\varphi^2-\dot{\varphi}^2\right)=0,\\ \ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi+\frac{1}{l}\left(\frac{g}{l}z\varphi+2\dot{z}\dot{\varphi}+2z\ddot{\varphi}\right)=0.\end{gathered}\tag{10}$$

Если бы z было заданной периодической функцией времени, второе уравнение превратилось бы в уравнение линейной системы с периодически меняющимися параметрами; если бы φ было заданной периодической функцией времени, первое уравнение превратилось бы в уравнение линейной системы, находящейся под действием заданной внешней силы.

Разумеется, явления параметрической связи, подобные тем, которые наблюдаются в пружинном маятнике, должны существовать при отношении парциальных частот[1] системы x и системы y, близком к $1:2$ во всех системах, в которых разложение лагранжевой функции в ряд по степеням x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ содержит члены, пропорциональные $x\dot{y}^2$ и xy^2.

---

[1] Т. е. частот парциальных систем с одной степенью свободы, получающихся из системы с двумя степенями свободы, конфигурация которой определяется координатами x, y при закреплении одной из координат, т. е. при $y\equiv 0$ и при $x\equiv 0$.

Чем больше колебания системы, тем большее значение имеет, грубо говоря, энергия взаимодействия по сравнению с „собственными энергиями" парциальных систем. Пользуясь термином, заимствованным из теории линейных связанных систем, мы скажем, что, чем больше колебания системы, тем сильнее связь между парциальными системами.

Исследование уравнений (10) приводит к следующим заключениям, согласующимся с опытом в той мере, в которой допустимо пренебрегать трением. Как бы ни мала была связь между парциальными системами, т. е. как бы ни малы были начальные отклонения z, φ и начальные скорости $\dot{z}$, $\dot{\varphi}$, они могут быть выбраны так, если $\sqrt{k/m} = 2\sqrt{g/l}$, чтобы происходила периодически полная перекачка всей энергии из одной парциальной системы в другую. Такая полная перекачка будет иметь место, например, если вначале возбуждена только одна парциальная система. Этот результат напоминает известное свойство линейной системы с двумя степенями свободы: как бы ни мала была связь между парциальными системами, возможны начальные условия, при которых в отсутствие трения происходит полная перекачка энергии из одной в другую. Но в линейной системе перекачка энергии идет тем медленнее, чем меньше связь. Аналогично обстоит дело и при параметрической связи: перекачка, обусловленная ею, тем более медленна, чем меньше начальные отклонения и скорости. Наконец, в пружинном маятнике можно осуществить при определенном подборе начальных условий такие колебания, при которых отсутствует перекачка энергии между парциальными системами. Эти колебания аналогичны нормальным (или главным) колебаниям линейной системы с двумя степенями свободы.

Здесь уместно сделать замечание принципиального характера. При изложении теории малых колебаний принято говорить, что всегда можно взять настолько малые начальные отклонения и скорости, чтобы ошибка, вызванная отбрасыванием членов третьей и более высокой степени относительно координат и скоростей в выражении лагранжевой функции, была сколь угодно мала. Это утверждение обычно. Между тем в пружинном маятнике, как бы ни малы были начальные z, φ, $\dot{z}$, $\dot{\varphi}$, возможна полная перекачка энергии из колебания z в колебание φ и обратно, в то время как уравнения, получаемые при отбрасывании кубичных членов лагранжевой функции, утверждают, что колебания z и φ — гармоничны и независимы. Отбрасывание членов высшего порядка может быть оправдано в подобных случаях, — если не учитывать трения, — лишь для достаточно коротких промежутков времени.

Понятие параметрической связи может быть обобщено на системы, лагранжева функция которых содержит член вида $x^2 y^2$ (система x действует параметрически на систему y и система y действует параметрически на систему x) и т. д. Мыслимы случаи, когда такие члены могут вызвать заметное взаимодействие при сколь угодно малых колебаниях (в дальнейшем, говоря о параметрической связи, мы не будем иметь в виду этих связей „высшего порядка").

За исключением электромагнитных колебаний в вакууме с точки зрения электродинамики Максвелла (в отличие от новейшей нелинейной электродинамики Борна) мы всегда приходим к представлению о линейных *распределенных* колебательных системах также путем отбрасывания некоторых „малых" нелинейных членов в „точных" дифференциальных уравнениях. Здесь также может оказаться, если система достаточно близка к консервативной, что эти малые члены обусловливают сильное взаимодействие между колебаниями, выдаваемыми линеаризованными уравнениями за независимые.

Среди собственных колебаний многих распределенных систем существуют такие, частоты которых относятся, как $1:2$. Наличие параметрической связи между такими колебаниями — в механических системах она возможна из-за асимметрии изменения упругих напряжений при изменении знака деформации — может в некоторых случаях иметь существенное значение.

Так, например, при одномерных колебаниях столба газа, заключенного между двумя параллельными твердыми стенками (смещения перпендикулярны стенкам), колебания в основном тоне и в первом обертоне[1] параметрически связаны между собой, причем роль вертикального колебания пружинного маятника играет первый обертон ([87]). Поэтому можно ожидать, например, что, возбуждая первый обертон, удастся вызвать появление основного тона, т. е. получить параметрическое деление частоты. Разумеется, амплитуда первого обертона должна для этого быть больше некоторого порога, определяемого акустической абсорбцией. Подсчет показывает, что этот порог практически достижим.

Остановимся в двух словах на некоторых своеобразных явлениях *неконсервативной* параметрической связи. Такие явления существуют при работе на сгибе характеристики и при настройке кон-

[1] И вообще тона номера n и $2n$, если $n=1$ соответствует основному тону.

туров на частоты, относящиеся, как $1:2$, в автоколебательной системе с двумя степенями свободы, изображенной на рис. 60, где их исследовал Турбович [88].

Дифференциальные уравнения системы имеют при этом вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\alpha + \beta\dot{y})\dot{x} + \ldots$$

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = \frac{\beta}{2}\dot{x}^2 + \ldots$$

(мы пишем только наиболее характерные члены). Колебания второго контура вызывают периодическое изменение эффективного сопротивления первого контура с частотой, равной удвоенной собственной частоте последнего, что может вызвать (если $\alpha > 0$, но $\alpha + \beta\dot{y}$ принимает достаточно большие *отрицательные* значения) параметрическое возбуждение колебаний (резонанс второго рода). Колебания первого контура (частоты ω) развивают силу частоты 2ω, действующую в резонанс на второй контур.

При соответствующих режимах получаются явления, которые можно рассматривать как *умножение* частоты с параметрическим обратным действием или как *деление* частоты с резонансным обратным действием. Существуют также еще мало исследованные режимы биений, при которых иногда обнаруживается сложная синхронизация.

В заключение упомянем исследование А. Чарахчьяна над синусоидальным воздействием на две параметрически связанные между собой электрические системы. В них рассматривается поведение схемы, обычно применяемой для получения параметрического возбуждения периодическим изменением намагничивания железа катушек самоиндукции системы — так называемого „параметрического трансформатора“. Следует отметить, что в подобной схеме автоматически устанавливается периодический режим, соответствующий положению системы на границе между устойчивой и неустойчивой областями.

§ 9. Роль статистики в поведении динамических систем

В заключение мы коснемся вкратце некоторых вопросов, теоретическое и экспериментальное рассмотрение которых только недавно начато в наших лабораториях, — мы имеем в виду вопросы, связывающие теорию колебаний со статистикой. Уже в простейшем случае возникновения колебаний в ламповом генераторе с самовозбуждением отчетливо выступает роль статистики в поведении системы ([89, 90]). При отсутствии регулярных отклонений в начальный момент, отклонения от состояния равновесия задаются случайными толчками, а от величины начальных значений зависит время, в течение которого в системе установится стационарный процесс (конечно, речь идет о том, что состояние системы приблизится к стационарному на заданную величину). Но в ламповом генераторе колебательный контур сам „усредняет" толчки, и поэтому их влияние сказывается только в создании собственных малых колебаний в контуре, причем амплитуда этих малых колебаний известным образом связана со спектральной интенсивностью действующих на систему толчков.

Такого усреднения толчков может и не быть, если система очень „быстрая", и тогда значения тока и напряжения в системе в каждый момент являются случайными. Если при этом система такова, что при небольших изменениях начальных условий в ней устанавливаются различные конечные состояния, то в такой системе можно непосредственно наблюдать влияние отдельных начальных условий на поведение системы. К числу таких систем принадлежат, например, схемы кипп-реле, обладающие несколькими состояниями равновесия. Вид фазовой плоскости для одной из таких схем был приведен на рис. 21. Ясно, что если начальные отклонения распределены по закону случая, то будут равновероятны отклонения как вправо, так и влево, и значит, при включении системы без внешнего толчка попадание в левый или правый узел будет определяться законами статистики.

При наличии регулярного внешнего толчка статистика будет нарушена. Сравнивая влияние случайных и регулярных толчков на статистику „попаданий", можно установить величину случайных толчков. Подобные опыты были произведены в НИИФ.[1] В качестве источника случайных толчков служили усиленные флуктуации в электронном потоке электронной лампы. Определенная таким образом величина флуктуаций удовлетворительно совпадает с известными теоретическими и экспериментальными результатами Шоттки.

Можно поставить и другой вопрос о переходе системы из одного состояния в другое под действием случайных толчков. Теоретически эта задача была рассмотрена при помощи уравнения Фоккера.

[1] [С. Хайкин и Л. Лошаков ЖЭТФ, 6, 858, 1936].

В частности, Л. С. Понтрягиным ([91]) было вычислено математическое ожидание перехода из одних состояний в другие в зависимости от величины случайных толчков. При помощи этого выражения можно вычислить и время перехода из одних стационарных состояний в другие, что позволяет говорить о среднем времени пребывания на тех или иных стационарных состояниях.

Экспериментально также удавалось наблюдать такие „спонтанные“ переходы из одного состояния в другое.

Обратим еще внимание на то, что такие случайные толчки принципиально кладут предел той точности, с которой можно говорить об определенном периоде колебаний, создаваемых какой-либо физической системой, например ламповым генератором.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Henri Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle. Oeuvres, t. 1 (1928). [Имеется русский перевод, под ред. А. А. Андронова, ОГИЗ, М.—Л., 1947.]
2. Henri Poincaré. Méthodes nouvelles de la mécanique céleste.
3. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Изд. Харьк. мат. об-ва, 1892 [2-е изд. ОНТИ, М.—Л., 1935].
4. G. Birkhoff. Dynamical systems. N. Y., 1927.
5. А. А. Андронов. C. R. 189, 559, 1929.
6. B. van der Pol. Phil. Mag. 7, 3, 65, 1927.
7. B. van der Pol. Phil. Mag. 6, 43, 700, 1922.
8. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖЭТФ 4, 117, 1934. [т. II, статья 38].
9. P. Fatou. Bull. de la S-té math. de France, 56, 98, 1928.
10. А. Скибарко и С. Стрелков. ЖТФ 4, 153, 1934.
11. В. Бовшеверов. Techn. Phys. of the USSR 2, 43, 1935.
12. Г. Бендриков и Г. Горелик. ЖТФ 5, 620, 1935.
13. Л. С. Понтрягин. ЖЭТФ 4, 883, 1934.
14. А. А. Андронов и А. А. Витт. ЖЭТФ 3, 373, 1934.
15. А. А. Андронов и А. А. Витт. ЖПФ 7, 119, 1930.
16. А. А. Андронов и А. А. Витт. C. R. 190, 256, 1930.
17. А. А. Андронов и А. А. Витт. ЖТФ 4, 122, 1934.
18. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. Zs. f. Phys. 73, 223, 1931; ЖТФ, 2, 775, 1935 [т. II, статьи 32 и 33].
19. А. Андронов и А. Любина. ЖЭТФ 5, 296, 1935.
20. С. П. Стрелков. ЖТФ 3, 563, 1933.
21. М. А. Леонтович. ЖПФ 59, 261, 1927.
22. С. Э. Хайкин. ЖПФ 7, 6, 1930.
23. Н. Кайдановский и С. Хайкин. ЖТФ 3, 1, 1933.
24. B. van der Pol. Phil. Mag. 45, 978 1926, 28, 176, 1926; 29, 114, 1927.
25. А. А. Андронов и А. А. Витт. ДАН 1930, ур. 189.
26. Л. Лошаков и С. Хайкин. ЖТФ 5, 832, 1935.

27. С. Э. Хайкин. ЖТФ **5,** 1388, 1935.
28. А. А. Витт. Phys. Zs. der Sowjetunion **5,** 177, 1934.
29. А. А. Витт. ЖТФ **4,** 144, 1934.
30. С. П. Стрелков. Techn. Phys. of the USSR **2,** 235, 1935.
31. Н. Крылов и Н. Боголюбов. Расчет вибраций рамных конструкций с учетом нормальных сил при помощи методов нелинейной механики, Харьков, 1935.
32. Н. Артемьев. Techn. Phys. of the USSR **1,** 187, 1934.
33. А. А. Витт. Учен. зап. МГУ, вып. II, 133, 1934.
34. Г. А. Майер. Techn. Phys. of the USSR **2,** 465, 1935.
35. В. Гапонов. ЖТФ **6,** 801, 1936.
36. G. Möller. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef., **17,** 256, 1921.
37. J. H. Vincent. Proc. Phys. Soc. 1920, стр. 84.
38. Van der Pol a. van der Mark. Nature **368,** сент. 1927.
39. Koga. PIRE **15,** 679, 1927.
40. Ollendorff. Arch. d. El. **16,** 280, 1926.
41. А. Андронов и А. Витт. Arch. f. El. **24,** 99, 1930.
42. А. А. Витт и С. Э. Хайкин. ЖТФ **1,** 428, 1931.
43. Appleton. Proc. Cambr. Phil. Soc. **23,** 231, 1923.
44. А. Витт, С. Хайкин и Е. Майзельс. Вестн. электропр. слаб. тока № 3, 1933.
45. К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин. ЖТФ **2,** 111, 1932.
46. С. Э. Хайкин. ENT **9,** H. 10, 1932; К. Теодорчик и Е. Секерская, ЖТФ **4,** 1909, 1934.
47. П. А. Рязин. ЖТФ **5,** 38 и 1809, 1935; Techn. Phys. of the USSR **2,** 195, 1935.
48. Е. Секерская. ЖТФ **5,** 253, 1935.
49. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ **2,** 775, 1932 [т. II, статья 33].
50. Groszkowski, PIRE **18,** 1960, 1930.
51. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ **4,** 98, 1934 [т. II, статья 35].
52. Ю. Б. Кобзарев. ЖТФ **3,** 138, 1933.
53. А. А. Витт. ЖТФ **4,** 109, 1934.
54. Appleton a. van der Pol. Phil. Mag. **43,** 177, 1922.
55. Appleton a. Greaves. Phil. Mag. **45,** 401, 1923.
56. Э. М. Рубчинский. ЖТФ **4,** 111, 1934.
57. А. Б. Меликьян. ЖТФ **4,** 78, 1934.
58. Melde. Pogg. Ann. **109,** 5, 1859; **111,** 513, 1860.
59. Rayleigh. Phil. Mag., апрель 1883, стр. 229.
60. Rayleigh. Phil. Mag. **24,** 144, 1887.
61. H. Poincaré. L'éclairage électrique **50,** 299, 1907.
62. M. Brillouin. L'éclairage électrique **11,** 49.
63. B. van der Pol. Exp. Wir., 1926, стр. 343.
64. Heegner. Zs. f. Phys. **29,** 991, 1924.
65. Günter — Winter. Zs. f. Hochfr. **34,** 41, 1929.
66. Günter — Winter. Zs. f. Hochfr. **37,** 172, 1931.
67 Watnabe, Saito a. Kaito. Journ. of the Inst. of El. Eng. of Japan **53,** 21, 1933.

68. Л. И. Мандельштам. Всесоюзн. конф. по колебаниям. М., 1933, УФН, 13, вып. 2, 1933 [статья 59].
69. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ **3**, 114, 1933 [т. II, статья 34].
70. А. А. Андронов и М. А. Леонтович. ЖРФХО **59**, 430, 1927.
71. B. van der Pol a. M. J. O. Strutt. Phil. Mag., 5, 18, 1928.
72. Rayleigh. Theory of Sound, т. I, 81, 1926. [Русский перевод под ред. С. М. Рытова и К. Ф. Теодорчика, стр. 95, ГИТТЛ, 1940.]
73. С. М. Рытов. ЖТФ **3**, 1231, 1933; Techn. Phys. of the USSR **2**, 215, 1935.
74. В. Гуляев и В. Мигулин. ЖТФ **4**, 48, 1934.
75. L. Dreifuss. Arch. f. El. **2**, 343, 1913.
76. H. Schunk. u. J. Zenneck. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. **19**, 170, 1922.
77. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ **4**, 5, 1934 [т. II, статья 36].
78. В. Лазарев. ЖТФ **4**, 30, 1934.
79. Г. С. Горелик. ЖТФ **4**, 1783, 1934; **5**, 195 и 489, 1935; Techn. Phys. of the USSR **2**, 135, 1935.
80. Г. Горелик и Г. Гинц. Техника радио и слаб. тока, № 12, 645, 1932; Zs. f. Hochfr. **38**, 222, 1931.
81. Г. С. Горелик. ЖТФ **3**, 110, 1933.
82. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. Изв. электропр. слаб. тока, № 3, 1, 1935 [т. II, статья 48].
83. М. А. Дивильковский и С. М. Рытов. ЖТФ **6**, 474, 1936.
84. Э. М. Рубчинский. Изв. электропр. слаб. тока, № 3, 7, 1935.
85. А. А. Витт и Г. С. Горелик. ЖТФ **3**, 294, 1933.
86. E. Fermi. Zs. f. Phys. **71**, 250, 1931.
87. Г. С. Горелик. ЖТФ **5**, 1436, 1935.
88. И. Т. Турбович. ЖТФ **5**, 1234, 1935.
89. H. Barkhausen u. G. Hässler. Hochfr. u. Electroak. **42**, 41, 1933.
90. G. Hässler. Hochfr. u. Elektroak. **42**, 42, 1933.
91. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов и А. А. Витт. ЖЭТФ **3**, 165, 1933; Zs. d. Sowjetunion **6**, 1, 1934.
92. В. В. Мигулин. ЖТФ **6**, 644, 1936.
93. Г. Петросян. ЖТФ **5**, 1552, 1935.
94. Л. Д. Гольдштейн. Изв. Лен. ин-та связи, вып. IV—V, 15, 1934.
95. Ю. Б. Кобзарев. ЖТФ. **5**, 964, 1935.
96. В. В. Мигулин и Я. Л. Альперт. ЖТФ **6**, 5, 1936.
97. Б. А. Введенский и С. Н. Ржевкин. ТиТБП, № 11, 1921.
98. Г. С. Горелик, В. Кузовкин и Е. Секерская. Техн. радио и слаб. тока, № 11, 629, 1932.
99. С. М. Рытов. ЖТФ **5**, 3, 1935.
100. А. Е. Безменов. ЖТФ **6**, 467, 1936.
101. А. А. Витт. ЖТФ **6**, 1459, 1936.

62

ПРЕДИСЛОВИЕ

[к книге А. А. Андронова и С. Э. Хайкина „Теория колебаний", часть I][1]

Вряд ли есть в настоящее время необходимость специально обосновывать важное значение колебательных процессов в современной физике и технике. Можно без преувеличения сказать, что нет почти области в этих науках, в которой колебания не играли бы той или иной роли, не говоря уже о том, что ряд областей физики и техники всецело базируется на колебательных явлениях. Достаточно, например, указать на область электромагнитных колебаний, включающую в себя и оптику, на учение о звуке, на радиотехнику и прикладную акустику.

Общность колебательных процессов, их разнообразие и в то же время их специфическое своеобразие играют существенную роль в установлении внутренних связей между весьма разнородными на первый взгляд явлениями. Этим обстоятельством, как мне кажется, и обусловливается главным образом принципиальное значение и важность интересующей нас области.

Весьма существенно следующее: в области колебаний особенно отчетливо выступает взаимодействие между физикой и математикой, влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на наши физические знания. Несомненно, что в развитии таких математических проблем, как дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, в частности краевые задачи, разложение произвольных

---

[1] [ОНТИ, М.—Л., 1937]

функций по ортогональным функциям и т. п., физические запросы сыграли не последнюю роль. Но и обратно также несомненно, что только благодаря развитию этих математических дисциплин сделалось возможным углубленное понимание основных физических колебательных явлений.

До сравнительно недавнего времени интерес физиков, а также и техников главным образом, хотя и не исключительно, был сосредоточен на „линейных“ колебательных задачах, т. е. на таких, математическая формулировка которых приводила к линейным дифференциальным уравнениям, обыкновенным или в частных производных.

Относящийся сюда математический аппарат прекрасно разработан. Целый ряд результатов теории выкристаллизовался в определенную систему понятий и весьма общих положений. Благодаря тому, что физики этими понятиями и положениями постоянно оперируют, применяя их к конкретным задачам, они приобрели уже, если так можно выразиться, физическую наглядность. Для физика такое понятие, как логарифмический декремент, значение его в явлениях резонанса, такие принципы, как принцип суперпозиции и связанное с ним разложение в ряд Фурье, и вообще спектральный подход, наличие n гармонических колебаний в системе с n степенями свободы, несомненно, являются не только отвлеченными математическими понятиями и положениями; они связаны для него неразрывно с комплексом физических явлений. И это обстоятельство имеет существенное значение: оно дает возможность физику как бы инстинктивно, почти без вычислений разбираться в сравнительно сложных вопросах, легко обнаруживать связь между разнородными явлениями и, наконец, имеет — и это, может быть, самое важное — большую эвристическую силу.

Но в последнее время в ряде вопросов физики и техники выдвинулся новый класс колебательных проблем, для которых аппарат линейной теории колебаний оказался или недостаточным или даже совершенно неприменимым.

Существенную роль в привлечении интереса к проблемам нового рода сыграло введение электронных ламп, открывшее новые, весьма целесообразные пути в вопросах как генерации, так и приема электромагнитных колебаний. Чрезвычайно важное применение получили эти новые явления в радиотехнике. Все те громадные успехи, которые были ею достигнуты в наше время, стали возможны только благодаря электронным лампам. Но и физика приобрела исключительно ценное, часто незаменимое орудие исследования. Для всестороннего охвата всех относящихся сюда разнообразнейших явлений, а также большого числа важных интересных явлений в акустике и механике математический аппарат линейных дифференциальных уравнений абсолютно недостаточен. В его рамки заведомо не укладываются как раз те явления, которые здесь наиболее характерны и интересны. Дело в том, что дифференциальные уравнения, которые адэкватным образом описывают эти явления, заведомо нелинейны. Сообразно с этим мы говорим о „нелинейных“ системах.

Довольно естественно, что особенно вначале было известное стремление, трактуя эти новые, хотя явно и нелинейные проблемы, по возможности не слишком удаляться от столь привычной линейной терминологии и столь же привычных линейных математических методов, приспособляя их так или иначе к новым обстоятельствам. При этом приходилось добавлять придуманные дополнения, без чего нельзя было, конечно, получить нужных ответов.

Такое „линеаризирование“ всегда искусственно, редко бывает полезным, большей частью вообще ничему не научает, а иногда и прямо вредно. И действительно, в литературе известны ошибочные утверждения, вошедшие даже в учебники, обусловленные таким незаконным линеаризированием.

Другой путь для овладения нелинейными проблемами, о которых идет речь, состоит в том, что каждая конкретная проблема трактуется уже как нелинейная, но индивидуально, с применением того или иного наиболее к ней подходящего метода и с учетом ее специфических особенностей. Этот путь, конечно, сам по себе правилен. Идя по нему, ряд исследователей получил весьма ценные результаты, сохранившие все свое значение и в настоящее время. Сюда в первую очередь нужно отнести работы ван-дер Поля, сыгравшие существенную роль в развитии интересующей нас области. И в настоящее время иногда удобно в том или ином случае итти по этому пути.

Но не говоря уже о том, что фактически такие решения отдельных задач не имели достаточного математического обоснования, весь этот путь в качестве, так сказать, большой дороги вряд ли целесообразен, так как он не ведет к установлению тех общих точек зрения, той базы, как математической, так и физической, которая необходима для достаточно полного и всестороннего охвата области нелинейных колебаний в известной нам уже ее части и, что еще важнее, для успешного дальнейшего планомерного развития.

А между тем основы математического аппарата, адэкватного не только отдельным задачам, но и всему циклу проблем нелинейных колебаний, которые нас интересуют, существуют давно. Они заложены в знаменитых работах Пуанкаре и Ляпунова, работах, преследовавших, правда, совершенно другие цели. На связь этих работ с нашими проблемами колебаний впервые обратил внимание один из авторов настоящей книги. Исследования авторов, несомненно, сыграли весьма существенную роль в приспособлении этого аппарата для изучения колебательных проблем. Ими же были применены эти методы для решения целого ряда новых конкретных задач. Их же работами подведена солидная математическая база и под результаты других авторов, результаты, как уже сказано, весьма ценные, но разрозненные и до этих пор такой базы не имевшие.

Таким образом, основы необходимого общего математического аппарата существуют. Аппарат этот существенно труднее и сложнее, чем линейный, и это лежит в природе вещей. Физические процессы, охватываемые им, значительно сложнее и разнообразнее линейных процессов, являющихся лишь весьма узким частным случаем. Нужно сказать, что в настоящее время нелинейный аппарат еще гораздо менее разработан, чем линейный, и, конечно, гораздо менее привычен. Но много уже сделано, общие черты теории, которые дают направление дальнейшему развитию, существуют, существует и рабочий аппарат, дающий возможность планомерно решать ряд конкретных задач нелинейной теории колебаний.

Дальнейшее естественное развитие общей теории на этой базе будет способствовать, по моему мнению, тому, что и в сложной области нелинейных колебаний в еще большей мере, чем это уже имеет место сейчас, выкристаллизуются свои специфические общие понятия, положения и методы, которые войдут в обиход физика, сделаются привычными и наглядными, позволят ему разбираться в сложной совокупности явлений и дадут мощное эвристическое оружие для новых исследований.

Физик, интересующийся современными проблемами колебаний, должен, по моему мнению, уже теперь участвовать в продвижении по этому пути. Он должен овладеть уже существующими математическими методами и приемами, лежащими в основе этих проблем, и научиться их применять.

Известным препятствием служило до сих пор почти полное отсутствие[1] в нашей и, насколько я знаю, и в заграничной литературе соответственного систематического изложения общих основ теории нелинейных колебаний и их физических применений, рассчитанного на физиков. Настоящая книга стремится заполнить этот пробел. Основная цель ее — ввести читателя в круг идей, лежащих в основе теории нелинейных колебаний и ее применений. Центр тяжести изложения лежит сообразно с этим не в решении возможно большего количества отдельных задач, а в выяснении основных положений и основных методов, адэкватных для области нелинейных колебаний в целом. Это, конечно, не значит, что в книге не уделено достаточного внимания конкретным проблемам. Наоборот, разбору таких проблем, и в первую очередь проблем, с которыми физику и технику постоянно приходится иметь дело, уделяется довольно много места. Но эти проблемы рассматриваются под углом зрения общих положений, они являются примерами и иллюстрациями применения общих методов. Иногда для выяснения той или другой стороны теоретических рассуждений авторы пользуются несколько искусственными примерами, но зато выпукло оттеняющими эти рассуждения.

Изложение авторов, базирующееся, как было упомянуто, на работах Пуанкаре и Ляпунова, обладает одной весьма положительной чертой: в математической трактовке физических проблем часто бывает так, что цепь математических рассуждений, связывающая исходные уравнения с окончательными результатами, допускающими физическую интерпретацию, весьма длинна, причем отдельные ее звенья такой интерпретации не поддаются. Авторы удачно сумели воспользоваться тем обстоятельством, что излагаемые ими методы позволяют придать физический смысл и отдельным звеньям этой цепи. Это значительно оживляет теорию и облегчает ее усвоение.

В вопросах принципиальных авторы, там где это целесообразно, выходят из рамок собственной темы. Сюда относятся, например, довольно подробный интересный разбор вопросов идеализации физических проблем, вопросы, связанные с ролью начальных условий; сюда же может быть отнесен ряд рассуждений, относящихся к так называемым релаксационным колебаниям.

---

[1] Лишь недавно вышла оригинальная монография академика Н. М. Крылова и д-ра Н. Н. Боголюбова — „Новые методы нелинейной механики“. ОНТИ, 1935.

Достаточно обстоятельно излагаются методы так называемого качественного интегрирования, дающие ряд ценных указаний относительно протекания колебательных процессов. По моему мнению, авторы поступают правильно, иллюстрируя эти методы на хорошо известных и привычных случаях линейных систем, где, конечно, применимы более простые, прямые методы. Важному вопросу о существовании периодических решений уделено соответственное внимание. Детально изложены вопросы, относящиеся к проблемам с „малой“ нелинейностью, проблемам, имеющим в рассчетном смысле чрезвычайно важное значение. Подробно разобран вопрос об устойчивости.

Все эти проблемы рассмотрены применительно к наиболее простому случаю системы с одной степенью свободы без внешней силы (так называемые автономные системы). То же относится и к разобранным в книге конкретным задачам и примерам. Эти вопросы изложены с большой полнотой; но читатель не найдет в книге ни задач, связанных с воздействием внешней силы, ни задач, относящихся к системам с несколькими степенями свободы и к системам с распределенными параметрами. Между тем все эти проблемы несомненно важны и интересны. Однако если принять во внимание, как велик объем всего материала, относящегося к нелинейным колебаниям, с одной стороны, и основную цель книги — ввести читателя в круг общих идей и методов — с другой, то выбор авторов станет понятным. Автономные системы с одной степенью свободы — наиболее простые системы, и они в то же время являются теми элементами, которые лежат в известном смысле в основе всех более сложных систем.

Теоретический аппарат, необходимый для рассмотрения этих последних, базируется на тех общих положениях, которые изложены здесь и представляют собой его дальнейшее развитие. Таким образом, хотя в настоящей книге разобран сравнительно узкий цикл вопросов, но по существу она является введением в общую теорию нелинейных колебаний.

Я не сомневаюсь, что свежая и оригинальная книга, предлагаемая вниманию читателя, будет ценным вкладом в нашу литературу по колебаниям. Следует пожелать, чтобы авторы продолжили свой труд и на основе изложенной здесь общей теории дали бы в дальнейших томах разбор и тех проблем, которые в настоящую книгу не вошли.

63

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН [1]

[Изв. Академии Наук СССР (сер. физ.), № 4, 525—538, 1938]

Первая часть доклада посвящена обсуждению некоторых вопросов, касающихся интерференционных явлений вообще.

Во второй части рассматривается интерференционный метод исследования распространения электромагнитных волн. Затем излагаются некоторые проведенные в практических условиях опыты, касающиеся измерения скорости распространения электромагнитных волн над морем и измерения расстояния между двумя радиостанциями.

В течение последних лет в Ленинградском индустриальном институте, а также в Физическом институте АН разрабатывался, под общим руководством Н. Д. Папалекси и моим, интерференционный метод исследования распространения электромагнитных волн. Наряду с лабораторной разработкой производились исследования и испытания в действительных условиях. За это время накопился материал, относящийся как к действию самого метода и к той аппаратуре, которой мы пользуемся для его проведения в жизнь, так и к испытанию метода в практических условиях.

Я хочу кратко изложить результаты этих работ.

Для того чтобы была ясна цель, которую мы себе ставим при интерференционном методе, позвольте мне сделать несколько предварительных замечаний.

Всякая радиопередача состоит по существу из трех процессов. Эти процессы, конечно, очень тесно связаны друг с другом, но

---

[1] [Доклад, сделанный на Общем Собрании Академии Наук СССР 28 апреля 1938 г.].

каждый из них все-таки довольно четко очерчен. Первый процесс относится к созданию, или, как мы говорим, к генерации, электромагнитных колебаний; второй относится к их распространению и, наконец, третий охватывает прием. Только зная все эти этапы, мы можем сказать, что овладели радиопередачей. Самый трудный вопрос для исследования — это второй вопрос, вопрос о распространении. И не удивительно, потому что распространение протекает в чрезвычайно разнообразных и очень сложных условиях, часто на протяжении тысяч и многих тысяч километров. Здесь очень трудно учесть все происходящие явления.

Уже давно стараются теоретически подойти к этому вопросу, но как раз здесь теория ни в коей мере не может заменить опыт. Во-первых, теория в настоящее время довольно громоздка, и выводы ее еще не находятся в таком состоянии, чтобы они могли быть непосредственно применены для числовых расчетов, которые требуются при опытном исследовании. Но гораздо более важное обстоятельство заключается в том, что эта теория, как впрочем и всякая теория, исходит из упрощения, исходит из идеализации действительности. В интересующем нас случае математические трудности настолько велики, что эту идеализацию пришлось провести весьма далеко. Например, теория принимает, что Земля всюду однородна и что граница ее — математическая плоскость или сфера. Это очень далеко от реальных условий, и только опыт может дать ответ на вопрос о том, насколько выводы такой теории вообще пригодны, что́ можно из нее получить для действительных условий. Поэтому крайне важно иметь метод, позволяющий экспериментально исследовать те величины, которые характеризуют распространение. Одной из таких существенных величин является скорость распространения волн. Интерференционный метод ставит себе задачей измерить эту скорость, но вместе с тем позволяет подойти к решению и другой задачи. Дело в том, что, зная расстояние между двумя отдаленными друг от друга пунктами, мы можем при помощи указанного метода определить скорость; но и обратно, если для известных условий мы определили скорость, то мы можем измерить расстояние между двумя пунктами, а эта задача имеет уже непосредственное практическое значение. Для ряда областей народного хозяйства очень важно уметь определить расстояние между двумя точками. Эти вопросы существенны, например, в геодезии, гидрографии, кораблевождении и т. д.

Чисто схематически метод, о котором идет речь, заключается в следующем: на одном из пунктов — назовем его пунктом *А* — устанавливается генератор колебаний. Как генератор он в сущности ничем не отличается от наших радиовещательных станций, только во время нашей работы он ведет себя так, как ведет себя радиовещательная станция во время пауз диктора, т. е. он излучает незатухающие колебания с постоянной амплитудой. Эти колебания, будучи излучены передатчиком, распространяются во все стороны, достигают второго пункта *Б*, отражаются от него и частично возвращаются к передатчику. Мы измеряем — в этом заключается сущность метода — запаздывание (или соответствующую разность фаз), которое претерпевает электромагнитная волна на пути от *А* до *Б* и обратно. Но это запаздывание, т. е. время, за которое электромагнитная волна проходит от *А* до *Б* и обратно, равно, очевидно, двойному расстоянию *АБ*, деленному на скорость распространения. Отсюда ясно, что, измеряя это запаздывание, мы можем, если известно расстояние *АБ*, определить скорость или, если известна скорость, определить расстояние *АБ*.

Конечно, это только голая схема, это еще не метод, а теперь мне предстоит рассказать, как эта схема претворяется в жизнь.

Несколько слов по поводу названия „интерференционный метод“. В оптике мы называем интерференционными явлениями те явления, которые наблюдаются, когда два или несколько световых пучков, исходящих из одного источника, соединяются вместе, предварительно пройдя пути различной длины. При совместном их действии получаются, в зависимости от той или другой величины запаздывания отдельных пучков, то взаимное усиление, то ослабление, различные для различных цветов. Ньютоновы кольца — один из простых примеров такого рода явлений. В нашем методе мы имеем дело с двумя колебаниями, из которых одно запаздывает по отношению к другому. По аналогии с оптикой такого рода методы и, в частности, тот, о котором идет речь, тоже принято называть интерференционными.

Но прежде чем перейти к изложению метода, разрешите сделать отступление и сопоставить используемые нами интерференционные явления в области радио с интерференционными явлениями в области оптики. Поскольку дело идет о технической стороне вопроса, непосредственной необходимости в таком сопоставлении нет в том смысле, что радиотехника может решать свои конкретные практические задачи без всякого заимствования из оптики.

Однако со времен Максвелла и его знаменитой электромагнитной теории света и особенно опытов Герца физики не сомневаются в том, что природа тех волн, которыми работает радио, и природа оптических волн — одна и та же. И здесь и там мы имеем дело с электромагнитными волнами. Отличие заключается только в разном порядке их длины: в то время как в видимом спектре длина волны порядка $5 \cdot 10^{-5}$ см, в среднем диапазоне радиоволн она равна десяткам и сотням метров.

Ввиду общности природы физических явлений, лежащих в основе оптики, с одной стороны, и радио, с другой, — понятна та большая роль, которую играют для исследовательской работы в каждой из этих областей аналогии, взятые из другой. Несомненно, что Герц в постановке своих опытов широко пользовался оптическими представлениями. Сама терминология, которой мы пользуемся в радио сейчас, во многих случаях заимствована из оптики. Так, мы говорим о монохроматичности, мы говорим об интерференции, о когерентности, об оптической длине пути и т. д. Все эти термины взяты из оптики.

Поэтому интересно сопоставить эти две области. Это желательно сделать и еще по одной причине. Мне кажется, что иногда не видят аналогий там, где они есть, но случается, что видят аналогии там, где их нет. Сказать об этом несколько слов, быть может, представляет некоторый интерес.

Первый вопрос, которого я хотел бы коснуться, относится к распространению электромагнитных волн вообще. Я только что сказал, что существует теория распространения электромагнитных волн вдоль земной поверхности. Эта теория была создана физиками, но соответствующие исследования были вызваны нуждами радиотехники. Впервые она была в сущности создана Ценнеком и Зоммерфельдом лет тридцать тому назад. Эта теория, как я уже сказал, весьма громоздка. Между тем уже больше века существуют формулы, относящиеся к распространению оптических волн, причем интересно, что обе теории исходят из одной и той же идеализации, а именно — обе принимают наличие двух однородных сред, ограниченных строгой плоскостью (воздух — земля в радио и, например, воздух — стекло в оптике). Но тогда невольно возникает вопрос, зачем понадобилась новая теория, если мы знаем, что никакой разницы в природе электромагнитных волн в узком смысле, т. е. радиоволн, и волн оптических, нет. Зачем понадобилась новая, более сложная, более громоздкая теория радиоволн, когда существовала больше века сравнительно простая теория распространения световых волн? Ответ на это заключается в следующем. Обе теории хотя и идеализировали проблему распространения одинаково, тем не менее трактовали два различных случая, причем без явного упоминания (особенно в оптике) об этом обстоятельстве. Дело в том, что обстановка опытов в обеих областях различна и теория, может быть даже не совсем сознательно, к этому приспособлялась. В радиотехнике генератор — источник радиоволн — находится в большинстве случаев очень близко от поверхности раздела обеих сред, или, проще, очень близко от поверхности Земли. Что значит близко? Масштабом служит длина волны, которая, например, для диапазона, с которым мы работаем, порядка сотни метров. В оптике длина волны порядка нескольких стотысячных сантиметра. Вполне понятно, что в обычных оптических опытах источник света всегда находится „далеко" от поверхности раздела, например от поверхности призмы. Поэтому естественно, что случай „близкого" источника оптические теории игнорировали. А между тем явления протекают существенно различно, имеем ли мы дело с „близким" или „далеким" источником волн.

Но если так, то невольно возникает вопрос: если мы в оптике нарочно поместим источник света на расстоянии, скажем, 0.00005 см от поверхности призмы, можем ли мы ожидать, что действительно получим отклонение от обычных оптических законов, получим явления, схожие с наблюдаемыми в радиотехнике. Такие опыты были сделаны, и они подтвердили только что приведенные рассуждения.[1]

Второй вопрос, который я хотел бы затронуть, относится к монохроматичности испускаемых колебаний. В оптике известно, что не существует строго монохроматичных световых колебаний. На языке акустики, на музыкальном языке, это значит, что не существует источников, которые давали бы музыкальный тон одной строго определенной высоты. То обстоятельство, что в оптике нельзя создать монохроматический свет, т. е. свет одного строго определенного цвета, име т свои глубокие причины. В конечном счете это объясняется статистической природой физических явлений. Для интерференционных опытов факт отсутствия в природе строго монохроматического света имеет принципиальное значение. Мы знаем из опыта, например, что нельзя получить интерференционные

[1] [См. том I, статью 20.]

явления от двух независимых источников. Нельзя также получить интерференцию и при очень большой разности хода обоих лучей. Люммер и Герке доходили до разности хода в несколько десятков сантиметров. Значительно дальше итти нельзя. Оба эти факта, т. е. невозможность получения интерференционной картины, во-первых, от двух независимых источников и, во-вторых, при очень большой разности хода, объясняются именно отсутствием монохроматичности. Часто этому противопоставляют возможность получения строгой монохроматичности колебаний в радиотехнике и в акустике. Правда, все знают, что практически это трудно осуществить, но объясняют это именно недостатком практического умения и считают, что чем совершеннее будут опыты, тем больше мы будем приближаться к идеалу строгой монохроматичности. Я думаю, что это не так. Я думаю, что п р и н ц и п и а л ь н о здесь дело обстоит так же, как и в оптике. Мы принципиально не можем получить совершенно строго монохроматических колебаний ни в радио, ни в акустике. Между прочим Планк по этому поводу держится, повидимому, другого мнения, по крайней мере по отношению к акустике. В вопросе о монохроматичности он противопоставляет акустику оптике. Я думаю, что это неверно.[1]

Но тогда может возникнуть следующий вопрос. Известно из опыта, что от двух независимых источников в радио интерференционные явления получить можно, тогда как в оптике этого сделать нельзя. Причиной такой невозможности в оптике является, как указано выше, отсутствие монохроматичности. С другой стороны, как я только что сказал, монохроматичности нет и в радио. Мы наталкиваемся здесь как будто бы на противоречие. Это противоречие однако легко разрешается. Дело в том, что интерференционная картина в радио, о которой только что шла речь, не строго неподвижна, а изменяется, пробегая все стадии, однако настолько медленно, что глаз и аппараты могут за нею следить. Если теперь учесть разницу масштабов в радио и оптике, в данном случае масштабов времени, выражающуюся в том, что секунда в радио соответствует примерно одной стомиллионной секунды в оптике, то ясно, что чрезвычайно быстрая, беспорядочная смена отдельных интерференционных картин ведет в оптике к полному смазыванию, т. е. по существу к отсутствию картины вообще. Мы видели далее,

[1] Отмечу интересное теоретическое исследование по этому вопросу, выполненное в Горьковском государственном университете под руководством А. А. Андронова. [См. И. Б е р ш т е й н. ДАН, **20**, 11, 1938 и ЖТФ, **11**, 305, 1941.]

что в оптике интерференционная картина пропадает, если разность хода пучков достаточно велика. Причиной и здесь является отсутствие строгой монохроматичности. Я полагаю, что то же явление будет и в радио. Но только опять ввиду громадной разницы в масштабах — в данном случае пространственных — „соответственные" расстояния будут здесь порядка ста тысяч и миллионов километров. Естественно, что таких опытов никто не делал. Но вряд ли можно сомневаться в принципиальной правильности сделанного утверждения. Уже из приведенных примеров виден далеко идущий параллелизм между явлениями оптическими и явлениями в области собственно электромагнитных колебаний, правда замаскированный иногда громадным различием соответственных масштабов.

Но проведением таких аналогий нельзя злоупотреблять. Здесь нужна известная осторожность, и я позволю себе на этом вопросе, имеющем принципиальное значение, остановиться несколько подробнее.

Отношение между электродинамикой Фарадея — Максвелла, включающей в себя и учение об электромагнитных волнах, с которыми имеет дело радио, и оптикой, приблизительно такое же, как между классической механикой Ньютона и механикой элементарных частиц, атомов и молекул. Квантовая механика и там и здесь во многом внесла ясность в эти соотношения. Она порвала с традицией или, вернее, с предрассудком, согласно которому законы, действующие в макромире, могут быть просто перенесены в микромир. Порвав с этой традицией, квантовая механика в корне изменила наши физические воззрения. Я хотел бы сразу подчеркнуть, что квантовая механика не есть плод спекуляции отдельных физиков; она создалась ввиду железной необходимости объяснить громадный накопившийся за последнее время опытный материал, абсолютно не укладывающийся в рамки классической теории и нашедший себе замечательное обоснование в теории квантов.

Я не могу здесь сколько-нибудь подробно остановиться на этом фундаментальном для современной физики вопросе, но все же приведу одно основное положение квантовой теории. Однако прежде чем его формулировать, я хотел бы указать на следующее.

Классическая физика молчаливо предполагала, что величины, с которыми она имеет дело, могут быть измерены без того, чтобы сам акт измерения или наблюдения нарушил измеряемую систему. Или точнее: классическая физика принимала, что такое нарушение принципиально может быть сделано сколь угодно малым и может быть учтено. Это предположение весьма существенно. На нем по существу базируются основные законы классической физики. Возьмем простой пример. Законы механики учат тому, как, зная или, лучше сказать, измеряя положение и скорость материальной частицы в данный момент времени, найти при тех или иных условиях положения и скорости частицы в последующие моменты. Но такая постановка вопроса имеет смысл только в том случае, если акт измерения начальных величин не вносит существенных, не поддающихся учету возмущений. В противном случае всякое предсказание того, как будет итти явление дальше, является иллюзорным, и сами законы, формулирующие такое предсказание, теряют смысл.

Основное положение квантовой физики, о котором я выше говорил, заключается в утверждении, что возмущения, которые вносятся актом измерения, всегда имеют конечную величину. Существует нижний предел для возмущений, вносимых актом измерения, понизить который принципиально нельзя никакими средствами. И эти возмущения не поддаются ни контролю, ни учету. Ни ловкость оператора, ни дальнейшие технические усовершенствования здесь ничего не могут сделать.

Правда, этот предел ничтожен по сравнению с теми величинами, с которыми мы имеем дело в макромире. И поскольку это так, и лишь поскольку это так, законы классической физики в макромире могут быть применяемы. Но если перейти к микромиру, то там, как оказывается, эти неизбежные возмущения, вообще говоря, существенно нарушают систему. Поэтому классические законы и, более того, некоторые понятия классической физики, в том числе частично понятие измеряемости, теряют здесь содержание.

Я повторяю — это основное положение современных квантовых воззрений. Если оно неправильно, то падает вся квантовая механика.

В частности, в нашем методе мы пользуемся измерениями разных величин. Мы должны измерять частоту колебаний в генераторе, фазу и т. д. Конечно, наши измерения вносят возмущение, но здесь, в макроэлектродинамике, мы имеем дело с такими большими величинами, например с такими огромными энергиями, что этими возмущениями свободно можно пренебречь. Здесь наши измерения имеют полный смысл.

Но если бы мы пожелали перенести наш метод в оптику, то все эти измерения нужно было бы производить на генераторе оптических колебаний. Таким генератором в оптике является атомная система, а для нее, по указанной выше причине, наши измерения неизбежно существенно нарушили бы всю систему и потеряли бы всякий смысл.

Поэтому перенос целого ряда схем, в том числе и тех, с которыми мы имеем дело, из одной области в другую принципиально невозможен.

Я хотел бы, чтобы меня правильно поняли. То, что фактически такой перенос неосуществим, что мы при этом наталкиваемся на практически непреодолимые препятствия, это, конечно, сказал бы и представитель классической физики. Но еще лет 30—40 назад, в период расцвета классической электронной теории, всякий физик отрицал бы то принципиальное различие между макро- и микромиром, которое признается современными воззрениями.

Последнее замечание общего характера относится к вполне конкретному, имеющему практическое значение вопросу. Все интерференционные явления, с которыми мы имеем дело в оптике, позволяют измерять только длину волны, а не скорость распространения. Это справедливо и для всей спектроскопии с ее огромными точностями.

Определить скорость света из оптических интерференционных явлений нельзя, потому что в оптике у нас нет непосредственных методов для определения частоты колебаний ν. Наоборот, эту последнюю величину мы определяем косвенно из длины волны λ и измеренной совершенно независимыми, отличными от интерференционного, методами скорости распространения v по формуле

$$\nu\lambda = v.$$

В радио дело обстоит иначе. Одним из самых по существу элементарных и в то же время весьма точных измерений является именно измерение частоты. В настоящее время точность этих измерений — порядка одной десятимиллионной самой величины и даже выше. Таким образом, в радио, в частности в дискутируемом методе, мы можем в связи с указанным измерением частоты определить из интерференционных опытов и интересующую нас скорость распространения электромагнитных волн.

Позвольте мне теперь после этих общих замечаний вернуться к самому интерференционному методу и изложить его основные черты.

Итак, на передающей станции, находящейся в пункте A, имеется передатчик, генерирующий колебания. Излучаемые им волны отразятся от пункта *Б* и возвратятся обратно в *А*. Мы должны измерить запаздывание волн на этом пути. Но если мы ограничимся отражением без специального усиления в отражательном пункте, то интенсивность возвратившихся волн будет ничтожна. Такое устройство для наших целей было бы мало пригодно.

Поэтому нам прежде всего нужно усилить отраженные колебания. Способы для этого существуют. На пункте *Б* устанавливается свой собственный генератор, действие которого управляется волнами, приходящими из *А*. Излученные этим генератором волны играют роль „отраженных" волн, причем теперь мы одновременно имеем и громадное усиление. Но одно усиление не решает вопроса. Дело здесь обстоит так: нам надо измерить запаздывание возвращающихся колебаний, или, другими словами, разность фаз между ними и колебаниями в передатчике в пункте *А*. Для этого оба эти колебания в *А* надо разделить, т. е. пустить по различным каналам. Если же оба колебания имеют одинаковую частоту, т. е. одинаковую высоту тона, сделать это будет чрезвычайно трудно. Хотя мы усилили отражение, но все же интенсивность отраженных колебаний при мало-мальски больших расстояниях будет мала по сравнению с прямыми колебаниями, генерируемыми передатчиком в *А*. Отраженные колебания будут заглушаться этими последними, и выделение их будет вряд ли осуществимо. Поэтому — и это одна из основных черт метода — мы прибегаем к трансформации частоты при отражении в пункте *Б*.

Приходящее в *Б* колебание таким образом не только усиливается, но и трансформируется по частоте, или, другими словами, отраженная волна настроена на отличный от приходящей волны тон.

Есть разнообразные способы для осуществления такой трансформации. Но здесь есть известные затруднения, которые нужно преодолеть, потому что требования, которые мы ставим при трансформации, довольно жесткие. Во-первых, мы должны требовать, чтобы выбранное при трансформации определенное отношение частот прямого и отраженного колебаний сохранялось точно, в частности при всех тех манипуляциях, которые во время измерений приходится делать. Для этого требуется специальное устройство. Во-вторых, наше устройство должно учитывать следующие обстоятельства. При усилении и трансформации в пункте *Б* в самой аппаратуре неизбежно происходит свое, так сказать, внутреннее запаздывание, или, что то же самое, некоторый сдвиг фаз. Это запаздывание присоединяется к тому, которое возникает на пути от *А* до *Б* и обратно. Нас интересует как характерное для распространения только это последнее. Запаздывание же в аппаратуре является паразитным запаздыванием. Присоединяясь к основному, оно может свести на-нет все измерение. Поэтому необходимо устроить так, чтобы указанное паразитное запаздывание могло быть самостоятельно учтено и тем самым, так сказать, обезврежено. Это требует дополнительного устройства.

Теперь я должен сказать несколько слов о выборе отношения, в котором трансформируются частоты. Мы уже знаем, что оно должно быть отлично от единицы. Первое, что может притти в голову,— это взять отношение два к одному, т. е. октаву. Однако оказывается, что при этом выборе взаимодействие, которого мы хотим избежать, весьма трудно устранимо. Причины этого ясны, и я не буду на этом останавливаться. От октавы пришлось отказаться. По целому ряду соображений, перечислять которые здесь не стоит, мы остановились на отношении трем к двум, т. е. на квинте. Иными словами, частота колебаний, испускаемых передатчиком в *А*, относится к частоте колебаний, излучаемых *Б*, как три к двум.

При пользовании колебаниями разных частот возникает один вопрос, о котором я хочу упомянуть. В технике он до сих пор почти не ставился, потому что, насколько я знаю, использование фазовых отношений между колебаниями с различной частотой в практике — прием, до сих пор мало употребительный. Этот вопрос уточнил Е. Я. Щеголев. Укажу на один существенный для нас момент. Я все время говорил о том, что мы измеряем запаздывание двух колебаний, но я употреблял и другой термин — разность фаз между колебаниями. То, что имеет для нас значение, что нам нужно знать — это запаздывание. Какое же соотношение между запаздыванием и разностью фаз? Дело здесь обстоит совсем просто. Разность фаз есть не что иное, как запаздывание, но только выраженное не в обычных единицах времени, не в секундах; разность фаз — это число, выражающее запаздывание, если в качестве единицы взять продолжительность одного колебания.[1] Это определение не требует пояснения, если мы имеем дело с колебаниями одинаковой частоты. Но если, как в нашем случае, частоты колебаний различны, то нужно

[1] Обычное определение разности фаз отличается от указанного множителем 2π.

условиться, продолжительность какого из двух колебаний мы примем за единицу. Мы кладем в основу продолжительность более быстрого колебания. Дальнейшее уточнение понятия разности фаз в нашем случае не представляет ничего сколько-нибудь сложного. Введя соответственные множители, можно обращаться с разностью фаз двух различных колебаний аналогично тому, как это делается в обычном случае равных частот.

Теперь мы можем перейти к действию всей схемы в целом. Итак, антенна на пункте *А* излучает волны определенной частоты. Эти волны, достигая пункта *Б*, возбуждают в его антенне колебания, которые здесь усиливаются и трансформируются. Прежде всего нужно учесть сдвиг фазы, происходящий при этом процессе. Для этого сделано определенное устройство, последним звеном которого является катодный осциллограф. На его экране появляются известные фигуры Лиссажу. Эти фигуры имеют в зависимости от сдвига фаз (разности фаз) различную форму. Каждой разности фаз соответствует определенная фигура и обратно, но это положение справедливо с известной оговоркой, о которой речь будет итти далее. Вымеряя фигуру, мы судим о том сдвиге в фазе, который произошел в аппаратуре пункта *Б* и который мы выше назвали паразитным. Но теперь, когда мы знаем его, он перестает быть помехой, так как может быть учтен.

Усиленные и трансформированные колебания излучаются антенной в *Б* и принимаются антенной пункта *А*. Здесь находится устройство с катодным осциллографом, совершенно такое же, как и в пункте *Б*, позволяющее измерить разность фаз между уходящими и вернувшимися колебаниями. Но эта разность фаз и есть та, которую мы хотим измерить. Она ведь определяет именно искомое запаздывание на пути *АБА*, а тем самым, как мы видели, и скорость распространения или расстояние.

Но здесь нужно сделать оговорку, о которой я упомянул выше. Катодный осциллограф, как и всякий другой аппарат, который может быть использован для измерения разности фаз, измеряет эту разность, или, что эквивалентно, запаздывание, несколько своеобразно. Все эти аппараты при измерении скидывают со счета целое число колебаний в случае равенства частот и целое число полуколебаний в нашем случае. Это значит, что, вымеряя фигуру Лиссажу, мы можем сказать лишь следующее: разность фаз равна, скажем, одной четверти или вообще какой-то дроби, меньшей половины колебания, плюс некоторое целое число полуколебаний. Какое это целое число,

13*

фигура Лиссажу нам не указывает, а между тем нам нужно знать всю разность фаз. Существует, однако, прием, позволяющий определить полную разность фаз. Этот прием между прочим был применен Эплтоном в его интерференционном методе, цель которого была другая, чем у нас, а именно — исследование ионосферы. Метод Эплтона имеет некоторые черты, общие с нашим, но естественно, что, преследуя другую цель, он существенно от него отличен. Вот в чем состоит указанный прием.

Предположим, что все устройство находится в действии. На экране осциллографа устанавливается какая-то определенная фигура Лиссажу, и мы, как указано выше, точно знаем тогда, что искомое запаздывание равно некоторой дробной части колебания — назовем ее разностью фаз ψ_1 — плюс неизвестное целое число полуколебаний. Теперь мы начинаем плавно изменять рабочую частоту колебаний. При этом меняется и фигура Лиссажу. Мы продолжаем плавное изменение, например увеличение частоты, до тех пор, пока фигура Лиссажу приобретает свою первоначальную форму. Это очевидно значит, что разность фаз увеличилась на одно ц е л о е полуколебание, на одно потому, что в промежутке фигура Лиссажу все время имела вид, отличный от первоначального. Продолжаем изменять частоту до некоторого определенного значения, заданного кварцевым стандартом, и пусть при этом фигура Лиссажу, скажем, h раз проходит через первоначальную форму. Тогда мы знаем, что неизвестное нам целое число полуколебаний увеличилось на h, а это позволяет нам определить само неизвестное число.

Позвольте выразить только что сказанное формулой. В первом положении разность фаз была ψ_1. Это значит

$$\frac{2R}{v\tau_1} = \psi_1 + \frac{n}{2}, \tag{1}$$

где R — расстояние между A и $Б$, v — скорость распространения колебаний, τ_1 — период колебаний в первоначальном положении, n — неизвестное пока целое число. Изменяя плавно частоту, или, что то же самое, период, мы остановились на периоде τ_2. Тогда из вышесказанного следует

$$\frac{2R}{v\tau_2} = \psi_2 + \frac{n+h}{2}, \tag{2}$$

где h нам известно. Из (1) и (2) можно уже непосредственно определить R/v, а затем, например, и R, так как v и τ_2 мы знаем, а ψ_2 определяется фигурой Лиссажу в конечном положении.

Теперь мы имеем все, что нужно для нашей цели. Резюмируя, мы можем описать процесс измерения следующим образом.

В пункте *А* включается передатчик, в *Б* появляется фигура Лиссажу, определяющая сдвиг фазы в *Б*. В *А* появляется фигура Лиссажу, определяющая искомое запаздывание. Затем в пункте *А* приступают к плавному изменению частоты (поворотом ручки). В *Б* следят за тем, чтобы здесь фигура оставалась неизменной. При этом фигура в *А* непрерывно плавно меняется. Частоту меняют до определенного значения, считая при этом, сколько раз фигура Лиссажу прошла через свое первоначальное положение. Затем вымеряют форму фигуры Лиссажу, устанавливающуюся после того, как изменение частоты закончено. Только что упомянутых данных достаточно для определения скорости распространения или расстояния.

Полное измерение в настоящее время длится 4—5 мин.

После того как я изложил, хотя и очень схематично, общие принципы метода, позвольте в заключительной части коротко остановиться на полученных результатах.

Я уже указывал на то, что перед нами две задачи: первая — измерять скорость распространения электромагнитных волн и вторая — измерять в условиях, в которых эта скорость определена, расстояние между двумя пунктами.

Относительно первой задачи мне сейчас нечего прибавить. Относительно второй я хотел бы сказать следующее. Как я уже отметил, есть ряд областей народного хозяйства, для которых эта задача является практически важной. Существуют, конечно, и другие методы, широко применяемые для определения расстояний.

Методы, которыми широко пользуются, это оптические методы. Они доведены до большой степени совершенства, и с ними наш метод конкурировать не собирается. Но применение оптических методов ограничено. Они не применимы, если между пунктами нет видимости в прямом смысле этого слова, например при мгле, при тумане или при настолько большом расстоянии между ними, что уже сказывается кривизна Земли. При расстоянии в 100 км высота одного из пунктов для прямой видимости должна быть не меньше 800 м и т. д. Во всех этих случаях оптические методы отказываются служить. Астрономические методы связаны с возможностью наблюдать Солнце или звезды: при закрытом облаками небе — а например, в условиях севера это бывает очень часто и в течение продолжительного времени — астрономическими методами пользоваться тоже нельзя. Радиодальномеры, вообще говоря, свободны от этих недостатков. Ими можно производить измерения и в тумане и при ряде других условий, когда прямой видимости нет. Поэтому они могут быть применены там, где оптическими методами пользоваться нельзя.

Нужно отметить, что были предложены и другие методы для измерения расстояний при помощи электромагнитных волн. Я не могу здесь на них останавливаться. Укажу только на употребляемый уже давно в практике метод пеленгации. Этот метод определяет не расстояние, а направление прямой, соединяющей точку, местоположение которой хотят определить, с некоторой опорной точкой. Для того чтобы из показаний пеленгатора определить расстояние, нужно иметь базис из двух опорных точек. Кроме того, этот метод мало точен, и точность его тем меньше, чем дальше от базиса находится определяемая точка. Между тем точность интерференционного метода с увеличением расстояния увеличивается. Будучи мало выгоден для малых расстояний, он становится более выгоден для больших. Наконец нужно отметить, что оба метода можно комбинировать, и тогда достаточно одного опорного пункта для определения искомого местоположения. Критическое сопоставление различных методов дает основание считать, что есть области, в которых интерференционный метод имеет свои преимущества.

Для того чтобы после лаборатории перейти к практическим испытаниям, целесообразно было выбрать условия наиболее простые, отвечающие тем предпосылкам, которые легли в основу вышеприведенных рассуждений, например отсутствие дисперсии, отсутствие искажающих отражений и т. д.

Самым благоприятным в этом смысле является распространение над морем. Основные измерения и относятся, как будет видно из дальнейшего, к этому случаю. Однако по ряду чисто практических соображений первые опыты были сделаны на Кавказе, между пунктами, лежащими на вершинах гор, в районе Пятигорья.

Были выбраны 4 дистанции, причем такие, расстояния между конечными пунктами которых были известны из геодезических измерений. Задача заключалась в определении скорости. Я не буду останавливаться на деталях этих опытов. Естественно конечно, что пришлось пройти через „детские болезни“. Ведь это был первый опыт в практических условиях. Полученные из серии наблюдений точности были порядка 1%. С этой точностью скорость оказалась равной скорости света. Одновременно выяснилось одно существенное обстоятельство. Было установлено с гораздо большей точностью, чем могли быть произведены самые измерения, что скорость остается постоянной, не зависит, например, от состояния почвы, атмосферы и т. д.

Следующая серия опытов была произведена на Черном море. Опорный пункт находился под Одессой, второй пункт — на корабле. Корабль останавливался на различных расстояниях от берега, и каждый раз производились измерения.

Для испытания пригодности метода нужно было знать расстояние корабля от опорного пункта. Для этого поступали так: корабль останавливался возле какого-нибудь берегового пункта, положение которого было известно, или же корабль засекался с берега теодолитом.

Таким образом, геодезисты определяли расстояние своим методом, а мы — своим, причем заранее результаты геодезических измерений не могли быть известны. Поэтому оператор радиометода не знал заранее расстояния, которое он измеряет. Всякое самовнушение, таким образом, исключалось. Только после окончания опытов геодезисты давали свои результаты, которые сверялись с записями расстояний, полученных радиодальномером.

Следующая экспедиция работала тоже на Черном море, между Новороссийском и Фальшивым Геленджиком, Новороссийском и станцией Лоо около Сочи. Точности, полученные при работах на Черном море, были порядка 2—3 десятых процента. Эти измерения показали, что скорость распространения электромагнитных волн над морем совпадает со скоростью света.[1] Постоянство скорости в описанных условиях оказалось чрезвычайно большим, повидимому до нескольких стотысячных ее значения.

В этой второй экспедиции метод был испробован в связи с еще одной задачей.

Экспедиция работала в июне 1936 г., т. е. в то время, когда было полное солнечное затмение, причем Геленджик лежал в полосе полной фазы. Известно, насколько важны наблюдения над ионосферой вообще и во время затмения в частности. Существует ряд отличных методов для этих исследований. Оказалось, что описанный здесь метод также может быть в этом отношении полезен и

---

[1] Среднее значение скорости при этих опытах получилось равным $2.995 \cdot 10^5$ км/сек.

особенно, повидимому, для выяснения некоторых деталей происходящих в ионосфере процессов.

Были получены некоторые результаты, представляющие интерес. Эти результаты обработаны Н. Д. Папалекси и им опубликованы. Я хотел бы здесь упомянуть, что как этой, так и всеми остальными экспедициями руководил непосредственно Н. Д. Папалекси при деятельном участии Е. Я. Щеголева. Опыты на Кавказе и часть черноморских опытов проводились совместно с Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэросъемки и картографии, и помощь, оказанная институтом, была весьма ценной.

Во время работы на Черном море описанными исследованиями заинтересовалось и приняло участие в работах Гидрографическое управление Главсевморпути. Дальнейшие работы вообще и дальнейшая разработка метода шли специально применительно к измерениям расстояния на море. Существенным моментом было то, что явилась возможность производить испытания в полупроизводственной обстановке. Такие испытания были произведены в 1936 г. в Карских воротах, где был измерен ряд расстояний. Между прочим, было измерено расстояние между островом Вороновым в системе Вайгача и островом Логиновым на Новой Земле. Полученные точности приблизительно такие же, как и на Черном море. Ценность этих работ в смысле накопления опыта заключалась, как я уже указал, в том, что они производились в полупроизводственной обстановке, что, впрочем, с другой стороны, явилось и некоторым недостатком. Это была гидрографическая экспедиция, и опыты с радиодальномером могли быть произведены лишь постольку, поскольку они не мешали основным работам. Поэтому чрезвычайно ценно, что, в следующем году Гидрографическое управление Главсевморпути решило произвести специальные опыты для испытания радиодальномера. Экспедиция 1937 г. работала при деятельном участии Е. Я. Щеголева в экспериментально-производственных условиях. Эта экспедиция дала ценный материал. Весьма важно было то, что частично измерения производились персоналом Главсевморпути и в такой обстановке, которая соответствует производственной работе. Были и некоторые неувязки; причина части из них не совсем еще выяснена, но полученные результаты в общем показывают возможность определять расстояния с указанной точностью и в производственных условиях.

Я хотел бы отметить один из результатов. Было измерено расстояние между Рай-Новолоком возле Кандалакши и Плоскими

Лудами. Это расстояние несколько превышает 100 км. Оно определено геодезически. Радиодальномером была произведена очень большая серия измерений с целью получения возможно большей точности. Расхождение с данными геодезии получилось 35 м. Средняя квадратичная погрешность результата была ± 21 м.

Этот единичный опыт, конечно, еще недостаточен, чтобы делать какие-нибудь общие заключения. Но мне кажется, что он все же представляет интерес.

Я укажу на один случай, происшедший во время этой экспедиции. Должен заметить, что на некоторых прежних экспедиционных работах я присутствовал, хотя и непродолжительное время. На северных же экспедициях я лично не был и говорю здесь со слов участников экспедиции. Случай, о котором я хочу рассказать, следующий. В один из дней корабль, предназначенный для испытаний дальномера, шел в Порью Губу (чтобы там заночевать) по проложенному курсу. Был очень сильный туман, видимости не было. Корабль должен был итти своим курсом до определенного места, здесь повернуть на известный угол и войти в Губу. По пути время от времени производились измерения радиодальномером. Радиооператоры предупреждали моряков, что, по их измерениям, есть систематические отклонения от правильного курса. Эти указания были приняты несколько скептически ввиду новизны метода. Оказалось, однако, что право было радио.

Этот случай не существенен в смысле оценки метода, так как для обнаружения указанного отклонения не требовалась сколько-нибудь большая точность. Но важно, что он повлиял на психологию моряков и, как мне передавали, способствовал тому, что их отношение к радиодальномеру существенно изменилось.

В заключение я хотел бы еще указать на то, что проведение опытов потребовало работы, усиленной, большой работы коллектива работников, с одной стороны, Ленинградского индустриального института, с другой — Физического института АН. Особенное участие принимали в этих работах И. М. Борушко, К. Э. Виллер, В. В. Мигулин, Я. Л. Альперт и П. А. Рязин.

Что можно сказать о дальнейших перспективах?

Один из существенных вопросов — это может ли быть применен указанный метод для измерений расстояний над сушей. У нас сейчас нет опытного материала, который позволил бы дать на этот вопрос какой-нибудь ответ. Я лично вижу здесь большие трудности. Но вообще я должен сказать, что предсказание —

занятие неблагодарное. Я предпочитаю оставаться на почве того, что есть. Оставаясь на этой почве, можно, мне кажется, резюмировать то, что было сказано, следующим образом.

Были поставлены две задачи: измерение скорости распространения и измерение расстояний.

Опыты показали, что скорость распространения электромагнитных волн диапазона $200 \div 400$ м над морем равна с точностью десятых долей процента скорости света в свободном пространстве. Этот результат мне кажется надежным, так как он базируется на большом материале. Он хорошо увязывается с теорией.

Что же касается измерения расстояний, то опыты показали, что расстояния по морю до 100 км и несколько большие могут быть измерены со средней точностью нескольких десятых процента. Так как эти результаты получены и в производственной обстановке, то, мне кажется, есть основание сказать, что описанный интерференционный метод уже в настоящем, еще несовершенном виде может быть применен для решения некоторых практических задач в гидрографии, навигации и т. д.

И еще одно, последнее, замечание. Есть основание предполагать, что аппаратуру можно усовершенствовать, что можно ускорить процесс измерения и частично его автоматизировать.

Если это будет сделано, естественно расширяются возможности практических применений интерференционного метода.

64

ПРЕДИСЛОВИЕ

[к сборнику „Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности". Совм.[1] *с Н. Д. Папалекси]*

В течение ряда последних лет в Центральной радиолаборатории и Ленинградском индустриальном институте в Ленинграде и в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в Москве под нашим руководством велись исследования распространения электромагнитных волн вдоль земной поверхности. Эти исследования имели целью, с одной стороны, выяснить ряд возникающих здесь физических вопросов, не получивших еще достаточного теоретического освещения и экспериментальной проверки, и, с другой стороны, разработать на основе полученных результатов адэкватный метод измерения расстояний при помощи радиоволн. В частности, при решении этой задачи необходимо было установить, какая степень точности достижима при тех или иных условиях, а также создать соответствующую радиодальномерную аппаратуру.

По самой сущности стоящих проблем было необходимо провести, наряду с теоретическими и лабораторными работами, также исследования распространения радиоволн в действительных условиях. Такие работы выполнялись в экспедициях в течение ряда лет (с 1933 по 1941 г.) в различных местах: в Ленинградской области, на Кавказе, на Черном море, на озере Ильмень, в степном районе Крыма, в Подмосковье, в степных районах Заволжья, а также повторно в северных морях.

[1] [Гостехиздат, 1945. Под ред. академика Л. И. Мандельштама и академика Н. Д. Папалекси.]

Проведение всех этих работ было связано с рядом значительных трудностей, преодоление которых оказалось возможным лишь благодаря поддержке со стороны ряда учреждений, а также благодаря дружной, весьма энергичной и умелой работе всего коллектива наших сотрудников. В первую очередь следует отметить работы Е. Я. Щеголева, с самого начала принимавшего активное участие в практическом осуществлении интерференционного метода измерения расстояний и разработавшего, отчасти совместно с И. М. Борушко, основную аппаратуру, К. Э. Виллер, деятельно участвовавшую в разработке методики и в первых опытах, и сотрудников ФИАН, особенно В. В. Мигулина, Я. Л. Альперта и П. А. Рязина, принимавших деятельное и существенное участие в дальнейшем развитии метода и его применениях к исследованию распространения радиоволн.

В проведении первых экспедиционных работ большую помощь оказали проф. О. Г. Дитц и А. И. Грузинов.

Дальнейшая практическая разработка интерференционного метода для измерения расстояний велась также Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэрофотосъемки и картографии (А. И. Грузинов, Л. Е. Миндлин, М. И. Шаталов) и Гидрографическим управлением ГУСМП (Я. К. Смирницкий, Д. Н. Преображенский и С. А. Мещеряков).

Только весьма активное и живое плодотворное участие названных учреждений и лиц позволило довести до конца экспедиционные работы, требовавшие специальной организации и сравнительно больших средств.

Нам кажется, что в настоящее время работы по поставленным задачам пришли к известному завершению и привели к определенным результатам. Существенный вопрос о процессе распространения радиоволн и, в частности, вопрос о скорости распространения их, не получал до сих пор достаточного освещения с теоретической стороны. Встречавшиеся в литературе экспериментальные данные разноречивы. Кроме того, по точности они, повидимому, недостаточны, чтобы на их основе делать те или иные заключения. Разработанный нами интерференционный метод дал возможность определить скорость распространения радиоволн в различных условиях с точностью, превышающей по порядку величины точность предыдущих определений. Одновременно в помещенной ниже работе П. А. Рязина вопрос анализируется с теоретической стороны. Результаты этого анализа расходятся с тем, что принималось обычно, но, насколько можно судить, находятся в согласии с полученными опытными данными. Этот вопрос рассмотрен подробнее в соответствующих статьях.

С другой стороны, на основе полученного материала был разработан и испытан в практических условиях интерференционный способ определения расстояний. Он был применен между прочим в производственной работе по гидрографии и дал положительные результаты.[1]

Ввиду сказанного можно, как нам кажется, считать целесообразным и своевременным издание настоящего сборника, объединяющего, с одной стороны, ряд теоретических и экспериментальных работ, печатавшихся в разные сроки (воспроизводимых с некоторыми дополнениями), и включающего в себя, с другой стороны, еще не опубликованные работы, излагающие результаты, полученные в последнее время.

Боровое — Казань
1941 г.

---

[1] См. помещенные ниже статьи В. И. Воробьева, А. И. Грузинова и Л. Е. Миндлина и С. А. Мещерякова и Д. Н. Преображенского [статьи 7, 9 и 10 сборника].

65

ОПТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ НЬЮТОНА[1]

[Изв. Академии Наук СССР (сер. физ.), 9, № 1—2, 99—121, 1945]

Среди бессмертных творений Ньютона его оптические исследования занимают важное и почетное место.

Его открытия лежат в основе всех наших знаний по оптике; их дальнейшее развитие дало не только физикам, но и астрономам, и химикам мощное орудие для познания природы. Именно в оптических работах он проявил себя как гениальный экспериментатор.

Заложенные в них принципы физического исследования остались руководящими и по сегодняшний день. Оптические работы принесли Ньютону его первую славу, им он обязан своим избранием в члены Лондонского Королевского Общества — английской академии наук. Если к этому прибавить, что теоретические воззрения Ньютона на оптические явления оказывали громадное, хотя, может быть, и не всегда благотворное влияние на все развитие оптики в течение ста лет после его смерти, то вряд ли есть необходимость в дальнейшей мотивировке выбора темы моего сегодняшнего доклада — „Оптические работы Ньютона".

Позвольте мне начать несколько издалека. В 1661 г. девятнадцатилетний Ньютон был принят в Кэмбриджский университет. Подготовку к университетским занятиям Ньютон получил в Королевской школе в Грэнтэме, небольшом городке в графстве Линкольн, по соседству с его родной деревней. Здесь он пробыл, в общей сложности, пять лет. Биографы Ньютона подчеркивают то обстоятельство, что Нью-

[1] [Доклад, прочитанный на Общем Собрании академиков в Боровом 16 января 1943 г.]

тон уже мальчиком отличался замкнутостью и любовью к уединению — черты характера, которые не оставляли его всю жизнь. Директор школы Стокс прозорливо оценил замечательные способности своего ученика. Когда мать Ньютона после трехлетнего пребывания сына в школе взяла его домой для того, чтобы он помогал ей в хозяйстве, Стокс, по сообщению Стекелея, близкого знакомого семьи Ньютона, сказал ей, что „было бы большой потерей для мира и, кроме того, тщетным начинанием похоронить такой многообещающий гений, заставив его работать по сельскому хозяйству, что столь противоречит его темпераменту", и добился того, что молодой Ньютон вернулся в школу.

Научная атмосфера в Кэмбридже не была благоприятна для изучения естественных наук. Мощное движение научного возрождения почти не коснулось университетского преподавания. Еще сильно было влияние схоластики Аристотеля. Астрология и другие предрассудки еще были живы. Библиотека была в жалком состоянии. О чем-либо, подобном нашим лабораториям, не было, конечно, и речи. Но молодому Ньютону посчастливилось. В начале 1663 г. была основана в Кэмбриджском университете неким Люкасом кафедра, которой суждено было сделаться одной из самых знаменитых физико-математических кафедр мира. Она существует и сейчас. Ее занимает один из молодых современных физиков-теоретиков — Дирак.

В качестве первого профессора на Люкасовскую кафедру был приглашен Исаак Барроу. Барроу был энциклопедистом: путешественник, переживший не одно приключение, выдающийся богослов, выдающийся математик, астроном и физик. Если вообще можно говорить о духовном отцовстве по отношению к Ньютону, то эта честь должна принадлежать Барроу. Под его непосредственным руководством Ньютон углубленно изучал математику, одновременно и астрономию и оптику. Лекции по оптике читал сам Барроу. Мы знаем, что Ньютон изучал также трактат о свете Кеплера и диоптрику Декарта. Кроме физико-математических наук Ньютон вынес из университета основательное знание латинского языка; он изучал также греческий и, повидимому, знал и древнееврейский алфавит. Ни немецким, ни французским языками Ньютон не владел.

Через $3^1/_3$ года после поступления Ньютон кончает университет со степенью бакалавра. К этому времени, как-то внезапно (во всяком случае, для постороннего наблюдателя), его замечательный гений развернулся во всю ширь. Ксовенно этому способствовало одно внешнее обстоятельство. В 1664—1666 гг. в Англии свирепствовала страшная эпидемия чумы, унесшая в 1665 г. в одном Лондоне свыше 31 000 жизней. Кто мог, бежал из городов. Около двух лет Ньютон почти безвыездно прожил в своей родной деревне. Здесь он нашел то уединение и спокойствие, в которых он всегда нуждался во времена творческого подъема. Здесь, если верить биографам, зародились те три великих открытия, которые обессмертили его имя. Я имею в виду: метод флюксий (основы дифференциального и интегрального исчислений), закон всемирного тяготения и открытие, относящееся к природе света и спектральным цветам. Конечно, окончательное оформление эти открытия получили позже и еще позже они стали достоянием ученых.

К своему фундаментальному оптическому открытию Ньютон пришел не сразу. Первая оптическая проблема, которая привлекла его внимание, была проблема усовершенствования телескопа.

После того как изобретенный в конце XVI в. телескоп в руках Галилея привел к таким замечательным открытиям, как открытие спутников Юпитера, строения Млечного пути, фаз Венеры, солнечных пятен и т. д., естественно было стремление ученых строить все более мощные телескопы и тем расчистить путь к новым открытиям.

Усовершенствованием телескопа занимались почти все великие физики и астрономы того времени: Галилей, Декарт, Гюйгенс, Гук и другие. При этом они отдавали свои силы не только разработке физических основ, но и собственноручно шлифовали объективы, занимались возникающими здесь механическими вопросами и т. д.

Скоро выяснилось, что на пути усовершенствования телескопа стоят большие препятствия. По мере роста увеличения, изображение, даваемое объективом, делалось нечетким, расплывчатым, что чрезвычайно затрудняло наблюдения. Чисто опытно было установлено, что этот недостаток можно уменьшить, если одновременно с увеличением диаметра объектива увеличивать его фокусное расстояние, что было равносильно увеличению размеров всего инструмента. И действительно, в эпоху Ньютона телескопы достигали громадных размеров. Есть, например, указания, что в одном из инструментов Гюйгенса расстояние между объективом и окуляром достигало 210 футов, т. е. около 65 метров. Естественно, что на этом пути дальнейшее усовершенствование телескопа было невозможно.

Ньютон, повидимому, первый вполне ясно увидел, что наряду с известными причинами, искажающими изображение, как, например, сферическая аберрация, есть еще другая и наиболее существенная, вследствие которой, между прочим, расплывчатость изображения сопровождается его окраской или, вернее, возникновением окаймляющей его цветной полосы. Это то, что мы называем теперь хроматической аберрацией. Но Ньютон — это одно из свойств его замечательного гения, — раз заметив даже на первый взгляд незначительное незнакомое обстоятельство, не успокаивался, пока вопрос не становился ясным до конца. Теперь работы его пошли по двум параллельным руслам. С одной стороны, он продолжал работать над усовершенствованием телескопа, с другой же — принялся за исследования физического явления, лежащего в основе хроматической аберрации. И тут он скоро пришел к убеждению, что хроматическая аберрация принципиально неустранима. Это убеждение было ошибочно, но оно заставило Ньютона отказаться от попытки усовершенствовать существующий тип телескопов и взяться за постройку инструмента на основе нового принципа.

Хорошо было известно, что концентрировать свет и получать изображения можно при помощи не только линз, но и вогнутых зеркал. В этом случае изображение свободно от хроматической аберрации. И вот Ньютон приступает к постройке зеркального, отражательного телескопа (рефлектора, в отличие от рефрактора, т. е. телескопа с линзой в качестве объектива). Идея отражательного телескопа была не нова. Так, незадолго до этого шотландец Грегори не только предложил построить такой телескоп, но дал даже соответственные расчеты. Но предложение Грегори никогда осуществлено не было. Ввиду того, что Ньютон первый действительно построил практически годный рефлектор, ввиду тех трудностей, которые ему при этом пришлось преодолеть, ввиду тех усовершенствований, которые он ввел, он считается по праву одним из изобретателей отражательного телескопа. Впрочем, Ньютон всегда открыто признавал, что работа Грегори ему была известна.

Первый пробный экземпляр рефлектора был закончен Ньютоном в 1668 г.

Сохранилось письмо Ньютона к неизвестному адресату, в котором он дает описание своего телескопа. Вот некоторые выдержки из этого письма, дающие представление о том, чего удалось Ньютону достичь, и характеризующие его взгляд на весь вопрос:

„... инструмент, который я сделал, имеет только шесть дюймов в длину и несколько больше одного дюйма в поперечнике (апертура). Его плоско-выпуклый окуляр имеет фокусное расстояние в $^1/_6$ или $^1/_7$ дюйма, так что линейное увеличение инструмента около сорока, и это больше, чем любая 6-футовая (обычная) труба, может, по моему мнению, дать при сохранении отчетливости изображения. Но ввиду скверного качества материала и недостатка в хороших полировочных средствах, он все же не дает такой отчетливости, какую может дать 6-футовая труба; но, во всяком случае, я полагаю, что при его помощи может быть найдено столько же, как и при помощи любой трубы 3 или 4 футов длины, особенно если объект (само)светящийся. При помощи этого телескопа я видел Юпитер отчетливо круглым, видел его спутников и рога Венеры..."

И далее:

„... и я не сомневаюсь, что со временем может быть по этому методу построена 6-футовая труба, которая не уступит любой трубе в 60 или даже 100 футов длины, сделанной по обычному типу. В то же время я уверен, что если сделать телескоп обычного типа с объективом из чистейшего стекла, отполированного наилучшим образом, с наивыгоднейшей формой, которую любой геометр (Декарт и т. д.) уже рассчитал или в состоянии рассчитать (а это ведь все, к чему стремились или чего желали люди до сих пор), то все же такой инструмент вряд ли даст много больше, чем обычный хороший инструмент той же длины. И это утверждение, как ни парадоксально оно может показаться, есть необходимое следствие некоторых моих опытов, относящихся к природе света".

К этим последним знаменательным словам мы сейчас вернемся. Уже из сделанного описания ясно, насколько существенны были достигнутые Ньютоном результаты.

Успех его первого телескопа стал известен в довольно широких кругах, и по настоянию окружающих Ньютон приступил к постройке второго, улучшенного инструмента.

Интересно отметить, что в искусстве полировки зеркал, самой трудной и ответственной части всей работы, Ньютон достиг, по тому времени, чрезвычайно большого совершенства, превосходя в этом искусстве лондонских мастеров-профессионалов.

Этот второй экземпляр был готов в 1671 г. Он был привезен в Лондон, произвел, повидимому, большое впечатление на ученых, был демонстрирован королю, а затем передан в Лондонское Королевское Общество. На заседании 11 января 1672 г., посвященном дискуссии его изобретения, Ньютон был избран в члены Общества, в музее которого этот телескоп хранится до сих пор как одно из его ценнейших сокровищ.

Прежде чем оставить вопрос о телескопе, сыгравший, как мы только что видели, столь заметную роль в жизни Ньютона, позвольте мне сказать несколько слов о дальнейшем развитии этой проблемы.

Несмотря на существенный результат, достигнутый Ньютоном, отражательные телескопы медленно внедрялись в практику астрономов. Решительный сдвиг произошел во второй половине XVIII в., после того как Виллиам Гершель построил свои знаменитые рефлекторы,— один из них имел 40 футов в длину,— при помощи которых им и были произведены замечательные исследования, относящиеся к туманностям и двойным звездам, и была открыта планета Уран.

Но и вопрос о рефракторах не оставался на месте.

Убеждение Ньютона в невозможности усовершенствовать рефрактор, так ярко выраженное в вышеприведенном письме, было, как сказано, ошибочно. Но так велик был его авторитет, что это убеждение принималось в течение долгого времени на веру, и это несомненно тормозило попытки усовершенствовать рефракторы. В 1657 г. стало известно, что Доллонд на практике опроверг мнение Ньютона. Он фактически построил составной объектив, свободный или почти свободный от хроматической аберрации. Открытие Доллонда сыграло в астрономии громадную роль. Теперь можно было строить полноценные рефракторы, имеющие ряд больших преимуществ перед рефлекторами. С этого времени оба типа телескопов развиваются параллельно, конкурируя друг с другом или, вернее, дополняя друг друга, так как каждый из них имеет свои большие недостатки, но и большие преимущества. Может быть, стоит отметить, что самые большие телескопы строятся в настоящее время по отражательному принципу. Таков знаменитый телескоп на Моунт-Вильсон в Калифорнии, с зеркалом, имеющим в поперечнике 100 дюймов. Таков, повидимому, заканчивающийся постройкой на горе Поломар, там же, самый большой из когда бы то ни было существовавших телескопов, диаметр зеркала которого равен 200 дюймов, т. е. около 5 метров.

Как ни важны и ни интересны работы Ньютона по усовершенствованию телескопа, но не они определили его бессмертные заслуги в области оптики. Основы фундаментального оптического открытия Ньютона заложены в тех опытах, „относящихся к природе света", о которых он писал в конце вышеприведенного письма.

Прошло (с того времени) около трех лет. Через неделю после своего избрания в члены Королевского Общества Ньютон пишет его секретарю Ольденбургу письмо, ставшее знаменитым. Вот его заключительная часть:

„Я хотел бы, чтобы вы мне сообщили, как долго будут еще продолжаться еженедельные заседания Общества, так как если они продолжатся еще некоторое время, то я предполагаю представить для ознакомления и обсуждения сообщение об одном философском открытии, которое дало толчок к постройке вышеуказанного телескопа, но которое окажется, я в этом не сомневаюсь, гораздо более существенным, чем сообщение об инструменте, так как оно касается, по моему мнению, самого странного, если не самого важного открытия, которое было сделано до сих пор в отношении действий природы".

Приблизительно через две недели Ньютон прислал в Общество свое знаменитое сообщение „Новая теория света и цветов" для доклада и напечатания в „Трудах" Общества.

На этом основном открытии Ньютона я хотел бы остановиться поподробнее. Но тут я чувствую своеобразное затруднение. Когда дело идет о таких открытиях, как открытие Ньютона, которое всем нам известно со школьной скамьи, легко очутиться — я знаю это по себе — в положении того любителя литературы, который на вопрос, как ему понравилось „Горе от ума", сказал, что в грибоедовской комедии он в сущности ничего замечательного не видит, так как она сплошь состоит из давно известных поговорок и пословиц.

Чтобы не терять перспективы, мне кажется, лучше всего стать на историческую точку зрения. Нужно постараться представить себе, хотя бы в общих чертах, состояние вопроса до Ньютона, затем восстановить в памяти то, что сделал Ньютон, и, наконец, коротко проследить ту роль, которую его работы сыграли в дальнейшем развитии науки.

Что же можно сказать о состоянии оптики в то время, когда Ньютон приступил к своим исследованиям, относящимся к природе света?

Чтобы ответить на этот вопрос, целесообразно исходить из той классификации, которой физика придерживается теперь. Мы относим к геометрической оптике те вопросы и ту трактовку их, в которых дело идет о геометрических путях световых лучей при отражении и преломлении. Это — важная область оптики, так как она лежит в основе расчета всех оптических аппаратов и приборов. Она по существу носит чисто расчетный характер и очень бедна физическим содержанием. Все другие оптические явления внешнего мира, в первую очередь дисперсионные явления, явления диффракции, интерференции, поляризации, в которых проявляется разнообразнейшая игра цветов и которые делают оптику не только одной из наиболее важных областей физики, но и наиболее красивой, относятся к так называемой физической оптике.

Основы геометрической оптики были заложены древнегреческими математиками. Основной закон отражения света был им известен. Основной закон преломления был найден и сформулирован Снеллиусом и Декартом в начале XVII в., правда, как показало открытие Ньютона, не в исчерпывающем вопрос виде.

Декарт в „Диоптрике" дал интересные и важные исследования хода лучей при преломлении в прозрачных средах и применил их к объяснению радуги, имея между прочим в виду вопрос о сферической аберрации. Он же дал, на основе этого закона, первую теорию радуги. Таким образом, во времена Ньютона геометрическая оптика стояла на довольно высоком уровне развития. Возможно, что это объясняется именно бедностью физического содержания этой дисциплины и практической важностью стоящих здесь задач.

Совершенно иначе обстояло дело с физической оптикой. Вряд ли будет преувеличением, если мы скажем, что ко времени Ньютона физической оптики как научной дисциплины не существовало.

Само собой понятно, что такие замечательные естественные оптические явления, как лазурь неба, которая, кстати сказать, получила правильное объяснение только в самое последнее время, синева моря, богатство и разнообразие красок в животном и растительном мире, цвета радуги, не могли оставаться без воздействия на людей во все времена. В первую очередь на непосредственные впечатления отзывалось искусство, но и наука (каждой эпохи) не могла, конечно, проходить мимо этих проблем (и в античной науке и в науке средних веков можно найти ряд интересных наблюдений и замечаний). Но весь (научный) подход к этим вопросам, весь дух исследования в доньютоново время носит совершенно иной характер, чем тот, который мы считаем теперь — главным образом благодаря работам Ньютона — обязательным для всякого физического научного исследования.

Я не могу останавливаться на интересном теоретико-познавательном вопросе о том, чем было и чем должно быть научное исследование вообще. Но я позволю себе, в качестве иллюстрации к только что сказанному, привести несколько примеров.

Первый пример я хотел бы взять из античных времен, из знаменитой поэмы Лукреция „De rerum Natura", написанной, как известно, в первом столетии до нашей эры. В этой поэме по существу излагаются естественнонаучные взгляды Эпикура. Насколько я знаю, историки считают, что изложение поэмы стоит на высоте современных ей знаний. Большие поэтические достоинства поэмы общепризнаны. Но в ней, несомненно, есть интересные и правильные наблюдения и замечания общего характера, относящиеся к явлениям природы, в частности о свете и цветах, которым уделяется довольно большое внимание. Но вот что получается, когда дело доходит до научного объяснения в конкретном случае (я цитирую по переводу Ф. А. Петровского): „Мало того, — петуха, привыкшего крыльями хлопать ночью и громко кричать, призывая зарю на рассвете, ярые львы выносить совершенно не могут и тотчас, только завидят его где-нибудь, обращаются в бегство. Ясно, конечно, для нас, почему это так происходит: некие есть семена, что, от тел петухов отлетая, львам попадают в глаза и сверлят им зрачки, причиняя острую боль, и для них, хоть и лютых, она нестерпима. Зрение ж наше ничуть от подобных семян не страдает".

Но и позже, в средние века, существенного сдвига в интересующем нас вопросе не произошло. О достоверности фактов, которые часто клались в основу научных рассуждений, можно судить по примеру, заимствованному мною у П. Таннери. В сочинении „О равновесии" известного арабского ученого-алхимика Гебера, жившего в X в., есть около 50 вопросов. Вот один из них: „Почему, как всем известно, облако не дает дождя, когда женщина выходит из дому голой и обращается лицом к облаку?"

Но вернемся к эпохе Ньютона. Каковы в это время были взгляды на фундаментальный вопрос о происхождении цветов? Вот что пишет знаменитый Кеплер в своем сочинении, появившемся в 1604 г.:

„Цвет — потенциальный свет, заключенный в прозрачной материи (если вообще он может считаться чем-то независимым от зрения), а различные свойства в природе материи, в зависимости от ея разреженности или плотности, прозрачности или непрозрачности, обусловливают разнообразие цветов".

И далее:

„Несомненно, что они (т. е. цвета) обязаны своим существованием ослаблению света и прибавлению водянистого материала". В 1611 г. был опубликован трактат о свете знаменитого — так его называет Ньютон — Антония де Доминика, архиепископа в Сполеро. В нем, в связи с объяснением причины радуги, изложена теория цветов:

„Если в теле заключен чистый свет, как, например, в звездах или огне, и этот свет теряет по какой-нибудь причине свой блеск, то он кажется белым светом.

Если к свету примешивается некоторое количество тьмы, которая все же позволяет свету проходить и не поглощает его всецело, тогда появляются промежуточные цвета. На этом основании огонь кажется красноватым, потому что смешан с дымом, затемняющим его... Существуют три промежуточных цвета: наименьшая примесь тьмы производит красный цвет..."

Затем идут ссылки на совершенно поверхностные опыты, которым дается явно неправильное истолкование. Изложенный здесь взгляд на происхождение цветов как на результат смешения света с тьмой — взгляд Кеплера мало от него отличается — был во времена Ньютона весьма распространен. Его, повидимому, имеет в виду сам Ньютон, когда он в „Оптике" противопоставляет свое объяснение одного случая обычной гипотезе философов.

Представление, лежащее в основе этих и всех им подобных доньютоновских воззрений, поскольку можно вообще что-нибудь определенное в них вложить, заключается в следующем: свет по природе своей не имеет цветности; цветность — новое, от света отличное качество; у Доминика это качество — тьма, которая примешивается к свету при преломлениях и отражениях и придает свету тот или иной цвет. Все эти воззрения выдержаны в духе схоластики Аристотеля и средневековых рассуждений.

Я знаю, что взгляд на средние века как на эпоху полного застоя науки вряд ли справедлив. И в средних веках и после, до Ньютона, можно конкретно указать на отдельные замечательные по точности наблюдения и интересные рассуждения отдельных ученых того времени.

Но, с другой стороны, не подлежит сомнению, что теории вроде вышеприведенной — а они доминировали (до Ньютона) в области физической оптики, — заводили физику в тупик. Их характерная черта: презрительное и крайне легкомысленное отношение к опыту, стремление проникнуть в так называемую сущность вещей при помощи одних рассуждений, оперирующих часто с понятиями, далеко не очевидными, но определения которым не дается. Что такое чистый свет? Тьма, наверное, не может быть отождествляема с дымом, не то абсурдность всей теории не могла бы не быть ясна авторам. Но тогда что такое тьма, которую можно примешивать в различных пропорциях к свету?

Такие теории, возможно, говорят воображению: но если задача физики состоит в том, чтобы получить возможность на основании результатов определенных опытов предвидеть результаты других без того, чтобы приходилось их производить, и таким образом научиться воспроизводить по желанию те или иные явления и владеть ими, то нужно признать, что приведенные выше теории этой задачи не решают и решить не могут; они лишены научного значения, они бесплодны. Вот, примерно, в каком положении застал Ньютон проблему о цветах.

Но одно замечание необходимо сделать. Мы только что видели, как было еще сильно, а подчас, как, например, в интересующем нас вопросе, и доминировало влияние бесплодной схоластики во времена Ньютона. Но, с другой стороны, хорошо известно, что в эти времена этого рода философия природы как таковая уже утратила свое господствующее значение. Новые веяния, связанные главным образом с именами Галилея, Паскаля, Джильберта, Декарта и других, принесли уже в конце XVI и в первой половине XVII в. замечательные плоды в ряде конкретных физических проблем. Но физическая оптика запоздала. И в 60—70-х годах (XVII в.) наступил, как бы с целью догнать упущенное время, ее замечательный расцвет, и эти годы, как правильно указывает академик С. И. Вавилов, можно считать годами зарождения научной физической оптики, как экспериментальной, так и теоретической.

В это время, наряду с замечательными опытными исследованиями Гримальди, Гука, Гюйгенса, были положены основы волновым воззрениям, которым — правда, более чем через 150 лет — суждена была такая блестящая будущность.

И особенно ярко сияет в это время гений Ньютона. Основной краеугольный камень всего развития оптики, наложивший свой отпечаток на все дальнейшее развитие физики, — это именно его исследования, относящиеся к центральной оптической проблеме цветов. И здесь ему не на что было опереться, и меньше всего—на волновую теорию.

В подтверждение этого можно сослаться на слова ее основоположника — гениального Гюйгенса. Посылая Лейбницу свой замечательный „Трактат о свете“ (в котором заложены основы волновой теории), напечатанный, кстати сказать, в 1690 г., т. е. через 20 с лишним лет после работ Ньютона, Гюйгенс писал:

„В своем трактате о свете я ничего не сказал о цветах, считая этот предмет крайне трудным, особенно ввиду большого разнообразия тех обстоятельств, при которых цвета возникают“.

Таким образом, со стороны волновой теории Ньютон помощи в своих исследованиях получить не мог. Наоборот, я думаю, что волновая теория принесла такие блестящие плоды отчасти потому, что она могла базироваться на открытии Ньютона. Вот как обстояло в основном дело с фундаментальным вопросом физической оптики, с вопросом о природе света и цветов.

И еще одно, последнее замечание. Работы Ньютона, о которых сейчас будет итти речь, помимо их огромного фактического значения, знаменуют собой принципиальный поворот в направлении физической науки вообще. Вряд ли будет преувеличением сказать, что до Ньютона все исследователи, в том числе и Галилей, приступая к исследованию физической проблемы, исходили из определенных априорных представлений. Опыт служил для их проверки или, в лучшем случае, для внесения поправок. Ньютон порвал с этой традицией. Он считал, что априорное познание природы невозможно, что методами познании являются наблюдение, опыт и обобщение полученных результатов индукцией; что „наилучший и самый надежный метод философствования, повидимому, заключается в том, чтобы сначала усердно изучать свойства вещей и установить эти свойства при помощи опыта, а затем осторожно переходить к гипотезам для их объяснения“.

Блестящим результатом применения этих принципов на деле явилось его замечательное открытие, изложенное в вышеупомянутом мемуаре „Теория света и цветов“, открытие, к рассмотрению которого я хотел бы теперь перейти.

На родине Ньютона существует прекрасный обычай. Там стараются сопровождать доклады, посвященные творениям великих экспериментаторов, воспроизведением их оригинальных опытов и, по возможности, с теми же аппаратами, которыми они были сделаны.

Мы лишены этой возможности. Единственное, что я могу сделать, это придерживаться, по возможности, оригинальных чертежей и формулировок Ньютона. Я их беру главным образом не из первого мемуара, а из основного труда Ньютона — его „Оптики“. Об этом замечательном сочинении мне придется еще говорить дальше; здесь я только замечу, что оно, подобно „Principia“, построено по типу „Элементов“ Эвклида. Сначала идут определения, затем аксиомы, далее предложения — теоремы и задачи, а при них — пояснения и доказательства опытами. Опытная часть занимает в книге основное место. Повидимому, не совсем ясно, что дало первый толчок Ньютону к исследованию призматических цветов. Но несомненно, что одной из причин его интереса к этому вопросу было, как мы видели выше, желание уяснить себе явление хроматической аберрации. И вот Ньютон, для выяснения основного вопроса, делает следующий опыт, который стоит в „Оптике“ на первом месте.

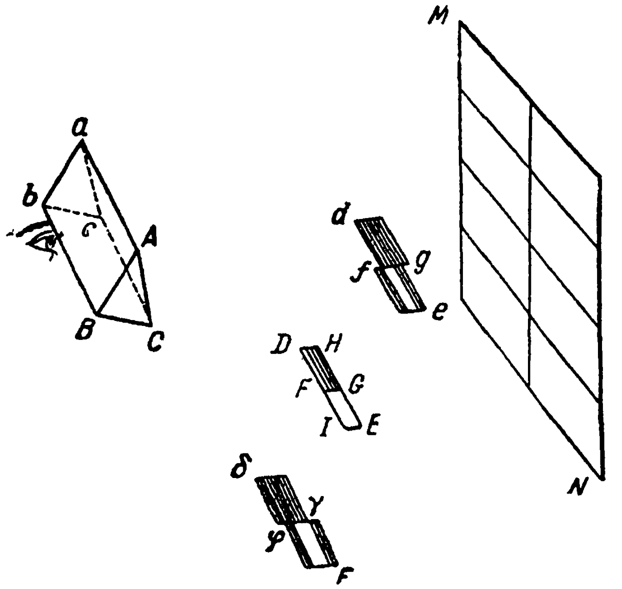


Рис. 1

Если смотреть на продолговатый прямоугольный кусок бумаги, окрашенный наполовину в красный, наполовину в синий цвет, через призму, как это показано на рис. 1, то прямоугольник представляется как бы переломанным: синяя половина отклонена сильнее, чем красная.

Следующий опыт: подобный же кусок бумаги, т. е. прямоугольник, обе половины которого окрашены, как в опыте первом, обматывается несколькими витками черного шелка, помещается

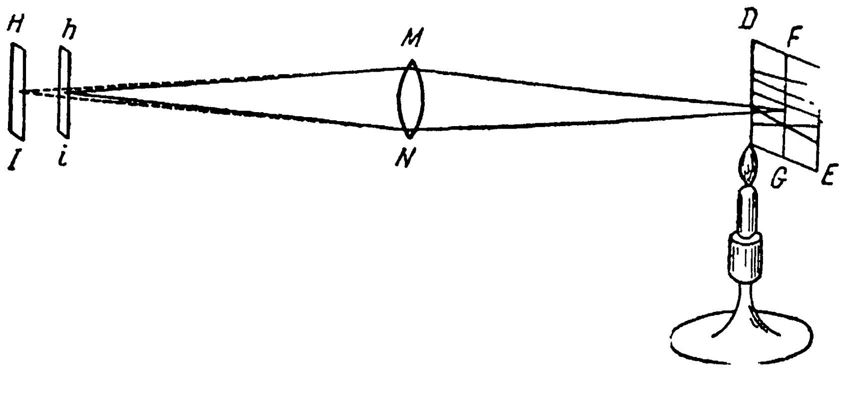


Рис. 2

вертикально (рис. 2) и освещается пламенем свечи. Линза отбрасывает изображение освещенной бумаги на передвижной экран, и здесь обнаруживается следующее. Там, где получается резкое изображение красной половины, — нити служат для точной установки „на фокус“, — изображение синей половины расплывчато. И наоборот, если придвинуть экран несколько ближе, то получается резкое изображение синей, но зато расплывчатое красной стороны.

Эти опыты иллюстрируют следующее основное положение Ньютона:

Книга I, Предложение I, Теорема I. — Лучи, отличающиеся по цвету, отличаются и по степеням преломляемости.

Затем Ньютон переходит к новой серии опытов. Основной из этих опытов следующий.

Солнечный свет попадает через узкое отверстие в ставне в затемненную комнату. На противоположной стене получается кружок (того же белого или, вернее, желтоватого цвета, как и свет солнца). Теперь на пути лучей (рис. 3) ставится призма. Тонкий пучок света после прохождения через призму расщепляется, или, вернее, после призмы наблюдается не тонкий цилиндрический пучок,

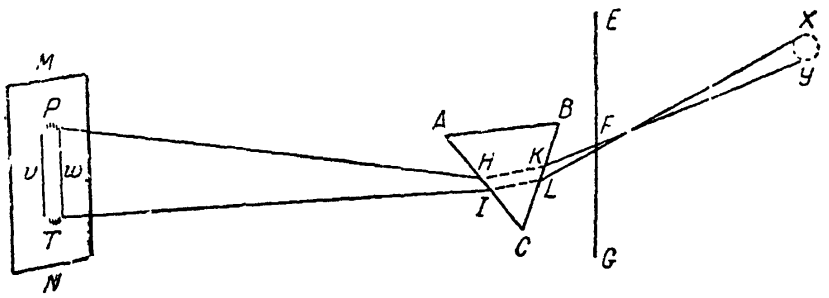


Рис. 3

а пучок, веерообразно расходящийся. На стене теперь виден не кружок, а полоса, длина которой была в опыте Ньютона приблизительно в 5 раз больше ширины, оставшейся равной диаметру кружка. И эта полоса окрашена во все цвета радуги, начиная с красного наверху, через оранжевый, желтый, зеленый, синий, до фиолетового, причем — Ньютон это подчеркивает — цвет непрерывно переходит через всевозможные оттенки. На стене получается то, что называют солнечным спектром.

Сопоставляя этот опыт с предложением I, Ньютон заключает:

Предложение II, Теорема II. — Солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости.

Указанные предложения иллюстрируются (контролируются) целым рядом опытов, которые я здесь детально приводить не буду. Замечу только, что в этих и последующих опытах Ньютон применил впервые методы и приемы исследования, которыми мы пользуемся и сейчас в оптических лабораториях. Таковы, например, установка на минимальный угол отклонения призмы (рис. 4); простой, но чрезвычайно эффективный метод скрещенных призм и т. д. Для получения чистого спектра возможно большой интенсивности Ньютон пользовался устройством (коллиматорная щель, призма и фокусирующая аппаратура), которое лежит и сейчас в основе всех призменных и других спектроскопических приборов.

Нужно упомянуть еще о ряде опытов, простых и изящных, имеющих целью иллюстрировать предложение, в известном смысле обратное предложению II, что спектральные цвета, будучи смешаны в соответственных пропорциях, опять дают ощущение белого цвета.

Все это опять-таки хорошо известно, хотя нужно сказать, что школьное изложение и те опыты, которые демонстрируют обычно, не дают достаточного понятия о тонкости эксперимента и о том значении — мы увидим это дальше — которое исследования Ньютона действительно имеют.

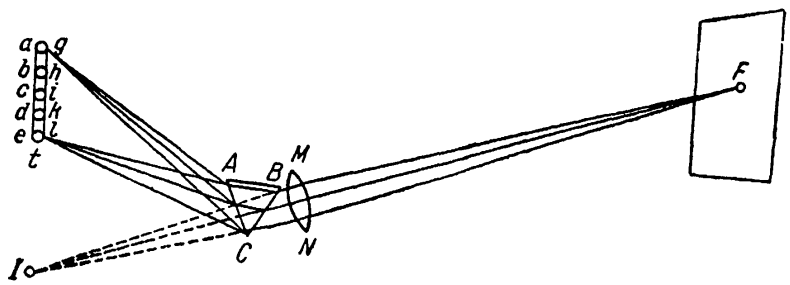


Рис. 4

На одном из дальнейших опытов я должен все же остановиться несколько подробнее. Я имею в виду знаменитый опыт 6-й в первой книге. Этому опыту Ньютон придавал большое значение — он в своем первом мемуаре назвал его „experimentum crucis".

Речь идет об изучении свойств отдельных „цветных лучей" выходящего из призмы веера. Для этого Ньютон поступает так. Он отбрасывает солнечный спектр на доску (рис. 5а и 5б), в которой проделано узкое отверстие, так что, смотря по положению этого отверстия, наружу выходит только тонкий пучок лучей, отвечающих определенному цвету спектра. Этот пучок Ньютон заставляет в свою очередь падать на вторую призму. И здесь опыт показывает следующее. Этот „цветной" тонкий пучок света отклоняется призмой, и отклоняется в различной степени, смотря по цвету; но он уже не расщепляется, а остается по выходе из призмы таким же тонким, как и при выходе; „цвет" пучка при этом не меняется. Таким образом, этот опыт доказывает существование особого рода света различной цветности. Этого рода свет характеризуется, во-первых, определенной цветностью — это физиологическое свойство — и одновременно элементарностью в том смысле, что при преломлении он не расщепляется, в противоположность, например, солнечному свету, а отклоняется как целое, причем степень преломления, т. е. количественный физический признак однозначно связан с цветностью. Это открытие чрезвычайной важности Ньютон формулирует в „Оптике" в виде определения:

„Свет, лучи которого все одинаково преломляемы, я называю простым, однородным и подобным; свет же, одни лучи которого более преломляемы, чем другие, я называю сложным, неоднородным и разновидным".

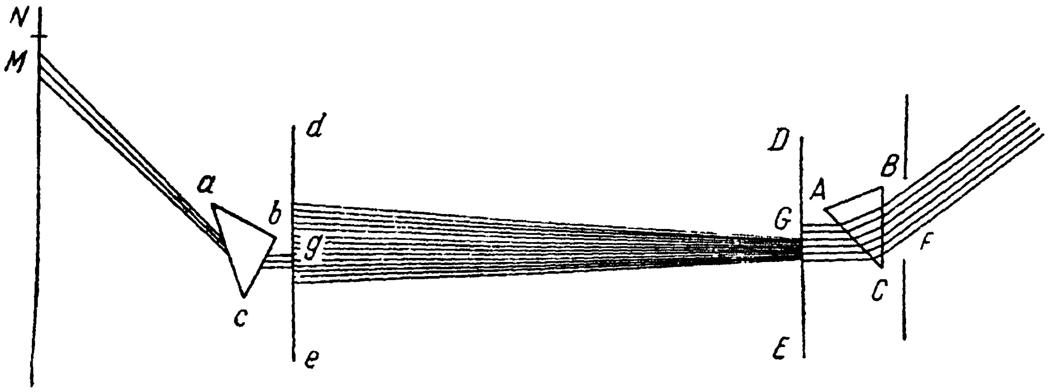


Рис. 5а

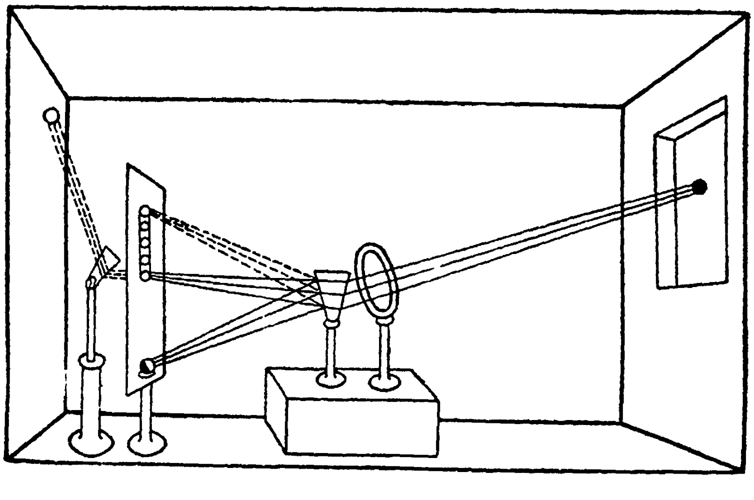


Рис. 5б. Собственноручный рисунок Ньютона, присланный им Арланду

Рядом простых, но убедительных опытов Ньютон показывает, что „простой" свет, или, как мы теперь говорим, монохроматический или спектрально простой, не изменяется ни при отражении, ни при преломлении, ни при рассеянии. Цвет и степень преломляемости — так сказать, изначальные свойства цвета.

Но Ньютон знает, что ощущение того или иного цвета не может решать вопрос о его монохроматичности. Можно, смешивая, например, синий и красный свет, получить желтый, который глаз не отличит от спектрального желтого, но который при прохождении через призму расщепится. Цвета тел немонохроматичны; поэтому, например, в опытах 1 и 2, о которых говорилось выше, речь шла по существу — на это Ньютон указывает — о различном среднем отклонении красной и синей половин.

Резюмируя кратко изложенное выше, можно приблизительно следующим образом формулировать, правда несколько схематично, результаты Ньютона.

Существует особый род света — это монохроматический или простой свет различной цветности. Каждому простому цвету (простому свету) соответствует количественный признак — определенная степень преломляемости. Свойства простого света не могут быть никак изменены. Всякий другой свет, в том числе и белый, есть смесь различных „простых цветов".

При помощи призмы из смеси могут быт выделены уже существующие в смеси отдельные простые цвета; но ни призмы, ни другие приспособления не могут навязывать, как это думали раньше, тот или иной цвет.

Трудно переоценить значение открытия Ньютона. Он впервые дал действенное учение о цветах, на основании которого он сам нашел огромное число новых фактов, количественно связанных друг с другом, и открыл путь к нахождению новых. И прежде всего заметим следующее. В свете учения Ньютона (о цветах) вся доньютонова геометрическая оптика, поскольку речь идет о преломлении, являлась лишь первым и грубым приближением. Действительно, Снеллиус и Декарт формулировали этот закон так: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления для данной среды постоянно. Но теперь ясно, что ввиду различной степени преломляемости, присущей разным цветам, одного определенного угла преломления вообще не существует. Таким образом, у Декарта и Снеллиуса, в лучшем случае, речь может итти о некотором весьма неопределенном среднем значении угла. Отсюда очевидно, что из рамок доньютоновой геометрической оптики все вопросы о цветах выпадали. Ньютон показал справедливость закона преломления для каждого цвета в отдельности. Таким образом, настоящую законченную количественную форму геометрическая оптика получила лишь благодаря открытию Ньютона. Целый класс явлений стал теперь доступен количественному рассмотрению. Определив, например, на опыте степень отклонения различных монохроматических лучей (скажем, в данном сорте стекла), или, как мы говорим, их коэффициент преломления, при помощи призмы, Ньютон уже без дальнейших опытов мог количественно рассчитать хроматическую аберрацию в линзах. Ньютон это и сделал.

Другой пример. Декарт в своей знаменитой теории радуги исходит из правильного представления о том, что радуга есть результат преломления и отражения солнечных лучей во взвешенных в воздухе каплях воды, и на основании закона преломления выводит величину того угла, под которым выходят из капли лучи с особенно большой интенсивностью. Под этим углом, который он определяет, мы радугу и видим. Это большое достижение. Но теория Декарта даже не коснулась и не могла коснуться самой интересной, по существу, стороны проблемы: почему радуга так интенсивно окрашена? какова последовательность цветов? и т. д. Ответ на это содержится в учении Ньютона и состоит, конечно, в том, что так как угол, под которым мы видим свет, выходящий из капель, есть следствие преломления, степень же преломления зависит от цвета, то мы и видим различные цвета в несколько различных направлениях. Ньютон дал количественный расчет явления, определил последовательность цветов, ширину радуги и т. д. Основные черты его теории остаются неизменными и сейчас. Полная теория радуги с учетом диффракции была дана лишь в XIX в.

Я думаю, что эти немногие примеры показывают смысл и огромное значение открытия Ньютона и прежде всего действенную (конкретную) силу его учения.

Как уже сказано, экспериментальная часть оптических исследований Ньютона по целеустремленности опытов, по их простоте и по точности в возможных тогда рамках вызывает изумление, и тем труднее понять, каким образом Ньютон впал в одну ошибку, которая имела и чисто практические последствия. Ньютон при своих исследованиях различной преломляемости разных монохроматических лучей умышленно сильно варьировал опыты, изменяя угол падения, величину отверстия и, наконец, исследуя различные прозрачные среды: он брал различные стеклянные призмы, но также и призму „из воды“, т. е. полый призматический сосуд с стеклянными стенками, наполненный водой. При этом он пришел к заключению, что величина дисперсии, т. е. разница в степени отклонения двух различных (близких к краям спектра) лучей, пропорциональна среднему отклонению или (что то же самое) что относительная дисперсия от вещества не зависит.

Этот результат, который и привел Ньютона к убеждению о невозможности построить ахроматический объектив, грубо неверен. Каким образом мог так ошибиться Ньютон?

Я не знаю удовлетворительного ответа на этот вопрос. Возможно, что, как полагает С. И. Вавилов, здесь сыграло роль то обстоятельство, что Ньютон для повышения преломления прибавлял к воде (он сам это говорит) свинцовый сахар. Возможна известная теоретическая предвзятость, возможны и некоторые другие предположительные объяснения; но все это лишь предположения.

Еще одно замечание. Ньютон, как мы видим, неоднократно подчеркивает стабильность — неизменяемость свойств простого света, которую он, повидимому, считал абсолютной. Это мнение имело значение в формировании его теоретических воззрений на природу света. Стабильность (простого света) является и в настоящее время одним из важнейших положений в оптике, но, правда, не в этой абсолютной форме. Цвет, — мы теперь говорим: длина волны монохроматического света, — действительно чрезвычайно стабилен, но при известных условиях он все же может изменяться. Однако такого рода изменения Ньютон заметить не мог. Для этого средства, которыми он располагал, не были достаточны, так как эти изменения крайне малы и очень редки, и каждый раз, когда удается создать условия, меняющие цвет монохроматического света, это является событием в физике — вплоть до последнего времени.

Одним из верных показателей значения физического открытия является то влияние, которое оно оказывало на дальнейшее развитие науки. Подходя с этой точки зрения к открытию Ньютона, мы, несомненно, должны его считать одним из крупнейших физических открытий вообще.

Трудно себе представить, как развивалась бы оптика без исследования Ньютона и специально без открытия простых спектральных цветов, являющихся теми чрезвычайно устойчивыми элементами, из которых строится, согласно Ньютону, всякое световое поле.

Дело в том, что разнообразнейшие, многочисленные и многосторонние оптические явления, открытием которых обогащалась оптика в дальнейшем, наблюдаемые в обычном, например, белом свете, настолько сложны, что разобраться в них бывает чрезвычайно трудно. Но те же явления при применении монохроматического света значительно упрощаются, так что здесь является возможность установить закономерности. Сделав это и принимая во внимание принцип суперпозиции — один из плодотворнейших принципов оптики, мы уже без особенных затруднений, главным образом расчетным путем, переходим к общему случаю любого света. Этим путем шло познание всех новых оптических явлений.

Развитие идей Ньютона привело также к громадному обогащению фактической стороны науки.

В 1814 г. Фраунгофер нашел в сплошном солнечном спектре темные линии. В свете ньютонова открытия это означало, что в приходящем от солнца к нам свете отсутствуют или сильно ослаблены некоторые простые спектральные цвета.

С другой стороны, было найдено, что в спектре светящихся газов сплошная часть спектра отсутствует, а присутствуют только отдельные простые цвета — линейчатый спектр, причем комбинация их специфична для атомов данного сорта.

На основе этих двух фактов Бунзеном и Кирхгофом был создан спектральный анализ, которому суждено было сыграть такую огромную роль в физике, химии и астрономии.

Ведь только благодаря ему удалось решить казавшиеся абсолютно не разрешимыми задачи: определить химический состав небесных светил, определить лучевые скорости звезд (по отношению к земле), открыть и измерить магнитное поле на солнце и т. д. Что осталось бы от астрофизики, если отнять у нее спектральный анализ?

А в химии? Ряд новых элементов был открыт только благодаря спектральному анализу. В самое последнее время спектральный анализ дал возможность исследовать структуру сложных молекул, и эти исследования, давшие уже интересные результаты, несомненно открывают в этой области новую главу. Почти все это хорошо известные вещи, но не всегда помнят, что спектральный анализ — близкий и прямой наследник открытия Ньютона.

Одно замечание я хотел бы еще сделать. Когда стало ясно, что структура линейчатого спектра, испускаемого атомом, специфична для последнего, явилось желание познать динамику атома через посредство его спектра или, другими словами, построить механическую, вернее, механо-электрическую его модель.

Однако все попытки это сделать оказались тщетными. Более того, мало-помалу выяснилось — особенно убедительно это показал лорд Релей, — что этот неуспех не случаен, что действие **любой** механической модели будет находиться в противоречии с наблюдаемой закономерностью в спектрах.

Получился конфликт, который один из видных ученых назвал скандалом тогдашней физики.

Гордиев узел разрубил, опираясь на знаменитое открытие Планка, Бор в 1913 г.

Дело в том, что всегда исходили из молчаливой предпосылки, что атом, как механическая система, подчиняется законам механики Ньютона. Но эта предпосылка ни на чем не основана. Механика Ньютона сохраняет всю свою силу для макромира, но для микромира, для атомов нужно построить механику на новых принципах. Бор их указывает — основные. Тогда не только исчезают противоречия, но целый ряд совершенно необъяснимых прежде спектральных закономерностей, естественно, вытекает из новых предпосылок.

Таким образом, можно сказать, что оптические открытия Ньютона дали то оружие, которое в конце концов способствовало разрушению векового убеждения, или, вернее, предубеждения, в универсальной применимости механики Ньютона.

Но этот конфликт не был бесплоден. Он, как мы только что видели, был одним из стимулов, вызвавших к жизни ту, на мой взгляд, замечательную концепцию, которую мы называем квантовой физикой.

Разбирая ход идей Ньютона, мы оставили без внимания внешние события его жизни. Может быть, целесообразно восполнить коротко этот пробел. Мы видели, что Ньютон окончил университет в 1665 г. со степенью бакалавра. В начале 1668 г. он принят, как «Major Fellow», в колледж Trinity и в том же году становится магистром. В следующем году Барроу оставляет Люкасовскую кафедру, чтобы отдаться всецело богословию, и передает ее Ньютону. В начале 1672 г., как мы видели, он избирается в члены Королевского Общества. Таким образом, к 30-летнему возрасту Ньютон достиг той независимости и того положения, которое позволило ему посвятить себя всецело науке. Его профессорские обязанности не были обременительны. Он должен был читать одну лекцию в неделю — да и та, повидимому, часто отменялась за отсутствием слушателей — и давать дважды в неделю, если нужно, консультацию студентам. Повидимому, и в этом потребности большой не было.

Выбор темы предоставлялся профессору. Первые два года Ньютон читал оптику. На этих лекциях он впервые изложил свои открытия. Лекции при жизни Ньютона не были опубликованы. Несколько копий их было депонировано в архиве университета и выдавалось желающим.

Может быть, здесь уместно сказать несколько слов о том, какие труды по оптике оставил после себя Ньютон. В противоположность его астрономическим работам, которые предварительно не публиковались и составили содержание гениальных „Principia", замечательный доклад о которых академика А. Н. Крылова мы только что выслушали, оптические работы докладывались и печатались по мере получения результатов.

Основные мемуары, а также письма, замечания, полемика напечатаны в „Трудах" Королевского Общества. В 1704 г. Ньютон опубликовал свой главный труд по оптике: „Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света". Это сочинение Ньютона, написанное по-английски, получило широкое распространение. При его жизни вышло три английских, три латинских и одно французское издание.

Много раз „Оптика" переиздавалась в течение XVIII в. В ней Ньютон собрал то, что им было сделано раньше, дополнил и отчасти углубил. В качестве приложения Ньютон поместил ряд вопросов — „Queries". В них он дал результаты своих, несомненно многолетних, размышлений об оптике и о самых разнообразных вопросах физики. Это—замечательное произведение само по себе. О „Queries" я еще скажу несколько слов ниже. Наконец, в 1729 г. были изданы его „Lectiones opticae". Их содержание, приблизительно, насколько я могу судить, не имея их под руками, то же, что и „Оптики", но в „Оптике" отсутствуют какие бы то ни было математические выкладки. В „Lectiones" расчеты приведены in extenso. „Оптика" существует в русском высокоавторитетном комментированном переводе академика С. И. Вавилова. Из письма Сергея Ивановича я знаю, что в связи с теперешним юбилеем он перевел и „Lectiones". Мы все с нетерпением будем ждать их появления.

Я хотел бы указать еще на один источник. Это замечательный труд академика А. Н. Крылова, опубликованный им в 1935 г., — „Теория рефракции Ньютона". История этого труда, по сообщению самого Алексея Николаевича, с разрешения которого я ее привожу, такова. В 1832 г. на чердаке одного дома в Лондоне была обнаружена коробка, содержавшая разного рода рукописи и старые письма. В числе этих бумаг оказались 27 писем Ньютона к Флямстиду. Все бумаги были доставлены вице-президенту Лондонского астрономического общества Балби, приведены им в порядок и изданы в виде тома in quarto. В продажу книга не поступала, была разослана научным учреждениям и известным астрономам, так что эта книга — редкая. Алексей Николаевич купил ее случайно за два с половиной шиллинга на барахолке в Лондоне.

Среди писем Ньютона есть относящиеся к теории рефракции.

При определении положения светил из наблюдений нужно вводить поправку на искривление светового луча в земной атмосфере — так называемую атмосферную рефракцию. Ньютон не был удовлетворен существовавшими таблицами и создал свою теорию, по которой были рассчитаны таблицы. Этой теории Ньютон не опубликовал. Только в письме к Флямстиду он сообщает таблицу и формулирует основную теорему без доказательств. Таблицы еще раз были опубликованы Галлеем.

Алексей Николаевич восстановил ход мысли Ньютона и дал полное доказательство его предложений, причем он пользовался только теми математическими средствами, которыми располагал Ньютон, и тем воскресил эту чрезвычайно интересную работу Ньютона. Вот что говорит в заключение своей статьи Алексей Николаевич о ценности этой оптической работы для астрономии:

„Во все эти подробности я вошел, чтобы показать, насколько полна и обща та теория астрономической рефракции, которую Ньютон создал в конце 1694 г. и начале 1695 г., но которую он, к сожалению, не опубликовал. Если развить ньютонову теорию теми элементарными методами анализа, которыми Ньютон обладал, и сравнить ее с современными теориями, то сразу можно будет заметить, сколь простое и естественное получается изложение и сколько мало к нему по существу за 240 лет прибавлено“.

Еще одно замечание. Здесь, в Боровом, я не мог, конечно, в желательной мере пользоваться источниками. У меня была под руками обстоятельная новая популярная биография Луи Тренси Мора, которая содержит много писем Ньютона и цитаты из некоторых документов. Из трудов Ньютона я располагал благодаря любезности Алексея Николаевича только русским переводом „Оптики“ и трудом Алексея Николаевича, о котором я только что говорил. Приводимые мною фактические данные взяты из этих источников. За освещение и оценку их несу ответственность, конечно, я сам.

Как же были приняты открытия Ньютона современниками?

По получении его сообщения о новой теории света и цветов, о которой мы говорили выше, Королевское Общество на заседании постановило выразить автору благодарность за сообщение, довести до его сведения, что оно считает желательным напечатать сообщение, а также поручает секретарю переслать копию Гюйгенсу. Одновременно была выбрана комиссия, состоящая из архиепископа Салисберийского, Бойля и Гука, для подробного изучения сообщения Ньютона и доклада Обществу.

Уже в следующем заседании, состоявшемся через неделю, Гук представил свой подробный доклад. Трудно, говоря о Ньютоне и специально о его оптических работах, совсем обойти молчанием личность Гука. С 1662 г. он занимал должность куратора Королевского Общества. В его обязанности входило на каждом заседании Общества, т. е. раз в неделю, демонстрировать три или четыре значительных опыта (так было записано в протокольной книге Общества), не ожидая вознаграждения, пока не соберется соответственный фонд. В его обязанности входило также собирать раритеты для музея Общества. Среди раритетов был, например, живородящий страус, а также трава, выросшая в желудке дрозда. Гук был крупнейшим ученым, но разбрасывался и редко доводил свою мысль до конца. Его имя звучало бы теперь громче, если бы его не затемняло соседство Ньютона. В жизни Ньютона Гук играл роль злого гения.

Не было почти ни одной работы Ньютона, начиная от телескопа, которую Гук не раскритиковал бы или по поводу которой он не заявлял бы о своем приоритете. Ньютон его не любил и со своей стороны замалчивал его работы. Вот что говорит о нем биограф Ньютона Мор:

„Что это был за человек, чья личная оппозиция задержала публикацию „Оптики“ на 30 лет и чуть не воспрепятствовала завершению „Principia“, чей злой язык усугубил стремление Ньютона к замкнутости и уединению, охладив его юношеский энтузиазм по отношению к Королевскому Обществу, и отравлял ему вкус к науке?“

Доклад Гука замечателен во многих отношениях. Он содержит отдельные мысли, далеко, по моему мнению, опередившие его время и понятые только в конце XIX в. Лучше всего я прочту вам выдержку из этого доклада:

„Мне доставили большое удовольствие его поучительные и тонкие наблюдения. Но хотя я всецело согласен с ним в истинности того, что он утверждает, так как оно подтверждается сотнями испытаний, я в то же время должен сознаться, что не могу считать эти наблюдения неопровержимым доказательством истинности его гипотезы для решения проблемы о цветах...“

Отрицая далее за опытом 6-м значение experimentum crucis, он указывает между прочим на то, что предложение II не вытекает с неизбежностью из этого опыта.

Для него наличие всех цветов в белом луче столь же непонятно, как и утверждение о том, что все тона орга́на содержатся уже в воздухе мехов. И далее:

„Я не хотел бы быть понятым так, будто я этим всем возражаю против его теории как гипотезы, так как я очень охотно соглашаюсь с каждым из высказанных в ней положений и считаю ее весьма тонкой и остроумной и способной объяснить все явления цветов. Но я не могу ее считать ни единственной гипотезой, ни настолько неопровержимой, как математическое доказательство!“

Общество постановило послать копию Ньютону и продолжать, в случае его согласия, печатать сообщения Ньютона; доклад же Гука напечатать после, дабы Ньютон не мог счесть неуважением, что так быстро последовало опровержение на сообщение, встреченное Обществом дружными аплодисментами.

Вот что писал великий Гюйгенс по поводу открытия Ньютона Ольденбургу:

„Что же касается его новой теории цветов, то она мне кажется чрезвычайно остроумной, но нужно посмотреть, согласуется ли она со всеми опытами“.

А затем, в другом письме к Ольденбургу:

„То, что вы напечатали в последнем номере, сильно укрепляет его доктрину о цветах. Но в то же время причина света может быть совсем иной, и мне кажется, что он должен был бы удовольствоваться тем, чтобы считать свое утверждение вероятной гипотезой“.

Я не буду останавливаться на других оппонентах. Укажу только на одного, профессора физики в одном из парижских колледжей — Пардиза, так как, тронутый корректным тоном его критики, Ньютон ответил ему двумя подробными письмами, предназначенными, конечно, не только для него, но и для Гюйгенса и Гука. Нужно отметить, что Ньютон вообще чрезвычайно болезненно относился ко всякой критике его работ.

„Я вижу, — пишет он по поводу, правда, невежественной критики некоего Линуса, — я сделался рабом философии; когда я освобожусь от дела Линуса, я решительно распрощаюсь с ней навсегда, за исключением того, что я буду делать для собственного удовлетворения...“

И далее:

„Я вижу, нужно или отказаться от того, чтобы давать что-нибудь новое (в науке), или сделаться рабом для его защиты...“

Что же Ньютон отвечает по существу на критику Гюйгенса и Гука? Он считает, что критика их бьет мимо цели. Они критикуют его гипотезу, в то время как существо дела заключается совсем в другом. Вот что пишет он в письме к Пардизу:

„В моем труде изложены, по моему мнению, только определенные свойства света, которые, будучи теперь открыты, могут быть, как я полагаю, легко доказаны. Если бы я эти свойства не считал истинными, я скорее отбросил бы их как тщетную и пустую спекуляцию, чем признал бы их гипотезой“.

Приблизительно то же он пишет и в ответ Гуку:

„Верно то, что из моей теории я вывожу аргументы в пользу того, чтобы считать свет телесным явлением. Но это утверждение я не считаю обязательным. Я знаю, что найденные мною свойства света могут в известной мере быть объяснены другими механическими гипотезами, поэтому я предпочитаю отказаться от всех них вообще“. И кончает: „Вы видите, насколько нет нужды спорить о гипотезах“.

Итак, Ньютон обвиняет своих оппонентов в том, что они критикуют совершенно второстепенную часть его работы и что поэтому критика совершенно лишена значения.

Насколько я знаю, большинство историков науки считает эту отповедь Ньютона правильной. Я не могу с этим согласиться. Одно, конечно, бесспорно: в своих оптических работах — делом, а в только что приведенных высказываниях — словом Ньютон впервые провозгласил положение, что познать природу a priori нельзя, что высшей апелляционной инстанцией во всех физических вопросах является опыт, и этим закрепил за собой славу основоположника наших современных взглядов на физику. Но совершенно другой вопрос: возможно ли такое полное и строгое разделение фактов от теории, как его постулирует Ньютон?

Я не могу и не хочу касаться этого вопроса по существу.[1] Мне кажется, что в данном случае дело обстоит проще. Если в „Началах“ роль гипотез сведена до минимума, то это не так в „Оптике“. Здесь вся структура изложения и отдельные формулировки фактов носят отпечаток корпускулярной гипотезы и часто теряют смысл, если стать на волновую точку зрения. Мне кажется, таким образом, что и Гук и Гюйгенс имели основания для своей критики. В чем их можно упрекнуть, — это, на мой взгляд, в том, что они в пылу критики недостаточно оценили все громадное значение

[1] Не могу себе, однако, отказать в удовольствии привести высказывание одного из французских философов конца XVIII в.: „Sans théorie on ne sait ce qu'on dit quand on parle et ce qu'on fait quand on agit“. [Без теории мы не знаем, что мы говорим, когда разговариваем, и что делаем, когда действуем.]

открытия Ньютона в целом. Впрочем, нам, имеющим пред глазами плоды, которые эти открытия принесли, это сделать легче.

С опубликования первого оптического мемуара прошло около четырех лет. 18 ноября 1675 г. Ньютон представляет в Королевское Общество замечательный мемуар, посвященный исследованиям цветов тонких прозрачных пластинок или слоев. Эти исследования мы все знаем под названием „Ньютоновы кольца". Общеизвестно также, в чем состоит сущность явления.

Прозрачные неокрашенные вещества обнаруживают в очень тонких слоях яркие цвета. Хорошим примером могут служить цвета мыльных пузырей. В портах часто видны на спокойной воде красиво окрашенные пятна. Они появляются там, где плавают на воде тонкие слои керосина. Это явление было известно до Ньютона. Им занимались Бойль, Гримальди и особенно в своей книге „Micrographia" Гук, который подробно и правильно описывает относящиеся сюда явления под именем „фантастических опытов". Более того, толкование Гука содержит первый, правда, чисто качественный и расплывчатый вариант того, что мы сейчас называем интерференционным объяснением. Но никто, в том числе и Гук, не смог разобраться в этом явлении. Дело в том, что наблюдения делали в белом свете и тут явления слишком многообразны и сложны.

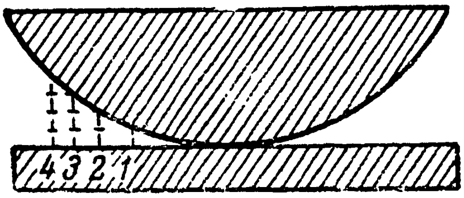


Рис. 6. $h = d,\ 2d,\ 3d, \ldots$
$h_1 = \frac{d}{2},\ \frac{3d}{2},\ \frac{5d}{2}, \ldots$

Ньютон приступил к этим опытам, предвидя с своей обычной прозорливостью, что здесь можно обнаружить новые свойства однородного света. Это ему, действительно, удалось. В однородном свете явления упрощаются, и Ньютону удалось найти те количественные закономерности, которые оказались типичными для всех интерференционных явлений. Уже в постановке опытов проявилось исключительное экспериментальное искусство Ньютона.

Количественные исследования в этой области трудны, так как толщина слоев — порядка $^1/_{1000}$ мм. Нужно измерять такие малые толщины. Соответственных устройств для этого тогда не было. Ньютон обходит трудность этого измерения замечательным приемом. На плоскую стеклянную поверхность он кладет выпуклой стороной плоско-выпуклую линзу — объектив телескопа с очень большим радиусом кривизны (рис. 6). Тогда между нижней плоской и верхней выпуклой поверхностями образуется чрезвычайно тонкий слой воздуха, обнаруживающий пестрые яркие цвета: цветные кольца в белом свете и чередование одноцветных светлых и темных колец — в однородном.

Гвоздь устройства в том, что, во-первых, толщина слоя различна в различных местах, т. е. мы имеем здесь как бы набор слоев различной величины, а главное: геометрия здесь такова, что расстояние от центра до данного места значительно, в несколько сот раз больше толщины слоя в этом месте. Измеряя это расстояние, мы определяем толщину, которая по малости не поддается непосредственному измерению, уже при помощи расчета.

Вот результат — основной результат Ньютона. Слой воздуха не отражает, если его толщина равна некоторой величине d или кратному d. Это уже замечательное явление. Если отставить нижнюю поверхность, то у нас отражение получается; при присоединении второй поверхности это отражение, как этим опытом показал Ньютон, пропадает. Наоборот, слой сильно отражает, если толщина его равна

$$\frac{1}{2}d, \ \frac{3}{2}d, \ \frac{5}{2}d \quad \text{и т. д.}$$

Ньютон экспериментально определил эту толщину d: для цвета на границе между красным и желтым она оказалась равной $^1/_{89\,000}$ дюйма.

Юнг первый в 1801 г. дал объяснение этому явлению с точки зрения волновой теории и дал ему имя интерференции. Объяснение это мы считаем правильным и сейчас. Оно состоит в том, что световая волна отражается от первой поверхности, а прошедшая часть — от второй. В точке наблюдения сходятся две волны, из которых вторая несколько запаздывает относительно первой. При общем запаздывании в целое число волн (в зависимости от толщины слоя) обе волны складываются. При запаздывании на полуцелое число волны взаимно уничтожаются. Ньютоновская толщина d соответствует в волновой концепции $\frac{\lambda}{2}$. Таким образом, Ньютон фактически впервые определил длину волны света. Его число отличается только на несколько процентов от современного.

Как же объяснил себе Ньютон это явление? Ему пришлось прибегнуть к специальной гипотезе, приписывая свету некоторые припадки — «fits», как он их назвал, «приступы», — делающие отражение то трудным, то легким. Но главное — он понял, что явление однозначно говорит за то, что в основе процессов, обусловливающих однородный свет, лежит периодичность. Это изначальное свойство, которое при всех перестройках оптических воззрений, вплоть до сегодняшнего дня, кладется во главу угла. Этого открытия никто у Ньютона никогда, как замечает академик С. И. Вавилов, не оспаривал. Только не все знают, что его сделал Ньютон; оно идет большей частью как анонимное.

В современной физике интерференционные явления играют чрезвычайно важную роль. Например, вопрос о разрешающей силе микроскопа относится к области интерференции. Интерференционные явления лежат в основе самых тонких методов измерительной техники.

Без привлечения интерференционных явлений известный опыт Майкельсона, давший толчок к созданию принципа относительности, не мог быть осуществлен. Мы видим, что первые фундаментальные количественные закономерности в этой области были установлены Ньютоном.

Я довольно подробно остановился на двух основных открытиях Ньютона. Я надеюсь, что мне удалось дать почувствовать, что они являются фундаментальными, так сказать, в буквальном смысле слова, тем фундаментом, на котором строились и строятся наши дальнейшие знания по оптике.

Но ими не исчерпываются оптические исследования Ньютона. В «Оптике» его есть много интересных замечаний, наблюдений и указаний, интерес к которым и сейчас может быть не только исторический. Я хочу коротко указать на следующее. Исследуя открытое незадолго до этого Бартолинусом двойное лучепреломление в исландском шпате, Ньютон пришел к выводу, что каждый из двух выходящих из кристалла лучей обладает интересным свойством. В то время как обычный луч имеет осевую симметрию, оба эти луча ее лишены. Не все проходящие через луч плоскости равноправны между собой. Такие лучи Ньютон называет поляризованными. Вы знаете, какую громадную роль играет в современной физике учение о поляризованном свете. Указанное важное свойство плоскополяризованного света идет от Ньютона. (Это замечание находится не в тексте, а в вопросах.)

Наконец, «Оптика» заканчивается изложением некоторых наблюдений, относящихся к явлениям, открытым Гримальди и касающимся изгибания лучей при их проходе около лезвия ножа, через щели и т. д., т. е. огибания светом препятствий. Ньютон делает ряд наблюдений в однородном свете, но ни к каким количественным закономерностям не приходит. Заканчивается «Оптика» следующими словами:

«Ввиду того, что я не завершил этой части моего плана, я закончу предложением только нескольких вопросов для дальнейшего исследования, которое произведут другие».

Эти вопросы, знаменитые «Queries», — как сказано, плод многолетних упорных размышлений, и не только по оптическим вопросам, — представляют исключительный интерес. В них между прочим Ньютон отрешается от своей нелюбви к гипотезам и показывает, что он лучше других умеет гипотезы измышлять. Эти вопросы — только по форме вопросы, по существу — это утверждения.

Нас учат, что Ньютон придерживался корпускулярной гипотезы, что Гюйгенс разработал волновую гипотезу, которая в конце концов одержала полную победу. Это, действительно, почти верно. Но это утверждение схематично, бледно и не дает, в сущности, никакого понятия об истинном положении дела. И это особенно ясно видно именно из «Queries». Ведь в таком виде это утверждение производит впечатление, будто Ньютон в известном смысле не дорос до волновой теории и что в этом отношении Гюйгенс его превосходит. Это глубоко неверно. Позвольте мне совсем кратко остановиться на этом вопросе и им закончить мой доклад.

Ньютон владел волновыми представлениями, доступными тому времени, лучше, чем все другие, в том числе Гук и Гюйгенс. Это он указал Гуку, что если волновая гипотеза была бы верна, то цвета различались бы широтой колебания, т. е. длиной волны. И вообще он отлично знал все тонкости волновой гипотезы, и если он ее отверг, то, как это парадоксально ни звучит, потому, что он ее лучше понимал даже, чем Гюйгенс, а поэтому и лучше видел те непреодолимые препятствия, которые стояли в то время на ее пути.

Ньютон видел три неопредолимых препятствия:

1) Если свет — волновое движение, то должна существовать механическая среда — жидкость, в которой волны распространяются, и она должна заполнять и все мировое пространство. Но тогда движение светил должно встречать сопротивление, которое, однако (согласно законам механики), фактически отсутствует.

2) Отсутствие осевой симметрии в поляризованном луче противоречит волновому движению; другие волны, кроме продольных, по аналогии со звуком, тогда не принимались никем во внимание.

3) Если свет — волновое движение, то он должен огибать, подобно звуку, препятствия, а это никогда, по мнению Ньютона, не наблюдалось. Планета, проходя мимо звезды, ее закрывает.

Гюйгенс, повидимому, не так ясно видел эти противоречия, которые были в то время вполне реальны. Во всяком случае, он тоже не умел их разрешить, но он либо не принимал их близко к сердцу, либо не чувствовал их безысходности.

Таким образом, и Гюйгенс оценивал положение ни в коем случае не лучше, чем Ньютон. Только тут сказалась разница темпераментов. Для Ньютона противоречия, из которых он не видел исхода, были нестерпимы. Гюйгенс не так остро их переживал — на счастье науки, потому что он не дал себя этим противоречиям отвлечь от разработки тех сторон волновой гипотезы, которые сохранились при ее эволюции. А может быть, здесь повторилось то, что в истории науки не раз бывало. Какой-то инстинкт подсказывает гению отрешиться от противоречий и итти дальше. Как сказано, это вопрос темперамента. Ньютон этого сделать не мог. Гений Ньютона сверкал другими гранями.

Была ли противоречивой корпускулярная теория Ньютона в его суждении?

На этот вопрос можно дать положительный ответ, но только в том смысле, что хотя не все известные явления нашли себе конкретное объяснение, но Ньютон указал или думал, что можно указать, путь, идя по которому, по его мнению, можно притти к объяснению; и не было тогда основания считать, что противоречия при этом возникнут. Специальные трудности он испытывал при объяснении приступов легкого отражения. Здесь он остановился на следующем представлении. Когда световые корпускулы падают на тела, то в них они возбуждают волны. Ньютон показывает, что при известном предположении о взаимодействии световых корпускул с этими волнами наблюдаемые явления, возможно, могут быть объяснены.

Таким образом, гипотеза Ньютона синтезирует корпускулярные волновые представления. Лучшим доказательством того, насколько серьезны были противоречия, заставившие Ньютона отказаться от волновой гипотезы, служит то, что должно было пройти приблизительно 200 лет, пока волновая теория, ценой полной перестройки, от них освободилась.

Только в начале XIX в. Юнг и Френель создали назревшую к этому времени гипотезу о поперечности колебаний света. Благодаря этому отпадало противоречие с поляризацией. Но крепка еще была позиция сторонников Ньютона, в числе которых были Пуассон, Лаплас и Био, которые в это время утверждали, что корпускулярная теория может считаться окончательно доказанной.

Чтобы покончить с волновой теорией, они предложили в качестве темы на большой конкурс Парижской Академии наук проблему диффракции, ожидая, что ее обработка будет окончательным триумфом корпускулярной теории. Несмотря на все препятствия, премировано было, однако, сочинение Френеля, исходившего из волновых представлений о природе света. Замечательные неожиданные качественные и количественные предсказания, правильность которых подтвердилась опытом, помогли им восторжествовать.

Однако первая трудность Ньютона, связанная с необходимостью вещественной среды, заполняющей пространство, не только при этом не была устранена, но, наоборот, казалась еще более непреодолимой. Самые отчаянные усилия делались для ее устранения. Но только в 1864 г. Максвелл, провозгласивший свою электромагнитную теорию, сделал это затруднение, если можно так выразиться, беспредметным (так как надобность в механической среде отпала). Наступил золотой век оптики. Правда, некоторые затруднения со временем возникли, но их не считали особенно опасными для всего здания (оптики) в целом. В этом смысле и опыт Майкельсона не нарушил гармонии.

Гений Эйнштейна внес принципом относительности еще бо́льшую общность и элегантность в электромагнитную картину. Но в начале этого века стали множиться открытия, которые заставили пересмотреть все основы. Сегодня у нас есть квантовая оптика — это, несомненно, громадное достижение. Но она имеет внутренние противоречия, исход из которых пока не виден. В ней также речь идет о синтезе корпускул и волн.

Ввиду этого иногда говорят, что мы приблизились к точке зрения Ньютона, и этим объясняют теперешний повышенный интерес к его исследованиям. Я не думаю, чтобы это было так. Слова действительно похожи, но физическое содержание, которое вкладываем мы теперь в понятия частицы и волны, совершенно другое, чем то, которое вкладывал Ньютон. Нет, не в этом величие и значение оптических открытий Ньютона.

Современное здание оптики несравненно обширнее, чем оно было во времена Ньютона. Оно еще не закончено, но уже ясно, что архитектурный стиль его совершенно другой, чем при Ньютоне. Как оно будет выглядеть, мы в точности не знаем. Но если мы верим в его будущую крепость, то потому, что оно покоится на прочном фундаменте, краеугольным камнем которого являются бессмертные творения великого Ньютона.

66

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН[1]

[Успехи физических наук, 26, вып. 2, 144—168, 1944. Совм. с Н. Д. Папалекси]

Возможно более точное определение c_0 — „скорости света в вакууме“ — является весьма важной задачей измерительной физики. Среди так называемых постоянных природы величина c_0 занимает существенное место. С одной стороны, c_0 — основная постоянная всей теории электромагнетизма. С другой же стороны, c_0 является скоростью распространения света и вообще электромагнитных возмущений в вакууме, т. е. „скоростью распространения света“ в собственном смысле слова. Наконец, точное опытное определение ряда других фундаментальных физических величин связано со знанием точного значения c_0.

Может быть, стоит указать на то, что так называемые универсальные постоянные определены в настоящее время с весьма различными степенями точности ([1]).[2] Так, точность определения элементарного заряда $e = (4.8025 \pm 1 \cdot 10^{-3})\,10^{-10}$ CGS оценивается около $2 \cdot 10^{-4}$. Приблизительно с той же точностью известна и постоянная h Планка: $h/e = (1.3793 \pm 2.3 \cdot 10^{-4})\,10^{-17}$ CGS. Постоянная Ридберга $R_\infty = 109\,737.30_3 \pm 0.017$ см$^{-1}$ определена с большей точностью, а именно, до $2 \cdot 10^{-7}$. Заметим уже здесь, что скорость света c_0 определена в настоящее время с точностью до $1.3 \cdot 10^{-5}$: $c_0 = 299\,776 \pm 4$ км/сек.

---

[1] Доклад, сделанный 16/II 1943 г. на заседании Совета по радиофизике и радиотехнике в г. Казани. [В несколько измененном виде был опубликован также в Изв. АН СССР, сер. физ., 7, 145—166, 1943.]

[2] [Список литературы — в конце статьи.]

Для определения c_0 применялось, как известно, много разнообразных методов: астрономических [2, 3] (как методов определения c_0, имеющих в настоящее время только историческое значение) и земных, как прямых, так и косвенных. Косвенный метод определения c_0 из сравнения электромагнитных и электростатических единиц дал в опытах Роза-Дорсей [8] значение $c_0 = 299\,790 \pm 30$ км/сек. Метод стоячих волн в системе Лехера [опыты Мерсье [9]] дал $c_0 = 299\,790 \pm 20$ км/сек. В настоящее время наиболее точное значение для c_0 получено из непосредственного определения скорости света при помощи методов, являющихся по существу модернизованными методами Физо и Фуко (вращающееся зеркало, зубчатое колесо, ячейка Керра).

В табл. 1 сведены результаты последних наиболее точных определений.

Таблица 1

Скорость света

Наблюдатель	Год	Метод	Результат в км/сек	Точность
Перротэн [4]	1902	Зубчатое колесо	$299\,901 \pm 84$	$3 \cdot 10^{-4}$
Майкельсон-Пирсон [4]	1926	Вращающ. зеркало	$299\,796 \pm 4$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
О. Миттельштедт [5]	1929	Метод конденсатора Керра	$299\,778 \pm 20$	$0.7 \cdot 10^{-4}$
Пиз и Персон [6]	1932 1936	Вращающ. зеркало	$299\,774 \pm 11$	$0.4 \cdot 10^{-4}$
В. А. Андерсон [7]	1940	Метод Керра	$299\,776 \pm 15$	$0.5 \cdot 10^{-4}$

Со времени опытов Герца и особенно с развитием радио все большее и большее значение приобретают вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в узком смысле слова, и специально вопрос о скорости их распространения v. Здесь опять возможны двоякого рода задачи. Можно смотреть на определение скорости распространения v этих волн в свободном пространстве как на метод для определения фундаментальной постоянной природы c_0. В диапазоне собственно электромагнитных волн для этой цели можно воспользоваться соотношением $v = \lambda \cdot f$ [как это, например, делают при определении c_0 из стоячих волн в системе Лехера [9]], причем f — число колебаний для частот до 10^{-8} Hz может быть определено весьма точно. В области оптических волн, как известно, у нас нет прямых способов для определения f, и число колебаний здесь определяется из зависимости $v = \lambda \cdot f$. Однако, по крайней мере до сих пор, этот путь не дал уточнения значений c_0, полученных из прямых оптических опытов. Другая задача, возникающая здесь, в диапазоне собственно электромагнитных волн, состоит в определениях скорости распространения v в действительных практических условиях. Эта задача приобрела в последнее время большое значение в связи с различными практическими применениями радиоволн: в геофизике (при исследовании ионосферы), в радионавигации и особенно при определении расстояния между двумя пунктами с помощью радиоволн (радиогеодезия).

На первый взгляд могло бы показаться, что для указанных применений нет надобности заново определять скорость распространения радиоволн, а можно считать ее значение равным значению c_0, полученному из оптических измерений. Не трудно, однако, заметить, что это не так, что нельзя a priori отождествлять искомую скорость v с „оптической". Дело здесь заключается в следующем. При оптических измерениях мы всегда, за исключением некоторых совершенно специальных случаев, имеем дело, ввиду малости световой длины волны, со скоростью света, характерной для данной среды, или, точнее, с той скоростью, с которой свет распространяется беспрепятственно в неограниченной среде с данными постоянными. При этом при переходе из одной среды в другую справедливы формулы Френеля или обобщение их на случай адсорбирующих тел.

Совершенно иначе дело обстоит в случае радиоволн. Вследствие их неизмеримо большей длины, условия распространения радиоволн существенно иные. В частности, ввиду того, что обычно расстояния и передатчика и приемника до земли сравнимы с λ, нельзя в этих случаях говорить о беспрепятственном распространении. Необходимо также упомянуть о тех ограничениях беспрепятственному распространению, которое вносит наличие *ионосферы*. Ввиду всего этого при рассмотрении проблемы скорости распространения электромагнитных волн, особенно в радиотехнике, возникают специфические вопросы, изучение которых имеет несомненно не только научный, но и большой практический интерес. Эти две стороны вопроса — знание того, как протекает процесс распространения радиоволн в данных условиях, и основанное на этом знании практическое использование этого процесса, — конечно, весьма тесно связаны между собой. Необходимо, однако, заметить, что очень многие практические вопросы радиотехники либо совсем не требуют знания скорости распространения радиоволн, либо для них достаточно знать ее величину лишь очень приближенно. Сюда относятся, например, основные для радиосвязи вопросы интенсивности приема. Хотя и здесь (например, в явлениях замирания) скорость распространения радиоволн играет большую роль, но для практической их трактовки достаточно лишь приближенно знать величину скорости. Поэтому до последнего времени при теоретическом и экспериментальном рассмотрении проблемы распространения радиоволн в соответствующих практике (хотя и сильно идеализированных) условиях главное внимание было прежде всего обращено на вопросы интенсивности приема, и вопрос о скорости распространения глубже не разбирался.

Однако, как уже было упомянуто выше, в последнее время возник целый ряд применений радиоволн, для которых вопрос о скорости v является жизненным вопросом, так как без точного знания количественных соотношений между положенными в основу методов измерений величинами и скоростью v невозможно полностью использовать эти методы на практике. Так, точное знание длины волны λ, а следовательно, и фазового запаздывания $2\pi D/\lambda$, играющих существенную роль в радиоинтерференционных методах измерения расстояний, невозможно без точного знания величины v, ибо λ определяется не непосредственно, а из соотношений $\lambda = v/f$.

Целью нашего доклада и является краткое изложение состояния вопроса о распространении радиоволн, или, вернее, вопроса о распространении так называемого „прямого" луча вдоль земной поверхности.

Первые измерения в действительных условиях были произведены по методу сигналов времени в связи с точными определениями долгот ([11]).

Особое место среди этих методов занимает метод „кругового радиоэхо", так как здесь отпадают все трудности, связанные с измерением в различных пунктах земного шара времени прохождения радиосигналов.

В самом деле, если t_1 означает фиксированный, например, на ленте осциллограммы, момент времени прихода прямого импульса, а t_2 — момент времени прихода импульса в том же прямом направлении после однократного обегания вокруг земного шара, то время обегания импульса вокруг земли равно $t_2 - t_1$. Однако для того чтобы получить отсюда скорость v, необходимо знать путь прохождения импульса, а также учесть то обстоятельство, что часть пути импульса проходит по ионосфере. Необходимо также иметь в виду, что при обегании вокруг земли мы имеем дело с „замкнутым" путем и что a priori принципиально считать скорость „постоянной" на всем пути нельзя. Это замечание впрочем относится ко всем методам измерения v по замкнутому пути, в частности и к интерференционным. В табл. 2 приведены результаты измерений по методу „кругового эхо" ([12, 13]).

Таблица 2

Скорость v по методу „кругового эхо"

Место наблюдения	λ, м	$t_2 - t_1$, сек.	v, км/сек
Науен (Германия)	14.9	0.1378	
Котвик (Голландия)	20.5	0.1361	
Бельвю (США)	16.2	0.139	
Среднее . .		0.1376	289 100

Приведем также результаты последних измерений v, произведенных по методу сигналов времени в 1933—1935 гг. между Парижем и Гонолулу ([14]) (табл. 3).

Таблица 3

Скорость v по сигналам времени

Пункт I	Пункт II	Год	λ	v, км/сек
Париж	Сайгон Манилла Монте Гранде	1933	16—18.5 м	286 700±200
	Москва Токио Рокки Пойнт	1935	16—31 м	287 400±400

Полученные этими методами значения v, несмотря на относительно небольшую точность, вполне достаточны для внесения поправок на скорость распространения радиосигналов для астрономической службы времени (определение долгот, гравиметрия и т. п.), однако условия распространения радиоволн здесь в значительной мере неопределенны и во всяком случае отличны от тех простейших условий распространения, которые имеют место в ряде практических применений и для которых из теории могут быть получены необходимые формулы. Кроме того, сама точность определения v по методу импульсов в области средних волн в настоящем его виде недостаточна как для проверки теории, так и для целого ряда практических применений радиоволн, основанных на использовании полученных из теории формул. Так, для измерения расстояний в 200 км с желательной для гидрографии сравнительно небольшой точностью (± 200 м) необходимо знать величину скорости v с точностью не меньше $^1/_{2000}$. Еще бо̀льшие требования к точности определения v предъявляет радиогеодезия: здесь дело идет о точностях порядка одной десятитысячной и меньше. Такие высокие требования в отношении точности определения v — поскольку они вообще осуществимы—естественно вызывают необходимость применить для решения этой задачи более точные методы. Этому условию вполне удовлетворяют интерференционные методы.

В соответствии со сказанным мы вкратце рассмотрим сначала выводы, к которым приводит теория в случае распространения электромагнитных волн вдоль земли и затем радиоинтерференционную методику и результаты измерений скорости распространения радиоволн интерференционными методами в действительных условиях.

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Первая попытка дать теорию распространения радиоволн вдоль поверхности земли была сделана Ценнеком в 1907 г. ([15]). Он поставил себе вопрос, „может ли вдоль поверхности земли, предполагаемой плоской и однородной, с константами σ и ε, распространяться одна бегущая плоская волна", и нашел, что уравнениям Максвелла и соответствующим граничным условиям на поверхности воздух — земля действительно удовлетворяют плоские волны типа так называемых „поверхностных волн". Вертикальная E_z и горизонтальная E_x компоненты поля такой волны пропорциональны $e^{j(\alpha z+\beta x)}$, где α и β — комплексные величины, зависящие от σ и ε. При $\sigma \neq 0$ или ∞ поверхностная волна затухает по экспоненциальному закону как в направлении распространения, так и в вертикальном направлении.

Далее — и это очень существенно — фазовая скорость этих волн вдоль поверхности земли зависит от констант σ и ε почвы и превышает скорость света в свободном пространстве. Ценнек предположил, но без оснований, что волны, излучаемые передатчиком, расположенным на поверхности земли, и будут иметь характер таких поверхностных волн вблизи поверхности земли на большом расстоянии от передатчика.

Концепция поверхностной волны Ценнека, ошибочно подкрепленная авторитетом Зоммерфельда, была до последнего времени почти общепринята (и не только в радиотехнических кругах). Ее применяли к истолкованию многих аномальных явлений, наблюдаемых при распространении радиоволн, например к так называемой „береговой рефракции". Однако сопоставление теории Ценнека с опытными данными приводит к разногласию. Так как, с другой стороны, и теоретическая концепция Ценнека совершенно не учитывала связи поля с источником, расположенным на поверхности земли, то нет основания считать, что она отвечает на интересующий нас вопрос о характере волн, распространяющихся в этом случае. Для того чтобы получить правильную картину электромагнитного поля излучения, в этом случае необходимо было дать строгое решение задачи о поле вертикального диполя, расположенного на поверхности раздела воздух—земля. Как известно, строгое решение этой задачи было впервые получено и продискутировано Зоммерфельдом (в 1909 г.) ([16]). Это решение дано им в виде определенного интеграла, который математически довольно естественно представлять в виде суммы трех слагаемых: $P + Q_1 + Q_2$.

Слагаемое P соответствует поверхностной волне Ценнека. Вследствие этого при первой дискуссии этого решения в своей работе 1909 г. Зоммерфельд и видел в нем подтверждение концепции Ценнека. Однако В. Фок ([17]), а затем Е. Нётер ([17]) показали, что Зоммерфельдом в этой дискуссии была допущена существенная неточность и что нельзя выделить слагаемое P из комплекса волн, даваемых полным решением. Правильность критики Фока и Нётера была затем признана самим Зоммерфельдом ([18]), который в 1935 г. сформулировал положение вопроса так: „Таким образом, волны типа P и Q не могут быть отделены друг от друга. Повидимому, не существует условий, при которых образуется поверхностная волна типа P, которая явилась бы главной составной частью волнового комплекса". Если, таким образом, и следует считать, что характер распространения радиоволн вдоль земли не соответствует поверхностным волнам Ценнека, то возникает вопрос: каков действительный характер поля, излучаемого антенной, находящейся на поверхности земли, и, в частности, какова скорость распространения излучаемых волн?

Хотя в строгом решении Зоммерфельда и содержится ответ на эти вопросы для вертикального диполя, однако до самого последнего времени, несмотря на большое число исследований, посвященных вопросу распространения радиоволн, и дискуссий решения Зоммерфельда, основное внимание было обращено не на скорость распространения, а на величину, особенно важную для практической радиотехники, а именно — интенсивность поля. В настоящее время для этой величины как функции расстояния, длины волны и постоянных σ и ε существует не только ряд расчетных формул, но также таблицы и графики. Вопросы фазовой скорости и вообще фазовых соотношений до самого последнего времени не подвергались исчерпывающему анализу; не существовало также никакой ясности в отношении фазовой структуры поля.

Теоретические и экспериментальные исследования, проводимые с 1934 г. в ряде научных учреждений нами вместе с большим коллективом сотрудников под нашим общим руководством, внесли, как нам кажется, определенность в эти вопросы и привели к установлению количественных зависимостей между фазовой скоростью радиоволн, длиной волны λ и константами почвы, которые могут быть положены в основу расчетов в области радиоинтерференционных измерений. Так как, в частности, полученные результаты имеют существенное значение для определения величины скорости распространения, то мы остановимся вкратце на них.

Дискуссия решения, данного Зоммерфельдом, приводит к следующему выражению для вертикальной слагающей вектора Герца:

$$\Pi = 2f(r)\,e^{-i\varphi}\,\frac{e^{j(\omega t - k_1 r)}}{r}, \tag{1}$$

откуда имеем для вертикальной компоненты

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right); \tag{2}$$

здесь r — расстояние до диполя, $k_1 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, v — фазовая скорость в верхней среде — воздухе; $f(r)$ — некоторая действительная функция от r — фактор ослабления; φ — разность в фазе, дополнительная к той, которая имела бы место при свободном распространении в верхней среде. Для $f(r)$ ван-дер Полем [19] дано следующее простое приближенное выражение, годное для $\frac{\varepsilon f}{2\sigma} < 0.2$:

$$f(r) = \frac{2 + 0.3\rho}{2 + \rho + 0.6\rho^2}, \tag{3}$$

где ρ — есть модуль введенного Зоммерфельдом „численного расстояния"

$$S = \rho e^{j\psi},$$

$$\rho = \frac{\pi r}{\lambda} \frac{\sqrt{(\varepsilon - 1)^2 + \left(\frac{2\sigma}{f}\right)^2}}{\varepsilon^2 + \left(\frac{2\sigma}{f}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{f(\varepsilon - 1)}{2\sigma}. \tag{4}$$

Для вопроса о фазовых соотношениях в поле электромагнитных волн, распространяющихся от диполя, и, в частности, для вопроса о фазовой скорости основное значение имеет величина дополнительной фазы φ. Выражение для мгновенной фазы Φ_M равно

$$\Phi_M = \omega t - k_1 r - \varphi = \omega t - \frac{\omega r}{v} - \varphi. \tag{5}$$

Для дифференциальной фазовой скорости v^* мы по определению имеем $v^* = \frac{dr}{dt}$, где dr и dt связаны соотношением

$$d\Phi_M(r, t) = \omega\, dt - \left(\frac{\omega}{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) dr = 0.$$

Отсюда

$$v^* = \frac{v}{1 + \frac{v}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial r}}. \tag{6}$$

Для средней же скорости $\bar{v}$ из

$$\frac{\omega r}{v} + \varphi = \frac{\omega r}{\bar{v}}$$

имеем

$$\bar{v} = \frac{v}{1 + \frac{v}{\omega}\frac{\varphi}{r}}. \tag{7}$$

Детальный разбор строгого решения Зоммерфельда, сделанный П. А. Рязиным [20, 21], при обычно выполняемом на практике предположении $\left|\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4\right| \gg 1$, привел к следующему результату. В случае распространения радиоволн непосредственно вдоль поверхности земли дополнительная фаза φ, которая является функцией от $\frac{\omega r}{c}$, ω, σ и ε, обладает следующими свойствами.

1. На расстояниях, близких к вертикальному диполю, находящемуся на поверхности раздела, дополнительная фаза φ *независимо* от свойств почв выражается той же величиной

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega r}{v}}{\left(\frac{\omega r}{v}\right)^2 - 1}, \tag{8}$$

что и в случае распространения волн от диполя в свободном пространстве (или, что то же, вдоль абсолютно проводящей земли).

2. Начиная с некоторого близкого к излучателю расстояния, дополнительная фаза φ есть монотонно возрастающая функция от расстояния, причем с увеличением r она стремится к некоторой предельной величине, зависящей как от констант почвы, так и от ω. Существенным здесь является то обстоятельство, что φ не включает в себе члена, линейно растущего с расстоянием. П. А. Рязиным дано приближенное выражение для этого предела, а именно:

$$\lim_{r \to \infty} \varphi = \pi - \psi. \tag{9}$$

Предельное значение φ лежит между π (случай хорошей проводимости и длинных волн) и $\pi/2$ (очень плохая проводимость, очень короткие волны).

Этот, на наш взгляд, существенный результат можно [см. формулы (6) и (9)] выразить и так: на достаточно больших расстояниях от передатчика фазовая скорость v равна скорости c распространения радиоволн в воздухе независимо от свойств почвы. Далее, так как $\varphi \leqslant \pi$, то для $r \gg \lambda$ дополнительная фаза φ является лишь небольшой поправкой к полному фазовому углу. Этот результат имеет весьма существенное значение и с практической точки зрения, так как он позволяет во многих случаях совсем не принимать во внимание различие в свойствах почвы, которые практически почти всегда трудно точно учесть.

В тех же случаях, когда поправку требуется ввести, для ее вычисления достаточно приближенного знания значений постоянных почвы (σ и ε).

Для иллюстрации зависимости φ и v^* от r, f, σ и ε ниже приведен ряд графиков (рис. 1 и 2), вычисленных П. А. Рязиным.

Заметим, что дополнительная фаза при удалении вверх от поверхности земли должна естественно уменьшаться и на некоторой высоте

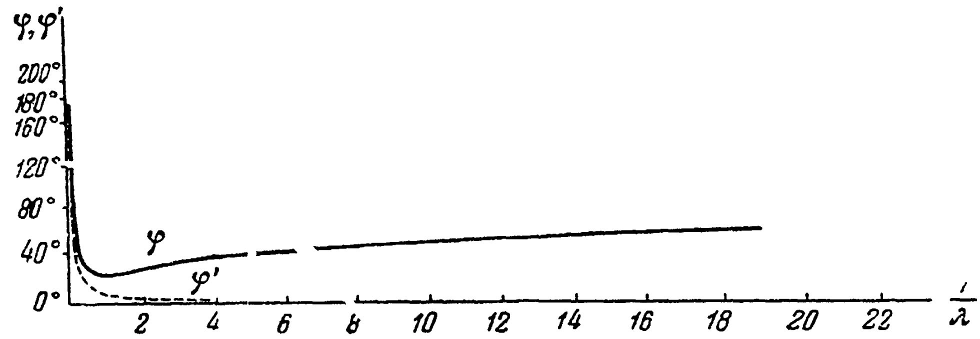


Рис. 1. Зависимость дополнительной фазы φ вертикальной компоненты электрического вектора поля радиоволн от расстояния до излучающего диполя для длины волн $\lambda = 300$ м и проводимости почвы $\sigma = 5 \cdot 10^7$; φ' — то же для предельного случая бесконечной проводимости земли

над землей исчезнуть. Как вытекает из расчетов, проведенных П. А. Рязиным для этого случая, здесь независимо от расстояния

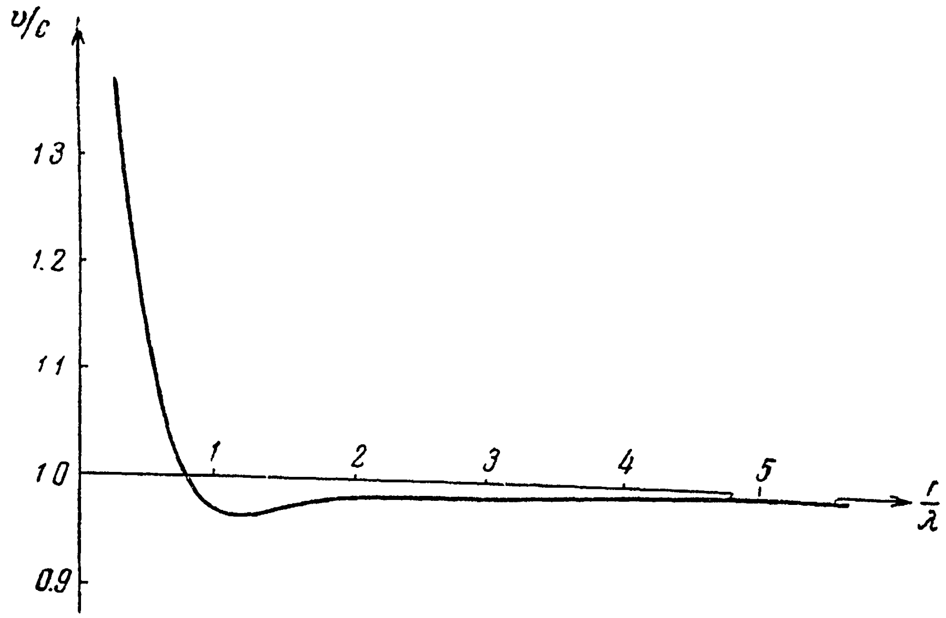


Рис. 2. Зависимости дифференциальной фазовой скорости v^* электрического вектора от расстояния до излучающего диполя в длинах волн $\sigma = 5 \cdot 10^7$, $\lambda = 300$ м и $\varepsilon = 10$

до излучателя существенно именно удаление над землей, а не угол элевации (подъема) над ней. График, на котором нанесены абсолютные значения изменения фазы $\Delta\varphi$ (рис. 3), иллюстрирует эти зависимости.

Как видно из этого графика, уже на высоте 3—4λ изменение фазы вертикальной компоненты по отношению к полю на поверхности становится практически постоянным и равным дополнительной фазе φ с обратным знаком.

Прежде чем перейти к рассмотрению полученного нами экспериментального материала, сделаем еще следующее замечание. Характерные особенности поля излучения вертикального диполя, расположенного на плоской поверхности раздела воздух — земля, выведены из приближенных формул, полученных из строгого решения

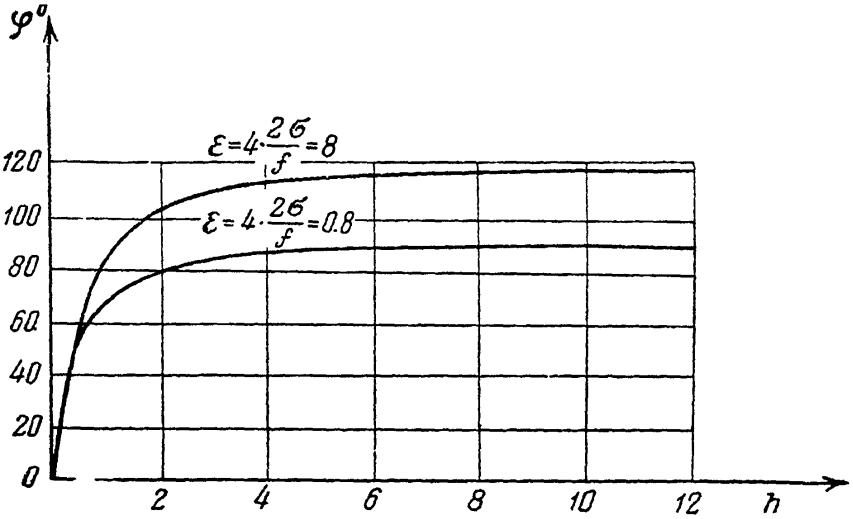


Рис. 3. Зависимость изменения фазы $\Delta\varphi$ (в градусах) вертикальной компоненты электрического вектора от высоты над земной поверхностью, выраженной в длинах волн

Зоммерфельда. Это, разумеется, единственно правильное их обоснование. Интересно, однако, то обстоятельство, что в случае $\left|\frac{k_2}{k_1}\right| \gg 1$ мы получаем на поверхности раздела на достаточно большом расстоянии от излучателя электромагнитное поле, аналогичное по своему строению полю задачи Зоммерфельда, если рассчитаем поле от вертикального же диполя, но расположенного не на самой поверхности раздела, а на некоторой определенной высоте h над ней, применив при этом для расчета отраженной волны обычную формулу тангенсов Френеля (конечно, с учетом того, что в рассматриваемом случае волновое число k_2, а следовательно, и показатель преломления комплексны). Для вертикальной компоненты вектора Герца получается в этом случае выражение

$$\Pi_1 = (1 + R)\frac{e^{j(\omega t - k_1 r)}}{r},$$

где

$$R = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)},$$

а α — угол падения и β — угол преломления связаны между собой соотношением

$$k_1 \sin\alpha = k_2 \sin\beta.$$

Так как при сделанных предположениях $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и β малы, а именно:

$$\gamma = \frac{h}{r} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{k_1}{k_2},$$

то

$$1 + R = \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{2}{1 + \frac{k_1}{k_2}\frac{r}{h}}.$$

Если положить теперь $h = \left|\frac{k_2}{k_1^2}\right|$ и принять во внимание, что при сделанных предположениях

$$\left|\frac{k_1^3}{k_2^2}\right| r = 2\rho,$$

где ρ есть не что иное, как модуль численного расстояния Зоммерфельда [см. формулу (4)], то тогда

$$\Pi = \frac{2}{1 + 2\rho e^{-j\pi/4}} \frac{e^{j(\omega t - k_1 r)}}{r}.$$

Положив

$$\frac{1}{1 + 2\rho e^{-j\pi/4}} = F(r)\, e^{-j\varphi},$$

имеем

$$F(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{2}\rho + 4\rho^2}}$$

и

$$\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{\rho\sqrt{2}}{1 + \rho\sqrt{2}}. \qquad (8^*)$$

Таким образом, $F(r) = 1$ для $\rho \to 0$ и $F(r) = \frac{1}{2\rho}$ для $\rho \to \infty$, т. е. ведет себя в этих предельных случаях так же, как и фактор ослабления $f(r)$ [ср. формулу (3)]. Для промежуточных значений ρ $F(r)$ отличается от $f(r)$, но не больше чем на десятки процентов. Что же касается дополнительной фазы, то, как видно из (8*), мы и здесь имеем монотонный ход φ с увеличением $\rho(r)$, причем и в этом случае φ

стремится к определенному пределу $\varphi_\infty = 2\pi - \frac{\pi}{4}$. Таким образом, и здесь характерным является то обстоятельство, что на больших расстояниях от излучателя средняя и дифференциальная скорости распространения не зависят от свойств почвы.

Отметим также, что указанная теоретическая иллюстрация приводит для больших численных расстояний также к правильному значению угла наклона электрического поля.

II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

А. Методика

Для исследования различных вопросов, связанных с распространением волн вдоль поверхности земли, и, в частности, для измерения скорости распространения нами, как было уже указано, был применен интерференционный метод. Сущность его вкратце заключается в следующем ([21, 22]).

Пусть волны, излучаемые передатчиком, находящимся в пункте I достигнув пункта II, отражаются и снова возвращаются в пункт I. Разность фаз Φ в пункте I между излучаемыми и принимаемыми отраженными колебаниями, являющаяся непосредственным объектом измерений, очевидно, слагается из: 1) разности фаз Φ_1 на пути от п. I к п. II, 2) разности фаз δ_2 в аппаратуре п. II при отражении, 3) разности фаз Φ_2 на пути от п. II к п. I и 4) разности фаз δ_1 в приемной аппаратуре п. I. Таким образом, полная разность фаз будет равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \delta_1 + \delta_2.$$

Как мы только что видели, теория дает для Φ_1 выражение

$$\Phi_1 = \frac{\omega_1 D}{v} + \varphi\left(\frac{\omega_1 D}{v}, \omega_1, \varepsilon, \sigma\right) \tag{10}$$

и аналогичное для Φ_2, причем в нашем схематическом случае $\Phi_2 = \Phi_1$. Таким образом, полагая $\Phi - \delta_1 - \delta_2 = \Psi$, где δ_1 и δ_2 суть константы аппаратуры, которые могут быть измерены (так называемые фазовые девиации аппаратуры), мы приходим к следующей основной формуле:

$$\Psi = \frac{2\omega_1 D}{v} + \rho_\varphi, \tag{11}$$

где ρ_φ — небольшой поправочный член, слагающийся из поправочных членов для прямого и обратного путей радиоволн.

Заметим следующее. Рассмотренная схема метода вполне соответствует схеме известного интерферометра Майкельсона, примененного им для точного измерения эталонов длины в длинах световых волн. Однако если в оптике — вследствие малости длин волн — не представляет труда, с одной стороны, осуществить отражение волн в пункте II и, с другой стороны, наблюдать в одном месте (в п. I) интерференционную картину, вызванную наложением прямого и обратного лучей, т. е. осуществить сравнительно простыми средствами хорошо направленные световые пучки и четко локализовать световое поле, то в области радиоволн такая задача представляет очень большие трудности.

Прежде всего „отражение“ волн в п. II должно быть заменено „релейным“ действием — колебание, пришедшее из п. I в п. II, приводит в действие местный передатчик, играющий роль отражателя. Необходимо далее, чтобы отраженные волны были „когерентны“ с падающими. Это достигается в основном путем использования явления „захватывания“. Однако главная трудность заключается в том, чтобы измерить в п. I разность фаз между мощными колебаниями, создаваемыми своим передатчиком, и слабыми колебаниями, пришедшими из п. II. Если оба эти колебания имеют одну и ту же частоту, то точное разделение их в п. I представляет чрезвычайно трудную (с требуемой точностью — практически невыполнимую) задачу. Мы обошли эту трудность тем, что колебания, пришедшие из п. I, при отражении в п. II трансформируются по частоте в рациональном отношении (обычно в отношении 3:2 или 4:3), причем эта трансформация должна все время происходить когерентно. Таким образом, на п. I должна быть измерена разность фаз между двумя колебаниями с рациональным отношением частот. Одним из способов измерения является способ фигур Лиссажу, который и был широко использован нами ([23]).

Вернемся теперь к формуле (11), которая, как легко показать, справедлива и в этом случае, причем Ψ есть полное запаздывание (на прямом и обратном пути), измеренное в периодах колебания с частотой ω_1. Из нее видно, что Ψ заключает в себе, при больших по сравнению с λ расстояниях, большое число полных фазовых циклов θ (при равных частотах $\omega_1 = \omega_2$, $\theta = 2\pi$; для $\omega_1/\omega_2 = 3/2$, $\theta = \pi$). Так как непосредственно измерять фазовые углы можно лишь в пределах одного полного цикла изменения фазы, то мы напишем полный фазовый угол Ψ в виде

$$\Psi = z\theta + \psi.$$

Здесь z есть целое число полных фазовых циклов, а ψ — фактически измеряемый фазовый угол, представляющий собой дробную часть цикла. Таким образом, формула (11) принимает вид

$$z\theta + \psi = \frac{2\omega D}{v} + \rho_{\varphi}. \tag{12}$$

Как видно из этой формулы, ее одной недостаточно для определения скорости распространения v, так как измерением можно найти лишь величину ψ, а не $z\theta + \psi$. Для получения необходимой дополнительной зависимости можно поступить двояким образом.

1. Во-первых, можно поступить так, как это делается при измерении эталонов длины с помощью интерферометра Майкельсона, а именно: наблюдать, как изменяется разность фаз при непрерывном изменении расстояния D между пунктами I—II от D_1 до D_2. Тогда мы, очевидно, получим

$$\Delta\Psi_D = h_D\,\theta + \psi_D = \frac{2\omega\Delta D}{v} + \Delta\rho_D, \tag{13}$$

где h_D — наблюдаемое целое число полных циклов изменения фазы при плавном изменении расстояния на ΔD. Этот метод, который вполне соответствует методу интерферометра Майкельсона, получил название „метода передвижения" или „метода радиолага" ([24]).

II. Во-вторых, наблюдая при неизменном расстоянии D за изменением Ψ при плавном изменении частоты ω_1 от ω_x до ω_α, — прием, который впервые применил Эпльтон в своем известном методе измерения высоты, — мы, очевидно, получим

$$\Delta\Psi_\omega = h_\omega\,\theta + \psi_\omega = \frac{2\Delta\omega D}{v} + \Delta\rho_\omega. \tag{14}$$

Так как этот метод изменения частоты позволяет, зная скорость v, определить непосредственно расстояние D между двумя пунктами, то он получил название метода *радиодальномера* ([21, 22]).

При наших измерениях скорости v мы использовали оба эти метода.

В случае применения метода радиодальномера расстояние между обоими пунктами, в которых находились измерительные станции, определялось геодезически, с возможно большей точностью, частота $\Delta\omega$ была определена, как $\Delta\omega = \omega_{1\alpha} - \omega_{1x}$, где ω_{1x} и $\omega_{1\alpha}$ фиксировались двумя кварцевыми эталонами, температура которых измерялась или держалась постоянной с помощью термостата.

Из многочисленных серий наблюдений по среднему $\Delta\Psi$ вычислялось не v, а $\bar{v}$ и только потом, когда это с точки зрения достигнутой точности представлялось необходимым, вносилась поправка на $\Delta\rho$ (обычно порядка десятка градусов) и вычислялись v и v^*.

В случае применения метода радиолага одна из станций располагалась на судне или автомобиле. Частота ω оставалась неизменной и измерялась $\Delta\Psi_D$ при передвижении от пункта P_1 до P_2, расстояние которых до неподвижной станции измерялось геодезически.

Необходимо заметить, что главным источником ошибок при измерениях на море являлась трудность точного определения или фиксирования обоих пунктов I и II. Даже в тех случаях, когда при измерении по методу радиодальномера одна или обе станции расположены на судах, стоящих на якорях, возможны небольшие изменения точного положения пунктов, вызванные сносом или поворотом судна вследствие изменения силы или направления ветра, течения, прилива или отлива. Особенно большое значение имеет при этом снос во время самого измерения, так как он вызывает изменение фазы из-за изменения D, тогда как наблюдаемое изменение предписывается изменению $\Delta\Psi$ вследствие изменения частоты при неизменном D. Легко видеть из (13) и (14), что, таким образом, ошибка в определении D увеличивается в $\omega/\Delta\omega$ раз. Так, например, если судно переместилось за время перехода от ω_x к ω_α только на 3 м, то это приводит при $\omega/\Delta\omega = 40$ к ошибке, соответствующей изменению D на ± 120 м.

В наших опытах на эти источники ошибок было обращено большое внимание и их вредное влияние по возможности устранялось как более тщательным определением положения судна, так и ускорением и увеличением числа измерений с переходом от ω_x к ω_α и обратно.

Б. Экспериментальные результаты

Прежде чем перейти к изложению результатов измерений, заметим следующее. При теоретическом выводе формул для фазовых соотношений в поле излучения диполя, находящегося вблизи поверхности земли, мы исходили из далеко идущей идеализации действительных условий, в которых происходит распространение радиоволн. В действительности поверхность земли не является плоскостью, разделяющей два однородных не изменяющихся во времени пространства. Электрические свойства земли (σ и ε) не только не постоянны в пространстве, но могут изменяться и во времени (например, в зависимости от метеорологических условий). С другой стороны, атмосфера, окружающая землю, неоднородна, и ее электрические свойства, особенно верхних ионизированных слоев, подвержены изменениям во времени. Поэтому в действительных условиях возможно изменение как длины пути радиоволн D, так и их средней скорости $\bar{v}$.

Оценка влияния разнородных причин показывает, что можно в большом числе практически важных случаев считать эти изменения малыми; все же опытная проверка возможных изменений в этих случаях представлялась совершенно необходимой. Следует заметить, что могут быть также осуществлены и такие условия, когда эти изменения (особенно вызванные влиянием ионосферы ночью) велики. Это и было нами использовано, например, при наблюдениях во время полного солнечного затмения 19 июня 1936 г.

В связи с этим перед нами с самого начала возник вопрос о том, насколько формула (10) применима в действительных условиях и, прежде всего, действительно ли постоянна правая часть формулы (10).

Суждение о постоянстве может быть получено на основании измерений фазовых углов, проведенных в большом количестве в различные времена при определении скорости $\bar{v}$ как методом изменения частоты, так и методом перемещения. Таким образом, определение постоянства D/v получается как побочный продукт при определении v. Более точное определение степени постоянства D/v может быть получено и непосредственно, а именно путем непрерывного наблюдения изменения фазовой картины (разности фаз) на одном из пунктов при контроле постоянства частоты и фазовых девиаций аппаратуры в обоих пунктах. Этот метод позволяет производить исследование постоянства D/v не только при наличии одного единственного пути распространения, но также и в более сложных случаях. Кроме того, он значительно чувствительнее косвенных методов, так как при нем не требуется измерения фазовых девиаций, а только контроль их постоянства, что может быть произведено с большой точностью [см. ([21])].

Однако при той аппаратуре, которая была в нашем распоряжении, практически удавалось следить за постоянством D/v в течение лишь сравнительно непродолжительных промежутков времени (нескольких часов).

1. *Изучение постоянства скорости распространения радиоволн вдоль земной поверхности.* Начнем с изложения тех выводов, которые можно сделать относительно постоянства D/v из эксперимен-

тальных данных, полученных при определении скорости $\bar{v}$. Хотя, как было сказано выше, прямые непосредственные методы дают более точные результаты, мы все-таки коротко остановимся на этих выводах прежде всего потому, что при этом охватываются весьма разнообразные условия распространения, а также и потому, что при этом выявляются те особенности, с которыми приходится иметь дело при измерении самой скорости $\bar{v}$. Кроме того, этот материал позволяет составить суждение о постоянстве D/v в течение значительных промежутков времени.

Первый значительный экспериментальный материал для суждения о степени постоянства скорости $\bar{v}$ при распространении на значительных расстояниях в действительных условиях был получен во время экспедиционных работ ([22, 23]), проведенных в 1934 г. лабораторией высокочастотной физики ЦРЛ совместно с ЦНИИГАИК в районе Пятигорья (Сев. Кавказ) на пяти различных дистанциях:

Машук — Джуца	$D = 10\,424$ м
Машук — подножье Джуцы	$D = 11\,416$ „
Машук — Кабан	$D = 27\,894$ „
Пост — Кабан	$D = 24\,995$ „
Пост — ущелье за Кабаном	$D = 26\,620$ „

на волнах $\lambda_1 = 230$ м, $\lambda_2 = 345$ м.

Если представить в виде графика результаты этих измерений, которых было произведено около 1000, то получаются картины, подобные рис. 4 и 5 ([22]). На этих рисунках представлены результаты измерения разностей фаз, произведенных для одной и той же дистанции в различные дни, причем для наглядности здесь на оси ординат отложены не полные фазовые углы Ψ_x и Ψ_α, а только непосредственно измеренные дробные части фазовых циклов ψ_x и ψ_α [см. ([12])]. Как видно из этих рисунков, несмотря на значительный разброс наблюденных значений Ψ_α и Ψ_x, все они отличаются от среднего не больше чем на $\delta_\psi = \pm 25$. Аналогичные результаты получились и на других дистанциях.

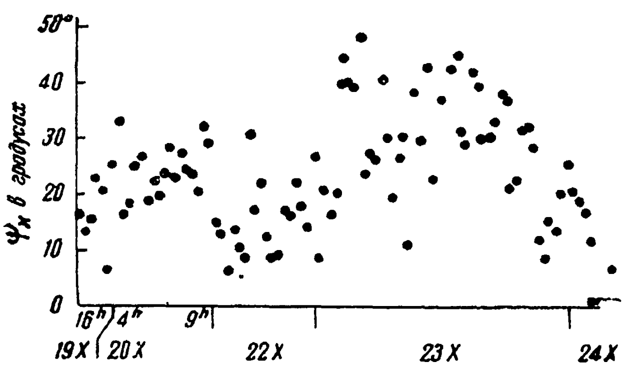


Рис. 4

Отсюда можно сделать следующее важное заключение. Так как совершенно невероятно, чтобы Ψ_α и Ψ_x менялись всегда скачком на целое число фазовых циклов, то ясно, что от наблюдения к наблюдению Ψ_α и Ψ_x менялись лишь на δ_ψ, т. е. на часть одного фазового цикла. Это заключение подкреплялось и тем, что за все время измерений ни разу не наблюдалось самопроизвольных, не вызванных перестройками или изменением состояния аппаратуры изменений фазы (фигур Лиссажу), из которых можно было бы заключить о возможности постепенного или скачкообразного изменения фазового угла на целое число циклов. Этот результат позволяет получить оценку постоянства Ψ_α; так как из наблюдений получилось для $\frac{D}{v} \approx 0.4 \cdot 10^{-5}$ сек., то, зная $f_\alpha = 1\,304\,886$ Hz, находим, что $\Psi_\alpha \approx 90\,000$ и $\frac{\delta_\psi}{\Psi_\alpha} \approx 3 \cdot 10^{-4}$, т. е. что D/v постоянно с точностью $3 \cdot 10^{-4}$.

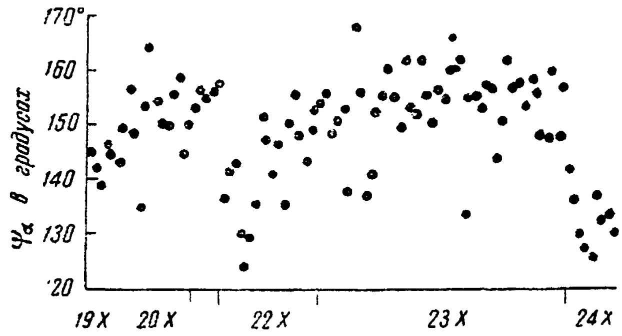


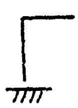
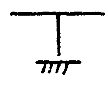
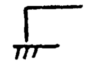
Рис. 5

При наблюдении в Пятигорье наибольшая дистанция была только около 28 км. Нужно отметить, что так как при этом применялись вертикальные антенны Т-образного типа, то, естественно, влияние отраженных от ионосферы лучей здесь было незначительным. Представлялось поэтому важным провести исследования постоянства разности фаз в пунктах, находящихся на более значительном расстоянии (100 км и более) друг от друга, для того чтобы выяснить пределы применимости интерференционных методов для практической задачи измерения расстояний и степень влияния на них ионосферных лучей.

Кроме того, уже первые измерения, проведенные на сравнительно небольших расстояниях, показали, что их точность значительно ниже той, которую принципиально может дать интерференционный метод. При этом одновременно выяснилось, что одной и, повидимому, наиболее существенной из причин, ограничивающих точность измерений, является недостаточная прецизионность измерительной аппаратуры. Поэтому для выяснения важного вопроса о постоянстве самого процесса распространения и вопроса о том, в какой мере степень постоянства может ограничивать точность радиоинтерференционных измерений, было целесообразно пойти дальше не по пути повторных измерений, а по второму пути, указанному выше. Для этой цели необходимо было поставить опыт таким образом, чтобы при гарантии возможно большей неизменности аппаратуры и постоянства частоты можно было непосредственно наблюдать за изменениями разности фаз, обусловленных изменением условий распространения радиоволн. Результаты таких опытов ([21, 22, 26]), проведенных нами в 1936 и 1937 гг., приведены в табл. 4.

Таблица 4

Наблюдения постоянства $\frac{\omega D}{v}$

Местность	Дата	Метод	Степень постоянства	Длина волн, м	Расстояние, км	Наблюдатели	Тип антенны
Пятигорье	Осень 1934 г.	Радиодальномер	$3\cdot10^{-4}$	230—345	28	Щеголев, Борушко, Виллер ([22, 23])	
Черноморское побережье, Озерейка — Лоо	Июль 1936 г.	Радиоинтерферометр	$6\cdot10^{-6}$	440—660	190	Альперт, Мигулин, С. Мандельштам, Рязин ([26])	
То же	Июль 1936 г.	То же	$4\cdot10^{-4}$ Только иногда от 6—9 час. утра	120—180	190	Альперт, Виллер ([26])	
Озерейка — Фальшивый Геленджик	Июнь 1936 г.	„ „	$2\cdot10^{-5}$	236—354	42	Щеголев, Виллер, Альперт, Борушко ([26])	 
Белое море, Рай-Наволок, Плоские Луды	Сентябрь 1937 г.	„ „	$5\cdot10^{-5}$	300—450	114	Щеголев, Борушко ([23, 26]),	

Из этих наблюдений можно сделать заключение, что в диапазоне волн $\lambda \geqslant 300$ м постоянство D/v сохраняется при распространении над морской поверхностью на расстояние до 150—200 км с относительной точностью, не меньшей 10^{-5}. Отсюда следует также, что при соответствующих антеннах можно пренебречь в этих условиях влиянием „небесных лучей".

Как показали измерения с радиодальномерами над сушей в районе Пугачева, на расстоянии около 100 км на волнах $\lambda \leq 300-450$ м не наблюдается влияния небесных лучей ночью даже в предрассветные часы (ноябрь 1939 г.) ([27]).

Таким образом, можно считать установленным, что постоянство оптической длины пути радиоволн при распространении вдоль поверхности земли на расстояниях порядка 100 км и даже больше настолько велико, что с этой стороны нет препятствий для использования радиоинтерференционных методов для точного определения скорости v радиоволн.

Что же касается еще бо́льших расстояний, то в настоящее время еще нет достаточно большого экспериментального материала, особенно с описанными выше чувствительными методами.

Исследования постоянства D/v на больших расстояниях были опубликованы в 1934 г. Деко и Галлем ([28]). Опыты производились на волне $\lambda = 349$ м между Парижем и Страсбургом (расстояние около 350 км) и на волнах около 24 и 33 м между Понтуаз, возле Парижа, и Алжиром (расстояние около 1500 км). Метод, которым они пользовались, заключался в следующем: из пункта I (Понтуаз, возле Парижа) посылались модулированные звуковой частотой N (1000-периодным током от камертонного генератора) волны частоты f_1 ($\lambda_1 = 24.15$ м), которые принимались пунктом II (Алжир или Страсбург), и после детектирования модулировали излучаемые передатчиком пункта II волны с несколько отличной частотой f_2 ($\lambda_2 = 24.65$ м). Эти волны принимались в пункте I, и полученный после детектирования 1000-периодный ток сравнивался по фазе с исходным модулирующим током, причем измерения фазы также производились по фигурам Лиссажу. Легко видеть, метод Деко и Галля значительно $\left(\text{в отношении } \frac{f}{N} \cdot \frac{u}{v}, \text{ т. е. примерно в 1000 раз, так как } u \approx v\right)$ менее чувствителен, чем примененный нами интерференционный метод, ибо мы имеем дело в опыте Деко и Галля с изменениями в основном не величины $4\pi f \frac{D}{v}$, как при радиодальномере, а величины $4\pi N \frac{D}{u}$, где u есть групповая скорость.

Наблюдения Деко и Галля показали следующее. На коротких волнах днем фазовая картина вообще оставалась стабильной, только от времени до времени наблюдалось легкое покачивание фигуры Лиссажу с периодом порядка нескольких минут, причем максимальное изменение фазового угла, наблюдаемое днем, было порядка 90°, что соответствует $\delta\left(\frac{2D}{u}\right) \approx 2.5 \cdot 10^{-4}$ сек. Ночью, наоборот, фигура Лиссажу непрерывно деформировалась и притом иногда столь быстро, что нельзя было следить за ее изменениями. Отсюда следует, что групповое время D/u изменялось не менее чем на 10%.

На *длинных волнах* ($\lambda = 349$ м) на более короткой дистанции (Париж — Страсбург, 350 км) днем фазовая картина была более стабильной. Ночью же наблюдались качественно те же явления, что и при коротких волнах, но они были выражены значительно слабее.

Необходимо заметить, что относительно малая стабильность фазовой картины в опытах Деко—Галля, несмотря на значительно меньшую чувствительность их метода, объясняется существенной ролью, которую несомненно играли при их наблюдениях небесные лучи. В частности, это имело место при опытах между Парижем и Страсбургом вследствие ослабления прямого луча из-за большого расстояния по суше.

2. *Измерение скорости распространения радиоволн.* Переходим теперь к изложению результатов наших измерений скорости распространения v. Как уже было указано выше, нашей задачей было не только определение средней скорости, но и проверка того, в какой степени применимы в действительных условиях формулы, полученные из решения проблемы Зоммерфельда для сильно идеализированного случая. Поэтому весьма существенно было выбрать для измерений соответствующие условия местности, причем важным дополнительным условием являлась возможность точного геодезического определения D.[1] Первые измерения производились, как уже указано выше, между пунктами, расположенными на вершинах гор, изолированно поднимающихся на достаточную высоту над равниной (район Пятигорья). Дальнейшие измерения производились над поверхностью водных пространств (море и озеро) и над сушей.

В табл. 5 сведены результаты основных измерений. Как видно, несмотря на сравнительно небольшую точность большинства этих

---

[1] Следует отметить большую помощь, которая была оказана нашим работам в этом отношении Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэросъемки и картографии в лице профессора О. Г. Дитц и инженера А. И. Грузинова и Гидрографическим управлением Северного морского пути.

Таблица 5

Скорость радиоволн

Местность	Дата	Метод	Результат, км/сек	λ, м	D, м	Наблюдатели
Пятигорье Машук — Кабан	Осень 1934 г.	Радиодальномер	298 300±1200	230—345	27 894	Борушко, Виллер, Щеголев ([21], [23], [28])
Одесса, море	Май 1935 г.	"	299 500±800	240—360	9000—28 000	Они же
Одесса, море	Май 1935 г.	Радиолаг	299 900±500	240—360	14 695±22	Папалекси, Борушко, Виллер, Щеголев ([21—23])
Ильмень, пресная вода	Осень 1935 г.	Радиодальномер	299 400±1500	240—360	37 611	Они же
Карские ворота, море	Лето 1936 г.	"	299 700±600	240—360	44 824	Борушко, Мигулин ([21])
Белое море	Сентябрь 1937 г.	"	299 600±100	300—450	113 738	Борушко, Щеголев ([21])
Пугачев Ровная степь,	Ноябрь 1939 г.	Радиолаг	298 650±170	130—195	1 263.5	Альперт, Мигулин ([27])
Пугачев Ровная степь,	Ноябрь 1939 г.	Радиодальномер	299 500±80	240—360	101 579.6	Грузинов, Миндлин, Борушко ([21])
Карское море	Осень 1940 г.	"	299 500±180	300—450	145 000	Мещеряков, Преображенский ([21])

измерений, полученные для $\bar{v}$ значения сравнительно близко совпадают с величиной c — скорости света в воздухе с учетом поправки на влажность [6] ($c = 299\,670$ км/сек), как этого и следовало ожидать на основании теории.

Из всех этих измерений можно вывести для скорости радиоволн над морем среднее значение

$$\bar{v} = 299\,600 \text{ км/сек}.$$

Это формально полученное среднее несколько отличается от величины скорости света в воздухе [с поправкой на влажность [6]], полученной Майкельсоном ($c = 299\,670$ км/сек). В настоящее время еще трудно с полной уверенностью сказать, можно ли придавать этому различию действительно реальное значение. Однако необходимо заметить следующее.

При вычислении $\bar{v}$ во всех приведенных в табл. 5 случаях дополнительная фаза не учитывалась, т. е. $\bar{v}$ вычислялось из

$$\bar{v} = \frac{4\pi\Delta f D}{\Delta\Psi_\omega} \quad \text{или из} \quad \bar{v} = \frac{4\pi f \Delta D}{\Delta\Psi_D}.$$

Между тем, и это очень существенно, дополнительная фаза в формуле (10) **всегда** положительна. Этим, повидимому, и может быть объяснено то обстоятельство, что среднее значение $\bar{v}$ получилось несколько меньше, чем значение c по Майкельсону. Действительно, порядок величины поправки, как в этом легко убедиться, вполне соответствует этому предположению. Пусть, например, $D = 114$ км, $\lambda = 300$ м, $\varepsilon = 80$ и $\sigma = 10^{10}$, что примерно соответствует случаю измерений в Белом море 4—9 сентября 1937 г. между о. Рай-Наволок и о. Плоские Луды.

Тогда, пользуясь формулами, выведенными П. А. Рязиным [20, 21], получаем $\Delta\rho_\omega = 4{,}^\circ1$. Так как $\Delta\Psi_\omega \approx 13\,700^\circ$ и $v = \dfrac{\bar{v}}{1 - \dfrac{\Delta\rho_\omega}{\Delta\Psi_\omega}}$ [см. формулу (7)], то поправка $\Delta v = \bar{v}\dfrac{\Delta\rho_\omega}{\Delta\Psi_\omega} \approx 90$ км и, следовательно, v почти в точности равняется значению c, полученному в воздухе, с учетом поправки на влажность. Конечно, такое близкое совпадение надо, принимая во внимание недостаточную точность измерений (около $^1/_{2000}$), считать случайным. Все же, может быть, не лишено интереса то обстоятельство, что, введя поправку на дополнительную фазу, мы не только получаем исправление величины скорости в нужном направлении, но и приходим к численному значению v, близко совпадающему с последними, наиболее точными значениями, полученными Майкельсоном и другими исследователями.

Весьма поучительным является в этом отношении также результат, полученный при измерении скорости распространения вдоль ровной поверхности суши в окрестности гор. Пугачева в ноябре 1939 г. ([27])

Полученное методом перемещения значение $\Delta\Psi_D = 7001°$ при изменении расстояния на $\Delta D_1 = 1263.5$ м от $D_1 = 1350.5$ м до $D_2 = 2614$ м дает

$$\bar{v} = \frac{720° f\Delta D}{\Delta\Psi_D} = (298\,650 \pm 170) \text{ км/сек.}$$

При этом $f = 2\,298\,360 \pm 120$ Hz. Если ввести теперь поправку на дополнительную фазу $\Delta\rho_D$, то, принимая $\sigma = 3 \cdot 10^6$, $\varepsilon = 4$ (сухая почва), получаем $\Delta\rho_D = 24°$, откуда

$$v = 299\,700 \text{ км/сек.}$$

Необходимо заметить, что поправка $\Delta\rho_D$, а следовательно, и правильный учет констант σ и ε играют особенно большую роль при сравнительно небольших $\Delta\Psi_D$, т. е. при небольших ΔD. Так, при $\sigma = 2 \cdot 10^6$ и ε от 3 до 5 $\Delta\rho_D$ получается уже несколько отличным, а именно $\sim 20°$, так что $v = 299\,500$ км/сек. При σ и ε, соответствующих не сухой почве, получились бы бо́льшие значения $\Delta\rho_D$, а следовательно, и $v > c$.

При больших расстояниях значение поправки $\Delta\rho$, а следовательно, и влияние констант почвы становятся меньшими. В этом отношении показательны результаты, полученные в той же местности, вблизи Пугачева, в то же время на расстояниях порядка 100 км. Здесь получилось $\bar{v} = 299\,500$ км/сек.

Таким образом, не только при распространении над морем, но и при распространении над достаточно ровной поверхностью суши (ровные степные пространства, луга и т. п.) мы получаем для скорости электромагнитных волн значение, близкое к c. При этом подтверждается правильность формулы (10), а также и то, что скорость v в ней есть действительно скорость света в воздухе. Следует, однако, заметить, что в настоящее время нет еще достаточных данных, ни экспериментальных, ни теоретических, относительно влияния неоднородностей почвы, неровностей поверхностей земли и т. д. на результаты измерений скорости распространения радиоволн. Поэтому еще нельзя сказать окончательно, насколько приведенные выше результаты, полученные при определенных условиях, показательны для измерений на суше вообще. Однако нам кажется, все же можно считать доказанным, что и при измерениях над сушей на волнах средневолнового диапазона с антеннами зонтичного или Т-образного типа можно пренебречь на расстояниях в несколько десятков (и даже сотен) километров влиянием ионосферных лучей.

Полученные нами результаты позволяют, как нам кажется, сделать следующие выводы.

1. При распространении радиоволн средневолнового диапазона вдоль поверхности земли на расстояниях до сотни километров постоянство оптической длины пути при применении антенн соответственного типа — порядка 10^{-5}. Отсюда следует, что в этих условиях можно не учитывать действия ионосферных лучей.

2. Полная разность фаз Φ между двумя отстоящими на расстояние D пунктами вблизи поверхности земли в электромагнитном поле гармонического излучателя (вертикального диполя), расположенного на поверхности земли, может быть представлена в виде

$$\Phi = \frac{2\pi f D}{v} + \varphi(f, D, \sigma, \varepsilon), \tag{15}$$

где v равна скорости света в воздухе, а дополнительная фаза $\varphi(f, D, \sigma, \varepsilon)$ с увеличением D в зависимости от f, σ и ε стремится к пределу, лежащему между $\pi/2$ и π.

3. При распространении над морем вплоть до расстояний порядка 200 км численное значение скорости v получается с точностью, не меньшей $5 \cdot 10^{-4}$, равной скорости света в воздухе.[1]

4. При распространении вдоль суши существуют условия (например, ровные степные пространства, луга), в которых с точностью не меньшей $6 \cdot 10^{-4}$ применима формула (10).

В заключение коснемся вкратце измерений скорости распространения радиоволн вдоль земной поверхности, проведенных в последние годы (начиная с 1936 г.) в Америке и Англии другими методами. Поводом к этим измерениям явились данные о скорости v, опубликованные Колвеллом, Хеллом и Хиллом в конце 1936 г. ([29]), согласно которым величина скорости v отличалась от скорости

---

[1] При трех длинах волн, которые нами применялись, и при указанных расстояниях влияние кривизны земной поверхности в пределах этой точности еще не сказывается на определении v.

света на треть и более. Метод, которым пользовались эти исследователи, основывался на измерении (с помощью развертки на экране катодного осциллографа) интервала времени между моментом посылки импульса длительностью порядка 10^{-4} сек. из одного пункта A и моментом прихода такого же импульса из другого пункта B, посылаемого оттуда в момент прихода туда импульса из A. Регулировка момента посылки импульса пунктом B производилась с помощью регулятора фазы, установленного в цепи переменного тока, общего для обоих пунктов. Частоты колебаний, излучаемых обоими пунктами, были соответственно: $f_1 = 2398$ kHz ($\lambda_1 \approx 60$ м) и $f_2 = 1614$ kHz ($\lambda_2 \approx 145$ м). Из наблюдения Колвелла, Хелла и Хилла вытекало, что v значительно меньше c, составляя в среднем около $^2/_3 c$, иногда снижаясь до половины (54%), причем ими наблюдались значительные колебания значений v изо дня в день и даже от опыта к опыту. Эти результаты вызвали, естественно, большое недоверие к их правильности, особенно принимая во внимание, что ввиду небольшого расстояния (около 20 км) между пунктами A и B какое-либо заметное влияние ионосферных лучей надо было считать здесь исключенным. Было весьма вероятно, что, как нами и было высказано в примечании к нашей первой статье ([22]), уже находившейся в печати, когда появилась статья Колвелла, Хелла и Хилла, дело заключалось в недостаточной оценке и неправильном учете авторами времен релаксации аппаратуры, точное значение которых в их методе должно было играть решающую роль, так как они были того же порядка, что и измеряемые времена.

Статья Колвелла, Хелла и Хилла вызвала ряд новых экспериментальных исследований для определения величины v при свободном распространении вдоль земли, которые показали неправильность результатов этих авторов. Так, уже в апреле 1937 г. Росс и Слоу ([30]), измеряя с помощью катодного осциллографа разность фаз колебаний, наводимых в двух вертикальных антеннах, расположенных вдоль направления радиоволн на расстоянии 34.9 м друг от друга, получили для фазовой скорости v на различных частотах от 2.5 до 15 MHz в среднем величину, равную 295 000 км/сек с точностью, оцененной авторами в 5%, при крайних значениях 310 000 и 275 000 км/сек.

Для того чтобы внести полную ясность в этот вопрос, Фармер и Моганти ([31]) в 1939 г. повторили на частотах порядка $1.8 \cdot 10^6$ Hz опыты Колвелла, Хелла и Хилла, приняв всевозможные меры для устранения источников ошибок. Главные из таких ошибок были: а) ошибка шкалы времен осциллографа; б) различие во времени прохождения сигналов разной интенсивности через приемные устройства; в) погрешность от неопределенности точки отсчета на огибающей импульса, наблюдаемой на экране осциллографа; г) неустойчивость режима электросети вследствие изменения нагрузки.

Опыты дали для v величину, равную 0.95 c, с вероятной ошибкой в 5—7% и таким образом установили ошибочность измерений Колвелла с сотрудниками.

Наконец, ошибочность полученных в 1936 г. Колвеллом результатов вытекает из работы, опубликованной в 1942 г. Колвеллом ([32]), который произвел вместе с сотрудниками — Вудом, Бейли и Маршем большую серию измерений на волнах с частотами $f_1 = 3492.5$ kHz и $f_2 = 2398$ kHz по несколько видоизмененному методу импульсов. При этих измерениях для исключения времени релаксации в аппаратуре сначала производились наблюдения, когда пункт B находился на расстоянии 0.79 км от пункта A, а затем тогда, когда пункт B перемещался на расстояние 3.67 км от A и скорость определялась из разности полученных в обоих случаях времен запаздывания импульса. Как среднее из 180 измерений получено

$$v = 298\,500 \text{ км/сек.}$$

Таким образом, и все эти измерения показывают, что нет оснований считать скорость радиоволн v при распространении вдоль земли отличающейся от скорости света в воздухе c больше чем на 3—5%.

Как указано выше, результаты наших измерений, произведенных с гораздо большей точностью [как это, впрочем, отмечается в работе Моганти и Фармера ([31]) и в обзоре Смит-Розе ([6]), сделанном им 7 октября 1942 г. на годовом собрании радиосекции Английского электротехнического общества , показывают, что скорость v не может отличаться от скорости света c больше чем на $5 \cdot 10^{-4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raymond T. Birge. Rev. Mod. Phys. **13**, Oct., 1941.
2. S. Glasenapp. Untersuchungen der Verfinsterung der Jupiter Satelliten. Petersburg, 1874.
3. H. Spencer Jones. Monthly Notices Astr. Soc. **87**, 28, 1927.
4. G. Wolfsohn. Handb. d. Phys. **19**, 906, 1928; R. Ladensburg. Handb. d. Experimentalphys. **18**, 27, 1928.
5. Otto Mittelstaedt. Ann. d. Phys. **2**, 285—312, 1929.
6. R. L. Smith-Rose. Nature **477**, 24 October 1942; Electrician **415**, 16 October 1942.
7. Wilmer C. Anderson. Phys. Rev. **51**, 596, 1937.
8. Rosa-Dorsey. Bul. Bureau of Stand. **3**, 433, 1907.

9. N. Mercier. C. R. **173**, 768, 1921.
10. Gutton. Journ. d. Physique **2**, 185, 1912.
11. C. C. Smith. Proc. of the Fifth Pacific Science Congress Victoria and Vancouver B. C. Canada, 1933.
12. E. Quäck. PIRE **15**, No. 12, 1927.
13. Taylor, PIRE **16**, 561, 1928.
14. N. Stoyko et P. Jouaust. C. R. **196**, 1292, 1933; **200**, 2149, 1935; **201**, 33, 1935.
15. J. Zenneck. Ann. d. Phys. **23**, 846, 1907.
16. A. Sommerfeld. Ann. d. Phys. **28**, 665, 1909.
17. Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ГОНТИ, стр. 937, 1937.
18. P. Frank u. R. Mises. Differ. u. Integralrechnungen d. Mech. u. Phys. **1**, 932, 1935.
19. Van der Pol. Zs. f. Hochfr. **37**, 152, 1931.
20. П. А. Рязин. Изв. АН СССР, сер. физ. IV, 484, 1940.
21. Новейшие исследования распространения радиоволн вблизи земной поверхности. Сб. статей под ред. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Гостехиздат; Л. И. Мандельштам. Изв. АН СССР, сер. физ., № 4, 525, 1938.
22. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ **7**, 559, 1937 [т. II, статья 43].
23. Е. Я. Щеголев. ЖТФ **7**, 579, 1937.
24. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ДАН СССР **26**, 782, 1940 [т. II, статья 44].
25. E. V. Appleton a. Barnett. Proc. Roy. Soc. **113**, 450, 1926.
26 Н. Д. Папалекси. Изв. АН СССР, сер. физ., № 4, 539, 1938.
27. Я. Альперт, В. Мигулин и П. Рязин. ЖТФ **11**, 29—34, 1941.
28. C. Decaux et J. Galle. C. R. **198**. 2239. 25 Juin, 1934.
29. R. C. Colwell, N. J. Hall a. L. R. Hill. Journ. Frankl.-Inst., 559, Nov., 1936.
30. W. Ross a. E. Slow. Nature **139**. No. 3520, 671, 1937.
31. F. T. Farmer a. Mohanty. Proc. Phys. Soc. **52**, 456, 1940.
32. R. C. Colwell, N. A. T. Wood, J. E. Bailey a. C. O. March. PIRE **30**. 139, March 1942.

67

О НАУЧНЫХ РАБОТАХ А. Н. КРЫЛОВА

[„Общее собрание Академии Наук СССР 25—30 сентября 1943 года“, 61—76[1]*]*

Я горжусь и радуюсь, что на мою долю выпала честь дать обзор главных этапов славной научной деятельности академика Алексея Николаевича Крылова. Но меня смущает следующее: область физики, в которой я работаю, несколько отлична от тех областей нашей науки, которые обогатил своими замечательными трудами Алексей Николаевич.

У меня возникает сомнение, смогу ли я их правильно оценить. Я кажусь себе путешественником, который при горном восхождении в непривычной местности не всегда верно ориентируется и часто недооценивает высоту находящихся перед ним горных вершин.

И еще одно обстоятельство меня смущает. Мы все знаем, что Алексей Николаевич, снискавший себе мировое имя как замечательный теоретик корабля и другими теоретическими работами, в то же время пользуется непререкаемым авторитетом у нас и за рубежом как замечательный инженер. Об этой важной стороне деятельности Алексея Николаевича я, ввиду своей некомпетентности, говорить не могу. Но монолитность всего творчества Алексея Николаевича может заставить меня хотя бы вскользь затронуть и ее, и тогда, я боюсь, что невольно нарушу XI заповедь, как ее сформулировал в одной из своих статей известный физик, ныне покойный О. Д. Хвольсон: „Не говори никогда о том, чего ты не пони-

---

[1] [Изд. АН СССР, М.—Л., 1944. Доклад прочитан на Общем собрании Академии Наук СССР 26 сентября 1943 г.]

маешь". Вы видите, что я имею все основания заранее просить вашего снисхождения.

В области физико-математических наук наша Академия имеет славное прошлое и славные традиции. Я не могу на этом долго останавливаться, но я хочу напомнить следующее.

В 1725 г. были приглашены в Академию два брата Бернулли из знаменитой семьи швейцарских математиков. Старший — Николай — рано умер. Даниил, которого некоторые историки нашей науки считают родоначальником современной математической физики, прославил свое имя замечательным трудом, заложившим фундамент всего учения о движении жидкости, о волнах, содержащим также первую попытку дать теорию качки корабля, — все это вопросы, весьма близкие творчеству Алексея Николаевича.

По настоянию братьев Бернулли в 1727 г. в Академию был приглашен 20-летний Эйлер, которому наука обязана между прочим знаменитыми гидродинамическими уравнениями и не менее знаменитыми уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки, сохранившими и в настоящее время все свое значение и которыми Алексей Николаевич пользуется с таким мастерством в своих трудах. Может быть, не общеизвестно, что Эйлер, этот универсальный гений, одно время хотел поступить лейтенантом в наш флот и поэтому ли или независимо от этого обстоятельства создал труд, напечатанный в 1749 г. в Петербурге в двух больших томах под заглавием „Scientia navalis" — морская наука. В нем он впервые ввел основные понятия и положения, сохранившие все свое значение до сих пор, и впервые воспользовался для решения корабельных проблем мощным орудием анализа.

Он и Bouguer, создавший почти одновременно, в далеком Перу, свою „Théorie du navire", по праву считаются основателями современной корабельной науки. После этого много знаменитых ученых всего мира работало плодотворно над проблемами корабля, но я не думаю, чтобы за все истекшее после Эйлера время можно было бы назвать ученого, который сделал бы для корабельной науки столько, сколько сделал для нее Алексей Николаевич. Следуя славным традициям нашей Академии, Алексей Николаевич приумножает ее славу.

По всему своему научному складу Алексей Николаевич — классик, Довольно трудно точно определить, что это значит. Бернулли, Эйлер — типичные представители классиков.

Мне кажется, что существуют все же некоторые характерные черты классического подхода к нашей науке. Может быть, вы мне позволите сказать два слова о том, как я эти черты понимаю. Это поможет мне дать более правильное освещение творчества Алексея Николаевича.

Первое — это отношение к вопросу — чистая или прикладная наука. Классики вообще, насколько я могу судить, этого различия не знали. В их трудах обе стороны знания взаимно дополняли и оплодотворяли друг друга.

Наука, говорит классик Гаусс, „*хотя и отзывчивая на материальные потребности, не ограничивается ими и требует для всех объектов своего исследования одинакового напряжения*".

Я думаю, что не ошибусь, если скажу, что научные интересы Алексея Николаевича направлены главным образом на решение принципиальных технических проблем на основе глубокого физико-математического анализа. Но, изучая его труды, особенно ясно можно видеть, как беспредметен спор о чистой и прикладной науке. В них так тесно переплетаются математика, физика и техника, что нет ни потребности, ни возможности расчленить живое, единое целое на отдельные части.

Далее, для классиков характерен выбор проблем.

В нашей науке, говоря несколько схематично, можно различить двоякого рода проблемы. Одни носят отпечаток искусственности; часто кажется, что они создаются только потому, что дают повод к более или менее остроумным конструкциям. К типу искусственных проблем я отношу также накопления того или иного опытного материала без руководящей идеи. Такие проблемы могут быть полезны и приводят иногда к интересным результатам, но, как правило, они мало способствуют *прогрессу* науки.

Совершенно иной характер носят проблемы, естественным образом вытекающие из органического развития какой-нибудь отрасли знания. Они жизненны и потому плодотворны. Я не хотел бы быть неправильно понятым. Говоря „жизненный", я не имею в виду сказать „утилитарный".

Эйнштейн своим принципом относительности, Планк, Бор и другие квантовой механикой — я привожу только самые разительные примеры — ответили на глубоко жизненные вопросы, значение которых не может быть переоценено. Науку двигает вперед решение жизненных проблем. Но именно ввиду их жизненности они большей частью трудны. Природа, ставя проблему по существу, предоставляет нам самим найти соответствующую четкую формулировку, отделить главное от второстепенного, а это часто не легко.

Природа, как говорил Френель, строит свои законы через голову математических трудностей, которые физику, однако, нужно преодолевать. Поэтому решение важных жизненных проблем под силу только крупнейшим ученым. Отличительной чертой творчества Алексея Николаевича является глубокая жизненность сформулированных и решенных им проблем. С этим тесно связана чрезвычайно большая разносторонность Алексея Николаевича. Жизнь, выдвигая те или иные проблемы, не считается с установленными нами — часто искусственно — границами между отдельными науками и их областями, границами, которые мы иногда — неизвестно почему — так ревниво оберегаем. Отсюда — разносторонность исследователя таких проблем. Но это не та разносторонность, которая охватывает одновременно и математику, и историю, и физику, и медицину, которая имела смысл в давно прошедшие времена, а теперь неизбежно связана с поверхностностью. Это разносторонность, происходящая от стремления охватить всю многогранную проблему в целом и от глубокого понимания связи между отдельными, для обычного глаза совершенно разнородными явлениями.

То, что я сейчас сказал, может быть, несколько схематично. Но эта схема наполняется живым содержанием, как только мы приступаем к конкретному рассмотрению замечательных трудов Алексея Николаевича. Что прежде всего, уже при самом беглом просмотре трудов Алексея Николаевича, поражает — это громадный объем созданного им, многогранность и целеустремленность его творчества.

Чтобы создать это, необходимо обладать, помимо таланта, громадной трудоспособностью и уменьем быстро и четко работать, — а это качество также весьма характерно для классиков естествознания. „Тот не рожден для славы, кто не знает цены времени", сказал Вовенарг.

Только в качестве примера я приведу следующее.

Цикл трудов Алексея Николаевича, охватывающий работы по теории корабля, включая и подготовительные курсы и сочинения, тесно к ним примыкающие, состоит из 11 томов, содержащих 4418 страниц, и сюда не вошли, например, работы по земному магнетизму и компасу. Не вошло большое число работ по механике, математике. Печатающееся собрание сочинений Алексея Николаевича, запроектированное пока в восьми томах (семь + дополнительный том), из которых шесть уже вышло, будет содержать около 50—60 работ, а всего до сих пор напечатано около 250 трудов Алексея Николаевича.

Естественно, нельзя и думать о том, чтобы в сегодняшнем докладе, даже вскользь, затронуть сколько-нибудь значительную часть исследований Алексея Николаевича.

Впрочем, я вижу свою задачу не столько в том, чтобы дать перечень и краткий анализ отдельных работ Алексея Николаевича, сколько в том, чтобы по мере моих сил ближе дать почувствовать общий научный облик и яркую индивидуальность замечательного ученого. Для этого, мне кажется, правильнее несколько подробнее остановиться на небольшом количестве вопросов, чем ограничиться беглым упоминанием большого их числа.

Позвольте мне начать несколько издалека.

В сентябре 1878 г., 15-летним юношей, Алексей Николаевич был принят в младший приготовительный класс морского училища. Уже в этом выборе школы, сделанном по настоянию самого Алексея Николаевича, проявилась его любовь к морскому делу, которую он полностью сохраняет и по сей день.

О том, как там учились и учили, мы знаем из блестящих „Воспоминаний" Алексея Николаевича. Занятия были построены так, что у учеников оставалось свободное время для самообразования.

Алексей Николаевич уже с юных лет заинтересовался математикой и изучал ее по университетским курсам, далеко выходившим за пределы программы училища.

В сентябре 1883 г. Алексей Николаевич перешел в старший специальный класс, где в числе прочих предметов преподавалась „девиация компасов". Заинтересовавшись этой проблемой, Алексей Николаевич занялся изучением математических, физических и практических вопросов, с ней связанных. Изучив литературу, он попробовал свои силы на самостоятельной научной работе. По отзыву специалистов, таких работ не делали и в морской академии.

Приказом от 1 октября 1884 г. Алексей Николаевич был произведен в мичманы с награждением премией имени Монде и занесением на мраморную доску.

Будучи еще в морском училище, Алексей Николаевич обратил на себя внимание Ивана Петровича де-Коллонга, морского офицера, являющегося, как указывает Алексей Николаевич, наряду с Пуассоном, Арчибальдом Смитом и Вильямом Томсоном, впоследствии лордом Кельвином, творцом той области знания, которая лежит в основе компасного дела, столь важного для мореплавания, а в настоящее время и для авиации. Де-Коллонг был фанатиком компасного дела. О нем говорили: „де-Коллонг считает, что корабли строятся для того, чтобы было на чем устанавливать компасы и уничтожать их девиацию".

Под руководством де-Коллонга Алексей Николаевич и начал свою научную деятельность. Первая работа, относящаяся к девиации, была выполнена в 1884 г., а затем напечатана в № 1 „Записок по гидрографии".

Прежде чем итти дальше, позвольте мне в двух словах сказать, в чем собственно заключается проблема девиации магнитного компаса. Казалось бы, дело с компасом обстоит очень просто. Мы все видели и пользовались карманным компасом. Насаженная на шпильке, для легкой подвижности, магнитная стрелка устанавливается в земном магнитном поле в северно-южном, вернее, почти в северно-южном направлении.

Судовой компас в принципе устроен так же, только со стрелками (здесь их обычно несколько) жестко соединен легкий круг — вся подвижная часть называется картушкой, — на котором нанесены градусные деления и румбы, так что на таком компасе непосредственно отсчитывается курс корабля. Без уменья владеть компасом вряд ли были бы возможны великие географические открытия. Какую же жизненную проблему выдвинуло компасное дело в половине прошлого столетия и которая, замечу это уже здесь, актуальна еще и сейчас? Я отвечу на этот вопрос пересказом того, что сообщает Алексей Николаевич в одном из своих трудов.

В 1862 г. в течение месяца у берегов Ирландии потерпели крушение два пассажирских парохода, шедших из Америки; на каждом из них погибло более 100 человек. Произведенное расследование показало, что оба крушения произошли от неучтенного изменения девиации их компасов.

Что же такое девиация? Дело вот в чем. Стрелка компаса показывает направление меридиана, когда поблизости нет магнитных масс или несущих ток проводников. Но если приблизить к компасу магнит или кусок железа, например железный ключ, стрелка отклонится в сторону, и теперь ее указания будут ложными.

До тех пор пока корабли строились целиком из дерева, компас честно выполнял свою службу, но когда в 40-х годах начали строить корабли целиком из железа, тогда проблема компаса приобрела особенную остроту.

Погрешность показания компаса, происходящая от влияния судового железа или электрических токов, называется девиацией.

Теперь ясно, в чем заключается *проблема* девиации. Нужно уметь учитывать эту погрешность, тогда можно пользоваться неправильным компасом, как можно пользоваться неправильно показывающими часами, если только точно знать, насколько они спешат или отстают. Еще лучше, — а иногда это единственно правильное решение — уничтожать девиацию, компенсируя влияние судового магнетизма добавочными магнитами и мягким железом.

Вот в чем проблема девиации и, как вы видите, чрезвычайно важная проблема. Для своего решения она требует глубокого физического понимания, она требует выдумки и изобретательности. Без решения проблемы девиации компасом пользоваться нельзя. Оказывается, между прочим, что девиация должна быть принята во внимание уже при конструировании самого компаса. И вот в 1886 г. Алексей Николаевич публикует относящуюся сюда свою вторую работу о компасе — „О расположении стрелок в картушке компаса" и решает эту задачу в общем виде. Эти расчеты и теперь сохраняют все свое значение.

В том же году Алексеем Николаевичем был построен дромоскоп, т. е. прибор для механического вычисления девиации на любом курсе корабля по известным ее коэффициентам. При этом им была указана принципиальная ошибочность теоретических основ дромоскопа, предложенного французом Фурнье. К этому же времени относится большая практическая работа Алексея Николаевича по уничтожению девиации на судах морского флота.

Глубокий знаток учения о земном магнетизме, знаток бессмертных творений в этой области Гаусса и замечательный переводчик его трудов, Алексей Николаевич неоднократно возвращался к вопросам земного магнетизма и в последующие времена. В 1940 г. появилась монография Алексея Николаевича „Основание теории девиации компаса", в основе которой лежит несколько лекций, прочитанных им в Институте теоретической геофизики. В ней ясно и просто, по-своему, излагается вся теория девиации, дается впервые аналитическое решение известной задачи де-Коллонга, с численным примером, дающим возможность судить о достигаемой точности при графическом решении. Часть 2-я этого труда посвящена изложению методов уничтожения девиации. Монография содержит также интересные мысли относительно девиации в лётном деле.

Но изложенным далеко не исчерпываются заслуги Алексея Николаевича в компасном деле. Природа поставила здесь еще одну задачу, совсем другого характера. Компас находится на корабле.

Ускорение при движении, качка корабля, неизбежные толчки, сотрясения от стрельбы сильно действуют на легко подвижную картушку компаса. Пригодность компаса при этих сложных условиях существенно зависит от его динамических свойств.

Над этим вопросом работал знаменитый лорд Кельвин и достиг чрезвычайно важных результатов.

Интересна рассказанная Алексеем Николаевичем история о том противодействии со стороны английского адмиралтейства, которое встретило введение компаса Томсона в английском флоте. Это противодействие было сломлено только после того, как в 1882 г. в бою с фортами Александрии все компасы на кораблях, за исключением двух томсоновских, вышли из строя. Но общей теории вопроса Томсоном дано не было. И до последнего времени динамические свойства компаса мало учитывались при его конструировании.

В 1938 г. появилась работа Алексея Николаевича „Возмущение показаний компаса, происходящее от качки корабля на волнении", в которой с исчерпывающей полнотой исследована динамика компаса.

Я не буду останавливаться на интересных результатах этой работы, а приведу только мнение о ней одного из видных наших специалистов по компасному делу, И. Н. Терехова: „Здесь высказаны чрезвычайно интересные идеи, могущие при соответственной обработке послужить началом новой эпохи в деле конструирования магнитных компасов".

С развитием мореплавания, с развитием авиации новые, повышенные требования предъявляются к компасу. В настоящее время в военно-морском флоте, на больших торговых кораблях применяется компас, действие которого основано на совершенно другом принципе, чем действие магнитного компаса. Это так называемый гирокомпас.

Принцип гироскопического компаса заключается в следующем. Гироскоп — это соответственным образом монтированный волчок. Ось такого вращающегося маховичка устанавливается благодаря вращению земли в плоскости географического меридиана. Такой гироскоп поэтому может служить компасом. Он имеет ряд преимуществ перед магнитным. Его показания не искажаются железом корабля, поэтому он может быть установлен в подходящем месте. Его показания могут быть переданы в любое место корабля. И, наконец, он может быть приспособлен для автоматического управления рулем. Это гироскоп делает лучше любого рулевого, так как он реагирует на тенденцию к изменению курса, в то время как человек реагирует на самое изменение. Но гироскопический компас не может, по крайней мере в настоящее время, конкурировать с магнитным по простоте, автономности, надежности действия и дешевизне. Каждый имеет свою область применения.

Алексей Николаевич указал на существенные неправильности теории гирокомпаса Аншютца, дополнил ее, разобрав между прочим вопрос о поведении гирокомпаса при частых переменах курса корабля, и таким образом внес существенный вклад в развитие этого важного дела. За эти работы о магнитном и гироскопическом компасах Алексею Николаевичу была в 1941 г. присуждена Сталинская премия.

Я сравнительно долго задержался на вопросе о компасе. Позвольте мне в объяснение этого привести заключительные слова уже упомянутой работы Алексея Николаевича 1938 г. Вот они:

„Может возникнуть вопрос, стоило ли для исследования такого ничтожества, как картушка компаса, исписать 50 печатных страниц формулами и уравнениями? Не есть ли это упражнение в стрельбе по воробьям из пушек?

Но если припомнить, сколько кораблей погибло и теперь еще гибнет из-за неправильностей показаний компаса или от того, что он перестал действовать! Сколько труда затрачено на составление магнитных карт всех морей и океанов, начиная с экспедиций 1701 и 1702 годов знаменитого Галлея. Сколько трудов затрачено на создание теории земного магнетизма в течение 25 лет самим princeps mathematicorum Гауссом, какой невероятный труд по громадности численных вычислений в течение 40 лет затрачен Адамсом на выработку методов составления магнитных карт по наблюдениям в отдельных пунктах. Если припомнить, сколько над компасом работал величайший физик XIX века лорд Кельвин, и принять в соображение, что конечная цель всех этих трудов состоит в получении правильности показаний компаса, — то 50 страниц нашей работы представляются ничтожно малой величиной по сравнению с упомянутыми великими трудами. Недаром еще давно неким мудрецом сказано: „Компас инструмент малый, но если бы его не было, Америка не была бы открыта“.

Компасное дело в России всегда стояло на высоте, и во многих отношениях благодаря работам де-Коллонга оно стояло в нашем флоте гораздо выше, чем в любом из иностранных флотов. Если наша страна и в настоящее время продолжает прочно удерживать это место, то этим она обязана в первую очередь трудам Алексея Николаевича и его школы.

Мы только что говорили о проблеме, которая возникает в связи с поведением компаса при качке. Она не стоит особняком.

Дело в том, что все механические процессы протекают на качающемся корабле совершенно иначе, чем на суше. Корабль, как говорят физики, — не инерциальная система, и поэтому на нем и трезвый человек уподобляется пьяному, и компас ведет себя иначе, и маятник качается не так; и это сказывается на действии целого ряда аппаратов.

Приведу пример другого рода: техника артиллерийской стрельбы по цели значительно сложнее на корабле при качке, чем на суше.

Всем этим вопросам Алексей Николаевич уделил свое внимание. Им построен и исследован прибор для измерения качки — кренометр. Им было проведено, далее, обширное исследование о влиянии качки на меткость артиллерийской стрельбы; на основании этого исследования Алексей Николаевич придумал и сконструировал прибор для обучения артиллеристов наводке в этих условиях. Прибор этот принят на вооружение нашего флота.

И много других остроумных судовых приборов придумано Алексеем Николаевичем.

В первую очередь Алексей Николаевич заинтересовался физическими вопросами, связанными с самой качкой корабля. Это вопросы чрезвычайной важности. Целый ряд жизненных для кораблевождения и кораблестроения проблем может быть решен только при знании основных законов качки корабля на волнении.

Почему корабль иногда „хорошо“ держится на волне, иногда „плохо“? Почему корабль иногда зарывается в волну, причем его винты оголяются, что чрезвычайно вредно отзывается на его ходе и на работе машин?

Как должны определяться размеры судна, при которых оно может итти с данной скоростью против тех или иных волн при условии, чтобы размахи корабля при качке не превышали известных границ? И, наконец, один из важных вопросов кораблестроения — это какие дополнительные усилия возникают в различных частях корабля при качке. Это необходимо знать при его проектировании.

На все эти вопросы теория, как показал Алексей Николаевич, должна и может дать ответ.

Уже знаменитый Эйлер сделал в 1758 г. существенную попытку ответить на последний вопрос. Но ни тогда, ни после другими учеными, например Фрудом, окончательного ответа на все вопросы этого рода не могло быть дано, так как до классических трудов Алексея Николаевича сколько-нибудь общей теории качки не существовало. Ее создал Алексей Николаевич и тем самым дал решение всех относящихся сюда основных задач. Вот что рассказывает Алексей Николаевич в своих „Воспоминаниях" о том, как эти работы возникли:

„В 1825 году управляющий морским министерством адмирал И. М. Чихачев предложил на разрешение вопрос, какой надо иметь запас глубины под килем корабля, чтобы при килевой качке на волнении корабль не касался дна?

Этот вопрос возник при постройке Либавского порта. Рассмотрение его было поручено Морскому техническому комитету и мне персонально. Причем решения требовались независимые друг от друга. В то время существовала только теория Фруда боковой качки корабля, поперечные размеры которого предполагались весьма малыми по сравнению с размерами прямого сечения волны. Очевидно, что эта теория была совершенно неприложима к килевой качке. У меня этот вопрос был подготовлен для курса. Мне оставалось только изложить его применительно к данному случаю. Поэтому я представил свое решение в Главное гидрографическое управление через три дня после получения запроса.

Как стоял этот — для корабельного дела основной — вопрос до работ А. Н. Крылова, видно из приведенных только что слов Алексея Николаевича. Знаменитый Фруд, о котором говорит здесь Алексей Николаевич и работы которого он высоко ценит, заканчивает свое исследование о качке корабля следующими словами:

„Когда вновь построенный корабль выходит в море, то его строитель следит за его качествами (на море) с душевным беспокойством и неуверенностью, как будто это был воспитанный и выращенный им зверь, а не им самим обдуманное и исполненное сооружение, которого качества должны быть ему вперед известны, в силу самих основ, положенных в составление проекта".

Алексей Николаевич, приводя эти слова Фруда, прибавляет: „Главная цель моих исследований была дать способы рассчитать движение корабля на волнении, а значит, и его мореходные качества". Удачная схематизация проблемы, делающая возможной соответственную математическую трактовку, но сохраняющая в то же время все существенные черты явления, весьма удачный выбор

„точки зрения“ — мы говорим удачный выбор координат, в данном случае подходящих эйлеровых углов, применение целесообразного метода математического анализа, подобного тому, которым пользуются в небесной механике для расчета возмущенного движения планет, но новое здесь, удачный выбор параметра, по которому решение разлагается в ряд, — все это позволило Алексею Николаевичу блестяще разрешить поставленную проблему.

Он решил сначала задачу о килевой качке, а затем и всю проблему в общем виде. Алексей Николаевич выявил между прочим ту существенную роль, которую здесь играют явления резонанса и, в частности, сдвиг фазы между движением волны и корабля. Так как явления резонанса играют во многих исследованиях Алексея Николаевича важную роль, то позвольте в двух словах напомнить, в чем они состоят.

Раскачать тяжелый колокол может малый ребенок, если только он будет тянуть за веревку не как попало, а в темпе качаний самого колокола, потому что при этом суммируется действие отдельных толчков.

Камертон, настроенный на некоторый тон, например на нормальное la, соответствующее 435 колебаниям в секунду, по этой же причине реагирует особенно сильно на звук той же высоты. Наши радиоприемники с миллионами колебаний в секунду принимают радиоволны от передатчика, на который они настроены, а атомные системы с миллионами миллиардов колебаний поглощают свет того же цвета, какой они сами способны испускать.

Все это проявления одной и той же причины: действие периодической силы на способную к колебаниям систему тем сильнее, чем ближе период силы подходит к периоду собственных колебаний. Возникающие при этом явления и называют обычно резонансными. При совпадении периодов говорят о резонансе.

При наступлении резонанса действие силы может иметь разрушительные последствия. Известны случаи, когда мосты рушились под ритмическим действием толчков от проходящей воинской части. Пример — Египетский мост в Петербурге, причем во время катастрофы погибло около 40 гвардейцев-кавалеристов. Электрические кабели пробиваются благодаря резонансу иногда там, где этого меньше всего ожидали.

Но есть и положительные стороны резонансного усиления самого по себе слабого действия силы. Вся радиотехника основана на целесообразном использовании резонанса.

Замечу также, что, наряду с нарастанием размаха при приближении к резонансу, существенны еще так называемые фазовые или временные сдвиги между силой и получаемым движением.

Алексей Николаевич показал, что при качке, где мы имеем дело с периодическим воздействием волнения на колебательную систему, какой является корабль на воде, с периодом собственных колебаний в несколько секунд, существенную роль играют именно резонансные явления. Если при этом учесть и указанные фазовые соотношения, то резонанс, в связи с принципом Допплера, дает не только качественное, но и количественное объяснение всем особенностям качки. Становится понятным и вычислимым и влияние на качку скорости корабля и направления движения корабля по отношению к гребням волны, и поведение корабля на неоднородной зыби, и другие характерные особенности качки.

В 1896 г. Алексей Николаевич доложил теорию килевой качки, а в 1898 г. — теорию общего случая качки самой авторитетной в мире инстанции по всем вопросам теории и практики корабля — Обществу английских корабельных инженеров.

Эти ставшие классическими работы Алексея Николаевича поставили его в самые передовые ряды мировых авторитетов по теории корабля. Общество после заслушания докладов присудило ему свою золотую медаль. Этой чести до Алексея Николаевича не удостоился ни один иностранец.

Качка корабля всегда вредна, так как плохо отражается на мореходных качествах корабля и заставляет предъявлять повышенные требования к его прочности. Она также, как мы видели, чрезвычайно затрудняет все наблюдения, все действия на корабле. Вполне естественно поэтому, что измышляли и измышляют способы если не для уничтожения, то по крайней мере для ослабления качки. Таких способов было предложено и осуществлено два: успокоительные цистерны Фрама и гироскопический успокоитель Шлика и Сперри.

Схематически цистерны Фрама — это два сообщающихся сосуда, например два сообщающихся при помощи нижней трубы бортовых отсека, наполовину заполненных водой. Масса воды в цистерне — порядка от 1 до 3% водоизмещения корабля. Такие сообщающиеся сосуды ведут себя наподобие маятника — здесь говорят о гидравлическом маятнике Ньютона, и можно подобрать условия так, что волнение, действуя на корабль, раскачивает этот водяной маятник, который, оказывая обратное влияние на корабль, сильно противодействует волне и тем значительно уменьшает качку.

„В 1912 году, — рассказывает Алексей Николаевич, — заканчивались проектированием линейные крейсеры типа „Измаил“ и при этом возник вопрос, следует ли устраивать на них успокоители Фрама. Мнения членов комиссии разошлись ввиду разноречивых заграничных данных“.

Алексей Николаевич заявил тогда, что единственный способ окончательно решить поставленный вопрос, это — зафрахтовать пароход, снабженный цистернами Фрама, и поручить комиссии произвести всестороннее их испытание в Атлантическом океане, благо тогда было время равноденственных штормов. Морской министр согласился с этим мнением. Председателем комиссии был назначен Алексей Николаевич. Был зафрахтован пароход Гамбург. Американской линии „Метеор“. Алексей Николаевич с большим юмором рассказывает, как для осуществления задания министра — выйти в море через неделю — пришлось предварительно решить другую задачу, довольно трудную, а именно какому курьеру нужно вручить пятирублевый золотой, чтобы благополучно и во-время добыть паспорт, избавляющий от таможенных формальностей. Решение было найдено, и „Метеор“ вышел в назначенный срок в море. Общий результат чрезвычайно обстоятельных испытаний, изложенных в монографии Алексея Николаевича, таков. При так называемой „характеристике“ цистерн в 3 градуса включение цистерн (их можно было произвольно включать и выключать) уменьшало качку примерно вдвое. Одновременно Алексей Николаевич и дал свою теорию цистерн Фрама, отличную от существовавших, точно оговаривающую все допущения и дающую общую и ясную картину происходящих физических процессов.

Но есть другой способ уменьшения качки. При этом способе, как и при гирокомпасе, используется замечательное механическое поведение быстро вращающегося около своей оси тела. Только там вращающийся маховик имеет массу в 1—20 кг, а здесь 1—100 т и делает примерно от 1000 до 3000 оборотов в минуту.

Если смонтировать такой маховик, например, так, чтобы ось его могла двигаться при качке в диаметральной плоскости корабля и чтобы при этом его колебательное движение сопровождалось подходящим трением, то такой гироскоп может служить успокоителем качки.

В 1909 г. возник вопрос об установке гироскопического успокоителя на яхте „Стрела“. Алексей Николаевич разработал теорию прибора, показывающую, например, что при правильной зыби, при подходящих размерах прибора качка корабля может быть сведена почти на-нет. Эти исследования вошли в учебные курсы.

Гироскопические успокоители довольно широко вошли в практику корабельного дела. Если бы морское министерство не пожалело ассигновать требуемые на установку и испытания гироскопического успокоителя 50 тысяч рублей, то Алексей Николаевич в этом деле оказался бы впереди знаменитого Сперри.

Практика выдвигает еще одну физическую проблему, приобревшую, особенно в последнее время, большую важность. Я имею в виду так называемую вибрацию корабля. При определенном числе оборотов механизмов части корабля начинают иногда совершенно недопустимо сильно вибрировать. Так, например, знаменитый трансатлантический лайнер „Нормандия“, построенный лет десять тому назад, вибрировал так сильно, что он после нескольких рейсов должен был быть поставлен в док для переделки.

В русском флоте эта проблема возникла, как указывает Алексей Николаевич, в 1900 г., когда при испытании крейсера „Громобоя“, а затем „Баяна“ были обнаружены весьма интенсивные сотрясения, делающие, например, невозможной артиллерийскую стрельбу. Опыт показывает, что изменения числа оборотов машины на несколько процентов достаточно, чтобы значительно уменьшить вибрацию.

В то время этот вопрос совершенно не был исследован теоретически и представлял большие трудности для корабельных инженеров, не знавших, в чем заключается физическая причина вибрации, и не умевших с ней бороться.

Алексей Николаевич разработал в 1901 г. теорию этого явления. Он показал, что вибрация является всецело следствием наступления резонанса. Сильная вибрация судов наступает тогда, когда период толчков работающего механизма, большей частью поршневого, примерно совпадает с периодом колебаний корабля или части его. Корабль ведет себя в этом отношении подобно громадному камертону в сотню и больше метров длины, в сотни тысяч и миллионы пудов веса.

Разработанная Алексеем Николаевичем теория не только дала ясную физическую картину явления, но и указала способ, как избавляться от вредного, часто разрушительного действия резонанса. Этот способ уменьшения вибрации вошел в практику судостроения и за границей.

Вряд ли нужно добавить, что вопрос в целом весьма сложен. Ему посвящена замечательная монография Алексея Николаевича под названием „Вибрация судов“.

Я хочу закончить свой далеко не полный обзор фундаментальных работ Алексея Николаевича, относящихся к кораблю, коротким упоминанием об одних из самых важных в практическом смысле исследованиях Алексея Николаевича, наложивших, несомненно, отпечаток на кораблестроение всего мира.

Это исследования об устойчивости — моряки говорят „остойчивости“ — корабля и его непотопляемости

Для того чтобы предохранить корабль от гибели при аварии подводной части, последняя издавна разделялась на много герметически изолированных друг от друга отсеков. Вода, затопляя один или два смежных отсека, не проникает дальше. Устанавливались насосы, чтобы выкачивать воду из пробитого отсека. Алексей Николаевич указал на то, что весьма часто пробоина, особенно от современной мины, настолько велика, что не может быть речи об удалении воды. Аварийный отсек стихийно заполняется водой. Но тогда корабль накреняется и, зачерпнув воду надводной частью, теряет управляемость и остойчивость и часто опрокидывается и гибнет. Алексей Николаевич высказал замечательные как по простоте — когда они уже высказаны, — так и по своему значению принципы борьбы с такого рода авариями.

Раз нельзя выкачать воду, нужно затопить симметричные отсеки, спрямить этим корабль, вернуть ему остойчивость и управляемость и дать возможность дойти до ближайшего порта. Им даны так называемые таблицы непотопляемости, позволяющие быстро произвести спрямление получившего пробоину корабля. Еще за три года до Цусимы в подробных докладах писал об этом Алексей Николаевич в тогдашний морской технический комитет. Но, как он указывает, нужна была Цусима, чтобы на это было обращено внимание.

„В теснейшей связи с этим стоит, — я цитирую слова Алексея Николаевича, — основной принцип, что пловучесть и остойчивость корабля обеспечиваются целостью и непроницаемостью его *надводного* борта. Нельзя и перечислить даже малой доли судов, которые гибли от несоблюдения этого принципа, и не только десятки и сотни лет тому назад, но, можно сказать, и на наших глазах, подобно тому, как было с „Народовольцем“.

Принципы Алексея Николаевича вошли в жизнь во всех странах. Об исключительной ценности их говорить, конечно, лишне.

Громадное значение работ Алексея Николаевича по теории и практике корабля нашло себе признание и во всем мире. В знаменитую Энциклопедию математических наук, начавшую издаваться до первой мировой войны, была включена теоретическая физика, а также те технические дисциплины, для которых существовала математическая теория. Руководители энциклопедии, во главе со знаменитым математиком Клейном, поставили себе задачу для составления статей найти, по словам Больцмана, среди всех наций земного шара наилучшего специалиста в каждой области. Теория корабля в энциклопедии написана Алексеем Николаевичем.

Исследования Алексея Николаевича стали предметом преподавания во всех странах; всюду ими руководствуются при кораблестроении.

Весной 1942 г. Общество английских корабельных инженеров, присудившее Алексею Николаевичу в 1898 г. золотую медаль, выбрало его своим почетным членом.

Уже те работы Алексея Николаевича, о которых шла речь, убедительно показывают глубокую жизненность проблем и поразительное мастерство в их трактовке, широкий диапазон интересов в соединении с целеустремленностью; что же касается результатов, то они говорят сами за себя.

Одно я еще хотел бы заметить. Из изложенного, мне кажется, видно, что интересы Алексея Николаевича в области физики главным образом навеяны вопросами, относящимися к кораблю и вообще к морскому делу. Но, раз заинтересовавшись какой-нибудь физической проблемой, Алексей Николаевич всегда далеко выходит за первоначальные рамки и исследует эту физическую проблему как таковую. Затем он применяет полученные результаты все в новых и новых областях. Какие же физические проблемы главным образом вызывают интерес Алексея Николаевича? Но я хотел бы, однако, сейчас сделать оговорку. При том исключительно широком научном кругозоре, которым обладает Алексей Николаевич, ввести его научные интересы в какие-нибудь границы нельзя. Речь может итти только о некотором общем направлении, и даже здесь, я признаю, моя оценка может быть субъективна.

Много лет тому назад Алексей Николаевич в качестве председателя Физического общества сделал чрезвычайно интересный доклад на тему „Физика в морском деле“. Он указал, какие важные и трудные проблемы призвана здесь решать физика; при этом почти нет отдела нашей науки, который не нашел бы себе применения в морском деле.

Но я думаю, что не ошибусь, если скажу, что интересы Алексея Николаевича в области физики, наряду с астрономией и земным магнетизмом, направлены главным образом на изучение тех процессов, которые мы называем колебательными в самом широком смысле этого слова.

Качка корабля на волне, движение воды в цистернах Фрама, движение гироскопа, будь то компас или успокоитель качки, вибрация судна — ведь все это типичные колебательные процессы. Колебания и специально резонансные явления, о которых я говорил выше, имеют в физике в настоящее время громадное значение почти во всех ее областях, не говоря уже о том, что такие области, как оптика, акустика и радио, всецело базируются на колебаниях. Но и в истории нашей науки колебания и специально периодические процессы сыграли колоссальную роль. Кеплер открыл закон, связывающий величину большой оси орбиты планеты с периодом ее обращения. Галилей изучал колебания маятника, Гюйгенс дал общее решение задачи о колебании сложного маятника, Ньютон показал, что при распространении звука мы имеем дело с периодическими сгущениями и разрежениями среды. Он же, а не Гюйгенс, как иногда утверждают, впервые доказал, что в основе монохроматического света лежит периодический процесс.

Все это открытия первостепенного значения. Каждое из них означает важный этап в развитии современной физики. И, может быть, прав Уайтхед, когда он говорит, что рождение нашей науки связано с применением абстрактной идеи периодичности к большому числу отдельных конкретных явлений.

Сердце физика радуется, когда он обнаруживает аналогию между уменьшением качки на корабле при помощи цистерны Фрама, с одной стороны, и уменьшением помех в радиоприемнике при помощи электрофильтров — с другой, когда он, изучая труды Алексея Николаевича, обнаруживает аналогию между тем, что корабль зарывается носом в волну при одном курсе и идет спокойно при другом, и различным смещением линий спектра звезд в зависимости от различия в их радиальных скоростях, или различным поведением коэффициента преломления света в различных частях спектра. Алексей Николаевич включает в круг своих исследований колебательные — в широком смысле слова — процессы и их применения в различных областях.

Насколько разнообразны эти области, можно судить по следующим примерам: обширное исследование посвящает Алексей Николаевич вопросу большой важности — о вращении снаряда во время полета и его колебаниях. Указав на аналогию между движением оси снаряда и движением мачты корабля при качке, Алексей Николаевич пользуется и здесь при выборе эйлеровых углов тем же принципом, который позволил ему решить вопрос о качке корабля в общем виде. Алексей Николаевич, далее, всесторонне исследует вопрос о продольных и радиальных колебаниях орудий. Об одном из его исследований, относящемся также к области колебаний, я хотел бы сказать два слова, а именно об исследовании, посвященном анализу действия так называемых индикаторов давления и других измерительных приборов особого рода, играющих в физике и технике важную роль.

Такой индикатор сам является колебательной системой — своего рода пружинными весами. Алексей Николаевич рисует четкую и ясную картину, при каких условиях индикатор дает правильные или неправильные показания. Дело сводится к соотношению между собственным периодом индикатора и временем нарастания измеряемого действия.

В январе 1941 г. при испытании 12-дюймовых орудий, предназначенных для линейных кораблей, измерялось давление в цилиндре компрессора специальным индикатором Виккерса. Компрессор в орудии — это приспособление для амортизации отката орудия после выстрела. Индикатор показал давление вдвое большее максимально допустимого по контракту с заводом. Замена компрессоров новыми повлекла бы расход приблизительно в два с половиной миллиона рублей. Алексей Николаевич показал, что здесь имел место именно тот случай, когда индикатор должен был дать ложный результат. Более того, Алексей Николаевич установил, что здесь показания индикатора превышают истинные значения давления именно вдвое и что, таким образом, фактическое давление в цилиндре компрессора не превышало допустимого.

Позвольте мне остановиться еще на одном характерном для Алексея Николаевича научном эпизоде.

В 1928 г. в Вене знаменитый итальянский математик Леви-Чивита прочел лекцию под заглавием „О динамической нагрузке упругих систем“, посвященную расчету максимально возможных перенапряжений при динамической нагрузке по отношению к статической. Алексей Николаевич ознакомился с этой лекцией. К нему в полной мере применимо то, что сказал о себе Лагранж в одном из своих писем: „Вы хорошо понимаете, что я не могу прочитать эти исследования, не сделав многочисленных замечаний, клонящихся к обобщению и упрощению".

Результатом чтения статьи Леви-Чивита была статья Алексея Николаевича. В ней он дает, как он сам говорит, „несколько упрощенную переработку" результатов Леви-Чивита. Но интересно не только это, но особенно та физическая интерпретация, которую дал Алексей Николаевич безупречным математическим результатам знаменитого математика и которая существенно расходится с его собственной.

Лучше всего это видно, если сравнить обе теории на конкретном примере. Алексей Николаевич провел это сравнение для известного Конвейского моста в Англии. Согласно формуле Леви-Чивита, при медленном движении (около 4 км в час) поезда весом в 1000 т динамическая нагрузка не может превышать статическую больше чем в две тысячи раз!

По интерпретации же Алексея Николаевича динамическая нагрузка при данных условиях практически вообще не превышает статической. Фактически мост построен согласно статическим нормам, а не в две тысячи раз прочнее. Мост стоял уже не меньше 80 лет, вероятно, стоит и сейчас и пропустил многие сотни тысяч поездов.

Что же, Леви-Чивита неправ? Нет, он прав, так же как прав тот, кто скажет, что расстояние от Москвы до Ленинграда не больше, чем расстояние от Земли до Луны.

Но такого рода правда физику мало полезна. Алексей Николаевич прежде всего физик. Мне припоминаются слова, сказанные как-то о Максвелле: „Он положительно не в состоянии ошибаться в физических вопросах". Алексей Николаевич с первого взгляда увидел правильную физическую интерпретацию вычислений знаменитого математика.

Я мог бы множить и множить примеры исследований Алексея Николаевича, я мог бы рассказать и о классической работе Алексея Николаевича о действии движущейся нагрузки на колебания моста, о работе по вибрации фундаментов и способах ее уменьшения, о колебании валов машин. Весьма важны работы по теории упругости. Сюда относятся, например, исследования Алексея Николаевича о расчете балок, лежащих на упругих основаниях, о равновесии сжатых стоек при продольном изгибе. Весьма интересны опытные исследования в бытность Алексея Николаевича заведующим опытовым бассейном, работы по электрическим явлениям в кабеле и многие другие замечательные исследования Алексея Николаевича.

Бывает, что Алексею Николаевичу не подходит существующий математический аппарат. Тогда он оттачивает его по-своему или создает новый. Так были созданы чисто математические исследования Алексея Николаевича большого значения. Вот примеры. Существуют принципиально чрезвычайно простые рецепты для составления так называемого векового уравнения, имеющего одинаково существенное значение как для небесной механики, так и для теории колебаний. Но при всей принципиальной простоте приходится, чтобы дать ответ на конкретный вопрос даже не в сложном случае, произвести много тысяч умножений и сложений, особенно тогда, когда система имеет затухание.

Существуют методы Лапласа, Якоби, Леверье, ведущие к упрощению вычислений. Алексею Николаевичу удалось *существенно* снизить число операций и тем упростить решение технических и физических задач. В настоящее время этот метод излагается в математических курсах.

Алексей Николаевич указал далее улучшенный, против прежнего, способ последовательных приближений при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения.

Упомяну также об интересном исследовании Алексея Николаевича, относящемся к вычислению коэффициентов ряда Фурье, а также к вопросу об усилении быстроты сходимости тригонометрических рядов.

В заключение я хотел бы совсем кратко коснуться астрономических работ Алексея Николаевича. Я позволю себе это сделать потому, что в них есть и физическая сторона, а также и потому, что они связаны с историей науки.

К ним я причисляю и изумительный перевод „Математических начал натуральной философии“ Ньютона, который потребовал у Алексея Николаевича двух лет упорного труда по 6 часов в день. И не удивительно. Это не простой перевод. Вряд ли можно назвать ученого в мировой литературе, который так глубоко изучил Ньютона, так проникся его творчеством, как Алексей Николаевич. Своими обширными комментариями к „Началам“, представляющими как бы самостоятельный труд, Алексей Николаевич помогает и нам глубже проникнуть в гениальное творение Ньютона.

В истории астрономии, в истории физики Алексей Николаевич является основоположником нового направления, и не потому, что он с исключительной глубиной изучил и усвоил великие творения Ньютона, Эйлера, Лапласа, Гаусса, и не потому, что он обнаружил в ряде случаев ошибочность укоренившегося в науке понимания некоторых их высказываний, а благодаря какому-то особенному сплетению в его трудах исторического элемента с оригинальным творчеством.

Тот, кто изучил замечательные беседы Алексея Николаевича о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений; кто изучил его перевод с дополнениями сочинения Эйлера „Новая теория движения луны"; кто знаком с исключительно интересной реставрацией работы Ньютона об астрономической рефракции, в которой Алексей Николаевич восстановил, пользуясь только теми математическими средствами, которые были доступны Ньютону, ход его мыслей; кто учтет, наконец, перевод „Начал",— тот, я думаю, согласится с тем, что Алексей Николаевич должен считаться новатором в истории науки.

Я не могу также не упомянуть о той громадной роли, которую играет Алексей Николаевич в организации преподавания и в преподавании математики, физики и корабельных наук.

С большим пиететом относится Алексей Николаевич к своим учителям, в особенности к И. П. де-Коллонгу и к выдающемуся математику А. Н. Коркину. Алексей Николаевич показывал мне собственноручно записанную Коркиным разработку курса лекций, которые последний предполагал читать по эллиптическим функциям. Огромным уважением проникаешься к крупнейшему ученому, который с такой любовью и добросовестностью относится к делу преподавания. Алексей Николаевич, следуя этой традиции, в течение своей более чем 50-летней преподавательской деятельности внес новую, живую струю в преподавание, создал ряд замечательных курсов по разнообразнейшим дисциплинам математики, физики и техники, в которых соединяется новизна и оригинальность материала с систематичностью и доступностью изложения, и ввел новые ценные методы преподавания, ставшие в настоящее время всеобщим достоянием.

Не одно поколение его учеников, из которых многие сами стали крупными учеными и профессорами, глубоко благодарно Алексею Николаевичу за то, *чему*, и за то, *как* Алексей Николаевич их учил и учит.

И на всех сторонах деятельности Алексея Николаевича — будь то глубокое научное исследование или решение важной практической задачи, будь то одна из его интересных и ярких научно-популярных лекций или преподавание студентам — на всем лежит особый отпечаток.

Для Алексея Николаевича замечательно характерно уменье с исключительным мастерством, определенно, конкретно ставить проблему, четко оговаривать все сделанные предположения, уменье выделять главное, желание и изумительное уменье давать такие же четкие, конкретные ответы, доводя всегда каждую поставленную задачу до конца, давая полный числовой расчет. И во всей постановке и в решении сложнейших проблем ему присуща простота, та простота, которая в науке достигается с таким же трудом, как и в искусстве, и которая доступна только крупнейшим ученым, только истинным классикам знания.

Нам всем знаком облик Алексея Николаевича, этого замечательного ученого и замечательного человека. Я был бы счастлив, если мне удалось, хотя бы частично, осветить те внутренние стороны творчества Алексея Николаевича, которые определяют его силу и столь яркую, столь блестящую его индивидуальность.

68

ВВЕДЕНИЕ

[к сборнику „Из предистории радио“ [1]]

С тех пор как изобретен беспроволочный телеграф, прошло всего 50 лет. За это время его развитие прошло громадный путь. Самое начало было очень скромным. Весьма простая, хотя подчас громоздкая аппаратура, небольшие преодолеваемые расстояния, порядка сотен метров, очень узкие, хотя сразу же правильно оцененные возможности практического применения, — вот что характеризует зарождение этой новой области техники. Такое начало характерно, впрочем, для многих крупных изобретений.

Теперь радиотехника — одно из чудес современного мира. Преодоление любых расстояний на земле не является проблемой. Земля слишком мала, чтобы представлять существенные затруднения для передачи сигналов и речи между любыми точками ее поверхности. Области применения радио чрезвычайно разнообразны и обширны. Широковещание, связывающее в невиданных прежде масштабах всю земную поверхность в одно целое, делающее это ежедневно и в течение почти полных суток, выполняет самые разнообразные функции. Передача известий, выступления на темы самого разнообразного рода перед невиданной до этих пор по обширности аудиторией; беспроводная передача музыки, изображений и многое другое. Колоссальное военное значение радио общеизвестно.

---

[1] [Сборник оригинальных статей и материалов под ред. академика Л. И. Мандельштама. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948. Ниже цитируется как „Сборник“ Напечатано также в журн. „Электричество“, № 5, 8—20, 1945.]

Радио выступает теперь не только как средство связи; оно служит в качестве способа локации самолетов и кораблей, оно дает новые средства геодезии и навигации.

Существенно и научное значение радио. Достаточно указать в качестве примера на точное определение при помощи радио времени в любой точке земной поверхности, что так важно для определения долготы места.

Соответственно этим задачам неизмеримо выросла и аппаратура. На службу радио привлечено громадное количество физических явлений. Попутно развивалась и теория физических явлений, лежащих в его основе, получившая немало стимулов именно из практических задач радиотехники.

Если пробежать мысленно блестящий 50-летний путь развития радио и сопоставить скромное начало с современным состоянием, то легко может показаться, что весь путь развития радио как идейный, так и практический полностью исчерпывается этим промежутком времени, что для понимания этого замечательного изобретения и его развития в историческом разрезе, например для понимания того, какова была роль изобретателей и т. д., достаточно по возможности лучше проанализировать истекшие 50 лет. Мы думаем, однако, что такой взгляд был бы неправилен. Как возникло само изобретение, почему оно возникло именно в конце прошлого века, каким образом сооружение, построенное изобретателями, выросло в столь обширное, столь великолепное здание, — все это становится по-настоящему понятным, только если учесть, что пионеры радио могли строить на широком и солидном фундаменте, возведение которого было завершено за несколько лет до самого изобретения. Нам кажется, что без учета истории возникновения этого фундамента, которая, в свою очередь, потребовала около 50 лет, трудно понять и оценить и само изобретение радио и его развитие. Говоря конкретнее, изобретение радио, равно как и его развитие, сделались возможными только благодаря тому перевороту в представлениях об электрических явлениях, который связан с именами Фарадея, Максвелла и Герца. История развития этих представлений есть по существу предистория радио.

Цель настоящего сборника дать читателю возможность ознакомиться в переводе с основными из относящихся сюда оригинальных работ. При этом речь идет (почти исключительно) о тех физических основах, на которые опиралось изобретение радио. Предистория собственно технической стороны радио, — а она существует, — те, часто чрезвычайно интенсивные, попытки разрешить проблему беспроволочной передачи сигналов, которые пользовались арсеналом знаний домаксвелл-герцевского времени, здесь не освещены.

Но и в физических вопросах сборник сознательно не претендует на полноту. Материал настолько обширен, разнороден и различен по своей ценности, что объем сборника при стремлении к наибольшей полноте должен был бы непомерно возрасти. Да и вряд ли такая полнота, обусловливающая включение большого количества менее ценных работ, помогла бы читателю почувствовать ту научную обстановку, которая создалась благодаря гениальным работам Фарадея, Максвелла, Герца и работам их продолжателей, обстановку, которая, по нашему мнению, главным образом — может быть, больше, чем те или иные отдельные конкретные положения нового учения — вдохновила работу изобретателей.

Согласно сказанному, одно из основных мест в настоящем сборнике отведено исследованиям Фарадея, Максвелла и Герца. При выборе отдельных сочинений мы руководствовались следующими соображениями.

Редко можно встретить в истории науки такой яркий пример преемственности работы ряда гениальных исследователей, какой мы видим здесь, в создании той замечательной картины электромагнитных явлений, которая вплоть до сегодняшнего дня — я думаю, это можно сказать, не забывая о квантовой теории — пронизывает все наше физическое миросозерцание. Для нас в особенности интересна одна, правда, основная, сторона этой картины, которая главным образом и придала ей ее революционный характер. Я, конечно, имею в виду роль и значение в этой картине непроводящей среды и, в особенности, вакуума, тесно связанную с этим конечность скорости распространения электромагнитных импульсов и волн и, наконец, электромагнитную теорию света.

Мы старались выбрать те работы, которые в своей последовательности и совокупности возможно более выпукло и ясно показывали бы зарождение и развитие идей у Фарадея, из которых далее было бы видно, в какой органической связи с этими идеями находятся исследования Максвелла и завершившие все здание работы Герца. Этот выбор существенно облегчен тем обстоятельством, что каждый из этих замечательных ученых сам совершенно четко указывает, в чем и в какой мере он опирается на своих предшественников.

Нужно отметить, что бóльшая часть приводимых нами работ была уже переведена на русский язык, но нам казалось, что это не делает настоящий сборник ненужным. Не говоря уже о том, что отдельные, разбросанные по разным прежним изданиям статьи сейчас уже труднодоступны, мы полагали, что их объединение в одном сборнике, сделанное с указанной точки зрения, даст читателю, в совокупности с другими статьями сборника, яркую картину всего развития. О том удовольствии, которое доставляют чтение и сопоставление этих замечательных работ между собою, вряд ли приходится говорить.

Кроме указанных исследований Фарадея, Максвелла и Герца, в сборнике помещен еще ряд других работ, при выборе которых мы руководились следующими соображениями. Идейное вооружение, создание и развитие которого представлено в только что упомянутых работах, несомненно явилось необходимой предпосылкой изобретения радио. Но несомненно также и то, что необычайно быстрое развитие радио стало возможным главным образом потому, что рядом теоретических и экспериментальных исследований, которые делались, конечно, без предвидения этого их назначения, был фактически подготовлен аппарат, позволивший претворить новые идеи в жизнь и сделать их эффективными. Сюда относится, например, уже открытое к этому времени и хорошо исследованное как теоретически, так и экспериментально явление колебательного разряда в конденсаторной цепи. Эти исследования не находились в непосредственной связи с фарадей-максвелловскими воззрениями, но стоит только вспомнить громадное значение в беспроволочной телеграфии так называемой томсоновской формулы для периода колебаний в такой цепи, чтобы оценить ту роль, которую эти исследования сыграли в развитии радио. Мы считали поэтому желательным включить в сборник переводы основных оригинальных работ, относящихся к этим вопросам.

Огромное значение в практическом применении радио с первых же его шагов имел когерер. На нем Попов построил свое первое приемное устройство; когерером же пользовался затем и Маркони. В течение ряда лет когерер был основным „детектором“ приходящих от передатчика электромагнитных волн. Существенную роль в дальнейшем развитии приема сыграли так называемые кристаллические детекторы-выпрямители, позволившие сразу значительно увеличить дальность телеграфирования. В сборник включен поэтому ряд основных работ, предшествовавших изобретению радио и относящихся к проводимости металлических порошков, к вопросу о так называемой униполярной проводимости в кристаллах и к эффекту Эдисона (Edison).

Далее необходимо остановиться на исследованиях распространения „электричества“ по проводам. Вряд ли можно сомневаться в том, что относящиеся сюда вопросы играли большую роль на всем протяжении развития радио и играют, может быть, еще более существенную роль сейчас. В той или иной форме они лежат в основе теории антенн. В измерительной технике система Лехера (Lecher) всегда имела и сейчас имеет большое значение. В настоящее время в технике приобрел весьма существенный интерес частный случай распространения вдоль проводов — по так называемым трубопроводам или волноводам. В теоретическом отношении вопрос о распространении волн вдоль проводов занимает несколько особое место. Об этом целесообразно сказать несколько слов уже теперь и вот почему.

Мы здесь имеем дело с типично волновым электрическим процессом. Если рассмотреть вопрос о распространении электромагнитных волн вдоль проводов с точки зрения максвелловской теории (а в настоящее время он иначе и не рассматривается), то становится вполне ясным, что здесь совершенно необходимым является учет тока смещения и его магнитного действия, т. е. учет именно той стороны максвелловской теории, которая специфична для нее, придает этой теории все ее значение и коренным образом отличает ее от прежних воззрений. Но, с другой стороны, теоретическое рассмотрение распространения электромагнитных волн вдоль проводов было предпринято Кирхгофом (Kirchhoff) значительно раньше и им были получены в общем правильные результаты на основании прежних воззрений, исходящих из предположения о мгновенном распространении взаимодействия между зарядами и между токами.

Возникает вопрос, насколько этими исследованиями была предвосхищена основная идея теории Максвелла. Ответ заключается в следующем.

Распространение электромагнитных волн вдоль проводов в том аспекте, к которому применим анализ Кирхгофа, представляет собой чрезвычайно частный случай. Описание при помощи тока смещения является здесь лишь другим (правда, гораздо более полным) способом изложения по сравнению с прежними теориями. Для понимания явления распространения в свободном пространстве или, скажем, в полупространстве, ограниченном проводящей плоскостью, т. е. для тех случаев, которые важны для радио, этот частный случай ничего не дает.

Коротко, дело обстоит так.

Пусть мы рассматриваем распространение в прямолинейных параллельных бесконечных проводах, обладающих идеальной проводимостью. Здесь существует следующее решение: сумма всех токов, проходящих через перпендикулярное сечение, равна нулю, т. е. существует прямой ток и равный ему по силе обратный; как электрическое, так и магнитное поле лежат всецело в перпендикулярных сечениях; от сечения к сечению поля меняются со временем, в этом и заключается процесс распространения; но в каждом сечении электрическое поле распределено точно так, как распределялось бы статическое поле, если бы на всех бесконечных проводах плотности зарядов были постоянны и равны плотностям в данном сечении, а магнитное поле — точно так, как оно было бы распределено в стационарном случае постоянных токов с интенсивностями, равными интенсивностям в данном сечении. Вот для этого случая применим расчет Кирхгофа, применим потому, что второе уравнение Максвелла, относящееся к току смещения в диэлектрике, сводится здесь на уравнение сплошности для зарядов на проводниках, т. е. на уравнение

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial t},$$

которое, конечно, было известно и которым и пользовался Кирхгоф.

Отсюда ясно, что здесь не выявляется именно та сторона явлений распространения, которая лежит в основе теории распространения волн в свободном пространстве. Здесь принципиально речь идет о распространении вдоль проводов. Скорость распространения определяется параметрами, относящимися к проводам, а не к среде, и, вообще, вопрос о возможности волн в диэлектрике здесь не может возникнуть вовсе. Очевидно, что в этой постановке все явление никак не могло натолкнуть изобретателей на мысль об осуществлении беспроводной связи.

Может быть, стоит заметить еще следующее. Сам Кирхгоф рассматривал *один* провод и провод *конечной* длины. Его рассуждения не безупречны и, так сказать, случайно привели к результатам, применимым к указанному выше случаю, но неправильным применительно к случаю, им самим рассмотренному. В том обстоятельстве, что Кирхгоф исходил из предположения о мгновенном распространении взаимодействия между зарядами или между токами и пришел к конечной скорости распространения волн, противоречия нет, так как последний результат относится к скорости распространения [волны плотности] зарядов, а не к скорости распространения действия этих зарядов.

Кстати сказать, прежняя теория охватывает, например в кабеле, только один (можно его назвать основным) тип волн. Но фактически в таком кабеле возможно также бесконечное множество других типов волн, старой теорией не предусматриваемых. Этого рода волны возможны, например, при распространении в трубах, играющем в настоящее время такую большую роль в радиотехнике. Характерно и вполне понятно из предыдущего, что, например, Хивисайд (Heaveside), которому учение о волнах основного типа многим обязано, отрицал возможность электромагнитных волн в трубах.

Я остановился на вопросе о волнах в проводах несколько подробнее, имея в виду еще и следующее. Так как волны основного типа лучше всего изучены, важны практически, с одной стороны, и выводятся из теории Максвелла, с другой, то иногда и теперь склонны переносить наблюдаемые здесь закономерности на распространение волн вдоль проводящих поверхностей вообще. Говорят о направляющем действии проводников и т. п. Нужно, однако, иметь в виду, что в других, чем только что описанный, случаях действие проводников существенно иное. Так, например, проводящая безграничная плоскость вообще волн не направляет. Этот случай, являющийся идеализированной моделью распространения радиоволн, хорошо иллюстрирует, я бы сказал, опасность переноса опыта распространения по проводам волн домаксвелловского типа на другие случаи. Несомненно, концепция поверхностной волны в радио, оказавшаяся, как известно, ошибочной, возникла и держалась довольно долго потому, что она является распространением привычного представления о направляющем действии проводов на случай проводящей поверхности. Точно так же заимствованные из этого последнего случая представления не переносимы на случай одного провода, но здесь вопрос существенно сложнее.

Как бы то ни было, несомненно, что явления, связанные с распространением волн в цилиндрических проводах, сыграли в той или иной форме для тех или иных целей существенную роль как в самом начале развития радио, так и в дальнейшем. Поэтому нам казалось желательным включить переводы и ряда основных, относящихся сюда статей.

В сборник включены, наконец, переводы отдельных статей или частей их разнообразного характера, представляющих на наш взгляд существенный интерес в связи с изобретением радио.

Не все работы приведены полностью. Опущены те части, которые, по нашему мнению, можно было пропустить без ущерба для преследуемой сборником цели. Даже в классических работах Максвелла мы выбирали иногда лишь несколько страниц, опуская главы, посвященные математическому оформлению идей. Вряд ли нужно подчеркивать все огромное значение этих глав. Но читатель, желающий углубиться в работы Максвелла, всегда может изучить их в оригинале. Удержание же указанных глав в настоящем сборнике едва ли было бы целесообразно.

Мы считали также ненужным комментировать отдельные работы, приводимые в сборнике. Такие комментарии должны были бы так или иначе учесть то, что сделано в интересующих нас областях после фарадей-максвелл-герцевской эпохи. Но развитие электродинамики и, специально, учения об электромагнитных волнах, вызванное работами названных ученых, настолько разнообразно, что указание дальнейшего исторического развития идей, заложенных в помещенных в сборнике работах, и выяснение их связи с новыми результатами, с одной стороны, потребовало бы слишком большого расширения объема сборника, с другой же стороны, вряд ли способствовало бы поставленной цели — показать на оригинальных работах то состояние физических знаний об электромагнитных явлениях и волнах — частью еще не устоявшееся, а подчас не совсем точное, — которое существовало ко времени изобретения радиотелеграфии. Но зато может быть целесообразно напомнить здесь совершенно коротко, в каких условиях развивались сделавшие эпоху исследования Фарадея, Максвелла и Герца.

Вряд ли будет ошибочным сказать, что основные открытия, с которыми связано современное развитие учения об электромагнитных явлениях, — это открытие в 1820 г. Эрстедом (Oersted) влияния электрического тока на магнитную стрелку, открытие Ампером (Ampère) в том же году действия тока на ток, открытие Омом (Ohm) в 1826 г. основного закона постоянного тока и открытие в 1831 г. Фарадеем электромагнитной индукции.

Эти фундаментальные открытия сразу произвели огромное впечатление в научном мире и дали мощный толчок развитию учения об электричестве и магнетизме.

Но непосредственное влияние идей Ампера, с одной стороны, и Фарадея, с другой, — этих двух основоположников идейного развития электродинамики — было различным.

В 1825 г. появился замечательный труд Ампера „Теория электродинамических явлений, выведенных исключительно на основании опытов". Этот труд завершается установлением знаменитой общей формулы для взаимодействия двух элементов проводников, несущих ток. Все чрезвычайно многочисленные и разнообразные явления пондеромоторных сил при взаимодействии замкнутых цепей тока или их частей (прототипы которых открыты Ампером) должны и могут быть, как показал Ампер, выведены из этой формулы; они становятся теперь не чем иным, как чисто математическими задачами на интегрирование.

Замечательный мемуар Ампера, полностью удовлетворяющий требованию „математизации" физики, столь типичному для науки того времени, был — во всяком случае наиболее выдающимися учеными того времени — понят и оценен. Высказанные в нем положения послужили отправной точкой для последующего теоретического развития электродинамики.

Совершенно иначе обстояло дело с идеями Фарадея. Его идеи, отвергавшие действие на расстоянии, представление о котором столь крепко укоренилось в умах ученых, по крайней мере в том виде, в каком оно выкристаллизовалось в ту эпоху, исходящие из предположения о решающей роли той среды, которая находится между зарядами или токами и которую ранее вообще не считали нужным принимать во внимание для объяснения электрических явлений, абсолютно противоречили всем укоренившимся представлениям. К этому нужно прибавить, что изложение Фарадея, чрезвычайно ясное, когда речь шла об экспериментальных фактах, не всегда было таким, когда дело касалось его теоретических представлений.

Поэтому не удивительно, что непосредственного влияния на бурное развитие учения об электрических явлениях, которое последовало за его открытием электромагнитной индукции, идеи Фарадея не имели. Еще в 1855 г. один из виднейших физиков того времени Джордж Эйри (Airy) писал:

„Я заявляю, что мне трудно себе представить, чтобы кто-нибудь знающий практическое и численное совпадение данных наблюдения с результатами вычисления, основанного на действии на расстоянии, мог хотя бы одно мгновение колебаться между этим простым и точным действием, с одной стороны, и чем-то столь расплывчатым и изменчивым, как линии сил, с другой".

И вот, в течение следующих нескольких десятков лет наблюдается двойственность в развитии науки об электромагнитных явлениях. С одной стороны, идет несомненно замечательное теоретическое развитие электродинамики, цель которого — возможно более полно охватить накопившийся опытный материал и дать возможно более общее математическое выражение электродинамических явлений вообще и открытого Фарадеем явления индукции в частности. Это развитие, связанное главным образом с именами Неймана (Neumann), Вебера (Weber), Гельмгольца (Helmholtz), Кирхгофа и В. Томсона (W. Thomson), исходит из идеи „действия на расстоянии“ и идет в духе мемуара Ампера. С другой стороны, параллельно следует один за другим ряд замечательнейших экспериментальных открытый гениального Фарадея, одинокого в своем новом физическом мировоззрении, руководимого своей концепцией силовых линий, пронизывающих все пространство между проводниками, и своим совершенно особенным инстинктом, вряд ли имеющим аналог в истории науки. Концепция Фарадея в отвлеченной форме в конце концов победила. Но было бы исторически неверно недооценивать важность работ только что названных теоретиков. Они несомненно сыграли свою роль в последующем теоретическом развитии идей Фарадея Максвеллом. Подробно на этом останавливаться я, к сожалению, не могу, но сказать коротко о работах Неймана и Вебера я все же хотел бы.

В 1845 г. Ф. Нейман опубликовал мемуар, в котором он, пользуясь методом Ампера, дает теоретическое обоснование законов открытой Фарадеем электромагнитной индукции. Он приходит к замечательному аналитическому выражению для электродвижущей силы E_2, возбуждаемой в цепи II замкнутым током, текущим в цепи I, а именно:

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial t}\, i_1 \int\limits_{s_2}\int\limits_{s_1} \frac{(d\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2)}{r_{12}},$$

где i_1 — сила тока в I; $d\mathbf{s}_1$, $d\mathbf{s}_2$ — элементы линейных проводников первой и второй цепи, а r_{12} — их взаимное расстояние. Обозначая вектор $i_1 \int \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{12}}$ как функцию времени и координат точки в пространстве, через $\mathbf{A}_1$, Нейман находит

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{s_2} (\mathbf{A}_1, d\mathbf{s}_2).$$

Таким образом, все вопросы индукции в замкнутых цепях решаются при помощи вектора **A**. Известно, какую важную роль играл этот вектор — так называемый вектор-потенциал — в дальнейшем развитии электродинамики. Весьма важное значение для всего дальнейшего имело и неймановское выражение для коэффициента взаимной индукции

$$M_{12} = \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2} \frac{(d\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2)}{r_{12}}$$

и в частности для коэффициента самоиндукции (в этом последнем случае уже нельзя, впрочем, как известно, считать проводник линейным).

В этих формулах находит свое выражение предпосылка мгновенного распространения электромагнитного действия. Теперь мы знаем, что их пригодность как приближенных формул ограничена условием квазистационарности. Но тем не менее именно эти формулы дали возможность решающего сравнения опытных данных, полученных Герцем, с результатами теории Максвелла, так как по ним сам Герц и последующие исследователи вычисляли самоиндукцию, а затем и собственную частоту вибраторов.

Вильгельм Вебер поставил себе еще гораздо более общую задачу, чем Нейман: объединить в единое целое электростатику и электродинамику. Вебер — его основной мемуар появился в 1846 г. — исходит из основной формулы Ампера и пишет для тока — в этом заключается его главная гипотеза: $i = \frac{2\lambda u}{c}$, где λ — плотность (заряд на единицу длины) электричества, или, как тогда говорили, электрического флюида, а u — его скорость. Коэффициент 2 обусловливается тем, что принимается — и это типично для теорий того времени — что наряду со „стеклянным“ электричеством в проводнике движется в равном количестве и с равной скоростью также другой электрический флюид („смоляной“), c — постоянная, коэффициент пропорциональности, зависящий от той единицы, которой мы измеряем заряд. Тогда оказывается, что формула Ампера может быть интерпретирована так: две заряженные частицы электричества e и e' притягиваются или отталкиваются, смотря по тому, одноименны ли они или разноименны, с силой

$$f = \frac{ee'}{c^2 r^2}\left\{r\frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}, \tag{1}$$

где r — расстояние между частицами.

Но это, согласно всему выводу, относящемуся к взаимодействию между токами, есть часть силы, а именно та, которая действует между движущимися зарядами и только благодаря их движению. К этому нужно присоединить еще силу между покоящимися зарядами, т. е. обычную кулонову силу. Таким образом, Вебер приходит к следующему знаменитому своему выражению для полной силы взаимодействия между двумя заряженными частицами:

$$F=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}+\frac{ee'}{c^2 r^2}\left\{r\frac{d^2 r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}. \qquad (2)$$

Я нарочно обозначил заряды в кулоновой части силы через ε, а в амперовой части — через e, потому что выражение для первой, как оно здесь написано, уже предполагает определенный выбор единиц: единица заряда — это точечный заряд, действующий на равный себе и находящийся на расстоянии в 1 см с силой в 1 дину — так называемая электростатическая единица.

Во второй части, в зависимости от выбранных единиц для e, c будет иметь различное значение. Каково это значение при данном выборе единиц, этому может научить только опыт. Предположим, что мы измеряем e и во второй части (2) в электростатических единицах; тогда c имеет *вполне определенное* численное значение. Назовем его v.

Основной закон Вебера (2) для взаимодействия двух заряженных частиц перепишется теперь так:

$$F=\frac{ee'}{r^2}\left\{1+\frac{r}{v^2}\frac{d^2 r}{dt^2}-\frac{1}{v^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}.$$

Электромагнитная единица определена тем, что c полагают равным единице. Если вспомнить, что, согласно Веберу, (1) есть не что иное, как выражение для силы взаимодействия между двумя элементами проводника, несущими токи, в предположении, что сила тока определяется количеством электричества, прошедшего через сечение провода за единицу времени, то легко видеть, что электромагнитная единица заряда может быть наглядно определена следующим образом. Мы скажем, что через данный провод проходит за единицу времени электромагнитная единица заряда в том случае, если два параллельных друг другу прямолинейных элемента цепи длины Δs и $\Delta s'$, находящиеся друг от друга на расстоянии r, притягиваются или отталкиваются (в зависимости от относительного направления в них тока) с одинаковой силой $\Delta s\,\Delta s'/r$ дин.

Таким образом, исследования Вебера ввели в науку об электромагнитных явлениях универсальную постоянную v, связывающую пондеромоторные силы между токами и магнитами, с одной стороны, и электрическими зарядами, с другой. Так как электромагнитная единица соответствует $c=1$, то определение v часто называют сравнением величин электростатической и электромагнитной единиц заряда. Возник вопрос об опытном определении этой постоянной. Впервые это было сделано Вебером и Кольраушем (Kohlrausch) в 1858 г. Найденное ими значение: $v=310740$. Ее размерность, очевидно, — размерность скорости.[1]

Трудно переоценить значение всего пути, который привел к постановке вопроса о новой универсальной постоянной величине v и к экспериментальному ее определению. К этому мы вернемся ниже. Пока я хотел бы только отметить, что для максвелловской электромагнитной теории света только что указанное определение v и сравнение ее со значением скорости распространения света сыграло роль, аналогичную той, какую для ньютоновой теории тяготения имело вычисление значения радиального ускорения луны при движении ее вокруг земли и сравнение этой величины с ускорением падающих тел на земной поверхности. Несомненно, и здесь, и там дело шло о решающем этапе в ходе мыслей как Ньютона, так и Максвелла.

Я хочу еще раз подчеркнуть, что вся теория Вебера исходит, как и теория Неймана, из предположения о мгновенном распространении электромагнитного действия и полностью игнорирует среду между проводниками или, вернее, молчаливо отрицает влияние среды на электрические явления.

Из сказанного, конечно, ясно, что в этой теории v имеет только указанный смысл — отношения электромагнитных и электростатических единиц. Эта теория не дает никакого основания или даже больше — в ней абсолютно нет места для сопоставления значения v со скоростью света.

В теории Вебера возникают затруднения, на которые обратили внимание уже при ее возникновении. Теперь мы знаем, что она, как и теория Неймана, принципиально несовместима с большим классом

---

[1] К сожалению, я не могу далее останавливаться на этом чрезвычайно важном вопросе. В сборнике мы помещаем статью Вебера и Кольрауша. При чтении этой статьи следует иметь в виду, что в их обозначениях (как у всех авторов, считавших, что ток состоит из двух равных и противоположных потоков „стеклянного" и „смоляного" электричеств) скорость света есть $c/\sqrt{2}$.

электрических явлений, правда, в то время еще не известных. Но для развития учения об электричестве обе эти теории сыграли огромную роль. К уже сказанному я хочу прибавить следующее: именно на их основе Кирхгоф построил свою знаменитую теорию волнообразного распространения токов вдоль проводов, о которой я уже говорил выше. Взгляды Неймана легли в основу томсоновской теории колебательного разряда конденсаторной цепи. Мы не можем здесь входить в рассмотрение замечательных работ Гельмгольца об электромагнитных явлениях в связи с законом сохранения энергии, работ В. Томсона о магнитной энергии и других. В основе всех этих работ лежит представление о непосредственном — статическом или динамическом — действии на расстоянии, без учета влияния среды, с открыто или молчаливо принимаемым постулатом о мгновенном распространении электромагнитных действий.

Было бы, однако, неправильно думать, что вопрос о том, как же все-таки распространяется электрическое действие в пространстве между проводниками, не вставал перед исследователями.

В письме к Веберу от 19 марта 1845 г. знаменитый математик Гаусс (Gauss) замечает, что он уже давно поставил перед собой задачу — ввести в рассмотрение дополнительно к известным силам, действующим между электрическими зарядами, другие силы, в результате которых электрическое действие между зарядами распространялось бы с конечной скоростью. Но он решил не публиковать свои исследования, прежде чем ему не удастся указать механизм, при помощи которого такая передача может осуществляться; до сих пор же ему это сделать не удалось.

Гениальный ученик Гаусса Риман (Riemann) пытался осуществить это указание. Он действительно написал уравнение для потенциала, совершенно аналогичное лоренцовым уравнениям для запаздывающих потенциалов, т. е. включавшее в себя распространение с конечной скоростью. Но это предположение Римана носило чисто формальный характер и не учитывало действия среды. Он сам не сделал из него конкретных, относящихся к конкретным физическим явлениям выводов. Взгляды Римана не повели к новой теории электродинамических явлений и, повидимому, не дали толчка для дальнейшего развития электродинамики. Правильно замечает по этому вопросу Уитэккер, из чьей чрезвычайно интересной „Истории эфира“[1] взято большинство приведенных выше исторических данных:

[1] E. T. Whittaker. A History of the Theories of Aether and Electricity. Dublin, 1910.

„Успех пришел только после того, как были приняты во внимание свойства промежуточной среды". И этот шаг был сделан Фарадеем и Максвеллом.

Параллельно с несомненно замечательным развитием теории, о которой только что шла речь и которая строилась, как мы видели, под знаком представления о непосредственном мгновенном действии на расстоянии и без учета влияния среды, шли независимые от него, совершенно исключительно плодотворные исследования Фарадея.

Фарадей, являющийся одним из самых крупных, а может быть, и самым крупным физиком-экспериментатором всех времен, принадлежал к той школе экспериментаторов (по существу он, может быть, ее и создал), которые руководствуются при своих исследованиях совершенно конкретными, часто довольно грубыми представлениями о механизме явлений, за исследование которых они берутся. Другой гениальный экспериментатор — Ньютон — шел совершенно другим путем. Он, по крайней мере по его собственному уверению, старался не делать гипотез, считал лишним и вредным связывать себя при экспериментальном исследовании какими-нибудь специальными конкретными представлениями о механизме явлений. Другой вопрос — насколько это ему удавалось.

Уже при исследовании открытого им явления индукции Фарадей составил себе представление, которое превратилось у него в подлинное мировоззрение. Магнитные явления сосредоточены в среде, окружающей магнитные тела или проводники, несущие ток. Все пространство пронизывается силовыми магнитными линиями, которые и являются носителями магнитных действий. Таким образом, существовавшему и идущему от Ньютона воззрению на электромагнитные явления как на проявление сил между проводниками или магнитами, действующих между ними без участия среды, Фарадей противопоставил свое представление о среде как собственном носителе электромагнитных явлений. Руководясь этим представлением о роли среды, Фарадей открыл основные законы индукции и дал им на языке силовых линий ту законченную формулировку, которой мы пользуемся и теперь.

В последующие годы Фарадей старается установить тождественность, тогда еще далеко не общепринятую различных „сортов" электричества.

В 1833 г. Фарадей открыл свои знаменитые электрохимические законы. В 1837 г. следует открытие влияния диэлектрика на емкость конденсатора и вводится понятие диэлектрической постоянной (specific inductive capacity). Свое представление о роли среды в магнитных явлениях Фарадей переносит и на электрические. Размышляя о различии между поведением электролита и изолятора, он приходит к понятию электрической поляризации диэлектрика: „Изоляторами, — говорит Фарадей, — могут быть названы такие тела, частицы которых способны сохранять поляризованное состояние, тогда как проводниками являются те тела, частицы которых не могут быть длительно поляризованы“.[1] Из рассмотрения явлений в электролитах и диэлектриках Фарадей вынес еще более глубокое убеждение, что во всех случаях дело идет о действии между соседними частицами и что электрическое действие на расстоянии, т. е. обычная индукция, никогда не происходит иначе как через влияние промежуточной среды. Естественно, конечно, что и в дискуссии электрических явлений Фарадей пользовался представлением об электрических силовых линиях.

Все эти замечательные открытия проистекали из его общих представлений и в свою очередь укрепляли его уверенность в правильности последних. Очень часто и много дебатировался и дебатируется вопрос о ценности для прогресса науки такого рода моделей, какие себе строил Фарадей. Известно, что многие выдающиеся физики отрицают их пользу. Конечно, мы не можем останавливаться здесь на этих вопросах даже кратко. Но одно замечание я позволю себе сделать. Даже если признать, как это иногда делают, что такого рода гипотетические модели являются в лучшем случае лишь лесами, которые могут и должны быть по окончании постройки убраны без остатка, что сохраняясь они могут явиться скорее препятствием при дальнейших расширениях и перестройках здания, нельзя все же, мне кажется, отрицать того, что, по тем или иным причинам, конкретные, подчас весьма грубые модели сыграли чрезвычайно большую роль в творчестве и Фарадея, и Максвелла, и Томсона, и ряда других замечательных творцов современной физики. Какие из этого можно сделать выводы, это вопрос другой.

С 1841 по 1845 г. здоровье Фарадея не позволило ему продолжать свою замечательную деятельность. Но с 1845 г. снова следует ряд блестящих открытий. Я укажу только на открытие вращения плоскости поляризации света в магнитном поле и открытие диамагнетизма.

---

[1] Experimental Researches, § 1338. Сборн., стр. 42.

К 1846 г. относится его мемуар чисто спекулятивно-теоретический — „Мысли о лучевых колебаниях“, очень показательный для взглядов Фарадея.[1] На него ссылается Максвелл в своей „Динамической теории электромагнитного поля“,[2] где он прямо говорит, что электромагнитную теорию света предложил Фарадей:

„Концепция распространения поперечных магнитных возмущений с исключением возможности продольных возмущений была отчетливо высказана профессором Фарадеем в его „Мыслях о лучевых колебаниях“. Электромагнитная теория света, предложенная им, является по существу той же самой, которую я начал развивать в этой статье, за исключением того, что в 1846 г. еще не было данных для вычисления скорости распространения“.

Совсем иначе отнеслись к мемуару Фарадея современники. Для иллюстрации этого в сборнике помещено письмо Эйри, который категорически возражает против высказанных Фарадеем идей.[3]

Громадное богатство новых фактов, открытых Фарадеем, принесло ему всемирное признание и славу. Но, сличая даты его открытий с указанными выше датами появления основных теоретических мемуаров того времени, мы ясно видим, что идеи Фарадея остались совершенно не использованными. И этому вряд ли можно удивляться. Слишком отлично от всего привычного было физическое мировоззрение Фарадея.

„Фарадею говорили, правда, — говорит Герц,[4] — что при электризации тела в него что-то вносят, но он видел, что возникающие изменения обнаруживаются лишь вне тела, а отнюдь не внутри. Фарадея учили, что силы просто перескакивают через пространство, но он видел, какое большое влияние оказывает на эти силы то вещество, которым заполнено это якобы перепрыгиваемое пространство. Фарадей читал, что электричество существует наверное, но что о его силах спорят, и он видел, однако, насколько осязательно выступают в своих действиях эти силы, в то время как самого электричества он никак не мог обнаружить. И тогда все обернулось в его представлении. Электрические и магнитные силы стали для него существующими, действительными, осязаемыми, а электричество, магнетизм сделались вещами, о существовании которых можно спорить. Силовые линии, как он называл силы,

[1] Сборн., стр. 53.
[2] Сборн., стр. 79.
[3] Сборн., стр. 205.
[4] Сборн., стр. 195.

мыслимые самостоятельно, стояли перед его умственным взором в пространстве как состояния последнего, как напряжения, как вихри, как течения, как многое другое, что и сам он не смог бы определить, но они стояли там, действуя друг на друга, сдвигая и толкая тела туда и сюда, распространяясь и сообщая друг через друга возбуждение от точки к точке“.

А между тем несомненно, что эти идеи положили начало тому коренному повороту в направлении физических воззрений, который со времени Ньютона является первым принципиально новым шагом в развитии физического мировоззрения вообще. По существу от Фарадея ведет свое начало физика поля, с конечной скоростью распространения действия, в противоположность физике мгновенного действия на расстоянии; понимание электромагнитных явлений, говоря несколько схематически, связывается с дифференциальными закономерностями в противоположность законам типа интегральных.

Первый, кто понял и оценил идеи Фарадея, кто на основе этих не совсем ясных, но по своему направлению достаточно определенных идей создал это новое направление, был Максвелл. В своем знаменитом „Treatise“ Максвелл очень ясно высказывает свое мнение о направлении Ампера, с одной стороны, и о направлении Фарадея, с другой. Слова Максвелла чрезвычайно ярко характеризуют тогдашнюю ситуацию и его собственное отношение к ней. Читатель найдет их в отрывке IX настоящего сборника.[1]

Отдавая должное Амперу, этому „Ньютону электричества“, и его методу, Максвелл не скрывает явного предпочтения, которое имеет в его глазах весь стиль идей Фарадея. Он определенно объявляет себя его последователем. „Главным образом в надежде сделать его (Фарадея) идеи основой математической теории, я и предпринял написание этого трактата“, говорит Максвелл о своем труде. И действительно, вся постановка математической задачи Максвеллом проникнута духом Фарадея. „При исследовании электрических явлений, — говорит Максвелл там же, — мы можем пользоваться формулами, в которых фигурируют такие величины, как расстояния между телами, заряды этих тел и текущие в них токи, или же мы можем пользоваться формулами, в которых фигурируют другие величины, непрерывные во всем пространстве. Математическая операция, применяемая при первом методе, это интегрирование вдоль линий, по поверхностям и по конечным объемам;

[1] Сборн., стр. 105.

при втором же методе применяют дифференциальные уравнения в частных производных и интегрирование, распространенное на все пространство“.

„Другие величины, непрерывные во всем пространстве“ — это векторы, характеризующие электромагнитное поле; „дифференциальные уравнения в частных производных“ — это знаменитые уравнения Максвелла.

Осуществление поставленной себе Максвеллом задачи — построить математическую теорию электрических и магнитных явлений на базе идей Фарадея — имеет свою, черезвычайно интересную и поучительную историю, на которой, однако, мы останавливаться не можем. Максвелл исходил при построении своей математической теории из механических моделей. Нужно вообще заметить, что Максвелл, точно так же как и другие замечательные теоретические физики максвелловской и более поздней эпохи, как, например, Больцман (Boltzmann) и Кельвин (Kelvin), по справедливому замечанию Эйнштейна (Einstein), никогда не оставляли мысли о сведении электромагнитных явлений, с их пондеромоторными силами, на действие гипотетической непрерывной среды, обладающей массой. И только под влиянием, как говорит Эйнштейн, безнадежности или во всяком случае безуспешности этих попыток в конце XIX в. постепенно совершился переворот в наших фундаментальных представлениях. Теоретическая физика переросла ньютоновские рамки, которые придавали ей устойчивость и служили умственным руководством науке в течение почти двух столетий (Einstein. «The World as I see it», стр. 151).

Первоначальные механические модели Максвелла черезвычайно „материальны“. Среда, в том числе и пустота, состоит из дисков, сцепленных друг с другом, обладающих моментом инерции, массой и вообще свойствами весомых тел и т. п. Чрезвычайно поучителен для ознакомления с этой стороной творчества Максвелла популярный доклад Больцмана, одного из крупнейших теоретиков, сделанный им в год опубликования Максвеллом его трактата. Максвелл сам не придерживался последовательно той или иной модели, из чего проистекают зачастую неувязки в различных его высказываниях, и хотя, как сказано, он верил в механическую объяснимость электрических явлений, но ясно, что конкретным, разбираемым им моделям он придавал лишь служебное значение. Они должны были — в этом заключалась их задача — навести его на правильную математическую формулировку теории электромагнитных явлений и показать принципиальную возможность сведения этих явлений на механические. Сообразно с этим в „Трактате“ 1873 г., в котором он излагает все свое учение в окончательном виде, о моделях нет или почти нет речи. Леса, помогшие Максвеллу воздвигнуть замечательное здание, здесь уже сняты.

Математическая теория Максвелла вылилась, как известно, в форму его знаменитых уравнений. Они резюмируют сущность теории, из них выводятся все дальнейшие и столь неожиданные тогда следствия. Это, а также неопределенность моделей дало Герцу[1] повод сказать; „Теория Максвелла — это система уравнений Максвелла“. Но все же следует помнить и слова самого Максвелла: „Для людей с различным направлением ума научная истина представляется в различной форме и нужно считать одинаково научным, является ли она в грубой (robust) форме и яркой окраске физической иллюстрации или в тонкой и бесцветной форме символического выражения“.

Нам нет надобности останавливаться здесь на разборе уравнений Максвелла и на сравнении их с прежними теориями. Но основной момент его теории, может быть, уместно подчеркнуть.

Закон индукции Фарадея выражается в терминах теории поля так, что быстрота изменения числа силовых магнитных линий, проходящих через контур, пропорциональна, или, точнее говоря, определяет собой интеграл по контуру от возникающей при этом электродвижущей силы. Это является — во всяком случае при условии квазистационарности — лишь другим выражением интегральных формул Неймана. Перенимая это в свою теорию, Максвелл делает следующий шаг — решительный шаг, принадлежащий всецело ему. Он постулирует взаимность между электрическим и магнитным полями, предполагая, что скорость изменения числа электрических силовых линий, пронизывающих поверхность замкнутого контура, порождает в свою очередь магнитодвижущую силу в контуре, интеграл от которой пропорционален скорости изменения во времени потока электрических линий, т. е. току смещения, который эквивалентен таким образом обычному току в проводниках. Введение тока смещения есть то, что придает теории Максвелла ее специфическую силу. Выражение этих двух законов в математической форме и приводит к знаменитым максвелловским уравнениям.

---

[1] Вводный обзор ко II тому Gesamm. Werke; Сборн., стр. 113.

Нельзя переоценить значение уравнений Максвелла для трактовки электрических явлений. Эти уравнения — отвлекаясь от математических трудностей — содержат в себе принципиальную возможность решить всякую задачу, которую можно было тогда разумным образом поставить в области электромагнитных явлений (может быть, за небольшими исключениями, относящимися, например, к магнитным явлениям в железе). В частности, они позволили подойти к назревшей тогда задаче о явлениях, связанных с электрическими токами в открытых цепях. Из них вытекала необходимость существования совершенно новых явлений, причем теория предсказывала и их количественную сторону. Таким образом, возникали новые проблемы, принципиально поддающиеся расчету и опытной проверке.

Одно из самых замечательных следствий было то, что всякое возбуждение распространяется в диэлектрике, а также и в вакууме (в теории Максвелла между вакуумом и любым диэлектриком разница заключается только в величине диэлектрической постоянной ε) в виде поперечных волн, имеющих определенную, зависящую от ε скорость распространения. И что особенно замечательно — скорость распространения поперечных электромагнитных волн должна быть равна отношению электростатических единиц заряда к электромагнитным, т. е. определенной величине, значение которой — конечно, только в этом последнем качестве — уже было ранее определено Вебером и Кольраушем. Все это вместе и дало Максвеллу основание провозгласить его знаменитый тезис: „Свет есть не что иное, как электромагнитные колебания".

Интересно в связи с этим, что говорит об этом величайшем открытии Максвелла Джинс[1] (Jeans): „Первое упоминание о великом открытии находится в письме, которое он (Максвелл) написал Михаилу Фарадею, помеченном 19 октября 1861 г.:

„Я предполагаю, что упругость сферы воздействует на электрическую среду, ее окружающую, и оказывает на нее давление. Из определенного Кольраушем и Вебером численного отношения между статическим и магнитным действием электричества я определил упругость среды в воздухе и, считая, что она тождественна с упругостью светового эфира, определил скорость распространения поперечных колебаний. Результат — 193 088 миль в секунду. Физо (Fizeau) определил скорость света в 193 118 миль в секунду прямым опытом".

[1] James Clerk Maxwell. A Commemoration Volume, 1831—1931. Cambr., 1931, стр. 102.

Джинс продолжает: „Ситуация была сравнима по своей драматической напряженности с великим моментом, когда Ньютон впервые подверг испытанию свой закон всемирного тяготения путем вычислений, связанных с расстоянием до луны. По несчастливой случайности Ньютон воспользовался при этом неточным значением для земного диаметра, и это привело к настолько неудовлетворительному численному совпадению, что Ньютон отложил свою теорию почти на двадцать лет. С Максвеллом случилось обратное: оба числа, приведенные выше, совпадают с точностью до 30 миль в секунду. И что особенно удивительно — это то, что оба числа ошибочны, с ош бкой больше чем в 6000 миль в секунду“.

Впрочем при опубликовании своего мемуара „Динамическая теория электромагнитного поля“, „вероятно, — как говорит Джинс, — наиболее важного и имевшего наибольшее влияние мемуара из всех написанных им вообще, Максвелл указывает скорости в километрах в секунду, причем из приведенных здесь значений ясно, что оба числа ни в какой мере не находятся в таком хорошем согласии, как это представлялось вначале“. „К счастью, — продолжает далее Джинс, — Максвелл, повидимому, осознал, что скорость света была найдена далеко не точно, и поэтому он не дал обескуражить себя существенному расхождению в числах, как это случилось с Ньютоном“.

Громадное познавательное значение взглядов Фарадея — Максвелла и в особенности теории Максвелла заключалось именно в том, что эта теория, наряду с объяснением уже известных фактов, предсказывала — и не только в общих чертах, а весьма конкретно, вплоть до количественной стороны — существование новых, до тех пор не известных явлений: существование электромагнитных волн — одно из них, хотя, может быть, и самое главное. И это вышло как-то помимо самих авторов. Несомненно, ни Фарадей, ни Максвелл первоначально вовсе не имели в виду ту связь между оптикой и электромагнитными явлениями, которая так ярко выявилась в качестве результата теории, создававшейся первоначально только для электрических явлений. Это придает теории Максвелла громадную эвристическую силу. „Нельзя изучать эту чудесную теорию, — говорит Герц[1], — без того, чтобы порою не возникало ощущения, что математическим формулам присущи самостоятельная жизнь и собственный разум, что они умнее нас, умнее

[1] Сборн., стр. 196.

даже открывшего их, что они дают больше, чем в них было ранее вложено“.

Но все это, вся эта оценка, конечно, post factum справедлива постольку и потому, что эти предсказания оправдались. Но осуществить предсказания теории Максвелла оказалось не так просто и произошло это не сразу. Сам Максвелл, повидимому, не предпринимал ничего для опытной проверки одного из существенных своих предсказаний — существования электромагнитных волн. Что же касается общего положения вопроса, то ряд исследователей был, повидимому, очень близок к практическому их осуществлению, а некоторые из них даже имели их в руках уже в конце 70-х годов.

Но здесь повторилась известная история. Большей частью, когда дело идет о совершенно новой неизведанной области, то определенная интенсивная направленность мысли в связи с особо острым экспериментальным инстинктом позволяет ученому сделать решающий шаг и открыть эту область для науки. Много шансов за то, что при отсутствии этих условий новое основное явление останется незамеченным, так невзрачны обычно его проявления, так велика умственная инерция обычного экспериментатора.

Для науки было счастьем, что сравнительно скоро нашелся гениальный физик, интересы которого направились, или, вернее, были направлены Гельмгольцем в сторону максвелловской теории. Как это случилось, как Герц пришел к своему знаменитому опытному открытию, какова преемственность его замечательных работ по отношению к работам Фарадея и Максвелла, как шаг за шагом вырисовывалась в его руках природа электромагнитных волн, наконец, что новое и существенное внес он сам и в теорию, — все это изложено им самим в помещенном ниже его „Вводном обзоре“ ко II тому Gesamm. Werke и в других приведенных в сборнике статьях. И все это рассказано так последовательно, просто и убедительно, что прибавления оказались бы лишними.

То, чего он не говорит и что, может быть, нелишне напомнить, сказал Дж. Дж. Томсон (J. J. Thomson),[1] который сам был выдающимся физиком-экспериментатором. „Исследования Герца являются одним из наиболее замечательных во всей истории физики триумфов экспериментального уменья, изобретательности и осторож-

---

[1] James Clerk Maxwell. A Commemoration Volume, стр. 43.

ности в сделанных выводах“. Они принесли окончательную победу и электромагнитной теории света.

Открытие Герца произвело очень большое впечатление в ученом мире. В ответ на присылку Герцем манускрипта его работы „Inductionserscheinungen hervorgerufen durch die elektrischen Vorgänge in Isolatoren“ (Ges. Werke, B. II, 6) Гельмгольц в качестве непосредственной реакции пишет ему: „Манускрипт получил. Браво! В четверг передам в печать“. Вскоре работы Герца получили признание во всем мире, исследователи всех стран занялись вновь открытой областью. Значение шага, сделанного Фарадеем, Максвеллом, Герцем, для науки громадно, и электромагнитная теория света по праву считается одним из замечательнейших этапов на пути познания природы.

Нам здесь особенно важно подчеркнуть, что теоретическое открытие Максвеллом электромагнитных волн, которое затем в руках Герца привело к экспериментальному их осуществлению, к приданию этим волнам осязаемого физического существования, что это открытие в буквальном смысле слова породило современную беспроволочную телеграфию, телефонию и т. д.

По случаю столетия со дня рождения Максвелла Дж. Дж. Томсон писал: „Открытие электрических волн имело не только научный интерес, хотя единственно им оно было вдохновлено. Подобно открытию электромагнитной индукции Фарадеем оно имело глубокое влияние на цивилизацию. Оно дало в руки рабочий метод, который позволяет приблизить друг к другу обитателей всего земного шара на расстояние слышимости, в чем заложены социальные, воспитательные и политические возможности, значение коих мы только начинаем понимать“.[1]

То, что открытие электромагнитных волн фактически породило всю современную беспроводную технику, очевидно. Ведь радио и есть не что иное, как использование электромагнитных волн для практических целей.

С другой стороны, до изобретения радио были предложены устройства для беспроводной связи, основанные на тех законах электрических и магнитных явлений, которые были известны и до открытия электромагнитных волн. Может быть, целесообразно несколько подробнее остановиться, хотя бы в общих чертах, на том, какие конкретные свойства нового явления обусловили то

---

[1] James Clerk Maxwell. A Commemoration Volume, стр. 43–44.

обстоятельство, что основанный на этом явлении способ беспроводной телеграфии оказался по заложенным в нем возможностям совершенно несравнимым с прежними методами, как это доказало его блестящее развитие.

Основной недостаток, первородный грех всех прежних устройств беспроводной связи, был не случаен, а обусловливался свойством тех электромагнитных физических явлений, которые клались в их основу и которые были единственными известными в то время. Этот недостаток состоял в очень быстром убывании действия передатчика на приемник с увеличением их взаимного расстояния. Схематически можно разделить все эти устройства на четыре типа: 1) электростатическое воздействие заряженных тел друг на друга, 2) взаимодействие токов или токов и магнитов, выражающееся, например, в пондеромоторных силах (отклонение стрелки в приемнике под влиянием тока в проводе в передатчике), 3) индуктивное воздействие одних носителей тока на другие и, наконец, 4) использование в месте приема земных токов, ответвляющихся при прохождении тока через землю между двумя заземленными электродами в месте передачи.

Все „элементарные“ электрические и магнитные действия при всех известных прежде условиях, будь то действие электростатически заряженных тел или „элементов“ проводников, убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Сам Герц говорит следующее:[1] „Впрочем особенно приводили меня в изумление все бо́льшие расстояния, вплоть до которых я мог обнаружить действие. До тех пор привыкли считать, что электрические силы убывают по закону Ньютона и, следовательно, с увеличением расстояния быстро становятся незаметно малыми“.

Но мало этого. Во всех перечисленных ниже случаях, на расстояниях, значительно превышающих линейные размеры устройств, электрическое и магнитное действия уменьшаются не как $1/r^2$, а как $1/r^3$. Дело в том, что, например, в электростатическом случае, наряду с действием самого заряженного тела, есть еще действие его зеркального изображения по отношению к поверхности проводящей земли. Токи были известны только замкнутые, т. е. проекция всего токонесущего контура всегда была равна нулю. Поэтому на больших расстояниях оставалось только разностное действие; иными словами, в выражение для электрической или

[1] Вводный обзор ко II тому; Сборн., стр. 116.

магнитной силы на больших расстояниях привходил еще множитель l/r, где l — размеры устройства. Эта крайне невыгодная зависимость действия от расстояния у электромагнитных устройств, основанных на использовании электростатики или замкнутых цепей, — а других тогда не знали — и делала их практически непригодными для действия на более или менее значительные расстояния.

Совершенно новые возможности именно в этом направлении открывает применение электрических волн. Особый тип взаимодействия элемента тока со средой, предсказанный теорией Максвелла — Герца и чуждый прежним теориям, так называемый волновой член, с одной стороны, и уточненная опять этой же теорией возможность при подходящей частоте работать с открытой цепью вместо замкнутой, с другой — приводят к тому, что при правильно подобранных условиях электромагнитная сила убывает в свободном пространстве на любых расстояниях обратно пропорционально не третьей, а лишь первой степени расстояния. Без трудов Фарадея, Максвелла и Герца не было, конечно, возможности угадать совокупность необходимых условий. Только сознательное использование этих условий могло привести и действительно привело к изобретению практических устройств, служащих для целей беспроводной передачи сигналов и порождающих поля, убывающие несравненно медленнее с расстоянием, чем это было при прежних устройствах.

Кстати заметим, что даваемое иногда толкование значения воззрений Фарадея — Максвелла для беспроводной телеграфии состоит в следующем. Решающее обстоятельство усматривается в том, что из новой теории вытекает излучение энергии от передающего устройства в пространство, которая и воспринимается приемником, в то время как такое отшнуровывание энергии чуждо прежним теориям.

На наш взгляд это толкование вряд ли убедительно. Если говорить на современном языке, то оно означает, что существенным является отличие от нуля потока вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность. В пустом пространстве отличие этого потока от нуля действительно всецело обусловливается наличием, например, в поле диполя, волнового члена, чуждого прежним теориям. Но дело в том, что (оставаясь при этой терминологии) поток вектора Пойнтинга, рассчитанный в отсутствие этих членов, равен нулю только в случае свободного пространства, окружающего передатчик, т. е. при отсутствии приемника. При наличии же приемника переход энергии от передатчика к приемнику вытекает и из прежних теорий. Как ни существенен, таким образом, факт отшнуровывания силовых линий или энергии при отсутствии воспринимающих устройств (т. е. так называемое излучение в пространство, которое особенно подчеркивал Герц) для всего мировоззрения и для углубленного понимания всех процессов, но в интересующем нас вопросе он сам по себе как таковой играет второстепенную роль. Существенен, как сказано, не сам факт переноса энергии, который имеет место и там и здесь, а существенно то, как зависит количество перенесенной энергии от расстояния. Другими словами, важно наличие иного, несравненно более выгодного убывания поля с расстоянием, чем то, которое соответствовало прежним представлениям.

Совсем другой вопрос — это насколько связан закон $1/r$ с отшнуровыванием энергии, с излучением ее в пустое пространство. Здесь нужно сказать, что такая и весьма тесная связь действительно существует. Может быть, даже можно сказать, что закон $1/r$ и наличие отшнуровывания энергии — две стороны одного и того же явления.

Но прежде всего заметим следующее: мы говорили только что о волновом члене, убывающем медленно, и о неволновых, убывающих с расстоянием быстро. Эти термины привычны для всякого, занимающегося радио. Но природа не знает, конечно, такого формального разделения на слагаемые; физический смысл этого заключается в следующем. Магнитное поле, порождаемое, скажем, элементом проводника, по которому течет переменный ток, убывает по закону Био—Савара (Biot, Savart) обратно пропорционально второй степени расстояния. Но из уравнений Максвелла — Герца вытекает, что этот закон дает лишь приближенное значение напряженности поля, причем приближение тем лучше, чем меньше расстояние данной точки до элемента проводника. Наоборот, при больших расстояниях закон Био—Савара совершенно не верен, поле гораздо больше, чем вычисленное по этому закону, сдвинуто по фазе и убывает на больших расстояниях r обратно пропорционально первой степени r. То же самое справедливо на больших расстояниях и для убывания электрического поля. Но здесь возникает вопрос: почему до тех пор, пока не знали, что закон Био — Савара, вообще говоря, не верен, он несомненно оправдывался на опыте (или, вернее, оправдывались следствия, из него выведенные)? Ответ станет ясен, если уточнить понятие малых и больших расстояний. Теория Максвелла учит, что масштабом при оценке расстояния, о котором идет речь, служит длина волны λ в окружающем проводник пространстве, так что на расстояниях, малых по отношению к λ, поле от элемента убывает $\sim 1/r^2$, а при $r \gg \lambda$ — как $1/r$.

Заметим, между прочим, что при домаксвелловских взглядах, не считавшихся со средой, не было никакого повода думать о масштабе. Или можно сказать так: распространение принималось мгновенным, но тем самым всякое расстояние в указанном только что смысле являлось малым. Что же касается фактической стороны, то легко видеть, в чем заключалась причина неизменного согласия закона Био—Савара с опытом. Во всех известных тогда установках имели дело с настолько низкими частотами переменного тока, т. е. настолько большими λ, что практически все расстояния были в указанном смысле малыми.

Преимущество волновой телеграфии сказывается, таким образом, только тогда, когда расстояния значительно больше длины волны, т. е. при достаточно коротких волнах или, что то же самое, при достаточно большой частоте. Но зато это преимущество делается подавляющим при больших отношениях r/λ.

Сказанное есть просто пересказ некоторых свойств знаменитого, хорошо известного специалистам решения Герца максвелловских уравнений для осциллирующего диполя. Вряд ли нужно добавлять, что это не „объяснение“, да вряд ли и существует другой язык, кроме точного языка формул и соответственной физической интерпретации входящих в них величин, на котором можно было бы „объяснить“ количественные соотношения.

С этой оговоркой, может быть, все же не будет лишним сказать еще два слова о той связи, которая существует между законом убывания поля с расстоянием и конечной скоростью распространения.

Представим себе, что мы очень быстро разводим на некоторое расстояние два равных по величине, но обратных по знаку „точечных“ заряда и затем сводим их снова до первоначального исчезающе малого расстояния. Описанная модель есть не что иное, как модель осциллирующего герцевского диполя или, что сводится на то же, изолированного элемента тока. Если время, за которое мы развели заряды, назвать τ, то поле, ввиду того, что скорость распространения имеет конечное значение v, успеет распространиться только внутри сферы с центром в середине диполя и радиусом, равным $v\tau$. Теперь очень быстро сведем заряды; они нейтрализуют друг друга и останется только электрическое и магнитное поля или, как говорят, электромагнитное возмущение внутри сферы. Максвелловские уравнения показывают, что это возмущение распространяется со скоростью v во вне, так что поле все время остается сконцентрированным внутри шарового слоя толщины $2v\tau$. Во внутренней полости, отграниченной этим слоем, поля *уже* нет, вне его — поля *еще* нет. Слой движется, как сказано, наружу со скоростью v, т. е. его радиус увеличивается, а толщина остается постоянной. Но именно ввиду того, что поле не выходит за пределы толщины слоя, объем, занимаемый им, растет, как r^2 (после того, как средний радиус слоя или среднее расстояние до центра — так в рассуждение входит расстояние — стало большим по сравнению с толщиной слоя). Вся заключенная в слое энергия остается постоянной, т. е. плотность ее уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. А так как энергия пропорциональна квадрату силы поля, то поле как магнитное, так и электрическое убывает обратно пропорционально первой степени расстояния. Мы видим, как тесно связан закон убывания с фактом конечной скорости распространения, и видим далее, почему закон $1/r$ становится справедливым только на расстояниях, больших по сравнению с толщиной слоя, которая здесь соответствует длине волны в случае синусоидальных полей. Это несколько другой способ пояснения процесса распространения, приуроченный к другому примеру, чем тот, который обычно приводится в пояснение квадратичного закона убывания интенсивности света, но сущность и там и здесь, конечно, одна и та же.

Итак, медленное убывание полей с расстоянием — вот то, что определяет, я бы сказал, теоретическую эффективность электромагнитных волн для передачи энергии приемнику, в чем заключается конечная задача всякого передающего устройства. Я говорю „теоретическую“ потому, что, как оказалось позже, существует еще одно обстоятельство, не предусматривавшееся никакой теорией, благодаря которому волновая передача на расстояние обладает перед всеми остальными способами еще дополнительным громадным преимуществом. Благодаря ему делается возможной связь между любыми точками на земной поверхности на расстояния, о которых при изобретении радио в сущности не могли и думать. Я имею в виду возможность использования ионосферы, отражение электромагнитных волн от которой и обусловливает их действие на большие расстояния. Но, как сказано, об ионосфере при изобретении радио знать не могли.

То, что открытие Герца, доказавшее существование электромагнитных волн, поставило на очередь проблему их использования для практических целей передачи сигналов, можно, конечно, утверждать наверное. Несколько труднее конкретно указать, какой именно своей стороной это открытие привлекло внимание изобретателей. Мы уже видели, что фактически преимущество лежит в законе убывания действия с расстоянием. Мне кажется, что вряд ли будет ошибкой сказать, что именно это свойство и дало необходимый толчок, хотя и не непосредственно, а путем аналогии со светом, где сравнительно медленное убывание интенсивности с расстоянием уже давно входило в инстинктивное знание каждого экспериментатора. Конечно, ничего определенного сказать здесь нельзя. Может быть, косвенное подтверждение этого мнения вытекает из высказываний Попова о желательности уменьшения длины волны при беспроволочной телеграфии для возможно большего приближения к световым явлениям.

Как бы то ни было, но мысль, хотя вначале и расплывчатая, о том, что электромагнитные волны могут стать средством связи, явилась у многих почти непосредственно после того, как стали известны опыты Герца. В связи с этим я хотел бы упомянуть об одном эпизоде, который, повидимому, часто излагался неправильно В литературе можно встретить следующий рассказ.

Уже в 1889 г. к Герцу обратился гражданский инженер Губер (Huber) из Мюнхена с запросом, не могут ли быть открытые Герцем волны использованы для беспроволочного телефона. На это Герц якобы ответил отрицательно. Повидимому — на это указывает Геншан — это легенда, которую, как он говорит, „нужно присоединить к целому списку неточных информаций, более или менее умышленных (intéressées) и распространившихся после того, как выявилась возможность беспроволочной телеграфии, после того, как увидели ее значение и развитие“.[1]

Действительные факты таковы. В 1897 г., т. е. через три года после смерти Герца, инженер Губер переслал в „Elektrotechnische Zeitschrift“ письмо Герца, которое и было там напечатано без комментариев. Вот перевод этого письма:

---

[1] J. Guinchant. Les grandes étapes de la radio. Fasc. I, Paris, 1925, стр. 21

Милостивый государь!

Я с удовольствием отвечаю на ваше любезное письмо от 1 дек. Силовые магнитные линии распространяются подобно лучам, так же как и электростатические силовые линии, только тогда, когда их колебания достаточно быстры; в этом случае оба типа силовых линий не отделимы друг от друга, и лучи или волны, о которых идет речь в моих исследованиях, могли с одинаковым правом быть названы как магнитными, так и электрическими. Но колебания трансформатора или телефона намного более медленны. Предположим, что у нас 1000 колебаний в секунду, что уже представляется довольно высоким числом колебаний; этому соответствовала бы в эфире волна длиной в 300 км; фокусные расстояния применяемых зеркал должны были бы иметь размеры того же порядка. Если бы вы были в состоянии построить вогнутые зеркала размером с материк, то вы могли бы отлично поставить опыты, которые вы имеете в виду. Но с обычными зеркалами практически сделать ничего нельзя, и вы не сможете обнаружить ни малейшего действия. Так по крайней мере я думаю.

С совершенным уважением, преданный вам

Г. Герц.

Губер, к сожалению, не сообщил текст своего письма от 1 декабря. Я не знаю, существует ли еще какая-нибудь переписка Губера с Герцем. Повидимому, нет.

Мы уже раньше говорили о том, что идея телеграфирования без проводов вообще гораздо старше, чем радио. Поэтому весьма естественно, что непосредственно после открытия Герца можно найти в литературе ряд высказываний, подходящих с той или иной стороны к телеграфированию без проводов, при помощи электрических волн. Нам казалось желательным привести наиболее, на наш взгляд, интересные из них.

Заканчивая настоящее введение, я хотел бы выразить надежду, что этот сборник достигнет своей цели — осветит то положение, которое существовало к моменту, когда радио было изобретено, и покажет, как физическое исследование шаг за шагом подготовляло для него идейную почву. Из приведенных материалов видно далее, как близко подходили исследователи к решению практической задачи. Но было бы, на мой взгляд, ошибочно считать, что все это в какой бы то ни было мере умаляет заслугу действительного изобретения радио.

Часто говорят о том, что главное в изобретении — идея, осуществление же ее — дело сравнительно второстепенное. Я думаю, что, когда речь идет об изобретении такого масштаба, как радио, подобное деление на идею и ее осуществление в большинстве случаев слишком схематично и поэтому неправильно освещает положение вещей.

Очень часто, mutatis mutandis, идея изобретения неразрывно связана с осуществлением. По мере осуществления сама идея только и приобретает то значение, которого она вначале не имела.

Настоящим изобретателем по праву должен считаться тот, кто дал идее конкретное осуществление, кто конкретными устройствами слил идею и осуществление в одно органическое целое, после чьих работ не остается сомнения в том, что поставленная практическая цель достигнута.

Мне кажется, что именно такой случай имеет место здесь[1]...

---

[1] [„Введение“ осталось незаконченным. Это последняя статья Л. И. Мандельштама, работу над которой оборвала его смерть.]

69

ЕЩЕ РАЗ О СИЛАХ ИНЕРЦИИ[1]

(В связи со статьей А. Н. Крылова[2])

[*Успехи физических наук 28, вып. 1, 99—102, 1946*]

Трудности, которые возникают в вопросе о так называемых силах инерции, связаны главным образом с двумя моментами: 1) рассматривают сплошные тела, например маховик, нить и т. д. (при этом и связи осуществляются тоже сплошными телами), а применяют терминологию „точечной“ механики; 2) рассматривают связи как абсолютно жесткие.

По существу, конечно, никаких сил инерции нет, ни реальных, ни фиктивных. Однако ввиду установившегося обычая нужно сказать и о том, как можно безвредно понимать этот термин.

Нужно отметить, что вводило в заблуждение то обстоятельство, что у Ньютона в „Principia“ есть следующее место: „Определение III. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Эта сила всегда пропорциональна массе и если отличается от инерции массы, то разве только воззрением на нее“. „От инерции массы происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения,

[1] [Обработано по черновикам рукописи М. А. Леонтовичем.]

[2] [А. Н. Крылов. О силах инерции и начале Даламберта (в книге А. Н. Крылова „Мысли и материалы о преподавании механики“. Изд. АН СССР, М.—Л., 1943).]

поэтому врожденная сила могла бы быть весьма вразумительно названа силой инерции...“[1]

Все это мало что говорит. Насколько я помню, Максвелл подверг это место критике. Во всяком случае выводить отсюда что-нибудь о „реальности“ или „фиктивности“ сил инерции нельзя. Повидимому, однако, начало всего спора — это место у Ньютона.

Не выдерживает, конечно, критики такая „аргументация“ о реальности сил инерции: маховик разрывается, значит, силы инерции реальны. С тем же правом можно сказать: накачивая воздух, мы можем разорвать котел. Нагревая воздух — тоже. Значит, при нагревании мы прибавляем что-то в котел, т. е. теплота — вещество.

Рис. 1

Начну с движения планеты вокруг солнца. На планету, движущуюся приблизительно по кругу, действует сила *притяжения* солнца. Согласно третьему закону Ньютона, на солнце действует такая же по величине сила притяжения планеты, направленная в обратную сторону. Никаких других сил здесь не действует. *Можно* назвать первую силу в данном случае центростремительной, а вторую — центробежной. Но это только *другое название* для ньютоновских сил притяжения, а не какие-то особые силы, и, поскольку мы считаем, что название не влияет на сущность дела, вопрос о „реальности“ центробежной силы беспредметен.

Обратимся к шарику, движущемуся по кругу и удерживаемому ниткой. Шарик будет считаться точкой с массой m. Тогда, по Ньютону, действует сила (конечно, реальная, вызванная растяжением нити), направленная к центру. Она равна массе, умноженной на ускорение: mj. Далее аргументируют так: по третьему закону Ньютона, действие равно противодействию; значит, на конец нити действует сила, направленная *от центра*. Эту силу называют силой инерции. Это — *сплошное недоразумение*. Целесообразно рассуждать одним из двух способов: либо 1) рассматривать нить как состоящую из дискретных материальных точек, либо 2) рассматривать нить как сплошное тело.

Разберем сначала первый из этих способов и для простоты в качестве модели нити возьмем одномерную цепочку точек (рис. 1). O — неподвижный центр, m — материальная точка, остальные точки

[1] [Перевод А. Н. Крылова; подчеркнуто Л. И. Мандельштамом.]

1, 2,... —это дискретные материальные точки, из которых состоит нить. Поскольку в основу модели мы кладем точечную механику и выбираем соответствующую модель, постольку мы должны принять, что силы, действующие между соседними точками, действуют „на расстоянии", в том же смысле как солнце действует на планеты. Тогда случай шарика на нити отличается от случая движения планеты вокруг солнца только тем, что здесь много точек, и законом, по которому сила зависит от расстояния. Точно так же как при движении планеты вокруг солнца нецелесообразно и не принято говорить, что на солнце действует со стороны земли центробежная сила, и здесь нет никакого основания говорить, что на предпоследнюю точку (рис. 1) действует центробежная сила. Во всяком случае, принципиально (за исключением разной зависимости силы от расстояния) между этими двумя случаями нет никакой разницы.

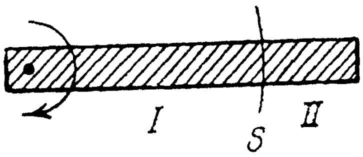


Рис. 2

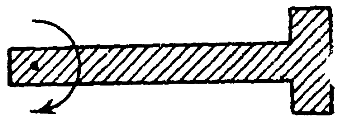


Рис. 3

При втором способе рассмотрения мы представляем себе связи как сплошные тела. Здесь целесообразно не различать между материальной точкой и нитью, а положить в основу сплошной стержень, как на рис. 2. Случай нити с шариком — только частный случай типа, скажем, изображенного на рис. 3. При этом способе рассмотрения нужно внести понятие о напряжениях в теле и поступать соответственно третьему закону Ньютона о равенстве и противоположности напряжений, действующих в сечении S на часть I и часть II нашего тела. Силы, соответствующие этим напряжениям, вызваны деформациями нашего тела. — Это реальные силы, ничем не отличающиеся от статических сил при тех же деформациях. Только при движении эти деформации вызваны именно тем обстоятельством, что для того, чтобы заставить стержень двигаться по кругу, нужны силы, которые обусловливаются деформациями.

Происхождение деформаций при переходе от покоя к движению совершенно очевидно (как и в дискретном случае). Отдельные точки *1, 2,... m* двигались бы, скажем, под действием толчка по прямым (касательным). При этом движении возникают именно те деформации которые вызывают нужные силы.

Можно и здесь для силы, действующей со стороны части I тела на часть II, ввести название центростремительной, а для силы, действующей на часть II, — центробежной силы. Я полагаю, что из сказанного ясно, что центробежные и центростремительные силы — лишь другое название для обычных сил (упругих междумолекулярных сил или сил притяжения). Ясно также, насколько беспредметен разговор об их реальности или нереальности. Те же самые силы, которые мы считаем силами всегда, а именно, как сказано, упругие междумолекулярные силы и силы притяжения, иногда начинают называть центробежными.

Можно поставить вопрос, рационально ли такое наименование вообще, или имеются ли случаи, когда оно рационально. Как никак, термин „центробежная сила", особенно в технике, укоренился. Есть ли для этого основание? Я думаю, что да, и вот почему и когда.

В тех случаях, когда, как в случае планеты, требуется найти движение по заданным силам, название „центробежная или „центростремительная" сила в лучшем случае излишне. Но бывают другие случаи, когда в движении участвуют тела, чрезвычайно мало деформируемые, другими словами, тела, в которых силы или напряжения настолько быстро растут с изменением межмолекулярных расстояний или деформаций, что мы знаем заранее с достаточно большой точностью известные характеристики движения. Например, хотя (с физической точки зрения) нет нерастяжимых нитей и абсолютно жестких тел, но есть нити и твердые тела, которые дают настолько большие силы при таких малых растяжениях, что мы длину этих нитей можем считать постоянной. Значит, например, мы заранее знаем, что привязанный на такой нити шарик будет двигаться по кругу. На этом основана громадная ценность введения жестких связей в аналитической механике. Пусть в случае движения шарика на такой нити нам еще дана тангенциальная скорость. Это задание и практическая нерастяжимость нити определяют движение. При этом мы не знаем и не имеем необходимости знать деформацию и поэтому мы лишены возможности из деформаций определить важные для нас натяжения в нити.

В этом случае мы определяем эти силы натяжения при помощи второго закона Ньютона из ускорений, которые мы знаем, так как знаем движение. Вот в этих случаях может быть в известной мере оправдано название по существу обычных упругих сил силами центробежными или центростремительными. Здесь эти названия выражают способ их расчета по центробежным или центростремительным ускорениям. Но больше этого вкладывать в эти названия нельзя.

Правда, есть еще одно оправдание для введения термина „сила инерции", даже в таком случае, как движение планеты. Но это нечто другое. Дело в том, что когда хотят свести задачу динамики на задачу статики, то так как в статике условия равновесия формулируются для с и л, то и в динамике стараются назвать некоторые выражения силами, чтобы применить дословно условия статики. Именно, если я назову $-mj$ силой инерции, д е й с т в у ю щ е й н а с а м у ю м а с с у, а не, как обычно говорят, на связь, то уравнения движения получаются из следующего принципа. Назовем еще $\Pi = F - mj$, т. е. сумму действующей силы и силы инерции, потерянной силой. Тогда для нахождения уравнений движения нужно выразить, что система точек под действием потерянных сил, приложенных к ним, при заданных связях находится в равновесии. Здесь термин „сила инерции" — это просто название величины $-mj$. Это д р у г о е, чем то, что мы называли силой инерции ($\equiv$ центробежной, центростремительной силой) раньше, на стр. 324. Здесь это не сила в смысле второго закона Ньютона, а название для выражения $-mj$. Спор о реальности и здесь лишен смысла.

70

[ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ][1]

Принцип взаимности, обоснованию и описанию применения которого посвящена первая глава настоящей части, относится к точечным источникам света и их полям. Таким образом, он существенно отличается от оптического принципа Гельмгольца, устанавливающего обратимость светового луча. Принцип взаимности (Reziprocitätsatz) указанного типа, т. е. включающий в рассмотрение источник излучения, в акустике давно известен. Но, конечно, по причинам, вполне очевидным, ни метод обоснования, применяемого в этом случае, ни результаты не могут быть непосредственно перенесены в область электромагнитных явлений. По отношению к оптическим явлениям принцип взаимности, включающий источники колебаний, был высказан Лоренцом.

---

[1] [Настоящая статья представляет собой извлечение из найденных в архиве Л. И. Мандельштама объемистых рукописей, содержание которых частично воспроизводит опубликованные оптические работы Страсбургского периода (вошедшие в том I), частично же значительно дополняет и расширяет эти работы. Указанные рукописи написаны, повидимому, во время пребывания Л. И. Мандельштама в Одессе, в период с 1914 по 1917 г., и являются частями или главами одной большой подытоживающей работы. Можно предполагать, что Л. И. Мандельштам готовил эту работу в качестве диссертации для получения русской ученой степени. Данная статья, относительно которой в тексте сказано, что это „первая глава настоящей части", занимает в рукописи 26 страниц. Здесь публикуются первые 14 страниц, содержание которых лишь отчасти перекрывается с работой, выполненной много позже под руководством Л. И. Мандельштама М. П. Свешниковой (ЖРФХО **59**, вып. 5—6, 453, 1927). Содержание остальной части рукописи почти совпадает со статьей 20, том I.]

Формулировка принципа взаимности, приведенная ниже, отличается от лоренцовской. Для исследования тех вопросов, которые я имею в виду и которые будут изложены ниже, эта формулировка, как мне кажется, является более целесообразной.

Соответственно с измененной формулировкой должен быть также несколько изменен и способ обоснования. В первой главе я привожу формулировку и доказательство упомянутого принципа взаимности.

Вторая глава содержит изложение опытного и теоретического исследований некоторых оптических явлений, связанных с излучением источника света, расположенного *в непосредственной близости* от плоскости раздела двух прозрачных сред. Эти явления, которым до последнего времени почти совсем не уделялось внимания, представляют, как мне кажется, довольно значительный интерес.

Во-первых, так сказать, сами по себе как некоторый новый класс определенных явлений (фактов), характеризующихся (между прочим) и тем, что они не укладываются, как будет видно из последующего, в рамки обыкновенных законов преломления и отражения.

Я замечу, что это последнее обстоятельство заслуживает внимания также по следующей причине. В литературе встречается описание опытов, при которых фактически имел место рассматриваемый случай, т. е. источник света находился на малом расстоянии от поверхности раздела двух сред. Но при толковании результатов этих опытов эта близость не учитывалась, а применялись обыкновенные формулы отражения и преломления, что, как указано выше, недопустимо. Поэтому выведенные авторами заключения должны быть пересмотрены.

Я не буду останавливаться на этих вопросах в настоящей статье, а только назову некоторые из относящихся сюда работ. Я имею в виду, например, работы по вопросу о возбуждении флуоресценции каналовыми лучами. Специально — вопрос о локализации источника, испускающего натриевую линию. Затем работы Вуда по вопросу о возбуждении флуоресценции стекла ультрафиолетовыми лучами и др.

Второе обстоятельство, обусловливающее, по моему мнению, интерес рассматриваемых оптических явлений, заключается в той тесной связи, которая существует между ними и некоторыми явлениями в области собственно электромагнитных волн, т. е. волн порядка десятков, сотен и тысяч метров. Я здесь имею, главным образом, в виду вопросы, относящиеся к распространению электромагнитных волн вдоль поверхности земли. Эти вопросы приобрели в последнее время, в связи с развитием беспроволочной телеграфии, очень большое практическое значение. Они послужили также предметом весьма важных, чисто теоретических исследований. Сюда относятся работы Зоммерфельда, Пуанкаре, Релея, Никольсона, Лёве и др. Эта проблема даже в той упрощенной схеме, в какой она формулировалась названными исследователями, оказалась, как известно, с математической стороны далеко не простой. Естественно возникает вопрос, отчего здесь, т. е. в задаче о распространении электромагнитных волн в беспроволочной телеграфии, явилась необходимость нового теоретического исследования и отчего нельзя было применить непосредственно оптические формулы, регулирующие преломление и отражение света при переходе из одной среды в другую, тем более что, например, мы оставляем в стороне вопрос, связанный с кривизной земной поверхности. Ведь Зоммерфельд считает поверхность земли плоскостью, делящей пространство на два однородных полупространства с данными показателями преломления и коэффициентами абсорбции, т. е. исходит из обычной схемы, положенной в основание оптических формул.

Ответ заключается в том, что в беспроволочной телеграфии источник излучения находится очень близко от поверхности раздела. Обыкновенные же оптические формулы выведены в предположении — хотя это почти никогда не оговаривается, — что источник находится от нее на большом расстоянии (речь идет всегда об отношении расстояния к длине волны).

В оптике случай, когда источник находится очень близко от поверхности благодаря малой длине волны, является действительно исключительным. Наоборот, в вопросах беспроволочной телеграфии этот случай осуществлен почти всегда.

И вот, мне кажется, что сопоставление однородных явлений в двух так далеко отстоящих друг от друга областях представляет несомненный интерес.

Теоретическая обработка описанных ниже явлений становится весьма простой, если пользоваться упомянутым выше принципом взаимности. Поэтому я счел целесообразным в первой главе предпослать формулировку и доказательство этого принципа в общей форме. Вывод соответственных формул, а также сопоставление их с результатами Зоммерфельда приведены после описания опытов.

Прежде чем приступить к точной формулировке и к доказательству принципа взаимности, я хочу вывести одно весьма общее положение, относящееся к монохроматическому световому полю. Я буду исходить из уравнений Максвелла (написанных в единицах Хивисайда):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \sigma\mathbf{E} &= \quad c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрический и магнитный векторы, ε и σ — диэлектрическая постоянная и проводимость, а магнитная постоянная положена равной 1.

Так как мы будем рассматривать монохроматическое поле, то $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ пропорциональны $e^{-i\nu t}$, где ν — число колебаний в 2π секунд. Тогда $\frac{\partial}{\partial t} = -i\nu$. Рассмотрим две пары значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющих уравнениям (1), и обозначим первую из них, чтобы не вводить лишних индексов, опять через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а вторую — через $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$.

Напишем уравнения (1) для первой пары, затем умножим первое уравнение скалярно на $\mathbf{E}'$, второе — на $\mathbf{H}'$ и вычтем второе из первого. Из полученного таким образом равенства вычтем аналогичное, в котором величины со штрихом заменены величинами без штриха и наоборот. Так как $\frac{\partial}{\partial t} = -i\nu$, то при этом в левой части мы получим нуль. Останется

$$c(\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}' - \mathbf{E}' \operatorname{rot} \mathbf{H}) + c(\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}' - \mathbf{H}' \operatorname{rot} \mathbf{E}) = 0. \tag{2}$$

Пользуясь известными формулами векторного анализа, мы можем переписать (2) так:

$$c(\operatorname{div}[\mathbf{E}', \mathbf{H}] - \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}']) = 0. \tag{2a}$$

Умножив (2a) на элемент объема, проинтегрируем (2a) по некоторому объему V и, наконец, превратив полученный объемный интеграл в интеграл, распространенный по поверхности S, ограничивающей пространство V, мы получим окончательно

$$\int\limits_S \{[\mathbf{E}', \mathbf{H}]_n - [\mathbf{E}, \mathbf{H}']_n\}\, dS = 0, \tag{3}$$

где $[\ ]_n$, как обыкновенно, обозначает компоненту векторного произведения в направлении внешней нормали к поверхности S.

Внутри V могут находиться поверхности, при переходе через которые $\mathbf{E}$ или $\mathbf{E}'$ не непрерывны. Ввиду непрерывности тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ и следующей отсюда непрерывности подинтегрального выражения эти поверхности, как легко видеть, не подлежат особому учету. Конечно, предполагается (только), что все величины остаются внутри S конечными. (3) справедливо для всякой пары решений уравнений (1).

Теперь мы выберем для $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ специальное решение. Пусть $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ — электрический и магнитный векторы поля, порождаемого точечным источником монохроматического света, помещенным в точке P и поляризованным в некотором направлении. Такой источник можно, например, представить реализованным в виде колеблющегося электрона. Другими словами, $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ подчинены следующим условиям:

1) Они удовлетворяют уравнениям (1).

2) Удовлетворяют обычным условиям непрерывности.

3) Функции

$$\mathbf{E}' - \frac{i\nu}{ck^2}\{\nabla f'(R)(\mathbf{R}, \mathbf{s}) - k^2 \mathbf{s} f(R)\},$$
$$\mathbf{H}' - f'(R)[\mathbf{R}, \mathbf{s}]$$

и их производные остаются непрерывными и в точке P.

При этом введены следующие обозначения:

$$k^2 = \frac{\varepsilon\nu^2 + i\sigma\nu}{c^2}, \qquad f(R) = \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{4}$$

R — расстояние от точки P до точки O с текущими координатами, $\mathbf{R}$ — вектор с направлением $\overrightarrow{PO}$ и модулем 1. Наконец, $\mathbf{s}$ — вектор, характеризующий по величине и направлению точечный источник. Его направление дает направление колебаний, а абсолютная величина — амплитуду тока.

К 3) мы заметим следующее. Можно, конечно, не ссылаться вовсе на физическое значение $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$, а также и $\mathbf{s}$ и прямо рассматривать их как некоторые функции положения точки (понимая под $\mathbf{s}$ некоторый постоянный произвольный вектор), подчиненные условиям 1), 2), 3). Для вывода первой теоремы этого было бы достаточно. Но естественнее и для дальнейшего удобнее сразу подразумевать под $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ поле точечного источника света. Дело в том, что, как известно, вычитаемые в 3) суть не что иное, как (написанные только в несколько ином виде, чем обыкновенно) выражения полей точечного источника, справедливые в случае *однородной* среды для всего бесконечного пространства. В общем же случае, который мы рассматриваем, когда среда обладает различными ε и σ в разных точках, эти выражения представляют собой поле точечного источника в непосредственной близости от него. Мы впрочем можем также смотреть на условия 1), 2) и 3) как на определение точечного источника света.

Применим теперь (3) к тому случаю, когда $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — какие-нибудь решения основных уравнений, остающиеся конечными в V, а $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$

определяются условиями 1), 2), 3). Мы предположим, что точка P находится внутри V. Чтобы иметь возможность применить (3), опишем из P как из центра шар радиуса R.

Итак, для данного случая мы имеем

$$\int_S \{[\mathbf{E}', \mathbf{H}]_n - [\mathbf{E}, \mathbf{H}']_n\} dS + \int \{[\mathbf{E}', \mathbf{H}]_n - [\mathbf{E}, \mathbf{H}']_n\} ds = 0, \quad (5)$$

где первый интеграл распространяется по замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V, а второй — по поверхности шара. Ближайшей задачей будет вычисление второго интеграла.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{i\nu}{ck^2} \{\nabla f'(R)(\mathbf{R}, \mathbf{s}) - k^2 \mathbf{s} f(R)\} + \alpha, \\ \mathbf{H}' &= f'(R)[\mathbf{R}, \mathbf{s}] + \beta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

В дальнейшем мы заставим радиус R безгранично убывать. На основании условия 3), α и β остаются при этом во всяком случае конечными. Поэтому те части интеграла, в которые α или β входят множителями подинтегрального выражения, могут быть сделаны при достаточно малом R меньше любой наперед заданной величины.

Последнее замечание относится также к члену, содержащему $k^2 \mathbf{s} f(R)$, так как в знаменателе его R входит в первой степени. Поэтому мы можем написать

$$\int \{[\mathbf{E}', \mathbf{H}]_n - [\mathbf{E}, \mathbf{H}']_n\} ds = \int \Big\{ \frac{i\nu}{ck^2} [\nabla f'(R)(\mathbf{R}, \mathbf{s}), \mathbf{H}]_n -$$
$$- [\mathbf{E}, f'(R)[\mathbf{R}, \mathbf{s}]]_n \Big\} ds + \gamma,$$

где γ бесконечно убывает с убыванием R.

Подинтегральное выражение в правой части равенства легко вычислить, пользуясь следующими замечаниями:

1) Пусть $\mathbf{A}$ какой-нибудь вектор, а φ — скаляр. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\nabla\varphi, \mathbf{A}].$$

2) Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ какие-нибудь три вектора, то

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

3) Чтобы получить нормальную компоненту какого-нибудь вектора, нужно умножить его скалярно на вектор $\mathbf{n}$, имеющий абсолютное значение единицу и направление нормали.

Кроме того, нужно иметь в виду уравнение (1) и то, что $\frac{\partial}{\partial t}=-i\nu$. Пользуясь этими замечаниями, мы получим для интеграла в правой части следующее выражение:

$$-\int f'(R)\left\{(\mathbf{R},\mathbf{s})(\mathbf{E},\mathbf{n})+(\mathbf{R},\mathbf{n})(\mathbf{E},\mathbf{s})-(\mathbf{n},\mathbf{s})(\mathbf{E},\mathbf{R})\right\}ds.$$

Так как интеграл берется по поверхности шара, то, очевидно, ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль) $\mathbf{n}=-\mathbf{R}$, и наш интеграл обращается в $+\int f'(R)(\mathbf{E},\ \mathbf{s})\,ds$. Итак,

$$\int\left\{[\mathbf{E}',\ \mathbf{H}]_n-[\mathbf{E},\ \mathbf{H}']_n\right\}ds=\int f'(R)(\mathbf{E},\ \mathbf{s})\,ds+\gamma. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5) и замечая, что $\mathbf{E}$ непрерывно в точке P, мы можем написать

$$\int\limits_S\left\{[\mathbf{E}',\ \mathbf{H}]_n-[\mathbf{E},\ \mathbf{H}']_n\right\}dS+(\mathbf{E}_P,\ \mathbf{s})\int f'(R)\,ds+\delta=0,$$

где δ бесконечно убывает с убыванием R. Наконец, так как $f(R)=e^{ikR}/R$, то мы можем написать так:

$$\int\limits_S\left\{[\mathbf{E}',\ \mathbf{H}]_n-[\mathbf{E},\ \mathbf{H}']_n\right\}dS+4\pi(\mathbf{E}_P,\ \mathbf{s})=\varepsilon,$$

где ε опять бесконечно убывает с безграничным убыванием R.

Левая часть равенства не зависит от R. Правая часть может быть сделана меньше всякой данной величины. Отсюда следует окончательно

$$4\pi(\mathbf{E}_P,\ \mathbf{s})=\int\limits_S\left\{[\mathbf{E},\ \mathbf{H}']_n-[\mathbf{E}',\ \mathbf{H}]_n\right\}dS. \tag{8}$$

$(\mathbf{E}_P,\ \mathbf{s})$ — не что иное, как компонента $\mathbf{E}_P$ в направлении $\mathbf{s}$. Интеграл распространяется по какой-нибудь замкнутой поверхности, охватывающей точку P. (8) и выражает теорему, которую мы хотели доказать.

Итак, (8) дает возможность, зная значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на замкнутой поверхности, найти любую компоненту $\mathbf{E}$ в любой точке P. Для этого, конечно, необходимо сначала найти из условий 1), 2), 3) две вспомогательные функции $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$. Только что доказанная теорема может быть рассматриваема как обобщение на случай неоднородной среды теоремы Кирхгофа, позволяющей, как известно, в случае однородной среды выразить значение поля в какой-нибудь точке при помощи значений на замкнутой поверхности.

Для случая однородной среды $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ известны — они даны, как уже выше указано, правыми частями выражений (6). Для этого случая (8) представляет собой, конечно, не что иное, как другую форму кирхгофовской теоремы, в чем легко убедиться при помощи сравнительно простых преобразований. Впрочем и для случая однородной среды (8) может иногда оказаться удобнее обыкновенной кирхгофовской формы. Из выражения (8) можно, например, усмотреть без вычислений все те особенности, которые отличают обработку Кирхгофа диффракционных явлений от обработки, исходящей из простейшей формы принципа Гюйгенса.

Я не буду останавливаться на дальнейшей дискуссии зависимости (8) в общем виде, а перейду теперь к доказательству [к выводу из (8)] принципа взаимности.

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в (8) в свою очередь являются полями точечного источника, находящегося в точке P_1, отличной от P. В качестве поверхности, по которой берется интеграл в (8), мы возьмем поверхность шара вокруг P_1 и замкнутую поверхность, распространяющуюся в бесконечность. Можно всегда принять, что интеграл по этой последней равен нулю. Для этого достаточно, например, предполагать существование любой сколь угодно малой абсорбции.

Что же касается интеграла по поверхности шара с центром в P_1, то он равен, как в этом легко убедиться при помощи рассуждений, тождественных с приведенными выше: $4\pi(\mathbf{E}, \mathbf{s}_1)$. Здесь $\mathbf{s}_1$ — вектор, имеющий для источника в P_1 тот же смысл, что $\mathbf{s}$ для источника в P, т. е. его направление совпадает с направлением колебаний, а его абсолютная величина равна амплитуде тока источника, находящегося в P_1.

Итак, (8) дает для рассматриваемого случая

$$(\mathbf{E}_{P_1}, \mathbf{s}) = (\mathbf{E}_P, \mathbf{s}_1). \tag{9}$$

Если $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$, то $\mathbf{E}_{P_1} = \mathbf{E}_P$.

Зависимость (9) и служит выражением принципа взаимности, который может быть более подробно формулирован так.

Пусть нам даны два случая:

1) Точечный источник монохроматического света с интенсивностью $=1$ и с колебаниями, направленными по какой-нибудь прямой h, находится в точке P. Пусть компонента в некотором направлении h' электрического вектора порождаемого им поля в точке P_1 будет $E_{h'}$.

2) Другой такой же источник света с колебаниями, направленными по h', находится в P_1. Пусть компонента его поля, имеющая направление h, в точке P будет E_h'.

Принцип взаимности состоит в утверждении, что

$$E_{h'} = E_h'.$$

Мы применим формулированный только что принцип взаимности к теоретическому разбору вопроса об излучении точечного источника, находящегося в непосредственной близости к поверхности раздела двух прозрачных сред. Изложению опытной стороны этого вопроса посвящена следующая глава.

71

[ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ][1]

Прежде чем перейти к описанию тех опытов, которые были предприняты мною для иллюстрации изложенных выше теоретических выводов, я хотел бы остановиться на некоторых соображениях, высказанных в связи с полученными мною результатами Лауе. Лауе подтверждает эти результаты, но подходит к доказательству положения эквивалентности с другой точки зрения. Я приведу главные черты его доказательства и не буду останавливаться на деталях.

Лауе рассуждает так.

Поместим наш объект, например решетку или любой другой объект, внутрь „черного тела", образованного полым сосудом, нагретым до некоторой постоянной температуры. Через отверстие, сделанное в стенках сосуда, станем наблюдать данным оптическим инструментом с данной диафрагмой, например микроскопом, находящийся внутри объект. Мы предположим, что сам инструмент заметно не нарушает режима черного тела. Лауе указывает способ, как это можно осуществить. Более или менее ясно, что,

[1] [Под этим названием публикуются извлечения из рукописи Л. И. Мандельштама (см. примечание к статье 70 на стр. 328), занимающей 65 страниц. Первые 30 страниц рукописи совпадают по содержанию со статьей 15 (том I, стр. 211—221) за исключением страниц 22—25, которые посвящены обсуждению работы Лауе по микроскопическому изображению. Этот отрывок здесь и воспроизводится. Страницы 32—44 рукописи совпадают по содержанию со статьей 17 (т. I). Остальная часть рукописи (глава III) публикуется целиком, хотя до известной степени она совпадает с некоторыми работами, выполненными позднее под руководством Л. И. Мандельштама, в частности с работой Н. А. Смирнова, ЖРФХО 59, вып. 3—4, 358, 1927].

наблюдая нашим инструментом внутренность черного тела, мы, совершенно независимо от того, находится ли внутри какой-нибудь объект или нет, увидим равномерное освещение. Другими словами, „изображение“ в данном случае будет лишено всякой структуры. Но это изображение может быть, очевидно, рассматриваемо как результат наложения, как сумма двух изображений: одного, соответствующего самосветящемуся объекту (при данной общей температуре его и полого тела), и другого, полученного в предположении, что сам объект не светится, но что он освещен со всех сторон черным излучением, исходящим из стенок сосуда. Оба эти изображения не когерентны. Суммируются, значит, их интенсивности. Эта сумма, как мы видели, дает равномерное освещение. Отсюда следует, что оба изображения — одно, соответствующее самосветящемуся объекту, и другое, соответствующее объекту, освещенному *со всех сторон черным излучением*, — *дополнительны* друг по отношению к другу. Этот результат, очевидно, и есть не что иное, как „положение эквивалентности“ для данного случая.

Доказательство крайне просто. Но в этом виде положение эквивалентности вряд ли имеет большое реальное значение, а именно потому, что требуемое здесь освещение никогда в действительности не осуществляется.

Чтобы придать ему пригодную форму, нужно сузить те безусловно достаточные, но практически не необходимые условия, которые осуществляются в описанной только что схеме, и привести в связь необходимое для эквивалентности освещение со структурой объекта. Для этого Лауе поступает так. Он сперва предполагает, что обращенная к инструменту поверхность объекта не обладает заметной отражательной способностью. Тогда очевидно, что освещение, исходящее из верхнего полупространства черного тела, не играет роли и может быть отброшено. При таких объектах для эквивалентности достаточно поэтому освещения из нижнего полупространства. Чтобы показать сущность дальнейших рассуждений Лауе, возьмем случай, когда диафрагма состоит из одного, например симметричного по отношению к оси инструмента, отверстия. Пусть это отверстие не слишком велико по своим линейным размерам.

Для простоты и без изменения сущности тела предположим далее, что стенка „черного тела“ настолько удалена от объекта, что исходящие из одной ее точки лучи могут считаться параллельными. Тогда те освещающие лучи, которые образуют достаточно большой угол с осью инструмента, в отсутствие объекта в инструмент, очевидно, не попадут. Далее, если структура объекта достаточно груба, то отклоненные благодаря диффракции в нем лучи будут иметь заметную интенсивность только в направлениях, лежащих недалеко (по углу) от направления прошедших непосредственно (без диффракции) лучей. Отсюда следует, что достаточно косые освещенные пучки вообще не вносят заметной интенсивности в изображение, даваемое инструментом. Значит, для эквивалентности нет надобности освещать предмет из всего нижнего полупространства, а достаточно, чтобы освещающие пучки лежали в некотором телесном угле, величина которого зависит от структуры. На основании только что приведенных соображений Лауе в конце своей работы и приходит, как он это впрочем сам подчеркивает, к полученному мною результату.

Я хотел бы еще заметить следующее. Приведенное рассуждение Лауе — чисто качественное и не строгое. Если его формулировать более определенно, то оно вряд ли окажется более простым, чем то изложение, которое было дано выше.

Наконец, нужно иметь в виду, что это рассуждение неприменимо к случаю объекта, имеющего структуру, состоящую из отдельных точечных или линейчатых элементов, т. е. к тому случаю, который был рассмотрен выше. Между тем такая схематизация действительной структуры может иногда оказаться более адэкватной, чем схематизация при помощи непрерывной функции.

ГЛАВА III

В предыдущих главах мы рассмотрели некоторые общие положения, относящиеся к влиянию диафрагмы на изображение, даваемое оптической системой. В настоящей главе мы займемся разбором двух оптических методов, также непосредственно относящихся к общему вопросу о влиянии диафрагмы и к анализу которых особенно целесообразно может быть применен метод Аббе.

Я имею в виду „метод затемненного поля“ и „метод полос“ Тёплера. Метод полос и метод затемненного поля — последний во всяком случае в одном из употребляемых видов — принципиально тождественны между собой. Схематически они всецело укладываются в схему рис 1. Объект помещается как обычно. Освещается он *параллельным*, обыкновенно центральным пучком (здесь это существенно). Наблюдается получаемое „изображение". Сущность обоих методов состоит в применении особого вида диафрагмы. Эта диафрагма состоит из двух частей. Одна часть помещается в центре, т. е. в фокусе освещающего пучка, и таким образом отрезает освещающие лучи. Вторая часть — это неизбежное внешнее ограничение поля.

Как известно, оба метода употребляются главным образом там, где дело идет об очень слабо выраженных структурах.

О методе затемненного поля говорят почти всегда в случае микроскопических структур, о методе полос — в случае макроскопических структур. Но есть еще одно различие, опять, так ска-

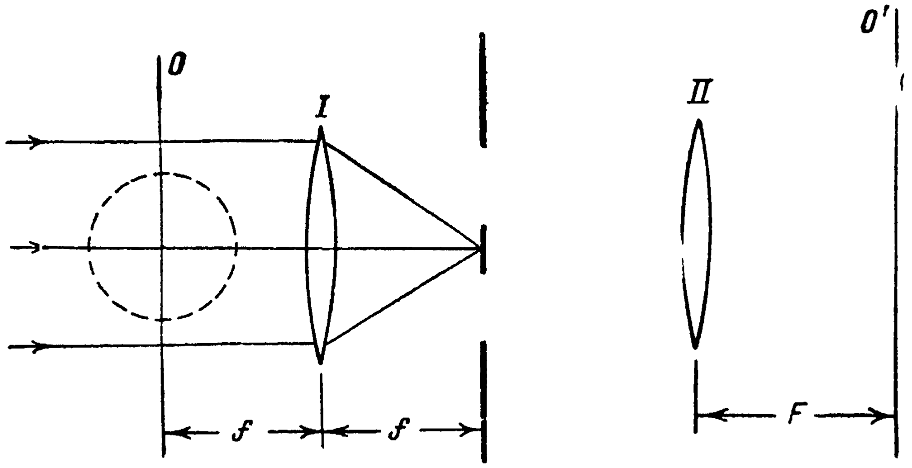


Рис. 1

зать, чисто случайное. Методом полос исследуются почти исключительно объекты, имеющие „рефракционные" структуры, т. е. структуры, обусловливаемые местными изменениями преломляемости, причем объекты, имеющие протяжение во всех трех измерениях. Структуры же объектов, при микроскопическом исследовании которых пользуются методом затемненного поля, приближаются большей частью к „абсорбционным" структурам.

Вопрос о том, что́ мы собственно при этих методах видим и в какой связи стоит „изображение" с объектом, до сих пор почти не затрагивался. Это особенно относится к собственно методу полос, т. е. к рефракционным структурам. Тут ограничивались приблизительно следующими пояснениями. Пока часть пространства до первой линзы (рис. 1) представляет собой однородную среду, поле зрения благодаря центральной части диафрагмы затемнено. Если же в каком-нибудь месте однородность среды нарушена, то тут происходит призматическое отклонение части пучка, и отклоненная часть, минуя диафрагму, попадает в поле зрения оптической системы. Но мне кажется, что эта точка зрения мало содержательна, поскольку она даже не приводит к количественной формулировке самой задачи — найти „изображение", получаемое от данной структуры.

Возможный путь, ведущий к такой формулировке и, как мне кажется, целесообразный путь, заключается здесь, а также и при „абсорбционных" структурах в применении метода Аббе. Другими словами, нужно исходить из „первичного" изображения, являющегося следствием диффракции от объекта, учесть влияние указанной выше диафрагмы на это изображение и перейти затем к вторичному изображению. Мы рассмотрим сначала некоторые простые положения, возникающие из этой точки зрения для абсорбционных структур, а затем остановимся на некоторых вопросах, относящихся к структурам рефракционным.

Абсорбционные структуры

Первое общее положение, относящееся к методу затемненного поля и справедливое для любых структур, имеющих протяжение в двух измерениях, т. е. справедливое для самого общего случая, заключается в следующем.

Изображения, получаемые при наблюдении по методу затемненного поля от двух дополнительных друг по отношению к другу структур, тождественны между собой.

Под дополнительными структурами мы понимаем такие две структуры, из которых одна выражается через $f(x, y)$, а другая через $\mathrm{const} - f(x, y)$. Если, например, объект представляет собой экран с любыми отверстиями, то в объекте, обладающем дополнительной структурой, непрозрачные места заменены отверстиями и наоборот. Высказанное положение можно обосновать крайне просто. Действительно, по известной теореме Бабинэ, диффракционные картины, соответствующие двум дополнительным структурам, тождественны между собой везде за исключением места фокуса освещающего пучка, т. е. при центральном освещении — за исключением центра.

Но „первичные изображения" представляют собой не что иное, как диффракционные картины. Значит, эта теорема непосредственно к ним относится. Сущность же метода затемненного поля заключается именно в том, что при помощи диафрагмы устраняется бо́льшая или меньшая окрестность центра первичного изображения. Остающиеся свободными части первичных изображений, соответствующих двум дополнительным структурам внешней диафрагмы, таким образом, тождественны. Но так как эти остающиеся части первичных изображений однозначно обусловливают вторичное (собственно) изображение, то отсюда следует, что эти последние также тождественны между собой.

Мы обратимся теперь к периодическим структурам одного измерения, т. е. к таким, какие были рассмотрены в предыдущей главе. Мы пришли там к следующему выводу. Структуры вида $\cos(b\xi + \varphi)$ дают либо подобное изображение, либо не дают никакого, в зависимости от линейных размеров диафрагмы по отношению к величине b, характеризующей более или менее тонкую структуру объекта.

Разложим теперь нашу периодическую структуру $f(x)$ — ее период пусть будет s — в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{s} x + \varphi_n\right). \qquad (9)$$

Из только что сказанного следует, что изображение $F(x)$ выразится так:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{k} C_n \cos\left(\frac{2\pi n}{s} x + \varphi_n\right), \qquad (10)$$

где k — некоторое *конечное* число. C_n, вообще говоря, отличны от B_n. Итак, влияние диафрагмы сводится к тому, что, во-первых, ряд Фурье, представляющий структуру объекта, в изображении появляется не полностью, а обрывается на k-том члене и, во-вторых, вообще говоря, изменяются коэффициенты остающихся членов. Число k, т. е. число пропускаемых диафрагмой членов разложения, легко определить на основании результатов второй главы: k — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию

$$k/s < r/\lambda f,$$

где [λ — длина волны света, f — главное фокусное расстояние линзы и] $2r$ — наибольшая протяженность диафрагмы в направлении x. При диафрагме в виде круга это его диаметр. При щелевой диафрагме с внутренней полосой (при методе затемненного поля) $2r$ — расстояние между ее внешними краями и т. д.

Прежде чем применить этот результат к методу затемненного поля, я хотел бы сделать одно общее замечание. Мы только что видели, что влияние диафрагмы заключается в том, что все члены ряда Фурье выше определенного индекса в изображении отсутствуют. В этом легко видеть точную формулировку существования разрешающей силы оптического инструмента.

Мы можем далее поставить вопрос о том, существует ли такая диафрагма, при которой изображение наиболее подобно объекту. В таком общем виде, без побочных условий, вопрос вряд ли имеет точный смысл. Потребуем в качестве подобного условия, чтобы сравниваемые между собой диафрагмы все имели одинаковую максимальную протяженность в направлении x.

Далее надо определить, какой критерий будет применен для оценки отклонения того или иного изображения от подобия с объектом. Этот критерий, конечно, отчасти произволен. Мне кажется целесообразным, поскольку речь идет о маленьких отклонениях от подобия, т. е. при условии, что $|f(x) - F(x)|$ для всех значений x мало (по сравнению с $f(x)$), считать из соображений, которые ясны и вряд ли требуют особого упоминания, мерой отклонения следующий интеграл:

$$J = \int_{-s/2}^{+s/2} [f(x) - F(x)]^2 \, dx. \tag{11}$$

Если принять это определение, то поставленный выше вопрос приобретает вполне точный смысл. Требуется найти такую диафрагму, при которой (11) будет минимумом, так как ввиду первого условия при всех диафрагмах число членов ряда в (10) одно и то же. Вопрос сводится, значит, к тому, при каких коэффициентах в (10) J будет минимумом.

Мы свели, таким образом, нашу задачу на уже известный вопрос: как наилучшим способом апроксимировать данную в некотором интервале функцию суммою из определенного числа круговых функций от аргументов, кратных интервалу, считая (11) за меру ошибки.

Ответ заключается в том, что коэффициенты при круговых функциях должны быть равны соответственным коэффициентам разложения в ряд Фурье.

Впрочем, ввиду крайней простоты доказательства этого положения, я приведу его здесь. Подставляя в (11) сумму (10) с неопределенными коэффициентами A_n и B_n, мы получим

$$J = \int_{-s/2}^{+s/2} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{k} B_n \cos \frac{2\pi nx}{s} - \sum_{n=1}^{k} A_n \sin \frac{2\pi nx}{s} \right]^2 dx. \tag{11a}$$

J будет минимумом при B_i и A_i, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial J}{\partial A_i} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial B_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

т. е.

$$\frac{\partial J}{\partial A_i} = 2 \int_{-s/2}^{+s/2} \left[f(x) - \sum_{n=0}^{k} B_n \cos \frac{2\pi nx}{s} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{k} A_n \sin \frac{2\pi nx}{s} \right] \sin \frac{2\pi ix}{s}\, dx = 0,$$

откуда

$$A_i = \frac{2}{s} \int_{-s/2}^{+s/2} f(x) \sin \frac{2\pi ix}{s}\, dx.$$

Точно так же найдем B_i. Итак, из всех возможных при заданном числе членов суммы колебаний ряд Фурье, ограниченный данным числом членов, наилучшим образом апроксимирует данную функцию.[1] Таким образом, наше положение доказано.

В применении к нашей оптической задаче мы можем заключить из этого следующее. Из всех диафрагм, имеющих одинаковое протяжение, но различные формы, наиболее подобное изображение получается при той диафрагме, при которой коэффициенты C_n в сумме (10), определяющие изображение, пропорциональны соответственным коэффициентам B_n в ряде (9), представляющем структуру объекта.

Но из главы II, особенно из замечания, сделанного в конце ее, следует, что это имеет место при щелевой диафрагме или при диа-

---

[1] Я хотел бы обратить внимание на то, что при разложении функции в ряд Тейлора аналогичное положение не имеет места. Полином, состоящий из конечного заданного числа степеней, апроксимирует данную функцию наилучшим образом не тогда, когда коэффициенты при степенях равны соответственным коэффициентам строки. Доказанное выше свойство ограниченного ряда Фурье объясняется, как легко видеть, ортогональностью круговых функций в рассматриваемом интервале.

фрагме, имеющей форму прямоугольника. Мы приходим, таким образом, к результату: *наиболее подобное изображение получается ceteris paribus (т. е. при равной протяженности) при диафрагме только что указанной формы.*

Конечно, этот специальный результат справедлив (доказан) только для положенных в основание рассуждения структур одного измерения.

Мы возвращаемся теперь к методу затемненного поля. Целесообразной диафрагмой для осуществления этого метода при рассматриваемых структурах является диафрагма, изображенная на рис. 2. Действительно, наша цель при этом методе заключается в том, чтобы отрезать освещающий пучок. Но этот пучок дает в фокальной плоскости первой линзы (см. рис. 1), т. е. в плоскости, в которой помещается диафрагма, линию P, обозначенную на рис. 2 пунктиром. При диафрагме, изображенной на рис. 2, эта линия и попадает, как это должно быть, на центральную непрозрачную полосу.

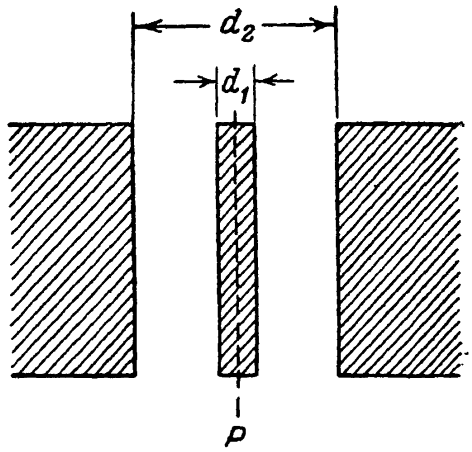


Рис. 2

Изображение $F(x)$, если структура $f(x)$ объекта опять дана в виде (9), выразится здесь, очевидно, так:

$$F(x)=\sum_{n=k_2}^{n=k_1} B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{s}x+\varphi_n\right),$$

причем k_1 и k_2 определены внутренними и внешними размерами диафрагмы:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \text{ — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству } \dfrac{k_1}{s}<\dfrac{d_1}{2\lambda f}, \\ k_2 \text{ — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству } \dfrac{k_2}{s}>\dfrac{d_2}{2\lambda f}, \end{array}\right\} \quad (12)$$

где λ и f — длина волны света и фокусное расстояние первой линзы. Значения d_1 и d_2 непосредственно ясны из рис. 2. Итак, при методе затемненного поля ряд Фурье, представляющий структуру объекта, ограничен в изображении не только справа, но и слева. Это часто влечет за собой весьма значительное искажение и тогда, когда ограничение справа не является существенным.

Для объектов, обладающих симметричной по отношению к центру структурой, можно указать одно существенное свойство изображений, получаемых при методе затемненного поля.

Для таких структур мы имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{2\pi n}{s} x. \tag{13}$$

Изображение $F(x)$ будет соответственно

$$F(x) = \sum_{n=k_1}^{n=k_2}{}' B_n \cos \frac{2\pi n}{s} x. \tag{14}$$

К выражению (14) мы применим теорему Штурма, относящуюся к осциллирующим функциям. Нам придется сделать, как показано ниже, некоторое дополнение к этой теореме, сообразно с измененными условиями.

Для формулировки теоремы Штурма в общем виде мы исходим из дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \mu^2 \rho z = 0, \tag{15}$$

где мы предполагаем, что ρ — положительная функция от x в интервале (a, b). Это влечет за собой существование осциллирующих интегралов уравнения (15). Можно показать, что существует ряд беспредельно возрастающих чисел

$$\mu_0, \ \mu_1, \ \mu_2, \ldots,$$

обладающих тем свойством, что при μ, равном $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$, уравнение (15) допускает соответственные решения

$$z_0, \ z_1, \ z_2, \ldots,$$

обращающиеся в нуль на концах интервала. Назовем $z_0, z_1, z_2, \ldots$ гармоническими функциями интервала (a, b). Эти гармонические функции, начиная с z_1, имеют нулевые точки также и внутри интервала, причем число этих точек равно соответственному индексу, т. е. z_1 имеет одну внутреннюю нулевую точку, z_2 — две и т. д.

Теорема Штурма относится к линейной комбинации из гармонических функций определенного интервала, т. е. к выражению

$$\psi(x) = a_k z_k + a_{k+1} z_{k+1} + \ldots + a_n z_n,$$

и состоит в следующем: $\psi(x)$ имеет внутри интервала (a, b) не менее чем k и не более чем n нулевых точек.

Теорема Штурма неприменима непосредственно к выражению (14), так как косинусы, удовлетворяющие прочим условиям теоремы, не обращаются в нуль на концах промежутка $(-s/2, +s/2)$. Но все же мы можем очень легко найти пределы для числа нулевых точек выражения (14).

Обозначим

$$\int_0^x F(x)\,dx = \Phi(x). \tag{16}$$

Тогда очевидно, что как $\Phi(x)$, так и $F'(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Штурма. Поэтому, если s_1 — число внутренних нулевых точек у $\Phi(x)$, а s_2 — число таких точек у $F'(x)$, то

$$2k_2 - 1 \geqslant s_1 \geqslant 2k_1 - 1,$$
$$2k_2 - 1 \geqslant s_2 \geqslant 2k_1 - 1.$$

С другой стороны, если мы обозначим через ν число нулевых точек $F(x)$, то очевидно, что

$$\nu \geqslant s_1 + 1, \qquad s_2 \geqslant \nu - 1,$$

откуда

$$2k_2 \geqslant \nu \geqslant 2k_1.$$

Итак, изображение периодической структуры, получаемое при методе затемненного поля, имеет внутри каждого периода в общем случае не менее $2k_1$ и не более $2k_2$ темных точек, причем k_1 и k_2 связаны с постоянными инструмента зависимостью (12). Специфичным для метода затемненного поля является существование *нижнего* предела числа темных мест. Этот предел ceteris paribus тем выше, чем шире внутренняя полоса диафрагмы.

Рефракционные структуры

Общий способ нахождения изображения рефракционных структур при методе затемненного поля может быть опять разделен на два этапа. Прежде всего нужно найти „первичное изображение“ структуры в плоскости диафрагмы, а затем построить вторичное изображение, соответствующее остающейся незатемненной части этого первичного изображения. Первый этап сводится к нахождению диффракционной картины данной рефракционной структуры. Эта задача в общем случае — мы предполагаем, что объект имеет все три измерения, — конечно, весьма сложна. Она значительно упрощается, если предположить, что местные изменения преломляемости, которые здесь и составляют структуру, очень малы. Впрочем, метод затемненного поля применяется именно в этих случаях.

Пусть $K(x, y, z)$ — диэлектрическая постоянная в какой-нибудь точке объекта, $K_0 = \mathrm{const}$ — диэлектрическая постоянная среды. Мы предполагаем, что $K - K_0 = \Delta K$ настолько малая величина и размеры объекта таковы, что можно ограничиться членами, содержащими ΔK в первой степени. В этом случае вычисление диффракции от объекта не представляется трудным.

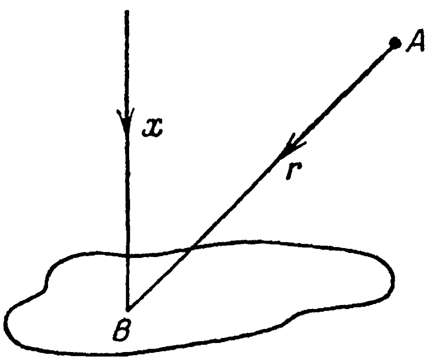


Рис. 3

Пусть плоская поляризованная волна с амплитудой 1 распространяется в направлении $-x$; пусть ее электрический вектор $\mathbf{e}_0$ направлен по оси z, т. е.

$$e_{0x} = e_{0y} = 0, \qquad e_{0z} = e^{int + ikx},$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны.

Обозначим далее через $\mathbf{E}$ электрический вектор диффракционного поля в точке (x, y, z), т. е. того добавочного поля, которое вызывается присутствием объекта по пути плоской волны $\mathbf{e}_0$. Тогда легко показать, что на больших расстояниях от объекта

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3}[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{P}]]\frac{k^2}{4\pi K_0}, \tag{17}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 3), r — его модуль, а $\mathbf{P}$ — вектор с компонентами

$$P_x = P_y = 0, \qquad P_z = -e^{int}\int \Delta K e^{ik(x-r)}\, d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объема. Интеграл распространяется по всему объекту.

Таким образом, нахождение первичного изображения сводится по существу к нахождению интеграла от (17). Но $\mathbf{E}$ еще не дает полностью первичного изображения. К нему нужно присоединить то диффракционное поле, которое получилось бы в отсутствие объекта благодаря некоторому неизбежному ограничению освещающего пучка. Если это поле обозначить через $\mathbf{E}_0$, то все первичное изображение выразится векторной суммой

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_0.$$

Чтобы найти „вторичное“ изображение, т. е. то распределение света, которое наблюдается, нужно произвести еще одно интегрирование в плоскости диафрагмы.

Мы применим этот путь, указанный в общем виде, к вычислению изображения однородного шара, помещенного таким образом, чтобы его центр находился в фокусе первой линзы оптической системы (см. рис. 1). Для вычисления **E** мы можем воспользоваться исследованием Релея, относящимся к влиянию шара на прохождение плоской волны. Наша задача будет заключаться в том, чтобы перейти от первичного изображения к вторичному. Так как речь идет о методе затемненного поля, то мы исходим из формы диафрагмы, изображенной на рис. 4. Радиус внутреннего кружка мы обозначим через s_1, радиус внешнего круга — через s_2.

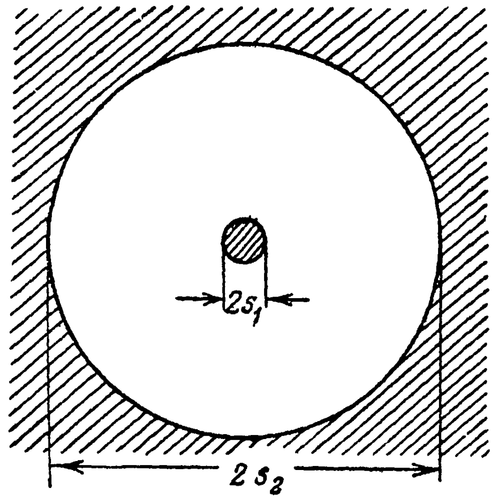


Рис. 4

Как только что сказано, **E** для шара известно. В этом случае

$$P_z = -\frac{2\pi R^2 e^{-ikr_0}}{k \sin\frac{\chi}{2}} e^{int} \int\limits_0^{\pi/2} J_1\left(2kR\sin\frac{\chi}{2}\cos\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi. \tag{18}$$

J_1 — функция Бесселя первого порядка, R — радиус шара, r_0 — расстояние точки наблюдения от центра шара, χ — угол, образуемый направлением r_0 с направлением освещающего пучка лучей, т. е. с направлением $-x$.

Зависимости (17) и (18) справедливы для любых χ. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда радиус шара велик по сравнению с длиной волны. Тогда интеграл (18) имеет заметное значение только для малых χ. Далее, мы ищем поле в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием f. Учитывая эти два замечания, мы найдем из (17) и (18) для амплитуды A в этой плоскости следующее выражение:

$$A = \frac{\Delta K}{\rho} \quad k \int\limits_0^{\pi/2} J_1\left(k\frac{R\rho}{f}\cos\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi. \tag{19}$$

Здесь $\rho = f\chi$ — расстояние точки на этой плоскости от оси.

Кроме того, как легко заключить из соображений симметрии, фаза поля **E** в плоскости диафрагмы одна и та же во всех точках.[1]

Нам нужно еще найти амплитуду поля $\mathbf{E}_0$. Мы предположим, что освещающий пучок ограничен круглой диафрагмой с радиусом R_1. Тогда эта амплитуда A_0 выразится, как известно, следующим образом:

$$A_0 = \frac{R_1}{\rho} J_1\left(k\frac{R_1\rho}{f}\right). \tag{20}$$

Можно далее показать, что фаза поля $\mathbf{E}_0$ сдвинута на 90° по отношению к фазе поля **E**.

Чтобы перейти ко вторичному изображению, мы исходим из следующего соображения.

Известно, что кольцевая щель, заключенная между радиусами ρ и $\rho + d\rho$, освещенная равномерно и точки которой однофазны, дает в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием F амплитуду dC, выражающуюся так:

$$dC = \frac{2\pi A}{F\lambda} J_0\left(\frac{k\xi\rho}{F}\right)\rho\, d\rho, \tag{21}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, A — амплитуда светового вектора в плоскости кольца, ξ — расстояние от центра в фокальной плоскости линзы. Очевидно, для того чтобы найти интенсивность (которую мы обозначим через Z^2) в фокальной плоскости линзы II [т. е. в плоскости, в которой получается изображение шара (плоскости O' на рис. 1)] или, другими словами, чтобы найти искомое изображение, мы должны поступить так: подставить в (21) выражение A из (19) и проинтегрировать по ρ от s_1 до s_2. Затем мы должны сделать то же для A_0. Пусть результат первого интегрирования будет C и второго C_0; тогда окончательно[2]

$$Z^2 = C_0^2 + C^2. \tag{22}$$

Из (19) и (21), заметив, что $\frac{2\pi}{\lambda} = k$, получаем

$$C = \frac{k^2\,\Delta K R^2}{F}\int_{s_1}^{s_2} J_0\left(\frac{k\xi\rho}{F}\right)d\rho \int_0^{\pi/2} J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\cos\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi. \tag{23}$$

---

[1] [Так как распределение поля в фокальной плоскости линзы как в отношении амплитуды, так и в отношении фазы подобно распределению в бесконечности в отсутствие линзы.]

[2] [Как указано выше, поля с амплитудами C и C_0 сдвинуты по фазе на 90°.

Но ввиду предположенного соотношения между R и λ мы можем взять s_2 настолько большим, что дальнейшее увеличение верхней границы интегрирования уже не изменит заметно величины интеграла. Пользуясь этим замечанием и меняя порядок интегрирования, мы можем переписать (23) так:

$$C = C' - C'',$$

где

$$\left.\begin{aligned} C' &= \frac{k^2\,\Delta K\,R^2}{F}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\infty}J_0\left(\frac{k\xi\rho}{F}\right)J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\cos\varphi\right)d\rho,\\ C'' &= \frac{k^2\,\Delta K\,R^2}{F}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{s_1}J_0\left(\frac{k\xi\rho}{F}\right)J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\cos\varphi\right)d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

C' может быть вычислено очень легко на основании известной формулы Вебера

$$\int\limits_0^{\infty}J_0(\alpha\rho)\,J_1(\beta\rho)\,d\rho = \begin{cases} 0 & \text{для } \beta < \alpha,\\ 1/\beta & \text{для } \beta > \alpha. \end{cases} \tag{25}$$

На основании этого мы найдем после нескольких простых преобразований

$$C' = \begin{cases} \dfrac{kRf}{F}\,\Delta K\sqrt{1-\left(\dfrac{f\xi}{FR}\right)^2} & \text{для } \xi < \dfrac{FR}{f},\\ 0 & \text{для } \xi > \dfrac{FR}{f}. \end{cases} \tag{26}$$

Что касается C'', то мы поступим так. Мы предположим, что s_1 мало, т. е. что внутренний кружок диафрагмы закрывает незначительную часть диффракционного поля шара; точнее: мы предполагаем, что kRs_1/f меньше, чем первый корень уравнения $J_0(x) = 0$, и, далее, что изображение исследуется только в точках, не выходящих далеко за пределы „геометрического" изображения шара. Тогда очевидно, что и $k\xi s_1/F$ для всех интересующих нас точек тоже не обращает J_0 в нуль и C'' может быть (по теореме о среднем значении) написано так:

$$C'' = \Delta K\,\frac{k^3 R^3 \bar{s}_1^2}{6Ff}, \quad \text{где} \quad 0 < \bar{s}_1 < s_1. \tag{27}$$

Таким образом

$$C = \begin{cases} \Delta K\,\dfrac{kRf}{F}\sqrt{1-\left(\dfrac{f\xi}{FR}\right)^2} - \Delta K\,\dfrac{k^3R^3\bar{s}_1^2}{6Ff} & \text{для } \xi < \dfrac{FR}{f},\\ -\Delta K\,\dfrac{k^3R^3\bar{s}_1^2}{6Ff} & \text{для } \xi > \dfrac{FR}{f}. \end{cases} \tag{28}$$

Из (20) и (21) получаем

$$C_0 = \frac{kR_1}{F}\int_{s_1}^{\infty} J_1\left(\frac{\rho R_1 k}{f}\right) J_0\left(\frac{k\xi\rho}{F}\right) d\rho. \tag{29}$$

В дальнейшем нам понадобится C_0 для $\xi=0$. Замечая, что $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$, мы из (29) находим для $\xi=0$

$$C_0 = \frac{f}{F} J_0\left(\frac{kR_1 s_1}{f}\right). \tag{30}$$

Итак, $Z^2 = C_0^2 + C^2$, где C_0 и C имеют указанные в (29) и (28) значения. Мы нашли, таким образом, изображение диэлектрического шара, получаемое при наблюдении по методу затемненного поля. Нам остается проанализировать полученное решение.

Рассмотрим прежде всего C, т. е. амплитуду, обусловливаемую присутствием объекта. Она состоит из двух частей C' и C''. C' как функция от ξ может быть названа „геометрическим" изображением шара. Это изображение, как показывает (26), наиболее интенсивно в центре и имеет при $\xi = \frac{RF}{f}$ резко очерченный контур. На геометрическое изображение накладывается распределение интенсивности C'', обусловливаемое присутствием внутреннего кружка диафрагмы и *не имеющее* резких границ. Поэтому все изображение C более расплывчато, чем если бы C'' отсутствовало. Из (28) следует, что, чем меньше $\bar{s}_1$, тем меньше, вообще говоря, C'' по отношению к C', тем резче, другими словами, все изображение.

Но изображение C видно на фоне светового поля C_0. Степень видимости объекта, очевидно, зависит от соотношения C_0 и C или, вернее, C_0 и C'. Весь смысл метода затемненного поля заключается именно в том, что при этом методе указанное соотношение может быть сделано значительно меньше, чем при обыкновенном способе наблюдения. (28) и (29) дают нам возможность количественно сравнить оба случая. Мы проведем это сравнение для центральной точки изображения, т. е. для $\xi=0$.

Из (26) при $\xi=0$

$$C' = \Delta K \frac{kRf}{F}.$$

Сопоставляя это с (30), получаем

$$\frac{C_0}{C'} = \frac{J_0\left(\frac{kR_1 s_1}{f}\right)}{\Delta K k R}. \tag{31}$$

Обозначим на время через C_{01} и C_1' интенсивности фона и изображения в случае наблюдения по обыкновенному методу. Тогда, очевидно, $C_1' = C'$; для того же чтобы найти C_{01}, нужно в (30) положить $s_1 = 0$. Таким образом,

$$\frac{C_{01}}{C_1'} = \frac{1}{\Delta K \cdot kR}. \tag{32}$$

Сравнивая (31) и (32), мы видим, что при достаточно большом значении величины $kR_1 s_1/f$ C_0/C' может быть сделано сколь угодно мало по сравнению с C_{01}/C_1'.

Если $\Delta K \cdot kR$ мало, то при обыкновенном способе наблюдения присутствие объекта может быть *вообще* не обнаружено. Интенсивность всего поля Z_1^2 выражается так:

$$Z_1^2 = C_{01}^2 + C_1'^2.$$

Поэтому достаточно, чтобы $1/\Delta K \cdot kR$, или, что то же, C_{01}/C_1', было, скажем, порядка 10, чтобы объект был уже не заметен. При наблюдении по методу затемненного поля

$$Z^2 = C_0^2 + C'^2,$$

где соотношение C_0 и C' дается формулой (31). Поэтому при достаточно большом R_1, C_0/C' свободно может быть сделано меньше 1. При $\Delta K \cdot kR \sim 0.1$, для этого достаточно, чтобы $kR_1 s_1/f$ было бы больше, чем 64.[1]

Увеличения $kR_1 s_1/f$ целесообразно достигать не увеличением s_1, а увеличением R_1. Действительно, из (28) видно, что, увеличивая s_1, мы в то же время увеличиваем C'' по отношению к C'. Этим нарушается в более сильной мере (чем при меньшем s_1) правильность самого изображения.

---

[1] При этом важно не то, что для некоторых специальных значений $kR_1 s_1/f$ J_0 пропадает, а общее убывание J_0 с увеличением аргумента. Это особенно справедливо, если не ограничивать анализ, как мы это сделали, случаем $\xi = 0$, а рассмотреть более общий случай. Этот случай приводится при помощи второй теоремы о среднем значении к виду, к которому могут быть применены рассуждения, аналогичные сделанным в тексте для $\xi = 0$.

Ввиду относительной сложности получаемых при этом формул, а также потому, что существенно нового при рассмотрении общего случая не получается, я их здесь не привожу.

72

[ВСТУПИТЕЛЬНАЯ ЛЕКЦИЯ К КУРСУ ФИЗИКИ В ОДЕССКОМ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ]

[Октябрь 1918 г.]

Приступая к чтению лекции по физике, я хотел бы, прежде чем перейти к систематическому изложению предмета, остановиться сегодня на одном общем вопросе и поделиться с вами некоторыми соображениями насчет того положения, которое физика занимает и, по моему убеждению, должна занимать в ряде наук, изучению которых вы собираетесь посвятить ближайшие годы.

Мне хотелось бы дать вам материал, на основании которого вы могли бы сами убедиться, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности, и что на нее нельзя смотреть, как на предмет, который нужно — да и нужно ли? — раз пройти, а потом можно и забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру из физики, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, я имею в виду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Такое утверждение было бы само собой очевидным. Что инженер строитель, рассчитывая прочность сооружения, должен быть знаком с основными законами упругости, что инженер электротехник в проектировании, скажем, осветительной сети должен знать закон Ома, связывающий силу тока, сопротивление, или, другими словами, сечение провода и электродвижущую силу батареи и т. д. — это, конечно, не нуждается в доказательстве. Нет, когда я говорю, что инженеру нужна физика, я этим хочу сказать, что ему нужно широкое владение этим предметом в его совокупности; я утверждаю, что ему нужно знание физики самой по себе как цельной дисциплины, а не только в зависимости от текущих применений, с ее специфической методикой. Я утверждаю, наконец, что для этого инженеру недостаточно знать только опытную часть ее, а что он должен быть основательно знаком и с теорией.

Но для того чтобы показать, что это действительно так, мы прежде всего должны постараться выяснить себе структуру физики как науки и посмотреть, в каком соотношении находятся теория и тот опытный материал, которым физика оперирует.

Конечно, мы не можем решать здесь вопроса о сущности физической науки во всей его полноте. Этот вопрос, относящийся к теории познания и крайне интересный как для физика, так и для философа, значительно более сложен, чем это может показаться на первый взгляд. В истории философской мысли он всегда занимал важное место. Но нам для нашей цели и нет надобности особенно сильно в него углубляться. Нам достаточно будет заняться только одной его стороной, хотя, правда, и здесь нам придется начать несколько издалека.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы черпаем наши сведения об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию того, что в логике называется *понятиями*.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее. Но образованные таким образом первоначальные понятия обладают, как мне кажется, следующим свойством. Они не поддаются строгому определению. Мы все владеем понятием „свет". Но объяснить словами, определить один другому сущность этого понятия мы не можем. Чтобы научиться ему, нужно иметь глаза, нужно видеть, как освещается все нас окружающее при восходе солнца и как погружается опять во мрак при его заходе. Если быть прозаичнее, тому же можно научиться, включая и выключая электрическую лампочку. Но одно несомненно — слова, определения здесь бессильны. Попробуйте объяснить слепому от рождения что такое свет.

Возьмите другой пример (может быть менее очевидный). Мы все знаем, что такое жидкость. Но я не думаю, чтобы можно было понятие жидкости определить исчерпывающим образом словами. Нужно показать воду, ртуть, спирт, масло и сказать: вот такие тела мы называем жидкими. Другого способа нет.

Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, позвольте мне это здесь подчеркнуть, ни учебник, ни учитель недостаточны, чтобы научить физике. Учащийся должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но должен сам видеть, сам слышать, сам осязать те явления, о которых ему говорят.

Мы несколько отвлеклись в сторону. Вернемся к первым шагам по пути познания природы, к понятиям, непосредственно навязанным нам природой. По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом понятий (опытных знаний), все настоятельнее являлась потребность в их систематизации, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений. В этой систематизации громадную службу оказывает нам наша способность образовывать другого рода понятия, понятия более определенные, чем те, о которых шла речь выше, и менее зависящие от наших чувств. В первую очередь сюда относятся понятие о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области этих понятий, другими словами, в области математического мышления, мы себя чувствуем несравненно более уверенно, чем при оперировании с материалом, непосредственно поставляемым нам нашими чувствами. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и так же определенно и легко делать из них выводы и заключения. И вот, зная за собой эту силу, человек старается — вначале инстинктивно, а затем с развитием науки и сознательно, — приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что какая-нибудь область физических явлений вообще становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения. Так, например, пока не было точного понятия температуры и не умели ее измерять, науки о теплоте почти или даже совсем не существовало.

Пользуясь в описанном смысле математикой, мы стараемся теперь найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе их понимание тем, что ищем такие математические формулы, в общем не непременно узко алгебраическом смысле слова, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону различных явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим, что нашли физический закон. Возьмем пример. Закон преломления света при переходе из одной прозрачной среды в другую гласит, как известно, так: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости и отношение между sin угла падения и sin угла преломления есть величина постоянная. Например, для воды и воздуха это отношение равно 1.33. Что представляет собой этот закон? Эта формула, охватывающая бесчисленное множество единичных случаев преломления. Она избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт, она делает ненужным запоминать или заносить в таблицы для каждого отдельного случая угол падения и соответственный угол преломления луча. Зная закон преломления, вы уверены, что в любой момент, когда это вам понадобится, при помощи простейших вычислений вы сможете решить всякий представившийся в этом направлении вопрос.

По мере того как физические знания росли, по мере того как число найденных законов увеличивалось, все труднее и труднее становилось разобраться в их разнообразном обилии. Движимые опять необходимостью возможно лучше ориентироваться в этом громадном материале, люди старались найти такие картины, такие точки зрения, которые позволили бы объединить в одно целое отдельные законы. Так создавалась физическая теория, или, вернее, теории.

Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы находятся к отдельным явлениям. Систематизирующая роль теории, конечно, не исчерпывает всей ее сущности, но все же, как вы видите, в систематизации наших знаний она имеет громадное значение. И тут математика является огромным подспорьем. Только что рассмотренные соотношения между различными сторонами физики и постепенное развитие их могут быть прослежены на любой физической теории. Очень просто это сделать, например, на оптике.

Оптика, между прочим, одна из самых древних научно разработанных отраслей физики. Изучение оптических явлений уже в древности привело к установлению некоторых законов. Закон прямолинейного распространения света, закон отражения от зеркал были известны давно. Позже, в XVII в., был найден закон преломления. Смотря по тому, какая группа явлений подвергалась исследованию и с каких точек зрения к ним подходили, были устанавливаемы различные отрывочные законы. Было открыто явление диффракции или загибания света, интерференции и т. д. Но пока не было общей, объединяющей точки зрения, было чрезвычайно трудно разбираться во всей совокупности оптических явлений. Более того, отдельные законы, казалось, находились в противоречии друг с другом. Загибание света не вязалось, например, с прямолинейным распространением луча.

Так было до того, пока усилиями ряда гениальных физиков, из которых в первую очередь должны быть названы Гюйгенс и Френель, не удалось найти ту картину, которую мы теперь называем волнообразной теорией света и которая позволила объединить всю оптику в одно стройное целое. И все, что казалось сложно и противоречиво, сделалось простым и ясным.

А возьмите теорию всемирного тяготения Ньютона. Объединяя с гениальной смелостью столь разнородные на взгляд наших чувств явления, как падение камня и движение небесных светил, она грандиозна именно своей простотой. В одной простой формуле она содержит всю динамику всего мироздания.

Я ограничусь этими примерами. Может быть, в них осталось кое-что вам неясным. Это ничего. Понимание фактической стороны придет по мере того, как вы будете изучать физику, но я думаю, что для вас, по крайней мере в общих чертах, теперь выяснилось соотношение между ее опытной и теоретической сторонами.

Эти две стороны, как вы видели, тесно связаны между собой, они вместе представляют одно целое. В достижении нашей конечной цели — познания природы — могучим подспорьем, систематизирующим наш опыт и дающим возможность пользоваться материалом, является теория. Теория, а значит и орудие, которым, как мы видели, она пользуется — математика, не являются балластом и чем-то искусственно пристегнутым к науке о природе. Нет, она есть то орудие, без которого мы не были бы в состоянии осилить окружающий нас мир как в практическом смысле, так и в смысле удовлетворения умственных потребностей.

Поэтому я нахожу — не считайте это парадоксом, — что нельзя требовать знания только опытной физики, но вовсе не потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Из тех же соображений я хотел бы, чтобы вы не оправдали того несколько злого слова, которое сказал знаменитый математик Клейн относительно уровня знания математики. Математику, сказал Клейн, забывают дважды — элементарную в университете и высшую — по выходе из университета.

Изложенный взгляд на систематизирующую роль теории очень хорошо иллюстрируется одним красивым сравнением, сделанным Пуанкаре.

Пуанкаре сравнивает всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные данные, отдельные явления это те томы, из которых библиотека состоит. Теория — это каталог нашей библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, очень ценных книг, которыми в сущности продуктивно пользоваться нельзя, точно так же физика без теории не есть наука, а лишь довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в которых нет возможности.

А теперь нам будет уже нетрудно ответить на тот вопрос, который мы поставили себе вначале. Нужна ли инженеру физика в ее целом, не достаточно ли ему знания отдельных, непосредственно для его практической работы нужных фактов? Ответ, мне кажется, ясен.

Чтобы продуктивно работать — позвольте мне говорить на языке сравнения Пуанкаре, — инженеру не достаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или, по крайней мере, уметь разбираться в каталоге всей библиотеки. А не то слишком часты будут те случаи, когда он натолкнется на такие явления, которых в его книгах нет. И тогда, если он не умеет разбираться в каталоге, он потеряется, он будет выхватывать наугад то одну, то другую книгу из огромной библиотеки, но, исключая какой-нибудь особо счастливый случай, он не найдет того, что ему нужно.

История техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших иногда весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обусловливалась не присутствием действительно новых, до тех пор вообще неизвестных факторов, а отсутствием у тех, кто данными вопросами занимался, широкого физического горизонта. И когда за решение брались люди, обладавшие действительно широкими физическими знаниями, то загадка не только разъяснялась и находился способ предотвратить неуспех, но часто открывались и новые пути для дальнейшего прогресса.

Остановимся на нескольких примерах.

Во второй половине прошлого столетия стали обращать на себя внимание инженеров случаи непонятных обрушений мостов, особенно цепных мостов, которые в то время как раз строились в сравнительно большом количестве. Непонятных — потому, что мосты рушились под весьма небольшой тяжестью, которую они по расчету должны были свободно выдерживать и фактически раньше выдерживали. Повторные проверки не обнаруживали ошибочности расчетов, а катастрофы были налицо. Инженеры беспомощно стояли перед свершившимися несчастиями и не имели средств предотвратить их в будущем.

И только в последнем десятилетии прошлого века решение вопроса было найдено. Вот что оказалось. Цепной мост представляет собой не жесткую систему, а систему, которая может подобно струне совершать колебания, с той разницей, что струна колеблется быстро, совершая несколько сот колебаний в секунду, в то время как мост, если его заставить колебаться, совершает за секунду, скажем, одно или даже меньше колебаний. И вот, при известных условиях нагрузки наступало так называемое явление резонанса, несшее гибель мосту.

Явление резонанса давно было известно физикам в области акустики. Оно состоит в следующем. Представьте себе натянутую струну. Она способна, если по ней ударить или провести по ней смычком, звучать в некотором определенном тоне, при этом она приходит в колебания с вполне определенной частотой. Каждому тону соответствует своя частота. Скажем, что наша струна способна совершать 435 колебаний в секунду. Это соответствовало бы тону *la*. Предположим, что струна находится в покое. Возьмем теперь вблизи другую струну, которая тоже способна совершать 435 колебаний в секунду, и заставим эту струну звучать. Тогда окажется, что под влиянием колебаний нашей второй струны приходит в колебания — и сильные колебания — и первая. Это явление называется резонансом. Но если вторая струна имеет отличное от первой число колебаний, то первая струна молчит и на колебания второй струны не отвечает. Объяснение явления резонанса несложно. Та струна, которую мы заставляем непосредственно колебаться, передает первой струне через воздух маленькие толчки, следующие друг за другом в темпе ее колебаний, т. е. каждую $^1/_{435}$ сек. один толчок. Каждый толчок сам по себе крайне незначителен. Первый толчок действительно приведет струну в ничтожно слабое колебание, но если темп этих колебаний и приходящих толчков один и тот же, то второй толчок придется как раз во́-время и усилит действие первого. Третий усилит колебания еще больше и т. д. Произойдет накопление действия отдельных толчков и в результате получается сильное звучание. Между тем, если отдельные толчки следуют друг за другом невпопад, то действие одного будет уничтожаться действием следующего и заметного эффекта не будет.

Явление резонанса, изученное впервые в акустике, ею абсолютно не ограничивается. Звонарь на колокольне, раскачивающий тяжелый колокол, пользуется, хотя и бессознательно, тем же явлением. Он не в состоянии преодолеть тяжесть колокола одним усилием и поэтому он поступает так. Он дает веревке слабый толчок: колокол отклоняется, но очень незначительно, а затем возвращается обратно; как раз в момент возвращения звонарь дает следующий толчок и такими ритмичными, следующими в tempo колебаний колокола толчками он его раскачивает до тех пор, пока язык не ударит по колоколу. Вот почему, между прочим, звонить в тяжелый колокол, особенно снизу, при помощи веревки, т. е. в условиях, когда следить за колебанием нельзя, требует немалого навыка.

Теперь, я думаю, вам будет ясно, как явление резонанса может оказаться губительным для моста. Представьте себе — и это действительно бывало при некоторых катастрофах, — что по мосту проходит военный отряд, идущий в ногу. Отдельные толчки, производимые при этом, не оказывают сколько-нибудь заметного действия. Но если случайно период этих ритмических толчков совпадает с периодом колебаний моста, — а это, особенно в цепных мостах, может случаться очень легко, — то наступает явление резонанса. Действия отдельных толчков накапливаются, мост раскачивается все сильнее и сильнее, материал не выдерживает и мост рушится. Вот почему, между прочим, теперь при проходе отряда через такой мост солдатам дается команда итти не в ногу. Это, конечно, одна из причин, а подобных причин наступления резонанса может быть множество, и оградить себя от таких ритмических нагрузок трудно. Поэтому в настоящее время, — а это и есть главный практический результат, к которому привела теория, — почти совершенно отказались от нежестких систем, имеющих собственные колебания. Современные конструкции имеют гораздо бо̀льшую жесткость, чем прежние цепные мосты, и этим возможность колебаний, а значит и возможность наступления губительного резонанса, устраняется.

Я думаю, что вам теперь также стало ясным, почему случаи, подобные описанному, казались непонятными и загадочными. Конструкторы рассчитывали прочность своих мостов исключительно статически, т. е. они принимали во внимание только постоянную нагрузку и с этой точки зрения их расчеты были совершенно правильны. Они не учитывали и даже не напали на мысль о необходимости учета ритмически изменяющейся нагрузки, с одной стороны, и колебаний моста, с другой. Их кругозор был ограничен и не охватывал явлений во всем их разнообразии. Но нашлись люди с широкой теоретической подготовкой, для которых звучание струны и колебания моста являлись лишь частными случаями, охватываемыми одним общим законом, и вопрос был решен.

Интересно, что аналогичное явление повторилось в совершенно другой области. Вы знаете, что для передачи электрической энергии пользуются иногда кабелем, состоящим по существу из двух металлических проводников, несущих ток и изолированных друг от друга каким-нибудь изолирующим веществом, например гутаперчей. Слой гутаперчи между проводами должен быть больше или меньше, смотря по тому электрическому напряжению, иначе говоря, смотря по числу вольт, при котором передача энергии идет. Понятно при этом, что из соображений экономии и из-за тяжести кабеля слой гутаперчи делают не больше (конечно, с известным запасом), чем это нужно для данного случая. Проверка делается в заводской лаборатории. Для этого соединяют один провод с положительным, другой — с отрицательным полюсом батареи и смотрят, выдерживает ли кабель нужное напряжение. И вот наблюдались случаи, что при работе с переменным током кабель, полностью выдержавший испытание в лаборатории, в работе пробивался.

Вопрос разъяснился и здесь тоже лишь тогда, когда к нему подошли с физико-теоретической стороны. Оказалось, что здесь, как и в случае моста, губительным фактором было явление резонанса. Дело в том, что кабель, смотря по длине, имеет различные периоды собственных электрических колебаний. Он представляет собой электрическую аналогию струны. С другой стороны, отличительной чертой переменного тока является его ритмическая пульсация. И вот, если длина кабеля оказывалась такова, что период пульсаций тока совпадал с периодом колебаний кабеля, наступало явление резонанса, происходило нарастание колебаний электрического напряжения, которое благодаря этому достигало гораздо большей величины, чем то, которое давали динамомашины и на которое был рассчитан кабель, и изоляция пробивалась.

Позвольте мне в заключение остановиться еще на одном примере, взятом совсем из другой области и ясно, как мне кажется, иллюстрирующем значение широкого физического горизонта при разрешении технических вопросов.

Я имею в виду вопрос об оптических инструментах и, в частности, вопрос о микроскопе. Вы знаете, что микроскоп играет чрезвычайно важную роль в очень многих областях прикладного знания. Я не буду напоминать вам его значение в медицине, в гигиене, в санитарии. Я укажу только на то, что и в изучении металлов микроскоп в настоящее время незаменим. Микроскопом особенно заинтересовались уже в середине прошлого столетия, после того как применение его в биологии открыло совершенно новые пути в изучении явлений жизни. Но после первых успехов обнаружилось, что существовавшие тогда микроскопы не были хороши и не были сильны. Исследователи ясно чувствовали, что если бы удалось построить микроскоп с бóльшим увеличением, то вместе с тем явилась бы возможность проникнуть еще дальше в сущность жизни. А такая перспектива всегда с особенной силой манила людей. И фантазия не останавливалась перед постройкой микроскопов, увеличивающих в десятки, сотни тысяч и миллионов раз, и ждали от их применения чудес. Исследователи ждали, что с их помощью можно будет проникнуть в самые сокровенные детали строения живой материи.

Понятно, что при такой конъюнктуре и специалисты-конструкторы оптических приборов взялись с усиленной энергией за усовершенствование микроскопа. И они считали принципиально возможным достигнуть любых увеличений. Весь вопрос, казалось, сводился к преодолению технических трудностей.

Дело в том, что в то время все расчеты, касавшиеся оптических приборов, велись исключительно при помощи так называемой геометрической оптики. В основание расчета полагалась та теория микроскопа, которая, впрочем, и до сегодняшнего дня только и преподается в средней школе и которая оперирует со световыми лучами как с прямыми линиями. А с точки зрения геометрической оптики действительно не существует принципиальной границы для возможного увеличения микроскопа.

Однако же весьма скоро обнаружилось, что работа, направленная к усовершенствованию микроскопа, далеко не дает тех результатов, которых, казалось, можно было ожидать. Между тем, что казалось достижимым, и тем, что достигалось, было противоречие, которому объяснения не находилось.

Так обстояло дело, когда иенский механик Цейсс, имевший небольшую механическую и оптическую мастерскую и изготовлявший сам недурные по тому времени микроскопы, пригласил в качестве консультанта тогда еще молодого физика Аббе. Аббе обладал хорошей теоретической подготовкой, хорошо владел теоретической оптикой. Он знал, что геометрическая оптика есть лишь удобная схема для обработки классического явления преломления. Он знал ей цену, потому что он сам очень много внес нового в эту область. Но он знал также, что с точки зрения волновой теории света, служащей базой для геометрической оптики, последняя есть не более как приближение. И он сразу подошел к вопросу о микроскопе с широким, не связанным узкими рамками геометрической теории взглядом.

Результаты такого подхода к делу не заставили себя долго ждать. Одним из главных результатов, к которым пришел Аббе, был следующий. Он показал, что волнообразная природа света ставит принципиальный предел тому полезному увеличению, которое может быть достигнуто при помощи микроскопа или, вообще, любого оптического инструмента. Если детали объекта мельче определенной величины или нормы, то эти детали не могут быть видимы, выявить их ни один микроскоп не может. Все мечты об увеличении в 100 000 и больше раз и все связанные с ними надежды должны быть принципиально оставлены, и работа тех, кто хотел такие микроскопы построить, совершенно бесцельна. Блестящими опытами Аббе подтвердил правильность своих теоретических выводов.

Практическая важность открытия Аббе, конечно, очевидна, но Аббе на этом, я сказал бы, негативном открытии не остановился.

Мечтая о невозможном, конструкторы оптических приборов до Аббе фактически далеко не осуществили и того, что возможно. И вот Аббе во всеоружии обширных теоретических знаний и большого опыта взялся за усовершенствование микроскопа.

Это ему и его методу работы, при котором он широко пользовался всей теорией, мы обязаны тем, что микроскоп в настоящее время почти достиг того, чего от него вообще можно ожидать, и что он представляет собой один из наиболее совершенных оптических инструментов.

Позвольте мне на этом остановиться. Я надеюсь, что вы теперь согласитесь со мной, что знание, широкое, полное знание физики для инженера не роскошь, а необходимость, что широкий физический горизонт должен быть достоянием не только тех отдельных избранных людей — инженеров, которым суждено прокладывать новые пути в технике, но и достоянием всякого инженера, сознательно относящегося к своему делу. Если то, что я сказал, может способствовать укреплению в вас этого взгляда, то моя цель была бы достигнута.

Но я не хотел бы закончить нашу сегодняшнюю беседу, не указав хоть двумя словами на еще одну сторону вопроса. Я хотел бы еще сказать вам, что занятия физикой, углубление в ее основы и в те широкие идеи, на которых она строится, и в особенности самостоятельная научная работа приносят огромное умственное удовлетворение. Убеждать в этом я не хочу. Да и вряд ли здесь возможно убеждение. Тут каждый должен убедиться сам. Но я хотел бы, чтобы вы знали, что если кто-нибудь из вас почувствует в себе такое стремление, то для меня всегда будет большим удовольствием способствовать всем, чем я могу, его осуществлению. В посильном удовлетворении таких чисто научных запросов учащихся я, помимо моих личных симпатий, вижу одну, и не последнюю, задачу высшей школы.

73

[О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ И НАПРАВЛЯЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ ПРОВОДНИКОВ[1]]

ПЛАН МОНОГРАФИИ

1) Ряд физических проблем (исторически — сначала оптических) приводит к постановке задачи о преломлении и отражении.

2) Для ее решения нужно установление пограничных условий. Это новая сторона теории, требующая новых предпосылок.

3) С этим сопряжены трудности. Трудности упругой теории света. Задача об отражении в максвелловской теории.

4) Упрощение — плоская волна и предпосылки (которые обычно опускаются).

5) Четвертая волна. Направление фазовой волны во второй среде.

6) Фазовая и групповая скорость. И при отражении — преломлении знание понятия групповой скорости имеет значение (Пойнтинг и групповая скорость, Леонтович).[2]

7) Формулы Френеля (полное внутреннее отражение, анизотропные среды) для прозрачной и непрозрачной сред. Плоскость равной амплитуды в последнем случае (Шустер).[3]

---

[1] [Находясь в эвакуации в Боровом, Л. И. Мандельштам задумал ряд монографий и некоторые из них начал писать. К их числу относится и данная работа о распространении волн. Вначале помещен найденный в бумагах Л. И. Мандельштама план монографии, а затем — набросок статьи, представляющий собой черновую разработку части вопросов из этого плана. Материал обработан М. А. Леонтовичем.]

[2] [См. т. II, статья 52, и т. V, лекции по теории колебаний.]

[3] [Шустер. Введение в теоретическую оптику, гл. XI, ОНТИ, 1935.]

8) Отклонения от формул Френеля (Релей! Сивухин).[1]

9) Постановка задачи в „электромагнитном случае" и ее сравнение с оптикой. Зачем понадобился Зоммерфельд (оптические опыты) (полное внутреннее отражение).[2]

9а) Новые задачи отражения, возникающие в электромагнитной области. Отрицательный коэффициент преломления, отражение от ионосферы и т. д.

10) Возвращение к оптике: френелевы формулы, предельный случай. Зоммерфельд. Решения.

11) Возникновение вопроса о поверхностной волне: а) исторически — Ценнек, Зоммерфельд, б) генетически — в связи с „направляющим действием проводников".

12) Уточнение постановки вопроса о „поверхностной волне".

13) „Отсутствие" поверхностной волны в случае Зоммерфельда (В. А. Фок),[3] поиски которой, повидимому, обязаны возникновению представления о направляющем действии проводов.

14) Сравнение с упругим случаем, где *есть* поверхностная волна. Попытки выяснить, где заложена разница между этим и электрическим случаем.

15) Для выяснения „направляющего" действия разбор возбуждения волн в цилиндрическом проводе.

16) Тривиальные случаи направляющего действия: кабель, две параллельные плоскости, трубы.

17) Разбор с точки зрения „направляемости" систем с „обратным проводом". Лехерова система.

По существу, за исключением параграфа об отклонении от френелевых формул — теория континуума.

По мере развития радиотехники все больше выяснялись сложность и своеобразие распространения радиоволн от передатчика к приемнику. Уже очень скоро была обнаружена зависимость силы приема от свойств поверхности земли. Затем обнаружились колебания в силе приема в течение суток; наконец, выяснилась чрезвычайно большая зависимость дальности передачи от длины волны и т. д. Большой теоретический интерес возникающих здесь проблем несомненен. Громадное практическое значение их тоже очевидно.

---

1 [Rayleigh. Phil. Mag. 33, 1, 1892; Д. В. Сивухин. ЖЭТФ 18, 976, 1948.]

2 [См. т. I, статья 20.]

3 [Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения, гл. XXIII, стр. 967. ОНТИ, 1937.]

Не удивительно поэтому, что уже довольно рано началось как экспериментальное, так и теоретическое их изучение. Эксперимент относился до самого последнего времени исключительно к вопросу об интенсивности. С практической стороны важен был в первую очередь вопрос о силе приема. Кроме того, для исследования другой существеннейшей характеристики распространения — путей распространения и скорости распространения — довольно долго не существовало метода. На основании большого экспериментального материала устанавливались эмпирические формулы для интенсивности (например, формула Остина).

Что же касается теории, то было ясно, что ввиду сложности естественных условий трудно ожидать, чтобы теория дала достаточные для практических целей результаты. Однако так же ясно было, что для общей ориентировки, для суждения об основных свойствах распространения все же необходимо теоретически разобрать этот вопрос, хотя для этого нужно существенно упростить и идеализировать проблему.

Эта идеализация должна была быть проведена, так сказать, в двух направлениях. Проблема ставится теоретически так: земля рассматривается или как однородное с постоянными значениями ε и σ полупространство, ограниченное плоскостью, или же, что уже значительно сложнее, как однородная сфера. Антенна заменяется точечным диполем, находящимся на поверхности раздела или на некотором от нее расстоянии. Таким образом, теория отвлекается от влияния на распространение неоднородности почвы и изменчивости рельефа.

При указанной постановке задачи остается в стороне еще один очень важный момент, а именно — влияние ионосферы. Поэтому в этой теории речь идет только о „земном“ луче, т. е. о сравнительно небольших расстояниях. И все же, несмотря на такое, казалось бы, уж очень далеко идущее упрощение, теория сыграла несомненно существенную роль в развитии даже некоторых практических вопросов, связанных с распространением, например, вопроса об измерении расстояний. Нет никакого сомнения в том, что теория себя оправдала. Нужно, однако, указать на следующее обстоятельство. Даже в том упрощенном виде, в каком вопрос ставится теоретически, и даже при плоской границе раздела, теория несколько громоздка. Этим объясняется тот факт, что она не сразу дала правильное освещение механизма распространения. Только сравнительно недавно выяснилась необоснованность некоторых весьма распространенных (теоретических) утверждений, существенных как для направления, так и для толкования опытов. В настоящее время эти недоразумения устранены главным образом благодаря теоретическим работам ван-дер Поля, Фока,[1] а также рассчетным и экспериментальным работам, произведенным в ФИАН.[2] Теория распространения над плоской поверхностью доведена до такой стадии, что ею можно пользоваться для соответствующих числовых расчетов (даны таблицы, удобные формулы и т. д.).[3]

Соответственно с этим изменился довольно существенно взгляд на характер электромагнитного поля, с которым мы имеем дело при распространении радиоволн, в первую очередь на роль так называемой поверхностной волны. В настоящей статье мы хотели коротко остановиться на развитии некоторых относящихся сюда вопросов.

Повидимому, первая попытка теоретического разбора вопроса о распространении с специальной целью применения в беспроволочной телеграфии была сделана Ценнеком в 1907 г. (Уллер в диссертации 1902 г. тоже занимался вопросом о „поверхностной" волне; была ли там указана связь с волной, излучаемой передатчиком?)

Рассуждения Ценнека приблизительно сводятся к следующему. На очень далеком от передатчика расстоянии излучаемую им волну можно считать плоской. Направление от передатчика к приемнику пусть будет x-направлением, ось z направлена вертикально. Ценнек ищет решения максвелловых уравнений для электрического и магнитного векторов как в воздухе, так и в земле в виде

$$A_{1,2}\, e^{i(h_{1,2}x+\beta_{1,2}z)}$$

(1 относится к воздуху, 2 — к земле). Такое решение (т. е. совокупность двух плоских волн, одна в воздухе, другая в земле), удовлетворяющее как уравнениям, так и граничным условиям, существует, причем h и β определены однозначно (вплоть до знака, определяющего $\pm$ направления распространения волны). При наличии конечной проводимости h и β комплексы. Они зависят симме-

1 [Франк и Мизес, loc. cit.]

2 [„Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности". Сборник статей под ред. Л. И. Мандельштама и П. Д. Папалекси. Гостехиздат, 1945.]

3 [„Исследования по распространению радиоволн". Сборник второй, под ред. Б. А. Введенского (Изд. АН СССР, 1948); Б. А. Введенский. Изв. АН СССР (Отд. техн. наук), №1—2, 1942.]

трично от волновых чисел *обеих* сред. Этот тип решения называют поверхностной волной именно в виду того, что ее характеристика является функцией от обеих сред, и в виду экспоненциального убывания амплитуды по вертикали (вниз и вверх). Далее Ценнек показывает, что электрическое поле волны на поверхности имеет вращающуюся компоненту. При хорошей проводимости почвы эллипс E_z, E_x вытянутый (E_x/E_z мало). Большая ось его наклонена на некоторый небольшой угол от вертикали вперед. Ценнек *предполагает* далее, не приводя никакого обоснования, что такова и волна, излучаемая передатчиком, на больших расстояниях от него.

Характерным свойством радиоволны, по Ценнеку, является таким образом: 1) отличная от скорости в верхнем пространстве фазовая скорость распространения (действительная часть h не равна $\frac{\omega}{c}$); 2) экспоненциальное убывание амплитуды с расстоянием (убывание с расстоянием вследствие цилиндричности или сферичности волны исключается из рассмотрения самой постановкой математической задачи); 3) экспоненциальное убывание амплитуды в вертикальном направлении; 4) характерный, зависящий от волновых чисел обеих сред наклон электрического поля. При этом, по Ценнеку, как уже сказано, такое поле должно порождаться излучателем на *больших* от него расстояниях, и тем точнее, чем больше расстояние. Подчеркнем еще раз, что из рассуждений Ценнека следует только совместимость поля указанного им характера с уравнениями электродинамики или, иначе говоря, *возможность* существования таких полей.

Вопрос о связи этого поля с антенной, или, другими словами, вопрос о том, имеет ли поле, излучаемое антенной, указанный характер, остается в теории Ценнека совершенно открытым. Мы теперь знаем, что такой связи нет. Действительная теория показывает, что излучаемое антенной поле именно на далеких от нее расстояниях коренным образом отличается от поверхностной волны Ценнека.

Однако до последнего времени концепция поверхностной волны с указанными характеристиками считалась в общих чертах правильной. В частности, считалось, что фазовая скорость распространения отлична от скорости распространения в вакууме. Этим обстоятельством пытались объяснить, например, изменение направления фронта волны или так называемую береговую рефракцию при переходе радиоволн с суши на воду или обратно. Опыт не вяжется с таким объяснением; не только количественного, но и качественного совпадения между опытом и таким объяснением нет. Далее, опять-таки до последнего времени считалось, что амплитуда радиоволн убывает с расстоянием экспоненциально. Все эмпирические формулы (помимо учета кривизны земли, где действительно теория дает экспоненциальное убывание) строились по экспоненциальному типу, причем значение экспонента считалось зависящим от свойств почвы. Мы теперь знаем, что теория дает совершенно другое убывание с расстоянием. То, что расхождение между опытом и экспоненциальными формулами не было обнаружено, объясняется главным образом недостаточностью диапазона расстояний и сравнительно малой точностью измерений.

Единственный экспериментальный результат, который согласовался с выводами Ценнека, это, повидимому, наклон поля, хотя и здесь опытные данные не настолько точны, чтобы можно было говорить о проверке теории. Нужно сказать, что в этом пункте действительная теория дает то же, что получается и из поверхностной волны Ценнека.

Мы видим, таким образом, что рассуждения Ценнека не приводят к теории распространения радиоволн, излучаемых антенной, так как они игнорируют самый основной момент всей проблемы, т. е. связь поля с излучателем.

И тем не менее, было бы неправильным утверждать, что работа Ценнека не имела положительного значения. Она, несомненно, возбудила интерес к теоретической разработке вопросов распространения и дала толчок для дальнейших работ.

Первая действительная и строгая теория распространения волн, излучаемых источником (диполем), находящимся на плоской поверхности раздела двух однородных сред, была дана Зоммерфельдом в 1909 г. Заметим прежде всего следующее. На первый взгляд может показаться, что при допущенной Зоммерфельдом идеализации — два однородных полупространства с плоской поверхностью раздела — нет надобности в специальной теории распространения радиоволн, так как ведь задача о распространении световых волн для этого случая давно решена (формулы Френеля). Но дело в том, что в оптике предполагается, большей частью молчаливо, что источник света находится далеко (масштабом является величина порядка λ) от поверхности раздела. Обычные опыты оптики имеют дело именно с этим случаем. В интересующем нас случае распространения радиоволн мы имеем дело как раз с такими условиями, когда источник излучения находится крайне близко от поверхности раздела.

В указанной работе Зоммерфельд дает строгое решение задачи для вертикального электрического диполя, помещенного на плоской поверхности раздела. Это решение было затем распространено также и на горизонтальный диполь и на случай магнитного диполя. Решение дано Зоммерфельдом в форме определенного интеграла. Для того чтобы усмотреть структуру поля, нужна сравнительно громоздкая дискуссия решения, нужно приближенное вычисление интеграла. Для этой цели Зоммерфельд переводит путь интегрирования в комплексную плоскость. Тогда интеграл довольно естественно распадается на три слагаемых. Одно из них соответствует поверхностной волне Ценнека. Оценить (в общем случае) удельный вес каждого слагаемого довольно трудно. Зоммерфельд первоначально предполагал, что на достаточно больших расстояниях превалирует именно то слагаемое, которое соответствует поверхностной волне. Таким образом, Зоммерфельд считал, что им установлена связь поверхностной волны с источником излучения; другими словами, он считал, что дискуссия строгого решения подтверждает, что на далеких расстояниях поле от точечного излучателя представляет собой поверхностную волну с теми характеристиками, которые были указаны Ценнеком и которые были нами выше приведены.

Однако, как указал Фок, заключение Зоммерфельда неправильно. Во втором издании Франка и Мизеса (Ph. F r a n k u. R. v. M i s e s. Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II. Vieweg, 1935) на это указывает сам Зоммерфельд, соглашаясь с указанными авторами. Однако нужно заметить, что то, что здесь говорит Зоммерфельд, или вернее то, как он это говорит, вряд ли может способствовать полному уяснению положения.

Он как и раньше подробно дискутирует *одно* из слагаемых решения, а именно то, которое, как мы указывали выше, действительно представляет собой поверхностную волну. Он показывает далее, что на больших расстояниях это слагаемое прямо переходит в ценнековскую плоскую поверхностную волну.

Затем он говорит следующее (стр. 932):

„При помощи этих расчетов мы доказали, что ранее рассмотренная плоская волна содержится в комплексе волн, который исходит из линейного передатчика. В первоначальной работе автора этому обстоятельству придавалось особое значение (Ann. d. Phys. **28**, 1909, 665, № 11), так как, казалось, что таким образом устанавливается связь прежних рассуждений Ценнека и Уллера с излучением диполя. Но эта связь только формальна (??). В действительности составная часть P комплекса волн (P — слагаемое, соответствующее поверхностной волне) всегда сопровождается обеими другими составными частями Q_1 и Q_2 (два других слагаемых) и не может быть от них отделена. Эти последние составные части мы характеризовали на основании известных приближенных вычислений как пространственные волны, которые мы считали характерными для распространения в каждой из двух сред в отдельности.

Однако эти приближения были недостаточны.[1] Причина этого лежит в том, что на фиг. 93 особые точки $\lambda = h$ и $\lambda = k_0$ слагаемых P и Q_1 практически, т. е. при большом значении $|k|$, сливаются[2] (слагаемым Q_2 можно при этом всегда пренебречь). Поэтому, как уже сказано выше, типы волн P и Q_1 не могут быть отделены друг от друга. Повидимому, не существует таких условий, при которых поверхностный тип волны P образуется в чистом виде и составляет основную составную часть волнового комплекса. Вследствие этого мы не имеем также основания объяснить при помощи действия поверхностной волны преодоление кривизны земли, а должны свести это явление на другие причины (см. § 4)".

При том положении вопроса, которое приводит Зоммерфельд в только что цитированных строчках, ясно, что выделение поверхностной волны в качестве одного из слагаемых, обусловленное определенным способом интегрирования, случайно и во всяком случае до доказательства противного не отвечает никакому физическому явлению. Ведь во всяком выражении можно считать присутствующим *любое* слагаемое. Но тогда непонятно, какой физический смысл придает Зоммерфельд результатам вычислений, которыми он показывает тождество слагаемого P с ценнековской плоской волной для больших r и т. д.

Из всего сказанного следует, что из исправленной Зоммерфельдом дискуссии его строгого решения никак не вытекает существование поверхностной волны в поле, излучаемом диполем, находящимся на или (как легко показать) над поверхностью раздела обеих сред.

---

[1] „Согласно любезным сообщениям Ф. Нётер и В. Фока".

[2] [Всюду в дальнейшем для электромагнитной задачи через $k_0 = \frac{\omega}{c}$ обозначается волновое число в верхней среде (в воздухе), а через k_1 — комплексное волновое число в нижней среде (в земле). $h = \frac{k_0 k}{k_0 + k}$ — волновое число ценнековской волны.]

Как уже указано, неправильность ценнековской и примыкающей к ней зоммерфельдовской концепции поверхностной волны была обнаружена В. А. Фоком (см. Франк и Мизес, гл. XXIII).

Между прочим, Фок сам говорит по этому случаю следующее: „Хотя предложенное автором (т. е. Зоммерфельдом) разделение волн на „поверхностные" и „пространственные" следует считать неверным, можно, однако, сделать аналогичное разделение по несколько иному принципу, указанному Вейлем, а именно: можно считать „поверхностными" те волны, амплитуда которых при возрастании проводимости земли стремится к нулю во всей области, в которой $\frac{z}{R} > \vartheta_0$, где ϑ_0 — некоторая отличная от нуля положительная величина. При таком разделении в выражении

$$\Pi_0 = \frac{2}{R} e^{ik_0 R} + \Pi_0' \quad \left(\Pi_0' = -2ixe^{ixs} \int\limits_0^{\infty} e^{i\frac{hr}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t} \right),$$

следует считать первый член „пространственной", а второй член „поверхностной" волной".

С таким делением вряд ли можно согласиться уже по той формальной причине, что при $k \to \infty$ мы получаем $\Pi_0' \to 0$ для *всех* значений $\frac{z}{R}$. Но дело не в том или ином формальном разделении, а в действительной структуре поля и вытекающих из нее следствиях.

Только что приведенные результаты (для $z = 0$) получаются весьма просто. Дело в том, что, как показал ван-дер Поль, для этого случая решение Зоммерфельда может быть приведено к удобному для дискуссии виду. Отметим особенно следующие моменты.

Убывание амплитуды *не* идет экспоненциально; закон убывания амплитуды лежит между $1/r$ и $1/r^2$. Относительно фазы — а этот вопрос в связи с интерференционными методами измерения расстояния приобретает актуальное значение — дело обстоит так. В противоположность концепции поверхностной волны, согласно которой скорость распространения отлична от скорости в воздухе, справедливо следующее. При больших расстояниях существует определенная скорость, и она равна скорости в воздухе. При переходе от малых численных расстояний[1] ($\rho \ll 1$) к большим ($\rho \gg 1$) на изме-

[1] [Численным расстоянием здесь всегда называется действительная величина $\rho = \frac{k_0^3 r}{2|k_1|^2}$.]

нение фазы, определяемое этой скоростью, накладывается изменение фазы, тоже зависящее от расстояния, однако так, что эта добавочная фаза изменяется только в пределах от 0 до π и практически достигает предела при сравнительно небольших расстояниях.

Таким образом, мы видим, что не существует такого интервала расстояний, в котором можно было бы с достаточным приближением говорить о поверхностной волне.

В настоящее время анализ строгого решения, качественные результаты которого для интересующего нас случая мы только что привели, позволяет получить численные значения всех практически существенных данных. Вычислены таблицы, начерчены графики для различных случаев и т. д.

Зависимость амплитуды и фазы от расстояния, вообще говоря, довольно сложная. Она делается простой для двух предельных случаев, а именно: для очень больших и очень малых численных расстояний. К сожалению, в практически важных условиях, поскольку речь идет о суше, мы имеем дело главным образом с промежуточным случаем. Несмотря на это, нам кажется небезинтересным остановиться все-таки на предельном случае $\rho \gg 1$, тем более что правильное толкование строгого решения приводит к результатам, существенно отличным от тех, которые еще недавно были почти общепринятыми. Случай $\rho \ll 1$ общеизвестен. Здесь земля ведет себя как абсолютный проводник. Практически, как известно, мы встречаемся с этим случаем при распространении над морем (при не слишком больших расстояниях и не очень коротких волнах). В этой области амплитуда (например, вертикальной составляющей, электрические поля) убывает обратно пропорционально расстоянию. Скорость распространения равна скорости распространения в воздухе (вместо „верхняя среда“ мы будем говорить „воздух“). Вектор Герца Π в этой области имеет вид

$$\Pi = 2\frac{e^{ik_0R}}{R}.$$

Двойка — результат „отражения“ от земной поверхности.

Для больших расстояний можно и целесообразно написать (как это обычно делается) Π в виде

$$\Pi = 2\frac{e^{ik_0R}}{R} f(\rho)\, e^{i\varphi(\rho)},$$

где ρ — численное расстояние. Для $|k| \gg k_0$

$$\rho \approx \frac{k_0^3 R}{2|k_1|^2}.$$

Для $\rho \ll 1$

$$f(\rho)=1 \quad \text{и} \quad \varphi(\rho)=0.$$

Для $\rho \gg 1$

$$f(\rho)=\frac{1}{2\rho} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2}<\varphi(\rho)<\pi \cdot$$

Во всем интервале расстояний $\varphi(\rho)$ лежит между нулем и [своим предельным значением при $\rho \to \infty$, заключенным между] $\pi/2$ и π; $f(\rho)$ убывает не быстрее, чем $1/\rho$.

Вообще говоря, как указывает ван-дер Поль, $f(\rho)$ с точностью до нескольких процентов может быть представлена следующей эмпирической формулой

$$f(\rho)=\frac{2+0.3\rho}{2+\rho+0.6\rho^2}\cdot$$

Мы будем рассматривать П *на* поверхности земли. Зная П как функцию от r, мы можем без дальнейшего найти и интересующую нас компоненту E_z. Поэтому для выяснения интересующей нас структуры вертикальной слагающей такого рассмотрения достаточно. Чтобы найти E_r, нужно знать П и в точках над поверхностью. Об этом речь будет итти дальше.

Несомненно, что путь, по которому шло теоретическое исследование, а именно разыскание удобных и практически достаточных апроксимаций строгого решения, единственно правильный и теория простого случая двух разделенных плоскостью полупространств на этом пути в основном исчерпывается. Однако может быть не лишено интереса связать структуру поля, как она при этом выявляется, с некоторыми более привычными представлениями, известными, например, из оптики.

Здесь я понимаю связь как некоторую иллюстрацию и не больше. Но все же некоторые рассуждения, правда не строгие, я хотел бы предпослать.

Замечу прежде всего следующее. На то, что концепция поверхностной волны, распространяющейся при очень больших расстояниях со скоростью, отличной от c, вряд ли правильна, наводили следующие качественные соображения. Если источник находится на поверхности раздела, а поле ищется на больших расстояниях от него на некоторой высоте z над поверхностью, то расчет поля можно сделать, пользуясь принципом взаимности, на основании френелевых формул для плоских волн. При этом получится, конечно, скорость c + некоторая фаза, возникающая при отражении.

Так как расстояние можно взять как угодно большим, а $\frac{z}{r}$ — как угодно малым, то из-за непрерывности при переходе точки наблюдения на поверхность раздела не может набежать такая большая разность фаз, которая соответствовала бы скорости, отличной от c. Значит, если точка наблюдения находится *на* поверхности, скорость не может быть отлична от c. Пока это расплывчато, но можно это несколько оформить. Действительно, к иллюстрации, которую я имею в виду, можно притти при помощи следующих, правда тоже не строгих, но все же более конкретных рассуждений (рис. 1). Источник находится в O. Ищется поле в A. Если и r и z стремятся к ∞, то поле в A, исходящее от диполя в O, можно рассчитать по Френелю для плоских волн [и применяя затем принцип взаимности].

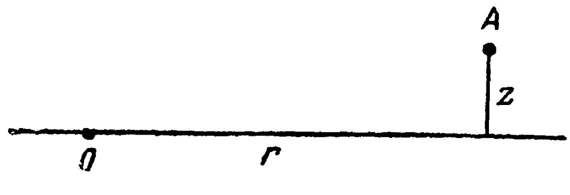


Рис. 1

Пока мы можем сказать, что r и z должны быть велики по отношению к какой-нибудь комбинации из k_0 и k_1. При этом z/r может быть как угодно мало. Но тогда при z/r достаточно малом мы можем написать для Π_0 (Π_0 — вектор Герца в верхней среде)[1]

$$\Pi_0 = \frac{2\varphi}{\psi + \varphi} \frac{e^{ik_0 r}}{r}, \tag{1}$$

где $\varphi = \frac{z}{r}$ [— угол скольжения, т. е. угол падающего луча с плоскостью раздела], $\psi = \frac{k_0}{k_1}$, k — волновое число (комплексное) второй среды. При этом предполагается, что $|k_1| \gg k_0$.

Предположим, что $\frac{z}{r} \ll \frac{k_0}{|k_1|}$ (мы увидим дальше, что это соответствует случаю большого численного расстояния). Тогда имеем

$$\Pi_0 = \frac{2k_1}{k_0} \frac{z}{r} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \tag{2}$$

---

1 [Обозначим угол падающего луча с нормалью через Φ, угол скольжения падающего луча через $\varphi = \frac{\pi}{2} - \Phi$, а угол преломленного луча с нормалью (комплексный) — через ψ. Тогда коэффициент отражения по Френелю равен

$$\frac{\operatorname{tg}(\Phi - \psi)}{\operatorname{tg}(\Phi + \psi)} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \approx \frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi}$$

и, следовательно, вектор Герца результирующего поля будет

$$\Pi_0 = \left(1 + \frac{\operatorname{tg}(\Phi - \psi)}{\operatorname{tg}(\Phi + \psi)}\right) \frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{2\varphi}{\varphi + \psi} \frac{e^{ik_0 r}}{r}.\ ]$$

(r вместо R, так как $\frac{z}{R} \ll 1$). Это наверное правильно для „достаточно больших“ z, поскольку правильны формулы Френеля, а эти последние, конечно, учитывают граничные условия. Но (2) нельзя экстраполировать к $z \to 0$ именно потому, что для этого случая формулы Френеля наприменимы. Более того, легко видеть, что такая экстраполяция наверное неправильна, так как тогда $\frac{\partial \Pi_0}{\partial z}$ для $z = 0$ было бы отлично от нуля, т. е. $\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}$ (где Π_1 — вектор Герца в нижней среде) тоже должно быть отлично от нуля; но при (2) нельзя удовлетворить двум граничным условиям, как это требуется.

Легко, однако, видеть, что при *больших* r выражение

$$\Pi_0 = \frac{2k_0}{k_1} \frac{z + a}{r} \frac{e^{ik_0 r}}{r}, \tag{3}$$

где a — постоянная, во-первых, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Pi_0 + k_0^2 \Pi_0 = 0.$$

Далее, для z очень больших (3) переходит в (2), как это и должно быть и, наконец, в (3) можно подобрать a так, чтобы были удовлетворены и граничные условия. Действительно, положим

$$\Pi_1 = C \frac{2e^{ik_0 r}}{r^2} e^{i\sqrt{k_1^2 - k_0^2}\, z}. \tag{4}$$

При больших r (4) удовлетворяет уравнению $\Delta \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0$. Если теперь положить

$$a = \frac{k_1^2}{ik_0^2 \sqrt{k_1^2 - k_0^2}} \tag{5}$$

и $C = \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^3 a$, то удовлетворены и граничные условия для $z = 0$

$$k_0^2 \Pi_0 = k_1^2 \Pi_1, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}.$$

Конечно, приведенные рассуждения не строги.[1] Результат (3) совпадает (для *больших* ρ) с той апроксимацией, которая получена из строгого решения.

На основании приведенного вывода мы можем описать это решение так. Поле в точке на высоте z над поверхностью раздела от диполя, находящегося *на* поверхности раздела, такое, какое было бы,

---

[1] [Строгий вывод см. у Л. М. Бреховских. Изв. АН, сер. физ., **12**, № 3, 329, 1948.]

если считать, что излучатель находится на высоте *a над* поверхностью раздела и если к этому случаю применить обычные формулы Френеля. Правда, при этом a нужно считать комплексной величиной. В этой формулировке и заключается упомянутая выше иллюстрация. Наглядности ее несколько мешает то обстоятельство, что „высота" a комплексна.[1] Впрочем, поскольку дело идет только о том, чтобы сохранить в иллюстрации все основные черты поля, эту высоту можно считать действительной и равной $|a|$. Тогда фаза „иллюстрации" несколько отлична от фазы настоящего решения.

Теперь можно итти и дальше. Если в (1) взять для φ значение a/r, где a, согласно (5), есть

$$a=\frac{k_1}{ik_0^2}\qquad(|k_1|\gg k_0),$$

то мы получим для Π_0 следующее выражение:

$$\Pi_0=\frac{2}{1+i\dfrac{k_0^3 r}{k_1^2}}\,\frac{e^{ik_0r}}{r}\,. \tag{6}$$

Это есть поле диполя, находящегося на высоте a над поверхностью раздела, если рассчитать это поле при помощи формул Френеля, причем (6) уже не ограничено условием предельно „большого" расстояния (предполагается только, что угол φ мал, а это, как мы увидим, гораздо менее жесткое предположение). Теперь легко видеть, что значит предельно большое расстояние. Действительно (6) переходит в $\frac{2k_1^2}{ik_0^3 r}\,\frac{e^{ik_0r}}{r}$, если $\rho=\frac{k_0^3 r}{2|k_1|^2}$ велико. А это не что иное, как численное расстояние. Наоборот, для $\rho\ll 1$: $\Pi_0=\frac{2e^{ik_0r}}{r}$, что соответствует строгому решению для этого случая.

Итак, выражение (5) соответствует такой теоретической картине: *диполь находится над поверхностью раздела на высоте a; поле в какой-нибудь точке поверхности или над поверхностью складывается из шаровой волны, исходящей из этого диполя, и отраженной волны, рассчитанной при помощи френелевых формул.* Сравнение „иллюстрации" с действительным решением показывает, что, во-первых, в картину вполне естественным образом входит „численное расстояние" ρ, причем получаемые здесь поля при $\rho\ll 1$ и при $\rho\gg 1$ совпадают с действительным, т. е. с теми, которые дает теория для диполя, помещенного *на* поверхности раздела.

[1] [a действительно только при большой проводимости нижней среды.]

Далее, для промежуточных значений ρ выражение (6) дает значения, несколько отличные (до 70%) от действительных. Но структура поля в главных чертах, т. е. величина скорости распространения фазы, характер зависимости амплитуды от расстояния и, как мы сейчас увидим, наклон E для больших расстояний даются выражением (6) совершенно правильно. Поэтому выражение (6) и соответствующая ему картина, формулированная выше, действительно, по нашему мнению, могут служить иллюстрацией для структуры интересующего нас поля.

„Наклон" [электрического вектора] получается из (3) непосредственно. Действительно, $E_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right)$, $E_r = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r \partial z}$. Отсюда по (3) при $r \to \infty$ и $z = 0$

$$\frac{E_r}{E_z} = -\frac{k_1}{k_0},$$

что соответствует и Ценнеку и действительному решению.

Еще одно небольшое замечание. Из выражения (1) видно, чему соответствует в оптике численное расстояние Зоммерфельда. Амплитуда отраженной волны пропорциональна $\frac{\operatorname{tg}(\Phi - \psi)}{\operatorname{tg}(\Phi + \psi)} \approx \frac{\varphi - \psi}{\varphi + \psi}$, где под φ мы подразумеваем дополнение угла падения до $\frac{\pi}{2}$. При сделанных выше предположениях φ мало; ψ комплексно, но, ввиду $|k_1| \gg k_0$, $|\psi|$ мало. Из предыдущего [см. (6)] следует, что в нашей „иллюстрации" роль численного расстояния играет отношение $\frac{\varphi}{|\psi|}$, причем смысл этого отношения (а тем самым и численного расстояния) обнаруживается весьма наглядно.

При $\varphi \gg |\psi|$ амплитуда отраженной волны по формуле тангенсов приблизительно равна амплитуде падающей волны, так что обе складываются. Результирующее поле в первом приближении не зависит от свойств почвы и соответствует случаю абсолютного проводника. Это случай малого численного расстояния.

При $\varphi \ll |\psi|$ амплитуда отраженной волны *приблизительно* равна по величине и противоположна по знаку амплитуде падающей волны. Поэтому результирующая амплитуда оказывается следующего порядка малости относительно расстояния r; фаза результирующей волны отлична от фазы падающей. Это область больших ρ.

Заметим еще следующее. В учебниках оптики обычно указывается, что при скользящем падении амплитуда отраженной от металлической поверхности волны равна по величине и обратна по знаку амплитуде падающей, и это справедливо, независимо от оптических постоянных металла. Но, с другой стороны, из независимых соображений известно, что в случае абсолютного проводника отраженная волна совпадает и по величине и по знаку с падающей. Это кажущееся противоречие разрешается, конечно, очень просто. Все зависит от отношения $\frac{\varphi}{|\psi|}$. При $\frac{\varphi}{|\psi|} \ll 1$ мы имеем первый случай, при $\frac{\varphi}{|\psi|} \gg 1$ — второй. Когда говорят о скользящем падении, то в формуле тангенсов переходят к пределу $\varphi = 0$ при $\psi \neq 0$. Наоборот, когда разбирают случай идеального отражателя, переходят к пределу $\psi = 0$ при отличном от нуля значении φ. Как мы уже выше сказали, отношению $\frac{\varphi}{|\psi|}$ в обычных оптических рассуждениях соответствует в нашем случае „численное расстояние".

Последнее замечание касается „наклона" поля. Для больших ρ амплитуда результирующего поля E_z равна

$$A\left(1 + \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}\right),$$

где A — амплитуда падающей сферической волны. Так как φ и ψ малы, то $E_z = A\frac{2\varphi}{\varphi + \psi}$ (сравн. [формулу (1) для вектора Герца при малых φ, причем $E_z = -k_0^2 \Pi_0$]). Но A само обратно пропорционально r, $\varphi = \frac{a}{r}$, так что, при $\frac{\varphi}{|\psi|} \ll 1$, E_z обратно пропорционально r^2. Компонента E_r падающей волны, очевидно, пропорциональна $A\varphi$ (как проекция вектора, перпендикулярного пространственному радиусу-вектору, на направление цилиндрического радиуса-вектора r). Но, в противоположность E_z, компонента E_r отраженной волны имеет тот же знак и равна по величине r-компоненте поля падающей волны. Отсюда результирующее E_r пропорционально $\frac{1}{r^2}$, т. е. отношение E_r/E_z от r не зависит. Как мы видели выше, оно равно $-k_0/k_1$.

Может, конечно, возникнуть вопрос о целесообразности подробного теоретического анализа рассмотренного нами случая, и именно потому, что заранее видно, что область практического применения такой положенной в основу расчета схематизации чрезвычайно ограничена. Действительно, неучет кривизны земли, с одной стороны, неучет роли ионосферы, с другой, ограничивают (обусловливают) применимость результатов при волнах среднего диапазона расстояниями, не превышающими 150—200 км. Уместен также вопрос о ценности „иллюстрации" для этого случая. И тем не менее, мне кажется, что такой анализ и даже стремление придать его результату некоторую наглядность, как мы старались это сделать выше, имеет свое оправдание.

Во-первых, вопрос об измерении при помощи радиоволн расстояний указанного порядка, несомненно, представляет чисто практический интерес. Например, при измерении расстояний и при решении относящихся сюда вопросов очень важно иметь правильное и возможно наглядное представление о механизме распространения.

С другой стороны, вопрос, как мне кажется, представляет и некоторый общий (теоретический) интерес, независимо от практического применения в радиотехнике по следующим соображениям. Концепция поверхностной волны в проблеме распространения радиоволн возникла и, если так можно выразиться, культивировалась не случайно. Несомненно, при этом играла роль аналогия с поверхностными волнами в других областях.

Зоммерфельд, например, говорит следующее (Ph. Frank u. R. v. Mises, стр. 930, 2-е нем. изд.):

„Мы рассмотрим теперь выражения (28a), (28b) для P подробней и покажем, что они должны быть охарактеризованы как *поверхностные* волны, подобно водяным волнам и известным сейсмическим явлениям и в противоположность обычным оптическим и акустическим волнам, которые мы назвали *пространственными*".

Выражения (28a, b) таковы:

$$\left.\begin{aligned} P&=\sqrt{\frac{2\pi i}{hr}}\,\frac{2k_1^2}{K}\,e^{ihr-\sqrt{h^2-k_0^2}\,z}, \\ P&=\sqrt{\frac{2\pi i}{hr}}\,\frac{2k_0^2}{K}\,e^{ihr+\sqrt{h^2-k_1^2}\,z}, \end{aligned}\right\} \qquad K=\frac{k_1^2}{\sqrt{h^2-k_0^2}}+\frac{k_0^2}{\sqrt{h^2-k_1^2}}.$$

Свойства поверхностной волны, так называемой волны Релея, на свободной поверхности упругого тела хорошо изучены. Волна этого типа возникает всегда при землетрясениях; теоретически было показано, что, например, при точечном поверхностном возбуждении она действительно возбуждается.

Говоря совершенно схематично, мы можем, указав на схему рассуждений, которыми ее возможность показывается, охарактеризовать плоскую поверхностную волну между прочим так. Пусть на плоскую поверхность, ограничивающую упругое тело, падает плоская, например продольная, волна. Мы допускаем, что направляющие косинусы могут быть и мнимыми. Тогда, вообще говоря, возникают *две* отраженные волны — продольная и поперечная. Но есть такие значения направляющих косинусов волны, при которых для удовлетворения граничным условиям достаточно *двух*, а не трех плоских волн. Совокупность этих двух волн, если эти волны суть волны с ограниченными при $z = \pm \infty$ (z — координаты, перпендикулярные к поверхности раздела) смещениями, мы называем поверхностной волной.

Нужно заметить, что именно это свойство поверхностной волны обусловливает то, что амплитудная функция добавочного комплекса волн, который нужно присоединить к „возбуждающему" комплексу для удовлетворения граничным условиям, имеет полюс для значения волнового числа, соответствующего поверхностной волне. (Это значение обращает в нуль детерминант системы двух линейных однородных уравнений, получающихся при разыскании амплитуды двух волн, совокупность которых удовлетворяет граничным условиям.)

Именно благодаря наличию полюса и выделяется („возникает") поверхностная волна, например при землетрясении (см., например, статью С о б о л е в а в книге Франка и Мизеса, русск. пер., стр. 566).

Но совершенно на первый взгляд аналогичная постановка вопроса ведет к установлению поверхностной волны в электрическом случае. По существу, как уже указывалось выше, это и есть ценнековская постановка.

Однако мы видели, что в комплексе волн, возбуждаемом диполем, находящимся на поверхности земли, в случае беспроволочной телеграфии поверхностная волна *не* играет роли. Более того, при той трактовке, которой пользуется, например, ван-дер Поль, вопрос о поверхностной волне вовсе и не возникает, не говоря уже о случае идеального проводника, где решение элементарно и где опять нет и речи о поверхностной волне. Нам кажется небезинтересным выяснить, чем обусловливается такая разница в электрическом случае, с одной стороны, и „упругом", с другой.

Сюда присоединяется еще одно обстоятельство. С наличием поверхностной волны мы связываем направляющее действие поверхности. Например, убедившись в наличии поверхностной волны в случае *плоской* поверхности, ограничивающей упругое тело, мы считаем, что аналогичные волны будут распространяться и вдоль сферической поверхности.

Зоммерфельд считал, например, раньше, что загибание электромагнитных волн за видимый горизонт обусловливается наличием поверхностной волны, которое он считал тогда доказанным для плоской поверхности. Впоследствии, т. е. после того как он убедился в „невыделимости“ поверхностной волны, он от такого объяснения отказался (см. цитату на стр. 373).

Известно далее, что в электрическом случае, например в цилиндрическом проводе, тоже могут существовать поверхностные волны. С другой стороны, направляющее действие проводов существует. Здесь поверхностные волны, очевидно, играют существенную роль. Таким образом, появляется дальнейший вопрос: почему при обычной постановке опытов с электрическими проводами поверхностные волны опять играют основную роль в противоположность случаю диполя на плоскости?

Для дальнейшего уместно заметить следующее. В случае цилиндрической симметрии сказанное выше относительно плоских поверхностных волн переносится на „цилиндрические“ поверхностные волны, т. е. на совокупность двух цилиндрических волн, удовлетворяющих уравнениям и граничным условиям.

Обращаясь к сравнению случая электрического диполя вблизи плоской границы двух однородных сред со случаем точечного возбуждения вблизи поверхности упругого тела, мы сначала вкратце приведем расчет для этого последнего случая.

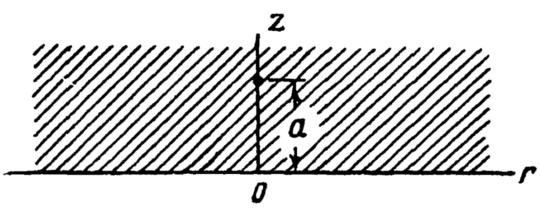


Рис. 2

Пусть упругая среда занимает верхнее полупространство. В точке O (рис. 2) находится источник колебаний. Мы его характеризуем тем, что: 1) векторный потенциал в O не имеет особенности и 2) скалярный потенциал φ удовлетворяет условию: при $r\to 0$, $z\to 0$

$$\varphi\to\frac{e^{ik_0R}}{R},$$

где k_0 — волновое число для продольных волн, $R^2=r^2+z^2$.

Ввиду цилиндрической симметрии, мы можем считать (в цилиндрических координатах r, z, ϑ, где ϑ — азимут), что только одна ϑ-компонента векторного потенциала, а именно ψ_ϑ отлична от нуля. В дальнейшем индекс ϑ мы опускаем.

Опуская также множитель $e^{i\omega t}$, мы можем написать

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+k_0^2\varphi=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_1^2 \psi = 0, \tag{2}$$

где k_1 — волновое число для поперечных волн. [Второе уравнение отличается от обычного волнового наличием члена $-\frac{\psi}{r^2}$ ввиду того, что ψ есть ϑ-компонента векторного потенциала.]

Граничные условия для $z=0$ (отсутствие напряжений на свободной границе) дают

$$\Lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + 2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right) + (\Lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = 0. \tag{4}$$

[Здесь Λ и μ — постоянные Ламе.]

Как известно,

$$\frac{\Lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{k_1^2}{k_0^2}. \tag{4'}$$

Мы наверное удовлетворим уравнениям (1) и (2), если положим

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ae^{\pm\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} f(r), \\ \psi &= Be^{\pm\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z} \frac{\partial f(r)}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \lambda^2 f = 0. \tag{6}$$

[Здесь λ — некоторый параметр], A и B могут быть функциями от λ.

Мы сможем найти „поверхностную" волну, если поставим вопрос: существует ли такое λ, чтобы выражения (5) (с одним из знаков при корне) удовлетворяли бы граничным условиям (3) и (4) ?

Принимая во внимание (6) [и учитывая (4')], мы получим из (3) и (4) следующие уравнения для A и B

$$(2\lambda^2 - k_1^2) A + 2\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, B = 0, \tag{7}$$

$$2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, A + (2\lambda^2 - k_1^2) B = 0. \tag{8}$$

Отсюда для λ и получается уравнение Релея для цилиндрической поверхностной волны

$$(2\lambda^2 - k_1^2)^2 - 4\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = 0. \tag{9}$$

Дискуссию этого уравнения см., например, в статье С. Л. Соболева (Франк и Мизес, русск. пер., стр. 488 и сл.). Уравнение (9) имеет при действительных k_0^2 и k_1^2 один действительный корень λ_0^2

$$\lambda_0^2 > k_1^2 > k_0^2.$$

Теперь предположим, что в точке $r = 0$, $z = a$ задано точечное возбуждение

$$\varphi_0 = \frac{e^{ik_0 R}}{R},$$

где

$$R^2 = r^2 + (z - a)^2.$$

Мы имеем интегральное представление

$$\varphi_0 = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} e^{\pm\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}(z-a)} d\lambda. \tag{10}$$

[Перед корнем в показателе знак + при $z < a$ и — при $z > a$.]

Для удовлетворения граничным условиям мы прибавляем

$$\varphi = \int_0^\infty f_0(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z} d\lambda, \tag{11}$$

$$\psi = \int_0^\infty f_1(\lambda) \cdot J_0'(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} d\lambda. \tag{12}$$

Подставляя это в условия (3) и (4), получаем для определения $f_0(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ следующие уравнения

$$\left.\begin{aligned} (2\lambda^2 - k_1^2)\left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}a} + f_0(\lambda)\right] + 2\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} f_1(\lambda) = 0, \\ -2\lambda e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}a} + 2f_0(\lambda)\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + (2\lambda^2 - k_1^2) f_1(\lambda) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

откуда

$$f_0(\lambda) = \frac{\lambda e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}a}}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \frac{(2\lambda^2 - k_1^2)^2 + 4\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{(2\lambda^2 - k_1^2)^2 - 4\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}. \tag{14}$$

Из (14), с одной стороны, и (10), с другой, мы получаем значение для φ и точно так же из (12) — для ψ.

Дискуссия интеграла показывает следующее. Подинтегральная функция имеет полюс для некоторого λ_0, служащего корнем уравнения

$$(2\lambda^2 - k_1^2)^2 - 4\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = 0.$$

Но это уравнение есть не что иное, как уравнение (9) „релеевской волны".

Легко видеть, что для очень больших r интегралы (11) и (12) можно найти, взяв значение вычета у корня λ_0 уравнения (15) — единственного действительного корня [при действительных k_0 и k_1]. Для больших r эта часть интеграла для φ и ψ, как сейчас будет видно, имеет доминирующее значение.

Рассуждать нужно так: интеграл берется по пути a или b (рис. 3). (Сейчас я решать этого не буду, но во всяком случае — по одному из них.)

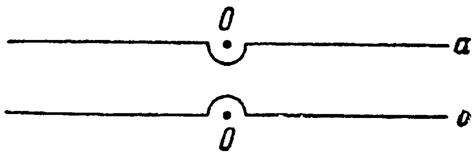


Рис. 3

Для больших r

$$J_0(\lambda r) = \mathrm{const}\,\frac{e^{i\lambda r} + e^{-i\lambda r}}{\sqrt{r}}.$$

Таким образом, мы имеем сумму двух интегралов — один с $e^{i\lambda r}$ другой с $e^{-i\lambda r}$. В первом мы можем перенести путь интегрирования, вниз, в бесконечность, и ни за что не зацепимся. Так как на всем пути под интегралом входит e^{-k}, где действительная часть k положительна, подинтегральное выражение стремится в бесконечности к нулю и поэтому этот интеграл ничего не даст. Во втором интеграле переведем путь в верхнюю полуплоскость. Здесь путь зацепится за точку λ_0, где знаменатель обращается в нуль; взяв вычет, мы получим для $r \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{r}}\, e^{-i\lambda_0 r - \sqrt{\lambda_0^2 - k_0^2}\, z}, \\ \psi &= \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{r}}\, e^{-i\lambda_0 r - \sqrt{\lambda_0^2 - k_1^2}\, z}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Это и есть поверхностные волны. Зацепление пути интегрирования в точках $\lambda = k_0$ и $\lambda = k_1$ даст значения, *обратно* пропорциональные первой степени расстояния. Мы, таким образом, получили отраженные „пространственные" волны φ и ψ и затем поверхностные, которые убывают как $1/\sqrt{r}$ и поэтому для больших расстояний доминируют.

Обратимся теперь к электрическому случаю. Для сравнения с упругим случаем нужно сопоставить решение (11), (12) и (14) упругого случая с хорошо известным решением для электрического вертикального диполя, помещенного на высоте a над поверхностью раздела. Для этого случая „добавочный" вектор Герца в верхней среде будет

$$\Pi = \int\limits_0^\infty f_0(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, d\lambda, \qquad (16)$$

где

$$f_0(\lambda) = \frac{\lambda e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a}}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} \cdot \frac{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}-k_0^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}+k_0^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}, \tag{17}$$

причем интегрирование, как и в упругом случае, идет по действительной оси. Это потому, что тождество, из которого исходят при представлении решения в виде интеграла, имеет вид

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\lambda r)\, e^{\mp\sqrt{\lambda^2-k^2}\,z}\, d\lambda$$

и справедливо именно тогда, когда интеграл берется по действительной оси.

Первый и основной вопрос для выяснения соотношения между упругим случаем и этим, это вопрос о том, имеет ли подинтегральное выражение в (16), или, что то же самое, имеет ли $f_0(\lambda)$ полюс в промежутке $(0, \infty)$, причем для сходимости (16), так как здесь $z > 0$, необходимо, чтобы действительная часть $\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ была положительной.

Далее, (17) получается, если вектор Герца в нижней среде написать в виде

$$\Pi_1 = \int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r)\, e^{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,z}\, d\lambda,$$

т. е. опять предполагается (так как здесь $z < 0$), что $\sqrt{\lambda^2-k_1^2}$ тоже имеет положительную действительную часть. Необходимое условие того, чтобы знаменатель в (17) обращался в нуль, есть

$$\lambda^2 = \frac{k_0^2 k_1^2}{k_1^2+k_0^2}, \tag{18}$$

т. е., если k_0^2 и k_1^2 оба или, как это имеет место на практике, один из них комплексны, то вообще на действительной оси нет полюса. К этому вопросу мы сейчас вернемся, но прежде всего посмотрим, как обстоит дело в случае действительных k_0^2 и k_1^2. Тут, очевидно, оба слагаемых в знаменателе (17) при λ^2, равном (18), имеют один и тот же знак. Это видно хотя бы из следующих соображений: при $k_0^2 = k_1^2$ это наверное так, потому что решение должно обратиться в e^{ik_0R}/R и при этом корни не равны нулю. Изменяя непрерывно k_1^2, мы не получим изменения знака. Покажем это еще и иначе, так как сказанное не совсем убедительно. Интегралы для Π_0 и Π_1 должны давать волны, *исходящие* из диполя на больших расстояниях, т. е. для больших z и r. Но для этого случая можно найти эти интегралы с помощью метода перевала (при $r \to \infty$ и $z \to \infty$), и тогда выясняется, что для получения *таких* волн корни должны иметь один и тот же знак.

Но важнее тот случай, когда, скажем, и k_0^2 и k_1^2 комплексны. Считая λ^2 действительным и полагая

$$\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} = \sqrt{R_0}\, e^{i\frac{\psi_0}{2}}, \qquad k_0^2 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

где, как известно, $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, мы имеем тогда

$$R_0\cos\psi_0 = \lambda^2 - \rho_0\cos\varphi_0, \qquad R_0\sin\psi_0 = -\rho_0\sin\varphi_0.$$

Отсюда следует, что для $\lambda^2 = 0$, ψ_0 лежит в третьем квадранте, а ввиду требования того, чтобы действительная часть $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ была положительна, $\psi_0/2$ — в четвертом квадранте. То же самое, конечно, справедливо для $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = \sqrt{R_1}\, e^{i\frac{\psi_1}{2}}$. С увеличением λ^2, $\cos\psi_0$ приближается к нулю при отрицательном $\sin\psi_0$, т. е. ψ_0 увеличивается, оставаясь во втором квадранте, т. е. то $\psi_0/2$, которое удовлетворяет требованию положительности действительной части $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, тоже будет увеличиваться, оставаясь в четвертом квадранте.

Но $k_1^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ может либо оставаться в четвертом квадранте, либо перейти в первый; то же относится и к $k_0^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$. Предположим, например, что в k_0^2 и $k_1^2 = \lambda^2 - R_1 e^{i\psi_1}$ мнимая часть мала (малая абсорбция). Тогда ψ_0 и ψ_1 лежат в начале третьего квадранта, а $\psi_0/2$ и $\psi_1/2$ — в начале четвертого. Ввиду малости φ_0 и φ_1 ни $k_1^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, ни $k_0^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ не перейдут в первый, т. е. оба слагаемые в знаменателе выражения (17) имеют положительную действительную часть и в нуль на действительной оси не обращаются.

Таким образом, коренная разница между упругим случаем и случаем электрическим формально заключается в следующем. В случае упругих волн подинтегральная функция в интеграле, дающем поле (потенциалы, вектор Герца), „возбуждаемое" падающей от диполя волной, имеет полюс (интегрирование идет и должно итти по действительной оси). В случае же электрическом подинтегральная функция полюса не имеет.

Действительно, если и k_0^2 и k_1^2 действительны, оба слагаемые в знаменателе подинтегральной функции имеют один и тот же знак.

В случае $k_1^2 \to \infty$ числитель и знаменатель имеют одинаковый корень (так как одно слагаемое равно нулю). При k_1^2 комплексном корень знаменателя комплексен, т. е. на действительной оси полюса никогда нет.

Если же, как делает Зоммерфельд, перенести интегрирование в комплексную плоскость, то выделяется член, соответствующий полюсу. Но тогда это „поверхностная" волна, затухающая и по r, т. е. при $r \to \infty$ она перестает играть роль, а, кроме того, коэффициент при ней таков, что ни при каких расстояниях она не доминирует. В упругом случае, как мы видели, дело обстоит иначе: именно в виду отсутствия затухания при $r \to \infty$, т. е. ввиду наличия полюса на действительной оси, остается *одна* поверхностная волна для больших r. Нужно еще заметить, что при действительных k_0^2 и k_1^2 или при $k_1^2 \to \infty$ само понятие „поверхностной" волны в электрическом случае не имеет смысла. Правда, формально, если определить поверхностную волну как решение типа $e^{i(\alpha x+\beta z)}$, состоящее только из *двух* волн (одной в верхней среде и одной — в нижней), удовлетворяющее граничным условиям, то такое решение существует при действительных k_0^2 и k_1^2; это решение соответствует волне, падающей под углом Брюстера (отсутствие третьей (отраженной) волны). Но совокупность падающей и преломленной волны вряд ли целесообразно называть поверхностной волной. Соответствующая совокупность в упругом случае имеет то свойство, что при отсутствии затухания обе волны затухают по вертикали. В электрическом случае этого нет. Поэтому здесь если рассмотреть, например, не плоскую, а цилиндрическую волну, то можно сказать, что энергия сосредоточена в цилиндрическом слое, в силу чего между прочим поле убывает как $1/\sqrt{r}$. В электрическом же случае поле тоже убывает как $1/\sqrt{r}$, но здесь это обычная цилиндрическая волна, амплитуда которой от высоты *не* зависит.

К пониманию разницы между упругим и электрическим случаями можно подойти и с другой стороны.

Рассмотрим плоскую волну, *падающую* на поверхность раздела в электрическом случае или на граничную поверхность, в упругом случае. Нам придется рассматривать и такие плоские волны, для которых направляющий косинус (относительно вертикали) может быть мнимым. Во всех случаях можно установить понятие „падающей на поверхность волны". В самом деле, в случае действительного косинуса — это обычное понятие, определяемое при помощи рассмотрения направления изменения фазы $[f(\alpha x + \beta z - vt)$, распространение в направлении положительного или отрицательного в зависимости от знака β]. В случае же мнимого β направление распространения по определению есть то направление, в котором амплитуда (экспоненциально) уменьшается. Точно так же легко видеть, что значит отраженная волна: преломленная волна в смысле направления *от* границы.

Излучение диполя можно представить как суперпозицию плоских волн. Задача о распространении сводится к тому, чтобы найти отраженные и преломленные волны, соответствующие плоским волнам, содержащимся в комплексе плоских волн, составляющем излучение диполя, и падающим *на* границу. Затем нужно сложить все отраженные волны и сложить все преломленные волны. Это тот путь, которым шел, например, Вейль при своем методе интегрирования уравнений для решения задачи об излучении диполя.

В электрическом случае каждой без исключения плоской волне указанного выше типа соответствует одна отраженная и одна преломленная волна. В специальном случае (k_0^2 и k_1^2 действительны и угол падения — брюстеровский угол) амплитуда отраженной волны равна нулю. Этот случай соответствует поверхностной волне в вышеуказанном определении, но для нашей задачи он ничем особенным не отличается от всех остальных.

Иное дело в упругом случае. Там есть такие значения α и β, при которых *обе отраженные* волны (соответствующие обоим потенциалам) сами по себе удовлетворяют граничным условиям. Это и есть поверхностная волна. Но здесь существует, таким образом, в комплексе излучения диполя такая падающая плоская волна, которая для удовлетворения граничным условиям не может быть компенсирована, так как здесь при этих значениях α и β уже отраженные волны компенсируют друг друга. Поэтому здесь получается нечто вроде резонанса и отсюда появляется полюс, отсюда происходит выделение поверхностной волны.

Можно кратко сформулировать различие так: определяем „поверхностную волну" как комплекс двух (а не трех) волн, удовлетворяющих граничным условиям. Тогда (при действительных k_0^2 и k_1^2) в упругом случае поверхностная волна состоит из двух отраженных волн (что соответствовало бы отраженной + преломленная), в электрическом же — из падающей + преломленная.

Мы видим, таким образом, что в отношении поверхностной волны аналогии между электрическим и упругим случаем нет. В электрическом случае (и в упругом при двух средах и при падении поляризованной волны со смещением, параллельным плоскости раздела) в сущности нет аналога поверхностной волны.

При отсутствии затухания вообще нет ничего похожего на поверхностную волну [есть волна, падающая под углом Брюстера, или цилиндрическая волна типа $H_0^{(1)}(k_0 r)$]. В случае комплексного k_1^2 или обоих комплексных k_0^2 и k_1^2 есть волна, формально напоминающая поверхностную волну, но она во всяком случае для диполя над плоской поверхностью не возбуждается специально. Кроме того, она принципиально затухает по r (так как она существует именно лишь при комплексном k_1^2). Значит, как раз то обстоятельство, которое в обычном упругом случае играет главную роль, а именно что на больших расстояниях поверхностная волна доминирует, здесь вследствие затухания отпадает, потому что от диполя есть волна, амплитуда которой уменьшается как $1/r$.

Нам остается рассмотреть еще один вопрос. Мы привыкли считать, что проводники „направляют" поле. Это направляющее действие привлекалось — в те времена, когда в ходу была концепция поверхностной волны в зоммерфельдовском случае — для объяснения, например, преодоления кривизны земли. Но мы видели, что в случае плоской границы раздела и возбуждения диполем „поверхностной" волны не существует (если отвлечься от возможности представить решение при комплексной k_1^2 в виде суммы $Q_1 + Q_2 + P$, где P соответствует поверхностной волне, но не доминирует. Поэтому такое разложение формально и только формально. Как сказано выше, всегда можно написать всякое выражение как сумму слагаемых, из которых, например, одно наперед задано. Физического смысла такое разложение, конечно, не имеет.

Когда мы говорим о направляющем действии проводов, мы имеем в виду, скажем, систему Лехера или кабель, или, может быть, хотя это экстраполяция — один провод. Желательно посмотреть, с чем связано направляющее действие (обычное) — с цилиндрической ли формой или со способом возбуждения, или с наличием обратного провода.[1]

---

[1] Невозможность возбуждения „поверхностной" волны „линией диполей" над абсолютно проводящей плоскостью очевидна из следующих соображений. В этом случае „поверхностная" волна представляет собой не что иное, как волну с электрическим вектором, перпендикулярным к поверхности, величина которого (как и магнитного вектора) от высоты не зависит. Скорость распространения равна c. Но для такой волны энергия между двумя плоскостями $x = a$ и $x = a + h$ бесконечна. Фронт волны продвигается на кусок $h = ct$ и за конечное время прибавляется энергия в слое $h = ct$, т. е. прибавляется беско-

Возьмем сначала следующий случай. (Для решения вопроса о направляющем действии достаточно, вероятно, рассмотреть случай абсолютных проводников, хотя уверенности в этом нет. Но мы так сделаем).

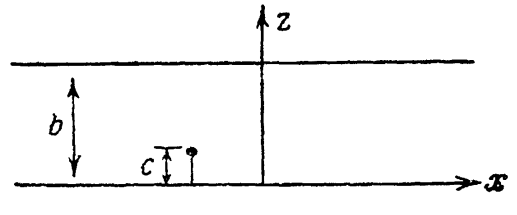


Рис. 4

Две параллельные проводящие плоскости (рис. 4). Возбуждение осуществляется „линией диполей“, проходящей на высоте c и перпендикулярной к плоскости чертежа. При этом возможны два случая: а) диполи вертикальны и б) диполи горизонтальны.

Разберем сначала первый случай.

Вектор Герца $\Pi = \Pi_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k_0^2 \Pi = 0. \tag{19}$$

Тогда решение задачи дается формулами

$$\left.\begin{aligned} H_y &= ik_0 \frac{\partial \Pi}{\partial x}, & H_x &= H_z = 0, \\ E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \, \partial z}, & E_z &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k_0^2 \Pi = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

нечная величина. Совершенно аналогичная ситуация имеет место для „поверхностной“ волны в случае одного абсолютно проводящего цилиндрического провода. Там в отсеке между двумя плоскостями, перпендикулярными к оси провода, запас энергии логарифмически бесконечен. Таким образом, ясно, что при абсолютной проводимости и на плоскости, и в цилиндрическом проводе „поверхностная“ волна не может быть возбуждаема конечным источником. В случае не абсолютной проводимости этот аргумент отпадает. Поэтому, конечно, желательно было бы разобрать именно этот случай. Для плоскости он разобран (для одного диполя это и есть зоммерфельдовский случай, для дипольной линии решение не представляет никаких затруднений). Для цилиндрического провода это, однако, еще не сделано. Все же дальнейшее рассмотрение абсолютных проводников, как это сделано здесь ниже (с обратным проводом) мне представляется не безинтересным.

Можно отметить следующее. В решении Зоммерфельда (см., например, А. Н. Щукин. Распространение радиоволн, стр. 101, формула (179). Гос. изд. по вопр. радио, 1940) второй член соответствует „поверхностной“ волне, он выделен, как сказано, несколько искусственно, что, например, видно, если внимательно проследить вывод у В. А. Фока в книге Франка и Мизеса; но некоторое основание он, может быть, имеет. Правда, не сам по себе, так как его амплитуда не может сделать его доминирующим. Но амплитуда его стремится к нулю, когда $k_1^2 \to \infty$.

Если мы положим

$$\Pi = \sum_n A_n \cos \lambda_n z \cdot e^{\pm\sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}\, x}, \tag{21}$$

(знак + при $x < 0$, знак — при $x > 0$), то, принимая

$$\lambda_n b = n\pi, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

мы удовлетворим граничным условиям $E_x = 0$ для $x = 0$ и $x = b$. Ввиду (21) и (20) H_y испытывает разрыв для $x = 0$, т. е. мы задаем в плоскости $x = 0$ поверхностные токи, направленные по оси z и являющиеся функцией z. В силу того, что токи зависят от z, должно быть накопление зарядов, т. е. E_x, вообще говоря, тоже претерпевает разрыв. Это так и есть для нашего решения, как видно из (20) и (21). При этом разрывы для E_x и H_y связаны, как можно убедиться, нужным образом.

Пусть задано

$$(H_y)_{x=-0} - (H_y)_{x=+0} = f(z).$$

Тогда из (20) и (21) имеем

$$2ik \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2} \cos \lambda_n z = f(z),$$

откуда, ввиду (22)

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2k_0^2 b} \int_0^b f(z)\, dz, \\ A_n &= \frac{1}{ik_0 \sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}\, b} \int_0^b f(z) \cos \lambda_n z dz \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и для $x > 0$

$$H_y = -ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2} \cos \lambda_n z\, e^{-\sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}\, x}. \tag{24}$$

Представим себе теперь, что $f(z) = \delta(z - c)$, т. е., как это было предположено, возбуждение производится линией вертикальных диполей на высоте c. Тогда из (23) получаем

$$A_0 = \frac{1}{2k_0^2 b}, \qquad A_n = \frac{\cos \lambda_n c}{ik_0 b \sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) сразу видно следующее. Наш обычный случай тот, когда длина волны велика по сравнению с расстоянием между проводниками, $1/k_0 \gg b$. В этом случае в ряде (24) [сравн. (22)] уже член с $\cos\lambda_1 z$ имеет фактор $e^{-\rho x}$, где $\rho = \sqrt{\lambda_1^2 - k_0^2}$ — действительная величина. Остается только член с A_0, $\Pi = A_0 e^{ik_0 x}$; это и есть обычное решение для двухпроводной линии. Наличие этого решения обусловлено именно присутствием второй поверхности.

Имея по формулам (25) значения для A_0 и A_1, мы можем написать по (21) явное выражение для Π. Так как мы хотим перейти к случаю $b \to \infty$, т. е. перейти от ряда к интегралу, то при переходе к пределу, ввиду наличия фактора $1/b$, член с A_0 можно отбросить. Имеем тогда:

$$\Pi = \text{const} \sum \frac{1}{b} \frac{\cos\lambda_n c \cos\lambda_n z}{\sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}} e^{-\sqrt{\lambda_n^2 - k_0^2}\, x}.$$

Замечая, что по (22) $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \pi/b$, получаем для $b \to \infty$:

$$\Pi = \text{const} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cos\lambda(c-z)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, x}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} + \int_0^\infty \frac{\cos\lambda(c+z)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, x}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \right\} \tag{26}$$

(const — зависит от силы диполей, входящей в $f(z)$).

Но легко показать (см. Франк и Мизес), что интегралы суть не что иное, как $H_0^{(1)}(r)$, где соответственно $r = \sqrt{x^2 + (c \mp z)^2}$, конечно, с точностью до численного (нормировочного) фактора. Оно так и должно быть, так как вектор Герца для дипольной линии и должен обратиться в $H_0^{(1)}(r)$. Итак, в (26) мы имеем падающую + + отраженную от абсолютного проводника цилиндрическую волну, что, конечно, известно из элементарных соображений. С увеличением b известная нам „направляемая“ волна, т. е. нулевой член разложения, скажем (21) с коэффициентами (25), как видно из (25), стремится к нулю. Отсюда, по-моему, ясно видно, как для этого случая совершается переход от знакомого нам направляющего действия проводников к случаю *одной* поверхности раздела.

На следующих страницах разобран случай кабеля, причем при переходе к $b \to \infty$ предположено, что и a и c значительно меньше длины волны.[1]

---

[1] [Дальше Л. И. Мандельштам рассматривает случай коаксиального кабеля (радиус внутреннего проводника a, радиус внешнего b), возбуждаемого кольцом диполей, радиально направленных и находящихся на окружности радиуса c. Из найденного решения, путем перехода к пределу $b \to \infty$, он получает решение задачи о возбуждении однопроводной линии кольцом диполей. Он находит, что амплитуда возбуждения волны убывает на больших расстояниях как $1/\ln|x|$, где x — расстояние от плоскости диполей.

Итак, для провода, во всяком случае когда его радиус много меньше длины волны, т. е. $a \ll 1/k$, *есть направляющее действие*, выражающееся в том, что вблизи провода амплитуда убывает как $1/\ln|x|$. В случае плоскости этого направляющего действия нет. Интересно проследить переход от $a \ll 1/k$ к $a \gg 1/k$.

При неполной проводимости возможно, что есть область значений x, в которой решение изображается обычной поверхностной волной Зоммерфельда с соответствующим затуханием.

Мы не приводим этих выкладок, так как они сохранились в черновиках только частично и восстановить их полностью затруднительно. Заметим, что упомянутый, важный для дальнейшего заключения результат был затем независимо найден и опубликован в работе В. В. Владимирского (Изв. АН, сер. физ., **8**, 139, 1944).]

74

[ОБ ЭНЕРГИИ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ][1]

Обычные изложения вопросов, относящихся к самому понятию энергии в квантовой механике, к „соотношению неопределенности“ между энергией и временем, и, наконец, изложения закона сохранения энергии не могут считаться удовлетворительными.

Не только у разных авторов, но иногда у одного и того же автора можно найти существенно различные, часто исключающие друг друга утверждения, не говоря уже о том, что эти утверждения иногда носят расплывчатый характер.

Наконец, положения, которыми пользуются при трактовке тех или иных конкретных случаев (например, применение закона сохранения энергии при упругих соударениях) не связываются с достаточной последовательностью с основным формализмом квантовой механики и вытекающими из него общими положениями, а фигурируют как некоторые самостоятельные положения.

Этим отсутствием последовательности и цельности может быть, повидимому, объяснен тот, на первый взгляд странный и во всяком случае требующий объяснения факт, что, исходя из противоположных общих положений, различные авторы приходят в конкретных случаях к одинаковым результатам.

---

[1] [Под этим названием здесь публикуется содержание одной из тетрадей Л. И. Мандельштама; работа относится к периоду его пребывания в Боровом и затем в Москве (см. сноску на стр. 366). В фигурных скобках даны вставки из других тетрадей, содержащих более ранние варианты рукописи. Помещаемый материал лишь в очень малой степени повторяет содержание статьи 49 (том II). Материал обработан И. Е. Таммом.]

Основными вопросами можно, повидимому, считать три следующих:

1) Вопрос о самом понятии энергии.

2) Смысл соотношения неопределенности $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h$.

3) Содержание (и условия применимости) закона сохранения энергии.

Я приведу несколько цитат, чтобы показать, что в этих вопросах разногласие во взглядах весьма велико.

Д. Ландау и Р. Пайерлс:[1] „Это соотношение [имеется в виду $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h$] очевидно *не* означает, что энергия в некоторый определенный момент времени не может быть точно известна (иначе понятие энергии вообще не имело бы никакого смысла); оно также *не* означает, что энергия не может быть с любой точностью измерена в пределах короткого промежутка времени...“

Смысл соотношения $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h$ Ландау и Пайерлс видят в следующем. Пусть E и E' — энергия измеряемой системы, ε и ε' — энергия аппарата до и после взаимодействия. Тогда „практически по истечении времени Δt играют роль только такие переходы, для которых

$$|E + \varepsilon - E' - \varepsilon'| \sim \frac{h}{\Delta t} \cdot \tag{1}$$

Разумеется этот факт никоим образом не противоречит строгой справедливости закона сохранения энергии в волновой механике, но энергия взаимодействия между системой и аппаратом является в известной мере неопределенной“.

Я не буду сейчас комментировать эти высказывания. Замечу только, что, во-первых, не ясно, почему, если бы энергия не могла быть точно известна в данный момент, то это лишало бы понятие энергии смысла. Ведь понятие „частоты“ не лишено смысла. И, во-вторых, последнее высказывание о том, что „разумеется, этот факт никоим образом не противоречит...“, по существу лишено содержания. Приблизительно с таким же правом можно, например, утверждать, что имеет смысл говорить о точном значении импульса в заданной точке, но только он не определен с неопределенностью $\Delta p \geqslant \frac{h}{\Delta q} \cdot$ По существу, оба утверждения лишены содержания.

Де-Бройль,[2] комментируя работу Ландау и Пайерлса, высказывается по этому вопросу осторожнее: „Предыдущее соотношение

[1] [ZS. f. Phys. **69**, 59, 1931.]

[2] [Generalisation des relations d'incertitude. Actual Sci. et Ind., 1932.]

[имеется в виду (1)] можно также интерпретировать, сказав, что энергия связи между системами I и II неопределенна; при такой интерпретации в волновой механике остается в силе сохранение энергии".

По поводу вопроса об измерении энергии в короткий промежуток времени, де-Бройль в этой же работе, комментирующей Ландау и Пайерлса, пишет:

„Согласно Бору, при измерении энергии E неопределенность не может быть сделана меньше значения ΔE, если время Δt, в течение которого производится измерение, таково, что $\Delta t \geqslant \frac{h}{\Delta E}$. Действительно, когда рассматривается волновой цуг, всегда для определения частоты ν требуется определенное время. Для того чтобы иметь возможность утверждать, что волна немонохроматична не более чем на $\Delta\nu$, необходимо такое время наблюдения Δt, что $\Delta t \geqslant \frac{1}{\Delta\nu}$, или $\Delta t \geqslant \frac{h}{\Delta E}$ (так как $\Delta E = h\Delta\nu$)".

Но в своей книге де-Бройль,[1] рассматривая общий случай системы, где H зависит от времени, пишет: „...если в момент времени τ сделан опыт для того, чтобы определить энергию системы, то для энергии можно найти одно из значений..." и т. д.

Крамерс[2] пишет: „Если мы принимаем основное квантово-теоретическое воззрение, что возможность определения энергии какой-либо системы всегда связана, в соответствии с $E = h\nu$, с возможностью определения частоты некоторого волнового явления..." и далее: „значение энергии может поэтому получаться лишь с неточностью $\Delta E = h\Delta\nu = \frac{h}{\Delta t}$". Затем опять: „Физический смысл этого соотношения заключается в том, что, если при толковании какого-нибудь явления системе в момент t приписывается энергия E, то произведение неточностей значений t и E имеет по меньшей мере порядок величины h".

Мало убедительно то, что говорит по этому вопросу Борн:[3] „Строго говоря, в квантовой механике время также является тензорным оператором в гильбертовом пространстве, как и все остальные

---

1 [Де-Бройль. Введение в волновую механику, стр. 230. Харьков, 1934.]

2 [„Die Grundlagen der Quantentheorie". Hand — u. Jahrb. der chem. Phys., т. I, стр. 53].

3 [Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1931, стр. 223—224.]

физические величины, и сопряжено с энергией системы $H=E$. Поэтому существует ограничение для одновременного измерения энергии и времени: $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant h$. Определение стационарного состояния (с точной энергией) необходимо требует бесконечного времени, таким образом не имеет никакого точного смысла говорить о таких состояниях системы в определенный момент времени. Но в качестве приближения часто бывает удобно абстрагироваться от этой связи между энергией и временем. Тогда можно пользоваться временем t как параметром".

Паули:[1] „Мы заключаем, таким образом, что принципиально необходимо отказаться от введения оператора для t и что время в волновой механике с необходимостью должно рассматриваться как обыкновенное число („c — число")".

Вайль:[2] „Если состояние описывается в его зависимости от времени суперпозицией простых колебаний

$$\psi(t)=a_1 e^{i\nu_1 t}+a_2 e^{i\nu_2 t}+\ldots,$$

то квант энергии может принимать только значения $h\nu_1$, $h\nu_2, \ldots$, а интенсивность $a_2 a_2^* = |a_2|^2$, с которой колебание частоты ν_2 входит в ψ, мы должны считать относительной вероятностью того, что квант энергии равен $h\nu_2$. Тем самым соотношение $E=h\nu$ интерпретируется так: если ν неопределенна, так как в колебательном явлении содержится целый спектр значений ν, то в той же мере неопределенна и энергия; интенсивности, с которыми различные простые колебания входят в колебательное явление, дают вероятности соответствующих квантов энергии. Оператор $-\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ представляет энергию $\left(H \rightarrow -\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ в следующем смысле: каждая его собственная функция описывает состояние, в котором энергия с достоверностью принимает определенное значение E; это — соответствующее собственное значение. В произвольном состоянии ψ компоненты a разложения функции ψ по собственным функциям определяют относительные вероятности aa^* соответствующих значений E". Но aa^* ведь зависит от x, так что, по Вайлю, получается, что энергия *системы в каждой точке пространства* различна.

---

[1] [В. Паули. Общие принципы волновой механики, стр. 103. ГТТИ, 1947.]

[2] [„Gruppentheorie u. Quantenmechanik", 2-е изд., стр. 45. Лейпциг, 1931.]

Все приведенные высказывания относятся приблизительно к одному и тому же времени (1930—1933). Новые изложения (например, Зоммерфельда) не внесли, на мой взгляд, ясности.

Что касается закона сохранения энергии в квантовой механике, то большей частью его вообще не формулируют в общем виде. Пользуются им в частных случаях в полу-, или, вернее, в совсем классической форме, как, например, при рассмотрении соударений, но, как указано выше, скорее интуитивно, без обоснования квантово-механическим формализмом.

Четкая формулировка общего закона сохранения есть у Паули:[1] „Вероятность того, чтобы получить у замкнутой системы некоторое определенное значение энергии E_n, не зависит от времени. Это наиболее общее выражение закона сохранения энергии".

Но переход от этого общего положения к тому, как законом сохранения действительно пользуются, остается открытым. {Мне кажется, что в квантовой механике как раз этот вопрос не совсем тривиален и требует уточнения.}

Может быть, целесообразно подойти к систематизации вопроса об энергии следующим образом. Мы постулируем: каждой системе сопоставляется специфичный для нее гамильтонов оператор, которым она характеризуется. Сначала мы примем, что H не зависит от времени t (t всегда параметр). Гамильтонов оператор называется оператором энергии. Его собственные значения суть возможные значения энергии. Для простоты будем пока рассматривать одну степень свободы. Данное определение не связывает энергию с частотой. Оно не связано с уравнением Шрёдингера, подобно тому как не связаны с уравнением Шрёдингера ни p и q, ни любая другая физическая величина.

Для придания понятию энергии физического смысла должен быть дан рецепт измерения H. Постулируется дальше, что есть смысл говорить об энергии в данный момент. Тогда должен существовать и рецепт, позволяющий измерять энергию в как угодно короткий промежуток времени.

Если ввести оператор K кинетической энергии

$$K = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

[1] [Loc. cit., стр. 118].

и потенциальной

$$V = V(x),$$

то $H = K + V$. Но, конечно, ввиду некоммутативности K и V {для измерения значений каждой из этих трех величин K, V и H должен быть дан свой собственный рецепт}.

В противоположность этому, в классике нет речи о *специальном* рецепте для измерения полной энергии {так как, измеряя кинетическую и потенциальную энергию, мы тем самым измеряем и полную}.

Повидимому, нельзя без противоречий и непоследовательности отказаться от положения, что энергия *определена* в данный момент и вот почему. Во-первых, в частном случае свободной частицы $H = \alpha p^2$. Импульс же „в данный момент" — содержательное понятие.

Во-вторых, три числа $\overline{K}$, $\overline{V}$ и $\overline{H}$[1] находятся в соотношении $\overline{K} + \overline{V} = \overline{H}$; но $\overline{K}$ и $\overline{V}$ наверно определяемы в данный момент. Было бы мало *последовательным* предположить, что понятие полной энергии в данный момент не имеет смысла, понятие же средней полной энергии в данный момент существует. Между прочим, соотношение $\overline{K} + \overline{V} = \overline{H}$ показывает, что между тремя рецептами для измерения K, V и H существует связь, которая выражается именно в том, что, измеряя $\overline{K}$ своим рецептом, $\overline{V}$ своим и $\overline{H}$ своим, мы должны иметь $\overline{K} + \overline{V} = \overline{H}$.

Понятие измерения в данный момент нужно понимать так. Пусть у нас, например, волновая функция $\psi(x, t)$. Чтобы имела смысл статистика, должна быть повторяемость. Т. е. я повторяю опыт, причем t в каждом из опытов — это время от „начала" опыта. Измерение „в данный момент" — это измерение в различных опытах, но каждый раз для одинаковых времен от *начала опыта*. Я могу, например, измерить в „данный момент" $t = t_1$, q и в „тот же момент" измерить p. Соотношение неопределенности $\Delta p \cdot \Delta q \geqslant h$ говорит только, что, повторяя много раз измерения в „тот же момент", я найду $\Delta p \cdot \Delta q \geqslant h$.

Если у нас есть какое-нибудь состояние $\psi(x, t)$, то, в согласии

---

[1] [Черта сверху означает среднее.]

с общим положением квантовой механики, мы и здесь принимаем, что в разложении

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n(t)\, \psi_n(x), \tag{1}$$

где $\psi_n(x)$ — собственные функции H, $c_n c_n^*$ есть вероятность нахождения системы в состоянии с энергией E_n, или, точнее, вероятность нахождения в данный момент для энергии значения E_n.

О каком-либо соотношении неопределенности между E и t при данном выше определении энергии, повидимому, нельзя говорить без привлечения уравнения движения, в противоположность соотношению неопределенности между p и q, которое от уравнения движения не зависит. Замечу, что t *не* оператор, а параметр.

Исходим теперь из уравнения Шрёдингера в качестве уравнения движения. Тогда

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{i\frac{E_n t}{h}} \tag{2}$$

(c_n не зависят для замкнутой системы от времени).

При наличии только одного члена в разложении (2), т. е. при стационарном состоянии, вероятность любой физической величины независима от времени. {С квантовой точки зрения} вообще ничего не меняется во времени. При этом энергия имеет определенное значение и $\Delta E = 0$. Формально можно сказать, что время Δt, за которое что бы то ни было изменилось, равно ∞, т. е. при $\Delta E = 0$ имеем $\Delta t = \infty$.

Если в системе что-либо меняется со временем, то $\Delta E \neq 0$.

{Таким образом, возникает вопрос о связи, существующей между изменениями во времени физических величин в каком-либо состоянии замкнутой системы и разбросом энергии в этом состоянии. Такую зависимость можно установить следующим образом.

Под разбросом ΔA величины A мы понимаем корень из дисперсии, т. е.[1]

$$(\Delta A)^2 = \int \psi^* (A - \overline{A})^2 \psi\, dx.$$

Для разброса двух любых величин A и H, как известно, справедливо следующее соотношение:

$$\Delta A \cdot \Delta H \geqslant \frac{1}{2} |\overline{HA - AH}|.$$

[1] [Мы рассматриваем „чистые состояния", а не „смесь"].

Но если под H мы будем понимать оператор энергии, то справедливо также

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} = AH - HA,$$

откуда для любой физической величины мы получаем соотношение}

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta E)^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)^2. \tag{3}$$

Повидимому, (3) и есть общее выражение соотношения неопределенности для энергии и времени $\left(\text{поскольку } \Delta A \Big/ \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right.$ имеет размерность времени$\Big)$.

Беря в качестве A различные {величины, мы получаем те или иные специальные формулировки} этого соотношения.

Если, например, $A \equiv x$, то $d\bar{A}/dt$ — скорость центра тяжести пакета, ΔA — „средняя" ширина пакета и $\Delta A/\dot{\bar{A}}$ — время t прохождения пакета через {какую-нибудь неподвижную} точку пространства (во всяком случае для времен не слишком больших) {т. е. для небольших расплываний пакета}. Тогда соотношение (3) дает {связь между этим временем t и разбросом ΔE энергии в пакете

$$\Delta E \cdot t \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

Это одна из обычных форм толкования соотношения неопределенности между энергией и временем}. Соотношение (4) остается справедливым и для частицы в поле сил, {а не только для свободной частицы}.

Закон сохранения энергии.

Из уравнения Шрёдингера следует уравнение (2), в котором c_n не зависят от времени.

Из общего формализма $c_n c_n^*$ есть вероятность того, что энергия имеет значение E_n. Поэтому из (2) следует, что:

I) ***вероятность того, что система имеет полную энергию E_n, не зависит от времени.***

I) и есть выражение закона сохранения энергии в квантовой механике, или, вернее, одно из положений относительно энергии, вытекающее из уравнения движения. Оно не имеет себе аналога в классике, повидимому, потому, что здесь, в квантах смысл I) заключается в том, что I) относится к *полной* энергии, имеющей свой специфический рецепт измерения. В классике специального рецепта для измерения *полной* энергии нет.

Частный случай положения I) может быть сформулирован так:

Ia) *средняя (полная) энергия постоянна во времени.*

Замечание. Формулировки I) или Ia) совпадают с формулировкой Паули. Они имеют содержание только, если признать возможным измерять полную энергию за конечный {достаточно короткий} промежуток времени. Если исходить из определения энергии как частоты, то I) и Ia) вообще, строго говоря, не имеют содержания. Конечно, тогда им может быть придан „приблизительный" смысл.

Второе положение, вытекающее из уравнения Шрёдингера:

$$\text{II)} \qquad \overline{K}+\overline{V}=\overline{H}=\text{const},$$

т. е. *сумма средней кинетической и потенциальной энергий равна средней полной энергии и постоянна во времени.*

$\overline{K}$ и $\overline{V}$, вообще говоря, в разные моменты времени различны, но их сумма постоянна. Это положение имеет физическое содержание.

Повидимому, I) и II) различны по содержанию. Закон сохранения энергии в квантах состоит, таким образом, из двух разных утверждений. II) в пределе приводит, повидимому, к классической формулировке.

Формулировки I) и II) не дают ответа на то, что происходит с энергией при „индивидуальном акте". С этим вопросом дело, повидимому, обстоит так. Рассмотрим систему с несколькими степенями свободы, для простоты — с двумя.

Пусть $H=H_1+H_2+\lambda H_{12}$, где H_1 действует на x, H_2 на y, а H_{12} — смешанный оператор. Пусть собственные значения

H_1 будут E_1', E_1'', ...,
H_2 „ E_2', E_2'', ...,
H „ E', E'', ...

и пусть

$$E_1' + E_2' = E_1'' + E_2''.$$

Если $\lambda \to 0$, то $E^{(n)}$ стремится к одной из сумм $E_1^{(l)} + E_2^{(m)}$.

Возьмем стационарное состояние всей системы с

$$E'_{\lambda=0} \to E_1' + E_2' = E_1'' + E_2'', \text{ т. е. } \psi(x, y, t) = \psi(x, y)\, e^{i\frac{E' t}{h}}.$$

Разлагаем $\psi(x, y)$ по произведениям собственных функций операторов H_1 (собственные функции φ_i) и H_2 (собственные функции χ_i).

Если φ_1, φ_2 соответствуют собственным значениям E_1' и E_1'',

χ_1, χ_2 » » » » » » E_2' и E_2'',

то при $\lambda \to 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \alpha\varphi_1\chi_1 + \beta\varphi_2\chi_2 + \text{члены порядка } \lambda, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1 + \text{члены порядка } \lambda. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь можно спросить, какова вероятность того, что сумма значений величины, оператор которой H_1, и величины, оператор которой H_2, равна одному из значений $E_1^{(l)} + E_2^{(m)}$. Так как H_1 и H_2 коммутируют, то этот вопрос имеет смысл.

Ввиду (5) можно утверждать, что заметно отличны от нуля только вероятности значений $E_1' + E_2'$ и $E_1'' + E_2''$, которые между собой равны и при $\lambda \to 0$ делаются равными E' (соответствующие вероятности α^2 и β^2). Вероятность любых других значений $E_1^{(l)} + E_2^{(m)}$ стремится вместе с λ {т. е. с уменьшением связи} к нулю.

Другими словами: благодаря наличию взаимодействия, измерение дает *различные* значения (здесь — два) для H_1 и для H_2 при каждом отдельном измерении, но так, что $H_1 + H_2$ имеет всегда одно и то же значение, равное E'.

Если считать H_1 энергией первой системы, H_2 — энергией второй, то это и выражает закон сохранения энергии при индивидуальном акте.

В случае упругого соударения двух частиц, мы имеем аналогичный случай, хотя формально несколько отличный. Отличие заключается в том, что взаимодействие не приводится к дополнительному члену λH_{12} с маленьким параметром λ, а обусловливается граничными условиями. Самый простой пример: соударение двух частиц одинаковой массы в одном измерении, из которых одна (x) приблизительно покоится, а другая (y) имеет определенный импульс p_0.

Рассматриваем стационарное состояние всей системы с энергией E. $\psi(x, y)$ подчинена условию, что при $x=y$, $\psi=0$. Решение таково:[1]

$$\psi(x,y)=f(y)e^{\frac{ip_0 x}{h}}-f(x)e^{\frac{ip_0 y}{h}},$$

где $f(x)$ постоянна в сравнительно большом интервале x, а вне его равна нулю. Можно считать, что $f(x)$ есть приближенно собственная функция оператора $-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с собственным значением, равным нулю.

Указанный вид решения показывает, что одновременное измерение $-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ дает либо нуль для одной частицы и $p_0{}^2$ для другой, либо *наоборот*, причем $\frac{p_0{}^2}{2m}=E$. Это и есть сохранение энергии в каждом индивидуальном случае столкновения двух одинаковых частиц.

Если H не зависит от времени, то стационарное состояние определено в промежутке $-\infty<t<\infty$ волновой функцией

$$\psi(x,t)=\varphi(x)e^{i\frac{Et}{h}}. \tag{6}$$

Это состояние, во-первых, имеет определенную энергию E и, во-вторых, в смысле временно́й зависимости монохроматично.

Отсюда утверждение: *монохроматичное состояние имеет определенную энергию.*

Обратное утверждение справедливо, поскольку H не зависит от времени.

---

[1] [Этот пример подробно рассмотрен в лекциях по волновой механике, т. V.]

Пусть теперь H зависит от времени. Пусть состояние системы описывается функцией (6) в промежутке $0<t<T$, тогда как до и после этого промежутка $\psi(x, t)$ имеет другой вид. Теперь состояние как функция от времени не монохроматично.

Из того, что в данном случае состояние не монохроматично, часто, повидимому без дальнейшего обоснования, чисто формально делают вывод, что поскольку нет монохроматичности, то вообще нельзя говорить об определенной энергии и в промежутке $0<t<T$.

Однако дело, повидимому, обстоит так: понятие монохроматичности вытекает из оценки формы функции во всем промежутке $-\infty<t<\infty$. Такого рода оценка целесообразна в связи с вопросами, связанными с действием процесса на определенные анализаторы. Например, при анализе света при помощи (бесконечной) решетки, монохроматическому свету соответствует резкая линия; и обратно — отсутствие монохроматичности влечет за собой конечную ширину линии (дисперсию).

Но при данном выше определении понятия энергии, как имеющего смысл в „данный момент", такого рода оценка совершенно не адэкватна. И действительно: наличие закона сохранения энергии в квантовой механике обусловлено *не* этим свойством монохроматичности функции $e^{i\nu t}$. Как легко видеть, закон сохранения вытекает из уравнения Шрёдингера потому, что (наряду с ортогональностью собственных функций) модуль функции $e^{i\nu t}$ *не зависит от времени.* {Это понятие „независимости от времени" имеет очевидный смысл и для конечного промежутка времени.} Поэтому есть смысл говорить о понятии энергии и о сохранении энергии (понятие энергии оправдано именно наличием закона сохранения) и в конечном промежутке времени.

{Достаточно, чтобы волновая функция имела вид

$$\psi(x, t) = \varphi_n(x)\, e^{i\frac{E_n t}{h}}$$

[где $\varphi_n(x)$ — собственная функция и E_n — соответственное собственное значение оператора H], в *конечном* промежутке времени $t_1<t<t_2$, чтобы утверждать, что система в этом промежутке имеет определенную энергию, равную E_n.}

Нужно заметить, что система имеет определенный импульс тогда, когда состояние *пространственно монохроматично.* Но соотношения между p и q, с одной стороны, и между E и t, с другой, именно *не* аналогичны.

Замечание. Нужным для закона сохранения свойством обладает и $e^{if(t)}$ с любой $f(t)$. Строение уравнения Шрёдингера, однако, таково, что решений типа $\varphi(x)\,e^{if(t)}$ уравнение, повидимому, никогда не имеет, за исключением именно случая $f(t)=\nu t$ при независящем от времени H [и случая, когда H является суммой оператора, не зависящего от времени, и числа, зависящего от времени. Действительно, при $H=K+V(x,t)$, внося в уравнение Шрёдингера $\psi=\varphi(x)\,e^{if(t)}$, получаем

$$\varphi''+\frac{2m}{\hbar^2}\left[\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial t}-V(x,t)\right]\varphi=0.$$

Отсюда видно, что разность, стоящая в скобках, не должна зависеть от t].

75

[МЕТОД АРМСТРОНГА[1]]

I. Общий вид малой помехи:

$$s = \cos\omega t \cdot \mu \sum_i a_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i) + \sin\omega t \cdot \mu \sum_i a_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i), \quad (1)$$

где μ — малый параметр, ω — частота, на которую настроен приемник. Таким образом, помеха представлена в виде совокупности дискретных гармонических колебаний с частотами $\omega - \Omega_i$, амплитудами μa_i и фазами φ_i. Пусть принимаемая несущая есть

$$y_0 = \cos\omega t.$$

Тогда при наличии помехи получим на входе приемника

$$y_{\text{помехи}} = y_0 + s = \left[1 + \mu \sum_i a_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)\right] \cos\omega t + \\ + \mu \sum_i a_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i) \sin\omega t, \quad (2)$$

или, ограничиваясь в амплитуде и фазе порядком μ,

$$y_{\text{помехи}} = \left[1 + \mu \sum_i a_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)\right] \cos(\omega t + \psi), \quad (3)$$

---

[1] [Находясь в Боровом, Л. И. Мандельштам в числе многих других вопросов заинтересовался методом радиоприема частотно-модулированных колебаний, предложенным Армстронгом и дающим существенное ослабление помех. Л. И. Мандельштам стремился, как он сам тогда говорил, „уяснить себе, в чем же состоит центральный пункт метода Армстронга". Черновик помещаемой заметки Л. И. Мандельштама обработан С. М. Рытовым].

где

$$\operatorname{tg}\psi \approx \psi \approx \mu \sum_i a_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i). \tag{3a}$$

Если прием „амплитудный“, то важна только амплитуда этого колебания.

При чистом (без помехи) амплитудно-модулированном сигнале имеем

$$y_{\text{сигнала}} = (1 + K\cos pt)\cos \omega t. \tag{4}$$

Степень мешания η может оцениваться отношением

$$\eta = \frac{\mu^2 \sum_i a_i^2}{K^2}. \tag{5}$$

Пусть p — наивысшая требуемая для передачи звуковая частота. Тогда сумма в (5) распространяется на все мешающие колебания, у которых Ω_i лежат между $-p$ и $+p$. Так как K может быть сделано порядка $^1/_2$, то

$$\eta \approx 4\mu^2 \sum_{\Omega_i=-p}^{+p} a_i^2. \tag{5a}$$

II. Возьмем теперь „чисто частотный“ прием. Ограничитель приводит колебание (3) к некоторой постоянной амплитуде b, так что помеха выразится как

$$y_{\text{помехи}} = b\cos(\omega t + \psi) = b\cos\left[\omega t + \mu \sum_i a_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i)\right]. \tag{6}$$

Чистый (без помехи) частотно-модулированный сигнал будет

$$y_{\text{сигнала}} = b\cos(\omega t + k\sin pt). \tag{7}$$

Дискриминатор „частотного“ приемника дает для помехи

$$\dot{y}_{\text{помехи}} = -b\omega\left[1 + \frac{\mu}{\omega}\sum_i a_i \Omega_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)\right]\sin(\omega t + \psi), \tag{8}$$

а для сигнала —

$$\dot{y}_{\text{сигнала}} = -b\omega\left(1 + \frac{kp}{\omega}\cos pt\right)\sin(\omega t + k\sin pt).$$

Степень мешания равна, очевидно,

$$\eta_1 = \frac{\mu^2 \sum_i a_i^2 \Omega_i^2}{k^2 p^2},$$

или, если вынести за знак суммы некоторое среднее Ω_i^2,

$$\eta_1 = \frac{\mu^2 \overline{\Omega_i^2} \sum_i a_i^2}{k^2 p^2}. \tag{9}$$

Вопрос заключается теперь в том, на какие мешающие колебания распространяется сумма в (9).

Так как сигнал представлен колебанием (7), то приемное устройство должно пропускать все частоты вплоть до kp, и если k велико, то полоса пропускания гораздо больше, чем в первом (амплитудном) случае, где должны быть пропущены частоты только до p. Ясно что и в (8) и в (9) сумма распространяется поэтому на все мешающие колебания, у которых частоты Ω_i лежат между $-kp$ и $+kp$, а не как в первом случае — между $-p$ и $+p$. Поэтому, принимая во внимание, что

$$\overline{\Omega_i^2} \approx k^2 p^2,$$

мы получаем из (9)

$$\eta_1 \approx \mu^2 \sum_{\Omega_i=-kp}^{+kp} a_i^2,$$

а так как

$$\sum_{\Omega_i=-kp}^{+kp} a_i^2 : \sum_{\Omega_i=-p}^{+p} a_i^2 \approx k,$$

то из сравнения с (5а) находим

$$\eta_1 \approx \frac{k}{4} \eta.$$

Таким образом, на первый взгляд при большом k η_1 будет больше η. Но это не так, и причина заключается в следующем.

Если p — наивысшая необходимая для передачи звуковая частота, то все члены в (8), у которых $|\Omega_i| > p$ либо *неслышимы*, либо могут быть *отсеяны фильтром*, пропускающим необходимые звуковые частоты слышимого диапазона и отрезающим более высокие. Иными словами, нужно и в (9) распространить сумму только до $|\Omega_i| = p$. Так как при этом $\overline{\Omega_i^2} \approx p^2$, то

$$\eta_1 \approx \mu^2 \frac{\sum\limits_{\Omega_i=-p}^{+p} a_i^2}{k^2}$$

и сравнение с (5a) дает теперь

$$\eta_1 \approx \frac{\eta}{4k^2},$$

т. е. η_1 — именно поскольку k велико — значительно *меньше*, чем η!

Здесь используется то свойство модуляции по частоте, что большая ее глубина может быть достигнута путем увеличения k при умеренном p. Правда, для использования всей глубины модуляции нужно пропускать широкую (порядка $2kp$) полосу частот. В приемник пройдет при этом и *много членов* спектра помехи, которые дадут поэтому тоже глубокую частотную модуляцию. Но *эта* модуляция (от помехи) в значительной своей части будет велика потому, что велики Ω_i, а не амплитуды мешающих колебаний. Эта часть помехи (колебания с большими Ω_i) дает модуляцию того же порядка kp, что и сигнал, но с большими p и малыми k, в то время как сигнал дает модуляцию с большим k и малым p. В том обстоятельстве, что частотная модуляция гибка, т. е. одинаковая ее степень может быть достигнута либо большим k и малым p, либо наоборот, и лежит возможность уменьшить здесь воздействие помех. Этой гибкости нет при амплитудной модуляции.

Еще одно замечание: ввиду необходимости амплитудного ограничения уменьшается раза в четыре действующая амплитуда принимаемой волны. Поэтому правильней умножить η_1 еще на 4^2 и только тогда сравнивать η_1 с η из (5). Если это сделать и считать в (5) $K = {}^1/_2$, то мы получим

$$\frac{\eta_1}{\eta} \approx \frac{4}{k^2}.$$

Так как у Армстронга k порядка 15, то все же отношение энергетических мер степени мешания η_1/η составляет примерно ${}^1/_{50}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СПИСОК РАБОТ, ВЫПОЛНЕННЫХ ПОД НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ РУКОВОДСТВОМ ИЛИ ПО ПРЕДЛОЖЕНИЮ Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА[1]

1. Л. Б. Слепян. Абсолютный метод измерения длины волн проф. Л. И. Мандельштама. ТиТБП, № 2, 76, 1918.
2. И. Е. Тамм. Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности. ЖРФХО, ч. физ. **56**, вып. 2—3, 248, 1924.
3. А. А. Андронов и М. А. Леонтович. К теории молекулярного рассеяния света на поверхности жидкостей. ZS. f. Phys. **38**, 485, 1926.
4. А. А. Витт. Двухпроводная антенна Бевереджа. ЖПФ **3**, вып. 3—4, 317, 1926.
5. М. А. Леонтович. К теории электромагнитного прерывателя. ЖРФХО, ч. физ. **59**, вып. 3—4, 261, 1927.
6. Н. А. Смирнов. К теории метода Тёплера — Фуко. ЖРФХО, ч. физ. **59**, вып. 3—4, 358. 1927.
7. М. П. Свешникова. Групповая скорость и аберрация в диспергирующей среде. ЖРФХО, ч. физ. 59, вып. 3—4, 377, 1927.
8. А. А. Андронов и М. А. Леонтович. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. ЖРФХО, ч. физ. **59**, вып. 5—6, 429, 1927.
9. М. П. Свешникова. Теорема взаимности в электромеханике и радиотелеграфии. ЖРФХО, ч. физ. **59**, вып. 5—6, 453, 1927.

---

[1] Список охватывает только последний (московский) период деятельности Л. И. Мандельштама. В список не включены работы, содержащие дальнейшее развитие идей Л. И. Мандельштама или возникшие в той или иной связи с его идеями, так как учесть подобные работы сколько-нибудь исчерпывающим образом не представляется возможным. Несмотря на то, что данный список является, таким образом, весьма ограниченным, он может все же оказаться полезным для разного рода справок и т. п. Звездочкой отмечены работы, относящиеся к циклу исследований, проводившихся под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.

10. З. Г. Либин. О некоторых случаях обычного и „обратного" скинэффекта. ЖПФ 4, вып. 3, 45, 1927.
11. Г. С. Ландсберг. Молекулярное рассеяние света в твердых телах (I и II). ZS. f. Phys. 43, 663 и 45, 424, 1927.
12. Н. А. Смирнов. Пондеромоторные силы электростатического поля. ЖРФХО, ч. физ. 60, вып. 1, 19, 1928.
13. А. А. Вит. Неоднородная нагруженная антенна. ЖПФ 5, вып. 1, 3, (1928).
14.* С. Э. Хайкин. Затухание колебаний в пьезоэлектрических кристаллах кварца. ЖПФ 5, вып. 3—4, 132 и 143, 1928.
15. Г. С. Ландсберг и К. Вульфсон. Молекулярное рассеяние света в твердых телах (III). ZS. f. Phys. 58, 95, 1929.
16. С. П. Шубин. Некоторые проблемы теории возмущений линейных колебательных систем. ЖПФ 7, вып. 2, 69, 1930.
17. А. А. Андронов и А. А. Витт. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха. ДАН, № 8, 189, (1930).
18. С. Э. Хайкин. Непрерывные и „разрывные" колебания. ЖПФ 7, вып. 6 21, (1930).
19. А. А. Витт и С. П. Шубин. О тонах мембраны, закрепленной в конечном числе точек. ЖТФ 1, вып. 2—3, 163, 1931.
20.* А. А. Витт и С. Э. Хайкин. Захватывание при малых амплитудах внешней силы. ЖТФ 1, вып. 5, 428, 1931.
21.* К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин. Акустическое захватывание. ЖТФ 2, вып. 1, 111, (1932).
22.* С. М. Рытов. К вопросу о детектировании. ЖТФ 2, вып. 9—10, 972, 1932.
23. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов и А. А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ 3, вып. 3, 165, 1933.
24. Н. Л. Кайдановский и С. Э. Хайкин. Механические релаксационные колебания. ЖТФ 3, вып. 1, 91, 1933.
25. А. А. Витт и Г. С. Горелик. Колебания упругого маятника, как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем. ЖТФ 3, вып. 2—3, 294, 1933.
26. С. П. Стрелков. Маятник Фроуда. ЖТФ 3, вып. 4, 563, 1923.
27. С. М. Рытов. Влияние неравномерности хода на спектр ЭДС машины индукторного типа. ЖТФ 3, вып. 7, 1045, 1933.
28.* Г. Б. Петросян, П. А. Рязин и К. Ф. Теодорчик. Фазовые соотношения при захватывании. ЖТФ 3, вып. 7, 1051, 1933.
29. С. М. Рытов. Частотная модуляция, ЖТФ 3, вып. 8, 1230, 1933; Techn. Phys. USSR 2, вып. 2—3, 215, 1935.
30. А. Г. Майер и Е. А. Леонтович. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. ДАН 4, № 7, 353, 1934.
31.* В. А. Лазарев. О гетеропараметрическом возбуждении. ЖТФ 4, вып. 1, 30, 1934.
32.* В. П. Гуляев и В. В. Мигулин. Об устойчивости колебательных систем с периодически изменяющимися параметрами. ЖТФ 4, вып. 1, 48, 1934.
33.* А. Б. Меликьян. Об установлении амплитуды при резонансе 2-го рода. ЖТФ 4, вып. 1, 78, (1934); Techn. Phys. USSR 1, вып. 4, 429 (1935).

34. А. А. Витт. К работе Л.И.М и Н.Д.П. Об асинхронном возбуждении. ЖТФ 4, вып. 1, 109, 1934.
35.* Э. М. Рубчинский. О явлениях асинхронного возбуждения и тушения автоколебаний. ЖТФ 4, вып. 1, 111, 1934.
36.* Е. Я. Щеголев. О разности фаз периодических процессов с рациональным отношением частот и об измерении ее при помощи катодного осциллографа. ЖТФ 4, вып. 1, 191, 1934.
37. Л. Д. Гольдштейн. О сложном воздействии на автоколебательную систему. Ленинградский Электротехнический институт связи, Научн.-Техн. сборник, вып. IV—V, 15, 1934.
38. Г. С. Горелик. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. ЖТФ 4, вып. 10, 1783, 1934; 5, вып. 2, 195 и вып. 3, 489, (1935); Techn. Phys. USSR 2, вып. 2—3, 135, (1935).
39. М. А. Дивильковский и М. И. Филиппов. Измерение напряженности магнитных полей ультравысокой частоты. ДАН 2, № 8—9, 521, 1935.
40. С. М. Рытов. О диффракции света на ультразвуке. ЖЭТФ 5, вып. 9, 843, 1935; Sow. Phys. 8, вып. 6, 626, 1935.
41. М. А. Дивильковский и М. И. Филиппов. Измерение напряженности магнитного поля ультравысокой частоты. ЖЭТФ 5, вып. 10, 960, 1935.
42. Е. Я. Пумпер. Измерение скоростей ультразвуков в газах при низких давлениях. ЖЭТФ 5, вып. 10, 977, (1935); Sow. Phys, 8, вып. 3, 300, 1935.
43.* Э. М. Рубчинский. О поведении колебательного контура с периодически изменяющейся самоиндукцией при воздействии на него внешней электродвижущей силой. ИЭСТ, № 3, 7, 1935.
44.* А. Б. Меликьян и Е. К. Петрова. К вопросу о методике определения параметров пьезорезонаторов. ИЭСТ, № 3, 40, 1935.
45. П. А. Рязин. Установление колебаний при захватывании. Techn. Phys. USSR 2, № 2—3, 1, 1935.
46. С. Э. Хайкин и Л. Лошаков. Разрывные колебания в контуре с емкостью и самоиндукцией. Techn. Phys. USSR 2, вып. 2—3, 181, 1935.
47. С. Э. Хайкин. Влияние малых параметров на стационарные состояния динамической системы. Techn. Phys. USSR 2, вып 5, 449, 1935.
48. П. А. Бажулин. Поглощение ультразвуковых волн в некоторых жидкостях. Sow. Phys. 8, вып. 3, 354, 1935.
49. П. А. Бажулин. Затухание ультраакустических волн в уксусной кислоте. ДАН 3 (12), № 6, 101, 1936.
50. М. А. Дивильковский и М. И. Филиппов. Определение диэлектрических потерь в жидкостях при высокой частоте. ЖЭТФ 6, вып. 1, 93, 1936; Sov. Phys. 8, вып. 3, 311, 1935.
51. М. А. Леонтович. Замечания к теории поглощения звука в газах ЖЭТФ 6, вып. 6, 561, 1936.
52. М. А. Дивильковский и С. М. Рытов. К вопросу о самовозбуждении и резонансе в системе с периодически меняющейся самоиндукцией. ЖТФ 6, вып. 3, 474, 1936; Sow. Phys. 10, вып. 5, 666, 1936.
53. М. А. Леонтович. Некоторые вопросы поглощения звука в многоатомных газах. Изв. АН СССР, сер. физ., вып. 5, 633, 1936.
54. В. В. Мигулин. Об автопараметрическом возбуждении колебаний. Techn. Phys. USSR 3, вып. 10, 841, 1936.

55. П. А. Бажулин. Зависимость поглощения ультразвуковых волн в бензоле и четыреххлористом углероде от температуры. ДАН, **14**, № 5, 273, (1937).
56. Ф. С. Барышанская. Рассеяние света на границе двух жидкостей. ЖЭТФ **7**, вып. 1, 51, 1937.
57. М. А. Дивильковский. Классическая теория Зееман-эффекта в переменном магнитном поле. ЖЭТФ **7**, вып. 5, 650, 1937.
58.* Е. Я. Щеголев. Экспериментальное исследование скорости распространения электромагнитных волн радиотехнического диапазона. ЖТФ **7**, вып. 6, 579, 1937.
59.* В. А. Лазарев. Параметрическое возбуждение комбинационных колебаний. ЖТФ **7**, вып. 6, 642, 1937; Techn. Phys. USSR **4**, 10, 885, 1937.
60.* К. Э. Виллер и Е. Я. Щеголев. Скорость средних радиоволн вблизи земной поверхности. Techn. Phys. USSR **4**, вып. 10, 787, 1937.
61.* Е. Я. Щеголев. Измерение разности фаз между гармоническими колебаниями разной частоты; Techn. Phys. USSR **4**, вып. 10, 827, 1937.
62.* К. Э. Виллер. Метод измерения сдвига фаз, вносимого высокочастотными усилителями. Techn. Phys. USSR **4**, вып. 10, 841, 1937.
63. Ф. С. Барышанская. Исследование флуоресценции в слое, сравнимом с длиной волны. ДАН **17**, № 3, 99, 1937; **19**, № 6—7, 465, 1938.
64. П. А. Бажулин. Поглощение ультраакустических волн в электролитах. ДАН **19**, № 3, 153, 1938.
65. А. Т. Дадаян и Е. Я. Пумпер. Измерение поглощения ультразвуковых волн в воздухе и аргоне. ДАН **20**, № 7—8, 543, 1938.
66. А. Б. Меликьян. Об одном способе быстрого определения вариаций ускорения силы тяжести. ДАН **21**, № 8, 375, 1938.
67. П. А. Бажулин. Поглощение ультраакустических волн в жидкостях. ЖЭТФ **8**, вып. 4, 457, 1938.
68. П. Е. Краснушкин и Е. Я. Пумпер. О поглощении ультразвука в гелии. ДАН **23**, № 5, 449, 1939.
69. М. А. Исакович. О распространении волн в жидкости, обладающей максвелловой вязкостью. ДАН **23**, № 8, 783, 1939.
70. П. А. Бажулин. Поглощение ультраакустических волн в смеси ацетон — вода. ДАН **24**, № 7, 689, 1939.
71.* Я. Л. Альперт, В. В. Мигулин и П. А. Рязин. Об исследовании электромагнитного поля вблизи излучающей антенны ЖЭТФ **9**, вып. 9, 824, 1939; Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 381, 1939.
72. П. А. Бажулин. Поглощение ультразвуковых волн в электролитах ЖЭТФ **9**, вып. 9, 1147, 1939; Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 431, 1939.
73. Г. С. Ландсберг и А. А. Шубин. Рассеяние света в неравномерно нагретом кристалле. ЖЭТФ **9**, вып. 11, 1309, 1939; Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 403, 1939.
74. М. А. Леонтович. О распределении интенсивности молекулярного рассеяния света в неравномерно нагретом кристалле. ЖЭТФ **9**, вып. 11, 1314, 1939; Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 397, 1939.
75. М. А. Дивильковский. Задача о шаре, помещенном в однородное переменное магнитное или электрическое поле. ЖТФ **9**, вып. 5, 433, (1939).
76. М. А. Дивильковский. К теории индуктивного нагревания. ЖТФ **9**, вып. 14, 1302, 1939; Journ. of Phys. **1**, вып. 5—6, 469, 1939.

77. Л. Н. Лошаков. Измерение магнитной проницаемости железа и пермаллоя новым методом в очень слабых полях высокой частоты. ЖТФ **9**, вып. 17, 1540, 1939.

78.* Е. Я. Щеголев. Об одном применении радиоинтерференционного дальномера. Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 389, 1939.

79. Е. Я. Пумпер. О поглощении ультразвука в воздухе и одноатомном газе. Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 411, 1939.

80. М. И. Филиппов. Диэлектрические потери в полях высокой частоты и теория Дебая. Journ. of Phys. **1**, № 5—6, 479, 1939.

81.* П. А. Рязин. К расчету фазовой структуры электромагнитного поля. Изв. АН СССР, сер. физ., **4**, № 3, 434, 1940.

82.* А. Б. Меликьян. О магнитном детектировании. Труды ФИАН, т. II, вып. 1, 25, 1940.

83. С. Э. Хайкин, Л. П. Лисовский и А. Е. Саломонович. О силах сухого трения. Труды конф. по трению и износу в машинах, т. I, 480, 1940; Journ. of Phys. **1**, вып. 5—6, 455, 1939.

84. П. А. Бажулин. Поглощение ультраакустических волн в вязких жидкостях. ДАН **31**, № 2, 114, 1941.

85. М. А. Исакович и С. М. Райский. Мономолекулярные пленки на свободной струе воды. ЖЭТФ **11**, вып. 2—3, 324, 1941; Journ. of Phys. **4**, вып. 1—2, 89, 1941.

86.* Я. Л. Альперт, В. В. Мигулин и П. А. Рязин. Исследование фазовой структуры электромагнитного поля и скорости радиоволн. ЖТФ **11**, вып. 1—2, 7, 1941; Journ. of Phys. **4**, вып. 1—2, 13, 1941.

87. И. Л. Берштейн. Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. ЖТФ **11**, вып. 4, 305, 1941.

88.* Я. Л. Альперт и Б. Н. Горожанкин. К вопросу о береговой рефракции. ЖТФ 11, вып. 13—14, 1238, 1941.

89. П. Е. Краснушкин. Теория ультразвукового интерферометра. Journ. of Phys. 7, вып. 2, 80, 1943.

90. Е. Я. Пумпер. О методике измерения поглощения ультразвука. ДАН **49**, № 8, 853, 1945.

91.* Е. Я. Щеголев, К. Э. Виллер и И. М. Борушко. Радиоинтерференционная аппаратура и методика измерений. Сборник I,[1] стр. 45.

92.* П. А. Рязин. Распространение радиоволн вблизи земной поверхности. Сборник I, стр. 101.

93.* Я. Л. Альперт и В. В. Мигулин. Экспериментальное исследование фазовой структуры электромагнитного поля радиоволн. Сборник I, стр. 172.

94.* Я. Л. Альперт. Экспериментальное исследование фазовой структуры электромагнитного поля вблизи излучателя. Сборник I, стр. 203.

95.* Е. Я. Щеголев. Применение радиоинтерферометров в гидрографии. Сборник I, стр. 231.

---

[1] „Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности". Сборник статей под ред. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси (Гостехиздат, 1945).

96.* Я. Л. Альперт и Б. Н. Горожанкин. Экспериментальное исследование структуры электромагнитного поля над неоднородной поверхностью земли (к вопросу о береговой рефракции). Journ. of Phys. 9, вып. 2, 115, 1945.

97.* В. Л. Гинзбург и И. М. Франк. Излучение электрона и атома, движущихся по оси канала в плотной среде. ДАН **56**, № 7, 699, 1947.

98. С. М. Рытов и М. Е. Жаботинский. Наблюдение рефракционных структур. Journ. of Phys. **11**, вып. 1, 1947.

99. Д. В. Сивухин. Молекулярная теория отражения и преломления света. ЖЭТФ **18**, вып. 11, 976, 1948.

100. Н. Н. Баутин. О задаче Л. И. Мандельштама в теории часов. ДАН 65, № 3, 279, 1949.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЛИТЕРАТУРА О Л. И. МАНДЕЛЬШТАМЕ

1. А. Ф. Иоффе, А. Н. Крылов и П. П. Лазарев. Записка об ученых трудах проф. Л. И. Мандельштама. Изв. АН СССР, отд. физ.-мат. наук, № 8—10, 623—626, 1928.

2. А. Ф. Иоффе. Записка об ученых трудах проф. Л. И. Мандельштама. Записки об ученых трудах действ. членов АН СССР по отделению физ.-мат. наук, избранных 12 января 1929 года. Л., АН СССР, стр. 93—99, 1930.

3. Л. И. Мандельштам. Большая сов. энциклопедия, т. 38, стр. 19—20, 1938.

4. Л. И. Мандельштам. Poggendorfs biogr. liter. Handwörterbuch, т. 6, ч. III, стр. 1637 (Берлин, 1938).

5. Л. И. Мандельштам. К шестидесятилетию со дня рождения. Journ. of Phys. 1, № 5—6, 369—372, 1939.

6. Леонид Исаакович Мандельштам. Материалы к библиографии трудов ученых СССР. Серия физики, вып. 1. Составила Т. О. Вреден-Кобецкая. Из-во Всесоюзн. книжной палаты, М., 1941.

7. Н. Д. Папалекси. Выступление над гробом Леонида Исааковича Мандельштама 29 ноября 1944 г. Собрание трудов Н. Д. Папалекси, стр. 222—223. Из-во АН СССР, 1948.

8. А. Н. Крылов. Памяти Леонида Исааковича Мандельштама. В книге „Мои воспоминания", стр. 497—499. Из-во АН СССР, 1945.

9. Изв. АН СССР (сер. физ.), т. 9, 1945, № 1—2, посвященный памяти Леонида Исааковича Мандельштама. Содержание номера:

Из газ. „Известия Советов депутатов трудящихся СССР", № 283 (8585) от 30 ноября 1944 г. (стр. 3—4).

С. И. Вавилов. Речь над могилой Л. И. Мандельштама (стр. 5—6).

Н. Д. Папалекси. Краткий очерк жизни и научной деятельности Леонида Исааковича Мандельштама (стр. 8—20). См. также Собрание трудов Н. Д. Папалекси, стр. 224—240. Изд-во АН СССР, 1948; Успехи физ. наук 27, вып. 2, 143—158, 1945.

Г. С. Ландсберг. Исследования Л. И. Мандельштама в области оптики и молекулярной физики (стр. 21—29).

А. А. Андронов. Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний (стр. 30—55).

И. Е. Тамм. О работах Л. И. Мандельштама в области теоретической физики (стр. 56—60).

Г. С. Горелик. Л. И. Мандельштам и учение о резонансе (стр. 61—76).

С. М. Рытов. Л. И. Мандельштам и учение о модуляции (стр. 77—87)

Е. Я. Щеголев. Академик Л. И. Мандельштам — радиоинженер (стр. 88—96).

10. Н. Д. Папалекси. О деятельности академика Л. И. Мандельштама в области радиофизики и радиотехники. Электричество, № 1—2, 41—45, 1945. Собрание трудов Н. Д. Папалекси, стр. 241—246. Изд-во АН СССР, 1948.

11. Н. Д. Папалекси. Из научных воспоминаний о Леониде Исааковиче Мандельштаме. Изв. АН СССР (сер. физ.), **10**, 127—134, 1946. Собрание трудов Н. Д. Папалекси, стр. 375—383. Изд-во АН СССР, 1948.

12. С. Э. Хайкин и Г. С. Ландсберг. Леонид Исаакович Мандельштам. Сборник „Люди русской науки“, т. I, стр. 260—271 М. — Л. ГИТТЛ, 1948.

ОГЛАВЛЕНИЕ III ТОМА

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *Г. А. Аристов*
Технически редактор *Н. П. Аузан*
Корректор *Л. К. Николаева*
Переплет и титул художника *И. А. Литвишко*

*

РИСО АН СССР № 3861. Т-00801. Изд. № 2376
Тип. заказ № 1521. Подп. к печ. 4/I 1950 г.
Формат бум. 70X108[1]/16. Печ. л. 26½ + 1 вклейка
Уч.-изд. л. 25. Тираж 3000.
Цена в переплете 24 руб.

1-я тип. Издательства Академии Наук СССР
Ленинград, В. О., 9 л., д. № 12

ОПЕЧАТКИ и ИСПРАВЛЕНИЯ

Сгр.	Строка	Напечатано	Должно быть
13	6 сн.	Передатчик	Антенна
29	7 сн.	света	цвета
46	8 св.	ceteris	caeteris
50	16 св.	ceteris	caeteris
86	13 сн.	работают	работает
98	16 св.	(11).	(^{11}).
102	5 св.	ванд-	ван-
127	1 сн.	агрмонический	гармонический
236	11 сн.	волновые	и волновые
240	16 сн.	адсорбирующих	абсорбирующих
270	17 сн.	накопления	накопление
278	18—19 сн.	запроса.	запроса.“
281	13 св.	Гамбург.	Гамбург —
293	2 св.	интенсивные	интересные
345	3 св.	ceteris	caeteris
357	18 св.	Эта	Это
415	8 св.	Вит.	Витт.