

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике

С.П. Кузнецов

*Представлен обзор исследований, нацеленных на выявление или конструирование физических систем, в которых хаотическая динамика связана с присутствием однородно гиперболических аттракторов, таких как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса. Обсуждаются основы соответствующей математической теории и предложенные в литературе подходы к построению систем с гиперболическими аттракторами. Рассматриваются модели с импульсным воздействием, динамика в виде периодически повторяющихся стадий, на каждой из которых эволюция описывается своей формой уравнений, конструирование систем из осцилляторов, возбуждающихся попеременно и передающих возбуждение друг другу, а также использование принципа параметрического возбуждения колебаний и введение запаздывающей обратной связи. Приведены примеры отображений, дифференциальных уравнений, а также простых механических и радиотехнических систем с хаотической динамикой, обусловленной присутствием однородно гиперболических аттракторов.*

PACS numbers: 05.45.–a, 45.50.–j, 84.30.–r

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0121

## Содержание

1. Введение (121).
2. Динамические системы (122).
3. Интерпретация динамики в терминах фазовой жидкости и простые примеры гиперболических аттракторов (123).
4. Основные понятия гиперболической теории (125).
5. О содержании и выводах гиперболической теории (126).
6. О работах, имеющих отношение к поиску однородно гиперболических аттракторов (129).
7. Соленоид Смейла–Вильямса в задаче о движении частицы на плоскости при импульсном периодическом воздействии (132).
8. Однородно гиперболические аттракторы в дифференциальных уравнениях с кусочно-постоянными во времени правыми частями (134).
  - 8.1. Динамическая система с аттрактором типа Плыкина.
  - 8.2. Модель с аттрактором типа Плыкина на основе связанных осцилляторов.
9. Однородно гиперболические аттракторы в системах связанных осцилляторов с поочерёдным возбуждением (137).
  - 9.1. Аттрактор Смейла–Вильямса в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля.
  - 9.2. Аттрактор Смейла–

Вильямса в автономной системе. 9.3. Параметрический генератор хаоса.

10. О возможности реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса в системах с запаздыванием (142).
11. О реализации гиперболических аттракторов в радиотехнических устройствах (144).
  - 11.1. Схема на основе связанных автогенераторов с поочерёдным возбуждением.
  - 11.2. Схема на основе автогенератора с запаздывающей обратной связью.
12. Заключение (146).

Список литературы (147).

## 1. Введение

Одним из интенсивно развивающихся в последнее время научных направлений является исследование сложной динамики и хаоса в нелинейных системах [1–13].

Абстрагируясь от физической природы объекта, о нём говорят как о динамической системе, если его состояние в любой момент времени получается из начального состояния по некоторому установленному для данной системы правилу. Что замечательно, такое определение не исключает возможности хаотического поведения системы, при котором зависимость наблюдаемых величин от времени выглядит как случайный процесс. Основное свойство динамического хаоса — экспоненциальная чувствительность к малым возмущениям, делающая невозможным предсказание состояний на временах, превышающих некоторый характерный масштаб, логарифмически зависящий от неточности задания начальных условий ("горизонт предсказуемости"). Хаос

С.П. Кузнецов. Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал, ул. Зелёная 38, 410019 Саратов, Российская Федерация  
Тел. (8452) 27-86-85  
E-mail: spkuz@yandex.ru

Статья поступила 1 апреля 2010 г.,  
после доработки 16 сентября 2010 г.

встречается в системах разной природы, в том числе в механике, гидродинамике, радиофизике и электронике, лазерной физике и нелинейной оптике, химической кинетике, в биомедицинских объектах.

В пространстве состояний систем с диссипацией хаос ассоциируется с присутствием *странного аттрактора*. Около 40 лет назад в математических работах была введена особая разновидность таких аттракторов — *однородно гиперболические аттракторы*. Они встречаются в системах, относящихся к так называемому *классу систем с аксиомой A*, и составляют предмет *гиперболической теории*, связанной с именами Аносова, Алексеева, Смейла, Вильямса, Синая, Плыкина, Рюэля, Песина, Ньюхауса и др. [14–25]. Хаотическая природа динамики на однородно гиперболических аттракторах безупречно математически обоснована. Однородно гиперболические аттракторы обладают свойством структурной устойчивости, т.е. устройство фазового пространства и характеристики динамики нечувствительны к вариации параметров и функций в определяющих уравнениях. Первоначально ожидалось, что однородно гиперболические аттракторы будут адекватны многим физическим ситуациям, в которых приходится иметь дело с хаосом. Однако по мере накопления конкретных примеров стало ясно, что эти примеры не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Поэтому на однородно гиперболические аттракторы стали смотреть как на рафинированный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальным системам. Усилия математиков оказались направлены на разработку обобщений, применимых к более широким классам объектов. Например, были введены понятия квазигиперболических аттракторов, неоднородно гиперболических аттракторов, частично гиперболических аттракторов, квазиаттракторов [2, 19, 25–28].

Оставленным надолго и непрояснённым до недавних пор оказался вопрос о возможности указать физические системы, хаотическая динамика в которых была бы обусловлена присутствием именно однородно гиперболических аттракторов. В учебниках и обзорах по нелинейной динамике такие аттракторы обычно представлены моделями с дискретным временем в виде геометрических конструкций, объясняемых на качественном уровне, например, с помощью графических образов. Конечно, для физика это не более чем исходный пункт работы. Прежде всего, желательно иметь, помимо геометрических построений, примеры в виде явно записанных уравнений, что позволило бы привлечь компьютерные методы для анализа динамики и расчёта характеристик, интересных для возможных приложений. Некоторые физические системы допускают естественное описание в дискретном времени, и стоило бы рассмотреть возможность реализации в них гиперболических аттракторов. Далее, важно перейти к системам с непрерывным временем, поскольку для физики и техники они интересны в первую очередь. Желательно указать, как осуществить динамику на гиперболическом аттракторе путём комбинации структурных элементов, известных в контексте теории колебаний и её приложений (осцилляторы, связанные системы, цепи обратной связи). Наконец, предложенные модели должны быть реализованы как функционирующие устройства, например, в электронике, механике, нелинейной оптике, и должны быть намечены технические приложения таких устройств с

обоснованием преимуществ над возможными альтернативными решениями.

Со времени классических работ Андронова и его школы [29, 30] в теории колебаний грубые, или структурно устойчивые, системы считаются подлежащими первоочередному исследованию и рассматриваются как наиболее значимые с практической точки зрения. Казалось бы, то же самое должно относиться и к системам со структурно устойчивыми однородно гиперболическими хаотическими аттракторами. Отсутствие конкретных физических примеров в связи с этим представляется очевидным диссонансом. С методологической точки зрения, ситуация похожа на ту, которая имела место в начале XX в. в отношении предельных циклов, прежде чем была установлена их роль как математического образа автоколебаний. Точно так же гиперболические хаотические аттракторы должны найти своё место как образы явлений в реальных системах, что будет, с одной стороны, способствовать привлечению развитой математикой гиперболической теории для описания реальных систем, а с другой — наполнению этой теории физическим содержанием. Целью настоящего обзора является обсуждение полученных в данном направлении результатов.

## 2. Динамические системы

О динамической системе говорят, если указан набор величин, называемых *динамическими переменными*, которые полностью характеризуют мгновенное состояние, и задано правило, позволяющее по начальному состоянию системы получить её состояние в любой последующий момент времени. Множество всевозможных состояний образует *фазовое пространство*, размерность  $N$  которого определяется числом задающих состояние переменных. Изменение состояния во времени отвечает движению точки в этом пространстве по *фазовой траектории*, или *орбите*. Рассматривают системы как с непрерывным, так и с дискретным временем, которые в математической литературе именуются соответственно *потоками* и *каскадами*.

Для описания систем с непрерывным временем используются дифференциальные уравнения вида  $dx/dt = f(x)$ , где  $x$  —  $N$ -мерный вектор состояния,  $f$  — векторная функция. В силу теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений, по известному состоянию в некоторый момент времени можно однозначно определить состояния как в последующие, так и в предшествующие моменты. То есть эволюцию состояния можно отслеживать как вперёд, так и назад во времени.

Если функция в правой части дифференциального уравнения явным образом зависит от времени, то система  $dx/dt = f(x, t)$  — *неавтономная*. В этом случае для задания состояния нужно указать, кроме вектора  $x$ , момент времени, к которому вектор  $x$  относится. Поэтому вводится пространство размерностью  $N + 1$  с дополнительной координатной осью  $t$ , о котором в этом контексте говорят как о *расширенном фазовом пространстве*. В настоящем обзоре, обращаясь к неавтономным системам, будем иметь в виду только периодическую зависимость функций  $f$  от времени.

Системы с дискретным временем задают с помощью отображения, определяющего трансформацию состоя-

ния за один шаг,  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$ , где  $\mathbf{x}$  — вектор состояния,  $\mathbf{g}$  — векторная функция. В этом случае фазовая траектория даётся дискретной последовательностью точек.

Оба класса систем, с непрерывным и дискретным временем, тесно связаны между собой. Перейти от одних к другим позволяет построение, известное как *сечение Пуанкаре*. В фазовом пространстве системы с непрерывным временем выбирают некоторую фиксированную секущую поверхность так, чтобы фазовые траектории раз за разом её пересекали<sup>1</sup>. Тогда можно ввести функцию, ставящую в соответствие любой точке секущей поверхности другую точку, в которой поверхность вновь протыкается траекторией, испущенной из исходной точки. Эта функция задаёт *отображение Пуанкаре*. Если коэффициенты в дифференциальных уравнениях имеют гладкую зависимость от динамических переменных, то отображение представляет собой *диффеоморфизм*, т.е. задаётся непрерывно дифференцируемой функцией, имеющей однозначно определённую обратную функцию, также непрерывно дифференцируемую.

Для неавтономной системы, в дифференциальном уравнении которой правая часть имеет временной период  $T$ , стандартный способ построения отображения Пуанкаре состоит в том, что динамику рассматривают стробоскопически, отслеживая состояния  $\mathbf{x}_n$  в моменты  $t = t_0 + nT$ . Это соответствует выбору сечения расширенного фазового пространства семейством плоскостей  $t = t_0 + nT$ , причём отображение производится с одной плоскости на другую с номером, большим на единицу.

Восстановление системы с непрерывным временем по заданному обратимому отображению называют *надстройкой (suspension)*<sup>2</sup>.

Для того чтобы проводить различие между регулярной и хаотической динамикой на количественном уровне, используют *показатели Ляпунова*. Пусть имеется некоторая траектория, остающаяся в ограниченной области фазового пространства, и близкая к ней соседняя траектория, слегка отличающаяся от первой из-за немного различных начальных условий. Пока возмущения мало, эволюция во времени вектора разности состояний описывается (с точностью до несущественного предэкспоненциального множителя) соотношением  $\tilde{\mathbf{x}} \sim \exp(\lambda_i t)$ , где  $\lambda_i$  — показатель Ляпунова. Для каждой траектории имеется набор из  $N$  показателей  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (по размерности фазового пространства), который называют *спектром показателей Ляпунова*. Положительный показатель означает, что соседняя траектория удаляется от исходной орбиты, а отрицательный — что траектории сближаются.

Процедура расчёта показателей Ляпунова на компьютере [6, 11, 31] состоит в совместном решении системы уравнений  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , определяющих движение по данной траектории, и  $N$  комплектов линеаризованных вблизи этой траектории уравнений для векторов

возмущения  $d\tilde{\mathbf{x}}/dt = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}}$ , где  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  — матричная производная векторной функции. Для систем с дискретным временем соответственно проводятся итерации отображения  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$  совместно с комплектом линеаризованных отображений  $\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{g}'(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n$ . В процессе вычислений выполняется ортогонализация векторов  $\tilde{\mathbf{x}}$  по Граму–Шмидту и их нормирование на фиксированную константу. Показатели Ляпунова получаются как угловые коэффициенты прямых, аппроксимирующих временную зависимость накапливающихся сумм логарифмов отношений норм векторов до и после перенормирования.

Выделяют системы *консервативные* и *диссипативные*. Для консервативных систем характерно сохранение "памяти" о начальном состоянии. Например, колебания маятника в отсутствие трения сохраняют ту амплитуду, которая возникла при начальном толчке. С другой стороны, диссипативным системам присуща "потеря памяти", так что в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, режим динамики становится не зависящим от начального состояния, как для маятника при наличии трения или для электронного генератора периодических автоколебаний.

Аттрактор — это объект в фазовом пространстве диссипативной системы, отвечающий установившемуся режиму динамики. Простейший пример аттрактора — устойчивое состояние равновесия. Другой простой пример — устойчивый предельный цикл, замкнутая фазовая траектория, служащая математическим образом периодических автоколебаний.

Спектр показателей Ляпунова аттрактора понимается как спектр показателей для типичной траектории на аттракторе. Наличие в спектре хотя бы одного положительного показателя Ляпунова показывает, что аттрактор — хаотический. Сумма всех  $N$  показателей для аттрактора должна быть отрицательной. Для автономных систем с непрерывным временем аттрактор, отличный от притягивающей неподвижной точки, обязан иметь в спектре нулевой показатель, который ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль фазовой траектории.

Странные аттракторы обладают фрактальной структурой. По известному спектру показателей Ляпунова можно оценить фрактальную размерность аттрактора по формуле Каплана – Йорке [6, 11, 32]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|},$$

где число  $m$  определяется из условий  $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0$ ,  $S_{m+1} < 0$ .

### 3. Интерпретация динамики в терминах фазовой жидкости и простые примеры гиперболических аттракторов

Рассмотрим ансамбль, составленный из большого числа одинаковых невзаимодействующих динамических систем, различающихся только начальными состояниями. В фазовом пространстве этому ансамблю отвечает облако изображающих точек, изменяющее с течением времени свои размеры и форму из-за движения точек в соответствии с динамическими уравнениями индивидуальной системы. В диссипативных системах

<sup>1</sup> Точнее, имеется в виду гиперповерхность, размерность которой на единицу меньше размерности фазового пространства.

<sup>2</sup> Говоря о надстройке, обычно подразумевают потоковую систему, у которой отображение требуемого вида осуществляется за время, не зависящее от исходного состояния, что ассоциируется с построением неавтономной системы дифференциальных уравнений с периодическими зависящими от времени коэффициентами. В более общем случае системы, для которой отображение заданного вида представляет собой отображение Пуанкаре, используют термин *специальный поток*.

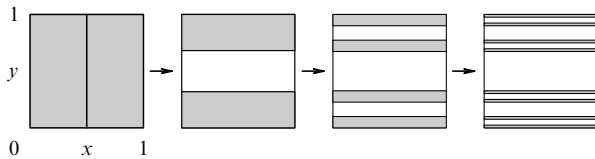


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация действия диссипативного отображения пекаря.

объём облака убывает и в итоге оно "оседает" на аттрактор (или, возможно, несколько аттракторов).

Хаотическая динамика возникает в случае, когда последовательно проводятся повторяющиеся преобразования растяжения, складывания и сплющивания облака изображающих точек. Для иллюстрации рассмотрим диссипативную версию так называемого *отображения пекаря* [6, 11] (рис. 1). Возьмём единичный квадрат на плоскости  $(x, y)$  и деформируем его так, как пекарь раскатывает кусок теста, и пусть при этом горизонтальный размер увеличивается вдвое, а вертикальный сжимается в три раза. Полная площадь уменьшается, в чём выражается диссипативная природа отображения; "тесто" в данном случае следует представлять как сжимаемую субстанцию. Далее, разрежем кусок пополам и поместим половинки одна над другой вдоль верхней и нижней сторон единичного квадрата, оставив зазор посередине. При многократном повторении образуется система горизонтальных полос, число которых увеличивается пропорционально  $2^n$  ( $n$  — число итераций), тогда как суммарная ширина убывает пропорционально  $(2/3)^n$ . При этом индивидуальная динамика частицы "теста" — хаотическая<sup>3</sup>. Аттрактор представляет собой объект, возникающий в пределе бесконечно большого числа итераций и имеющий в поперечном сечении структуру *канторова множества*. Отметим равномерное распределение плотности "теста" вдоль слоёв.

Несмотря на свою простоту, отображение пекаря иллюстрирует многие общие черты хаотических аттракторов, например наличие поперечной канторовой структуры и сочетание устойчивости, в смысле притяжения изображающих точек к аттрактору, и неустойчивости, в смысле их разбегания вдоль волокон аттрактора.

Естественную неудовлетворённость вызывает разрезание "теста". Можно попытаться этого избежать, полагая, что после раскатывания кусок не режут, а перегибают, так чтобы он снова поместился в единичном квадрате. Тогда на первых шагах итераций тоже можно будет увидеть начало формирования слоистой структуры. Однако в пределе большого числа итераций

<sup>3</sup> Для индивидуальной частицы "теста" эволюция координат  $(x, y)$  в дискретном времени  $n$  описывается уравнениями  $x_{n+1} = 2x_n$ ,  $y_{n+1} = 1/3y_n$  при  $x_n \leq 1/2$  и  $x_{n+1} = 2x_n - 1$ ,  $y_{n+1} = 1/3y_n + 2/3$  при  $x_n > 1/2$ . Для того чтобы убедиться в хаотической природе динамики, представим начальное значение  $x$  числом в двоичной записи, например, как 0,0110010110111... Один шаг эволюции отвечает сдвигу последовательности на одну позицию влево с отбрасыванием крайней левой цифры. Цифра 0 или 1 в первой позиции после запятой показывает, в левой или правой половине единичного квадрата находится частица в данный момент. При взятом наугад начальном условии имеем случайный набор нулей и единиц в двоичной записи, так что изображающая точка будет посещать левую и правую половины квадрата согласно данной случайной последовательности.

равномерного распределения вдоль волокон, или хотя бы близкого к таковому, не получается! Субстанция имеет тенденцию накапливаться в местах складок, образуя сингулярности распределения плотности. Причина заключается в том, что вблизи места перегиба направление сжатия совпадает с вертикальной касательной на краю куска и при сплющивании возникает область повышенной плотности. В нелинейных диссипативных системах это может ассоциироваться с негиперболическим хаосом или с оседанием в итоге облака на регулярные аттракторы (неподвижные точки и циклы).

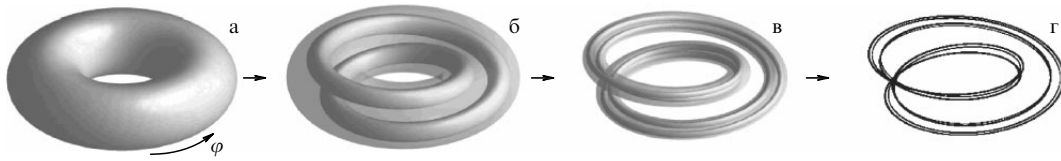
*Гиперболический хаос отвечает ситуации, в которой трансформация облака изображающих точек в фазовом пространстве, включающая в себя продольное растяжение и поперечное сжатие, осуществляется равномерно, без разрывов и образования локальных уплотнений.*

В том, что аттракторы с такими свойствами возможны, позволяет убедиться рассмотрение подходящих искусственно сконструированных примеров. При построении указывается область в фазовом пространстве, называемая *поглощающей*, и правило эволюции в дискретном времени, такое, чтобы за один шаг эта область отображалась внутрь себя. Тогда аттрактор с очевидностью расположен внутри поглощающей области.

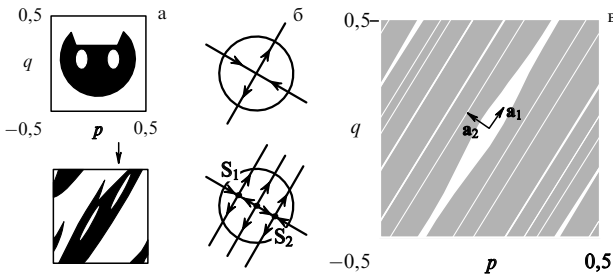
Первый пример — *аттрактор Смейла–Вильямса* [14–24], который задаётся отображением в трёхмерном пространстве. Рассмотрим область в форме тора. Представим этот тор как пластичный бублик, растянем его в длину, сожмём в поперечном направлении, сложим в виде двойной петли и вложим внутрь исходного тора (рис. 2). Чтобы полученная конструкция там поместилась, надо принять, что поперечный размер сокращается более чем вдвое. На каждой итерации общий объём уменьшается (диссипативность), а число витков удваивается. В пределе число витков стремится к бесконечности и формируется так называемый *соленоид*, имеющий канторову структуру в поперечном сечении<sup>4</sup>. Существенным моментом является то, что угловая координата  $\varphi$  удваивается (см. рис. 2). Обобщение конструкции состоит в том, что складывание проводится так, чтобы получилась петля с числом витков  $M$ , что соответствует отображению вида  $\varphi_{n+1} = M\varphi_n \pmod{2\pi}$  для угловой координаты. При  $M \geq 2$  такое отображение называют *растягивающим отображением окружности*, или *отображением Бернулли*.

Предложенный Смейлом *аттрактор DA (Derived from Anosov)* задаётся двумерным отображением на поверхности тора [14, 17, 19, 20]. В качестве отправного пункта берётся отображение Аносова  $p_{n+1} = p_n + q_n$ ,  $q_{n+1} = p_n + 2q_n \pmod{1}$ , где  $\varphi = 2\pi p$  и  $\theta = 2\pi q$  соответствуют угловым координатам на торе. Графически фазовое пространство удобно представлять как развёртку тора в виде единичного квадрата (рис. 3). Отображение Аносова является консервативным и имеет неподвиж-

<sup>4</sup> Соленоид как топологический объект введён математиками Виеторисом (L. Vietoris) и ван Данцигом (D. van Dantzig) [19]. В качестве хаотического аттрактора соленоид появляется в работах Смейла [14] и Вильямса [15]. Интересно, что соленоид встречается в теории динамических систем ещё и в ином контексте — как нехаотический аттрактор в критической точке накопления бифуркаций удвоения периода по Фейгенбауму [33]. (В последнем случае формирование каждого нового уровня фрактальной структуры ассоциируется не с одним шагом итераций, как для аттрактора Смейла–Вильямса, а с удвоением временного масштаба.)



**Рис. 2.** Поглощающая область в виде тора в трёхмерном фазовом пространстве (а), результат ее преобразования на двух итерациях (б, в) и соленоид Смейла – Вильямса, получающийся при многократном применении отображения (г).



**Рис. 3.** (а) Иллюстрация действия гиперболического отображения Аносова, называемого также отображением kota Арнольда, на точки единичного квадрата, представляющего собой развёртку тора. (б) Пояснение модификации отображения в окрестности неподвижной точки, составляющей содержание "хирургии Смейла" для перехода к отображению с DA-аттрактором. (в) Портрет аттрактора в единичном квадрате.

ную точку типа седла в начале координат, причём устойчивое и неустойчивое направления определяются векторами  $\mathbf{a}_1 = (1, W)$  и  $\mathbf{a}_2 = (-W, 1)$ , где  $W = (\sqrt{5} + 1)/2$ .

Для того чтобы присутствовал аттрактор, предлагается видоизменить отображение, сделав его диссипативным, посредством "хирургической операции" в небольшой окрестности неподвижной точки. Модификация производится так, что движение вдоль неустойчивого направления не претерпевает изменений, а по ортогональному направлению неподвижная точка становится отталкивающей и рядом с ней возникают седла  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 3б). За пределами зоны, подвергнутой "хирургии", вид отображения не меняется.

Поглощающей областью служит вся поверхность тора, за исключением вырезанной окрестности начала координат. При итерациях вырез вытягивается параллельно вектору  $\mathbf{a}_1$  с одновременным сжатием по ортогональному направлению  $\mathbf{a}_2$ , так что "отростки" превращаются в узкие полоски, тянущиеся вдоль неустойчивого направления. Поскольку угловой коэффициент иррационален, эти полоски плотно покрывают тор (рис. 3в). Так формируется характерная для гиперболического аттрактора поперечная канторова структура. Один из конкретных вариантов такого аттрактора описан в статье [34], посвящённой компьютерным иллюстрациям объектов гиперболической теории.

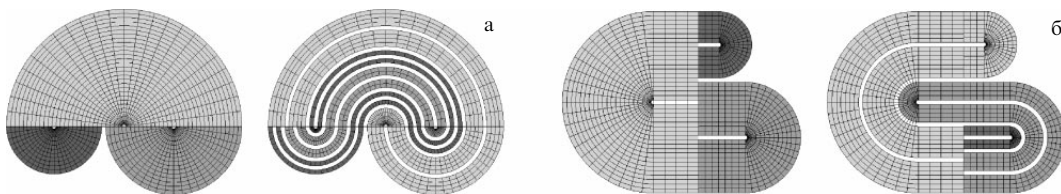
*Аттрактор Плькина* [17, 19, 20, 35] имеет место в специальном двумерном отображении на плоскости. На рисунке 4а показана область из трёх полудисков с маленькими полукруглыми вырезами, покрытая штриховкой, обозначающей два поля направлений, заданных в этой области. Определим отображение так, чтобы в результате его действия на точки данной области получалась фигура, изображённая в правой части рис. 4а. Поля направлений после применения отображения совпадают с исходными полями, причём по одному производится сжатие, а по другому — растяжение. Это обеспечивает гиперболическую природу аттрактора.

В настоящее время известно, что в ограниченной плоской области с тремя и более дырками можно сконструировать много разных по своему устройству гиперболических аттракторов [15, 36, 37]. О них говорят как об *аттракторах типа Плькина*. Одна из модификаций, представляющая специальный интерес для дальнейшего изложения, приведена на рис. 4б. Аттракторы типа Плькина также можно рассматривать на сфере. Переход от плоскости к сфере и обратно отвечает замене переменных, которая даётся известной из элементарной геометрии стереографической проекцией. На сфере минимальное число дырок, требующееся для наличия однородно гиперболического аттрактора, равно четырём<sup>5</sup>.

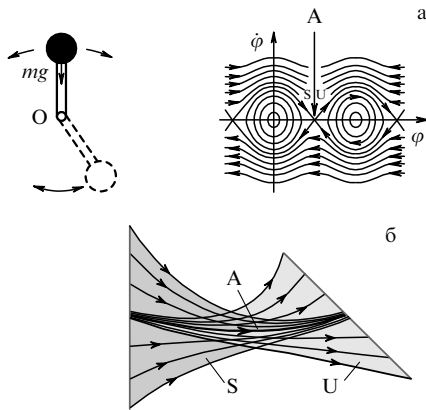
#### 4. Основные понятия гиперболической теории

Введение в гиперболическую теорию уместно начать с обсуждения неподвижной точки типа седла. На рисунке 5а показан маятник и его фазовый портрет на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , где  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали,  $\dot{\varphi}$  — мгновенная угловая скорость. Маятник может колебаться около нижнего положения равновесия  $\varphi = 0$ , но сейчас нас интересует неустойчивое состояние,  $\varphi = \pi$ . На фазовой плоскости неустойчивому состоянию отве-

<sup>5</sup> Это согласуется с прежним утверждением. В самом деле, если центр проецирования (отображаемый при стереографической проекции в бесконечность) помещён на сфере в одной из дырок, то на плоскости как раз получаем аттрактор, локализованный в ограниченной области с тремя дырками.



**Рис. 4.** Поглощающая область аттрактора и результат её преобразования при применении отображения для двух вариантов (а, б) аттрактора типа Плькина.



**Рис. 5.** К понятию седловой гиперболической траектории. (а) Маятник и его фазовый портрет, содержащий неподвижную точку типа седла А. (б) Устройство фазового пространства вблизи седловой траектории А общего вида. Буквами S и U помечены соответственно устойчивое и неустойчивое многообразия.

чает точка седла А, расположенная на пересечении кривых, называемых сепаратрисами. При наличии малого возмущения изображающая точка будет уходить из состояния равновесия вдоль неустойчивой сепаратрисы U. С другой стороны, пусть маятнику в нижнем положении сообщён точно рассчитанный импульс, такой, при котором маятник достигнет верхней точки и остановится. В этом случае изображающая точка идёт по кривой S, называемой устойчивой сепаратрисой. Фазовая траектория, состоящая из одной точки седла, — гиперболическая. (Термин связан с тем, что фазовые траектории в локальной области вблизи седла имеют вид гипербол.)

Можно рассмотреть обладающую аналогичными свойствами седловую траекторию общего вида (рис. 5б).

Траекторию называют *гиперболической*, если для каждой её точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов  $V_S$ , экспоненциально убывающих по норме при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов  $V_U$ , экспоненциально убывающих при эволюции в обратном времени. В потоковых системах для траекторий, отличных от неподвижной точки, вводится, кроме того, одномерное нейтральное подпространство, отвечающее возмущениям вдоль траектории, которые в среднем не возрастают и не убывают. Произвольный вектор малого возмущения обязан допускать представление в виде линейной комбинации векторов, относящихся к указанным подпространствам.

Множество точек, которые в ходе эволюции во времени приближаются к данной траектории, называется её *устойчивым многообразием*. Аналогично, *неустойчивое многообразие* — это множество точек, которые приближаются к исходной траектории при эволюции в обратном времени. Для гиперболических орбит это именно многообразия, т.е. гладкие кривые, поверхности или гиперповерхности, что является заключением специальной теоремы.

Гиперболические седловые траектории могут иметь место в фазовом пространстве как консервативных, так и диссипативных систем, но в этом обзоре мы будем обсуждать только диссипативный случай.

*Хаотический однородно гиперболический аттрактор* — это притягивающий объект в фазовом пространстве диссипативной системы, составленный исключительно из седловых траекторий, причём локально вблизи всех этих траекторий фазовое пространство устроено однотипно. Для всех траекторий на аттракторе многообразия обязаны иметь одну и ту же размерность. Пересечения между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями допускаются только под ненулевым углом (касания исключены).

Для аттрактора Смейла–Вильямса устойчивые многообразия отвечают семейству меридиональных сечений тора плоскостями  $\varphi = \text{const}$  (см. рис. 2). Неустойчивое многообразие каждой точки на аттракторе представляет собой волокно соленоида, проходящее через эту точку, а взятое целиком совпадает собственно с аттрактором. Для DA-аттрактора устойчивые многообразия — одномерные, так же как и неустойчивые. Неустойчивые многообразия вытянуты вдоль вектора  $\mathbf{a}_1$ , а устойчивые — вдоль ортогонального к нему вектора  $\mathbf{a}_2$ . Для аттрактора типа Плыкина устойчивые многообразия ассоциируются с семейством линий, вдоль которых производится сжатие фазового объёма (см. рис. 4). Неустойчивые многообразия вытянуты вдоль второго семейства линий, отвечающих направлениям растяжения.

## 5. О содержании и выводах гиперболической теории

Обратимся к краткому обзору гиперболической теории [14–24]. Для простоты будем говорить о системах с дискретным временем (отображениях). На системы с непрерывным временем результаты распространяются путём перехода к описанию в терминах отображения Пуанкаре.

Начнём с обсуждения *аксиомы А* — сформулированного Смейлом положения, которое (при дополнительном требовании строгой трансверсальности) позволяет выделить класс структурно устойчивых систем среди динамических систем с произвольной конечной размерностью.

Точка в фазовом пространстве динамической системы называется *блуждающей*, если она имеет окрестность, в которую стартовавшая из данной точки траектория, начиная с некоторого момента времени, никогда больше не вернётся. С физической точки зрения, такая динамика отвечает переходному процессу. Прочие точки относятся к *неблуждающим*. Аксиома А для системы с дискретным временем, заданной некоторым диффеоморфизмом  $\mathbf{g}$ , состоит в том, что, во-первых, множество неблуждающих точек  $NW$  — гиперболическое, и, во-вторых, периодические точки отображения  $\mathbf{g}$  образуют плотное подмножество в  $NW$ . Последнее означает, что в сколь угодно малой окрестности любой точки множества  $NW$  обязательно найдётся точка, относящаяся к какой-либо периодической орбите, принадлежащей тому же множеству<sup>6</sup>. Гиперболическость понимается, как объяснялось выше: имеется в виду, что линейное пространство векторов возмущений составлено из подпро-

<sup>6</sup> Один из частных классов систем с аксиомой А образуют системы Аносова, такие как отображение кота Арнольда, специфика которых состоит в том, что для них множество неблуждающих точек занимает всё фазовое пространство.

странств  $V_U$  и  $V_S$ , отвечающих экспоненциальному растяжению или сжатию векторов в ходе временной эволюции<sup>7</sup>. Условие строгой трансверсальности требует, чтобы взаимное расположение устойчивых и неустойчивых многообразий для произвольной пары точек, принадлежащих множеству  $NW$ , отвечало ситуации общего положения, т.е. пересечения допускаются только под ненулевым углом (касания исключены).

Для систем с аксиомой А имеет место доказанная Смейлом теорема о спектральной декомпозиции [2, 14], утверждающая, что множество неблуждающих точек допускает представление в виде объединения конечного числа непересекающихся инвариантных множеств  $B_i$ , обладающих свойством транзитивности (т.е. каждое такое множество включает в себя траекторию, посещающую сколь угодно малую окрестность любой точки множества), которые называют *базисными* или *локально максимальными множествами*. Для различных конкретных систем такие множества могут представлять собой устойчивые или неустойчивые неподвижные точки, периодические орбиты, нетривиальные притягивающие, отталкивающие, седловые инвариантные множества. Определение локально максимального множества подразумевает, что оно представляется пересечением образов некоторой содержащей его окрестности, получаемых итерациями отображения в прямом и в обратном времени. Это похоже на определение аттрактора как пересечения образов поглощающей области при итерациях в прямом времени, и такой аттрактор, естественно, может иметь место как частный случай базисного множества. Далее, каждое базисное множество представимо как объединение конечного числа  $k_i \geq 1$  непересекающихся подмножеств  $X_{i,y}$ , посещаемых по очереди в определённом порядке при итерациях отображения. Каждое множество  $X_{i,y}$  является инвариантным множеством для отображения, взятого  $k_i$  раз.

Однородно гиперболические аттракторы типа аттракторов Плыкина, Смейла – Вильямса, DA-аттрактор — это базисные множества модельных динамических систем с аксиомой А, для которых  $k = 1$  (т.е. они не допускают дальнейшего разложения на компоненты). В настоящем обзоре мы будем иметь дело только с аттракторами такого рода и не будем касаться случая  $k > 1$ . Кроме того, если специально не оговорено, будем иметь в виду только аттракторы, у которых неустойчивые многообразия одномерны.

Существует обоснованный на уровне математической теоремы критерий гиперболичности, допускающий проверку в численных расчётах, — *критерий конусов* [16, 17, 20, 22, 23].

Пусть динамика в дискретном времени задана гладким отображением  $\bar{x} = f(x)$ . Критерий конусов требует, чтобы при некотором выборе константы  $\gamma > 1$  для каждой точки  $x$  на данной траектории в пространстве векторов инфинитезимальных возмущений (касательном пространстве) можно было определить расширяющийся и сжимающийся конусы (рис. 6). Расширяющийся конус представляет собой множество векторов инфини-

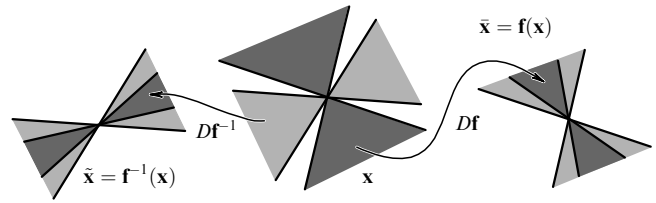


Рис. 6. К пояснению критерия гиперболичности. Для точки  $x$  образ расширяющегося конуса располагается внутри расширяющегося конуса, определённого для точки-образа  $\bar{x} = f(x)$ , а прообраз сжимающегося конуса — внутри сжимающегося конуса для точки-прообраза  $\tilde{x} = f^{-1}(x)$ .  $Df$  и  $Df^{-1}$  — матричные производные прямого и обратного отображения, задающие преобразование векторов возмущения при шаге вперёд и назад во времени.

тезимальных возмущений, норма которых в результате применения отображения  $\bar{x} = f(x)$  увеличивается в  $\gamma$  и более раз. Сжимающийся конус — это множество векторов, норма которых увеличивается в  $\gamma$  и более раз при действии обратного отображения  $\tilde{x} = f^{-1}(x)$ . Имея в виду гладкую зависимость всех рассматриваемых объектов от положения исходной точки в фазовом пространстве, говорят о полях расширяющихся и сжимающихся конусов. Эти конусы должны быть инвариантны в том смысле, что для всех точек  $x$  на данной траектории образ расширяющегося конуса обязан располагаться внутри расширяющегося конуса, определённого для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса — внутри сжимающегося конуса для точки-прообраза.

Какие следствия можно вывести из гиперболической природы аттрактора?

*Неустойчивость.* Принадлежность неустойчивого многообразия аттрактору обуславливает чувствительность движения на аттракторе к малым начальным возмущениям, что является главным атрибутом динамического хаоса. В самом деле, две изображающие точки, немного смещённые одна относительно другой вдоль неустойчивого многообразия, с течением времени будут удаляться друг от друга. До тех пор пока возмущение мало, его возрастание происходит в среднем по экспоненциальному закону,  $\|\Delta x\| \sim \exp(\Lambda n)$ , где  $n$  — дискретное время,  $\Lambda > 0$  — старший показатель Ляпунова. Если неустойчивые многообразия одномерны, то спектр показателей Ляпунова содержит один положительный показатель, тогда как все остальные показатели отрицательны. Подчёркнём, что для отображений все показатели Ляпунова однородно гиперболического аттрактора дистанцированы от нуля. В самом деле, для индивидуальных траекторий на аттракторе положительным показателям отвечают векторы возмущения, принадлежащие определённым в точках этих траекторий расширяющимся конусам. Поскольку снизу степень расширения ограничена константой  $\gamma > 1$ , то положительный показатель Ляпунова не меньше числа  $\Lambda_{\min}^+ = \ln \gamma$ . Это справедливо для всех принадлежащих аттрактору траекторий, а значит, такая же оценка верна и для показателя, отвечающего аттрактору в целом. Аналогично, отрицательные показатели Ляпунова, которые ассоциируются с векторами, принадлежащими сжимающимся конусам, ограничены сверху константой  $\Lambda_{\max}^- = -\ln \gamma$ .

*Марковские разбиения и символическая динамика.* Благодаря присутствию в окрестности аттрактора структуры, образованной устойчивыми и неустойчивыми

<sup>7</sup> Не исключаются ситуации, в которой одно из подпространств  $V_U$  или  $V_S$ , является пустым множеством, что, в частности, позволяет включить в рамки картины, основывающейся на аксиоме А, структурно устойчивые системы с простыми неблуждающими множествами типа неподвижных точек или периодических орбит.

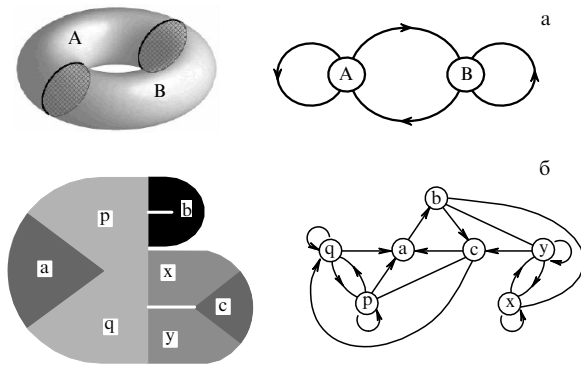


Рис. 7. Марковские разбиения и изображения графов, определяющих разрешённые переходы, для аттрактора Смейла–Вильямса (а) и аттрактора типа Плыкина (б).

многообразиями, оказывается возможным построить разбиение области, содержащей аттрактор, на конечное число неперекрывающихся односвязных подобластей, границы которых располагаются вдоль соответствующих этим многообразиям линий или поверхностей. При выполнении некоторых условий [2, 16, 17, 20, 23, 24] (в частности, при действии отображения образы тех границ, которые проходят по устойчивым многообразиям, должны попадать опять на такие же границы) это разбиение, которое называется *марковским*, может быть положено в основу полного описания движений на аттракторе в терминах *символической динамики*.

Обозначая каждый элемент разбиения определённым символом (буквой), кодируем траекторию последовательностью этих символов в порядке посещения соответствующих областей. Для конкретных аттракторов эти последовательности могут подчиняться определённым ограничениям — "правилам грамматики", которые наглядно представляются в виде графа с конечным числом вершин и направленных рёбер. Графу ставится в соответствие *матрица смежности*, элементами которой являются нули и единицы, причём единица на позиции  $(i, j)$  означает присутствие ребра, идущего из  $i$ -го узла, а нуль — отсутствие такого разрешённого перехода. Рисунок 7 иллюстрирует марковские разбиения и графы для аттрактора Смейла–Вильямса и аттрактора типа Плыкина. Как видно, на этих графах имеется возможность перехода из каждой вершины в любую другую вдоль направленных рёбер за конечное число шагов, и при этом существуют вершины, из которых исходит более одного ребра<sup>8</sup>. Последнее означает, что при построении символической последовательности переход из такой вершины можно выбрать случайным образом из представленных альтернатив. При этом любой полученный таким образом код обязательно будет отвечать траектории на аттракторе с какими-то начальными условиями. Траектория будет демонстрировать хаотическое поведение, посещая области разбиения в соответствии с предписанной случайной последовательностью. Это можно интерпретировать как цепь Маркова [38] —

<sup>8</sup> Матрица смежности в данном случае обладает свойством транзитивности (это означает, что при её возведении в некоторую достаточно большую степень получается матрица, все элементы которой отличны от нуля) и аттрактор имеет, как говорят, единственную транзитивную компоненту.

случайный процесс с дискретным временем и конечным дискретным множеством состояний, ассоциирующихся с символами алфавита или элементами разбиения (с чем и связан термин "марковское разбиение").

Множество траекторий, принадлежащих гиперболическому аттрактору, находится в однозначном соответствии с множеством составленных из букв конечного алфавита бесконечных последовательностей, допускаемых правилами грамматики. Оно имеет мощность континуума. Множество периодических орбит на аттракторе соответствует периодическим символическим последовательностям и имеет мощность счётного множества. С возрастанием периода рассматриваемых периодических орбит  $P$  их число  $N_P$  увеличивается по экспоненциальному закону  $N_P \sim \exp(h_T P)$ , где величина  $h_T > 0$  называется *топологической энтропией* [39, 40]. Её интерпретируют как характеристику сложности множества траекторий динамической системы.

Ясно, что возможность полного символического описания траекторий на однородно гиперболическом аттракторе позволяет трактовать динамический процесс в контексте идей теории информации и кодирования. Это может быть важным с точки зрения использования систем с такими аттракторами в информационных и коммуникационных приложениях.

*Структурная устойчивость* [2, 14–23] однородно гиперболического аттрактора обусловлена тем обстоятельством, что растяжение и сжатие в фазовом пространстве осуществляется по направлениям, которые всегда образуют между собой ненулевой угол. В терминах устойчивых и неустойчивых многообразий это отвечает трансверсальному (без касаний) их взаимному расположению при пересечении. Если варьировать параметры или функции, фигурирующие в определении динамической системы (как говорят, "пошевелить систему"), то, благодаря трансверсальному пересечению многообразий, порождаемая ими топология разбиения фазового пространства не изменяется, до тех пор пока "шевеление" не слишком велико. Это относится, в том числе, к системе линий и поверхностей, использованных при построении марковского разбиения, благодаря чему сохраняется неизменной символическая динамика.

Более точная формулировка такова: до тех пор пока рассматривается малое "шевеление" в классе функций, непрерывных вместе со своими первыми производными (по принятой нотации — функций класса  $C^1$ ), система допускает приведение к исходному виду посредством взаимно однозначной и взаимно непрерывной замены переменных, т.е. остаётся топологически эквивалентной исходной системе.

*Показатели Ляпунова* определяются на основе уравнений в вариациях, получаемых линеаризацией исходных уравнений вблизи принадлежащей аттрактору траектории, что подразумевает применение операции дифференцирования. Поэтому относительно замены переменных, которая обычно не является гладкой, показатели Ляпунова, вообще говоря, не инвариантны. Тем не менее, благодаря структурной устойчивости, относительно их поведения при малом "шевелении" системы можно сделать определённые заключения. Пока аттрактор остаётся однородно гиперболическим, сохраняя топологическую структуру устойчивых и неустойчивых многообразий, число положительных и отрицательных показателей измениться не может. Более того, и те и другие



заведомо остаются дистанцированными от нуля. По-видимому, справедливо даже более сильное утверждение: при малом "шевелении" системы изменение, по крайней мере, положительного показателя Ляпунова тоже мало. Это подтверждается численными данными для моделей с однородно гиперболическими аттракторами, обсуждаемых в разделах 7–9, но математического результата, на который в связи с этим можно было бы сослаться, автору неизвестно.

Благодаря структурной устойчивости, траектории на однородно гиперболическом аттракторе обладают свойством *затенения* (shadowing), которое выражается в том, что при наличии действующего на систему произвольного небольшого возмущения (в том числе, зависящего от времени) для реализующейся фазовой траектории можно подобрать такую траекторию невозмущённой системы, что обе траектории будут оставаться близкими на всём протяжении эволюции во времени. Это относится, в частности, к системам, находящимся под действием шума с ограниченной интенсивностью. Данный замечательный результат, полученный в своё время Кифером [41], свидетельствует о том, что динамическая стохастичность в определённом смысле доминирует над стохастичностью, обусловленной малым случайным внешним воздействием.

*Существование абсолютно непрерывной инвариантной меры Синая–Рюэля–Боуэна* [2, 42–44]. Вернёмся к интерпретации динамики как эволюции облака изображающих точек в фазовом пространстве. В предположении, что в начальный момент ансамбль характеризуется "хорошей" функцией распределения (непрерывной и быстро спадающей на краях), зададимся вопросом: каким будет характер распределения на больших временах? Как можно убедиться, даже в самых простых ситуациях возникающие в пределе  $t \rightarrow \infty$  распределения оказываются сингулярными, как дельта-функция Дирака в случае устойчивого состояния равновесия. Обобщения, охватывающего как гладкие, так и сингулярные распределения можно достичь, привлекая такую математическую конструкцию, как мера. Задать меру — значит указать способ поставить в соответствие подмножеству фазового пространства (не любому, но принадлежащему к достаточно широкому классу измеримых подмножеств) неотрицательное число, причём должны быть выполнены определённые требования (например, объединение непересекающихся измеримых множеств имеет меру, равную сумме мер своих элементов).

Рассмотрим некоторую фазовую траекторию на аттракторе и договоримся, что любой области приписывается мера, равная относительной доле времени пребывания изображающей точки в этой области при времени наблюдения, стремящемся к бесконечности. Для однородно гиперболических аттракторов построенная таким образом мера для типичных траекторий оказывается одной и той же — так называемой *мерой Синая–Рюэля–Боуэна*. Последней отвечает распределение фазовой жидкости на волокнах аттрактора, т.е. на неустойчивых многообразиях, причём вдоль волокон субстанция распределена плавно, так что плотность распределения не имеет локальных сингулярностей. В математической литературе для такой меры используют термин *абсолютно непрерывная инвариантная мера*.

Движение на однородно гиперболическом аттракторе обладает свойствами *эргодичности* и *перемешива-*

*ния*<sup>9</sup> [2, 16–23]. Эргодичность означает, что типичная траектория на аттракторе посещает в ходе эволюции во времени любую окрестность любой точки на аттракторе. Это означает эквивалентность усреднения по времени и по инвариантной мере и обеспечивает возможность статистического подхода к анализу установившихся режимов динамики. Свойство перемешивания, которое является более сильным, выражается в том, что облако изображающих точек, соответствующее какому-либо элементу фазового объёма, через достаточно длительное время окажется распределённым по всему аттрактору. Наличие перемешивания позволяет описывать в рамках статистического подхода также приближение ансамбля систем к состоянию, отвечающему стационарному инвариантному распределению. Свойство перемешивания ассоциируется также с расщеплением корреляций: функция корреляции, вычисленная для сигнала, порождаемого динамикой на однородно гиперболическом аттракторе в системе с дискретным временем убывает экспоненциально. (Для систем, отвечающих надстройке диффеоморфизмов с однородно гиперболическими аттракторами, вопрос о перемешивании и убывании корреляций в непрерывном времени требует специального анализа в каждом конкретном случае, поскольку зависит от характера распределения времён возврата на секущую Пуанкаре.)

*Метрическая энтропия Колмогорова–Синая* [45, 46]. Рассмотрим всевозможные встречающиеся в символической записи траекторий на аттракторе "слова" из  $n$  символов и определим для каждого слова вероятность его появления  $p_i$ . Вероятность  $p_i$  можно толковать как меру Синая–Рюэля–Боуэна для множества точек в фазовом пространстве, которым отвечают траектории, посетившие за предыдущие  $n$  шагов обозначенные соответствующими символами элементы марковского разбиения. Определим сумму  $S_n = \sum p_i \log p_i$  по всем допустимым грамматикой словам, отнесём её к  $n$  и рассмотрим переход к пределу  $n \rightarrow \infty$ . Величина  $h_{KS} = -\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n$  называется *метрической энтропией*, или *энтропией Колмогорова–Синая*. Как видно из определения, метрическую энтропию можно интерпретировать как количество информации, порождаемой процессом динамики на аттракторе за единицу времени. Что существенно, определение апеллирует к заданной на аттракторе инвариантной мере. Положительность энтропии  $h_{KS}$  служит критерием хаотической природы аттрактора. С топологической энтропией энтропия  $h_{KS}$  связана неравенством  $h_T \geq h_{KS}$ . Результат, доказанный Песиным [47], устанавливает соответствие между энтропией Колмогорова–Синая и спектром показателей Ляпунова: энтропия Колмогорова–Синая равна сумме положительных показателей Ляпунова:  $h_{KS} = \sum_{A_i > 0} A_i$ .

## 6. О работах, имеющих отношение к поиску однородно гиперболических аттракторов

В начале 1970-х годов Рюэль и Такенс предложили концепцию, согласно которой переход к хаосу при изменении параметра, например числа Рейнольдса в гидродинамике, наступает после возникновения небольшого числа колебательных составляющих движения и

<sup>9</sup> Для упрощения формулировок здесь имеются в виду аттракторы, содержащие единственную транзитивную компоненту.

этот переход обусловлен появлением странного аттрактора [48]. В контексте настоящего обзора стоит подчеркнуть, что у авторов [48] речь шла не просто о странном аттракторе в широком смысле, как теперь этот термин повсеместно употребляется, а именно об однородно гиперболическом аттракторе. Математическая теорема, на которой основана концепция, формулируется применительно к трём ситуациям [49], а именно для диффеоморфизмов 1) на двумерном компактном многообразии, 2) на двумерном торе, 3) на компактном многообразии размерностью  $m \geq 3$ . В случае 1 доказано, что отображение, имеющее гиперболический аттрактор, можно отыскать сколь угодно близко к тождественному отображению в классе  $C^1$  (функций с первой производной). В случае 2 справедливо аналогичное утверждение в смысле близости в классе  $C^2$  (функций с двумя производными), а в случае 3 — в классе бесконечно дифференцируемых функций  $C^\infty$ .

Как показывает анализ проводимых при доказательстве рассуждений, конструкции 1 и 2 носят абсолютно нефизический характер, поскольку в определении отображения приходится иметь дело с функциями, сложно устроенными на малых масштабах в фазовом пространстве. При доказательстве во всех трёх случаях существование двумерного отображения с гиперболическим аттрактором принимается авторами как известный факт, поэтому данный подход вряд ли может помочь в нахождении конкретных примеров.

Одна из самых известных систем в контексте сложной динамики и хаоса — модель Лоренца [50], которая описывается системой уравнений  $\dot{x} = \sigma(y - x)$ ,  $\dot{y} = rx - y - xz$ ,  $\dot{z} = -bz + xy$ , где  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  — параметры (классическому аттрактору Лоренца отвечают  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ ). Существенным этапом в объяснении качественной стороны хаотической динамики явилось построение упрощённой модели, так называемого геометрического аттрактора Лоренца [21]. Своего рода итогом исследований стало компьютерное доказательство Такером [51] хаотической природы аттрактора Лоренца с помощью строго обоснованных вычислительных процедур.

Аттрактор Лоренца классифицируют как *квазигиперболический*, или *сингулярно гиперболический*, поскольку он включает в себя особую траекторию (неустойчивое многообразие расположенной в начале координат неподвижной точки). Поэтому аттрактор Лоренца не обладает структурной устойчивостью в обычном смысле, а марковское разбиение, хотя и может быть построено, но не с конечным алфавитом. На вопрос о том, можно ли модифицировать систему так, чтобы аттрактор стал однородно гиперболическим, положительный ответ дан в работе Моралеса [52], правда, лишь на уровне геометрической конструкции. Рассматривается модель, подобная геометрической модели аттрактора Лоренца, в которой неподвижная точка претерпевает бифуркацию, аналогичную седло-узловой. До бифуркации имеется пара неустойчивых неподвижных точек, одна из которых, по своей природе соответствующая неподвижной точке в модели Лоренца, имеет одно неустойчивое и два устойчивых направления, а вторая обладает двумя неустойчивыми и одним устойчивым направлениями. При вариации параметра обе точки сближаются, сливаются в момент бифуркации и исчезают. При этом с одной стороны по параметру от точки бифуркации имеет место аттрактор Лоренца. С другой стороны от неё,

вследствие исчезновения неподвижных точек, реализуется один из двух вариантов, в зависимости от устройства векторного поля в удалённых областях, через которые проходят траектории. Первый вариант состоит в возникновении негиперболической динамики, а второй — в появлении аттрактора типа Плыкина в отображении Пуанкаре.

Поскольку модель Лоренца имеет отношение к ряду физических систем, версия с гиперболическим аттрактором, по-видимому, может оказаться применимой к определённым модификациям этих систем.

Подход к построению двумерного отображения с аттрактором типа Плыкина в виде явно записанных формул предложен в работе Лопеса [53]. Автор [53] задаётся вопросом: какова может быть степень алгебраических полиномов, представляющих такое отображение? Фактически рассмотренный им пример содержит функции в виде композиции полиномов до девятой степени, представляющиеся в итоге полиномами очень высокого (свыше  $10^5$ ) порядка. Автор [53] полагает, однако, что нижняя граница порядка полиномов, задающих отображение с аттрактором Плыкина, равна 7.

К аттрактору типа Плыкина можно прийти исходя из ДА-аттрактора Смейла [20, 54]. Первый шаг состоит во введении дополнительной симметрии, так что изображение аттрактора оказывается составленным из четырёх копий исходного аттрактора (как в левой части рис. 8). Для этого в отображении  $p_{n+1} = p_n + q_n + f(p_n, q_n)$ ,  $q_{n+1} = p_n + 2q_n + g(p_n, q_n)$ , полученном посредством "хирургии", расширим область определения до квадрата со стороной 2, и пусть именно этот квадрат представляет собой теперь развёртку тора. То есть величины  $p$  и  $q$  полагаем определёнными по модулю 2, а функции  $f$  и  $g$  задаём, как и раньше, считая их аргументы определёнными по модулю 1. Выполним теперь последовательность шагов 1–4 (см. рис. 8). Возьмём половину изображения, верхнюю или нижнюю (шаг 1). Представляя картинку нарисованной на прозрачной плёнке, согнём её пополам по вертикальной линии и склеим по левому, верхнему и нижнему краям (шаг 2). Вследствие симметрии, волокна аттрактора при таком склеивании аккуратно и правильно соединятся. Далее, надуваем получившийся квадратный "конверт", как воздушный шарик, и превращаем его в сферу (шаг 3). Поскольку квадрат  $2 \times 2$  изображает развёртку тора, замена переменных должна выражаться через двоякопериодическую функцию комплексной переменной  $Z = p + iq$  с периодами 2 и  $2i$ , такую как эллиптическая функция Вейерштрасса  $\wp$  [55]. А именно, переход к декартовым координатам точек на

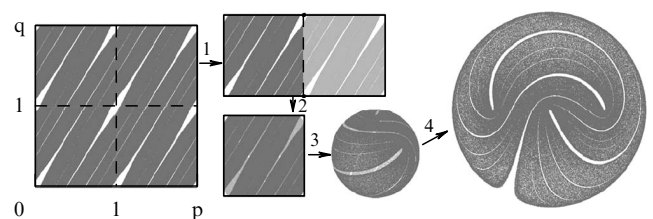


Рис. 8. Иллюстрация преобразований, позволяющих перейти от ДА-аттрактора на торе (слева) к аттрактору типа Плыкина (справа): 1 — выделение прямоугольника, составляющего половину единичного квадрата, 2 — складывание вдвое, 3 — переход на сферу с использованием замены через функцию Вейерштрасса, 4 — переход на плоскость заменой переменных.

единичной сфере  $x, y, z$  определяется соотношениями  $x + iy = 2\varphi(Z)/(1 + |\varphi(Z)|^2)$ ,  $z = (1 - |\varphi(Z)|^2)/(1 + |\varphi(Z)|^2)$ . Сделав ещё одну замену переменных, можно перейти от сферы к плоскости<sup>10</sup> (шаг 4). Это приводит к отображению с аттрактором, эквивалентным показанному на рис. 4б. Аналитически отображение представляется в весьма громоздком виде. Практически, конечно, проще отслеживать итерации в переменных  $p$  и  $q$ , а для пересчёта координат на плоскость использовать упомянутые замены. Вид аттрактора на плоскости показан в правой части рис. 8. Вопрос о надстройке в рамках этой конструкции нетривиален, что обсуждалось в диссертации Ханта [54], и конкретный переход к системе с непрерывным временем выполнен не был.

В диссертации Ханта [54] реализован альтернативный подход к построению надстройки аттрактора типа Плыкина. Вводится система, определяемая дифференциальными уравнениями для двух переменных:  $\dot{x} = f_*(x, y, t)$ ,  $\dot{y} = g_*(x, y, t)$ , где  $f_*$  и  $g_*$  — непрерывно дифференцируемые и периодические по аргументу  $t$  функции. Их вид задаётся по-разному на трёх стадиях, составляющих полный период изменения правых частей во времени, причём математические соотношения являются различными для разных областей фазового пространства и содержат множество искусственно введённых сглаживающих функций. (Подробное описание и объяснение см. в работах [54, 56].) Гиперболичность аттрактора в этой модели строго обосновывается математически, однако вся конструкция настолько громоздка, что трудно вообразить возможность воспроизвести её в виде физического устройства. В работе [56] система Ханта привлекалась для отработки вычислительных методов анализа динамики на гиперболическом аттракторе. Представлены и обсуждены результаты компьютерного моделирования динамики, причём замечена и устранена содержащаяся в работе Ханта техническая ошибка в программе.

В работах Ханта и Мак-Кэя [54, 57] установлена гиперболическая природа динамики в механической системе — шарнирном механизме, обсуждавшемся ранее в научно-популярной статье Тёрстена и Уикса [58] (рис. 9). На трёх шарнирах, закреплённых в вершинах равностороннего треугольника, могут свободно вращаться присоединённые к ним концами идентичные стержни. Каждый стержень на другом конце имеет подвижный шарнир, и к этим трём шарнирам прикреплены другие три одинаковых стержня, противоположные концы которых соединены вместе посредством ещё одного подвижного шарнира. Благодаря наличию связей, из числа угловых переменных, задающих мгновенное пространственное положение механизма, независимыми являются только две, т.е. в конфигурационном пространстве движение имеет место на двумерном многообразии. Топологически — это поверхность рода 3 (крюк с тремя дырками). В отсутствие трения и внешних сил движение происходит по инерции, с сохранением кинетической энергии. Кинетическая энергия

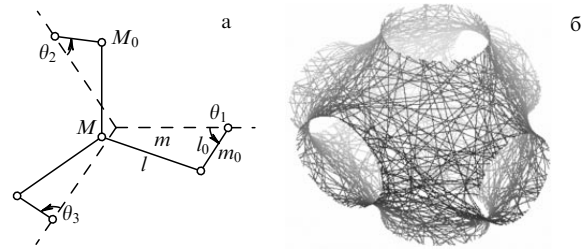


Рис. 9. Механическая система — шарнирный механизм Тёрстена и Уикса с хаотической динамикой (а) и траектория в трёхмерном пространстве  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , полученная в численных расчётах при значениях длин и масс  $l = 41/40$ ,  $l_0 = 7/40$ ,  $m = 9/100$ ,  $M = 13/100$ ,  $M_0 = 1/5$ ,  $m_0 = 0$  (б).

выражается как квадратичная форма через обобщённые скорости — временные производные локальных координат на двумерном многообразии. Эта квадратичная форма, коэффициенты которой зависят от соотношения длин и масс элементов конструкции, задаёт метрику на двумерном многообразии, причём движение происходит по геодезическим линиям этой метрики. Перебором вариантов был найден набор параметров, при котором метрика характеризуется всюду отрицательной кривизной. В этой ситуации, как известно, имеет место гиперболический хаос в его консервативной версии. В работе [57] авторы аргументируют, что при добавлении диссипации и механизма обратной связи можно получить систему с гиперболическим аттрактором, однако конкретного исследования, в рамках которого такой аттрактор был бы продемонстрирован на уровне компьютерного моделирования или в эксперименте, до сих пор не проведено.

В работе В. Белых, И. Белых и Э. Мозекильде [59] указывается на возможность реализации гиперболического аттрактора в модели нейрона Хиндмарша–Роуза. Эта модель описывается автономной системой уравнений третьего порядка  $\dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z$ ,  $\dot{y} = 1 - 5x^2 - y$ ,  $\dot{z} = \mu[4(x - x_0) - z - \delta]$ , где  $\delta$ ,  $\mu$ ,  $x_0$  — параметры [60]. При фиксированных  $\mu$  и  $x_0$  (например,  $\mu = 0,003$ ,  $x_0 = -1,6$ ) модель может демонстрировать различные режимы, в зависимости от параметра  $\delta$ . Имеется область  $\delta < \delta_1$ , в которой реализуются медленные автоколебания, по принятой терминологии — берстовая активность, и область  $\delta > \delta_2$ , в которой имеют место быстрые периодические осцилляции, по принятой терминологии — генерация спайков. В промежуточном интервале  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ , спайки присутствуют на фоне берстов, и это именно та область параметров, в которой возможны нетривиальные динамические явления. Авторы [59] исходят из формальной обобщённой записи уравнений  $\dot{x} = X(x, z)$ ,  $\dot{z} = \mu[Z(x) - z - \delta]$ , где  $x$  — двумерный вектор, а функции  $X(x, z)$  и  $Z(x)$  конкретизируются лишь в той мере, чтобы были оправданы проводимые качественные рассуждения. Согласно анализу, в области перехода от генерации периодических спайков к берстовой активности может иметь место ситуация, в которой двумерное отображение Пуанкаре определено на диске с тремя вырезами ("дырками") и реализуется аттрактор типа Плыкина. Эти результаты интересны, так как получены для модели в каком-то смысле естественного происхождения, и они наводят на мысль о возможном значении гиперболической динамики для нейросистем. В то же время конкретного исследования, с указанием явного вида уравнений и демонстрацией гиперболичес-

<sup>10</sup> Интересно, что соответствие между точками на сфере и на торе, использованное в ходе приведённых рассуждений, применялось в картографии — на нём основана проекция Гюйо (Guycou), посредством которой земная поверхность отображается на плоскость в виде периодически повторяющейся картины, соответствующей развёртке тора.

кого аттрактора в численных расчётах, пока не представлено.

Шильников и Тураев [61, 62] обосновали возможность появления аттрактора типа Смейла – Вильямса в контексте так называемой катастрофы голубого неба. В простейшем варианте катастрофа голубого неба встречается в трёхмерной автономной системе. В момент бифуркации в фазовом пространстве имеется седло-узловой цикл, уход от которого происходит по траекториям, образующим "трубку", которая сужается и скручивается в спираль, приближающуюся к тому же седло-узловому циклу с противоположной стороны. При смещении по параметру в одну сторону образуется, вместо седло-узлового цикла, пара предельных циклов, один из которых является неустойчивым, а другой отвечает устойчивому автоколебательному режиму. При смещении в другую сторону седло-узловой цикл исчезает, а на его месте остаётся образованное витками спиралевидной траектории сгущение, представляющее собой часть возникшего на месте "трубки" притягивающего предельного цикла. Имея вначале угловую координату  $\varphi$ , траектория после обхода по "трубке" возвращается к седло-узловому циклу с угловой координатой, выражение для которой в общем случае содержит слагаемое  $m\varphi$ . Для трёхмерных систем возможны только варианты  $m = 0$  или  $m = 1$ , однако, начиная с размерности четыре, целое число  $m$  может быть любым. В частности, если  $m = 2$ , то тороидальная область в сечении вблизи седло-узлового цикла с неустойчивой стороны трансформируется при возвращении в сложную вдвое петлю, так что бифуркация будет сопровождаться рождением аттрактора Смейла – Вильямса.

В литературе примеры с катастрофой голубого неба до последнего времени ограничивались системами с трёхмерным фазовым пространством [63–65], в которых переход к аттрактору Смейла – Вильямса невозможен. Система дифференциальных уравнений четвёртого порядка, в которой такой аттрактор возникает, предложена недавно в работе [66] (см. также раздел 9.2).

Забавным примером, показывающим осуществимость требуемых для гиперболического аттрактора деформаций облака изображающих точек без разрывов и локальных уплотнений, может служить машина для вытягивания и перемешивания сахарной ваты. Благодаря вращательному движению поперечных стержней, в ней происходят непрерывное растяжение и сворачивание ваты из патоки и сахара с формированием тонкой поперечной волокнистой структуры<sup>11</sup>. В работе Хальберта и Йорке [67] построена математическая модель в виде отображения, описывающего динамику частиц субстанции, подвергаемой трансформациям. Оговоримся, что такая машина не может рассматриваться как вариант физической реализации гиперболического аттрактора в том смысле, какой имеется в виду в контексте настоящего обзора. В самом деле, она не является маломерной динамической системой, а содержит подвергаемую деформациям сплошную среду, при описании перемещения локальных элементов которой возникает отображение соответствующего типа. Это динамика реальной субстанции в реальном пространстве, а не фазовой жидкости в фазовом пространстве.

Можно полагать, что какие-то из перечисленных подходов могут оказаться полезными для определения дальнейших направлений поиска примеров физически реализуемых систем с гиперболическими аттракторами.

## 7. Соленоид Смейла – Вильямса в задаче о движении частицы на плоскости при импульсном периодическом воздействии

Имеется ряд физических систем, для которых описание динамики в дискретном времени выступает как наглядное и вполне естественное. Это относится, например, к механическим системам, когда рассматривается движение при действии периодической последовательности импульсов и выводится отображение, определяющее изменение состояния от момента одного импульсного толчка до момента следующего. В частности, известны возникающие в этом контексте отображения Заславского, Эно (Hénon) и Икеды (Ikeda) [3, 11, 69, 70].

Обратимся к задаче, в которой получается отображение с гиперболическим аттрактором типа Смейла – Вильямса [71, 72]. На плоскости  $(x, y)$  рассмотрим движение частицы с единичной массой при наличии силы трения, пропорциональной скорости. Пусть движение происходит в потенциальном поле  $U(x, y) = -(1/2)\mu(x^2 + y^2) + (1/4)\mu(x^2 + y^2)^2$ , обладающем вращательной симметрией относительно начала координат, с минимумом потенциала на единичной окружности. Будем полагать, что с периодом  $T$  на короткое время включается дополнительное силовое поле, величина и направление которого зависят от мгновенного положения частицы, так что в результате она получает импульс  $\mathbf{P}(x, y) = (P_x(x, y), P_y(x, y))$ . Полагая для простоты коэффициент трения равным единице, запишем уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + P_x(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + P_y(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (1)$$

Пространственное распределение силового поля  $\mathbf{P}(x, y)$  подберём из следующих соображений. Пусть в начальный момент имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности, с координатами  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ . После толчка со стороны силового поля каждая частица, характеризуемая начальным углом  $\varphi$ , получит импульс с компонентами  $P_x(x, y)$  и  $P_y(x, y)$ , что приведёт через некоторое время к изменению её координат. Если потенциальное поле отсутствует, то частица остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x(x, y), \quad y' = y + P_y(x, y). \quad (2)$$

Потребуем, чтобы частицы опять расположились по единичной окружности, но так, чтобы обход исходного кольца отвечал двух- или трёхкратному обходу при их новом размещении, т.е. угловая координата претерпела бы преобразование  $\varphi' = M\varphi \pmod{2\pi}$ , где  $M = 2$  или  $3$ . Для этого новые координаты частицы должны выражаться как

$$x' = \cos \varphi' = \cos M\varphi, \quad y' = \sin \varphi' = \sin M\varphi, \quad (3)$$

а функции, характеризующие распределение силового поля, нужно задать так, чтобы выполнялись соотноше-

<sup>11</sup> Читатель может найти в Интернете фотографии и ролики, иллюстрирующие работу такой машины; ключевые английские слова для поиска — taffy-pulling machine.

ния

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= x' - x = \cos M\varphi - \cos \varphi, \\ P_y(x, y) &= y' - y = \sin M\varphi - \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание связь декартовых координат с угловой координатой на единичной окружности,  $x = \cos \varphi$  и  $y = \sin \varphi$ , и используя тригонометрические формулы, можно показать, что нужный результат получается, если положить

$$P_x(x, y) = 2x^2 - x - 1, \quad P_y(x, y) = 2xy - y \quad \text{при } M = 2, \quad (5)$$

$$P_x(x, y) = 4x^3 - 4x, \quad P_y(x, y) = -4y^3 + 2y \quad \text{при } M = 3. \quad (6)$$

(Обратим внимание, что во втором случае импульсное силовое поле является потенциальным. Его  $x$ - и  $y$ -компоненты зависят только от соответствующей координаты, что можно рассматривать как достоинство данной версии модели с точки зрения её реализации.)

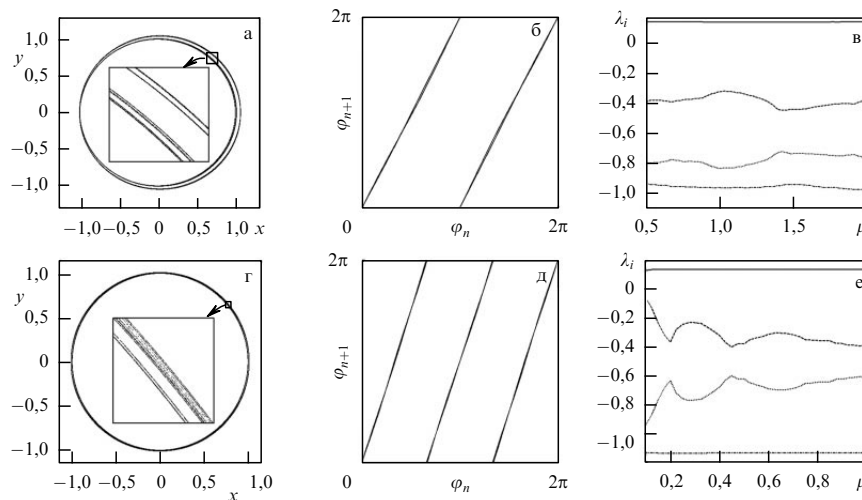
Параметр  $\mu$  примем относительно малым, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка, смещение под действием потенциального поля  $U(x, y)$  было невелико. С другой стороны, интервал времени между толчками  $T$  зададим достаточно большим, для того чтобы частица за это время успела подойти к минимуму потенциального поля. Эти условия являются не очень жёсткими, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении.

Задав начальное состояние в момент непосредственно перед  $n$ -м импульсом,  $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$ , и выполнив решение уравнений (1) на периоде  $T$ , можно определить состояние  $\mathbf{x}_{n+1}$  перед следующим импульсом. Таким образом, описание динамики сводится к рассмотрению четырёхмерного отображения  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ .

Существенным для реализации аттрактора Смейла–Вильямса является топологическое свойство ансамбля

частиц после трансформации, а именно образование конфигурации, охватывающей начало координат дважды или трижды. Сжатие в поперечном направлении в фазовом пространстве обеспечивается трением и действием потенциального поля, благодаря которому происходит смещение частицы к единичной окружности, где реализуется минимум потенциала. В отличие от классической конструкции Смейла–Вильямса, в данном случае аттрактор вложен не в трёхмерное, а в четырёхмерное фазовое пространство.

Иллюстрации, полученные численным решением уравнений движения частицы, при  $M = 2$  представлены на рис. 10а–в и при  $M = 3$  — на рис. 10г–е, при задании распределения импульсного поля выражениями (5) и (6). Портреты аттракторов в проекции на плоскость  $(x, y)$  в стробоскопическом сечении, отвечающем моменту перед действием очередного импульса, показаны на рис. 10а и г; на увеличенных вставках можно различить поперечную фрактальную структуру аттракторов. Очевидно визуальное сходство с соленоидом Смейла–Вильямса. Представлена итерационная диаграмма для угловой координаты  $\varphi = \text{arg}(x + iy)$ , вычисляемой перед включением импульсного толчка. Как можно видеть, отображение для угловой координаты соответствует по топологическому типу отображению Бернулли: однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному (рис. 10б) или трёхкратному (рис. 10д) обходу для образа. Показаны графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\mu$  при фиксированном периоде следования импульсов. Как можно видеть, в широком диапазоне изменения параметра  $\mu$  старший показатель для стробоскопического отображения  $A_1$  остаётся почти постоянным, в хорошем соответствии с оценкой  $A_1 \approx \ln 2$  для первого случая (рис. 10в), и  $A_1 = \ln 3$  для второго (рис. 10е). Это соответствует значениям показателя для одномерного отображения Бернулли, приближённо описывающего динамику угловой координаты. Остальные показатели Ляпунова — отрицательные. Оценка фрактальной размерности аттракторов, изображённых на рис. 10а и г, даёт соответственно  $D = 1,328$  и  $D = 1,47$ .



**Рис. 10.** Портреты аттракторов в стробоскопическом сечении (а, г). Итерационные диаграммы для угловой координаты, полученные при численном решении уравнений (б, д). Графики зависимости четырёх показателей Ляпунова от параметра  $\mu$  (в, е). Результаты приведены для системы (1), в которой распределение импульсного силового поля задаётся выражениями (5) (рис. а–в) и (6) (рис. г–е). Для первой серии диаграмм  $T = 5$ , для второй —  $T = 8$ . Графики на рис. а, б отвечают значению параметра  $\mu = 0,44$ , а графики на рис. г, д — значению  $\mu = 0,22$ .

### 8. Однородно гиперболические аттракторы в дифференциальных уравнениях с кусочно-постоянными во времени правыми частями

Один из способов получить неавтономную систему, в стробоскопическом отображении которой присутствует однородно гиперболический аттрактор, состоит в том, чтобы реализовать эволюцию во времени как последовательность периодически повторяющихся стадий, так чтобы дифференциальные уравнения были бы заданы на каждой стадии по-своему. Именно такой подход был использован Хантом [54] при построении надстройки аттрактора типа Плыкина. В разделе 8.1 рассмотрена более простая модель с аттрактором того же типа.

Напомним, что аттрактор типа Плыкина можно полагать расположенным на плоскости или на сфере, поскольку между точками сферы и плоскости имеет место соответствие, устанавливаемое стереографической проекцией. В разделе 8.1 анализируется заданная определённой последовательностью непрерывных преобразований на сфере динамика, обеспечивающая присутствие аттрактора типа Плыкина [73,74]. В разделе 8.2 показано, как реализовать такую динамику в неавтономной системе связанных осцилляторов [75].

#### 8.1. Динамическая система с аттрактором типа Плыкина

Сконструируем динамическую систему, мгновенные состояния которой отвечают точкам единичной сферы и задаются переменными  $x, y, z$ , подчинёнными условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (рис. 11а). Роль "дырок", наличие кото-

рых обязательно для существования аттрактора типа Плыкина, будут играть окрестности точек, отмеченных на рисунке как А, В, С, D. Северный и южный полюсы обозначим соответственно N и S. Рассмотрим последовательность проводимых поочерёдно непрерывных преобразований, каждое продолжительностью в единицу времени, которым соответствуют приводимые ниже дифференциальные уравнения.

I. *Сток по параллели* — смещение изображающих точек на сфере от меридианов NABS и NCDS вдоль параллелей к равноудалённой меридиональной окружности:

$$\dot{x} = -\epsilon xy^2, \quad \dot{y} = \epsilon x^2 y, \quad \dot{z} = 0. \tag{7}$$

II. *Дифференциальное вращение вокруг оси z* с угловой скоростью, линейно зависящей от  $z$ , так что точки на параллели BC, остаются неподвижными, а на параллели AD совершают поворот на  $180^\circ$ :

$$\dot{x} = \pi \left( \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) y, \quad \dot{y} = -\pi \left( \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) x, \quad \dot{z} = 0. \tag{8}$$

III. *Сток к экватору* — смещение изображающих точек по окружностям с центрами на оси  $x$  на сфере от большого круга ABCD к экватору:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \epsilon yz^2, \quad \dot{z} = -\epsilon y^2 z. \tag{9}$$

IV. *Дифференциальное вращение вокруг оси x* с угловой скоростью, линейно зависящей от  $x$ , так что ортогональное оси  $x$  плоское сечение, содержащее точку С, остаётся неподвижным, а сечение, содержащее точку В, поворачивается на  $180^\circ$ :

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\pi \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) z, \quad \dot{z} = \pi \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) y. \tag{10}$$

Интуитивно кажется вполне правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит на сфере поток, формирующий поперечную слоистую структуру, характерную для аттракторов типа Плыкина. Отметим симметрию задачи: стадии I и II отличаются от стадий III и IV только перестановкой переменных  $x$  и  $z$ .

Дифференциальные уравнения для каждой стадии решаются аналитически. В результате можно получить отображение за период как композицию отображений, отвечающих всем четырём стадиям:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_+(\mathbf{f}_-(\mathbf{x}_n)), \mathbf{f}_\pm(\mathbf{x}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \pm z \\ \frac{y \exp[\epsilon/2(x^2 + y^2)] \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{\cosh \epsilon(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 - x^2) [\epsilon(x^2 + y^2)]^{-1} \sinh \epsilon(x^2 + y^2)}} \pm \\ \pm \frac{x \exp[-\epsilon/2(x^2 + y^2)] \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{\cosh \epsilon(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 - x^2) [\epsilon(x^2 + y^2)]^{-1} \sinh \epsilon(x^2 + y^2)}} \\ \frac{y \exp[\epsilon/2(x^2 + y^2)] \sin(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{\cosh \epsilon(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 - x^2) [\epsilon(x^2 + y^2)]^{-1} \sinh \epsilon(x^2 + y^2)}} \mp \\ \mp \frac{x \exp[-\epsilon/2(x^2 + y^2)] \cos(\pi/2)(z\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{\cosh \epsilon(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 - x^2) [\epsilon(x^2 + y^2)]^{-1} \sinh \epsilon(x^2 + y^2)}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

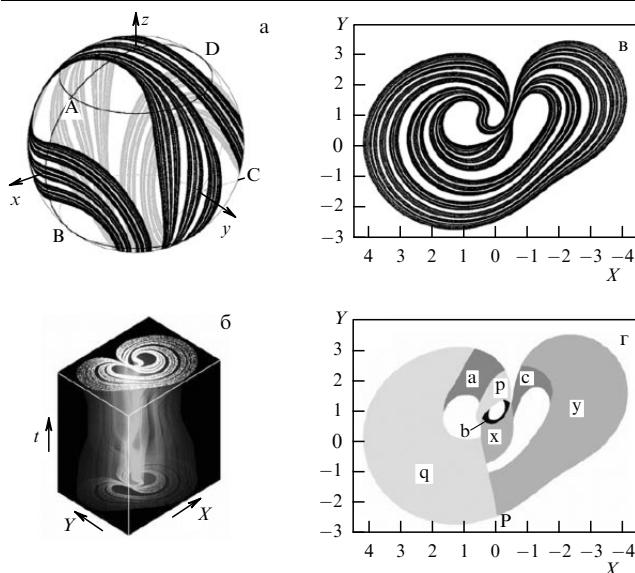


Рис. 11. Аттрактор отображения (11) при  $\epsilon = 0,77$  на единичной сфере (а), аттрактор системы дифференциальных уравнений (14) в расширенном фазовом пространстве (б), портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости переменных  $X, Y$  (в) и марковское разбиение поглощающей области (г). Граф, задающий правила грамматики, и обозначения элементов марковского разбиения аналогичны тем, что приведены на рис. 7б. Для более наглядного сравнения, направление горизонтальной оси на рис. в и г инвертировано. (Анимации, показывающие преобразования на сфере и на плоскости в непрерывном времени, см. на <http://www.sgtnd.narod.ru/science/hyper/rus/index.htm>.)

Заметим, что точка С служит (неустойчивой) неподвижной точкой отображения, а точки А, В, D образуют (неустойчивый) цикл периода 3 (A → D → B → A).

На рисунке 11а показан аттрактор отображения (11) на сфере при  $\varepsilon = 0,77$ . Отметим наличие у аттрактора характерной поперечной фрактальной структуры, как бы составленной из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня и т.д. Показатели Ляпунова аттрактора при выбранных параметрах найдены равными  $A_1 = 0,959$ ,  $A_2 = -1,141$ , а размерность аттрактора по формуле Каплана – Йорке —  $D_L \approx 1 + A_1/|A_2| = 1,841$ .

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы мгновенные состояния представлялись точками на плоскости. Для этого сделаем замену

$$W = X + iY = \frac{x - z + iy\sqrt{2}}{x + z + \sqrt{2}}, \quad (12)$$

что отвечает стереографической проекции с выбором в качестве центра проецирования точки С. (Эта точка на протяжении всех стадий находится в "дырке", поэтому изображение аттрактора на плоскости будет располагаться в ограниченной области.)

Уравнения, описывающие динамику на плоскости в непрерывном времени, представляются в переменных X, Y следующим образом:

$$\dot{X} = F(X, Y, t), \quad \dot{Y} = G(X, Y, t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F(X, Y, t) = & \frac{\pi}{\sqrt{2}} Y \frac{(1 - X)^2 s_2 - (1 + X)^2 s_4}{1 + X^2 + Y^2} + \\ & + \varepsilon Y^2 \left[ \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(X - 1) s_1}{(1 + X^2 + Y^2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(X + 1) s_3}{(1 + X^2 + Y^2)^2} \right], \\ G(X, Y, t) = & \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(X - 1)(1 + 2X - X^2 + Y^2) s_2}{2(1 + X^2 + Y^2)} - \right. \\ & \left. - \frac{(X + 1)(1 - 2X - X^2 + Y^2) s_4}{2(1 + X^2 + Y^2)} \right] + \\ & + \varepsilon Y \left[ \frac{(1 + 2X - X^2 - Y^2)(1 + 2X - X^2 + Y^2) s_1}{2(1 + X^2 + Y^2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(1 - 2X - X^2 - Y^2)(1 - 2X - X^2 + Y^2) s_3}{2(1 + X^2 + Y^2)^2} \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$s_k(t) = \begin{cases} 1, & k - 1 \leq t - 4 \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor < k, \\ 0, & t - 4 \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor < k - 1, \quad t - 4 \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor \geq k. \end{cases}$$

На рисунке 11б приводится портрет аттрактора системы дифференциальных уравнений (14) в трёхмерном расширенном фазовом пространстве<sup>12</sup>. (Картинка вызывает ассоциации с поднимающимся и клубящимся дымом.) В сечении горизонтальной плоскостью имеется

<sup>12</sup> Система (13) с формальной точки зрения может показаться не вполне удовлетворительной как надстройка, поскольку в уравнения входят разрывные во времени функции  $s_k(t) = 1$ . Однако, во-первых, это не препятствует наличию однородно гиперболического аттрактора в стробоскопическом отображении, представляющем собой

объект, показанный отдельно на рис. 11в. Это не что иное, как аттрактор отображения (11) в координатах, определяемых заменой (12).

Как показывает тщательное рассмотрение расположения филаментов, аттрактор в сечении Пуанкаре относится к тому же типу, что и аттрактор, показанный на рис. 4б. Гиперболическая природа аттрактора подтверждена компьютерной проверкой критерия конусов [74], а также проведённым на основе численных расчётов анализом расположения устойчивых и неустойчивых многообразий в сечении Пуанкаре [73, 74]. На рисунке 11г показано марковское разбиение поглощающей области, содержащей аттрактор. Граница между областями разбиения даётся устойчивым многообразием неподвижной точки Р. Сравнивая эту диаграмму с рис. 7б, можно ещё раз убедиться в топологической эквивалентности данного аттрактора и аттрактора типа Плькина на рис. 4б. Обозначение областей разбиения буквами проведено так, чтобы правила грамматики при символическом описании динамики соответствовали графу на рис. 7б.

## 8.2. Модель с аттрактором типа Плькина на основе связанных осцилляторов

Обратимся к системе двух автоколебательных элементов с компенсацией потерь энергии из общего источника, уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2} \mu (1 - |a|^2 - |b|^2) a, \\ \dot{b} &= \frac{1}{2} \mu (1 - |a|^2 - |b|^2) b, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные амплитуды,  $\mu$  — положительный параметр. Ясно, что установившийся режим автоколебаний отвечает выполнению условия  $\rho \equiv |a|^2 + |b|^2 = 1$ . Если не различать состояния системы, которые отличаются друг от друга только общей фазой, т.е. считать эквивалентными состояния  $(a, b)$  и  $(a \exp(i\phi), b \exp(i\phi))$ , то состояния с  $\rho = 1$  можно ассоциировать с точками единичной сферы так, что связь с координатами  $x, y, z$ , подчиняющимися условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , будет даваться соотношениями

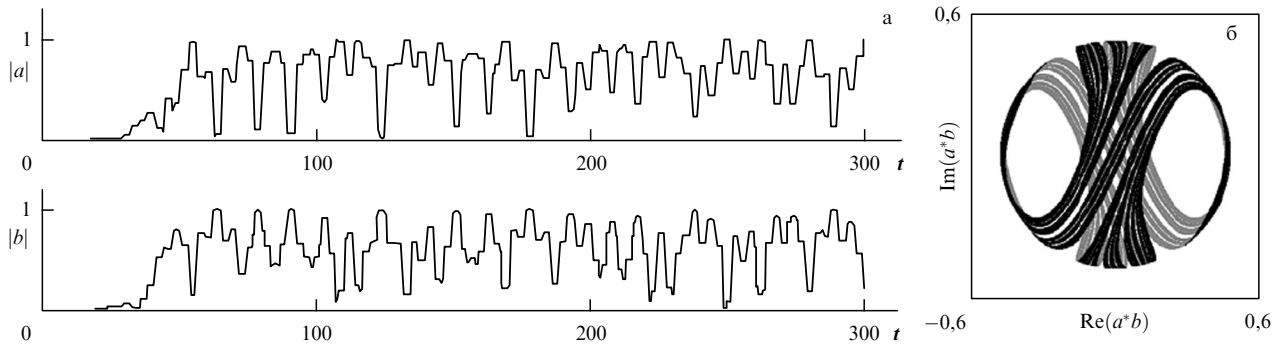
$$x + iy = 2a^*b, \quad z = |a|^2 - |b|^2. \quad (16)$$

Модифицируем модель (15), чтобы получить систему уравнений с периодически изменяющимися во времени коэффициентами, в отображении Пуанкаре которой при представлении состояний на сфере будет иметь место аттрактор такой же, как в разделе 8.1. Для этого введём последовательность непрерывных преобразований на сфере, в совокупности эквивалентных трансформациям, рассмотренным ранее. Для того чтобы упростить запись уравнений через комплексные амплитуды, полагаем процесс выполняемым в шесть стадий [75].

I. *Сток по параллели:*

$$\dot{a} = -i\varepsilon a \operatorname{Im}(a^*b)^2, \quad \dot{b} = i\varepsilon b \operatorname{Im}(a^*b)^2. \quad (17)$$

композицию диффеоморфизмов; во-вторых, оказывается возможным модифицировать модель так, чтобы зависимости коэффициентов от времени стали гладкими. При этом, благодаря структурной устойчивости, природа аттрактора в стробоскопическом отображении сохраняется (соответствующая модификация указана в [8]).



**Рис. 12.** (а) Зависимости от времени амплитуд  $|a|$  и  $|b|$  двух осцилляторов в процессе установления режима хаотических колебаний, полученные в результате численного решения дифференциальных уравнений (18)–(22). (б) Портрет аттрактора в стробоскопическом сечении при  $\varepsilon = 0,77$  и  $\mu = 1$ .

II. Дифференциальное вращение вокруг оси  $z$ :

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)a, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)b.\end{aligned}\quad (18)$$

III. Поворот на  $90^\circ$  вокруг оси  $y$ :

$$\dot{a} = -\frac{1}{4}\pi b, \quad \dot{b} = \frac{1}{4}\pi a.\quad (19)$$

IV. Сток по параллели:

$$\dot{a} = -i\varepsilon a \operatorname{Im}(a^*b)^2, \quad \dot{b} = i\varepsilon b \operatorname{Im}(a^*b)^2.\quad (20)$$

V. Обратное дифференциальное вращение:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)a, \\ \dot{b} &= \frac{1}{4}i\pi(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)b,\end{aligned}\quad (21)$$

VI. Обратный поворот вокруг оси  $y$ :

$$\dot{a} = \frac{1}{4}\pi b, \quad \dot{b} = -\frac{1}{4}\pi a.\quad (22)$$

Процедура симметрична в том смысле, что преобразования на стадиях I и IV одинаковы, а стадии II и III отличаются от стадий V и VI только направлением вращения.

Пусть начальные условия для уравнений (17) в момент  $t_n = nT$  отвечают вектору состояния  $\mathbf{X}_n = (a_n, b_n)$ . На стадиях I–VI уравнения можно решить аналитически, отображение тогда представляется в явном виде:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_+(\mathbf{F}_-(\mathbf{X})), \quad \mathbf{F}_\pm(\mathbf{X}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} & \frac{aD \exp[\pm(i\pi/4)(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)] \mp}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(\exp(\mu)-1)}} \\ & \mp \frac{bD^* \exp[\pm(i\pi/4)(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)]}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(\exp(\mu)-1)}} \end{aligned} \right\} \exp \frac{\mu}{2} \\ \left\{ \begin{aligned} & \frac{\pm aD \exp[\pm(i\pi/4)(\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}|a|^2)]}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(\exp(\mu)-1)}} + \\ & \mp \frac{bD^* \exp[\pm(i\pi/4)(\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}|b|^2)]}{\sqrt{1+(|a|^2+|b|^2)(\exp(\mu)-1)}} \end{aligned} \right\} \exp \frac{\mu}{2} \end{pmatrix},\quad (23)$$

где

$$D(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{|a|^2|b|^2 - (a^*b)^2 \tanh(2\varepsilon|a|^2|b|^2)}{|a|^2|b|^2 - (ab^*)^2 \tanh(2\varepsilon|a|^2|b|^2)} \right]^{1/4}.\quad (24)$$

Динамика, заданная уравнениями (18)–(22) или отображением (24), не меняется при одновременном сдвиге фазы осцилляторов на одну и ту же константу, т.е. инвариантна относительно замены  $a \rightarrow a \exp(i\psi)$ ,  $b \rightarrow b \exp(i\psi)$ . Благодаря этому, от уравнений для двух комплексных амплитуд можно перейти, делая замену (16), к уравнениям для трёх действительных переменных. В этом представлении отображение является трёхмерным, причём единичная сфера представляет собой инвариантное множество, и величина  $\rho \equiv x^2 + y^2 + z^2$  при увеличении числа итераций стремится к 1. На единичной сфере  $\rho = 1$  отображение для переменных  $x, y, z$  в точности эквивалентно (11).

На рисунке 12а представлены зависимости амплитуд  $|a|$  и  $|b|$  двух осцилляторов от времени, полученные численным решением дифференциальных уравнений. В качестве начальных условий заданы малые по модулю и случайные по фазе комплексные величины  $a$  и  $b$ , так что график отвечает переходному процессу установления режима хаотических автоколебаний. В правой части на графике зависимости выглядят похожими на реализации случайного процесса, как это и должно быть при динамике на хаотическом аттракторе. В локальной структуре зависимостей проявляется специфика динамики, составленной из последовательных стадий. В частности, горизонтальные участки — плато — отвечают стадиям эволюции I, II, IV и V, на протяжении которых амплитуды  $|a|$  и  $|b|$  остаются постоянными. На рисунке 12б показан аттрактор в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени  $t_n = nT$ ,  $T = 6$ . Для того чтобы сделать различимой присущую аттрактору поперечную канторову структуру, для построения использованы координаты  $\operatorname{Re}(a^*b)$ ,  $\operatorname{Im}(a^*b)$ . Точки показаны тёмным цветом, если амплитуда первого осциллятора в данный момент больше, чем второго, и более светлым — в противном случае. Как видно из формул (16), такой способ представления соответствует определённой плоской проекции изображения аттрактора на сфере. Как можно убедиться, аттрактор соответствует аттрактору формальной модели рассмотренной в разделе 8.1 (см. рис. 11). Два показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре (23) получаются такими же, как и для отображения (11). Кроме того, имеется нулевой



показатель, связанный с возмущением типа сдвига фаз обоих осцилляторов на одинаковую величину, и отрицательный показатель, ассоциируемый с приближением траекторий к инвариантной сфере.

Следует оговориться, что в системе уравнений для комплексных амплитуд аттрактор непосредственно не может интерпретироваться как однородно гиперболический из-за наличия в пространстве состояний нейтрального направления, отвечающего общей фазе, и он должен быть отнесён к классу *частично гиперболических аттракторов* [20, 26]. Для рассмотренной здесь модели это замечание носит скорее формальный характер, поскольку инвариантность по отношению к сдвигу фазы является точной и правомерно не различать состояния, которые отличаются друг от друга только общей фазой. Однако в системах, для которых представление посредством медленных комплексных амплитуд будет служить лишь приближённым способом описания, может проявиться специфика частично гиперболического аттрактора. Если поправки, обусловленные отклонением от приближённого описания, невелики, то можно предположить, что общая фаза будет совершать медленное случайное блуждание, тогда как динамика остальных переменных сохранит свой характер вследствие присущей ей грубости.

В физике известны и другие ситуации, в которых состояния естественным образом ассоциируются с точками сферы, например представление двухуровневых систем, в частности частиц со спином  $1/2$ , на сфере Блоха [76] или представление поляризации света параметрами Стокса [77]. Можно предположить, что при определённых манипуляциях с такими системами в них тоже можно осуществить динамику, отвечающую аттрактору типа Плькина.

## 9. Однородно гиперболические аттракторы в системах связанных осцилляторов с поочерёдным возбуждением

В работе [78] была указана возможность реализации гиперболического аттрактора в системе двух осцилляторов Ван-дер-Поля, которые становятся активными попеременно благодаря модуляции параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возникновение колебаний при переходе осциллятора к активной стадии стимулируется передачей ему возбуждения от партнёра, причём так, что за полный цикл обмена возбуждением фазовая переменная удваивается. Идея манипуляции фазой при обмене возбуждением между поочерёдно активными парциальными осцилляторами оказалась полезным общим принципом, позволившим сконструировать примеры систем, реализующих надстройку аттракторов типа Смейла–Вильямса, а также систем, демонстрирующих ряд других феноменов сложной динамики [79–83].

### 9.1. Аттрактор Смейла–Вильямса в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля

Принципиальным требованием для реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса является наличие некоторой угловой переменной  $\varphi$ , которая при действии отображения Пуанкаре умножается на два (или на большее целое число), тогда как по остальным направлениям

пространства состояний имеет место сжатие фазового объёма. Пусть эта переменная представляет собой фазу колебательного процесса. Построим неавтономную систему так, чтобы отображение нужного типа для фазы реализовалось за период изменения коэффициентов в уравнениях.

Рассмотрим два связанных осциллятора Ван-дер-Поля с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ , описываемые уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \left( A \cos \frac{2\pi t}{T} - x^2 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - \left( -A \cos \frac{2\pi t}{T} - y^2 \right) \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Обобщённые координаты  $x$  и  $y$  относятся к подсистемам, возбуждающимся по очереди, благодаря принудительному изменению с периодом  $T$  параметра, глубина модуляции которого задаётся константой  $A$ . Имеется также воздействие подсистем друг на друга, характеризующееся параметром связи  $\varepsilon$ . Действие первого осциллятора на второй описывается членом, пропорциональным квадрату обобщённой координаты, а второго на первый — членом, содержащим произведение обобщённой координаты на вспомогательный опорный сигнал с частотой  $\omega_0$ . Предполагается выполненным соотношение  $T = 2\pi N/\omega_0$ , где  $N$  — целое число, так что (25) — это система уравнений с периодическими коэффициентами.

Поясним принцип функционирования системы. Пусть первый осциллятор на стадии активности имеет фазу  $\varphi$ , так что  $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Воздействие первого осциллятора на второй определяется второй гармоникой  $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$  с фазой  $2\varphi$ . Эта гармоника соответствует частоте второго осциллятора и способствует его возбуждению при переходе в активную стадию, причём возникающие колебания получают (с точностью до постоянной добавки) ту же фазу  $2\varphi$ .

В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, благодаря смешению колебаний  $y$  со вспомогательным сигналом, возникает составляющая на частоте  $\omega_0$  с фазой  $2\varphi$ , которая, будучи в резонансе с первым осциллятором, обеспечивает затравку для колебаний с этой фазой на его очередной активной стадии.

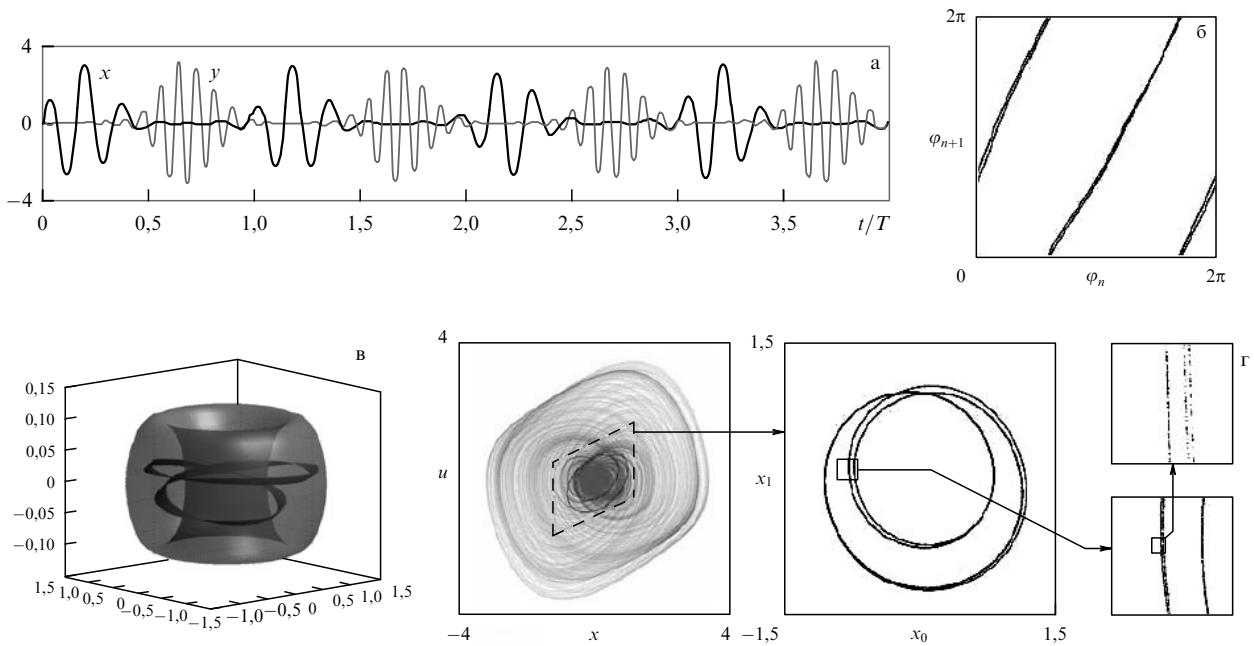
Таким образом, обе подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и при этом на последовательных стадиях активности фаза колебаний первого осциллятора в рассматриваемом приближении даётся отображением Бернулли:

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (26)$$

Аддитивную константу, которая возникает из-за добавок к фазе при передаче возбуждения от одного осциллятора к другому, можно устранить сдвигом начала отсчёта переменной  $\varphi$ .

Описанный процесс действительно наблюдается при численном моделировании динамики системы (25), причём в широком диапазоне значений параметров.

На рисунке 13а показаны полученные при численном решении уравнений временные зависимости переменных  $x$  и  $y$ . Система выдаёт сигнал в виде радиоимпульсов, следующих друг за другом с периодом модуляции параметра, но при этом фаза высокочастотного заполнения хаотически изменяется от импульса к импульсу. На рисунке 13б представлен график полученного в числен-



**Рис. 13.** (а) Графики временной зависимости переменных  $x$  и  $y$ , полученные при численном решении уравнений (25) для  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $T = 6$ ,  $A = 5$ ,  $\varepsilon = 0.5$ . (б) Диаграмма отображения для фаз, определённых в середине стадий возбуждения первого осциллятора. (в) Поглощающая область и её образ под действием отображения Пуанкаре в трёхмерной проекции пространства  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{x/0,812, (u - 0,438x)/0,721, y + 0,042x - 0,226u, v + 0,218x - 0,029u + 0,118y\}$ . (г) Аттрактор системы связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора в исходных переменных; рядом — портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости  $(x_0, x_1)$ .

ных расчётах отображения для фазы в середине стадий возбуждения первого осциллятора  $\varphi = \arg(x_0 - ix_1)$  при динамике на аттракторе. Для достаточно большого количества периодов  $T$  отложены точки  $(\varphi_n, \varphi_{n+1})$ . Как видно из рисунка, однократный обход окружности для прообраза, т.е. вариация переменной  $\varphi_n$  от нуля до  $2\pi$ , соответствует двукратному обходу для образа  $\varphi_{n+1}$ .

Для более аккуратного описания динамики системы в дискретном времени состояние системы в момент  $t_n = nT$  задаём набором четырёх переменных — вектором  $\mathbf{x}_n = \{x(nT), u(nT), y(nT), v(nT)\}$ , где  $u = \omega_0^{-1}\dot{x}$ ,  $v = \omega_0^{-1}\dot{y}$ . Решение уравнения (25) на интервале времени  $T$  с начальными условиями  $\mathbf{x}_n$  даёт новый вектор  $\mathbf{x}_{n+1}$ , что соответствует четырёхмерному отображению Пуанкаре

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n). \quad (27)$$

С геометрической точки зрения, в пятимерном расширенном фазовом пространстве неавтономной системы  $\{x, u, y, v, t\}$  производится сечение потока траекторий четырёхмерными гиперплоскостями  $t = t_n = nT$ .

Согласно результатам вычислений, для аттрактора отображения Пуанкаре при указанных значениях параметров показатель Ляпунова:

$$L_1 = 0,6832, L_2 = -2,602, L_3 = -4,605, L_4 = -6,538. \quad (28)$$

Положительный показатель  $L_1$ , присутствие которого свидетельствует о наличии хаоса, близок к величине  $\ln 2 = 0,693$ , что естественно ввиду приближённого описания эволюции фазовой переменной одномерным отображением (26). Оценка размерности аттрактора через показатели Ляпунова по формуле Каплана – Йорке приводит к результату  $D \approx 1,263$ .

При выполнении отображения (27) в четырёхмерном пространстве имеет место растяжение в направлении, связанном с фигурирующей в уравнении (26) фазой, и сжатие по трём остальным направлениям. Можно указать поглощающую область  $U$  в виде тороида. Одна итерация отображения отвечает продольному растяжению и поперечному сжатию объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это соответствует конструкции Смейла – Вильямса, но в четырёхмерном пространстве. На рисунке 13в показана трёхмерная проекция четырёхмерных объектов, дающая представление о взаимном расположении областей  $U$  и  $\mathbf{T}(U)$ . Область  $\mathbf{T}(U)$  выглядит как узкая лента из-за сильного поперечного сжатия фазового объёма в процессе эволюции за период.

На рисунке 13г приводятся изображения аттрактора системы. Показана проекция аттрактора из пятимерного расширенного пространства состояний на фазовую плоскость первого осциллятора в переменных  $(x, u)$ . Аттрактор представлен различными оттенками серого цвета (насыщенность оттенка определяется относительной частотой пребывания изображающей точки в соответствующем пикселе). Чёрным отмечены точки, отвечающие сечению Пуанкаре, т.е. моментам  $t_n = nT$ . Рядом приводится портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости  $(x_0, x_1)$ , соответствующий фрагменту внутри штрихового параллелограмма. Обращает на себя внимание очевидное визуальное сходство с аттрактором Смейла – Вильямса. Поперечная канторова структура аттрактора иллюстрируется в правой части рис. 13г последовательностью фрагментов с возрастающим увеличением. Гиперболическая природа аттрактора подтверждена компьютерными вычислениями на основе критерия конусов [84, 85]. В недавней работе [86] дано обоснование гиперболической природы аттрактора

модели (25) на уровне доказательных вычислений (computer assisted proof), подобно тому, как ранее это было сделано для квазигиперболического аттрактора системы Лоренца в известной работе Такера [51].

В предположении  $N = \omega_0 T / 2\pi \gg 1$  задачу можно переформулировать с помощью метода медленно меняющихся комплексных амплитуд, с уменьшением количества определяющих параметров. Для этого полагаем  $x = 2 \operatorname{Re} a(t) \exp(i\omega_0 t)$ ,  $\dot{x} = -2\omega_0 \operatorname{Im} a(t) \exp(i\omega_0 t)$ ,  $y = 2 \operatorname{Re} b(t) \exp(2i\omega_0 t)$ ,  $\dot{y} = -4\omega_0 \operatorname{Im} b(t) \exp(i\omega_0 t)$ . После подстановки в уравнения (25) и усреднения по периоду быстрых осцилляций получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2} \left( aA \cos \frac{2\pi t}{T} - |a|^2 a - i\bar{e}b \right), \\ \dot{b} &= \frac{1}{2} \left( -bA \cos \frac{2\pi t}{T} - |b|^2 b - i\bar{e}a^2 \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\bar{e} = \varepsilon / 2\omega_0$ . Исследование системы (29) проведено в работе [87]. Показано, что в широком диапазоне параметров реализуется аттрактор Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, что подтверждено проверкой критерия конусов в численных расчётах, в частности, при  $A = 3$ ,  $T = 10$ ,  $\bar{e} = 0,05$ .

Как отмечалось, система (25) устроена так, что члены, ответственные за связь, содержат частотные составляющие, находящиеся в резонансе с осциллятором, которому передаётся возбуждение. В работе [88] показано, что в системе с попеременно активными осцилляторами аттрактор типа Смейла–Вильямса может иметь место и при нерезонансной передаче возбуждения. В самом деле, с учётом конечного характерного времени возбуждения осциллятора-партнёра, спектр сигнала, осуществляющего передачу возбуждения, занимает некоторую полосу около центральной частоты, имея спадающие в обе стороны хвосты. Если, например, центральная частота равна  $2\omega_0$ , а частота возбуждаемого осциллятора —  $\omega_0$ , то при определённых условиях присутствие составляющих на хвосте спектрального распределения вблизи частоты  $\omega_0$  может обеспечить передачу возбуждения, тем более что на активной стадии, при конечном превышении над порогом бифуркации, нарастание колебаний происходит по экспоненте. Конечно, в этом случае условия для параметров системы становятся более жёсткими<sup>13</sup>. Согласно результатам расчётов, в системе

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \left( A \cos \frac{2\pi t}{T} - x^2 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y, \\ \ddot{y} - \left( -A \cos \frac{2\pi t}{T} - y^2 \right) \dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2 \end{aligned} \quad (30)$$

при выборе параметров  $T = 10$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $A = 6$  в отображении Пуанкаре можно наблюдать аттрактор типа Смейла–Вильямса, хотя передача возбуждения от второго осциллятора к первому носит нерезонансный характер. На рисунке 14 показана диаграмма для фаз на последовательных стадиях активности первого осцилля-

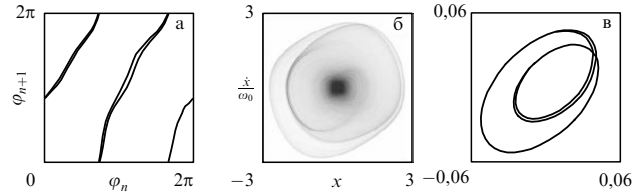


Рис. 14. (а) Диаграмма для фаз, определённых по формуле  $\varphi = \arg(x - i\dot{x}/\omega_0)$ , портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (б) и в сечении Пуанкаре (в) для системы осцилляторов с нерезонансным механизмом передачи возбуждения, описываемой уравнениями (30) при  $T = 10$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $A = 6$ .

тора, а также вид аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства на плоскость  $(x, \dot{x})$  и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре в этом режиме:  $L_1 = 0,6808$ ,  $L_2 = -3,625$ ,  $L_3 = -8,326$ ,  $L_4 = -17,633$ , а оценка размерности по формуле Каплана–Йорке даёт  $D_{KY} = 1,188$ .

### 9.2. Аттрактор Смейла–Вильямса в автономной системе

В работе [89] предложено несколько примеров автономных систем с аттрактором Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре. Рассмотрим одну из них, интересную тем, что размерность фазового пространства как раз равна минимально необходимой для существования такого аттрактора.

Возьмём в качестве отправного пункта модифицированную систему "хищник–жертва":

$$\dot{r}_1 = 2 \left( 1 - r_2 + \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{50} r_1^2 \right) r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1) r_2. \quad (31)$$

Будем интерпретировать неотрицательные переменные  $r_{1,2}$  как квадраты амплитуд двух осцилляторов и запишем уравнения для комплексных амплитуд  $a_1$  и  $a_2$  так, чтобы величины  $r_{1,2} = |a_{1,2}|^2$  в точности удовлетворяли уравнениям (31). Частоту осцилляторов считаем заданной параметром  $\omega_0$ . Дополнительно введём связь между осцилляторами, для чего добавим в уравнение для первой комплексной амплитуды член, содержащий квадрат комплексной амплитуды  $a_2$ , а во второе уравнение — член<sup>14</sup>, включающий в себя первую степень  $a_1$ . Имеем

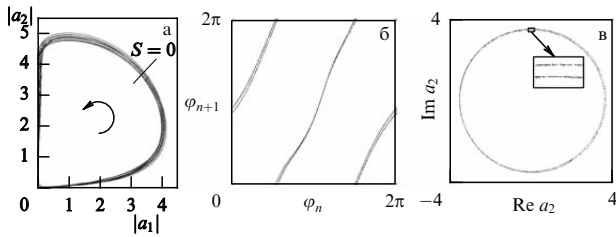
$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega_0 a_1 + \left( 1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{50} |a_1|^4 \right) a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{Im} a_2^2, \\ \dot{a}_2 &= -i\omega_0 a_2 + (|a_1|^2 - 1) a_2 + \varepsilon \operatorname{Re} a_1. \end{aligned} \quad (32)$$

На рисунке 15а показан вид аттрактора в проекции на плоскость вещественных амплитуд обоих осцилляторов при  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,3$ .

Мгновенное состояние системы определяется двумя комплексными числами,  $a_1$  и  $a_2$ , т.е. фазовое пространство имеет размерность 4. Выделим в фазовом пространстве трёхмерную гиперповерхность  $S = |a_2|^2 - |a_1|^2 = 0$  и рассмотрим её пересечение траекториями в направлении

<sup>13</sup> По-видимому, применительно ко многим физическим приложениям (например, сверхвысокочастотной электронике, лазерной физике или нелинейной оптике) резонансный механизм надо считать предпочтительным, поскольку может оказаться проблематичным реализовать нерезонансную передачу возбуждения на достаточном уровне, превышающем уровень шумов.

<sup>14</sup> Конкретный выбор вида членов допускает некоторый произвол. Здесь они конкретизированы так, чтобы имело место соответствие с формой уравнений, принятых в работе [89].



**Рис. 15.** (а) Портрет аттрактора системы (32) в проекции на плоскость вещественных амплитуд  $|a_1|$ ,  $|a_2|$ . Отрезок биссектрисы отвечает сечению, используемому для построения отображения Пуанкаре. (б) Отображение для фазы  $\varphi = \arg a_2$ , определённой в моменты последовательных пересечений секущей поверхности траекторий, принадлежащей аттрактору. (в) Портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Параметры  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\varepsilon = 0,3$ .

увеличения  $S$ . Точка в сечении задаётся трёхмерным вектором, так что приходим к трёхмерному отображению Пуанкаре.

Как можно видеть из результатов численного решения уравнений, в частности, из рис. 15а, в установившемся режиме изображающая точка раз за разом посещает окрестность начала координат на плоскости переменных  $|a_1|$ ,  $|a_2|$ . После каждого такого прохождения происходит сначала возбуждение первого осциллятора, потом возбуждение второго, далее затухание колебаний первого и, наконец, более медленное затухание второго. Активизация второго осциллятора имеет место при наличии воздействия со стороны партнёра, благодаря добавленному члену во втором уравнении, поэтому второй осциллятор наследует фазу колебаний первого. Затем, на стадии затухания, второй осциллятор обеспечивает затравочный сигнал для первого при очередном прохождении орбиты вблизи начала координат. Поскольку отвечающий за это член содержит квадрат комплексной амплитуды, передача возбуждения сопровождается удвоением фазы. (Здесь имеет место нерезонансный механизм.) Затем процесс повторяется. На каждом новом цикле фаза умножается на фактор 2 и для неё в определённом приближении должно получаться отображение Бернулли.

На рисунке 15б показан график отображения для фазы, построенный по результатам численного решения уравнений (32). Фаза определяется в момент пересечения траекторией секущей поверхности  $S = 0$  как аргумент комплексной амплитуды  $a_2$ . Из рисунка видно, что требуемое топологическое свойство выполнено: однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному обходу для образа. Поскольку по остальным направлениям отображение Пуанкаре обеспечивает сжатие, в его трёхмерном фазовом пространстве, очевидно, имеет место аттрактор Смейла–Вильямса.

На рисунке 15в показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость второго осциллятора. Аттрактор имеет тонкую поперечную фрактальную структуру, увеличенный фрагмент которой приводится на вставке.

Расчёт показателей Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина для модели (32) приводит к следующим результатам:

$$\lambda_1 = 0,0918, \lambda_2 = 0,0000, \lambda_3 = -0,982, \lambda_4 = -1,330. \quad (33)$$

Учитывая автономную природу системы, естественно полагать, что показатель  $\lambda_2$  точно равен нулю. Согласно результатам численных расчётов, средний период между последовательными прохождениями сечения Пуанкаре  $\langle T \rangle = 7,248$ . Тогда, в соответствии с приближением, основанном на отображении Бернулли, наибольший показатель Ляпунова должен равняться  $\ln 2 / \langle T \rangle \approx 0,096$ . Это находится в разумном соответствии с величиной  $\lambda_1$ , полученной в численных расчётах. Оценка размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке даёт  $D_L = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / \lambda_3 \approx 2,094$ . Для системы уравнений (32) при указанных значениях параметров были проведены численные расчёты, подтвердившие выполненные критерия конусов в тороидальной области, содержащей аттрактор отображения Пуанкаре [90].

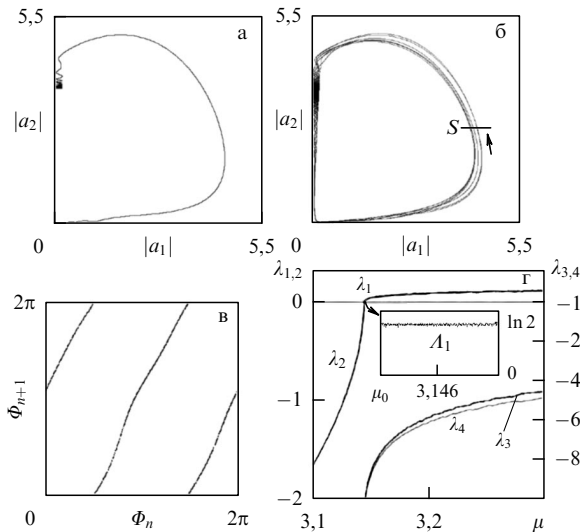
Недавно в работе автора настоящего обзора [66] было показано, как модифицировать систему (32), чтобы реализовался сценарий возникновения аттрактора Смейла–Вильямса в результате катастрофы голубого неба в соответствии с теорией Шильникова и Тураева (см. раздел 6). Для этого нужно изменить структуру нелинейного множителя во втором уравнении и ввести параметр  $\mu$ , так что система принимает вид

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \left(1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{50} |a_1|^4\right) a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{Im} a_2^2, \quad (34)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 + \left(|a_1|^2 - \mu + \frac{1}{2} |a_2|^2 - \frac{1}{50} |a_2|^4\right) a_2 + \varepsilon \operatorname{Re} a_1.$$

При выбранных для подробного анализа параметрах  $\omega_0 = 2\pi$  и  $\varepsilon = 0,5$ , до тех пор пока величина  $\mu$  меньше критического значения  $\mu_0 \approx 3,144196$ , в фазовом пространстве имеются два предельных цикла, устойчивый и неустойчивый, которые расположены в области малых амплитуд первого осциллятора  $|a_1|$ . На рисунке 16а показана переходная траектория, приближающаяся к устойчивому предельному циклу. С увеличением параметра  $\mu$  оба предельных цикла сближаются, сливаются при  $\mu = \mu_0$  и исчезают. После этого аттрактором служит множество траекторий, образующих сгущение на месте исчезнувшей пары предельных циклов, такое, что принадлежащие ему траектории раз за разом посещают окрестность начала координат (рис. 16б). После бифуркации динамика состоит в том, что реализуется поочередно возбуждение первого осциллятора, затем второго, затухание колебаний первого осциллятора и более медленное затухание второго. За полный цикл передачи возбуждения от одного осциллятора к другому происходит удвоение фазы. В теории Шильникова и Тураева это соответствует индексу  $m = 2$  и, следовательно, рождению в результате бифуркации аттрактора Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре. Сказанное иллюстрируется графиком отображения для фазы, построенным по результатам численного решения уравнений (рис. 16в). Фаза определяется в момент пересечения траекторией секущей поверхности  $|a_2| = 2,5$  в направлении увеличения амплитуды  $|a_2|$  как  $\Phi_n = \arg a_1(t_n)$ .

На рисунке 16г показаны графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\mu$  в интервале, включающем в себя точку бифуркации. В левой части диаграммы наибольший показатель равен нулю, а три



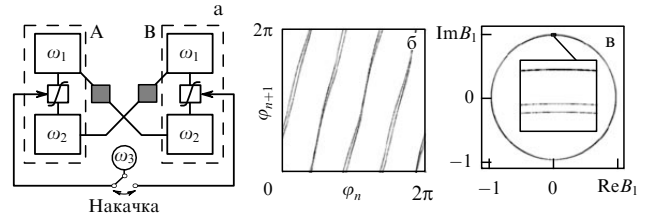
**Рис. 16.** (а) Переходная траектория в системе связанных осцилляторов (34) при  $\mu = 3,14$  и (б) портрет аттрактора при  $\mu = 3,1442$  в проекции на плоскость амплитуд  $|a_1|$  и  $|a_2|$ . (в) Диаграмма для фаз первого осциллятора, отвечающих моментам прохождения сечения Пуанкаре при  $\mu = 3,1442$ . (г) Зависимость показателей Ляпунова аттрактора системы (34) от параметра  $\mu$ . На вставке на рис. г показан график для старшего показателя отображения Пуанкаре  $\lambda_1 = \lambda_1(T)$ . Значения параметров  $\omega_0 = 2\pi$  и  $\varepsilon = 0,5$ .

остальных — отрицательные. Здесь аттрактором является устойчивый предельный цикл, как на рис. 16а. В момент бифуркации два показателя становятся нулевыми. После бифуркации один из них становится положительным, увеличиваясь с возрастанием  $\mu$ . Второй показатель остаётся нулевым. Третий и четвёртый показатели являются отрицательными. Как можно убедиться, возрастание положительного показателя Ляпунова обусловлено уменьшением среднего времени обхода пучка траекторий, которое ведёт себя согласно соотношению  $\langle T \rangle \sim (\mu - \mu_c)^{-1/2}$ . При этом показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре  $\lambda_1 = \lambda_1(T)$  остаётся почти постоянным, близким к  $\ln 2$  (см. вставку на рис. 16г), что согласуется с приближённым описанием трансформации фаз отображением Бернулли.

**9.3. Параметрический генератор хаоса**

С точки зрения применения принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, подходящим представляется класс систем с параметрическим возбуждением [91–93]. Такого рода системы могут быть построены на различной физической основе — в электронике, механике, акустике, нелинейной оптике.

Одна из распространённых схем параметрического генератора содержит два осциллятора, связь между которыми осуществляется через реактивный (бездиссипативный) элемент с изменяющимся во времени параметром. При этом собственные частоты осцилляторов  $\omega_1, \omega_2$  и частота изменения параметра, или частота накачки,  $\omega_3$  связаны соотношением  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ , выражающим условие параметрического резонанса. В парциальных осцилляторах возникает одновременная раскачка колебаний, стабилизации амплитуды которых можно достичь, если добавить в схему нелинейный резистивный элемент.



**Рис. 17.** (а) Блок-схема параметрического генератора хаоса. Блоки с пометками  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — осцилляторы с соответствующей собственной частотой, квадраты, перечёркнутые волнообразной линией, — реактивные элементы связи, характеризуемые параметром, осциллирующим с частотой накачки  $\omega_3$ ; тёмные квадраты — элементы связи с квадратичной нелинейностью. (б) Итерационные диаграммы для фазы на стадии активности одной из подсистем и (в) портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость комплексной переменной, отвечающей амплитуде первого осциллятора второй подсистемы, построенные по результатам численного решения уравнений (35) при  $\kappa = 1,393$ ,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\beta = 1,184$ ,  $T = 40$ .

Рассмотрим систему [94], составленную из двух таких подсистем, А и В (рис. 17). Пусть частоты выбраны так, что  $\omega_2 = 2\omega_1$  и  $\omega_3 = 3\omega_1$ . (Условие параметрического резонанса, очевидно, выполняется.) Принадлежащий каждой подсистеме осциллятор с частотой  $\omega_1$  полагаем связанным через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором, имеющим частоту  $\omega_2$ , подсистеме-партнёра. В силу принятого соотношения частот воздействие на второй гармонике одного осциллятора на другой будет резонансным.

Пусть накачка включается по очереди в одной и другой подсистеме, так что функционирование устройства состоит в попеременном параметрическом возбуждении подсистем с затуханием в промежутках времени между активными стадиями. В начале очередной стадии возбуждения каждой подсистемы стимулом для возникающих колебаний служит сигнал на второй гармонике от системы-партнёра. Поэтому передача возбуждения каждый раз сопровождается удвоением фазы колебаний. За полный период модуляции накачки фаза колебаний умножается на фактор 4, что обеспечивает хаос в поведении последовательности значений фазы. Система выдаёт сигнал в виде импульсов, следующих друг за другом с периодом модуляции накачки, но при этом фаза высокочастотного заполнения хаотически изменяется от импульса к импульсу.

Следуя стандартному для параметрических систем подходу, можно обратиться к описанию с помощью метода медленных амплитуд [91–93]. Обозначим комплексные амплитуды двух осцилляторов первой подсистемы как  $A_1$  и  $A_2$ , а второй подсистемы как  $B_1$  и  $B_2$ . Принимая во внимание соотношение частот, запишем уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\kappa f(t) A_2^* - i\varepsilon A_1^* B_2 - \frac{1}{2} \alpha A_1 - \frac{1}{2} \beta A_1 |A_1|^2, \\ \dot{A}_2 &= -\frac{1}{2} \kappa f(t) A_1^* - \frac{1}{4} i\varepsilon B_1^2 - \frac{1}{2} \alpha A_2 - 2\beta A_2 |A_2|^2, \\ \dot{B}_1 &= -\kappa g(t) B_2^* - i\varepsilon B_1^* A_2 - \frac{1}{2} \alpha B_1 - \frac{1}{2} \beta B_1 |B_1|^2, \\ \dot{B}_2 &= -\frac{1}{2} \kappa g(t) B_1^* - \frac{1}{4} i\varepsilon A_1^2 - \frac{1}{2} \alpha B_2 - 2\beta B_2 |B_2|^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Параметр  $\varepsilon$  отвечает за нелинейную связь между осцилляторами, относящимися к разным парам. Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют соответственно линейную и нелинейную диссипацию. Параметр  $\kappa$  определяет интенсивность накачки на частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$ , а функции  $f(t)$  и  $g(t)$  задают медленную зависимость амплитуды накачки от времени в двух подсистемах; будем полагать, что

$$f(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{T}, \quad g(t) = \cos^2 \frac{\pi t}{T}. \quad (36)$$

На рисунке 17б показана диаграмма для фаз, отвечающих последовательным стадиям возбуждения второй подсистемы,  $\varphi_n = \arg B_1(nT)$ , построенная на основе численного решения уравнений (35). (Подчеркнём, что определение фазы относится к активной стадии рассматриваемой подсистемы, в которой амплитуда заведомо отлична от нуля.) Заметим, что однократный обход окружности для прообраза, т.е. вариация фазы  $\varphi_n$  от нуля до  $2\pi$ , соответствует четырёхкратному обходу для образа  $\varphi_{n+1}$ . Это означает, что отображение для фазы относится к тому же топологическому классу, что и растягивающее отображение окружности  $\varphi_{\text{new}} = 4\varphi_{\text{old}}$  (mod  $2\pi$ ).

На рисунке 17в показан фазовый портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора второй подсистемы. На вставке в увеличенном виде можно видеть детали тонкой поперечной фрактальной структуры аттрактора. Полный спектр показателей Ляпунова для этого аттрактора следующий:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,03456, \quad \lambda_2 = -0,1320, \quad \lambda_3 = -0,2247, \\ \lambda_4 &= -0,5220, \quad \lambda_5 = -0,6826, \quad \lambda_6 = -0,9012, \\ \lambda_7 &= -1,419, \quad \lambda_8 = -2,325. \end{aligned} \quad (37)$$

Наличие положительного показателя  $\lambda_1$  служит количественным подтверждением присутствия хаоса. Остальные показатели отрицательны. Отсюда следует, что элемент фазового объёма претерпевает растяжение по одному направлению и сжатие по семи остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Для отображения Пуанкаре показатели Ляпунова выражаются через величины (37) соотношением  $\Lambda_k = \lambda_k T$ . Отсюда можно найти  $\Lambda_1 = 1,382$ , что хорошо согласуется с величиной  $\ln 4 = 1,3862\dots$ , отвечающей приближённому описанию эволюции фазовой переменной отображением Бернулли.

Оценка фрактальной размерности аттрактора, имеющего показатели Ляпунова (37), по формуле Каплана–Йорке даёт для аттрактора в отображении Пуанкаре  $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1,26$  (поскольку  $\Lambda_1 > 0$  и  $\Lambda_1 + \Lambda_2 < 0$ ). Соответственно, для аттрактора исходной системы, вложенного в девятимерное расширенное фазовое пространство, размерность составляет  $D' = D + 1 \approx 2,26$ .

Природа механизма, лежащего в основе функционирования системы, а также численные результаты, подтверждающие его реализацию, дают основание полагать, что наблюдаемый хаотический аттрактор — одномерно гиперболический. Интерпретируя действие отображения Пуанкаре геометрически, можно вообразить вложенный в восьмимерное пространство тороид (прямое произведение одномерной окружности и семимер-

ного шара) и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем в виде четырёхкратно сложенной петли внутрь исходной области. На каждом шаге повторения этой процедуры число витков увеличивается в четыре раза. В пределе получается аттрактор с бесконечным числом витков, имеющий канторову поперечную структуру, — один из вариантов соленоида Смейла–Вильямса. Хотя заключение о гиперболической природе аттрактора в данном случае является гипотетическим, рассмотренная схема представляет интерес сама по себе, поскольку открывает возможность получения хаотических режимов, нечувствительных к выбору параметров и характеристик элементов, в системах радиотехники и электроники, акустики, нелинейной оптики<sup>15</sup>.

## 10. О возможности реализации аттрактора типа Смейла–Вильямса в системах с запаздыванием

В качестве альтернативы системам на основе попеременно возбуждающихся осцилляторов, для реализации принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения можно обратиться к системам с запаздыванием [96–98]. В этом случае достаточно иметь единственный осциллятор, попеременно пребывающий в стадии активности или затухания, а передача возбуждения с надлежащей трансформацией фазы осуществляется от одной стадии активности к другой через цепь запаздывающей обратной связи. С точки зрения практической реализации, эти системы могут быть даже проще, чем попеременно возбуждающиеся осцилляторы. С математической точки зрения, они сложнее, поскольку наличие запаздывания формально означает бесконечную размерность пространства состояний. Аккуратный математический анализ аттракторов в таких системах, в том числе строгое обоснование гипотезы гиперболичности, представляется трудной проблемой, требующей разработки новых подходов.

Рассмотрим модельную систему, описываемую уравнением следующего вида [96]:

$$\ddot{x} - \left( A \cos \frac{2\pi t}{T} - x^2 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau) \dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (38)$$

Здесь  $x$  — динамическая переменная осциллятора Вандер-Поля с рабочей частотой  $\omega_0$ , в котором параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, медленно изменяется во времени с периодом  $T$  и амплитудой  $A$ , так что осциллятор попеременно находится в стадиях возбуждения и затухания колебаний. В правую часть уравнения (38) добавлен член, отвечающий за дополнительную запаздывающую обратную связь.

<sup>15</sup> Недавно в работе [94] указан пример параметрического генератора хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией и модуляцией добротности, динамика которого описывается неавтономной системой дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Для четырёхмерного отображения Пуанкаре показано присутствие аттрактора типа Смейла–Вильямса, причём проведена компьютерная проверка критерия конусов, подтвердившая гиперболическую природу аттрактора.

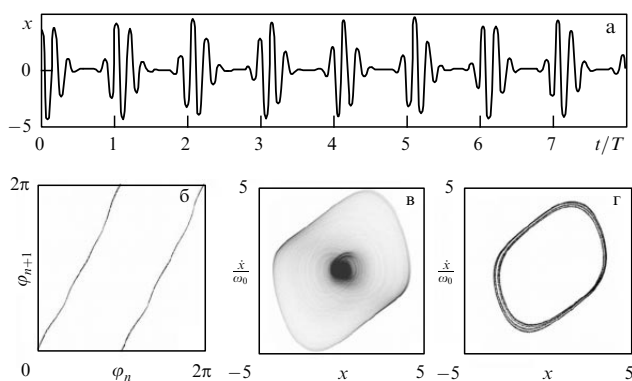
Это произведение динамической переменной в момент времени, меньший на  $\tau$ , её производной и вспомогательного сигнала на частоте  $\omega_0$ . Параметр  $\varepsilon$  определяет величину запаздывающей обратной связи. Будем предполагать, что  $N = \omega_0 T / 2\pi$  — целое число, так что внешнее воздействие на систему, включающее в себя модуляцию параметра и вспомогательный сигнал, — периодическое.

Функционирование системы (38) как генератора хаоса можно пояснить следующим образом. Благодаря периодической вариации параметра, ответственного за возникновение генерации, осциллятор попеременно пребывает в стадиях возбуждения и затухания колебаний. Надлежащим выбором времени запаздывания, например  $\tau = (3/4)T$ , можно создать такую ситуацию, в которой на каждой очередной стадии активности осциллятора затравку для возникновения самоподдерживающихся колебаний будет обеспечивать сигнал, испущенный на предыдущей стадии активности. Предположим, что этот сигнал имел некоторую фазу  $\varphi$ , т.е.  $x(t) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$  и  $\dot{x}(t) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Тогда член в правой части уравнения (38) будет содержать составляющую на основной частоте  $\omega_0$  с удвоенной фазой. В самом деле,

$$x(t - \tau) \dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t \sim \sin 2[\omega_0(t - \tau) + \varphi] \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + 2\varphi) + \dots, \quad (39)$$

где многоточие означает нерезонансное слагаемое. Поэтому на новой стадии активности фаза колебаний осциллятора будет определяться фазой резонансной составляющей затравочного сигнала, и на последовательных стадиях активности получаем отображение Бернулли  $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ . Если по остальным направлениям пространства состояний фазовый объём сжимается, то такого рода динамика должна отвечать присутствию аттрактора Смейла–Вильямса у отображения фазового пространства в себя за период внешнего воздействия.

На рисунке 18а показана полученная при численном решении уравнений (38) реализация колебаний, отвечаю-



**Рис. 18.** (а) Зависимость динамической переменной от времени, согласно результатам численного решения уравнения (38). (б) Диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора, согласно результатам численного решения уравнения (38) при  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $T = 6$ ,  $\tau = 3/4T$ ,  $A = 5,5$ ,  $\varepsilon = 0,2$ . Портрет аттрактора системы (38) в проекции из бесконечномерного пространства состояний на фазовую плоскость осциллятора  $(x, \dot{x})$  (в) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (г).

щая движению на аттракторе. Хаос проявляется в случайном расположении осцилляций заполнения относительно огибающей на последовательных стадиях активности. На рисунке 18б приводится диаграмма для фаз, определённых на последовательных стадиях активности, демонстрирующая соответствие с растягивающим вдвое отображением окружности. На рисунке 18в, г показаны портрет аттрактора системы в проекции из бесконечномерного пространства состояний на фазовую плоскость осциллятора  $(x, \dot{x})$  и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре. На втором изображении различима поперечная фрактальная структура, являющаяся характерным атрибутом аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Формально говоря, аттрактор имеет бесконечное число показателей Ляпунова вследствие бесконечномерной природы системы с запаздыванием. С практической точки зрения, разумно ограничиться рассмотрением их конечного множества, а именно наибольшими по величине показателями в количестве, достаточном для вычисления размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке. Расчёты на основе алгоритма Бенеттина, адаптированного для системы с запаздыванием, приводят при выбранных значениях параметров к следующим величинам показателей, определённых для отображения за период  $T$ :

$$A_1 = 0,688, \quad A_2 = -0,837, \quad A_3 = -4,287. \quad (40)$$

Единственный положительный показатель аттрактора близок по величине к  $\ln 2 = 0,693 \dots$ , что согласуется с приближением, использующим описание динамики фазы отображением Бернулли. Оценка размерности по формуле Каплана–Йорке даёт  $D_{KY} = 1 + A_1/|A_2| \approx 1,82$  для отображения за период. Размерность аттрактора, как объекта в расширенном фазовом пространстве, на единицу больше.

Механизм функционирования модели и численные результаты, подтверждающие его реализацию, позволяют предполагать, что наблюдаемый хаотический аттрактор является однородно гиперболическим, а именно, аттрактором типа Смейла–Вильямса, вложенным в бесконечномерное пространство состояний системы с запаздыванием. Несмотря на гипотетический характер этого заключения, рассмотренная схема генератора хаоса интересна сама по себе, поскольку открывает возможность получения хаотических режимов, нечувствительных к выбору параметров и деталей конструкции в системах радиотехники и электроники, нелинейной оптики и других областях.

Две другие модели неавтономных систем с запаздыванием, основанные на идее манипуляции фазами для получения хаотической динамики, рассмотрены в работах [97, 98]. Отличие этих систем от системы (39) заключается в том, что в них, благодаря использованию двух цепей запаздывающей обратной связи, оказывается возможным обеспечить резонансный механизм передачи возбуждения от предыдущих стадий активности осциллятора без привлечения вспомогательного сигнала на частоте  $\omega_0$ . Как предполагается, аттракторы этих систем относятся к классу *частично гиперболических аттракторов* [20, 26], ввиду наличия на аттракторе нейтрального направления, ассоциируемого с близким к нулю показателем Ляпунова.

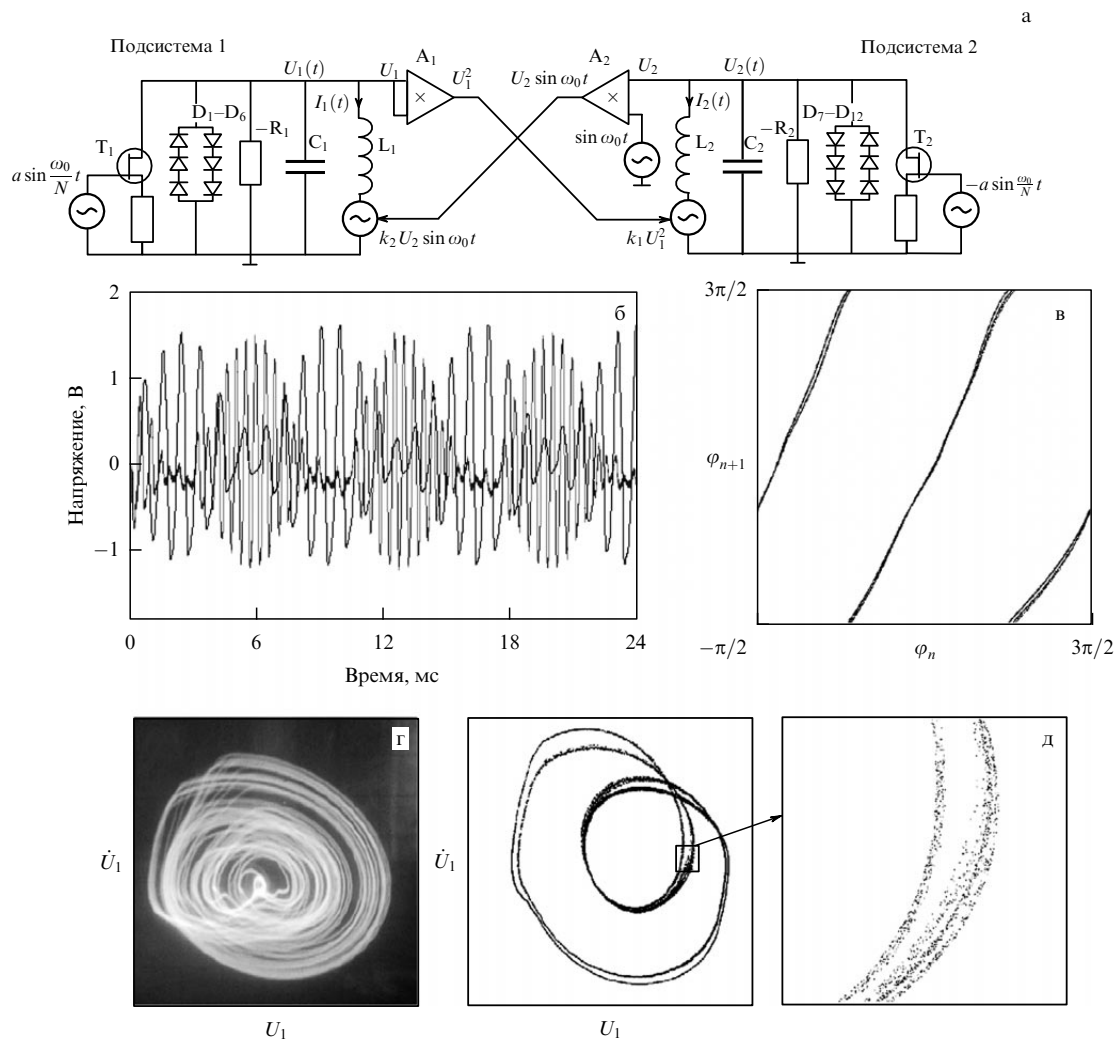
## 11. О реализации гиперболических аттракторов в радиотехнических устройствах

Как говорилось во введении, разработка физического подхода к гиперболическим аттракторам должна иметь итогом создание функционирующих генераторов хаоса. Ниже рассмотрены два примера радиотехнических устройств, реализованных пока как лабораторные макеты [99, 96]. Наряду с этим, можно отметить описанный в работе [100] вариант схемы генератора гиперболического хаоса в микроволновом диапазоне на основе связанных протонных клистронов.

### 11.1. Схема на основе связанных автогенераторов с поочерёдным возбуждением

На рисунке 19 показана схема устройства, представляющего собой неавтономную колебательную систему, состоящую из двух подсистем — осцилляторов Ван-дер-Поля [99]. Каждый из осцилляторов содержит колебательный контур, образованный катушкой индуктивности  $L_{1,2}$  и ёмкостью  $C_{1,2}$ , так что  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ ,

$2\omega_0 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ . Отрицательное сопротивление обеспечивается специальным элементом на основе операционного усилителя. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с возрастанием амплитуды колебаний, вводится элементом, составленным из полупроводниковых диодов ( $D_1-D_6$ ,  $D_7-D_{12}$ ) в виде двух параллельно соединённых ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор ( $T_{1,2}$ ) вносит в контур практически линейную положительную проводимость, величина которой регулируется подаваемым на затвор транзистора напряжением, которое медленно изменяется во времени, совершая колебания с периодом  $T = 2\pi N/\omega_0$ , где  $N$  — целое число. На одном полуцикле этого процесса первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй — под порогом генерации, а на следующем — наоборот. Первый осциллятор действует на второй через нелинейный квадратичный элемент  $A_1$ . В свою очередь, второй осциллятор действует на первый через нелинейный элемент  $A_2$ , осуществляющий смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на час-



**Рис. 19.** (а) Схема устройства на основе двух связанных подсистем — осцилляторов Ван-дер-Поля с периодически меняющимися параметрами. (б) Типичные образцы полученных в эксперименте при  $N = 8$  временных зависимостей переменного напряжения первой (тёмные кривые) и второй (светлые кривые) подсистем. (в) Итерационные диаграммы для фазы первой подсистемы при  $N = 8$ . (г) Фотография с экрана осциллографа портрета аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора ( $U_1, \dot{U}_1$ ) при  $N = 4$ . (д) Стробоскопическое сечение этого аттрактора для последовательности следующих с периодом  $T$  моментов времени, соответствующих максимуму амплитуды первого осциллятора.



тоте  $\omega_0$ . Функционирование схемы соответствует идее, изложенной в начале раздела 9.1, а уравнения (25) могут служить для неё моделью, по крайней мере на качественном уровне рассмотрения.

В реализованном лабораторном макете в колебательных контурах конденсаторы имели ёмкость  $C_1 = 20$  нФ и  $C_2 = 5$  нФ, а катушки — индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  около 1 Гн. Соответственно рабочие частоты осцилляторов составляли  $f_1 = \omega_0/2\pi = 1090$  Гц и  $f_2 = 2f_1 = 2180$  Гц. Напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , снимаемые с первого и второго контура, можно было подавать на регистрирующую аппаратуру (осциллограф, анализатор спектра) или вводить в компьютер в виде временного ряда с помощью аналого-цифрового преобразователя. Функции  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  получались аналоговым дифференцированием с использованием стандартной дифференцирующей цепочки, содержащей ёмкость, резистор и операционный усилитель.

При надлежащем подборе параметров в системе можно было наблюдать хаотические колебания, обусловленные поочерёдным пребыванием осцилляторов в активном состоянии и передачей возбуждения от одного осциллятора к другому с соответствующей трансформацией фазы. На рисунке 19б показаны временные зависимости переменного напряжения в режиме хаотической генерации в одной и другой подсистемах при отношении частоты медленного изменения параметров и частоты вспомогательного сигнала  $N = 8$ . Графики построены на компьютере с использованием записанных в память временных рядов, полученных аналого-цифровым преобразованием напряжений  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ . Частота выборки 200 кГц, т.е. на период характерной частоты генерации  $\omega_0$  приходилось примерно 200 точек. На рисунке 19в приведена итерационная диаграмма для фаз, полученная в эксперименте обработкой на компьютере двухкомпонентного временного ряда. Одна компонента отвечала выборке сигнала  $U_1$  с периодом медленной вариации параметра  $T = 2\pi N/\omega_0$  в моменты времени, соответствующие максимуму амплитуды первого осциллятора. В качестве второй компоненты фигурировала производная на выходе дифференцирующей цепочки в те же моменты. Фаза определялась по формуле  $\varphi = \arg(U_1 - i\omega_0^{-1}\dot{U}_1)$ . По горизонтальной и вертикальной осям на графике отложены значения фазы, относящиеся к последовательным моментам выборки. То обстоятельство, что отображение для фазы топологически эквивалентно растягивающему отображению окружности, следует рассматривать как подтверждение природы реализующегося аттрактора как соленоида Смейла–Вильямса.

На рисунке 19г приведена фотография фазового портрета аттрактора с экрана осциллографа в режиме генерации хаоса. На входы горизонтального и вертикального отклонения электронного луча подавались соответственно переменное напряжение от первой подсистемы  $U_1(t)$  и сигнал с выхода дифференцирующей цепочки, пропорциональный производной по времени  $\dot{U}_1(t)$ . На рисунке 19д приведён построенный путём обработки двухкомпонентного временного ряда портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость  $(U_1, \dot{U}_1)$ , соответствующий изображению соленоида Смейла–Вильямса. Старший показатель Ляпунова, полученный на основе обработки временного ряда по методике [101] с выборкой периода  $T$ , составляет

$\Lambda \approx 0,73$ , что находится в соответствии с оценкой на основе отображения Бернулли  $\Lambda \approx \ln 2$ . Спектр колебаний обоих осцилляторов — сплошной; для первого осциллятора он расположен в диапазоне вблизи частоты  $\omega_0$ , а для второго — вблизи  $2\omega_0$ .

К сожалению, не все обсуждавшиеся в разделе 9 теоретические результаты можно проверить в эксперименте. Например, затруднительно получить полный спектр показателей Ляпунова или выполнить тест на гиперболичность путём проверки критерия конусов. Тем не менее, имея в виду совокупность полученных результатов, можно достаточно уверенно утверждать, что в эксперименте имеет место тот же объект, что и в теоретическом рассмотрении, т.е. в неавтономной колебательной системе реализована надстройка аттрактора типа Смейла–Вильямса.

## 11.2. Схема на основе автогенератора с запаздывающей обратной связью

Схема радиотехнического устройства с запаздывающей обратной связью, в котором реализован принцип, рассмотренный в разделе 10, показана на рис. 20а [96]. Автогенератор, приближённо описываемый уравнением Ван-дер-Поля, содержит LC-контур, элемент с отрицательным сопротивлением на усилителе DA1 и нелинейный диссипативный элемент, составленный из диодов D1–D6. Основная частота колебаний в лабораторном макете  $f = \omega_0/2\pi$  составляла 3 кГц.

Модуляция параметра, ответственного за возбуждение автоколебаний, осуществляется за счёт внесения дополнительной диссипации, которую обеспечивает схема на полевом транзисторе VT1, управляемом внешним сигналом  $A \cos(2\pi t/T)$ . Период составляет  $T \approx 6/f$ ,

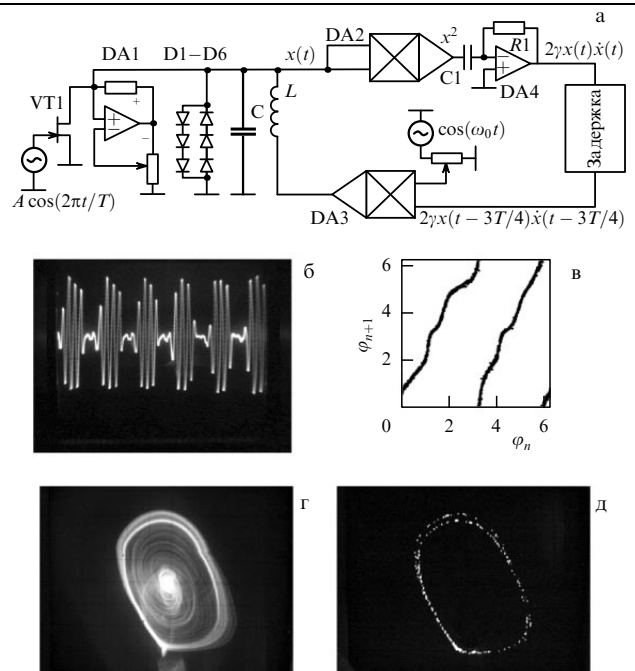


Рис. 20. (а) Блок-схема генератора гиперболического хаоса с запаздывающей обратной связью. (б) Временная реализация напряжения на конденсаторе С. (в) Итерационная диаграмма для фаз последовательных циклов колебаний в режиме генерации хаоса. (г) Проекция фазового портрета аттрактора и (д) его стробоскопическое изображение.

причём на одном полупериоде осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на другом — под порогом генерации. Возбуждение колебаний осциллятора с определённой фазой при наступлении очередной стадии генерации обеспечивается приходом сигнала по цепи запаздывающей обратной связи с выхода умножителя DA3. В цепи обратной связи сигнал подвергается квадратичному преобразованию (умножитель DA2) и дифференцированию посредством стандартной дифференцирующей схемы на элементах R1, C1, DA4. Далее сигнал проходит через цифровую линию задержки, которая обеспечивает запаздывание на время  $3T/4$ . В результате умножения на вспомогательный сигнал с частотой  $\omega_0$  получается сигнал с частотой, близкой к частоте автоколебаний осциллятора, и фазой, удвоенной по отношению к фазе колебаний в момент времени  $t$ . Этот сигнал воздействует на осциллятор, стимулируя его возбуждение на очередной стадии активности.

Сигнал, порождаемый в процессе функционирования схемы (см. осциллограмму на рис. 20б), записывался в компьютер с помощью аналого-цифрового преобразователя как временной ряд, по которому строилось отображение для фазы сигнала за период  $T$  (рис. 20в). Как можно видеть, полученное отображение принадлежит тому же топологическому классу, что и отображение Бернулли, что свидетельствует о присутствии аттрактора Смейла – Вильямса. На рисунке 20г показан сфотографированный с экрана осциллографа портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора. Стробоскопическое изображение аттрактора на рис. 20д демонстрирует очевидное визуальное сходство с соленидом Смейла – Вильямса.

## 12. Заключение

Изложенный материал свидетельствует о существенном прогрессе по основным пунктам намеченной во введении исследовательской программы. Можно констатировать, что теперь мы имеем реальные конкретные примеры физически реализуемых систем с хаотической динамикой, к которым применимы принципы гиперболической теории (системы с аксиомой A).

Выделено несколько направлений конструирования систем с однородно гиперболическими хаотическими аттракторами, а именно: использование моделей с импульсным воздействием; построение динамики в виде последовательно сменяющих друг друга стадий; конструирование систем из осцилляторов, возбуждающихся попеременно и передающих возбуждение друг другу с трансформацией фазы, описываемой отображением с хаотической динамикой. Показано, как можно применить для реализации гиперболического хаоса принцип параметрического возбуждения колебаний и запаздывающую обратную связь.

Представлен ряд конкретных систем, в которых наличие однородно гиперболических хаотических аттракторов подтверждено на уровне компьютерной проверки критерия конусов или предполагается на основе качественных аргументов. Большинство рассмотренных систем относится к классу неавтономных, с периодическим изменением во времени фигурирующих в уравнениях функций или параметров, но есть и примеры автономных систем с аттрактором типа Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре. Благодаря свойству структур-

ной устойчивости, эти модели можно до известной степени трансформировать, не нарушая гиперболической природы динамики, и получать таким образом новые системы с однородно гиперболическим хаосом. На основе некоторых из предложенных схем реализованы радиотехнические макеты, в которых динамика на гиперболическом аттракторе продемонстрирована в эксперименте.

Однако речь пока идёт об однородно гиперболических хаотических аттракторах не в системах естественного происхождения (где они, если и встречаются, то крайне редко), а в целенаправленно сконструированных устройствах. Грань тут, конечно, является условной. Можно вспомнить, что осциллятор Ван-дер-Поля, признанный ныне в качестве универсальной модели в теории автоколебаний, первоначально применялся лишь к искусственной технической системе — ламповому генератору. Можно надеяться, что модели с гиперболическими аттракторами со временем найдут применение также для систем естественного происхождения, например, в нейродинамике. Выше была упомянута работа Бельх с соавторами [59], в которой обсуждалась возможность реализации аттрактора типа Плыкина в модели нейрона Хиндмарша – Роуза. Также в контексте нейродинамики рассматривались модели с катастрофой голубого неба [64], в контексте которой при размерности фазового пространства, равной четырём и более, могут возникать ситуации, отвечающие наличию аттрактора типа Смейла – Вильямса.

Возможность физической реализации гиперболического хаоса открывает перспективы для приложений хорошо развитой математической теории и создаёт основу для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса, в том числе в рамках компьютерного исследования и в эксперименте. Также интересным и содержательным становится направление исследований, состоящее в построении на основе элементов с гиперболическим хаосом сложных систем — цепочек, решёток, сетей [102–104]. Можно предполагать, что модели, сконструированные с целью реализации гиперболического хаоса, окажутся полезными для понимания фундаментальных вопросов, всё ещё бросающих вызов исследователям, например проблемы турбулентности.

Интересен вопрос о диагностике гиперболического хаоса в физическом эксперименте. Хотя математические методики типа критерия конусов кажутся, с этой точки зрения, мало пригодными, проблема не выглядит безнадежной. По крайней мере, в случае аттрактора Смейла – Вильямса для распознавания соответствующего типа динамики продуктивным и убедительным методом служит построение итерационных диаграмм для фаз, демонстрирующих соответствие растягивающему отображению окружности. Это относится как к компьютерным расчётам, так и к эксперименту.

В течение последних 20 лет ведётся активная работа по проблеме применения хаотических сигналов в информационно-коммуникационных системах [105–108]. Хотя аргументы в пользу этого направления выглядят убедительными (большая информационная ёмкость сигналов, возможность управления динамикой посредством малых возмущений, разнообразие методов ввода информации в сигнал, богатые возможности кодирования для защиты передаваемой информации), надо признать, что ожидае-

мые преимущества пока не реализованы в полной мере. Возможная причина состоит в том, что при использовании сигналов, порождённых негиперболическими аттракторами, не удаётся опереться на детальное теоретическое объяснение соответствующей им динамики. С другой стороны, для гиперболических аттракторов существует в известном смысле полное математическое описание хаоса, например возможно исчерпывающее перечисление принадлежащих аттрактору траекторий, ассоциируемых с последовательностями символов конечного алфавита. Поэтому вполне вероятно, что с привлечением гиперболического хаоса удастся в большей степени реализовать ожидаемые достоинства информационно-коммуникационных систем на основе хаотических сигналов.

Специальный интерес для схем скрытой коммуникации могут представлять системы, использующие принцип манипуляции фазами [66, 78, 79, 87–89, 94–100]. Хаос проявляется в этом случае в нерегулярном изменении фаз генерируемой последовательности радиоимпульсов, так что на этой основе возможна реализация схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, чем в предложенных до сих пор вариантах [105–108]. (В связи с этим уместно вспомнить об известном в традиционной радиотехнике преимуществе частотной или фазовой модуляции над амплитудной модуляцией.)

Говоря о возможных технических приложениях систем с гиперболическими аттракторами, особое внимание следует обратить на такое их важнейшее свойство, как структурная устойчивость, или грубость.

В последнее время в литературе довольно широко обсуждается проблема генерации так называемого робастного хаоса (robust chaos) [109–111]. Имеется в виду такая хаотическая динамика, в которой при вариации параметров не возникает "окон периодичности", а зависимость старшего показателя Ляпунова является плавной функцией в широком диапазоне. Подчёркивается, что именно такой хаос желательно иметь для приложений, в том числе в схемах коммуникации, генераторах случайных чисел и системах кодирования информации. Для реализации хаоса указанного типа предлагают использовать системы, в состав которых включены элементы, имеющие характеристики в виде функций с изломами. На практике идеальные изломы недостижимы и полностью исключить окна периодичности таким способом проблематично. В то же время в системах с однородно гиперболическими аттракторами упомянутые свойства хаоса выступают как естественный атрибут вследствие присущей этим системам структурной устойчивости.

Автор выражает благодарность за полезное обсуждение, помощь и конструктивную критику В.С. Анищенко, В.С. Афраймовичу, Б.П. Безручко, В.Н. Белых, А.Ю. Жалнину, А.Ю. Жирову, О.Б. Исаевой, А.П. Кузнецову, П.В. Купцову, Ю. Курцу (J. Kurths), Р. Мак-Кэю (R. MacKay), А.С. Пиковскому, В.И. Пономаренко, Н.М. Рыскину, И.Р. Сатаеву, Е.П. Селезневу, В. Такеру (W. Tucker), Д.В. Трещёву, Д.И. Трубецкову, Л.В. Тюрюкиной. Работа выполнена при частичной поддержке грантами РФФИ 09-02-00426 и РФФИ-ННИО 08-02-91963, а также программой "Развитие научного потенциала высшей школы" № 2.1.1/1738.

## Список литературы

1. Синай Я Г, Шильников Л П (Ред. пер.) *Странные аттракторы* (М.: Мир, 1981)
2. Hasselblatt B, Young L S, in *Encyclopedia of Nonlinear Science* (Ed. A Scott) (New York: Routledge, 2005) p. 11
3. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M *Nonlinear Physics: from the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
4. Неймарк Ю И, Ланда П С *Стохастические и хаотические колебания* (М.: Наука, 1988) [Neimark Yu I, Landa P S *Stochastic and Chaotic Oscillations* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992)]
5. Рабинович М И, Трубецков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* (М.–Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2000) [Rabinovich M I, Trubetskov D I *Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems* (Kluwer Acad. Publ., 1989)]
6. Schuster H G, Just W *Deterministic Chaos: an Introduction* (Weinheim: Wiley-VCH, 2005); Шустер Г *Детерминированный хаос* (М.: Мир, 1988)
7. Thompson J M T, Stewart H B *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Chichester: Wiley, 1986)
8. Дмитриев А С, Кислов В Я *Стохастические колебания в радиофизике и электронике* (М.: Наука, 1989)
9. Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (М.–Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2007)
10. Анищенко В С *Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах* (М.: Либроком, 2009)
11. Кузнецов С П *Динамический хаос* (М.: Физматлит, 2006)
12. Strogatz S H *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (Boulder, CO: Westview Press, 2001)
13. Ott E *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002)
14. Smale S *Bull. Amer. Math. Soc. New Ser.* **73** 747 (1967)
15. Williams R F *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **43** 169 (1974)
16. Синай Я Г, в сб. *Нелинейные волны* (Под ред. А В Гапонова-Грехова) (М.: Наука, 1979) с. 192
17. *Динамические системы-9* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 66) (М.: ВИНТИ, 1991) [*Dynamical Systems IX* (Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 66) (Berlin: Springer, 1995)]
18. Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)
19. Shilnikov L *Int. J. Bifurcat. Chaos* **7** 1953 (1997)
20. Katok A, Hasselblatt B *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996) [Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)]
21. Guckenheimer J, Holmes P *Nonlinear Oscillations: Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Berlin: Springer, 1990) [Гукенхеймер Дж, Холмс Ф *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (М.–Ижевск: Инст. комп. исслед., 2002)]
22. Afraimovich V, Hsu S-B *Lectures on Chaotic Dynamical Systems* (AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 28) (Providence, RI: American Mathematical Society, 2003)
23. Hasselblatt B, Katok A *A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003) [Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в теорию динамических систем: с обзором последних достижений* (М.: Изд-во МЦНМО, 2005)]
24. Devaney R L *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (New York: Westview Press, 2003)
25. Анищенко В С и др. *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (М.–Ижевск: Инст. комп. исслед., 2003) [Anishchenko V S et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems* (Berlin: Springer, 2007)]

26. Barreira L, Pesin Y, in *Smooth Ergodic Theory and Its Applications* (Proc. of Symp. in Pure Mathematics, Vol. 69) (Providence, RI: American Mathematical Society, 2001) p. 3
27. Bonatti C, Diaz L J, Viana M *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective* (Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 102. Mathematical Physics 3) (Berlin: Springer, 2005)
28. Benedicks M, Carleson L *Ann. Math.* **133** 73 (1991)
29. Андронов А А, Понтрягин Л С *ДАН СССР* **14** 247 (1937) [Andronov A A, Pontryagin L S *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **14** 247 (1937)]
30. Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э *Теория колебаний* (М.: Физматгиз, 1959) [Andronov A A, Vitt A A, Khaikin S E *Theory of Oscillators* (Oxford: Pergamon Press, 1966)]
31. Benettin G et al. *Meccanica* **15** 9 (1980)
32. Kaplan J L, Yorke J A, in *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 730, Eds H-O Peitgen, H-O Walther) (Berlin: Springer-Verlag, 1979) p. 204
33. Вул Е Б, Синай Я Г, Ханин К М *УМН* **39** (3) 3 (1984) [Vul E B, Sinai Y G, Khanin K M *Russ. Math. Surv.* **39** 1 (1984)]
34. Coudeud Y *Notices Am. Math. Soc.* **53** (1) 8 (2006)
35. Плыкин Р В *Матем. сб.* **94** (2) 243 (1974) [Plykin R V *Math. USSR Sb.* **23** (2) 233 (1974)]
36. Жиров А Ю *Матем. сб.* **185** (6) 3 (1994) [Zhirov A Yu *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.* **82** (1) 135 (1995)]
37. Grines V Z, Zhuzhoma E V *Regul. Chaotic Dyn.* **11** (2) 225 (2006)
38. Feller W *An Introduction to Probability Theory and its Applications* Vol. 1 (New York: Wiley, 1968) [Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 1 (М.: Мир, 1984)]
39. Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H *Trans. Am. Math. Soc.* **114** 309 (1965)
40. Beck C, Schlögl F *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
41. Кифер Ю И *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **38** 1091 (1974) [Kifer Ju I *Math. USSR Izv.* **8** 1083 (1974)]
42. Синай Я Г *УМН* **27** (4) 21 (1972) [Sinai Ya G *Russ. Math. Surv.* **27** (4) 21 (1972)]
43. Bowen R *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Math. 470) (Berlin: Springer-Verlag, 1975)
44. Ruelle D *Am. J. Math.* **98** 619 (1976)
45. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **124** 754 (1959)
46. Синай Я Г *ДАН СССР* **124** 768 (1959)
47. Песин Я Б *УМН* **32** (4) 55 (1977) [Pesin Ya B *Russ. Math. Surv.* **32** (4) 55 (1977)]
48. Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **20** 167 (1971) [Рюэль Д, Такенс Ф, в сб. *Странные аттракторы* (Пер. под ред. Я Г Синай, Л П Шильникова) (М.: Мир, 1981) с. 117]
49. Newhouse S, Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **64** 35 (1978)
50. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963) [Лоренц Э, в сб. *Странные аттракторы* (Пер. под ред. Я Г Синай, Л П Шильникова) (М.: Мир, 1981) с. 88]
51. Tucker W *Found. Comput. Math.* **2** 53 (2002)
52. Morales C A *Ann. Inst. Henri Poincaré Non Linéaire* **13** 589 (1996)
53. Lopes A O *Geometric Dynamics* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1007, Ed. J Palis) (Berlin: Springer-Verlag, 1983) p. 498
54. Hunt T J "Low dimensional dynamics: bifurcations of cantori and realisations of uniform hyperbolicity", PhD Thesis (Cambridge: Univ. of Cambridge, 2000)
55. Ахиезер Н И *Элементы теории эллиптических функций* (М.: Наука, 1970) [Akhiezer N I *Elements of the Theory of Elliptic Functions* (Providence, RI: American Mathematical Society, 1999)]
56. Айдарова Ю С, Кузнецов С П *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **16** (3) 176 (2008); Aidarova Yu S, Kuznetsov S P, arXiv:0901.2727
57. Hunt T J, MacKay R S *Nonlinearity* **16** 1499 (2003)
58. Thurston W P, Weeks J R *Sci. Am.* **251** (1) 94 (1984) [Тёрстен У П, Уикс Дж Р *В мире науки* (9) 74 (1984)]
59. Belykh V, Belykh I, Mosekilde E *Int. J. Bifurcat. Chaos* **15** 3567 (2005)
60. González-Miranda J M *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17** 3071 (2007)
61. Тураев Д В, Шильников Л П *Докл. РАН* **342** 596 (1995) [Turaev D V, Shil'nikov L P *Dokl. Math.* **51** 404 (1995)]
62. Shil'nikov L P, Turaev D V *Comput. Math. Appl.* **34** (2–4) 173 (1997)
63. Gavrilov N K, Shilnikov A L *Am. Math. Soc. Transl. II* **200** 165 (1999)
64. Shilnikov A, Cymbalyuk G *Phys. Rev. Lett.* **94** 048101 (2005)
65. Glyzin S D, Kolesov A Yu, Rozov N Kh *Differ. Equat.* **44** (2) 161 (2008)
66. Kuznetsov S P *Regul. Chaotic Dyn.* **15** (2–3) 348 (2010)
67. Halbert J T, Yorke J A, <http://www.math.umd.edu/~halbert/taffy-paper-1.pdf>
68. Reichl L E *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (New York: Springer, 2004)
69. Heagy J F *Physica D* **57** 436 (1992)
70. Kuznetsov A P, Savin A V, Savin D V *Physica A* **387** 1464 (2008)
71. Тюрюкина Л В *Нелинейный мир* **8** (2) 72 (2010)
72. Кузнецов С П, Тюрюкина Л В *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **18** (5) 80 (2010)
73. Kuznetsov S P *Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation* **14** 3487 (2009)
74. Кузнецов С П *Нелинейная динамика* **5** (3) 403 (2009)
75. Kuznetsov S P *Chaos* **19** 013114 (2009)
76. Клышко Д Н *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986)
77. Розенберг Г В *УФН* **56** 77 (1955)
78. Kuznetsov S P *Phys. Rev. Lett.* **95** 144101 (2005)
79. Isaeva O B, Jalnine A Yu, Kuznetsov S P *Phys. Rev. E* **74** 046207 (2006)
80. Исаева О Б, Кузнецов С П, Осбалдестин А *Письма в ЖТФ* **33** (17) 69 (2007) [Isaeva O B, Kuznetsov S P, Osbaldestin A *Tech. Phys. Lett.* **33** 748 (2007)]
81. Isaeva O B, Kuznetsov S P, Osbaldestin A H *Physica D* **237** 873 (2008)
82. Жалнин А Ю, Кузнецов С П *ЖТФ* **77** (4) 10 (2007) [Jalnine A Yu, Kuznetsov S P *Tech. Phys.* **52** 401 (2007)]
83. Купцов П В, Кузнецов С П *Нелинейная динамика* **2** (3) 307 (2006)
84. Кузнецов С П, Сатаев И Р *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **14** (5) 3 (2006)
85. Kuznetsov S P, Sataev I R *Phys. Lett. A* **365** 97 (2007)
86. Wilczak D *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* **9** 1263 (2010)
87. Kuptsov P V, Kuznetsov S P, Sataev I R, arXiv: 0804.3677
88. Кузнецов А П, Кузнецов С П, Пиковский А С, Тюрюкина Л В *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **15** (6) 75 (2007)
89. Kuznetsov S P, Pikovskiy A *Physica D* **232** 87 (2007)
90. Kuznetsov S P, Pikovskiy A, Sataev I R, in *Proc. of the III Intern. Conf. "Frontiers of Nonlinear Physics"* (Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2007) p. 66
91. Louisell W H *Coupled Mode and Paramagnetic Electronics* (New York: Wiley, 1960) [Льюиселл У *Связанные и параметрические колебания в электронике* (М.: ИЛ, 1963)]
92. Ахманов С А, Хохлов Р В *УФН* **88** 439 (1966) [Akhmanov S A, Khokhlov R V *Sov. Phys. Usp.* **9** 210 (1966)]
93. Кузнецов А П, Кузнецов С П, Рыскин Н М *Нелинейные колебания* (М.: Физматлит, 2005)
94. Кузнецов С П *ЖЭТФ* **133** 438 (2008) [Kuznetsov S P *JETP* **106** 380 (2008)]
95. Кузнецов А С, Кузнецов С П, Сатаев И Р *ЖТФ* **80** (12) 1 (2010) [Kuznetsov A S, Kuznetsov S P, Sataev I R *Tech. Phys.* **55** 1707 (2010)]
96. Кузнецов С П, Пономаренко В И *Письма в ЖТФ* **34** (18) 1 (2008) [Kuznetsov S P, Ponomarenko V I *Tech. Phys. Lett.* **34** 771 (2008)]
97. Kuznetsov S P, Pikovskiy A *Europhys. Lett.* **84** 10013 (2008)
98. Баранов С В, Кузнецов С П, Пономаренко В И *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **18** (1) 11 (2010)
99. Кузнецов С П, Селезнев Е П *ЖЭТФ* **129** 400 (2006) [Kuznetsov S P, Seleznev E P *JETP* **102** 355 (2006)]
100. Емельянов В В, Кузнецов С П, Рыскин Н М *Письма в ЖТФ* **35** (16) 71 (2009) [Emel'yanov V V, Kuznetsov S P, Ryskin N M *Tech. Phys. Lett.* **35** 773 (2009)]

101. Wolf A et al. *Physica D* **16** 285 (1985)
102. Bunimovich L A, Sinai Ya G *Nonlinearity* **1** 491 (1988)
103. Bunimovich L A, Sinai Ya G, in *Theory and Application of Coupled Map Lattices* (Ed. K Kaneko) (Singapore: John Wiley, 1993) p. 169
104. Kuptsov P V, Kuznetsov S P *Phys. Rev. E* **80** 016205 (2009)
105. Дмитриев А С, Панас А И *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи* (М.: Физматлит, 2002)
106. Yang T *Int. J. Comput. Cognition* **2** (2) 81 (2004)
107. Argyris A et al. *Nature* **438** 343 (2005)
108. Короновский А А, Москаленко О И, Храмов А Е *УФН* **179** 1281 (2009) [Koronovskii A A, Moskalenko O I, Hramov A E *Phys. Usp.* **52** 1213 (2009)]
109. Banerjee S, Yorke J A, Grebogi C *Phys. Rev. Lett.* **80** 3049 (1998)
110. Elhadj Z, Sprott J C *Front. Phys. China* **3** (2) 195 (2008)
111. Drutarovský M, Galajda P *Radioengineering* **16** (3) 120 (2007)

## Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics

S.P. Kuznetsov

Saratov Branch, Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences  
ul. Zelenaya 38, 410019 Saratov, Russian Federation  
Tel. (7-8452) 27-86 85  
E-mail: spkuz@rambler.ru

Research is reviewed on the identification and design of physical systems with chaotic dynamics due to uniformly hyperbolic attractors (such as the Plykin attraction or the Smale – Williams solenoid). Basic concepts of the mathematics involved and approaches proposed in the literature for constructing systems with hyperbolic attractors are discussed. Topics covered include periodic pulse-driven models; dynamics models consisting of periodically repeated stages each described by its own differential equations; the design of systems of alternately excited excitation exchanging oscillators; the use of parametrically excited oscillations; and the introduction of delayed feedback. Some maps, differential equations and simple mechanical and electronic systems exhibiting chaotic dynamics due to the presence of uniformly hyperbolic attractors are presented as examples.

PACS numbers: **05.45. – a**, **45.50. – j**, **84.30. – r**

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0121

Bibliography — 111 references

Received 1 April 2010, revised 16 September 2010

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **181** (2) 121 – 149 (2011)

*Physics – Uspekhi* **54** (2) (2011)