

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Институт теплофизики
им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН

Немировский Сергей Карпович

**ГИДРОДИНАМИКА КВАНТОВЫХ
ЖИДКОСТЕЙ. ВОЛНЫ, ВИХРИ,
ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

**ЧАСТЬ I. Безвихревое движение, нелинейная
акустика.**

Новосибирск – 2014

1 ноября 2015 г.

УДК
ППК

Немировский Сергей Карпович. Гидродинамика квантовых жидкостей. волны, вихри, турбулентность. Часть I. Безвихревое движение, нелинейная акустика..

Книга представляет собой первую часть монографии, посвященную различным аспектам гидродинамики квантовых жидкостей. В этой части подробно излагается концепция двухжидкостной гидродинамики, основанная на теории Ландау, приводятся различные методы вывода уравнений движения, обсуждаются различные примеры течений. Особое внимание уделено вопросам линейной и нелинейной акустики, приведен обзор экспериментальных исследований. Вторая часть предполагается будет посвящена гидродинамическим явлениям в присутствии квантованных вихрей и квантовой турбулентности. Монография рассчитана на физиков и инженеров, непосредственно занимающихся изучением и техническим применением квантовых жидкостей, а также на специалистов других областей, желающих глубже ознакомиться с этими интересными явлениями. Она также предназначена для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики низких температур и гидродинамики сложных систем. Рис. 63. Библ. 197 назв.

Утверждено к печати Ученым советом Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН

Рецензенты:

Главный научный сотрудник ИВТ СО РАН, д.ф.-м.н., профессор Ю.Н. Григорьев.

Ведущий научный сотрудник ИФТТ РАН, д.ф.-м.н В.Б. Ефимов.

Профессор кафедры низких температур Национального исследовательского университета «МЭИ», д.т.н. А.П. Крюков.

ISBN

Nemirovskii Sergei Karpovich. HYDRODYNAMICS OF QUANTUM FLUIDS. WAVES, VORTICES, TURBULENCE. PART I. Vortex free motion, nonlinear acoustics..

The book is the first part of the monograph, devoted to various aspects of hydrodynamics of quantum fluids. This part describes in detail the concept of two-fluid hydrodynamics, based on the Landau theory. Different methods derivation of equations of motion are given, and various examples of the vortex free are discussed. Particular attention is given to linear and nonlinear acoustics, an overview of experimental researches is presented. The second part is supposed to be devoted to hydrodynamic phenomena in the presence of quantized vortices and quantum turbulence. The monograph is intended for physicists and engineers directly involved in the study and the technical application of of quantum fluids, as well as for professionals in other fields who wish to become acquainted with these interesting phenomena. It is also intended for undergraduate and graduate students specializing in the field of low temperature physics and fluid dynamics of complex systems. Fig. 63. Bible. 197 references.

It Approved for publication by the Academic Council of the S.S. Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Reviewers:

Chief Scientist ICT SB RAS, doctor of sciences, Professor Yu.N. Grigoriev.

Leading researcher ISSP, doctor of sciences V.B. Efimov.

Professor, Department of Low Temperatures of the National Research University "MPI doctor of sciences, A.P. Kryukov.

Содержание

1	Гелий II - Квантовая жидкость	11
2	История создания теории сверхтекучести	17
2.1	Ранние эксперименты.	17
2.2	Двухскоростная (двухжидкостная) модель Лондона и Тиссы.	26
2.3	Теория Ландау	29
2.3.1	Квантование движения и концепция квазичастиц	29
2.3.2	Двухскоростная (двухжидкостная) модель Ландау.	37
3	Уравнения двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости	44
3.1	Метод Ландау, бездиссипативный случай	45
3.2	Вывод уравнений гидродинамики сверхтекучего гелия с помощью законов сохранения	50
3.3	Гидродинамика сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных процессов.	57
3.4	Гамильтонова форма уравнений движения квантовой жидкости.	60
3.4.1	Принцип наименьшего действия. Баротропная безвихревая жидкость	60
3.4.2	Вихревые баротропные движения.	62
3.4.3	Небаротропные движения	65
3.4.4	Принцип наименьшего действия в сверхтекучей жидкости.	66
3.4.5	Вариация действия	66
3.4.6	Гамильтонова форма уравнений сверхтекучей гидродинамики	68
3.5	Гамильтонова форма уравнений и нелинейная акустика	71
3.6	Гидродинамика сверхтекучего гелия вблизи λ - точки	74
3.7	Примеры решений ламинарной гидродинамики сверхтекучей жидкости	79
3.7.1	Противоток, линейная задача, сверхтеплопроводность	80
3.7.2	Противоток, случай больших тепловых нагрузок	81
3.7.3	Тангенциальные силы, действующих на поверхность тела в бездиссипативном случае	83
3.7.4	Пограничный тепловой слой	84
4	Звуки в сверхтекучих жидкостях	87
4.1	Исследование волновых процессов в сверхтекучем гелии	87
4.2	Распространение звуков в сверхтекучей жидкости	90
4.2.1	Уравнения для малых возмущений	90

4.2.2	Два типа звуковых волн	92
4.2.3	Свойства первого и второго звуков	94
4.3	Тепловое зацепление и излучение звуков	98
4.4	Затухание звуков	99
4.5	Прохождение звуков через межфазную поверхности	101
4.5.1	Преломление второго звука	101
4.5.2	Отражение волны давления в паре от межфазной поверхности	103
4.6	Звук вблизи λ - точки	105
4.7	О распространении второго звука вблизи раздела фаз He I-He II	108
5	Нелинейные волны второго звука в сверхтекучем гелии	113
5.1	Особенности исследования нелинейных волн в He II	113
5.2	Динамика интенсивных импульсов второго звука	115
5.3	Затухающие волны. Диссипативный случай, квазипростые волны, уравнение Бюргерса	120
5.4	Дисперсия второго звука	123
5.5	Стационарные решения уравнения Бюргерса и КДВБ.	127
5.6	Кубически нелинейные эффекты	129
5.7	Неоднородные волновые пакеты	131
5.7.1	самофокусировка монохроматической волны	131
5.7.2	Волновые пучки в квадратичной нелинейной среде	134
6	Инварианты Римана и распространение нелинейных волн	137
6.1	Характеристическая запись уравнений нелинейной акустики	137
6.2	Пфаффовы формы, Инварианты Римана	139
6.3	Линейный случай	140
6.4	Инварианты Римана в сверхтекучем гелии, Простые волны	141
6.5	Нелинейный распад волны энтропии	144
7	Устойчивость нелинейных волн	147
7.1	Преобразование первого звука во второй в сверхтекучем гелии	147
7.2	4. Устойчивость монохроматической волны первого звука	147
7.3	Устойчивость ударной волны давления	152
8	Стохастические нелинейные волновые процессы.	155
8.1	Постановка задачи, диаграммная техника Уайльда	155
8.2	Кинетические уравнения	159
8.3	Акустические свойства турбулентного He II	168

9	Макроскопическая динамика конденсата Бозе-Эйнштейна	176
9.1	Теория бозе-эйнштейновской конденсации и идеальном газе . . .	176
9.2	Бозе-эйнштейновская конденсации в ультра-холодных атомов газов	179
9.3	Макроскопическая волновая функции	180
9.4	Некоторые решения	183
9.4.1	Равновесное решение	183
9.4.2	Длина восстановления	184
9.4.3	Пристеночное решение	184
9.4.4	Звук в Бозе-Эйнштейновском конденсате.	184
9.5	Преобразование Маделунга	185
9.6	Quantum vortices	187
9.7	Вихри как топологические дефекты	191
9.8	Конденсат Бозе-Эйнштейна и теория сверхтекучести	192
10	Экспериментальные исследования по нелинейной акустике сверхтекучего гелия	194
10.1	Эксперименты по динамике интенсивных волн второго звука . .	195
10.2	Неоднородность, устойчивость и турбулентность	200
10.3	Некоторые экспериментальные предложения	205

Список часто используемых символов и сокращений

$\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n$	скорости движения сверхтекучей и нормальной компонент, соответственно
ρ_s, ρ_n	плотности сверхтекучей и нормальной компонент, соответственно
ρ	полная плотность
S, σ	энтропия единицы объема и единицы массы, соответственно
	давление
V	объем
μ	химический потенциал
T	температура
T_λ	температура лямбда перехода
C_p, C_V	теплоемкости единицы объема при постоянном давлении и объеме, соответственно
\mathbf{j}	плотность импульса
\mathbf{j}_0	плотность импульса в системе сверхтекучего движения
Π_{ik}	тензор плотности потока импульса
R	Диссипативная функция
c_1, c_2	скорости первого и второго звуков, соответственно
Q_{heat}	плотность теплового потока
$A(T)$	константа Гортера-Меллинка
$\Psi(\mathbf{r}, t)$	макроскопическая волновая функция, или параметр порядка, глава 3.6
$\varepsilon(\mathbf{p})$	энергия квазичастиц (фононов и ротонов) как функция их импульсов \mathbf{p})
λ_{dB}	Квантово-механическая дебройлевская длина волны
$\Psi(\mathbf{r}, t)$	комплексная огибающая волнового пакета, глава 5.7
$\psi(\mathbf{r}, t)$	Макроскопическая волновая функции, глава 9
$\alpha_1(T), \alpha_2(T)$	коэффициенты нелинейности первого и второго звуков, соответственно
T_α	температура, при которой $\alpha_2(T) = 0$

$a_{\mathbf{k}}^{(1)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}, a_{\mathbf{k}}^{(2)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}$	нормальные координаты первого и второго звуков, соответственно
$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}$	матричные элементы, или вершинные части (вершины)
m	масса атома гелия
a_0	радиус ядра квантового вихря
АТ	акустическая турбулентность
КУ	кинетические уравнения
ДТ	диаграмная техника
БЭК	бозе-эйнштейновский конденсат

Предисловие

Открытие сверхтекучести жидкого гелия вызвало мощный поток работ, посвященных исследованию этого явления. Большинство из них связано с фундаментальными вопросами сверхтекучести, такими как микроскопическое обоснование явления сверхтекучести, изучение кинетики квазичастиц — фононов и ротонов, теория фазовых переходов, теория квантовых вихрей и др. Работы, связанные непосредственно с гидродинамикой сверхтекучего гелия, были представлены несколько слабее, в результате такие традиционные вопросы механики сплошной среды как задачи обтекания, перенос, турбулентное течение, акустика, оказались изученными значительно слабее, нежели в обычной жидкости.

Между тем гидродинамика сверхтекучих жидкостей является важной отдельной дисциплиной, которая представляет интерес для многих областей физики, разумеется, прежде всего для сверхтекучести хотя бы потому, что большинство экспериментов в области сверхтекучести имеют гидродинамический характер. Вместе с тем, мы полагаем что многие методы и результаты гидродинамики сверхтекучих жидкостей представляют несомненный интерес и для других разделов физики сплошных сред.

Отчасти "второстепенная роль" гидродинамики сверхтекучих жидкостей объясняется тем, что в ранние годы изучения гелия вопрос о практическом использовании представлялся делом отдаленной перспективы. Ситуация изменилась в последнее время; развитие некоторых отраслей науки и техники потребовало создания систем, устойчиво функционирующих в диапазоне температур менее 2 К, при которых реально единственным хладагентом является сверхтекучий гелий. Это обстоятельство выдвинуло исследование гидродинамики и теплопередачи в сверхтекучих жидкостях в число наиболее актуальных задач физики низких температур. В качестве примера крупных прикладных проблем достаточно указать Большой Адронный Коллайдер, где мощные сверхпроводящие магниты охлаждаются сверхтекучим гелием. Более подробно вопросы технического использования квантовых жидкостей будут обсуждены несколько далее в главе 1.

Другая особенность гидродинамики сверхтекучих жидкостей связана с тем что при некоторых, довольно низких скоростях в квантовых жидкостях возникают квантовые вихри, которые радикально меняют "обычную" двухскоростную гидродинамику. Это обстоятельство довольно резко ограничивает диапазон применения безвихревых законов движения, хотя построение новой гидродинамики, включающей квантовые вихри, включает "обычную" двухскоростную гидродинамику как необходимый первый шаг. С другой стороны, в нестаци-

онарных явлениях, в частности в нелинейной акустике, амплитуды скорости соответствующих волн могут достигать очень больших значений, при этом течение остается безвихревым.

В 1970-х гг. были изданы монография Халатникова [1], в которой большая часть была посвящена вопросам гидродинамическим аспектам квантовых жидкостей, а также книга Паттермана [2], (имеется русский перевод [3]), с названием "Гидродинамика Сверхтекучей Жидкости". С тех пор накопилось много теоретического и экспериментального материала, имеющего отношение непосредственно к гидродинамическим проблемам в квантовых жидкостях. Более того, экспериментально открыты другие квантовые жидкости - это сверхтекучий ^3He , а также Бозе-Эйнштейновский конденсат. Кроме того, имеются и более экзотические сверхтекучие системы, такие как, например, нейтронные звезды. Также обсуждаются "сверхтекучие" свойства твердого гелия.

Изложенные выше обстоятельства (а также многолетняя работа автора в этой области) определяют мотивацию появления данной монографии и ее структуру. Одной из главных особенностей представленной монографии является то, что она разделена на две части. Первая часть посвящена классической двухскоростной модели и безвихревым течениям квантовых жидкостей. В ней подробно излагается история создания двухскоростной модели Ландау, рассматривается вывод уравнений различными способами, такими как метод законов сохранения и принцип относительности Галилея, или вариационный метод. Даны некоторые классические примеры безвихревых течений, например противоток (counterflow). Главное внимание уделяется вопросам линейной и особенно нелинейной акустики, в которых образование вихрей не наблюдается для довольно больших амплитуд. В планируемой второй части монографии предполагается изложить теорию квантовых вихрей применительно к гидродинамическим процессам в сверхтекучих жидкостях, а также описать популярную в настоящее время теорию квантовой турбулентности, связанную с хаотической динамикой квантовых вихрей.

Еще одна особенность монографии состоит в том, что ее основой стал курс лекций, прочитанный для студентов Новосибирского государственного университета гидродинамических специальностей. Это не могло не сказаться на выборе материала и на характере изложения. Именно, квантовые жидкости рассматривались как образец комплексной сплошной среды (типа многофазных жидкостей) со специфическими, экзотическими свойствами. Поэтому законы динамики квантовых жидкостей вполне совместимы с феноменологией сложных гидродинамических систем. В качестве примера можно указать вывод уравнения гидродинамики на основе законов сохранения, разработанный, кстати, впервые Халатниковым в 1950-х гг. именно для случая сверхтекуче-

го гелия. Другой полезный и дидактичный пример - это зависимость термодинамических величин от относительной скорости между компонентами, возникающая в механике сложных сплошных сред.

Материал, изложенный в книге, необычайно обширен. По этой причине представление материала весьма неравномерно. Некоторые, классические, относительно несложные вопросы (например, линейная акустика) соседствуют со сложными специальными проблемами, требующими использование сложного математического аппарата (например, теория акустической турбулентности, построенная с помощью диаграммной техники). Другие, как представляется второстепенные (для данной монографии) темы, мы изложены довольно фрагментарно, а некоторые вопросы и вовсе опущены, при этом отсылая читателя к оригинальным источникам и статьям. В этом смысле книга, конечно, не является учебником, но, как я надеюсь, основные, принципиальные вопросы, изложены достаточно подробно.

Поскольку данная монография является результатом многолетней работы автора в области гидродинамики квантовых жидкостей, мне хотелось бы принести благодарность очень многим моим коллегам, которые либо оказали огромное влияние на мое видение многих проблем, либо были прямыми соавторами в представленных в книге исследованиях.

Я хотел бы начать со слов признательности в адрес проф. В.Е. Накорякова, в лаборатории которого я выполнил свои первые студенческие исследования, посвященные нелинейным волнам. Я также благодарен профессорам И.М. Халатникову, Л.П. Питаевскому, А.Ф. Андрееву, А.З. Паташинскому, В.Л. Покровскому, W.F. Vinen, R.J. Donnelly и K. W. Schwarz. Эти ученые были пионерами в исследовании многих затронутых в книге вопросов, и мои личные контакты и встречи с ними оказали огромное влияние на мой взгляд на изложенные проблемы.

Многие результаты, приведенные в монографии, были получены в сотрудничестве с учеными из разных стран. Я бы хотел бы поблагодарить за плодотворное и полезное сотрудничество профессоров W. Fiszdon, D. Schmidt, M. von Schwerdtner, G. Stamm, M. Murakami, W. Poppe, J. Pakleza, M. Tsubota, E. Sonin, M. Kubota, M. Krusius, S. van Sciver.

Во время моей работы, я консультировался со многими учеными по различным проблемам. Я благодарен профессорам А. Собынину, A. Golov, L. Skrbek, G. Pickett, S. Fisher, C. Barenghi, S. Nazarenko, V. L'vov, С. Алексеенко, П. Куйбину, С. Чекмареву, N. Berloff, B. Svistunov, E. Kozik, G. Kolmakov за полезные обсуждения.

Я хотел бы также выразить глубокую признательность профессорам Д. Kivotides, V. Eltsov, R. Hanninen, В. Юкалову, M. Sciacca, K. Barenghi, А. Крюкову, В. Ефимову, G. Williams за непосредственную помощь в подготовке

некоторых тем.

Я также хочу поблагодарить моих коллег профессоров П. Гешева и О. Цвелодуба, а также д.ф.-м.н. Л. Кондаурову и д.ф.-м.н. Ю. Хабахпашева за поддержку и дружеское отношение в течение длительной совместной работы. Я благодарен О. Бобринок за техническую помощь, в частности, за помощь в составлении базы данных BibTeX, а также моей жене В. Немировскую за то, что она мужественно подавляла смех, исправляя мои грамматические ошибки при первичном редактировании рукописи.

Подготовка данной монографии, а также исследования вошедшие в нее были выполнены при поддержке гранта Российского Научного Фонда (проект № 14-29-00093).

1 Гелий II - Квантовая жидкость

Гелий, несомненно, является чемпионом по части сюрпризов, преподносимых ученым различных дисциплин – физикам, химикам, геологам, астрофизикам (см. известную книгу Кеезома [4]). Сюрпризы начались, по-видимому, с того, что гелий был открыт не на Земле, а в атмосфере Солнца во время полного солнечного затмения в 1868 г. французским ученым Пьером Жансеном. Этот факт отражен в названии элемента, который означает "солнечный". И только в 1896 г. гелий был обнаружен в атмосфере Земли. Несмотря на такое "позднее" открытие, выяснилось, что гелий – очень распространенный элемент во Вселенной, он занимает второе место после водорода.

Исследование гелия озадачило также химиков, выяснилось что он является наименее химически активным элементом всей таблицы Менделеева, и в нормальных условиях не вступает ни в какие химические реакции. Эта особенность связана с атомным строением элемента. Электронные оболочки атомов гелия полностью заполнены и атомы слабо взаимодействуют друг с другом.

Упомянем еще один интересный факт. В 1906 г. Резерфорд установил, что α - частицы радиоактивных элементов – это не что иное как ядра гелия. Таким образом, косвенно гелий фигурировал у истоков современной теории строения атома и квантовой механики.

Конечно, наиболее яркие сюрпризы гелий преподнес в области физики низких температур. Первый сюрприз состоял в том, что в гелии тройная точка равновесного сосуществования газа, жидкости и твердого тела отсутствует, и гелий остается жидким вплоть до абсолютного нуля! Это совершенно немыслимое в рамках классической физики явление нашло объяснение значительно позже благодаря квантово-механическим представлениям, согласно которым нулевые колебания препятствуют остановке атомов и "плавят" решетку. Чтобы получить твердый гелий, должно быть приложено довольно большое давление

Несомненно, самый главный сюрприз, который преподнес гелий – это явление сверхтекучести, которое оказалось одним из главных научных открытий XX века. В его исследовании приняли участие крупнейшие физики, такие как Капица, Ландау, Фейнман, Боголюбов, Онзагер и многие другие.

Хотя само явление отсутствия вязкости было открыто Капицей в 1938 г. (см. [5, 6], а также работу Аллена и Мейснера [7]), сам факт фазового перехода в жидком гелии при температуре 2,17 К и давлении насыщенных паров 0,005 МПа был наблюден Кеезомом в 1930 году (см. [8]). Он назвал фазу, устойчивую выше температуры 2,17 К, гелием-I, а фазу, ниже этой температуры – He-II. Он также наблюдал связанные с этим аномалии в теп-

лопроводности (и даже называл He-II сверхтеплопроводным).

На протяжении 30 гг. накапливался громадный экспериментальный материал, было обнаружено множество удивительных эффектов, которые совершенно не укладывались в рамки поведения обычных жидкостей, например термомеханический эффект, когда жидкость перетекала в сторону подогреваемого сосуда (преодолевая противодавление), или вытекание жидкости из сосудов посредством образования пленки.

В это же время начало приходить осознание того факта, что за все необычные свойства гелия-II ответственны квантовые эффекты, которые, как считалось ранее, должны описывать только явления микромира. Здесь же квантово-механические свойства проявляются на больших гидродинамических масштабах.

Так, Лондон [9] и Тисса [10] выдвинули предположение, что сверхтекучесть связана с недавним предсказанием бозе - эйнштейновской конденсации бозонов (БЭК) в импульсном пространстве. Тисса предложил рассматривать He II как вырожденный идеальный бозе-газ. На основании этого он ввел двухжидкостную модель и построил двухскоростную гидродинамику.

Последовательное квантово-механическое объяснение явлению сверхтекучести было дано Л. Д. Ландау в 1941 году ([11, 12, 13]). Стартуя от процедуры квантования движения жидкости, Ландау пришел к концепции квазичастиц, совокупное движение (дрейф) которых происходило отдельно от "фоновой" жидкости. Это движение и представляло предложенную Тиссой нормальную компоненту. Течение другой, сверхтекучей компоненты ассоциировалось с движением атомов гелия, находящимися в когерентном квантово-механическом состоянии.

Одним из главных результатов теории Ландау было построение двухскоростной гидродинамики, которая прекрасно описывала все необычные эксперименты, выполненные ранее, а также предсказала новые эффекты, например, существование критических скоростей для разрушения сверхтекучести.

гидродинамика сверхтекучих жидкостей наряду с другими разделами теории сверхтекучести, такими как, например, изучение кинетики квазичастиц-фононов и ротонов или теория фазовых переходов, является важным отдельным предметом. Мы полагаем, что многие методы и результаты гидродинамики сверхтекучих жидкостей представляют несомненный интерес также для других разделов физики сплошных сред. Так, например, с точки зрения классической гидродинамики течение гелия в некотором смысле эквивалентно многофазным системам. В настоящее время активно обсуждаются вопросы построения гидродинамики сложных систем на основе законов сохранения, которые первоначально были разработаны в теории сверхтекучести. Очень полезным и дидактичным с точки зрения механики сплошной среды,

являются использование принципа относительности Галилея и зависимость термодинамических величин от относительной скорости между компонентами. Замечательно, что вариационный принцип для течения небаротропных жидкостей был первоначально предложен Халатниковым ([14]) для гидродинамики сверхтекучего гелия. Интересными гидродинамическими эффектами являются такие "экзотические" течения гелия, как, например движение жидкости в сторону нагревателя, термический противоток и фонтанный эффект, второй звук, эффект вытекания жидкости из сосудов по образованной ей пленке и т.д.

Наконец, с точки зрения физики сплошных сред, представляют несомненный интерес такие классические гидродинамические вопросы как волновые процессы в сверхтекучей жидкости. В сверхтекучих жидкостях возможно существование нескольких типов волновых движений. Это могут быть классические обыкновенные волны давления (первый звук, смысл этого термина будет ясен из дальнейшего) или же гравитационные и/или капиллярные волны на поверхности жидкости. Имеются, однако, специфические для сверхтекучих жидкостей волновые моды. Самая известная из них - это так называемый второй звук, незатухающие (в бездиссипативном случае) тепловые волны, распространяющихся от источника тепла. Возможны также волновые моды, которые являются комбинациями вышеперечисленных. Например, в условиях ограниченной геометрии, таких, как в узких капиллярах или пористых средах, возможно распространение волн, в которых заторможена нормальная компонента — это так называемый четвертый звук. Существуют также волны на поверхности сверхтекучей пленки, или третий звук.

Помимо своей необычности, связанной с квантовой природой двухскоростной гидродинамики, эти звуковые моды обладают рядом особенностей. Например, их параметры, такие как закон дисперсии для линейных волн или коэффициенты, описывающие взаимодействие для нелинейных волн, являются очень сильными функциями температуры, с возможной сингулярностью вблизи перехода гелий I-гелий II. Поэтому нелинейные волны ведут себя необычно, например, образуют разрыв на заднем фронте волны. В представленной монографии большое внимание уделяется динамике нелинейных акустических волн, их взаимодействию, устойчивости и стохастическому поведению.

Конечно, захватывающе интересным, с точки зрения классической гидродинамики, выглядят эффекты, связанные с вихревыми течениями сверхтекучей жидкости. Завихренность в них реализуется в виде очень тонких трубок (практически линий) с квантованным значением циркуляции скорости вокруг этих линий, причем циркуляция включает в себя постоянную Планка (см. книгу Доннелли [15]). Это единственный пока пример, когда

движение макроскопической системы включает постоянную Планка. Важен также для специалистов по гидродинамике тот факт, что эти трубки являются очень устойчивыми образованиями (в отличие от концентрированных вихрей в классических средах) и могут быть базисом для экспериментальной проверки многих теоретических результатов, связанных с концепцией концентрированных вихрей (см. книгу Алексеенко с соавторами [16]).

Интригующим с точки зрения гидродинамики выглядит тот факт, что формально, из-за того, что вязкость равна нулю, число Рейнольдса равно бесконечности. В последнее время актуальной становится теория так называемой квантовой турбулентности. При больших скоростях рождаются квантовые вихревые нити которые образуют хаотический запутанный клубок. Эти так называемые вихревые клубки обладают некоторыми чертами классической турбулентности, такими как перенос энергии по масштабам, колмогоровский спектр поля скоростей, сходный закон затухания. Это явление возродило очень давние надежды исследователей моделировать классическую турбулентность с помощью набора дискретных вихревых трубок. В этой тематике есть много открытых вопросов, тем не менее физики надеются таким образом приблизиться к решению сакраментальной проблемы гидродинамической турбулентности.

Обсуждая роль гидродинамики сверхтекучих жидкостей, нельзя пройти мимо проблемы их практического использования. Если ранее изучение сверхтекучести имело в основном фундаментальный, чисто научный характер, то в последнее время ситуация изменилась. Имеется много проектов, в том числе реализованных, по использованию гелия в различных областях прикладных исследований. Приведем несколько примеров. Конечно, самый значимый пример - это Большой адронный коллайдер (БАК), где мощные сверхпроводящие магниты охлаждаются сверхтекучим гелием. Для поддержания температуры 1,9 К используется 96 т жидкого сверхтекучего гелия. Планируется также охлаждение сверхпроводящих магнитов в различных научных, технических и медицинских устройствах, к примеру, в современных ЯМР-томографах. Помимо задач теплообмена при охлаждении сверхпроводящих магнитов большое значение имеют технические приложения, где сверхнизкие температуры нужны для повышения точности различных прецизионных радиоэлектронных устройств. К ним относятся детекторы инфракрасного и высокочастотного излучения, сквид-магнетометры; сканирующие туннельные микроскопы. Жидкий гелий также используется астрофизиками для охлаждения инфракрасных детекторов; Например, на спутниковой антенне IRAS находилось 720 л жидкого гелия при $T = 1,6$ К.

Имеются проекты создания квантового гироскопа на гелии-II, использующего эффект Джозефсона, способного контролировать изменения скорости

вращения Земли с точностью 0,5%. Планируется также космическая миссия по измерению чрезвычайно слабых эффектов геодезической прецессии сверхтекучих гироскопов на орбите вокруг Земли и увлечения инерциальных систем отсчета вращением Земли, предсказанных общей теорией относительности Эйнштейна.

Широко обсуждается возможность создания элементной базы квантового компьютера - кубитов на базе сверхтонких слоев атомов водорода, локализованных вблизи поверхности сверхтекучего гелия.

Недавно была проведена серия изящных экспериментов по коалесценции примесей на квантованных вихрях [17]. Наличие вихрей не только во много раз ускоряет конденсацию любых введенных в гелий веществ, но приводит к образованию совершенно нового продукта — длинных и тонких нанонитей различных материалов.

В рамках этих тенденций заметно возрос интерес к гидродинамике сверхтекучих жидкостей, особенно к нестационарным формам движения, в частности к вопросам акустики, и прежде всего к нелинейной акустике, имеющей дело с интенсивными волнами температуры и давления

Перечисляя свойства сверхтекучих жидкостей мы ориентировались, конечно, на самую изученную из них — именно сверхтекучий гелий-4 (или ^4He). Однако имеются другие примеры квантовых жидкостей, некоторые из них недавно открыты (или созданы), кратко опишем их.

Физики-теоретики предсказывали, что изотоп гелия, гелий-3 (или ^3He) может обнаружить переход в сверхтекучее состояние при температуре порядка нескольких мК. В результате острой конкуренции между многими научными группами, экспериментаторам Корнелльского университета Д. Ошерову, Р. Ричардсону и Д. Ли [18] удалось обнаружить фазовый переход в сверхтекучее состояние при температуре около 0,003 К. Многие свойства сверхтекучего ^3He весьма отличны от свойств ^4He . В ^3He сверхтекучая жидкость состоит из атомов ^3He , объединенных в так называемые куперовские пары. В зависимости от характера объединения атомов в куперовские пары различаются так называемые А и В фазы сверхтекучего гелия-3. ^3He -А — представляет собой необыкновенно сложную систему. Сверхтекучий гелий ^3He -В (с гидродинамической точки зрения) более похож на обычный сверхтекучий гелий-4, но есть отличия, в основном количественные. Например, вязкость нормальной компоненты в ^3He -В необыкновенно велика. Другое заметное отличие состоит в том, что размеры ядра вихревых нитей превышают толщину нити в сверхтекучем ^4He примерно на 2 порядка, структуры сердцевин вихрей также существенно отличаются.

В 1995 г. при охлаждении разреженных газов щелочных металлов методом лазерного охлаждения были достигнуты достаточно низкие температуры для

того, чтобы газ перешел в состояние бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК). Данное явление было обнаружено Э. Корнеллом и К. Виманом [19]. За эту работу им совместно с В. Кеттерле [20] из Массачусетского технологического института была присуждена Нобелевская премия по физике 2001 г. Полученный конденсат вел себя как сверхтекучая жидкость, что и следовало из теоретических предсказаний. В последующих экспериментах было установлено, что при движении тел сквозь этот конденсат со скоростями меньше критической никакой передачи энергии от тела к конденсату не происходит. Впоследствии многие явления, присущие сверхтекучему гелию, такие как второй звук, сверхтекучесть, квантованные вихри, квантовая турбулентность, были обнаружены в БЭК

В 2000 г. Тоэнниэс [21] рапортовал об обнаружении сверхтекучести в кластерах водорода при 0,15

В 2004 г. на основании экспериментов с крутильными колебаниями, было объявлено об открытии сверхтекучести у твёрдого гелия [22]. Именно при некоторой низкой температуре, порядка нескольких сотен мК возникала дополнительная диссипация и изменялся период крутильных колебаний, что можно было интерпретировать как появление сверхтекучей компоненты [23]. В настоящее время, однако, ситуация далеко не однозначная.

В 1959 г. Мигдал [24] предсказал явление сверхтекучести в нейтронных звездах. Это гипотеза активно используется для объяснения поведения пульсаров. Предполагается, что периодические ускорения происходят вследствие выхода квантовых вихрей на поверхность звезды, передающих твердой коре угловой момент, так называемый glitch.

Уже из изложенной вводной части видно, что материал по квантовым жидкостям необыкновенно обширен. В представленной монографии мы сосредоточимся на вопросах, касающихся гидродинамики сверхтекучих жидкостей. В частности, мы подробно остановимся на выводе уравнений гидродинамики, приведем примеры некоторых течений, специфических для квантовых жидкостей. Большая часть материала посвящена волновым процессам, в частности, вопросам распространения первого и второго звуков. Особое внимание уделено нелинейной акустике, подробно описываются вопросы нелинейного взаимодействия первого и второго звуков, специфические черты распространения нелинейных волн. Также рассматриваются задачи нелинейной устойчивости обычных и ударных волн. Значительная часть посвящена стохастическим процессам в звуковых модах — так называемой акустической турбулентности. Мы также представили результаты многих экспериментальных исследований по нелинейной акустике сверхтекучих жидкостей. Наконец, заключительная глава посвящена динамике бозе-конденсата, при этом внимание акцентировалось на гидродинамических аспектах.

2 История создания теории сверхтекучести

2.1 Ранние эксперименты.

История создания теории сверхтекучести — не менее захватывающая тема, чем эффекты и явления, обнаруженные в квантовых жидкостях и блистательное теоретическое описание.

В конце XIX начале XX в. имело место своего рода соревнование между физиками по охлаждению и сжижению различных газов. Так, в 1877 г. французский инженер Луи Кайете и швейцарский физик Рауль Пикте независимо друг от друга охладили кислород (-118.8°C) до жидкого состояния. В 1883 г. Зигмунт Врублевски и Кароль Ольшевски получили жидкий азот. (-147.1°C). В 1898 г. Джеймс Дьюар получил и жидкий водород (-239.9°C). Труднее всего дело обстояло с сжижением гелия. В 1893 году голландский физик Хейке Камерлинг-Оннес создал лучшую в мире криогенную лабораторию, в которой в 1908 г. им был получен жидкий гелий при 4.2 К [25]. Оннес обнаружил, что жидкий гелий является очень прозрачной жидкостью с плотностью $\rho = 0,145 \text{ г/см}^3$. За работы с жидким гелием Камерлинг-Оннес получил Нобелевскую премию по физике за 1913 г.

Представляет интерес сравнить фазовую диаграмму (в координатах p, T) обычного вещества и жидкого гелия. В случае обычного вещества, (см. Рис. 2.1 из книги Баренги [26]) на диаграмме имеется точка — так называемая тройная точка, которая означает возможность равновесного сосуществование газа, жидкости и твердого тела. В случае жидкого гелия тройная точка отсутствует, твердой фазы нет, и гелий остается жидким вплоть до абсолютного нуля, что совершенно немыслимо в рамках классической физики. Чтобы получить твердый гелий, нужно приложить большое давление (около 25 бар). Схематически фазовая диаграмма жидкого гелия, учитывающая наличие твердой фазы изображена на Рис. 2.2).

Результат демонстрирующий, что гелий остается жидким вплоть до абсолютного нуля является поразительным, но в принципе может быть объяснен слабостью взаимодействия и легкостью атомов гелия, а также соображениями вытекающими из квантово-механических законов, согласно которым квантовые нулевые колебания не дают атомам "остановиться" и "плавят решетку". Мы отвлекаемся сейчас от вполне известного факта, что выше критической точки граница между жидкостью и газом отсутствует, и имеется единое однородное состояние.

Имеется, однако, гораздо более поразительный факт: на самом деле область жидкой фазы на диаграмме Рис. 2.2 состоит из двух частей, двух различных модификаций, переходящих друг друга при изменении температуры

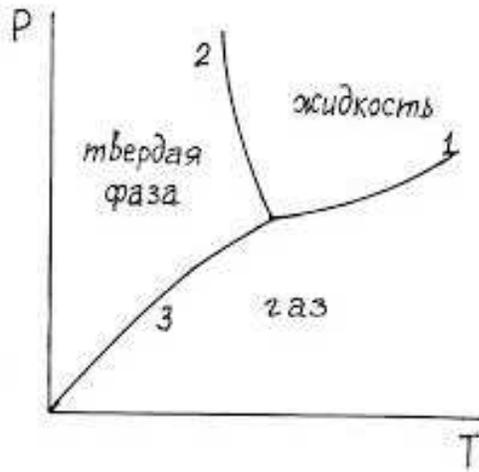


Рис. 2.1: Схематическое изображение фазовой диаграммы (в координатах p, T) обычного вещества, имеющего тройную точку. Рисунок взят из книги Баренги [26].

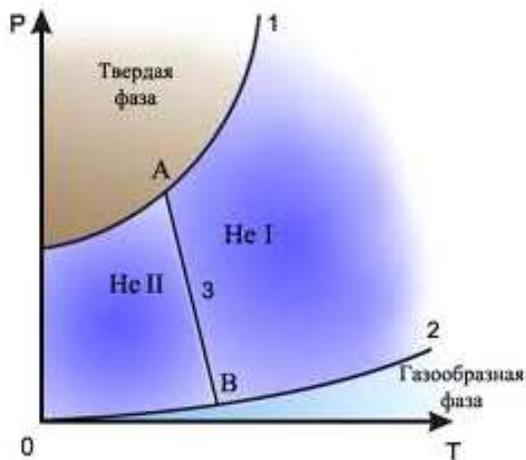


Рис. 2.2: Схематическое изображение фазовой диаграммы жидкого гелия, учитывающее наличие твердой фазы. Рисунок взят из книги Баренги [26].

или давления. Интересно, что идея о существовании двух фаз жидкого гелия, и соответственно фазового перехода, не являлась моментальным открытием. С самого момента первого сжижения гелия и обнаружения максимальной плотности при температуре около 2 К наблюдались различные признаки того, что при этой температуре в жидком гелии происходит что-то необычное. В 1930 гг. была выполнена большая серия работ, связанных в основном с именами голландских физиков, в которых шаг за шагом физики продвигались к своему революционному открытию.

Так, в 1930 г. Кеезом с соавторами [8] обнаружили, что жидкий гелий ниже 2,17 К с удивительной легкостью проходил через очень маленькие щели — то, что не было возможно при более высоких температурах, даже для газообразного гелия. Это наблюдение стало предвестником явления сверхтекучести, так как означало катастрофическое падение вязкости при низких температурах.

В 1932 г. Кеезом с соавторами [27] сообщили, что кривая теплоемкости как функция температуры имеет резкий максимум опять в районе 2,17 К. Было очевидно, что ученые столкнулись с явлением типа фазового перехода, хотя скрытой теплоты перехода не наблюдалось. Более прецизионные измерения Кеезом выполнил несколько позднее [28]. В этих работах была получена знаменитая линия для поведения теплоемкости $C(T)$. Вариант этой кривой измеренной с необыкновенной точностью, в космических исследованиях NASA (чтобы устранить влияние гравитации) представлен на Рис. 2.3. По предложению Эренфеста эту кривую называли лямбда-кривой (из-за схожести с греческой буквой λ), а точку перехода T_λ (лямбда-точка). Сходные результаты были получены в это же время в других лабораториях мира

В результате этих экспериментов стало окончательно ясно, что существуют две различные фазы жидкого гелия. Было предложено называть жидкость выше температуры 2,17 К гелием-I (He I), а ниже 2,19 К - гелием-II (He II).

Несколько позднее Кеезом с соавторами [29] наблюдали аномалии в теплопроводности гелия-II. Они обнаружили, что ниже λ -точки "теплопроводность He II в примерно 200 раз больше, чем меди при обычных температурах, и в миллионы раз превосходит аналогичную величину для He I. Кеезом предложил назвать He II сверхтеплопроводным.

Одним из самых изящных и убедительных экспериментов по подтверждению фазового перехода в жидком гелии было визуальное наблюдение за его кипением при понижении температуры методом откачки паров. На Рис. 2.4 изображено кипение жидкого гелия при температурах выше 2,17 К.

Видно, что из-за из-за паразитных потоков тепла через стенки дьюара, и из-за низкой теплоемкости происходит бурное пузырьковое кипение. Причина ясна — вблизи поверхностей имелся локальный перегрев жидкости, про-

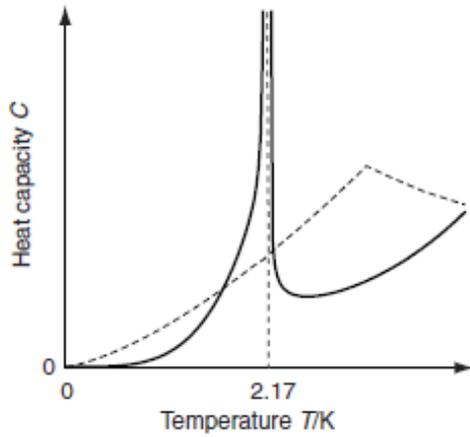


Рис. 2.3: Теплоемкость жидкого гелия как функция температуры (сплошная линия), показывающая аномалию при T_λ . Для сравнения показана теплоемкость идеального бозе-газа аналогичной плотности (пунктирная линия). Рисунок взят из книги Баренги [26].

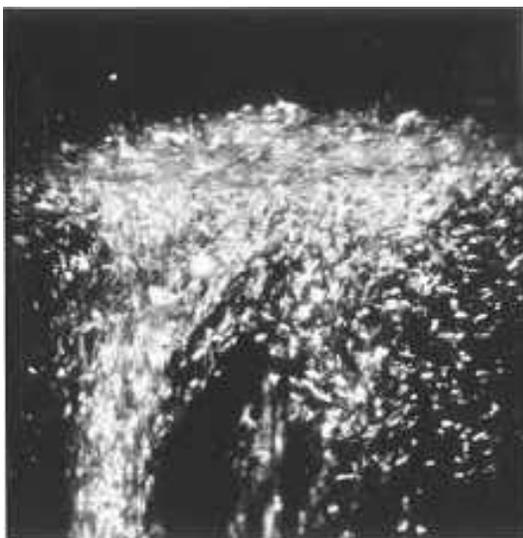


Рис. 2.4: Кипение жидкого гелия при температурах выше 2,17 К. Наблюдается бурное пузырьковое кипение. Источник



Рис. 2.5: Кипение жидкого гелия при температурах ниже 2,17 К. Видимое кипение отсутствует.

исходит образование паровых пузырьков, эти пузырьки всплывают, создавая бурлящую мутную субстанцию. Однако, в определенный момент, именно при температуре 2,17 К и давлении насыщенных паров 0,005 МПа, бурное кипение внезапно прекращается, жидкий гелий становится абсолютно спокойным и очень прозрачным (Рис. 2.5). Совершенно очевидно, что что-то с гелием происходит. Одно из объяснений это то, что тепло не поступает в эту новую фазу гелия, второе объяснение это то, что вследствие "сверхтеплопроводности" гелия II никакие локальные перегревы, необходимые для образования паровых пузырей, невозможны, и поступающее паразитное тепло просто уносится к поверхности и "убирается" откачкой паров. Как известно сейчас, обе причины имеют место — существует так называемый скачок Капицы, который затрудняет теплообмен между твердым телом и гелием. На самом деле этот эффект не очень большой, он не может объяснить исчезновение пузырькового кипения, и здесь играет роль, конечно, "сверхтеплопроводность".

Обнаружение новой фазы привлекло внимание научной общественности, было проведено громадное количество исследований по изучению свойств He II. В частности, было выполнено множество гидродинамических экспериментов, не менее экзотических и загадочных. Опишем некоторые из них, ставшие классикой теории сверхтекучести.

Один из них — это так называемый термомеханический эффект, который состоит в появлении в гелии-II разности давления Δp , вызванной разностью температур ΔT . В 1938 г. Аллен и Джонс [30] проводили эксперименты по измерению теплопроводности жидкого He II. Если в двух сообщающихся сосудах с гелием, которые соединены трубкой забитой мелкопористым веществом (пудрой), подогреть один из сосудов, то гелий начинает течь в сторону нагретого участка и уровень гелия в этом сосуде поднимается. (Рис. 2.6). Это выглядело так, будто при нагревании жидкость конденсируется, что конечно, противоречит всем известным законам термодинамики. Очень маленькие

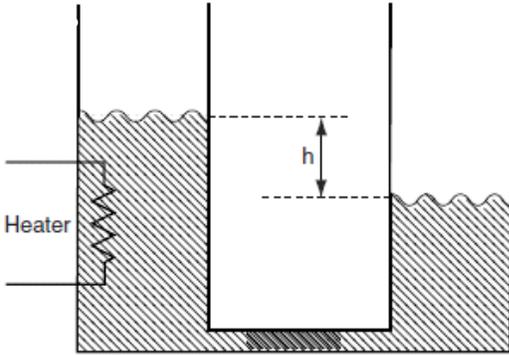


Рис. 2.6: Схематическое изображение термомеханического эффекта, гелий течет в сторону нагретого участка, преодолевая противодействие. Рисунок взят из книги [31].

перепады температур между резервуарами производили очень интенсивное течение. Другой наглядный и эффектный способ демонстрации термомеханического эффекта заключается в нагреве (например, освещением) трубки, набитой мелким чёрным порошком и опущенной одним концом в сверхтекучий гелий. При освещении порошок нагревается, и из-за возникающей разности температур в сосуде и вне его жидкий гелий подтекает к нагретому участку и фонтаном выбрасывается из конца трубки (Рис. 2.7). Явление получило название фонтан-эффект.

Наблюдался также обратный, так называемый механокалорический эффект - явление охлаждения сверхтекучего жидкого гелия, вытекающего из сосуда через узкий капилляр под действием разности давления, сопровождаемое разогревом гелия, остающегося в сосуде (Рис. 2.8).

Этот эффект обнаружен в сверхтекучем ^4He в 1939 г. Доунтом и К. Мендельсоном [32]. Таким образом, тепловые и гидродинамические свойства жидкого гелия-II оказались сильно переплетены. Заметим, речь не идет об обыкновенной конвекции хотя бы потому, что силы тяжести не существенны для описанных экспериментов, причем эти явления намного эффективнее, чем конвекция.

В 1939 г. Доунт и Мендельсон [33], а также Кикоин и Лазарев [34] обнаружили, что жидкий ^4He II может вытекать из сосудов по пленке толщиной порядка 100 атомов, образованной им на стенках. Такие пленки, конечно, должна образовывать любая жидкость, которая смачивает твердую поверхность, но вязкость обычной жидкости такова, что процесс нарастания пленки очень медленный, к тому же сопровождаемый испарением, и практически не существует никакого движения. ^4He II является единственной жидкостью, которая благодаря своей сверхтекучести, образует быстро движущуюся пленку.

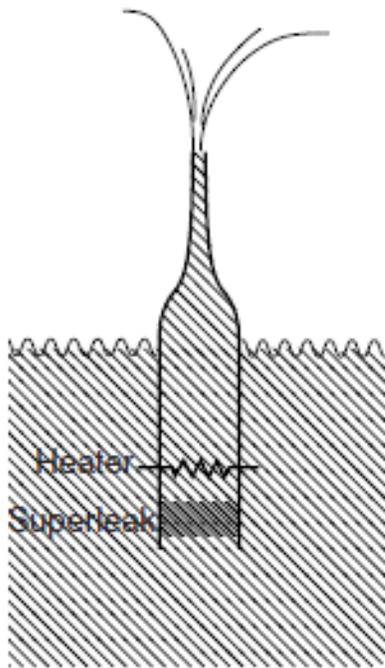


Рис. 2.7: Эффект фонтанирования He II. Жидкий гелий подтекает к нагретому участку сквозь участок, забитый мелкопористым веществом, и фонтаном выбрасывается из конца трубки. Рисунок взят из книги [31].

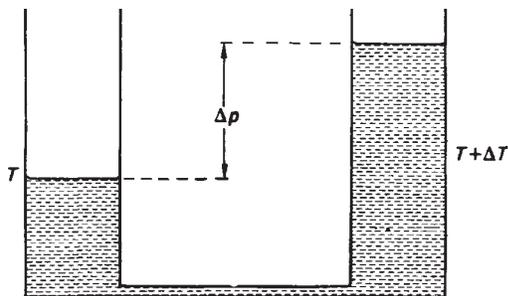


Рис. 2.8: Механокалорический эффект. Охлаждение жидкого гелия II, вытекающего из сосуда через узкий капилляр под действием разности давления, сопровождаемое разогревом гелия, остающегося в сосуде. Рисунок взят из книги [31].

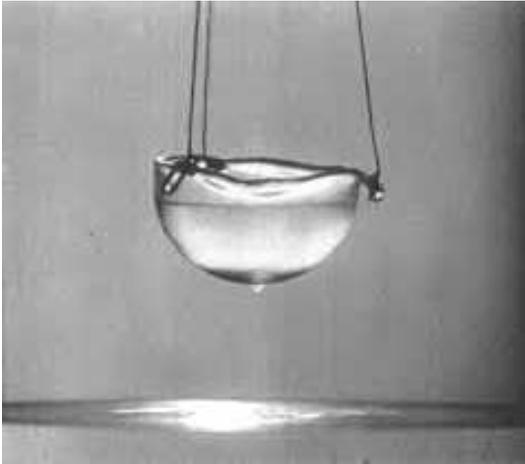


Рис. 2.9: Вытекание жидкого He II по образованной им пленке на стенках чашки.

ку. Если затем емкость с гелием поднять над уровнем гелиевой ванны, то видны капли, падающие со дна пробирки (Рис. 2.9). Соответствующие эксперименты являются необычайно эффектными и зрелищными, впечатление возникает такое, что гелий просачивается сквозь стеклянные стенки сосуда.

Самые драматические события произошли при измерении вязкости He II. Мы уже упоминали об опытах Кеезома с соавторами [8], которые обнаружили, что жидкий гелий ниже 2,17 К с удивительной легкостью проходит через очень небольшие щели, что означало катастрофическое падение вязкости. К вопросам прецизионного измерения вязкости вернулись некоторое время спустя. В журнале "Nature" 1938 г. № 141 на страницах 74 и 75 были опубликованы две коротких заметки о скачкообразном падении вязкости жидкого He II ниже температуры перехода 2,17 практически до нуля. Вязкость не превышала одну триллионную долю пуаза (10^{-9} Па). Первая статья, представленная несколько ранее, принадлежала П. Капице [5], другая - двум канадских физикам Д. Аллену и Д. Мейснеру [7]. По-видимому, это самый главный эксперимент, касающийся свойств гелия, потому что именно по причине отсутствия вязкости He II называли сверхтекучим, а само это явление - сверхтекучестью. Явление сверхтекучести — это одно из самых важнейших открытий XX в., и за это открытие П. Капица получил Нобелевскую премию в 1978 г.

Другое драматическое событие состояло в том, что примерно в это же время была опубликована статья В. Кеезома и Г. Вуда [35], в которой говорится, что при крутильных колебаниях диска, погруженного в He II получаются отличные от нуля значения вязкости, вполне соизмеримые с теми, что дает обычный гелий-I. Это вязкость, правда, сильно зависела от температуры, обращаясь в нуль при очень низких температурах. То есть в экспериментах

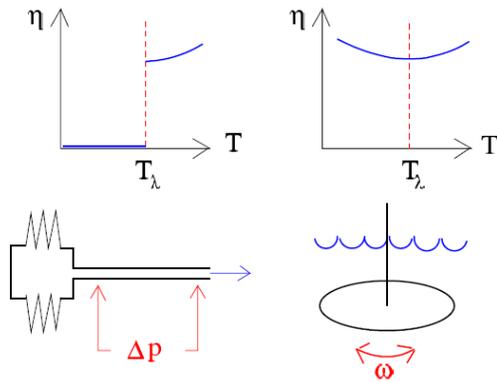


Рис. 2.10: Схематическое изображение двух типов экспериментов по измерению вязкости. Слева: вязкость η , определяется из измерения перепада давления в тонком капилляре, она падает до нуля при понижении температуры ниже T_λ . Справа: если вязкость η определяется по затуханию осциллирующего диска, она не испытывает никаких скачков при изменении температуры. Рисунок взят из книги Баренги [26].

при течении в тонких трубках (капиллярах) гелий ведет себя как идеальная невязкая жидкость, а в других случаях, например, при вращении диска погруженного в He II, он обнаруживает вполне конечную вязкость (Рис. 2.10)!

Имея в виду все вышесказанное, полезно еще раз обсудить детальную фазовую p, T диаграмму жидкого гелия — она изображена на Рис. 2.11 в полу-логарифмических координатах. Видно что она разительно отличается от диаграмм других веществ, которые, например, изображены на схематическом Рис. 2.1. В нижнем левом углу рисунка 2.11 находится область He II — это сверхтекучая жидкость, которая обладает необычными свойствами. Эти свойства обусловлены квантово-механической природой жидкости при очень низких температурах. Линия, которая разделяет область существования He II от области обычного He I, называется λ -линией. Такое название обусловлено особенностью поведения теплоемкости $C(T)$ жидкого гелия вблизи λ -линии, которая (изображенная как функция температуры) напоминает греческую букву λ (см. Рис. 2.3). На этой линии происходит фазовый переход второго рода, при котором отсутствует выделение или поглощение тепла (нет особенностей в первых производных от термодинамических потенциалов по температуре), разрыв происходит только в следующих производных: например, имеется скачок теплоемкости или скачок объемного расширения.

Описанные выше явления, связанные с жидким гелием при температуре ниже 2,17 К, абсолютно противоречат всем представлениям о поведении жидкости с точки зрения классической гидродинамики. Конечно, попытки объяснить описанные выше явления с позиций обычной гидродинамики неодно-

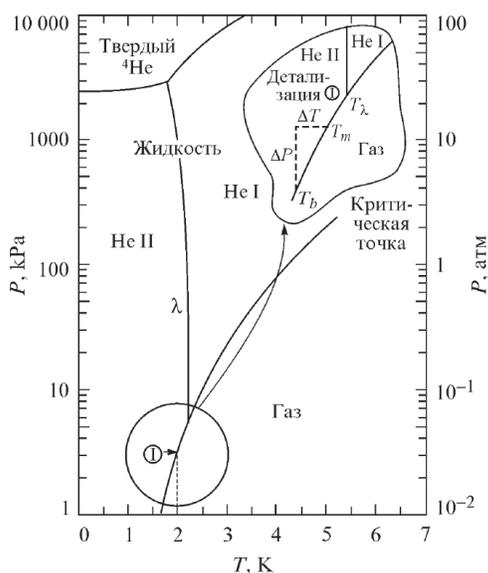


Рис. 2.11: Детальная фазовая p, T диаграмма жидкого гелия (из книги Wilks, Betts [36]).

кратно предпринимались, но были безуспешными, даже качественно не удалось понять любой из этих эффектов, не говоря уже о построении общей объединяющей теории.

2.2 Двухскоростная (двухжидкостная) модель Лондона и Тиссы.

Пытаясь интерпретировать полученные факты, теоретики выдвигали предложения, что за все необычные свойства He II ответственны квантовые эффекты, которые, как считалось ранее, описывают только явления микромира. Так, Лондон [9] выдвинул предположение, что сверхтекучесть связана с недавним предсказанием бозе - эйнштейновской конденсации бозонов в импульсном пространстве. Тисса [10], апеллируя к идеям Лондона, предложил рассматривать He II как вырожденный идеальный бозе-газ. При этом предполагается, что атомы, находящиеся в основном состоянии (состоянии с энергией равной нулю), движутся через жидкость без трения о стенки сосуда, и остальную часть жидкости. Остальная часть жидкости - обычная вязкая жидкость. На основании этого он ввел двухжидкостную модель и построил двухскоростную гидродинамику.

Суть двухскоростной модели Тиссы состоит в том, что течение гелия II можно представить как течение смеси двух "жидкостей". Одна из них, так называемая сверхтекучая компонента, движется со своей сверхтекучей скоростью \mathbf{v}_s . Сверхтекучая компонента не имеет сдвиговой вязкости. Другое

свойство сверхтекучей компоненты состоит в том, что она не обладает энтропией, и, следовательно не может поглощать и переносить тепло. Остальная часть жидкости - это нормальная компонента, движущаяся со скоростью \mathbf{v}_n , она ведет себя как обычная вязкая жидкость. Нормальная компонента содержит и переносит энтропию. Интересно отметить, что иногда ее сравнивали со средневековой концепцией "теплорода". Важно, что эти две жидкости физически разделить нельзя; скорее речь идет о двухскоростной гидродинамике. Физический смысл этого утверждения будет ясен из модели Ландау дрейфующих квазичастиц, которую мы опишем в следующем параграфе. При выводе количественных соотношений Тисса использовал формулы для идеального вырожденного бозе-конденсата, но вводил эмпирические коэффициенты и менял показатели степеней, чтобы получить совпадение с экспериментальными данными Кеезома. Поэтому модель Тиссы следует рассматривать скорее как эмпирическую догадку, нежели строгую теорию. Основная цель этой модели — объяснить накопленные экспериментальные материалы по гидродинамике He II.

Опишем качественно изложенные выше эксперименты, чтобы понять каким образом двухскоростная гидродинамика решает кажущиеся парадоксы. Из модели Тиссы следует, что движение всей жидкости вызывается перепадом (градиентом) давления (а также внешними силами, например силой тяжести), как и обычной классической жидкости. Движение сверхтекучей компоненты вызывается перепадом химического потенциала $\Delta\mu$, который складывается из слагаемого, пропорционального перепаду давления Δp , и другого слагаемого, пропорционального перепаду температуры ΔT (см. подробности и количественные оценки далее). Таким образом, если отсутствует перепад давления, а имеется перепад температуры, то должно возникнуть движение сверхтекучей компоненты. Нормальная компонента при этом движется таким образом, чтобы жидкость как целое была неподвижна. Это согласуется с тем, что перепад давления Δp равен нулю. Возникает, как говорят, противоток, в котором сверхтекучая компонента движется к нагревателю, а нормальная — от него (Рис. 2.12). Вспоминая, что тепло переносится только нормальной компонентой, можно понять, каким образом возникает явление сверхтеплопроводности. Действительно, конвективный (посредством нормальной компоненты) поток тепла является очень мощным механизмом теплопередачи, в миллионы раз превышающим обычный молекулярный теплообмен. Если на пути жидкости поставить пористую перегородку, то нормальная "тормозится" в ней, в то время как невязкая сверхтекучая часть будет течь, свободно проникая в поры. Возникает дисбаланс в течении, условие "неподвижности" всей жидкости нарушается, что влечет появление перепада давления. Нулевой поток восстановится лишь тогда, когда перепад химического потенциа-

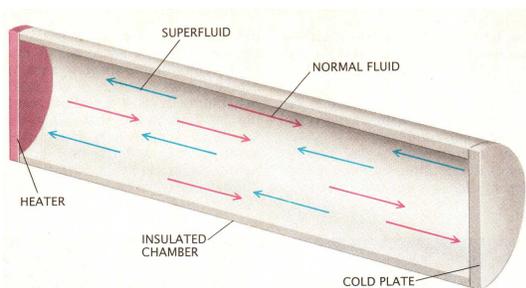


Рис. 2.12: Схематическое изображение противотока ("counterflow") в сверхтекучем гелии. Нормальная компонента течет от нагревателя, сверхтекучая часть течет к нагревателю. Преобразование компонент происходит на горячем и холодном концах канала. Рисунок взят из книги Доннелли [15]

ла обращается в нуль, т.е. перепад температуры вызывает перепад давления (соотношение Лондона). Мы, по сути дела, качественно объяснили термомеханический эффект.

Двухжидкостная модель, предложенная Тиссой, не только объяснила многие эксперименты, но также предсказала некоторые явления. Самым знаменитым эффектом был, конечно, второй звук, температурные возмущения, распространяющиеся в виде волн. В следующих главах будут рассмотрены в деталях различные случаи течения гелия.

Таким образом, на основании двухжидкостной модели, были объяснены многие эксперименты, казавшиеся на первый взгляд очень странными. Осталось только объяснить саму двухжидкостную модель. Эта программа была реализована Ландау в 1941 г. Мы изложим содержание этой теории, близко следуя оригинальной работе Ландау ([12, 13]). Во-первых, потому что настоящая глава представляет исторический обзор, и работа Ландау является краеугольным камнем теории сверхтекучести. Во-вторых, эта теория была настолько изящной и законченной, что вплоть до последнего времени все учебники и книги излагающие этот материал практически совпадают с оригинальной статьей Ландау ([12, 13]). Пожалуй, единственная поправка заключается в том, Ландау избегал использовать термин бозе - эйнштейновской конденсации. Он считал возможным, причем вполне обоснованно, что в сильно взаимодействующих системах, к которым относится жидкий гелий, бозе-конденсация может вообще отсутствовать или сильно видоизменяться. Примером этого может быть поведение теплоемкости, потому что теплоемкость в идеальном Бозе-конденсате имеет излом в точке перехода, в то время как в реальном гелии она имеет логарифмическую расходимость. Другим аргументом может служить то обстоятельство, что в He II при нулевой температуре, плотность Бозе-конденсата составляет около 10 процентов плотности всей жидкости, тогда как в идеальном газе плотность конденсата должна быть

100 процентов от плотности газа.

2.3 Теория Ландау

2.3.1 Квантование движения и концепция квазичастиц

Несмотря на то Ландау что со скепсисом относился к попыткам объяснить экзотические свойства He II на основе теории бозе - конденсации идеального газа, он, безусловно, разделял взгляды Ф. Лондона, согласно которой теорию сверхтекучести следует строить с привлечением квантово механических идей. Как он писал: "описанные выше свойства гелия II, как и самый факт существования жидкости вплоть до абсолютного нуля, очевидно, не могут быть объяснены в классической теории и связаны с квантовыми явлениями." (см. работы ([12, 13]).

При понижении температуры средняя кинетическая энергия атомов уменьшается, соответственно уменьшается и импульс. Квантово-механическая де-Бройлевская длина волны λ_{dB} нарастает и становится величиной порядка межатомных расстояний. В результате, в силу квантово механических законов все атомы "чувствуют" друг друга и образуют такой "гигантский" атом, который находится, как говорят, в квантово-когерентном состоянии. Схематически эта ситуация изображена на Рис. 2.13.

Таким образом, гелий, оставаясь жидкостью вплоть до абсолютного нуля, становится, как говорят, квантовой жидкостью, и его следует описывать с позиций квантовой механики.

Известно, что статистическое описание квантово-механических систем радикально зависит от того, из частиц какого рода составлена система. В частности, атомы гелия, обладая нулевым спином, подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Согласно этой статистике количество атомов на каждом из энергетических уровней не ограничено, в отличие от Ферми — Дирака статистики, где на каждом уровне может находиться не более одного атома. При понижении температуры система стремится занять наинизшее энергетическое состояние, совместимое с данной статистикой. Поэтому в основном состоянии Бозе-газа все частицы находятся на низшем энергетическом уровне. Данные рассуждения относятся, однако, к случаю не взаимодействующих частиц. В случае частиц взаимодействующих, как это имеет место в реальном гелии, они сохраняются лишь качественно. В частности, можно утверждать, что явление бозе-конденсации имеет место, но неидеальность приводит к появлению частиц с ненулевым импульсом даже при $T = 0$.

Рассмотрим эксперимент по бездиссипативному течению квантовой жидкости. Изменение энергии системы, ведущее к диссипации, должно учитывать квантовую когерентность атомов. Оно должно отбираться от системы

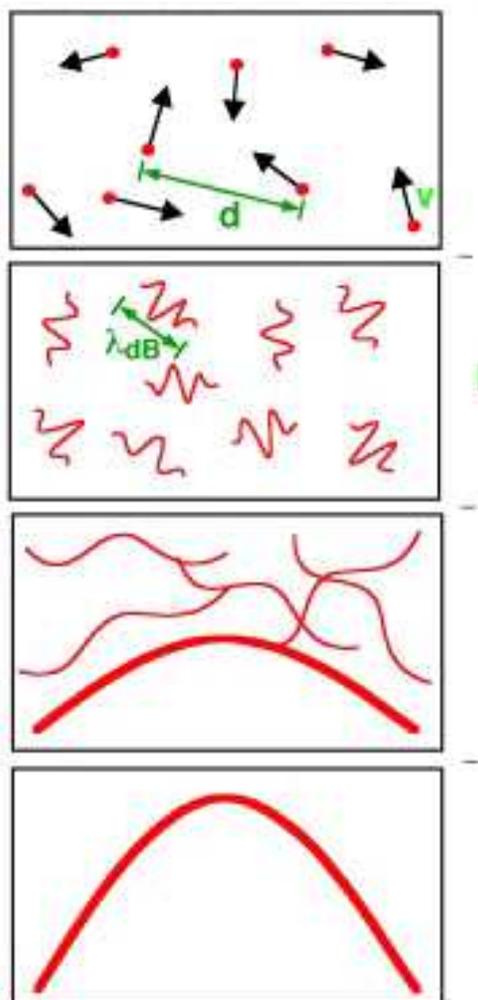


Рис. 2.13: Схематическое изображение λ - перехода. Рисунок а): При высоких температурах молекулы обладают термическими скоростями, распределенными по закону Максвелла, это модель "бильярдных шаров". Рисунок б): при понижении температуры длина волны де Бройля увеличивается и становится заметной по сравнению с межатомными расстояниями, это модель волновых пакетов. При температуре перехода (рисунок в.) де Бройлевская длина волны сравнивается с межатомными расстоянием, волновые пакеты перекрываются, развивается квантово-когерентное состояние. Нижний рисунок г). соответствует нулевой температуре. Длина волны де Бройля сравнима с размерами системы, все атомы "чувствуют друг друга" и образуют "гигантский атом" это чисто квантово-когерентное состояние

(или поступать в нее, если рассматривать процессы в движущейся системе отсчета) дискретным образом (ввиду квантованности) и должно быть коллективной модой, затрагивающей движение всех атомов. Такие коллективные движения называются квазичастицами или элементарными возбуждениями, характеризуемыми энергией и импульсом. Соответственно, чтобы изменить движение квантовой жидкости (например, затормозить текущий He II), требуется действовать на всю совокупность атомов. Эта ситуация отличается, конечно, от течения классических жидкостей или газа, когда молекулы газа, который находится вблизи стенки взаимодействуют с неровностями стенки, теряя часть своего импульса, которая компенсируется от столкновений с другими частицами и т.д. В результате вблизи стенки создается поперечный градиент скорости и возникает вязкое трение.

Картина в квантовой жидкости абсолютно иная. Энергия, как уже упоминалось, может поступать в систему (или отбираться от нее) только в виде элементарных возбуждений, или квазичастиц. Покажем, следуя сценарию Ландау что от свойств этих квазичастиц зависит возможность вообще обмениваться энергией с внешней средой ([12, 13]).

Коллективные возбуждения характеризуются импульсом \mathbf{p} и зависящей от импульса энергией $\varepsilon(\mathbf{p})$. Зависимость $\varepsilon(\mathbf{p})$ обычно называется законом дисперсии. Ландау получил зависимость дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ - для элементарных возбуждений в жидком гелии на основе квантово-механических соображений и анализа различных термодинамических данных, прежде всего теплоемкости. Анализ Ландау будет изложен несколько позднее, а сейчас выясним, каким образом передача энергии в виде коллективных возбуждений с законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ может приводить к появлению сверхтекучести, а также получим критерий Ландау для нарушения сверхтекучести. Приведем изложение, следуя известной монографии Халатникова ([1]).

Рассмотрим жидкость, текущую по капилляру с постоянной скоростью V . Вначале предположим, что гелий находится при абсолютном нуле температуры, т. е. в основном энергетическом состоянии. Наличие вязкости проявилось бы в том, что благодаря трению о стенки трубки и трению внутри самой жидкости происходили бы диссипация кинетической энергии жидкости и постепенное замедление потока, часть кинетической энергии диссипировала бы, превращаясь в тепловую энергию. Но тепловая энергия, как было сейчас выяснено, может поступать в гелий только дискретным образом в виде элементарных возбуждений. Пусть энергия, которую имело бы возбуждение, возникающее в движущейся вместе с жидкостью системе отсчета, равна $\varepsilon(\mathbf{p})$, а соответствующий импульс равен \mathbf{p} . Тогда в неподвижной системе отсчета энергия системы изменится на величину $\Delta\varepsilon(\mathbf{p})$, равную

$$\Delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{V}. \quad (2.1)$$

Переход жидкости в возбужденное состояние будет энергетически выгоден в том случае, если $\Delta\varepsilon(\mathbf{p}) < 0$. Выполнение этого условия зависит, во-первых, от направления импульса, возникшего возбуждения, а во-вторых, что намного принципиальнее, от вида спектра, т.е. зависимости $\varepsilon(\mathbf{p})$. Очевидно, что независимо от вида спектра наиболее благоприятная для выполнения этого условия ситуация будет в том случае, если импульс \mathbf{p} образованного возбуждения направлен противоположно скорости \mathbf{V} , т.е. $\mathbf{p}\mathbf{V} = -pV < 0$. Тогда

$$V > \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.2)$$

То есть, при скоростях движения сверхтекучей жидкости V , не превышающей значение $\varepsilon(p)/p$, возникновение элементарных возбуждений термодинамически невыгодно и жидкость не может изменить свое состояние. Это означает, что в лабораторной системе отсчета энергия жидкости не может убывать и имеет место бездиссипативное течение, т.е. реализуется сверхтекучесть.

Если же скорость V превышает значение $\varepsilon(p)/p$, то рождение квазичастиц возможно, и (в лабораторной системе) кинетическая энергия течения может переходить в тепло, и движение затухает. Полученное условие (2.2) известно как критерий Ландау.

Таким образом, можно заключить, что, исходя из простых термодинамических соображений и принципа относительности Галилея, Ландау доказал и объяснил состояние сверхтекучести - бездиссипативное течение жидкости. Одновременно он предложил критерий для разрушения сверхтекучего состояния.

Из изложенного материала видно, что критическим для представленной теории моментом является знание закона дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ элементарных возмущений. Определение зависимости $\varepsilon(\mathbf{p})$ является одной из основных частей работы, выполненной Ландау в пионерской работе ([12, 13]).

В качестве первого шага Ландау выполнил квантование движения жидкости. Рассматривая жидкий гелий как систему взаимодействующих частиц, он ввел квантовые операторы, соответствующие в классической теории, плотности ρ и потока массы \mathbf{j} , определяемым следующим образом:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор произвольной точки в пространстве, а \mathbf{r}_{α} — радиус-вектор частицы с массой m_{α} . При переходе к квантовой теории следует рас-

смаатривать ρ и \mathbf{j} как некоторые операторы. В частности, импульс \mathbf{p}_α одной частицы должен быть заменен по правилу

$$\mathbf{p}_\alpha \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla_\alpha. \quad (2.5)$$

Следуя, далее, обычным квантово-механическим правилам, Ландау вычислил коммутационные соотношения между введенными переменными [12, 13]. Для оператора плотности имеем, очевидно,

$$\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) - \rho(\mathbf{r}_2)\rho(\mathbf{r}_1) = 0. \quad (2.6)$$

Условие коммутации ρ с \mathbf{j} и компонентами скорости $v_i(\mathbf{r}_1)$ и $v_k(\mathbf{r}_2)$ запишется в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) - \rho(\mathbf{r}_1)\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \rho(\mathbf{r}_1) \nabla \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (2.7)$$

$$v_i(\mathbf{r}_1)v_k(\mathbf{r}_2) - v_k(\mathbf{r}_2)v_i(\mathbf{r}_1) = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \frac{1}{\rho(\mathbf{r}_1)} (\nabla \times \mathbf{v})_{ik}. \quad (2.8)$$

Здесь введены обозначения

$$(\nabla \times \mathbf{v})_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial r_i} - \frac{\partial v_i}{\partial r_k}. \quad (2.9)$$

Очень важным для дальнейшего является коммутатор между скоростью и плотностью

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) - \rho(\mathbf{r}_1)\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.10)$$

Применяя операцию $\nabla \times$ (с дифференцированием по координатам \mathbf{r}_1) к соотношению (2.10) получим

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) \cdot \rho(\mathbf{r}_2) - \rho(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = 0. \quad (2.11)$$

Из условия (2.11) следует, что $\nabla \times \mathbf{v}$ всегда коммутирует с плотностью ρ . Компоненты $\nabla \times \mathbf{v}$, однако, не коммутируют, вообще говоря, ни друг с другом, ни с компонентами скорости \mathbf{v} (при применении операции $\nabla \times$ к уравнению (2.8) правая сторона равенства не исчезает). Поэтому $\nabla \times \mathbf{v}$ не коммутирует и с функцией Гамильтона,

$$H = \int \left(\frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2} + \rho \varepsilon(\rho) \right) \quad (2.12)$$

т. е. не сохраняется. Исключением является случай, когда во всем объеме жидкости $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. В этом случае в правой стороне (2.8) стоит нуль, и $\nabla \times \mathbf{v}$

коммутирует с ρ и $\mathbf{v} = 0$, а потому и с функцией Гамильтона. Таким образом, равный нулю ротор скорости сохраняется. Другими словами, квантовая жидкость всегда обладает такими стационарными состояниями, в которых $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ во всем объеме. Такие состояния могут быть названы по аналогии с классической гидродинамикой состояниями потенциального движения жидкости.

Таким образом, в квантовой жидкости невозможны движения типа сдвига, а возможно только существование продольных волн. Продольные волны в классической гидродинамике - это обычные звуковые акустические волны, а если речь идет о квантово-механической ситуации, то это фононы. Закон дисперсии для акустических волн имеет вид

$$\omega = c |\mathbf{k}|, \quad (2.13)$$

где ω — частота волны, \mathbf{k} — волновой вектор, а c — скорость звука. Учитывая что энергия фонона ε равняется $\varepsilon = \hbar\omega$, а импульс \mathbf{p} равен $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, получаем, что энергетический спектр фононов имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = c |\mathbf{p}|. \quad (2.14)$$

Известно (см. например, [37]), что знание энергетического спектра позволяет вычислить термодинамические характеристики, в частности теплоемкость. Верно и обратное, из термодинамических данных можно извлечь информацию о виде спектра.

Оказалось, что одних фононов недостаточно для объяснения температурной зависимости абсолютной теплоемкости. Анализируя эту зависимость, Ландау заключил, что линейный закон $\varepsilon(\mathbf{p})$ нарушается по мере роста импульса p , кривая отклоняется от линейного хода и должна иметь вид, изображенный на Рис. (2.14).

Квазичастицы со спектром вблизи локального минимума кривой получили названия ротонов, аналитический ход кривой в этой области имеет вид:

$$E(p) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m_{eff}}, \quad (2.15)$$

где p_0 соответствует точке минимума. Значения параметров, характеризующих энергетический спектр гелия, найдены из экспериментов по рассеянию нейтронов жидким гелием. [38]

$$\frac{p_0}{\hbar} = 1,99 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}, \quad \Delta = 8,6 \text{ K}, \quad m_{eff} = 0,26 m_{\text{He}}, \quad (2.16)$$

где m_{He} — масса атома гелия. Точная микроскопическая теория, описывающая существование ротонов и их свойства, до сих пор не построена и их

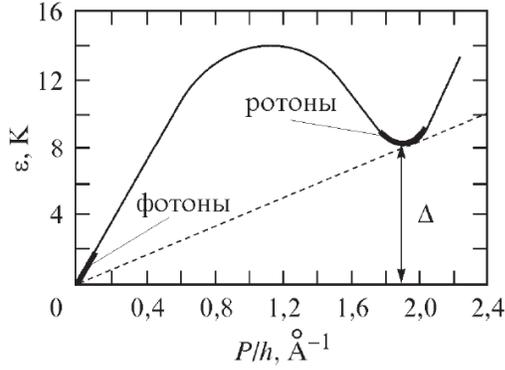


Рис. 2.14: Энергетический спектр элементарных возбуждений He II (Взято из работы Халатникова [1]).

природа ротонов не выяснена до конца. Предполагается, что это связано с какими то круговыми, вихреобразными движениями атомов. Фейнман [39] и Онзагер [40] (см. также книгу Доннелли [15]), упоминали, что "ротон — это дух исчезнувшего вихревого кольца" (the ghost of a vanished vortex ring).

Значения плотности фононов и ротонов могут быть вычислены в предположении идеальности газа квазичастиц, т.е. при низких температурах. Эти зависимости определяются следующими соотношениями (см., например, книгу Вилкса [36]):

$$\rho_{phon} = \left(\frac{2\pi^2 k_B^4}{45\hbar^3 c^5} \right) T^4, \quad (2.17)$$

где k_B — постоянная Больцмана.

$$\rho_{rot} = \frac{2\mu^{1/2} p_0^4}{3(2\pi)^{3/2} (k_B T)^{1/2} \hbar^3} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right). \quad (2.18)$$

При температурах ниже 0,6 К плотность ротонов становится пренебрежимо мала и поэтому при этих температурах из термических возбуждений присутствуют только фононы. То есть наблюдается схожесть твердого тела и сверхтекучего гелия в том смысле, что в обеих системах из термических возбуждений присутствуют только фононы. Этим объясняются схожие экспериментально полученные зависимости теплоемкости He II и твердого тела от температуры: теплоемкости пропорциональны T^3 . При этих температурах легко рассчитать термодинамические свойства гелия. При более высоких температурах рассчитать термодинамические свойства становится сложнее, поскольку резко возрастает присутствие ротонов. Взаимодействием между ротонами пренебрегается при температурах ниже 1 К. При более высоких температурах продолжает резко возрастать в основном плотность ротонов, и в этом случае необходимо учитывать их взаимодействие.

Прежде чем перейти к вопросу о том, как модель элементарных возбуждений приводит к двухжидкостной гидродинамике, представляется целесообразным вернуться к вопросу о критерии сверхтекучести Ландау (2.2) и исследовать проблему критических скоростей с точки зрения энергетического спектра, представленного на Рис. (2.14). Очевидно, самые либеральные условия для выполнения критерии Ландау возникают в окрестности точки минимума правой части, т.е.

$$V > \min \frac{\varepsilon(p)}{p} \neq 0. \quad (2.19)$$

Минимум выражения $\varepsilon(p)/p$ достигается в точке, удовлетворяющей условию

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{d\varepsilon}{dp}. \quad (2.20)$$

В зависимости от значения производной $d\varepsilon/dp$ левая часть описывает различные прямые на плоскости ε, p , проведенные из начала координат. Точка, где происходит касание кривой $\varepsilon(p)$ одной из таких прямых, очевидно, является решением уравнения (2.20). Графически это ситуация изображена на Рис. (2.14). Отношение ε к p имеет размерность скорости, поэтому скорость совпадает с углом наклона прямой, касающейся дисперсионной кривой. По сути, две точки являются "опасными" с точки зрения достижения критической скорости - это начало координат и точка, которая находится в окрестности ротонного минимума (Рис. (2.14)). Если бы ротонный минимум касался абсциссы, это означало бы, что критическая скорость равна нулю, т.е. сверхтекучесть была бы невозможна при любой скорости. Но это не так, из графика следует, что существует критическая скорость, порядка 60 м/с. Начало координат также принципиально важно, потому что спектр выходит из начала координат с конечным наклоном и поэтому критическая скорость должна быть не меньше этого наклона, который совпадает со скоростью звука, т.е. является величиной порядка 200 м/с. Аналогичная ситуация встречается в обычной гидродинамике. Например, поверхность воды неустойчива относительно рождения поверхностных волн, когда скорость ветра превышает скорость распространения волн. Заметим, что если бы наклон кривой был равен нулю, т.е. кривая касалась бы оси абсцисс, то критическая скорость опять-таки была бы равна нулю и сверхтекучесть была бы невозможна. Например для элементарных возбуждений с квадратичным законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p}) \propto \mathbf{p}^2$ критическая скорость равна нулю (ближайший пример такого закона дисперсии - это свободные частицы).

Значение критической скорости 60 м/с, полученное на основании дисперсионной кривой (Рис. 2.14), превышает наблюдаемые в действительности больше чем на два порядка. Причина этого связана с тем, что имеется

еще один род термодинамических возбуждений, который связан с квантовыми вихрями. Теория квантовых вихрей — это необыкновенно большой раздел теории сверхтекучести, имеющий взаимосвязь и приложения со многими областями физики. Мы посвятим этой дисциплине вторую часть представленной монографии. Условия рождения квантовых вихрей при повышении скорости течения жидкости намного либеральнее, чем рождение фотонов и ротонов. Поэтому реальные критические скорости, наблюдаемые в эксперименте оказались малыми - менее 1 см/с.

Нужно сказать, что Ландау сам рассматривал возможность вихревых возбуждений. Коммутационные соотношения для расчета скорости (2.8) показывают, что если $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ и движение жидкости потенциально в какой то момент времени, то оно должно оставаться потенциально всегда. Однако, если оно изначально не потенциально, это утверждение неверно и в принципе вихревое движение возможно. В силу квантовости, имеется энергетический барьер, поэтому $\nabla \times \mathbf{v}$ не может быть сколь угодно малым во всем объеме жидкости. Как писал Ландау: "Другими словами, между состояниями потенциального ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) и вихревого ($\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$) движения квантовой жидкости нет непрерывного перехода. Отсюда непосредственно вытекают основные особенности энергетического спектра жидкости. Наличие разрыва между состояниями потенциального и вихревого движений означает, что между низшими энергетическими уровнями вихревых и потенциальных движений должен существовать некоторый конечный энергетический интервал. Что касается вопроса о том, который из этих двух уровней лежит ниже, то логически, по-видимому, возможны оба случая." (см. оригинальную работу [12, 13]). Это наблюдение демонстрирует, что Ландау, по сути дела, предвосхитил открытие квантованности вихревого движения в сверхтекучей жидкости.

При низких температурах количество элементарных возбуждений не очень велико, и поэтому их можно рассматривать практически как идеальный газ или слабо отличающийся от идеального. На языке звуковых волн взаимодействие может быть введено как нелинейные поправки к уравнениям движения. Такой подход позволяет описать взаимодействующие квазичастицы в рамках так называемых кинетических уравнений. Соответствующая техника была разработана Ландау и Халатниковым для построения теории кинетических процессов в квантовых жидкостях и для вычисления диссипативных коэффициентов (см. книгу Халатникова [1]).

2.3.2 Двухскоростная (двухжидкостная) модель Ландау.

Покажем как концепция квазичастиц приводит к двухскоростной гидродинамике. Совокупность элементарных частиц может быть неравномерно распре-

делена в объеме гелия, иными словами, функция распределения плотности квазичастиц имеет некоторую зависимость от координаты в объеме жидкости, это вызывает тенденцию к перераспределению частиц. В частности, "облако" фононов и ротонов может дрейфовать как целое сквозь жидкость, перенося' при этом суммарные энергию и импульс и, следовательно массу, т. е. вести себя как обычный газ (газ квазичастиц). Вследствие взаимодействия квазичастиц этот газ ведет себя как вязкий. Этот факт доказал Ландау, рассматривая жидкий гелий, находящийся во вращающемся сосуде. Как известно, законы равновесной статистической физики применимы к вращающимся системам отсчета ([12, 13]). На основании этого Ландау заключил, что "облако" фононов и ротонов должно также равномерно вращаться вместе с сосудом. Это означает, что квазичастицы увлекаются стенками сосуда, т.е. ведут себя как вязкая среда.

Массу, переносимую движением газа квазичастиц, Ландау связывал с массой нормальной компоненты. Остальная часть массы ("фон") составляет сверхтекучую компоненту. При низких температурах, когда газ квазичастиц можно считать почти идеальным, относительная плотность нормальной компоненты. может быть найдена из следующих соображений. Из принципа Галилея следует, что энергия квазичастицы ε в движущемся со скоростью \mathbf{V} газе заменяется выражением $\varepsilon - \mathbf{pV}$. Подставляя эту величину в функцию распределения частиц по энергиям $n(\varepsilon)$ (отдельно — для фононов, отдельно — для ротонов), имеем следующее выражение для суммарного импульса \mathbf{P} , переносимого газом квазичастиц

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}n(\varepsilon - \mathbf{pV})d\tau_p, \quad (2.21)$$

где $d\tau_p$ — элемент фазового объема. Разлагая по степеням скорости \mathbf{V} , получим, что первый исчезающий член имеет следующий вид.

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}(\mathbf{pV})\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}d\tau_p \quad (2.22)$$

Из формулы (2.22) следует, что полный импульс \mathbf{P} пропорционален скорости движения \mathbf{V} газа квазичастиц. Коэффициент при \mathbf{V} представляет собой искомую массу единицы объема газа квазичастиц, т.е. плотность нормальной компоненты ρ_n . Остальная часть массы (фон) составляет сверхтекучую компоненту.с плотностью $\rho_s = \rho - \rho_n$, где ρ — полная плотность жидкости.

Тепловая энергия $He II$ связана с газом элементарных возбуждений, т.е. с нормальной компонентой. Поэтому можно говорить что энтропия сверхтекучей компоненты равна нулю. Это может быть интерпретировано тем, что когерентное состояние имеет статистический Γ_S вес, равный единице и, соответственно, логарифм равен нулю Поэтому при движении жидкости, при

котором газ элементарных возбуждений остается неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии (или тепла). Наоборот, любое поступившее в гелий тепло переносится только нормальной компонентой. В этом смысле Ландау неформально говорил, что нормальная компонента сродни "теплороду средневековой концепции, объясняющей тепловые явления. Сверхтекучее движение не сопровождается переносом энтропии, или, другими словами, не переносит тепла. Отсюда, в свою очередь, следует, что течение гелия II, при котором имеет место лишь сверхтекучее движение, является термодинамически обратимым.

Таким образом, Ландау, как и Тисса пришел к концепции двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости. Однако, если в работе Тиссы двухжидкостная модель была отправной точкой и сформулирована как гипотеза, то в работе Ландау двухскоростная модель стала итогом построения полной теории квазичастиц, полученной на основании квантования уравнений движения жидкости. Дополнительно этот системный подход дает возможность вычисления всех величин входящих в эту модель, таких как плотность нормальной и сверхтекучей компонент, энтропия и теплоемкость, а также, как будет показана далее, вычисление диссипативных коэффициентов, входящих в систему уравнений гидродинамики.

Резюмируем свойства двухскоростной модели, основанные на концепции квазичастиц. Исходя из модели квазичастиц, дрейфующих сквозь основную "фоновую" часть жидкости, He II можно представить как смесь двух "жидкостей". Одна из них, так называемая сверхтекучая компонента с плотностью ρ_s , движется со своей сверхтекучей скоростью \mathbf{v}_s . Сверхтекучая компонента, связанная с "фоновой" когерентной жидкостью не имеет сдвиговой вязкости, вследствие чего она не может быть закручена то есть $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, а также не может поглощать и переносить тепло. Другая часть — нормальная компонента, связанная с дрейфующими квазичастицами, с плотностью ρ_n движущаяся со скоростью \mathbf{v}_n , ведет себя как обычная вязкая жидкость. Относительные плотности, как функции температуры изображены на Рис. 2.15.

Сумма сверхтекучей и нормальной масс равна полной массе жидкости. Видно, что при нулевой температуре вся жидкость сверхтекучая. С повышением температуры доля сверхтекучей фракции падает, обращаясь в нуль в λ -точке. Нормальная компонента ведет себя обратным образом. Важно подчеркнуть, что речь идет не о реальной смеси, а скорее о двух видах движения. Оба движения происходят независимо (по крайней мере в области малых значений скоростей v_s и v_n , не превосходящих некоторых критических значений), так что передача импульса от одного к другому невозможна.

Рассмотрим с помощью двухжидкостной модели Ландау некоторые эксперименты, представленные выше. Качественные объяснения были изложены

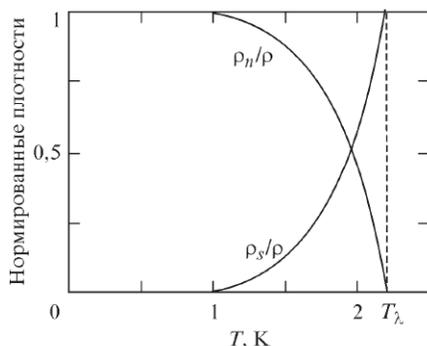


Рис. 2.15: Зависимость нормированных сверхтекучей ρ_n/ρ и нормальной ρ_s/ρ плотностей от температуры при давлении насыщенных паров.

выше, при рассмотрении теории Тиссы. Теперь приведем некоторые численные оценки для описанных выше эффектов.

Выполним, например, количественные оценки термомеханического и связанного с ним фонтанного эффекта. Движение сверхтекучей компоненты можно понять следующим образом. Рассмотрим два объема с гелием, между которыми возможно течение только сверхтекучей компоненты. Такая ситуация может быть осуществлена, например, тогда когда сосуды соединены узким капилляром, заполненным пористым материалом. Тогда нормальная компонента не может протекать сквозь узкие поры, и реализуется только сверхтекучее течение. Такая конструкция называется "сверхщелью". Условие механического равновесия связано с минимумом суммарной внутренней энергии в обоих сосудах, для описанной ситуации условия равновесия выглядит следующим образом. Если $E_{1,m}$ и $E_{2,m}$ — внутренние энергии единицы массы гелия при температурах T_1 и T_2 , то условие минимума энергии, осуществляемого сверхтекучим перетеканием жидкости, может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial E_{1,m}}{\partial N} \right)_{\sigma_1} = \left(\frac{\partial E_{2,m}}{\partial N} \right)_{\sigma_2}, \quad (2.23)$$

где N и σ — число атомов и энтропия в единице массы гелия. Вспомним теперь, что производная по числу частиц от энергии есть не что иное как химический потенциал μ . Таким образом, отсутствие разницы между химическими потенциалами в обоих сосудах приводит к равновесию и отсутствию течения, и, наоборот, разность химического потенциала является движущей силой для сверхтекучей компоненты. Дифференциал химического потенциала, пересчитанный на единицу массы (см. главу 3) $\mu \rightarrow \mu/m_{\text{He}}$, выражается через дифференциалы давления dp и dT температуры следующим образом:

$$d\mu = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT. \quad (2.24)$$

Здесь ρ – плотность жидкости. Таким образом, если отсутствует перепад давления, а имеется перепад температуры, то должно возникнуть движение сверхтекучей компоненты. При этом сверхтекучая компонента движется в сторону нагревателя. Нормальная компонента движется в обратном направлении таким образом, чтобы жидкость как целое была неподвижна. Это согласуется с тем, что перепад давления равен нулю. Если на пути жидкости поставить пористую перегородку, то нормальная "тормозится" в ней, в то время как невязкая сверхтекучая часть будет течь, свободно проникая в поры. Возникает дисбаланс в течении, условие "неподвижности" всей жидкости нарушается, что влечет появление перепада давления. Нулевой поток восстановится лишь тогда, когда перепад химического потенциала обращается в нуль, т.е. перепад температуры вызывает перепад давления. Из соотношения (2.24) следует, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho \sigma. \quad (2.25)$$

Это уравнение называется соотношением Лондона ([9]). Поскольку $\sigma > 0$, то и $\Delta p / \Delta T > 0$).

Сходным образом объясняется механокалорический эффект. Если приложить добавочное давление в левой части сосуда (см. Рис. 2.8), например, подняв уровень гелия тогда начнется течение всей жидкости. Однако в силу того, что соединяющий капилляр заполнен пудрой с мелкопористым веществом, нормальная компонента тормозится и останавливается, перетекает только сверхтекучая компонента. Она переносит массу, но не переносит энтропию, и тепло, оставшееся в левом сосуде, распределяется на меньшее количество гелия, что, естественно, приводит к нагреванию жидкости. Процесс останавливается, когда разность химических потенциалов будет равна нулю. Это условие для отсутствия течения сверхтекучей компоненты, связь между перепадом температуры и перепадом давления можно рассчитать по соотношению Лондона (2.25). Если жидкость вначале покоилась, и мы приложили градиент температуры, то жидкость начинает двигаться с ускорением, сохраняя при этом свойства противотока. Возникает вопрос: что должно остановить процесс ускорения и создать стационарную ситуацию? Дело в том, что по мере разгона нормальной компоненты в ней устанавливается пуазейлевское течение и соответствующий "вязкий" тензор потока импульса приводит к дополнительному градиенту давления, вследствие чего соотношение Лондона (2.25) модифицируется.

В силу того, что вязкость нормальной компоненты мала, пуазейлевский перепад давления $\Delta p = 0$ также мал, и, соответственно, мал перепад температуры ΔT . Поток тепла Q_h определяется течением нормальной компоненты, и для широких каналов может быть значительной величиной. Отношение

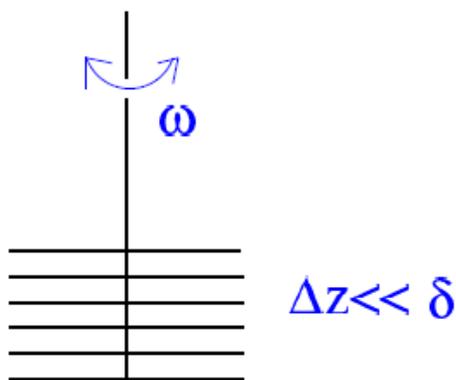


Рис. 2.16: Схематический рисунок эксперимента Андроникашвили [41] со стопкой дисков, совершающих крутильные колебания в гелии II. Рисунок взят из книги Баренги [26].

потока тепла Q_h к перепаду температуры ΔT , т.е. $Q_h/\Delta T$, которое формально совпадает с определением коэффициента теплопроводности, может быть по этой причине очень большим, в миллионы раз превышающим обычный коэффициент теплопроводности в He I, где тепло распространяется благодаря молекулярному теплообмену. Таким образом, конвективный (посредством нормальной компоненты) поток тепла является очень мощным механизмом теплопередачи, это служит количественным доказательством явления сверхтеплопроводности.

Обсудим теперь эксперименты по определению вязкости гелия методом вытекания из сосуда и методом крутильных колебаний. Двухжидкостная модель дает объяснение, почему в экспериментах с осциллирующими дисками Кеезома и Мак-Вуда [35] регистрировалась не нулевая, а конечная величина в He II. В случае вытекания из сосуда экспериментаторы имели дело с течением сверхтекучей компоненты. Поэтому данные по скорости вытекания согласуются с течением идеальной жидкости, не обладающей вязкостью. В случае крутильных колебаний подвешенного диска происходит взаимодействие с нормальной компонентой и поэтому обнаруживается ненулевая вязкость. Схематически данная ситуация изображено на Рис. 2.10. Более того, в зависимости от количества нормальной компоненты, т.е. в зависимости от температуры, взаимодействие изменяется. Таким образом, изучая реакцию крутильных колебаний можно определить количество нормальной компоненты. Соответствующие измерения были проведены Андроникашвили в 1946 г. [41] в экспериментах с крутильными колебаниями стопки близко расположенных дисков. (см. Рис. 2.16).

Результаты измерения плотности нормальной и сверхтекучести компонент, выполненные Андроникашвили, изображены на Рис. 2.15.

Обсуждаемое выше свойство He II образовывать пленки и перетекать через край сосудов является эффектом, связанным с эффектом сверхтеплопроводности и нулевой вязкости. Сам по себе факт образования пленки не является особым свойством, присущим только He II. Пленки образуются всякой жидкостью, смачивающей данную твердую поверхность. В обычных жидкостях образование пленки и ее распространение на большой участок поверхности происходят чрезвычайно медленно из-за наличия вязкости, поэтому она успевает высохнуть. Образование же и движение пленки у He II происходит быстро благодаря его сверхтекучести, а сверхтеплопроводность вдоль пленки препятствует высыханию.

Резюмируя содержание данной главы можно заключить, что как история открытия сверхтекучести, так и сама теория сверхтекучести являются захватывающе интересными дисциплинами. В дальнейшем изложении мы в деталях рассмотрим многие из затронутых здесь вопросов, особое внимание будет уделено гидродинамическим аспектам и демонстрации того, каким образом квантово-механическое природа гелия влияет на гидродинамические процессы.

3 Уравнения двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости

Настоящая глава посвящена выводу уравнений двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости. Приведены три альтернативных метода вывода уравнения, каждый из которых раскрывает разные аспекты теории и имеет свои удобства при решении конкретных задач. Кроме того, будет представлена формулировка гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи фазового перехода, это имеет отдельный смысл в связи с исследованиями по динамике Бозе - газа. Также будет изложено применение гамильтоновского подхода для задач нелинейной акустики.

Первый способ восходит к оригинальной работе Ландау (см. ([13],[12])). Этот феноменологический вывод, основанный на концепции двухжидкостных гидродинамики, отличается физической прозрачностью, возможно, за счет математической строгости. Также анализируются входящие в эти уравнения термодинамические функции и их зависимость от относительной скорости, применяемая к движению с не слишком большими скоростями

Второй параграф посвящен выводу уравнений на основе законов сохранения. Этот довольно популярный метод используется для описания динамики сложных систем, таких как многофазные жидкости, плазма и в других областях. (см. например, [42],[43],[44], [45]) Метод может быть полезен для специалистов, которые интересуются теоретическими вопросами динамики сплошных сред, он позволяет обобщать вывод уравнений на случай диссипативных сил и другие сложные ситуации

Наконец, в третьем параграфе, будет описан метод получения уравнений двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости на основе вариационного принципа. Одно из достоинств данного подхода состоит в том, что он позволяет получить уравнения гидродинамики в так называемом гамильтоновском виде. Гамильтоновская формулировка получила большое распространение в теории нелинейных волн, поскольку запись уравнений имеет универсальный вид, что позволяет практически автоматически переносить известные результаты общей нелинейной теории на любые конкретные ситуации.

В последнем параграфе данной главы изложены вопросы гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи T_λ . Хотя этот метод приводит в конечном итоге к двухжидкостной модели, он стартует совершенно с другой позиции, именно с динамики макроскопической волновой функции - или параметра порядка.

3.1 Метод Ландау, бездиссипативный случай

Еще раз подытожим свойства двухжидкостной модели сверхтекучий жидкости, изложенной в предыдущей главе, необходимые (и достаточные) для построения гидродинамики. С точки зрения гидродинамики He II можно рассматривать как смесь двух компонент. Одна из них, сверхтекучая жидкость с плотностью $\rho_s(p, T)$ (термодинамические переменные p, T - давление и температура, соответственно), движется со скоростью \mathbf{v}_s , при этом очевидно она переносит поток массы \mathbf{j}_s , равный $\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$. Сверхтекучая компонента не имеет сдвиговой вязкости, и поэтому он не может быть закручена (т.е. $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$), а также не может поглощать и переносить тепло, ее энтропия в единице массы $\sigma_s(p, T)$ равна нулю $\sigma_s(p, T) = 0$. Нормальная компонента с плотностью $\rho_n(p, T)$, движущаяся со скоростью \mathbf{v}_n , переносит, соответственно, поток массы \mathbf{j}_n , равный $\mathbf{j}_n = \rho_n \mathbf{v}_n$. Нормальная компонента ведет себя как обычная вязкая жидкость. С несколько более глубокой точки зрения поток нормальной компоненты есть просто дрейф газа тепловых возбуждений (фононов и ротонов), которые появляются в когерентном состоянии при ненулевой температуре. Движения обеих компонент является термодинамически обратимым и, следовательно, независимым. Сразу отметим, что речь идет о безвихревом случае, наличие квантовых вихрей приводит к взаимодействию компонент -взаимному трению ("mutual friction"). Эта ситуация будет подробно разобрана в следующей части книги. Сверхтекучая компонента $\rho_s(p, T)$ появляется ниже $T_\lambda \approx 2.1768$ К при давлении насыщенных паров, она растет с уменьшением температуры и достигает полной плотности ρ при нулевой температуре. В промежуточной области температур между T_λ и нулем ($T = 0$) полная плотность может быть представлена в следующем виде $\rho(p, T) = \rho_s(p, T) + \rho_n(p, T)$. Очевидно общий поток массы \mathbf{j} равен сумме двух ингредиентов

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \quad (3.1)$$

В бездиссипативном случае аналогичные соображения могут быть высказаны относительно аддитивности потока импульса Π_{ik} . Именно, конвективный тензор потока импульса Π_{ik} очевидно состоит из сверхтекучего вклада, равного $\rho_s v_{si} v_{sk}$ и нормального вклада, равного $\rho_n v_{ni} v_{nk}$. Кроме того, конечно, имеется вклад в тензор потока импульса связанный с давлением p , причем давление является общим для всей жидкости. Существует вариант записи уравнений, когда можно вести отдельно сверхтекучее p_s и нормальное p_n давления, однако, это вопрос скорее математического удобства и глубокого физического смысла не имеет. Окончательно, тензор потока импульса имеет следующий вид

$$\Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \delta_{ik} p. \quad (3.2)$$

Индексы i, k обозначают координаты x, y, z ; δ_{ik} - единичный тензор. На основании вышесказанного можно немедленно выписать уравнения сохранения плотности массы ρ и плотности импульса \mathbf{j}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (3.4)$$

Закон сохранения энтропии может быть получен из факта, что энтропия переносится только нормальной жидкостью, математически этот факт может быть записан следующим образом

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n] = 0. \quad (3.5)$$

Здесь S энтропия единицы объема. Дивергентный член отражает тот факт, что энтропия переносится только нормальной составляющей.

Чтобы замкнуть систему необходимо выписать уравнение для скорости \mathbf{v}_s сверхтекучей компоненты. По сути дела, основные аргументы для получения соответствующего уравнения изложены в предыдущей главе. Было получено, что для того, чтобы сверхтекучая компонента была неподвижна, должно быть отсутствие перепада химического потенциала $\Delta\mu(p, T)$ (см. уравнение (2.23)). И, наоборот, разность химического потенциала является движущей силой для сверхтекучей компоненты. На основании этого, а также с учетом условия $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$, вследствие чего субстанциональная производная $D\mathbf{v}_s/Dt = \partial\mathbf{v}_s/\partial t + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s$ переходит в $\partial\mathbf{v}_s/\partial t + \nabla \cdot (\mathbf{v}_s^2/2) - \mathbf{v}_s \times (\nabla \times \mathbf{v}_s) = \partial\mathbf{v}_s/\partial t + \nabla \mathbf{v}_s^2/2$, можно непосредственно выписать, уравнение для \mathbf{v}_s в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Чтобы двинуться дальше, нужно найти связь между термодинамическими величинами, входящими в уравнения (9.27)-(3.6), такими как $\mu(p, T)$, $S(p, T)$, $\rho(p, T)$. Конечно, поскольку уравнения выписаны для сохранения плотности ρ и S энтропии было бы удобнее "работать" с этими переменными, однако поскольку большинство экспериментальных данных приведены в переменных давления p и температуры T , то нужно иметь взаимосвязь между различными представлениями термодинамических переменных. С одной стороны, задача, конечно, тривиальная и восходит к классической термодинамике. Однако, в силу того, что мы имеем дело с двухскоростной гидродинамикой, невозможно исключить зависимость термодинамических величин, например энергии, от скорости движения \mathbf{v} путем перехода в сопутствующую в систему отсчета.

Этот факт значительно усложняет анализ, потому что все термодинамические переменные будут зависеть также от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$,

Сначала рассмотрим случай неподвижной жидкости или жидкости рассматриваемой в системе отсчета, где она покоится, т.е. $\mathbf{v}_n = 0$, $\mathbf{v}_s = 0$. Выпишем известное соотношение (смотри, например, [37]) для полной внутренней энергии E_{full} как функции "своих" переменных S_{full} , dV_{full} с непостоянным числом частиц N_{full}

$$dE_{full} = TdS_{full} - pdV_{full} + \mu dN_{full}. \quad (3.7)$$

В случае текущей жидкости, когда все входящие в эту формулу величины являются функциями координат и времени, следует переписать (3.7) в терминах плотностей всех входящих в это соотношение величин.

$$dE = TdS + \mu d(N/V). \quad (3.8)$$

Такой вариант соответствует обычному термодинамическому соотношению для дифференциала энергии неподвижной жидкости при постоянном (здесь — равном единице) объеме (См. [46]). Величины входящие в формулу (3.8) это плотность энергии E , плотность энтропии S , и плотность числа частиц N/V . Разделив и умножив последнее слагаемое на массу атома гелия m_{He} , перейдем к формуле $(\mu/m_{He})d(Nm_{He}/V) = \mu d\rho$. Здесь и далее мы будем пользоваться переопределенным химическим потенциалом $\mu \rightarrow \mu/m_{He}$ — который отвечает изменению энергии системы при добавлении единицы массы (в отличие от обычного определения, соответствующего изменению энергии при добавлении одной частицы). Окончательно

$$dE = TdS + \mu d\rho. \quad (3.9)$$

Рассмотрим термодинамический потенциал Φ

$$\Phi_{full} = E_{full} + pV_{full} - TS_{full}. \quad (3.10)$$

В случае переменного числа частиц дифференциал $d\Phi$ равен

$$d\Phi_{full} = V_{full}dp - S_{full}dT + \mu dN_{full}. \quad (3.11)$$

Все термодинамические потенциалы являются экстенсивными величинами, т.е. пропорциональны количеству вещества. Отсюда следует, что

$$\Phi_{full}(p, T, N) = N_{full}f(p, T) \quad (3.12)$$

где $f(p, T) = \mu_{atom}$ химический потенциал в пересчете на одну частицу.

$$d\mu_{atom} = V_{atom}dp - s_{atom}dT \quad (3.13)$$

Где V_{atom} - объем занимаемый одним атомом, S_{atom} - энтропия в пересчете на один атом. Если перейти к переопределенному химическому потенциалу $\mu \rightarrow \mu/m_{He}$, и к величине σ - энтропии единицы массы, то из (3.13) следует

$$d\mu = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT \quad (3.14)$$

Таким образом, был решен вопрос о химическом потенциале как функции давления p и температуры T . Аналогичные выкладки приводят к результату, что дифференциал тепловой функции $w(\sigma, p)$ (в своих переменных) на единицу массы равен,

$$dw = T d\sigma + \frac{1}{\rho} dp. \quad (3.15)$$

Комбинируя (3.10) и (3.12) придем к следующему соотношению

$$p = -(E_{full} + N_{full}\mu_{atom} + TS_{full})/V_{full} = -E + \mu\rho + TS. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) следует также из следующего рассмотрения (см. [1]). Производная $d(EV)/dV$ равняется $-p$ поскольку $-pdV = dA$ связано с выполненной работой которая идет на изменение общей энергии системы, то есть

$$\frac{d(EV)}{dV} = E + \frac{dE}{dV}V = E + V \left(\mu \frac{d\rho}{dV} + T \frac{dS}{dV} \right) = E - \mu\rho - TS, \quad (3.17)$$

что совпадает с (3.16).

Таким образом выполнен первый этап и было получено соотношение между термодинамическими величинами, входящими в систему выписанных уравнений (9.27)-(3.6).

Выписанные соотношения, однако, справедливы только для неподвижной жидкости. Это не является препятствием для описания гидродинамики обычной жидкости, поскольку всегда возможно перейти в систему отсчета, где элемент жидкости покоится. Ситуация меняется в случае двухскоростной гидродинамики, где невозможно перейти в систему отсчета где жидкость в силу наличия двух движений. В результате, термодинамические величины приобретают зависимость от относительной скорости движения $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ (вернее, от квадрата относительно скорости $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$, поскольку термодинамические величины являются скалярами). Происхождение такой зависимости очень легко увидеть из следующих соображений. Мы обсуждали в предыдущей главе, что нормальная компонента - это совокупность элементарных возбуждений (квазичастиц) когерентного состояния. Пусть энергия возбуждения в движущейся вместе с жидкостью (со скоростью \mathbf{v}_s) системе отсчета,

равна $\varepsilon_s(\mathbf{p})$, а соответствующий импульс равен \mathbf{p} . Тогда в неподвижной системе отсчета энергия системы равна

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_s(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{v}_s. \quad (3.18)$$

В системе отсчета движущейся с "облаком" элементарных возбуждений (т.е. перемещающийся со скоростью нормальной компоненты \mathbf{v}_n) энергия имеет следующий вид

$$\varepsilon'(\mathbf{p}) = \varepsilon_s(\mathbf{p}) + \mathbf{p}\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\mathbf{v}_n. \quad (3.19)$$

Вычисляя термодинамические величины для гелия, с помощью функции распределения фононов по энергиям, определяемой функцией Планка, или с помощью функции распределения ротонов по энергиям, определяемой функцией Больцмана, мы должны пользоваться энергией элементарных возбуждений $\varepsilon'(\mathbf{p})$ в виде (3.19). В результате все вычисленные термодинамические величины получают зависимость от $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. В частности, дифференциал энергии движущейся жидкости (см. (3.9)) в системе связанной со сверхтекучим движением, заменяется на следующее выражение

$$dE = TdS + \mu d\rho + d\frac{\rho_n}{2}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 = TdS + \mu d\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0. \quad (3.20)$$

Здесь вектор \mathbf{j}_0

$$\mathbf{j}_0 = \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (3.21)$$

это плотность потока массы в сверхтекучей системе, или. относительный импульс. Из соотношения (3.21) видно, что относительный импульс, по сути дела, является новой термодинамической переменной, связанной с относительным движением. Проведя соответствующие вычисления можно показать что формула (3.16) может быть обобщена в следующей форме

$$p = -\frac{d(EV)}{dV} = -E + \mu\rho + TS + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{j}_0. \quad (3.22)$$

Комбинируя, далее (3.20) и (3.22) придем к следующему соотношению

$$d\mu = \frac{1}{\rho}dp - \sigma dT - \mathbf{j}_0 \cdot d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (3.23)$$

Изложенные выше выкладки справедливы только для небольших относительных скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Действительно, как легко видеть, при выводе формулы (3.20) мы пренебрегли возможной зависимостью плотности и нормальной компоненты ρ_n от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, предполагая, что окончательная величина будет следующего порядка малости по $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

Резюмируя, результаты, изложенные в данном параграфе, можно заключить, что, следуя работе Ландау, была выписана полная и замкнутая система уравнений движения сверхтекучей жидкости и установлена связь между всеми термодинамическими переменными, включая относительную скорость $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. При выводе уравнений широко применялись некоторые физические допущения, в частности, предполагалось аддитивность вкладов сверхтекучей и нормальной компонент в тензор потока импульса, апелляция к классической гидродинамике и ряд других. Все это придает физическую прозрачность и наглядность развитой схемы, хотя вывод нельзя считать абсолютно строгим. Более строгий вывод, использующий схему законов сохранения, будет представлен в следующем параграфе.

3.2 Вывод уравнений гидродинамики сверхтекучего гелия с помощью законов сохранения

В этом разделе будет представлен вывод уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, основанный на законах сохранения и принципе относительности Галилея. Этот метод ценен тем, что он является универсальным приемом в построении уравнений движения для сложных гидродинамических систем. Первоначально он был инициирован для сверхтекучей гидродинамики, позднее этот подход модернизировался и интенсивно использовался для описания других систем (см., например, [47],[42],[43],[48],[45]).

Одна из первых попыток применить метод законов сохранения для получения уравнений движения сверхтекучей жидкости была предпринята Накаджимой с авторами [49]. Несколько позднее этот метод был развит Халатниковом [14], который указал на ошибки в работе [49] и построил более последовательную теорию. При изложении материала мы будем придерживаться известной книги Халатникова [1], а также его оригинальных статей [50], [14].

В качестве первого шага, в целях последовательности изложения, представляется полезным еще раз перечислить свойства модели, которые будут заложены в вычислительную схему. Мы рассматриваем двухжидкостную (или правильнее сказать двухскоростную) модель сплошной среды. На этом, первом, этапе рассматриваются только бездиссипативные течения. Из квантовомеханических свойств налагается ограничение, что движение сверхтекучей компоненты потенциально, т.е. $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$; это следует из правил коммутации. Обратите внимание на то, что мы не накладываем условия, что сверхтекучая движения не переносит энтропии, это непосредственно будет следствием потенциальности сверхтекучего движения. Следующий шаг - это определение набора величин, которые мы выберем в качестве переменных. Чтобы иметь возможность сравнить выкладки с результатами предыдущего параграфа,

выберем тот же набор исходных переменных. Именно плотность всей жидкости ρ , полный импульс всей жидкости \mathbf{j} , плотность энтропии S , сверхтекучую скорость \mathbf{v}_s . Также у нас будет фигурировать плотность энергии E , зависящая от всего набора выбранных переменных, но, при этом формализме энергии $E(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ - это вспомогательная величина, необходимая чтобы замкнуть систему уравнений

Выпишем и обсудим законы сохранения для перечисленных величин. Закон сохранения какой-либо величины имеет универсальную форму дифференциального вида: производная по времени от сохраняющейся величины равна дивергенции некоторого вектора, связанного с потоком этой величины.

Так, закон сохранения массы жидкости связывает плотность ρ и поток массы, который есть просто импульс единицы объема. \mathbf{j} , он имеет универсальный вид уравнения непрерывности.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.24)$$

Некоторые соотношения в этом параграфе совпадают с изложенными выше (в предыдущем параграфе). Это сделано в целях последовательности изложения. Также, в отличие от метода Ландау, мы полагаем тензор потока импульса Π_{ik} неизвестной пока величиной, которая будет определена далее, в ходе представленных вычислений. Имея это в виду запишем закон сохранения плотности импульса \mathbf{j} в следующей форме:

$$\frac{dj_i}{dt} + \frac{d\Pi_{ik}}{dx_k} = 0. \quad (3.25)$$

Поскольку на данном этапе мы рассматриваем только бездиссипативные течения, энтропия также будет сохраняться. Мы введем закон сохранения энтропии в "стандартной" форме, что производная по времени $\partial S/\partial t$ равна дивергенции некоторого вектора \mathbf{F} , связанного с плотностью потока этой величины

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (3.26)$$

Еще раз заметим, мы не обращаемся к микроскопической картине, которая предписывает, что энтропия переносится нормальной компонентой, этот факт будет получен автоматически из законов сохранения.

Наконец, выпишем уравнение для скорости сверхтекучей компоненты, мы воспользуемся на этом этапе данным предложением что движение потенциально, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ и субстанциональная производная $D\mathbf{v}_s/Dt = \partial\mathbf{v}_s/\partial t + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s$ переходит в $\partial\mathbf{v}_s/\partial t + \nabla \mathbf{v}_s^2/2$. Поэтому закон сохранения скорости

сверхтекучей компоненты будет записываться уравнением такого типа

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \nabla\left(\varphi + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}\right) = 0, \quad (3.27)$$

где φ некоторый скаляр, который предстоит определить.

Уравнения (3.24)— (3.27) представляют собой полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости. Однако смысл они приобретут лишь после того, как будет выяснен вид неизвестных членов Π_{ik} , \mathbf{F} и φ . Величина φ здесь - это чисто вспомогательная величина, просьба не путать с потенциалом скорости или с угловой переменной, которые будут использоваться в других разделах. Это же замечание касается и других, используемых в этом параграфе величин.

Для определения вида этих членов мы воспользуемся законом сохранения энергии, который в дифференциальной форме записывается в виде

$$\frac{dE}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0 \quad (3.28)$$

где E — плотность энергии жидкости; \mathbf{Q} — вектор потока энергии. Нам необходимо выбрать, неизвестные члены в уравнениях (3.24)— (3.27) таким образом, чтобы уравнение (8.6) выполнялось автоматически. Кроме того, мы воспользуемся принципом относительности Галилея, который позволяет определить зависимость всех величин от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

Чтобы применить принцип относительности Галилея удобно ввести новую систему отсчета K_s движущуюся со скоростью сверхтекучего движения данного элемента жидкости. Система отсчета движется относительно лабораторной системы K_l со скоростью \mathbf{v}_s . Значения введенных выше величин связаны в рассматриваемых системах следующими соотношениями :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho\mathbf{v}_s, \quad (3.29)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si}v_{sk} + v_{si}j_{0k} + v_{sk}j_{0i} + \Pi_{0ik}, \quad (3.30)$$

$$E = \frac{\rho\mathbf{v}_s^2}{2} + \mathbf{v}_s\mathbf{j}_0 + E_0(\rho, S), \quad (3.31)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\rho\mathbf{v}_s^2}{2} + \mathbf{v}_s\mathbf{j}_0 + E_0 \right) \mathbf{v}_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}\mathbf{j}_0 + \Pi_0\mathbf{v}_s + \mathbf{Q}_0, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{F} = S\mathbf{v}_s + \mathbf{F}_0, \quad (3.33)$$

Здесь переменные, снабженные индексом 0 те же самые переменные, как и в левых частях уравнений, но только в системе отсчета K_s , связанной со сверхтекучим движением. Формулы (3.29)—(3.33) следуют непосредственно

из принципа относительности Галилея. Так, например, формула (3.31) описывает известное соотношение для кинетической энергии материальной частицы при переходе в другую (инерциальную) систему отсчета.

В системе s движущуюся со скоростью сверхтекучего движения жидкость движется со скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, и, очевидно, все величины (\mathbf{j}_0 —плотность импульса, Π_{0ik} - тензор потока импульса, E_0 - энергия, \mathbf{Q}_0 , —поток энергии) могут зависеть только от указанной разности (и, конечно, от остальных обычных термодинамических переменных). Дифференциал энергии dE_0 описывается формулой

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0. \quad (3.34)$$

Слагаемое $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0$ в формуле (3.34) было получено ранее из микроскопической теории (см. уравнение 3.20 в предыдущем разделе). При этом использовался тот факт, что энергия фононов и ротонов (и, следовательно, все термодинамические величины) описывается добавочным членом, содержащим относительную скорость. В духе идеологии вывода уравнений движения, основываясь только на феноменологии законов сохранения и без апелляции к микроскопической теории, слагаемое $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0$ выражает просто тот факт, что скорость есть производная энергии по импульсу, и его следует рассматривать как определение скорости нормальной компоненты \mathbf{v}_n . Очевидно, что в силу симметрии вектор \mathbf{j}_0 может быть направлен только по направлению вектора $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$. Таким образом, можно записать что $\mathbf{j}_0 = \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$, которое следует рассматривать как определение нормальной плотности ρ_n . Определяя плотность сверхтекучести компоненты как $\rho_s = \rho - \rho_n$ и используя (3.31) можно получить, что $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$, полученные соотношения совпадают с формулами (3.1), (3.21). Подчеркнем еще раз, что вывод указанных соотношений в этом разделе не апеллирует в микроскопической теории и связан только с феноменологией законов сохранения

Идея дальнейших вычислений состоит в следующем (см. [14],[1],[46]). Дифференцируем энергию $E = E(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ по времени и выражаем все производные от термодинамических величин, \mathbf{j} и \mathbf{v}_s по времени, используя уравнения (3.29)—(3.33). Затем вычисляем $\nabla \cdot \mathbf{Q}$, используя формулу (3.32), и подставляем $\partial/\partial t$ и $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ в уравнение (3.28). громоздкие вычисления приводят (после значительных сокращений) к следующему результату:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{Q}_0 = & -m_{ik} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)_i \frac{\partial}{\partial x_k} m_{ik} + \mathbf{j}_0 (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \nabla) \cdot \mathbf{v}_n + \quad (3.35) \\ & + (\mathbf{j}_0 - S(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)) \cdot \nabla(\varphi - \mu) - \nabla T \cdot (\mathbf{F}_0 - S(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)) + \nabla \cdot (\mathbf{F}_0 T + \mathbf{j}_0 \mu). \end{aligned}$$

Здесь вспомогательный тензор m_{ik} определён как

$$m_{ik} = \Pi_{0ik} + [E_0 - TS - \mu\rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{j}_0] \delta_{ik} \quad (3.36)$$

В бездиссипативном случае течение будет термодинамически обратимо, следовательно величины m_{ik} , \mathbf{Q}_0 , \mathbf{F}_0 и φ являются функциями термодинамических переменных и скоростей и не зависят от их производных по времени и координатам. Поэтому все комбинации переменных, входящие под знаки пространственных производных, обращаются в нуль. Это обстоятельство позволяет однозначным образом получить из (3.35) выражение для искомых величин

$$m_{ik} = j_{0i}(v_{nk} - v_{sk}) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{F}_0 = S(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (3.38)$$

$$\varphi = \mu \quad (3.39)$$

$$\mathbf{q} = T\mathbf{F}_0 + \mathbf{j}_0\mu - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s)\mathbf{j}_0 + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{j}_0) + (TS + \rho_n\mu)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \delta_{ik}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (3.40)$$

Сравнив это с формулами преобразования галилея (3.29)–(3.33), окончательно получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + S\mathbf{v}_s = S\mathbf{v}_n, \quad (3.41)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si}v_{sk} + v_{si}j_{0k} + v_{sk}j_{0i} - [E_0 - TS - \mu\rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0)]\delta_{ik}, \quad (3.42)$$

$$\Pi_{0ik} = p\delta_{ik} + \rho_n(v_n - \mathbf{v}_s)_i(v_n - v_s)_k \quad (3.43)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \mu \right) (\mathbf{j}_0 + \rho\mathbf{v}_s) + ST\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{j}_0). \quad (3.44)$$

Из сравнения (3.42) (3.22) следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (3.42), представляет собой полное давление.

Таким образом, основываясь на законах сохранения и из соображений равновесной термодинамики, мы получили полную систему уравнений (3.24)–(3.27) с определениями (3.41)–(3.44), описывающих бездиссипативную гидродинамику двухскоростной модели сверхтекучей жидкости. В представленном виде это наиболее распространенный и используемый формат записи уравнений движения, хотя имеется некий логический дефект. Дело в том, что первоначальный набор переменных, входящий в выражение (3.31) состоял из плотности массы ρ , плотности энтропии S , относительного импульса \mathbf{j}_0 и сверхтекучей скорости \mathbf{v}_s . В представленной системе уравнений (3.24)–(3.27) с определениями (3.41)–(3.44) фигурирует полный импульс \mathbf{j} вместо относительного импульса \mathbf{j}_0 . В принципе, это не очень существенный недостаток, однако ради полноты изложения, мы выпишем уравнение которому удовлетворяют величина \mathbf{j}_0 . Выполнить это очень легко. Вспомним что \mathbf{j}_0 и \mathbf{j} связаны следующим образом $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_s$ (см. (3.29)). Исключив ρ и \mathbf{v}_s с помощью

уравнения непрерывности (3.24) и уравнения для сверхтекучей компоненты (3.27), мы получим уравнение для \mathbf{j}_0 следующего вида

$$\frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t} + \mathbf{j}_0 \nabla \mathbf{v}_n + (\mathbf{j}_0 \nabla) \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}_n) + S \nabla T = 0. \quad (3.45)$$

Система уравнений (3.24)- (3.27) с определениями (3.41)-(3.44), очень сложна с математической точки зрения. Дополнительная сложность определяется тем, что входящие в уравнения величины ρ_s, ρ_n, μ, S и т.д. являются функциями не только термодинамических переменных и T , но также квадрата относительной скорости обоих движений $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. Вид которых может быть найден лишь с привлечением микроскопической теории.

Уравнения, однако, сильно упрощаются в физически интересном случае не слишком больших скоростей. (малой величиной предполагается отношение скоростей к скорости первого второго звука (см. далее, главу 4, посвященную линейной акустике). На самом деле, в обычных случаях, стационарных течениях, или в нестационарных, с медленно изменяющимися параметрами, такое ограничение не слишком критическое.. Действительно, свойство сверхтекучести нарушается при скоростях, превышающих некоторое, вообще говоря, не очень критическое значение V_{cr} .. Однако в нестационарных условиях, например при распространении звука, скорости могут значительно превосходить критическое значение (см. далее главу 5, посвященную нелинейной акустике) без нарушения сверхтекучести.

При условии не слишком больших скоростей, можно ограничиться квадратичными членами относительно величины $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. В этом случае функциональные зависимости величин ρ_s, ρ_n, μ, S и т.д. от $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$ а могут быть найдены из чисто термодинамических соображений. Перепишем выражения (3.23) для дифференциала химического потенциала в виде:

$$d\mu = -\sigma dT + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_n}{2\rho} dw^2. \quad (3.46)$$

Далее, можно пренебречь зависимостью ρ_s, ρ_n от относительной скорости w ; поскольку это будет третий порядок малости. Тогда из формулы (3.46) следует, что первые два члена разложения μ по степеням w имеют вид

$$\mu = \mu(p, T) - \frac{\rho_n}{2\rho} w^2. \quad (3.47)$$

Далее, из соотношения (3.46) легко находится зависимость энтропии σ и плотности ρ от квадрата относительной скорости $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. Из равенства перекрестных производных

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial w^2} = \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \quad (3.48)$$

получается, что первые два члена разложения $s(p, T, w)$ и $\rho(p, T, w)$ степеням w имеют вид

$$\sigma(p, T, w) = \sigma(p, T) + \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} \quad (3.49)$$

$$\rho(p, T, w) = \rho(p, T) + \frac{\rho^2 w^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (3.50)$$

где в правой стороне равенства стоят обычные $\sigma(p, T)$ и $\rho(p, T)$ для неподвижной жидкости. Они должны быть подставлены в гидродинамические уравнения, которые после этого будут справедливы с точностью до членов второго порядка по скорости w включительно (учет же в \mathbf{j} зависимости ρ_s и ρ_n от w^2 привел бы к членам третьего порядка малости). Подставив выражения для $\mu(p, T, w)$, $s(p, T, w)$ и $\rho(p, T, w)$ в уравнения (3.24)–(3.27), получим уравнения, справедливые с точностью до членов второго порядка w^2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\rho + \frac{\rho^2 w^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right) + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{dj_i}{dt} + \frac{d\Pi_{ik}}{dx_k} = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dt} \left[S + \frac{\rho^2 w^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} + S \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] + \nabla \cdot (S \mathbf{v}_n) = 0, \quad (3.53)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \nabla \cdot \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} w^2 \right) = 0. \quad (3.54)$$

В уравнениях (3.51)–(3.54) по умолчанию выбрана пара основных термодинамических переменных, именно давление p и температура T . Введение в гидродинамические уравнения членов, учитывающих диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости, будет произведено в следующем параграфе.

Уравнения (3.51)–(3.54) составляют полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучего гелия с точностью до членов второго порядка w^2 . Остается дополнить эту систему граничными условиями. Известно, что на любой твердой поверхности должна обращаться в нуль перпендикулярная к этой поверхности компонента потока массы, т.е.

$$\mathbf{j}_\perp = 0. \quad (3.55)$$

Что касается граничных условий, налагаемых на \mathbf{v}_n , надо учесть, что нормальное движение есть в действительности движение «газа» элементарных тепловых возбуждений в нем. При движении вдоль твердой поверхности кванты возбуждения взаимодействуют с ней, что должно быть описано макроскопически как «прилипание» нормальной части массы жидкости к стенке,

подобно тому как это имеет место для обычных вязких жидкостей. Другими словами, на твердой поверхности должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости \mathbf{v}_n

$$\mathbf{v}_{n\parallel} = 0. \quad (3.56)$$

Что касается перпендикулярной к стенке компоненты $\mathbf{v}_{n\perp}$, то надо иметь в виду, что кванты возбуждения могут поглощаться или испускаться твердым телом — это соответствует просто теплопередаче между жидкостью и твердым телом. Поэтому перпендикулярная к стенке компонента скорости $\mathbf{v}_{n\perp}$ не должна непременно обращаться в нуль; граничное условие требует лишь непрерывности перпендикулярной к стенке компоненты потока тепла. Это может быть сформулировано в следующем виде:

$$\rho T S \mathbf{v}_{n\perp} = Q_{heat}, \quad (3.57)$$

где Q_{heat} тепловой поток на границе. Температура же испытывает на границе скачок, пропорциональный тепловому потоку: $\Delta T = Kq$, с коэффициентом пропорциональности, зависящим от свойств как жидкости, так и твердого тела. Имеются два механизма для появления этого скачка. Один из них связан с особенностями теплообмена на границе Не II - твердое тело. Это так называемое сопротивление Капицы [6], [51] теория которого разработана Халатниковым [52]. Другой источник температурного скачка связан с формированием потока тепла $\rho T S \mathbf{v}_{n\perp}$ в пристеночном слое жидкости (см. параграф 3.7. Примеры диссипативных течений). Хотя данный вопрос может быть рассмотрен как отдельная гидродинамическая задача, конечный результат может быть сформулирован как добавочное температурное сопротивление, детали будут описаны в разделе далее. в параграфе 3.7.

3.3 Гидродинамика сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных процессов.

В реальной ситуации, всегда имеются градиенты различных физических величин, необратимые потоки тепла, импульса, энергии и так далее. Для учета этих необратимых потоков (и, соответственно, диссипативных процессов) в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости, следует ввести дополнительные члены, в первом приближении линейные по пространственным производным скоростей и температуры. Вид этих членов может быть установлен однозначным образом исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии и принципом симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. Следуя [1],[46] перепишем (3.24)–(3.27) дополненными неизвестными пока членами, ответственными за диссипативные процессы, мы обозначаем

их верхним индексом "d"

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Pi_{ik}^d}{\partial x_k} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n] = \frac{R}{T}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla (\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \varphi^d) = 0 \quad (3.61)$$

Кратко прокомментируем выписанные уравнения. Уравнение для потока импульса (3.59) содержит дополнительный член, связанный с тем что при существующих градиентах скорости возможен неравновесный поток импульса причем как поперечная, так и продольная составляющие. Аналогично выглядеть ситуация для сверхтекучей скорости, там тоже возможны неравновесные потоки импульсов в случае возникновения градиентов (очевидно, только продольные). При наличии диссипативных потоков, разумеется, не сохраняется энтропия, возникает диссипативная функция R , производящая тепло. Все остальные величины входящие в уравнения (3.59)-(3.61) и не имеющие индекс "d" имеет тот же самый вид как и в предыдущем параграфе, когда мы имели дело с бездиссипативным случаем. Это означает, что диссипативные слагаемые в уравнениях (3.59)-(3.61) должны рассматриваться как малые поправки или первые слагаемые в рамках теории возмущений.

Дальнейший ход вычислений совпадает с подходом, используемым в предыдущем параграфе (см. также [1],[46]). Первый шаг, который мы должны сделать - это выписывать уравнение для сохранения энергии, в котором мы также вводим дополнительные слагаемые, связанные с необратимым потоком энергии.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^d] = 0, \quad (3.62)$$

Далее, как и в бездиссипативном случае. дифференцируем энергию $E = E(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ по времени и выражаем все производные от термодинамических величин, \mathbf{j} и \mathbf{v}_s по времени, используя уравнения.(3.59)-(3.61). Поскольку бездиссипативные слагаемые без индекса "d" те же самые, что и в предыдущем параграфе, то происходит значительное сокращение всех членов за исключением связанных с неравновесными процессами. В результате получим следующее уравнение

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n] \right) = \nabla [Q^d + \rho_s \mathbf{w} \varphi^d - \Pi^d \mathbf{v}_n] + \varphi^d \nabla \rho_s \mathbf{w} - \Pi_{ik}^d \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k}. \quad (3.63)$$

Используя аргументы, близкие к выводу диссипативных уравнений в случае классических жидкостей (смотри, например, [46]), можно сразу выписать добавочные диссипативные члены, которые обеспечивают рост энтропии в неравновесных процессах

$$\Pi_{ik}^d = -\eta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{v}_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_{nl}}{\partial x_l} \right) - \delta_{ik} [\varsigma_1 \operatorname{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \varsigma_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n]; \quad (3.64)$$

$$\varphi^d = \varsigma_3 \nabla(\rho_s \mathbf{w}) + \varsigma_4 \nabla \mathbf{v}_n, \quad (3.65)$$

$$Q^d = -\varphi^d \rho_s \mathbf{w} + \Pi^d \mathbf{v}_n - \chi \nabla T. \quad (3.66)$$

Величины η , ς_1 , ς_2 , ς_3 , ς_4 , χ являются кинетическими коэффициентами. Коэффициент η отвечает за сдвиговую вязкость, и он, естественно, связан только с нормальным движением. Величина χ является коэффициентом теплопроводности. Величины ς_1 , ς_2 , ς_3 , ς_4 имеют смысл коэффициентов второй вязкости. В силу принципа симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов (см., например, [37]) имеет место соотношение

$$\varsigma_1 = \varsigma_4. \quad (3.67)$$

Для обеспечения роста энтропии кинетические коэффициенты η , ς_2 , ς_3 , χ должны быть положительными, а ς_1 , удовлетворять неравенству

$$\varsigma_1^2 < \varsigma_2, \varsigma_3. \quad (3.68)$$

Выпишем в окончательном виде уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных процессов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) + \delta_{ik} [\zeta_1 \nabla(j - \rho v_n) + \zeta_2 \nabla v_n] \right], \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n] = \nabla \cdot \frac{\chi \nabla \cdot T}{T} + \frac{R}{T}, \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}) = \nabla \cdot [\zeta_3 \nabla \cdot (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \nabla \cdot \mathbf{v}_n]. \quad (3.72)$$

Диссипативная функция, описывающая производство энтропии, равна

$$R = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta_2 (\nabla \mathbf{v}_n)^2 \quad (3.73)$$

$$+ \zeta_3 (\nabla(\rho_s \mathbf{w}))^2 + 2\zeta_1 \nabla(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \nabla \mathbf{v}_n + \frac{\chi (\nabla \cdot T)^2}{T}.$$

3.4 Гамильтонова форма уравнений движения квантовой жидкости.

Альтернативой недиссипативной системе (3.24)–(3.27) с определениями (3.41)–(3.44), является представление уравнений движения в так называемой гамильтоновой форме. Метод гамильтонова формализма является очень эффективным для изучения нелинейных волн. Для He II гамильтониан представление уравнений движения получено в статье Покровского и Халатникова [53] (смотрите также обзорную статью [54]). Гамильтонов метод применим к широкому классу слабо диссипативных волновых систем. Одним из самых главных преимуществ гамильтонова подхода является высокая степень стандартизации и универсализма задач из совершенно различных областей физики. Особенно это важно для исследования нелинейных волн, такой подход дает возможность рассматривать любые нелинейные процессы с единых позиций без фиксации их особенностей, связанных с конкретной средой.

Проблема гамильтоновской структуры гидродинамических уравнений [55],[56] является довольно нетривиальной задачей. Обычно гамильтоновские переменные выражаются через естественные физические переменные (такие, например, как скорость или давление) нестандартным образом. Одним из наиболее прямых и физически мотивированных путей получить гамильтонову форму уравнений является использование вариационного принципа. Опишем, как эта задача решалась в классической гидродинамике, а затем перейдем к случаю квантовых жидкостей

3.4.1 Принцип наименьшего действия. Баротропная безвихревая жидкость

В отличие от обычной механики использование вариационного принципа для задач гидродинамики имеет множество специфических черт. Мы стартуем с работы Давыдова [57], в которой он развил данный аппарат для баротропной жидкости, то есть когда плотность внутренней энергии не зависит от энтропии, $E(\rho, S) \equiv E(\rho)$. Ассоциируя кинетическую энергию движущейся жидкости с $\rho \mathbf{v}^2/2$, а потенциальную со внутренней энергией жидкости $E(\rho)$,

запишем действие \mathcal{S} в следующем виде

$$\mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E(\rho) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \quad (3.74)$$

Варьируя действие \mathcal{S} (3.74) по переменным \mathbf{v} и ρ , получим

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \rho} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (3.75)$$

То есть прямое использование принципа наименьшего действия приводит к парадоксальному результату, что жидкость покоится. Причина "парадокса" в том, что нельзя независимо варьировать по скорости и плотности независимо, поскольку они связаны между собой уравнением непрерывности. Один из вариантов преодолеть эту проблему состоит в том, что можно, например, выразить плотность ρ через скорость \mathbf{v} из уравнения непрерывности и варьировать по скорости. Такой путь, однако, очень сложен и зачастую невозможен. Мы используем другой способ, известный в вариационном исчислении систем со связями, так называемый метод множителей Лагранжа. Для этой цели мы будем рассматривать следующий функционал.

$$\mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E_0(\rho, S_0) + \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \quad (3.76)$$

Тогда, варьируя по величине α , получим соотношение, которое совпадает с уравнением непрерывности

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \alpha} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) = 0. \quad (3.77)$$

Мы назовем пару (α, ρ) каноническими переменными, смысл этого термина будет ясен из дальнейшего изложения.

Чтобы проварьировать по скорости \mathbf{v} сначала применим интегрирование по частям к уравнению (3.76), и, как это принято в вариационном исчислении, отпустим полную производную

$$\mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E_0(\rho, S_0) + \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot (\rho \nabla \alpha) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \quad (3.78)$$

Тогда вариация по скорости \mathbf{v} дает

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \alpha = 0, \quad (3.79)$$

и мы получаем, что α есть не что иное как потенциал скорости, т.е.

$$\mathbf{v} = \nabla \alpha. \quad (3.80)$$

Варьирование по плотности ρ приводит следующему соотношению

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \rho} = \frac{(\nabla \alpha)^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_S - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \mathbf{v}(\nabla \alpha) = 0, \quad (3.81)$$

Или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_S \right) = 0. \quad (3.82)$$

Соотношение (3.82) это обычное уравнение движения для потенциального течения, т.е. при выполнении данной процедуры вихревые течения жидкости "утрачены." Разрешение парадокса опять-таки в том, что при процедуре варьировании не учитывалась еще какая то связь между переменными ("constraint".)

3.4.2 Вихревые баротропные движения.

Чтобы найти недостающую связь, вспомним что в жидкости справедлива теорема Томсона-Кельвина, согласно которой циркуляция скорости

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l} \quad (3.83)$$

по жидкому контуру сохраняется. Иными словами, циркуляция скорости переносится вместе с жидкостью, и можно сказать что существует некая скалярная функция, связанная с вихревым движением, для которых существует закон сохранения следующего вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) = 0. \quad (3.84)$$

Применяя опять метод множителей Лагранжа, рассмотрим следующий функционал.

$$\mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E_0(\rho, S_0) + \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \right) + \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{v} \right) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \quad (3.85)$$

Пара (γ, f) является также каноническими переменными. Варьирование по лагранжевым множителям α и γ приводит к уравнению непрерывности для плотности ρ и для величины f

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0, \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{v} = 0. \quad (3.87)$$

Чтобы проварьировать по скорости \mathbf{v} сначала применим интегрирование по частям к действию \mathcal{S} (3.85)

$$\mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E(\rho) + \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{v}(\rho \nabla \alpha) + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} - \mathbf{v} (f \nabla \gamma) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \quad (3.88)$$

Варьируя действие \mathcal{S} (3.88) по скорости \mathbf{v} , получим

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \alpha - f \nabla \gamma = 0. \quad (3.89)$$

Вариация по переменной f приводит к следующему результату

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta f} = -\dot{\gamma} - \mathbf{v} \nabla \gamma = 0, \quad (3.90)$$

который говорит о том что переменная γ переносится вместе с жидкими частицами. Соотношение (3.89) дает следующее представление для скорости (сравните с безвихревым случаем (3.80))

$$\mathbf{v} = \nabla \alpha + (f/\rho) \nabla \gamma = \nabla \alpha + \eta \nabla \gamma, \quad (3.91)$$

где введена новая переменная $\eta = (f/\rho)$. Величина η удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \eta = 0, \quad (3.92)$$

т.е. она также переносится с жидкими частицами. Пара (f, η) называются переменными Клебша (смотри [58]). Соответствующие канонические переменные для несжимаемой жидкости были впервые представлены Клебшем в прошлом веке (см. подробно об этом в книге [58]). Независимо Бейтман [59], а позже Давыдов [[57]] ввел канонические переменные для небаротропных потоков.

Легко видеть что пара (f, η) ответственна за вихревые движения жидкости. Действительно, применяя к уравнению (3.91) операцию $\nabla \times$ можно вычислить завихренность жидкости $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(f/\rho) \times \nabla \gamma = \nabla \eta \times \nabla \gamma. \quad (3.93)$$

Глобальное определение переменных Клебша не всегда возможно, так как представление (3.91) требует чтобы спиральность (helicity) H , определенная как

$$\mathcal{H} = \int \mathbf{v}(\nabla \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} \quad (3.94)$$

была равна нулю (см., например, [60]).

Перейдем к выводу уравнения движения для скорости \mathbf{v} . Варьируя уравнение (3.88) по плотности ρ имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right) \right) - \mathbf{v}(\nabla \alpha) = 0. \quad (3.95)$$

Подставляя в (3.95) величину $\nabla \alpha = \mathbf{v} - \eta \nabla \gamma$ взятую из соотношения (3.91), получим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right) \right) - \mathbf{v}(\mathbf{v} - \eta \nabla \gamma) = 0. \quad (3.96)$$

Объединяя соотношение (3.96) и производную по времени от соотношения (3.91), после некоторых вычислений получим следующий результат

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_s \right) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (3.97)$$

здесь использовано, что $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \eta \times \nabla \gamma$ (см. уравнение (3.93)). Учитывая, что

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad (3.98)$$

мы приходим к обычному гидродинамическому уравнению, описывающему произвольные, в том числе вихревые течения в баротропной жидкости.

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_s = 0. \quad (3.99)$$

3.4.3 Небаротропные движения

Следующий шаг, который необходимо сделать перед тем как перейти к сверхтекучей жидкости, мы должны включить возможность выбора зависимости энергии от энтропии $E(\rho) \rightarrow E(\rho, S)$. Используя уже стандартный прием, мы должны, во первых, выписать уравнение сохранения энтропии

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \right) = 0, \quad (3.100)$$

а, во-вторых, включить это уравнение с соответствующим множителем Лагранжа в выражение для полного действия

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - E(\rho, S) + \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \right) + \right. \\ \left. + \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{v} \right) + \beta \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \right) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Схема дальнейших вычислений повторяет схему, развитую в предыдущем пункте. Варьируя действие (3.101) по скорости \mathbf{v} , мы приходим к представлению для скорости в канонических переменных (α, ρ) , (γ, f) , (β, S) (сравните с (3.91) и (3.80))

$$\mathbf{v} = \nabla \alpha + (S/\rho) \nabla \beta + (f/\rho) \nabla \gamma. \quad (3.102)$$

Вариация действия \mathcal{S} по переменной β дает уравнение сохранения энтропии (3.100), в то время как вариации по энтропии приводит к уравнению для эволюции величины β .

$$\dot{\beta} = - \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) - \mathbf{v} \nabla \beta. \quad (3.103)$$

Формула для завихренности, обобщающая (3.93) для небаротропных течений, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(S/\rho) \times \nabla \beta + \nabla(f/\rho) \times \nabla \gamma \quad (3.104)$$

Варьируя уравнение (3.101) по плотности ρ , и используя (3.102) получим "небаротропный" вариант уравнения (3.96)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right) \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - (f/\rho) \nabla \gamma - (S/\rho) \nabla \beta) = 0. \quad (3.105)$$

Как и в предыдущем пункте, объединяя соотношение (3.105) и производную по времени от соотношения (3.102), после громоздких вычислений получим уравнение движения в форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_s \right) - \frac{S}{\rho} \nabla \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla(S/\rho) \times \nabla \beta + \nabla(f/\rho) \times \nabla \gamma) = 0. \quad (3.106)$$

В силу соотношения (3.14) имеет место равенство

$$\nabla \left(-\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_s \right) - \frac{S}{\rho} \nabla \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.107)$$

Используя далее, что $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla(S/\rho) \times \nabla\beta + \nabla(f/\rho) \times \nabla\gamma$, и тождество (3.98), приведем уравнение к виду

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad (3.108)$$

полностью совпадающему с уравнением классической гидродинамики (смотри, например [46])

3.4.4 Принцип наименьшего действия в сверхтекучей жидкости.

3.4.5 Вариация действия

Используя разработанный выше аппарат, легко реализовать принцип наименьшего действия и получить уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. [14]. Запишем действие \mathcal{S}_{He} движущейся сверхтекучей жидкости в следующем виде.

$$\mathcal{S}_{He} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 - E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0) \right\} d^3\mathbf{r} dt = \int \mathcal{L} dt. \quad (3.109)$$

Напомним, выражение $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ в фигурных скобках в средней части равенства (3.109) эт.е. энергия системы в системе отсчета, движущейся со скоростью сверхтекучий компоненты \mathbf{v}_s (смотри формулу (3.31)). В отличие от классической жидкости, кинетическая энергия содержит кроме слагаемого $\frac{\rho \mathbf{v}_s^2}{2}$ также и новое, специфическое для двухскоростной гидродинамики слагаемое $\mathbf{v}_s \mathbf{j}_0$. В духе выполненных в предыдущем пункте вычислений, мы должны ввести следующие связи: уравнение переноса массы (уравнение непрерывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.110)$$

уравнение потока для энтропии

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_n) = 0, \quad (3.111)$$

и уравнение для переменной Клебша.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}_n) = 0. \quad (3.112)$$

Причём, в то время как сохранение массы связано с общим потоком жидкости \mathbf{j} , перенос энтропии, равно как переменных Клебша, предполагается,

осуществляется переносятся только нормальной скоростью \mathbf{v}_n . Действительно, вихревое движение в сверхтекучей жидкости, как мы помним, связано только с нормальной компонентой, движение сверхтекучей компоненты всегда потенциально, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ (еще раз напомним, в этой части, мы не рассматриваем вопросы квантовых вихрей).

Как и ранее, мы учтем наложенные на систему связи с помощью множителей Лагранжа, в результате чего действие (3.109) преобразуется к следующему виду

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{He} = \int \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 - E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0) + \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} \right) \right. \\ \left. + \beta \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v}_n \right) + \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{v}_n \right) \right\} d^3 \mathbf{r} dt. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Вычислим полную вариацию от модифицированного действия (3.113). Опуская все полные производные по времени и пространству, имеем.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{He} = \int d^3 \mathbf{r} dt \left\{ \delta \mathbf{v}_s \left(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s - \frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_s} \right) \right. \\ \left. + \delta \mathbf{v}_n \left(S \nabla \beta - f \nabla \gamma - \frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_n} \right) + \delta \rho \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \rho} \right) - \dot{\alpha} - \mathbf{v}_s \nabla \alpha \right) \right. \\ \left. \left\{ + \delta \mathbf{j} (\mathbf{v}_s - \nabla \alpha) + \delta S (-T - \dot{\beta} - \mathbf{v}_n \nabla \beta) + \delta f (-\dot{\gamma} - \mathbf{v}_n \nabla \gamma) \right\} \right. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Мы не стали выписывать вариации по переменным α, β, γ , поскольку они тривиальным образом приводят к уравнениям (3.110)-(3.112).

Ввиду независимости переменных, по которым происходит варьирование в (3.114), обращение в нуль полной вариации $\delta \mathcal{S}_{He}$ эквивалентно обращению в нуль всех комбинаций в круглых скобках в подинтегральном выражении. Выпишем и проанализируем их

$$\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s - \frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_s} = 0, \quad (3.115)$$

$$S \nabla \beta - f \nabla \gamma - \frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_n} = 0, \quad (3.116)$$

$$\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \rho} \right) - \dot{\alpha} - \mathbf{v}_s \nabla \alpha = 0, \quad (3.117)$$

$$\mathbf{v}_s - \nabla \alpha = 0, \quad (3.118)$$

$$-T - \dot{\beta} - \mathbf{v}_n \nabla \beta = 0, \quad (3.119)$$

$$-\dot{\gamma} - \mathbf{v}_n \nabla \gamma = 0. \quad (3.120)$$

Уравнение (3.118) говорит о том, что скорость \mathbf{v}_s является градиентом некоторой величины $\mathbf{v}_s = \nabla \alpha$, т.е. сверхтекучее движение является потенциальным, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Таким образом мы получили условие потенциальности течения сверхтекучей компоненты абсолютно не делая такого предположения заранее. Как и при выводе уравнений движения с помощью законов сохранения, условие потенциальности сверхтекучей скорости и предположения что энтропия переносится нормальной компонентой оказываются тесно связаны друг с другом.

Подставив $\mathbf{v}_s = \nabla \alpha$ в уравнение (3.117) и применив операцию ∇ получим стандартное уравнение для сверхтекучей скорости

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) = 0. \quad (3.121)$$

Чтобы двинуться дальше, заметим, что энергия E_0 в движущейся системе отсчета зависит от величины \mathbf{j}_0 , или же от $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Поэтому

$$\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_s} = - \frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{v}_n}. \quad (3.122)$$

Воспользовавшись соотношением (3.122), исключим из условий (3.115)-(3.120) параметры f, β и γ . После некоторых вычислений, мы придем к следующему уравнению ([61])

$$\frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t} + \mathbf{j}_0 \nabla \mathbf{v}_n + \nabla (\mathbf{j}_0 \mathbf{v}_n) - \mathbf{v}_n \times (\nabla \times \mathbf{j}_0) + S \nabla T = 0, \quad (3.123)$$

которое идентично уравнению (3.45)

Таким образом, стартуя от принципа наименьшего действия мы получили полную систему уравнений движения сверхтекучей жидкости, совпадающую с уравнениями, полученными ранее другими способами.

3.4.6 Гамильтонова форма уравнений сверхтекучей гидродинамики

Предполагая пары (ρ, a) , (S, β) и (f, γ) канонически сопряженными переменными в соответствии с общим правилом перейдем к гамильтониану \mathcal{H} движущейся сверхтекучей жидкости

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \int \left\{ \alpha \frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta \frac{\partial S}{\partial t} + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \right\} d^3 \mathbf{r}. \quad (3.124)$$

На основе гамильтониана \mathcal{H} , и введенных пар (ρ, a) , (S, β) и (f, γ) уравнения движения сверхтекучей жидкости приобретают каноническую форму [62],[53],[54]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \beta}, \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta f}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta S}. \quad (3.126)$$

Как следует из условий (3.118), (3.115) и из тождества $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s$, канонические переменные связаны с обычными "физическими" переменными следующими соотношениями

$$\mathbf{v}_s = \nabla \alpha, \quad \mathbf{j}_0 = S \nabla \beta - f \nabla \gamma. \quad (3.127)$$

Имея в виду соотношение (3.127), запишем гамильтониан (3.124) в канонических переменных

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{\rho (\nabla \alpha)^2}{2} + \mathbf{v}_s (S \nabla \beta - f \nabla \gamma) + E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0) \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (3.128)$$

Легко проверить что соотношение 3.125 и (3.126) с учетом связи канонических переменных с обычными переменными приводит в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости описанной в предыдущих разделах (см., (9.27)-(3.6)). Так, например

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \alpha} = -\nabla(\rho \nabla \alpha) - \nabla \mathbf{j}_0 = -\nabla(\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0) = -\nabla \mathbf{j}, \quad (3.129)$$

что совпадает с обычным уравнение непрерывности (9.27). Аналогично

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \rho} = -\left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \rho} \right)_{S, \mathbf{j}_0} \right), \quad (3.130)$$

что после взятия градиента приводит к уравнению для сверхтекучей скорости (3.6)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \mu \right) = 0 \quad (3.131)$$

Проверим для пары (S, β) , имея ввиду, что $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s$ и

$$\frac{\delta}{\delta \beta} = \frac{\delta}{\delta \mathbf{j}_0} \frac{\delta \mathbf{j}_0}{\delta \beta} \quad (3.132)$$

Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \beta} = \mathbf{v}_s \frac{\delta \mathbf{j}_0}{\delta \beta} + \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{j}_0} \right) \frac{\delta \mathbf{j}_0}{\delta \beta} = -\nabla(S\mathbf{v}_s) - \nabla(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)S = -\nabla(S\mathbf{v}_n) \quad (3.133)$$

что эквивалентно уравнению для переноса энтропии (3.5).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(S\mathbf{v}_n) = 0. \quad (3.134)$$

Аналогичные выкладки для сопряженного уравнения дают

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta S} = \mathbf{v}_s \frac{\delta \mathbf{j}_0}{\delta S} + \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial \mathbf{j}} \right) \frac{\delta \mathbf{j}_0}{\delta S} - \left(\frac{\partial E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)}{\partial S} \right) = \mathbf{v}_s \nabla \beta - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \nabla \beta - T \quad (3.135)$$

что эквивалентно уравнению (3.119).

Что касается пары (f, γ) , то соответствующие вычисления приводят к стандартным выражениям для переменных Клебша. (см. (3.112), (3.120)).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{v}_n = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{v}_n \nabla \gamma = 0. \quad (3.136)$$

Заметим, что уравнения Гамильтона для классической жидкости имеют тот же вид, как 3.125 и (3.126), если положить в них $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s = \mathbf{v}$. Имеется однако одно важное отличие. Поскольку в классической гидродинамике существует пять независимых величин (ρ , S , и вектор \mathbf{j}), то из шести гамильтоновых уравнений следует, что одна из величин, например f не является независимой. В двухскоростной гидродинамике добавляется новая переменная \mathbf{v}_s , формально трехкомпонентный вектор, но ввиду потенциальности сверхтекучего движения, независимой является только одна компонента. Поэтому в двухскоростной гидродинамике все канонические функции являются независимыми.

Как будет показано в главах, посвященных нелинейным волнам, гамильтонов формализм является мощным методом для исследования задач нелинейной акустики, он позволяет практически формально использовать известные результаты и переносить их на другие системы. Это, конечно, не единственное применение гамильтонова формализма, например, Покровским и Халатниковым [62],[53] на основе канонических уравнений доказана теорема о сохранении величины $\nabla \times (\mathbf{j}_0/S)$, важной для различных приложений.

3.5 Гамильтонова форма уравнений и нелинейная акустика

В задачах акустики рассматриваются только невихревые течения, поэтому пару (f, γ) мы опустим. Далее, в духе акустических задач следует разложить гамильтониан H (3.128) (без пары (f, γ)) по степеням отклонения от равновесия $\delta\rho, \delta S, \nabla\alpha, \nabla\beta$, причем линейные члены следует опустить

$$H = \int \left\{ \frac{(\rho + \delta\rho)(\nabla\alpha)^2}{2} + (\nabla\alpha)(S + \delta S)\nabla\beta \right\} d^3\mathbf{r} + \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho^2} (\delta\rho)^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho\delta S} \delta\rho\delta S + \dots \right\} d^3\mathbf{r}. \quad (3.137)$$

В качестве следующего шага следует перейти к Фурье компонентам переменных величин. Продемонстрируем эту технику на примере слагаемого в (3.137), содержащего комбинацию $\delta\rho\delta S$

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho^2} (\delta\rho)^2 \right\} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho^2} \right\} \delta\rho(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} \delta S(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2. \quad (3.138)$$

Группируя члены в экспоненте, получим

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho^2} \right\} \delta\rho(\mathbf{k}_1) \delta S(\mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2. \quad (3.139)$$

Поскольку подынтегральное выражение не зависит от координаты, трехмерный интеграл по координате $d^3\mathbf{r}$ дает дельта функцию $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, в результате чего изучаемое выражение приобретает следующий вид

$$\int \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 E_0}{\delta\rho^2} \right\} \delta\rho(\mathbf{k}_1) \delta\rho(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 = \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta\mu}{\delta\rho} \right\} \delta\rho(\mathbf{k}) \delta\rho(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}. \quad (3.140)$$

Аналогичное положение возникает для остальных слагаемых, а также для членов более высокого порядка малости, например для слагаемого, содержащего тройное произведение $(\delta\rho)^2\delta S$, результат будет таким

$$\int \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 H}{\delta\rho^2} \right\} \delta\rho(\mathbf{k}_1) \delta\rho(\mathbf{k}_2) \delta S(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_3. \quad (3.141)$$

Сходная ситуация будет для всех остальных членов, самая характерная черта это то, что все слагаемые содержат дельта функции суммы входящих волновых векторов, $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \dots)$, это прямое следствие пространственной однородности задачи

Для исследования задач по нелинейной акустике удобно перейти от Фурье компонент переменных $\rho_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}, S_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}$ (Далее аргументы \mathbf{k} будем писать в виде индексов) к так называемым нормальным координатам, разделяющим в линейном случае первую и вторую звуковые моды (Смотри главу 4). Этот переход основан на том, что канонически сопряженные переменные вводятся неоднозначным образом, и существует целый класс преобразований, называемых каноническими от одного набора к другому, при этом уравнения движения сохраняют гамильтоновскую структуру (см. статью Захарова [55]). В частности, можно перейти к переменным, $a_{\mathbf{k}}^{(1)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}, a_{\mathbf{k}}^{(2)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}$, в которых квадратичная часть гамильтониана H_2 (отвечающая линейным уравнениям) будет диагональна по переменным, характеризующим первый и второй звуки. Переход от фурье-компонент величин $\rho_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}, S_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}$ к нормальным координатам $a_{\mathbf{k}}^{(1)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}, a_{\mathbf{k}}^{(2)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}$ выполнен в работах Покровского и Халатникова [62],[53],[63]. Выпишем его в явном виде

$$\rho_{\mathbf{k}} = A(a_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}) - B \frac{\rho}{S} \frac{u^2}{c_1^2} (a_{\mathbf{k}}^{(2)} + a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}) \quad (3.142)$$

$$\alpha_{\mathbf{k}} = A \frac{S}{\rho} (a_{\mathbf{k}}^{(1)} + a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}) + B (a_{\mathbf{k}}^{(2)} + a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}) \quad (3.143)$$

$$S_{\mathbf{k}} = A \frac{c_1}{\rho} (a_{\mathbf{k}}^{(1)} - a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}) - B \frac{c_2 \rho_n}{S \rho_s} (a_{\mathbf{k}}^{(2)} - a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}) \quad (3.144)$$

$$\beta_{\mathbf{k}} = A \frac{c_1}{S} \frac{u^2}{c_1^2} (a_{\mathbf{k}}^{(1)} - a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}) + B \frac{c_2 \rho_n \rho}{S^2 \rho_s} (a_{\mathbf{k}}^{(2)} - a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}) \quad (3.145)$$

В соотношениях (3.142)-(3.145) использованы следующие обозначения

$$A(\omega) = \left(\frac{\rho \omega}{2c_1^2} \right)^{1/2}, \quad B(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\partial T / \partial S} \right)^{1/2}, \quad u^2 = \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \quad (3.146)$$

$$\omega_{1\mathbf{k}} = c_1 |\mathbf{k}|, \quad \omega_{2\mathbf{k}} = c_2 |\mathbf{k}|, \quad (3.147)$$

c_1, c_2 скорости первого и второго звуков, смотри главу 4.

Квадратичная часть гамильтониана H_2 (отвечающая линейным уравнениям) в переменных $a_{\mathbf{k}}^{(1)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-1)}, a_{\mathbf{k}}^{(2)}, a_{-\mathbf{k}}^{(-2)}$ приобретает следующий вид

$$H_2 = \int \omega_{1\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(1)} a_{-\mathbf{k}}^{(-1)} d^3 \mathbf{k} + \int \omega_{2\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{(2)} a_{-\mathbf{k}}^{(-2)} d^3 \mathbf{k}. \quad (3.148)$$

Нормальные координаты, называемые еще комплексными амплитудами, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^\nu}{\partial t} = \text{sign}(\nu) \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{-\nu}} \quad (3.149)$$

Здесь индексы ν соответствуют (1), (-1), (2), (-2), идентифицирующими комплексные амплитуды для первого и второго звуков. В частности, если ограничиться только квадратичным гамильтонианом H_2 , то уравнение движения (например, для $a_{\mathbf{k}}^1$) будет иметь следующий вид

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^1}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{-1}} = \omega_{1\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^1, \quad (3.150)$$

с решением

$$a_{\mathbf{k}}^1 = a_0 e^{ic_1|\mathbf{k}|t} \quad (3.151)$$

Соответственно $a(\mathbf{r})$ будет описывать бегущую в одну сторону (вправо) волну со скоростью c_1

$$a(\mathbf{r}) \propto a_0 e^{ic_1|\mathbf{k}|t} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \propto a_0 e^{\omega(t-x/c_1)}. \quad (3.152)$$

Аналогичным образом находится решение для остальных комплексных амплитуд а полное решение будет линейной комбинацией найденных решений

Гамильтониан H_3 , содержащий слагаемые вплоть до членов третьего порядка малости, (что соответствует квадратичному приближению в уравнениях движения) имеет следующий вид:

$$H_3 = \int \omega_{1\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^1 a_{-\mathbf{k}}^{-1} d^3\mathbf{k} + \int \omega_{2\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^2 a_{-\mathbf{k}}^{-2} d^3\mathbf{k} + \sum_{\nu=\pm 1,2} \int V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} a_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2} a_{\mathbf{k}_3}^{\nu_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_3 \quad (3.153)$$

Коэффициенты $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{\nu_1, \nu_2}$, содержащие всю информацию о нелинейном взаимодействии волн (в данном приближении), называются матричными элементами, или вершинными частями (вершинами). Регулярным образом они могут быть вычислены из разложения полного гамильтониана H по отклонениям от равновесия (см. формулу 3.137) и последующего перехода к комплексным амплитудам $a_{\mathbf{k}}^{\nu}$. Мы не будем выписывать здесь громоздкие выражения для вершин (по мере необходимости мы их будем приводить в решении конкретных задач в дальнейших главах) отметим лишь важное обстоятельство, что все они имеют одинаковую структурную зависимость от аргументов следующего вида:

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} = (k_1 k_2 k_3)^{1/2} \left[P_1^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} + P_2^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + P_3^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} + P_4^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3}{k_1 k_3} \right], \quad (3.154)$$

т. е. являются однородными функциями волновых чисел \mathbf{k} степени $3/2$. Коэффициенты $P^{\nu_1\nu_2\nu_3}$ зависят от набора индексов $\nu_1\nu_2\nu_3$. Для различных видов нелинейных процессов в дальнейшем будет использоваться терминология, введенная в [62],[53]. Если два индекса из трех равны ± 2 , то такие процессы называются распадными. Если два индекса из трех равны ± 1 , то соответствующие процессы называются Черенковскими. Если наконец, все индексы равны ± 1 (или ± 2), то такие процессы называются собственными нелинейными процессами в первой (или второй) звуковых модах, соответственно.

3.6 Гидродинамика сверхтекучего гелия вблизи λ -точки

Система гидродинамических уравнений, в которой плотность сверхтекучей компоненты ρ_s рассматривается как заданная функция p и T , может стать непригодной вблизи λ -точки. Дело в том, что при приближении к этой точке (как и ко всякой точке фазового перехода второго рода) неограниченно возрастают время релаксации для установления равновесного значения параметра порядка (см. далее), и связанной с ним плотности сверхтекучей компоненты ρ_s . В этом случае плотность сверхтекучей компоненты подчиняется отдельному уравнению релаксационного типа, это уравнение может быть получено из общей теории поведения параметра порядка вблизи λ -точки. Вторая причина заключается в том, что в области вблизи T_λ теория сверхтекучести Ландау (включая обе ее составные части: концепцию газа элементарных возбуждений и феноменологическую двухжидкостную гидродинамику) становится неприменимой, и при решении различного рода стационарных и нестационарных задач необходимо с самого начала учитывать пространственную неоднородность и релаксацию параметра порядка — макроскопической волновой функции описывающей сверхтекучее состояние.

Одна из первых попыток описать λ -переход в сверхтекучем гелии была предпринята Гинзбургом и Питаевским [64] в духе общей теории фазовых переходов Ландау. Однако, как было показано несколько позднее Гинзбургом [65], в случае перехода в сверхтекучее состояние в гелии нельзя пренебрегать взаимодействием флуктуаций параметра порядка и, поэтому, теория Гинзбурга-Питаевского, построенная в духе самосогласованного поля, вообще говоря, не имеет области применения. Это выяснилось сразу же после первых экспериментов по измерению зависимости термодинамических величин, в частности, теплоемкости и плотности сверхтекучей компоненты. В настоящее время большое распространение получила так называемая Ψ -теория λ -перехода. Эта теория основана, как и теория Гинзбурга-Питаевского, на

разложении термодинамического потенциала в ряд по параметру порядка Ψ и ограничении конечным числом этого ряда. Для коэффициентов выбрана зависимость, которая приводит к результатам, совпадающим с экспериментальными значениями. Перенормировка этих коэффициентов учитывает вклад коротковолновых флуктуаций. Вклад длинноволновых флуктуаций, который приводит к логарифмической расходимости теплоемкости, учтен в нулевом члене в разложения. Все эти изменения делают, по крайней мере, на современном этапе непротиворечивой Ψ -теорию сверхтекучего перехода. Вопросы, связанные с феноменологической Ψ -теорией λ -перехода можно найти в обзорной статье Гинзбурга и Собянина [66].

Уравнения гидродинамики вблизи λ -перехода на основе теории, Гинзбурга-Питаевского были получены Питаевским [67]. Эти же уравнения на основе Ψ -теории представлены в статьях [68],[66]. Мы изложим в некотором смысле "универсальный" вариант теории, не приписывая какую-либо определенную зависимость термодинамическому потенциалу или внутренней энергии $E_0(\rho, S, |\Psi(\mathbf{r})|^2)$ от параметра порядка. Вариант с перенормированными коэффициентами легко может быть получен, если всем коэффициентам, входящим в разложение энергии по параметру порядка приписать нужную зависимость от температуры, как это сделано при построении Ψ -теории сверхтекучего перехода.

Основную роль в обсуждаемой теории играет одночастичная макроскопическая волновая функция, или параметр порядка $\Psi(\mathbf{r}, t)$, определяемый как

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \zeta(\mathbf{r}, t) \exp(i\phi(\mathbf{r}, t)). \quad (3.155)$$

Фаза волновой функции $\phi(\mathbf{r}, t)$ (3.155) связана со скоростью сверхтекучего движения \mathbf{v}_s следующим образом

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \quad (3.156)$$

а плотность сверхтекучей компоненты $\rho_s(\mathbf{r}, t)$ как

$$\rho_s(\mathbf{r}, t) = m|\Psi|^2. \quad (3.157)$$

Рассмотрим однородный случай при отсутствии течения нормальной компоненты, $\mathbf{v}_n = 0$. Тогда внутренняя энергия может быть записана следующим образом

$$E = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi(\mathbf{r})|^2 + E_0(\rho, S, |\Psi(\mathbf{r})|^2) \right]. \quad (3.158)$$

Выбор формы градиентного члена в (3.158) диктуется требованием инвариантности (энергия E является скаляром), квантово-механической аналогией,

а также тем, что в случае отсутствия градиентов плотности $\nabla\rho_s = 0$, мы приходим к выражению для плотности кинетической энергии $\rho_s \mathbf{v}_s^2/2$. Далее, обратите внимание на второе слагаемое. Энергия E в неподвижной системе отсчета и однородной неподвижной системе отсчета в обычном случае, описанном выше, зависела только от плотности ρ и энтропии S . Здесь же мы добавили дополнительный, третий аргумент $|\Psi(\mathbf{r})|^2 \propto \rho_s$. Ранее плотность сверхтекучей компоненты ρ_s сама была равновесной функцией плотности ρ и энтропии S , и поэтому этот дополнительный аргумент должен был опущен. Вблизи λ -перехода, однако, ввиду того, что время релаксации чрезвычайно большое, ρ_s не является равновесной функцией обозначенных аргументов, а является независимой переменной, поэтому мы его внесли в качестве дополнительного аргумента в величину $E_0(\rho, S, |\Psi(\mathbf{r})|^2)$.

Изложенные выше рассуждения касались квантовой жидкости, находящейся либо в покое, либо в стационарном сверхтекучем движении. Очевидно, что теория сверхтекучести вблизи λ -точки должна также применяться в тех случаях, когда имеется движение не только сверхтекучей компоненты, но также и нормальной составляющей He II, движущейся со скоростью \mathbf{v}_n . В этом случае, в системе отсчета K' , где нормальная компонента покоится, движение чисто сверхтекучее, и к нему может быть применена вся теория, изложенная выше. Это означает, что плотность энергии в системе отсчета K' принимает ту же самую форму (3.158), как и в покоящейся жидкости. Чтобы получить выражение для энергии в лабораторной системе отсчета K , мы должны осуществить преобразование Галилея. Для этого воспользуемся преобразованием Галилея для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (см, например, [69])

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi'(\mathbf{r} - \mathbf{v}_n t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} m \mathbf{v}_n \mathbf{r}\right). \quad (3.159)$$

Применив преобразование (3.159) в соотношении (3.158), получаем

$$E = \int dr \left[\frac{m}{2} \left| \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right) \Psi(\mathbf{r}) \right|^2 + E_0(\rho, S, |\Psi(\mathbf{r})|^2) \right] \quad (3.160)$$

Варьируя интеграл (3.160) по величине $\Psi^*(\mathbf{r})$, получаем искомое уравнение для равновесного $\Psi_{eq}(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\delta E}{\delta \Psi^*(\mathbf{r})} = \frac{m}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 \Psi_{eq}(\mathbf{r}) + \frac{\partial E_0(\rho, S, |\Psi_{eq}(\mathbf{r})|^2)}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \Psi_{eq}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.161)$$

Таким образом, равновесное значение параметра порядка $\Psi_{eq}(\mathbf{r})$ может быть получено из решения уравнения (3.161). Величина $\Psi_{eq}(\mathbf{r})$ она может быть использована для различных стационарных ситуаций, в которых плотность

ρ_s и другие величины изменяются под влиянием внешних полей (гравитационного, электрического, магнитного, поля сил Ван дер Ваальса (вблизи стенок и пленках) и т.д. Сюда же можно отнести вопрос о характере изменения плотности ρ_s вблизи ядра положительного и отрицательного ионов. Очень интересный класс задач возникает при изучении размерных эффектов, таких как сдвиг λ -точки $\Delta T_\lambda(d) = T_\lambda - T_\lambda(d)$ в зависимости от толщины пленки d (о пленке говорим лишь для определенности, речь может идти также щели или капилляре. Уравнение (3.161) также используется для описания квантованных вихрей вблизи λ -точки (см. подробности в [66])

В случае когда параметр порядка отличается от равновесного $\Psi_{equil}(\mathbf{r})$, левая часть уравнения (3.161) не равняется нулю и происходит релаксация величины $\Psi(\mathbf{r}, t)$ к равновесному значению. Поскольку речь идет о квантово-механической системе, эволюцию параметра порядка запишем, по аналогии с квантовой механикой, в следующем виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{L} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.162)$$

Релаксационные процессы, в принципе, являются необратимыми, соответственно эволюция должна иметь диссипативный характер, и оператор \hat{L} должен содержать антиэрмитову часть. Этот процесс отвечает за несохранение энергии, следуя книге [70], мы назовем такую эволюцию аристотелевой (как известно, Аристотель считал, что любое движение должно быть диссипативным). Антиэрмитову часть уравнения движения легко найти из следующих соображений. Предположим что отклонение от равновесия мало, тогда можно считать левую часть уравнения (3.161) (которая отлична от нуля) малой величиной. Раскладывая далее (3.162) по этой величине, и ограничиваясь первым членом запишем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\Lambda \left\{ \frac{m}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \frac{\partial E_0}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \right\} \Psi(\mathbf{r}). \quad (3.163)$$

Здесь Λ — некоторый безразмерный коэффициент, пропорциональный обратному времени релаксации. Эрмитову часть оператора \hat{L} можно по аналогии с уравнением Шредингера записать в виде (см. оригинальную статью Питаевского [67])

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U. \quad (3.164)$$

Здесь "потенциал" U равен

$$\left(\frac{\partial E_0}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \right)_{\rho_n, S} = m \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_\rho + m \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right)_{\rho_s}. \quad (3.165)$$

Окончательно получаем следующее уравнение для эволюции параметра порядка $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (см. [67],[66]):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + (\mu + \mu_s) m \Psi(\mathbf{r}, t) - i\Lambda \left\{ \frac{m}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 \Psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial E_0}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \right\} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.166)$$

где введено обозначение

$$\mu_s = \left(\frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, S}. \quad (3.167)$$

Если вспомнить полярное представление (3.155)-(3.157) для параметра порядка $\Psi(\mathbf{r}, t)$, то можно видеть, что эволюционное уравнение (3.166) имеет составляющую для сверхтекучей скорости \mathbf{v}_s и плотности сверхтекучей компоненты ρ_s . Кроме того имеются обычные уравнения двухскоростной гидродинамики: для плотности (уравнение непрерывности), совпадающее с 9.27 для плотности импульса в обычном виде (3.4). Также имеется уравнение для потока энтропии, совпадающее с (3.5). Полностью эта громоздкая система уравнений выписана в оригинальной работе Питаевского [67] и в книге Халатникова [1], а также (в контексте Ψ -теории) в обзоре Гинзбурга и Собянина [66]).

В большинстве обычных задач гидродинамики, таких как задачи обтекания, противотечение, теплообмен или акустические волны (см. далее), градиенты входящих переменных, характеризующих эти течения, малы

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{m}{\hbar} v_s, \quad (3.168)$$

а изменения во времени медленны

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right) \rho_s. \quad (3.169)$$

В этом случае можно приближенно положить

$$\mathbf{v}_s = \frac{i\hbar}{m} \nabla \Psi \quad (3.170)$$

и уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи λ - точки сводятся к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.171)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (3.172)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n] = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right]^2 \rho_s, \quad (3.173)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla (\mu + \mu_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2}) = 0. \quad (3.174)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_s \mathbf{v}_s] = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right] \rho_s, \quad (3.175)$$

В уравнениях (3.172)- (3.175) опущены вязкие и теплопроводные члены, так как их вклад в диссипацию по сравнению с релаксационным механизмом незначителен.

Система уравнений (3.171)- (3.175) сохраняет главное свойство динамики сверхтекучих жидкостей, а именно, она описывает двухскоростную гидродинамику. Существенное отличие, однако, это то, что в отличие от обычной ситуации, сверхтекучая компонента не есть равновесная термодинамическая переменная, зависящая только от, скажем, давления и температуры $\rho_s(p, T)$, а является независимой переменной, подчиняющейся "собственному" уравнению релаксационного типа

Резюмируя выводы выполненные в предыдущих параграфах, можно констатировать, что, с одной стороны, что гидродинамика сверхтекучей жидкостью является несомненно разделом классической гидродинамики с некоторыми специфическими чертами. В ней применимы все идеи, которые развиваются в классической гидродинамике, такие как законы сохранения, кинетика и динамика континуума, принцип наименьшего действия и т.д. С другой стороны, существуют принципиально новые качества, исходящие из квантово механических свойств, которые являются источниками необыкновенных физических эффектов. Таких, как, например, необычные явления, описанные в предыдущей главе. В следующем параграфе мы приведем примеры течений Не II, получающиеся из предложенных в этой главе уравнений.

3.7 Примеры решений ламинарной гидродинамики сверхтекучей жидкости

В этом разделе мы проиллюстрируем гидродинамику сверхтекучей жидкостью, изложенную в предыдущей главе с помощью некоторых задач. Поясним термин "ламинарный" используемый в названии главы. Как обсуждалось ранее, при некоторых, небольших скоростях движения квантовой жидкости наблюдается нарушение сверхтекучести и возникают условия для появления

квантовых вихрей. Появление вихрей, во-первых, приводит к дополнительной диссипации, а, во вторых, что гораздо важнее, вихревые нити развивается, образуя хаотические структуры (вихревые клубки), так называемую квантовую турбулентность. Подробно об этом явлении мы будем рассказывать во второй части монографии, сейчас отметим, что мы интересуемся безвихревыми течениями, по этой причине был использован термин "ламинарная гидродинамика." В силу малости критических скоростей, течения сверхтекучей жидкости происходит в основном в турбулентном режиме, однако ламинарные течения представляют принципиальный интерес. Во-первых, исследование ламинарных течений позволяет понять многие эксперименты и явления (по крайней мере качественно). Во-вторых, они являются основой для исследований турбулентных течений, и могут рассматриваться либо как первая итерация, либо как идеологическая основа для постановки более общих задач. Дополнительно, ламинарные течения с большими скоростями реализуются в нестационарных ситуациях, поскольку для образования вихрей требуется конечное время.

3.7.1 Противоток, линейная задача, сверхтеплопроводность

Рассмотрим частный, но очень важный случай решения уравнений, полученных в предыдущей главе. Использование термодинамического тождества (на первом этапе мы опускаем нелинейные, а также диссипативные члены), перепишем уравнения движения для импульса \mathbf{j} 3.4 и для сверхтекучей компоненты \mathbf{v}_s 3.6 в виде

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (3.176)$$

$$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \sigma \nabla T = 0. \quad (3.177)$$

Здесь D/Dt обозначает оператор $\partial/\partial t + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla)$. Из первого уравнения следует, что в отсутствии градиента давления величина потока \mathbf{j}_i не изменяется, и случае закрытого сосуда равняется нулю. Но, как следует из уравнения (3.177), даже тогда, когда нет градиента давления ∇p , в системе, будет движение, вызванное градиентом температуры ∇T . Сверхтекучая компоненты перемещается в направлении нагревателя, и нормальная компоненты движется в противоположном направлении, так что общий поток массы \mathbf{j} будет равен нулю, в соответствии с тем, что $\nabla p = 0$. Поток энергии в этом случае не равен нулю и равен $ST\mathbf{v}_n$, так как тепло переносится только нормальной компонентой. Если пренебречь малым необратимым потоком \mathbf{W}_{irr} , то поток энергии \mathbf{W} совпадает с потоком тепла Q_{heat} . Такого рода движения,

напоминающие конвекцию называют, следуя широко применяемой в настоящее время терминологии, противотоком ("counterflow"). Пример противотока изображен на Рис. 2.12.

Формально уравнение (3.177) с ненулевым ∇T и $\nabla p = 0$ описывает ускорение сверхтекучей компоненты, и, соответственно, взаимное ускорение нормальной компоненты. В рамках линейной безвихревой теории это ускорение уравнивается вязкой (Пуазейлевской) силой, действующей на нормальной компоненты. То есть нормальная составляющая выполняет Пуазейлевское течение, которое индуцирует конечный градиент давления ∇p . Условие отсутствия ускорения приводит к результату $\nabla p = S\nabla T$, совпадающий с формулой Лондона (см. главу 2 формулу 1 (2.25)). Таким образом, перепад температуры сопровождается перепадом давления, которое заставляет течь нормальную вязкую составляющую. Из этого следует, что при реализации противотока в капилляре, линейный поток тепла $Q_{heat} = ST\mathbf{v}_n$ пропорционален перепаду давления ∇p , и в соответствии с формулой Лондона, перепаду температуры ∇T . Коэффициент пропорциональности зависит от геометрии капилляра. Для трубы с радиусом a имеем

$$Q_{heat} = \frac{a^2 S^2 T}{8\eta} \nabla T, \quad (3.178)$$

который формально совпадает с обычным соотношением для потока тепла с эффективной теплопроводности $\lambda_{eff} = a^2 S^2 T / 8\eta$. Для $a \sim 0.1$ см ($T = 2$ К), получаем $\lambda_{eff} \approx 100$ Вт/см К. Следует отметить, что теплопроводность He I равна $3 \cdot 10^{-3}$ Вт/смК, а меди 5 Вт/см*°К. Таким образом, высокая теплопроводность He II может быть объяснена в рамках гидродинамики сверхтекучести. Способность He II, при воздействии малых градиентов температуры создавать движения макроскопических потоков, переносящих тепловую энергию делает его очень перспективным материалом в криогенных приложениях как идеального хладагента при низких температурах.

3.7.2 Противоток, случай больших тепловых нагрузок

В действительности ситуация оказывается гораздо сложнее, и приведенные выше формулы несправедливы в случае больших тепловых нагрузок. В этом случае приведенную задачу следует рассматривать с учетом нелинейных членов. Простые численные оценки показывают, что некоторые из них не оказывают существенного влияния на полученные результаты вплоть до потоков, равных десяткам ватт на квадратный сантиметр. Например, нелинейный член $\rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk}$ в тензоре потока импульса, который в окончательном ответе дает вклад в давление, изменяет последнее лишь на проценты.

Небольшое изменение дают и нелинейные члены, приводящие к изменению температуры. Действительно, характерный для линейного случая градиент температур ∇T . можно оценить из уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla(\mu(p, T) + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2) = 0. \quad (3.179)$$

Вспоминая, что химический потенциал как функция давления и температуры удовлетворяет соотношению $-\nabla\mu = \frac{1}{\rho}\nabla p - \sigma\nabla T$, легко видеть, что в нелинейном случае из (3.179) следует такая оценка для градиента температуры: ∇T

$$\nabla T \approx \frac{\rho_n \rho Q_{heat}^2}{\rho_s S^3 T^2}. \quad (3.180)$$

При $T \approx 1.9$ К и $Q_{heat} = 1$ Вт /см градиент температуры $\nabla T \approx 1$ К/см, что соответствует эффективной теплопроводности λ_{eff} порядка 1 Вт/смК, т.е. на два порядка меньше, чем аналогичная величина полученная в рамках линейной теории. Таким образом, обычные нелинейные члены не оказывают существенного влияния на теплообмен вплоть до тепловых потоков порядка $Q_{heat} = 1$ Вт/см

В действительности линейный закон $Q_{heat} \propto \nabla T$ (3.178) нарушается при гораздо меньших тепловых потоках, и причина этого нарушения имеет глубокую физическую природу, она связана с критическими скоростями и образованием квантованных вихрей. В частности, Gorter, Mellink [71] показали, что течение типа противотока (при приложении тепловой нагрузки) имеет место, но возникает некоторое взаимодействие между нормальной и сверхтекучей компонентами (сила взаимного трения). Преодоление действия этой силы требует больших перепадов температуры, свойство теплопроводности значительно подавляется, а линейная зависимость между ∇T и Q_{heat} заменяется следующей

$$\nabla T = \frac{A(T) \rho_n}{\sigma^4 \rho_s^3 T^3} Q_{heat}^3, \quad (3.181)$$

Здесь $A(T)$ - величина, называемая константой Гортера-Меллинка. Также возникают нелинейные отклонения градиента давления ∇p , схематически данная ситуация изображена на Рис. 3.17. Важно отметить, что за пределами критического потока двухжидкостная модель остается в силе, но ситуация становится значительно сложнее. За простой формулой Гортера-Меллинка.(3.181) скрывается грандиозная нерешенная проблема – так называемая проблема квантовой турбулентности. Эти вопросы будут подобно обсуждаться во второй части монографии. Если кратко, то возникающий механизм взаимодействия между нормальной и сверхтекучей компонентами связан с появлением

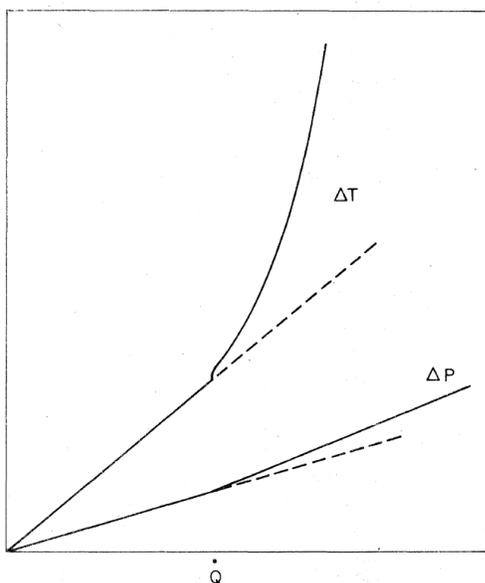


Рис. 3.17: Схематическое изображение поведения градиента давления ∇p и температуры ∇T при изменении тепловой нагрузки \dot{Q} . Четко виден переход от ламинарного движения к режиму Гортера-Меллинка (квантовая турбулентность). Рисунок взят из статьи Шварца [72]

в системе набора хаотических вихревых квантовых нитей с очень сложной динамикой и обширнейшим набором физических явлений.

3.7.3 Тангенциальные силы, действующих на поверхность тела в бездиссипативном случае

Интересным свойством граничных условий в гидродинамике сверхтекучих жидкостей является то, что теплообмен между твердым телом и движущейся жидкостью приводит к появлению тангенциальных сил, действующих на поверхность тела. В классической гидродинамике тангенциальные силы возникают в диссипативном случае, когда имеется поперечный градиент скорости, связанный с наличием сдвиговой вязкости. Тогда в "вязком" тензоре плотности потока импульса имеются слагаемые, описывающие перенос тангенциальной компоненты импульса в нормальном к поверхности направлении, что и означает наличие тангенциальных сил.

В сверхтекучих жидкостях может возникнуть аналогичный эффект даже в бездиссипативном случае, покажем это. Предположим, ось x направлена по нормали, а ось y — по касательной к поверхности, то действующая на единицу площади касательная сила равна компоненте Π тензора потока импульса (3.2). Имея в виду, что на поверхности должно быть

$$j_x = \rho_s v_{sx} + \rho_n v_{nx} = 0, \quad (3.182)$$

находим для этой силы отличное от нуля выражение

$$\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx} (v_{ny} - v_{sy}). \quad (3.183)$$

Вводя тепловой поток $Q_{heat} = ST \mathbf{v}_n$ перепишем (3.183) в виде

$$\Pi_{xy} = \frac{\rho_n}{ST} Q_{heat} (v_{ny} - v_{sy}), \quad (3.184)$$

где Q_{heat} — тепловой поток из твердого тела в жидкость.

В случае $Q_{heat} = 0$, $\Pi_{xy} = 0$, т.е. при отсутствии теплопередачи между твердой стенкой эффект исчезает и тангенциальная сила отсутствует. В этом случае граничное значение перпендикулярной к стенке компоненты v_{nx} тоже обращается в нуль, $v_{nx} = 0$. Тогда из условия $j_x = 0$ следует, что $v_{sx} = 0$. Другими словами, в этом случае мы получим обычные граничные условия идеальной жидкости для сверхтекучей компоненты и вязкой жидкости — для нормальной компоненты.

3.7.4 Пограничный тепловой слой

При выводе граничных условий (3.57) мы полагали, что нормальная компонента на твердой поверхности определяется потоком тепла $\rho T S \mathbf{v}_{n\perp} = Q_{heat}$ (см. формулу (3.57)) и что, соответственно, имеется скачок температуры. При учете диссипативных процессов эти условия нужно модифицировать таким образом, чтобы учесть сдвиговые напряжения в нормальный компоненте благодаря коэффициентам вязкости а также благодаря уравнению теплопроводности. Следствием этого обстоятельства будет то, что вместо скачков всех величин возникает некоторый переходной слой, в котором температура плавно меняется от температуры нагревателя до температуры гелия, а скорость нормальной компоненты плавно возрастает от нуля до своего равновесного значения. (эта задача была исследована Кронигом [73], смотри также книгу [2])

Здесь следует сделать следующую оговорку. На самом деле при теплообмене между гелием и твердым телом существует так называемый скачок Капицы.- явление, состоящее в том, что при передаче теплоты от твёрдого тела к жидкому гелию на границе раздела возникает разность температур ([6]). Теория этого явления была разработана Халатниковом [52], который показал, что этот скачок Капицы возникает вследствие рассогласования акустических импедансов. В нашем изложении не будем учитывать это явление, выполнив соответствующую коррекцию в определении температуры на границе гелия.

Опишем формирование протоотока - т.е. найдем поле скоростей $\mathbf{v}_n(x)$, $\mathbf{v}_s(x)$, а также поле температуры $T(x)$ вблизи стенки при подаче стационарного

теплового потока Q . Ввиду сказанного в предыдущем пункте, скачок будем считать малым, поэтому все нелинейные члены опустим (задача линейная).

Поскольку изучаемое явление имеет вид противотока, обсужденного выше, полный поток массы \mathbf{j} будем считать равным нулю, т.е.

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_s = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \mathbf{v}_n. \quad (3.185)$$

Запишем диссипативные уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости (3.69)-(3.72) в стационарном случае ($\partial/\partial t = 0$) в следующем виде

$$\nabla p = \nabla \left(-\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) - \delta_{ik} [\xi_1 \text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \xi_2 \text{div} \mathbf{v}_n] \right) = \quad (3.186)$$

$$\nabla \left(\left(-\frac{4}{3} \eta + \xi_2 + \xi_1 \rho \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} \right),$$

$$S \frac{\partial v_n}{\partial x} = \nabla \chi \frac{\nabla T}{T} \quad (3.187)$$

$$\nabla \mu = \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{S}{\rho} \nabla T = -\nabla (\xi_3 \nabla (\rho_s \mathbf{w}) + \xi_4 \nabla \mathbf{v}_n). \quad (3.188)$$

Напомним, полный поток равен нулю \mathbf{j} , поэтому уравнение (3.69) мы не включили, и относительная скорость \mathbf{w} равна $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Кроме того, задача одномерная, поэтому оператор ∇ заменяется на оператор $\partial/\partial x$. Проинтегрировав (3.186)-(3.188) один раз, и выбрав в качестве переменных $\Delta \mathbf{v}_n(x)$, $\Delta p(x)$, $\Delta T(x)$ – отклонение соответствующих величин от их значение на стенки, получим систему уравнений

$$S \Delta T(x) + \Delta p(x) + \rho(\rho \varsigma_3 - \varsigma_4) \frac{\partial \Delta v_n(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.189)$$

$$\Delta p(x) - \left(\frac{4}{3} \eta + \xi_2 + \xi_1 \rho \right) \frac{\partial \Delta v_n(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.190)$$

$$S T \Delta v_n(x) - \chi \frac{\partial \Delta T(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.191)$$

Комбинируя уравнения (3.189) с уравнением (3.190) выразим градиент скачка давления $\Delta p(x)$ через градиент скачка скорости $\Delta \mathbf{v}_n(x)$. В свою очередь, используя для скачка скорости $\Delta \mathbf{v}_n(x)$ уравнение (3.191), мы получим окончательно уравнение второго порядка для скачка температуры $\Delta T(x)$

$$S T \Delta T(x) = \Lambda \chi \frac{\partial^2 \Delta T(x)}{\partial x^2}, \quad (3.192)$$

где мы вели обозначение для комбинации кинетических коэффициентов

$$\Lambda = 2\rho\xi_4 + \frac{4}{3}\eta + \xi_2 + \xi_3\rho^2. \quad (3.193)$$

Примем, что граница находится в точке $x = 0$, а гелий занимает полупространство $x > 0$. Тогда уравнение (3.192) имеет решение следующего вида

$$\Delta T(x) = \Delta T(0) \exp(-x/\delta). \quad (3.194)$$

Здесь $\Delta T(0) = T(0) - T(\infty)$, а ширина переходной области δ равняется

$$\delta = \sqrt{\Lambda\chi/S^2T} \quad (3.195)$$

Подставляя найденное для температуры решение (3.194) в уравнение (3.191) мы получим следующее распределение скорости нормальной компоненты

$$\Delta v_n(x) = \frac{\chi}{ST\delta} \Delta T(x) = \Delta v_n(0) \exp(-x/\delta).. \quad (3.196)$$

Чтобы завершить задачу мы должны определить значение величин $\Delta T(0)$ и $\Delta v_n(0)$. Их можно найти из следующих рассуждений. На твердой поверхности скорость должна обращаться в ноль, чтобы избежать скачка скорости, диссипативные уравнения предполагают отсутствие любых скачков. Тогда теплообмен на границе должен осуществляться посредством механизма теплопроводности. Приравнивая тепловой поток $\chi \frac{\partial T(x)}{\partial x}$, связанный с вычисленным распределением температуры (3.194) мощности нагревателя Q_{heat} , мы найдем значение величины $\Delta T(0)$

$$\Delta T(0) = \frac{\delta}{\chi} Q_{heat}. \quad (3.197)$$

Располагая значением для скачка температуры (3.197) и сравнение с (3.196) легко установить скачок скорости и, следовательно, полное распределение скорости

$$v_n(x) = \frac{Q_{heat}}{\rho ST} (1 - \exp(-x/\delta)) \quad (3.198)$$

Видно что на больших расстояниях, значительно превышающих толщину переходного слоя δ , мы имеем обычное соотношение, связывающее поток тепла и скорость нормальной компоненты. При значении координаты x порядка ширины переходного слоя, будет некоторое распределение для $v_n(x)$, которое говорит о том что скорость восстанавливается от нуля до равновесного значения $v_n(\infty) = Q_{heat}/\rho ST$, теплопередача вблизи границы $x = 0$ осуществляется не нормальной компонентой, как это происходит в объеме квантовой жидкости, а обычным механизмом теплопроводности

4 Звуки в сверхтекучих жидкостях

4.1 Исследование волновых процессов в сверхтекучем гелии

Как и во всякой сплошной среде, в сверхтекучей жидкости могут существовать волновые движения. Как обсуждалось ранее, двухскоростная гидродинамика допускает большое количество различных волновых мод. В дальнейшем мы сосредоточимся на вопросах распространения и взаимодействия (в нелинейном случае) первого и второго звуков. В настоящей главе изложены основные понятия линейной акустики сверхтекучей жидкости. Линейная акустика He II - это классическая тема, которая интенсивно развивалась сразу после создания двухскоростной гидродинамики, было выполнено множество экспериментальных и теоретических работ. В данной монографии мы, в основном, концентрируемся на теоретических работах. Далее мы приведем вывод уравнений звуковых колебаний, покажем существование двух волновых мод и опишем их свойства. Мы также представим решение некоторых задач, как, например, отражение звуков при прохождении поверхности раздела пара и жидкого He II, или распространение звука вблизи λ -точки

Одним из самых ярких результатов двухскоростной гидродинамики сверхтекучего гелия явилось предсказание существования тепловых волн или волн второго звука. Существование тепловых волн было впервые высказано Тиссой [10] на основании предложенной им двухжидкостной модели для объяснения сверхтекучести и некоторых других эффектов. Работы Тиссы, как отмечено Ландау (см. ([13].[12])), содержали некорректную аргументацию (например, гелий рассматривался как газ из невзаимодействующих частиц, сверхтекучая часть представляла собой атомы бозе конденсата и пр.). Количественные результаты Тиссы получил эмпирически, путем сопоставления с некоторыми экспериментальными данными. В частности, для скорости второго звука Тисса приводит следующую формулу

$$c_2 = 26 \sqrt{\frac{T}{T_\lambda} \left(1 - \left(\frac{T}{T_\lambda} \right)^{5/5} \right)} / c. \quad (4.1)$$

При $T \rightarrow 0$ эта формула дает $c_2 \rightarrow 0$, т.е. скорость второго звука стремится к нулю вместо конечного значения $c_1/\sqrt{3}$, следующего из теории Ландау (см. далее).

Последовательная теория распространения звуков была развита Ландау в его пионерской работе [13].[12] на основании построенной гидродинамики сверхтекучего гелия. Уравнения двухскоростной гидродинамики Ландау-

Халатникова, подробно обсужденные и в предыдущей главе, при решении для малых возмущений, имеют две различные ветви. Одна из них, названная Ландау вторым звуком, является идентичной предсказанным Тиссой тепловым волнам. Для скорости распространения волн второго звука Ландау предложил следующие выражения

$$c_2 = \sqrt{\frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n (\partial \sigma / \partial T)_p}} \quad (4.2)$$

Очевидно, что сравнение формул (4.1), (4.2) с экспериментом может дать предпочтение той или другой теории. Однако, первые попытки возбудить второй звук обычными акустическими методами были неудачными. Причину этого указал Лифшиц [74], который проанализировал условия возбуждения первого и второго звуков. Оказалось, что ввиду крайне незначительного зацепления второго звука с обычными колебаниями плотности, пропорционально коэффициенту теплового расширения $\partial \rho / \partial T$ - величине аномально малой для гелия. Поэтому интенсивность второго звука при возбуждении флуктуациями давления (например, колеблющейся мембраной), примерно на шесть порядков меньше, чем первого. И, напротив, при периодическом изменении температуры стенки вглубь гелия распространяется, в основном, второй звук. Пешков [75], сконструировав такой тепловой генератор, продемонстрировал существование стоячих тепловых волн. Улучшив свои приборы, Пешков [76] провел измерение скорости второго звука вплоть до температур 1.03 К. Однако в этом диапазоне температур еще нельзя было окончательно выбрать между формулами (4.1), (4.2) и отдать, таким образом, предпочтение теории Ландау или Тиссы. Окончательно этот вопрос был разрешен Пелламом и Скоттом [77], и Пешковым [76], которые с помощью адиабатического размагничивания измерили скорость звука при более низких температурах и указали на его рост и на существование минимума при 1.1 К в соответствии с формулой Ландау (4.2). Изыщное подтверждение теории Ландау было дано в работе Маурера и Херлина [78], и Пешкова и Зиновьевой [76], которые измерили скорости распространения тепловых волн при различных давлениях. Они получили пересечение кривых для зависимости скорости второго звука от температуры при различных давлениях именно таким образом, как это следует из теории Ландау [13]. [12].

Дальнейшее исследование тепловых волн было направлено в основном на прецизионные измерения скорости тепловых волн, и расширение температурного диапазона (Клерк, Хадсон [79], Пеллам [77], Аткинс, Осборн [80]) и на изучение затухания. Теоретическая часть была представлена Халатниковым (см. [81], [1]) на основании выведенных им уравнений гидродинамики сверхтекучего гелия с учетом диссипативных процессов [61]. Сравнение этих

результатов с экспериментами по затуханию звука было использовано для нахождения кинетических коэффициентов в гелии. Особенно это важно для величины χ - коэффициента теплопроводности, который прямым образом измерить не удастся (см. [82]). Измерения затухания второго звука, выполненные Аткинсом [83] хорошо согласующиеся с теоретическими предсказаниями Халатникова

Параллельно с этими исследованиями проведено большое количество исследований второго звука в растворах He3-He4 (см, монографию Есельсона [84], [85], а также в условиях ограниченной геометрии, в частности в узких щелях и капиллярах (см. [86],[87] и представленную там литературу).

Волны второго звука могут быть интерпретированы как флуктуации плотности фононов. Поэтому второй звук можно наблюдать в любой системе, в которой тепловые возбуждения представляются в виде квазичастиц (фононов) взаимодействующих друг с другом посредством столкновения. Это происходит в других квантовых жидкостях, а также в некоторых диэлектрических кристаллах (см. [88], [89]). Так, например, второй звук наблюдается также в сверхтекучем гелием-3 ниже его λ - точки равной $\approx 2,5$ мК [90]. . Недавно получены двухжидкостные гидродинамические уравнения для захваченного в ловушке слабо неидеального Бозе-газа. Эти уравнения использовались для обсуждения первого и второго звука в Бозе-Эйнштейновском конденсате. Соответствующие исследования показали согласие с предсказаниями обычных уравнений двухжидкостной Ландау, когда термодинамические функции вычисляются для слабо взаимодействующего Бозе-газа (см. работу Гриффина и Зарембы [91]).

В последнее время активно изучается распространение звука в так называемых гелях (см., например, [92],[93],[87] и представленную там литературу).

Акустические измерения в сверхтекучем гелии сыграли большую роль при исследовании λ - перехода. Уравнения гидродинамики вблизи λ -перехода описаны в предыдущей главе 3.6. Анализ этих уравнений для малых отклонений от равновесия, как и следует ожидать, дает две независимые звуковые моды - первый и второй звуки. Однако вблизи λ -точки имеются некоторые особенности для распространения звука. Одна из них связана с тем, что параметр порядка (или плотность сверхтекучей компоненты для малочастотного звука) не является равновесной функцией термодинамических переменных, скажем, p и T , а подчиняется релаксационному уравнению с характерным временем τ . Вдали от T_λ величина $\tau \rightarrow 0$, и мы возвращаемся к обычной ситуации уравнений Ландау-Халатникова. Вблизи T_λ величина τ возрастает по закону $\tau \propto 1/(T_\lambda - T)$, и процесс распространения звука не будет равновесным, и, как это следует, например, из теории Манденьштамаг-Леонтовича (см. [94]), звук будет испытывать диссипацию и дисперсию, связанную с нали-

чим релаксации. Эксперименты по затуханию второго звука в окрестности фазового перехода осуществил Тайсон [95]. Вторая особенность связана с тем, что термодинамические функции вблизи T_λ ведут себя сингулярным образом, и, следовательно, характеристики звука также проявляют особенности. Это наблюдалось Тайсоном [95], Алерсом [96] и другими.

4.2 Распространение звуков в сверхтекучей жидкости

4.2.1 Уравнения для малых возмущений

При распространении звуковых волн в классической жидкости все скорости v , считаются малыми по сравнению со скоростью звука c , а отклонение давления p' мало по сравнению с равновесным давлением $p' \ll p$. В сверхтекучей жидкости и аналогичные условия имеют следующий вид [97]

$$v, v_n, v_s \ll c_1, c_2. \quad p' \ll p, \quad \sigma' \ll \sigma, \quad (4.3)$$

где c_1, c_2 — скорость звуков в гелии II. (см. далее). Условия (4.3) позволяют линеаризовать систему уравнений двухскоростной гидродинамики (9.27)-(3.6), и привести ее к следующему виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \rho \sigma \nabla \mathbf{v}_n = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (4.7)$$

При этом в термодинамических переменных зависимость от относительной скорости $w = v_n - v_s$ опускается, поскольку она квадратична по скоростям, т.е. это величина следующего порядка малости. Продифференцируем (4.4) по t , а к уравнению (4.5) применим оператор ∇ . Вычитая полученные соотношения друг из друга, найдем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (4.8)$$

Следующим шагом исключим скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s из выписанных уравнений. Для этого продифференцируем по времени уравнение (4.6), а к уравнениям (4.5) и (4.7) применим оператор ∇ . В результате имеем

$$\rho_s \Delta \mu - \Delta p - \frac{\rho_n}{\rho \sigma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \sigma). \quad (4.9)$$

Воспользовавшись тем что в линейном приближении градиент химического потенциала записывается следующим образом (см. (3.14))

$$\nabla\mu = \frac{1}{\rho}\nabla p - s\nabla T, \quad (4.10)$$

и исключая член $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ с помощью уравнения (4.8), найдем

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n}\sigma^2\Delta T. \quad (4.11)$$

В эволюционных уравнениях (4.8) и (4.11) "перепутаны" термодинамические переменные. Выберем в качестве независимых переменных давление p и температуру T , которые представим в виде $p = p_0 + p'$, $T = T_0 + T'$. Величины с индексом нуль есть равновесные значения, а со штрихом — их изменения в звуковой волне. Далее перейдем к независимым переменным p и T , а ρ и σ будем считать зависящими от p и T функциями, т.е. $\rho = \rho(p, T)$, а $\sigma = \sigma(p, T)$. Соответственно (в первом порядке малости) правомерны следующие выражения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.12)$$

и

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (4.13)$$

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \Delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T. \quad (4.14)$$

(Здесь Δ - оператор Лапласа!) Аналогично, для производных энтропии σ :

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)_T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (4.15)$$

$$\Delta\sigma = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)_T \Delta p + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_p \Delta T. \quad (4.16)$$

В результате уравнения (4.8) и (4.11) приобретают вид

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0, \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)_T \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\rho_s}{\rho_n}\sigma^2\Delta T = 0. \quad (4.18)$$

Система уравнений (4.17) - (4.18) является исходной для анализа звуковых волн. Очевидно, что величины под знаками производных ассоциируются только со штрихованными, флуктуирующими добавками. Напротив, переменные в коэффициентах этих уравнений вычисляются по равновесным, невозмущенным значениям введенных величин. Уравнения (4.17) - (4.18) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Очевидно эта система описывает волновые процессы, наша задача выяснить природу волн связанных с уравнениями (4.17) - (4.18).

4.2.2 Два типа звуковых волн

Рассмотрим монохроматические волны, в которых все переменные величины, в том числе давление p' и температура T' , являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения. Соответственно для p и T запишем

$$p = p_0 + p' \cdot \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\}, \quad (4.19)$$

и

$$T = T_0 + T' \cdot \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\}, \quad (4.20)$$

где p_0 и T_0 — равновесные (невозмущенные) значения соответственно давления и температуры, а p' и T' — амплитуды колебаний давления и температуры в звуковой волне. Ось x выбираем в направлении распространения волны, ω — частота, c — скорость звука. До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над флуктуирующими составляющими p' и T' , можно опускать знак взятия вещественной части и вычислять так, как если бы флуктуирующими составляющие p' и T' были комплексными, после чего можно взять вещественную часть от окончательного результата. Понятно что это процедура полностью соответствует преобразование Фурье. При таком описании производные вычисляются следующим образом

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = p' \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \cdot (i\omega)^2 \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) \cdot \left(-\frac{1}{c} \right), \quad (4.21)$$

и

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' \right] \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \cdot (i\omega)^2. \quad (4.22)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (4.17) и последующего сокращения

на $\exp [i\omega (t - \frac{x}{c})] \cdot (i\omega)^2$ приводит к результату

$$\left(c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T - 1 \right) p' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p c^2 T' = 0 \quad (4.23)$$

Аналогичным образом, найдя производные $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, подставив их в уравнение (4.18), получим

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} \right)_T p' + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p T' = \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n c^2} \cdot T', \quad (4.24)$$

или

$$p' \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} \right)_T c^2 + \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p c^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right) T' = 0. \quad (4.25)$$

Система уравнений (4.23) и (4.25) является системой однородных линейных уравнений относительно неизвестных p' и T' . Условием совместности этих уравнений является равенство нулю их определителя. Этот определитель, полученный из коэффициентов при p' и T' в уравнениях (4.23) и (4.25), имеет следующий вид

$$\left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T c^2 - 1 \right) \times \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p c^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right) - c^4 \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \times \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} \right)_T. \quad (4.26)$$

Следовательно, решение системы существует, если параметр c является корнем биквадратного уравнения

$$\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T c^2 - 1 \right] \times \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p c^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right] - c^4 \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \times \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} \right)_T = 0 \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) определяет две возможные скорости звука в гелии II. Коэффициент теплового расширения Не II $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ является аномально малой величиной. Это обстоятельство значительно упрощает уравнение (4.27), его первый корень равен

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T}, \quad (4.28)$$

Из термодинамики известно, что $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{C_p}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$, а $C_p = C_V + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении, C_V — теплоемкость при постоянном объеме, V — удельный объем. Выше отмечалось, что коэффициент $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ у Не II имеет аномально малое значение, т.е. с хорошей точностью

$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = 0$. В силу того, что $\rho = \frac{1}{V}$, т.е. $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, справедливо $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$. Соответственно $C_p = C_V$, а $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$. Следовательно выражение для c_1 (4.28) примет вид

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma}. \quad (4.29)$$

Формула (4.29) определяет известную в обычной гидродинамике скорость звука, т.е. скорость распространения в среде (жидкой или газообразной) малых колебаний давления. Для Не II эту скорость условились называть скоростью первого звука, о чем говорит индекс 1 в обозначении скорости. Как будет видно из дальнейшего, волны первого звука представляют собой колебания плотности, если пренебречь тепловым расширением, то колебания температур в них вообще отсутствуют.

Второй корень уравнения (4.27) можно получить, приравнявая вторую квадратную скобку нулю, это дает

$$c_2 = \sqrt{\frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_p}} \quad (4.30)$$

В силу термодинамического тождества при постоянном давлении $TdS = C_p dT$. Для Не II $C_p \approx C_V \approx C$ (см. выше). Следовательно $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C}{T}$. Подставив это выражение в (4.30), получим

$$c_2 = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\rho_s \cdot T}{\rho_n \cdot C}}. \quad (4.31)$$

Зависимости скоростей первого и второго звука от температуры представлены соответственно на рисунках. 4.18 и 4.19

Температурная зависимость скорости второго звука, вычислена по формуле (4.30) В λ -точке $\rho_s = 0$ и скорость c_2 равна нулю. При низких температурах, когда все термодинамические величины определяются только фононами, величина скорости c_2 стремится к пределу $c_1/3$.

4.2.3 Свойства первого и второго звуков

Проанализируем далее поведение нормального и сверхтекучего компонентов в волнах первого и второго звука. Рассмотрим монохроматические волны, в

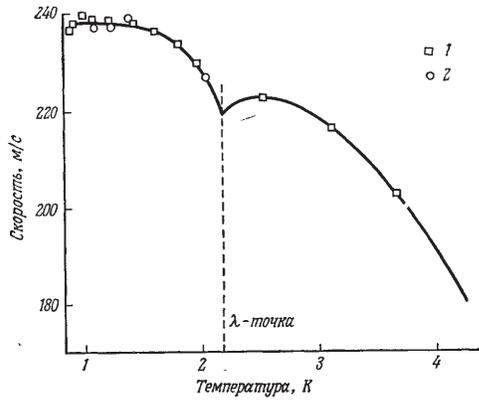


Рис. 4.18: Скорость обычного (первого) звука в жидком Не при давлении насыщенных паров [11]. 1 — частота 2,0 МГц; 2 — частота 12,1 МГц. Рисунок взят из книги Тилли и Тилли [31]

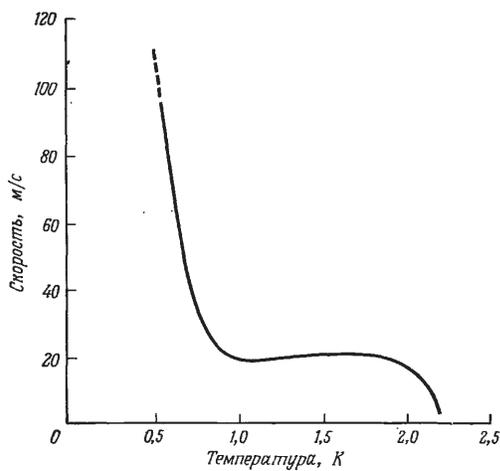


Рис. 4.19: Зависимость скорости второго звука в HeII от температуры. Рисунок взят из книги Тилли и Тилли [31]

которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Как обсуждалось выше, такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения. $\exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$. Обозначая штрихом переменные части соответствующих величин, получим из (4.4)-(4.7) систему алгебраических уравнений.

$$c\rho' - j = 0, \quad (4.32)$$

$$cj - p' = 0, \quad (4.33)$$

$$c(\sigma'\rho + \sigma\rho') - \rho\sigma v_n = 0, \quad (4.34)$$

$$cv_s + \sigma T' - \frac{1}{\rho}p' = 0. \quad (4.35)$$

Если в соотношениях (4.32)-(4.35) поставить ранее найденные выражения c_1, c_2 то система будет иметь нулевой детерминант и, следовательно, может иметь нетривиальные отличные от нуля решения. Таким образом можно найти связь между различными переменными (ρ', j, σ', v_n) входящими в уравнения (4.32)-(4.35) и выяснить физический смысл двух звуковых мод. Для большей прозрачности, мы опустим члены пропорциональные коэффициенту расширения $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$. Учет соответствующих членов выполнен далее, а также в главе 6, посвященной инвариантам Римана. Простые вычисления приводят к следующему результату (см. [74]).

Для первого звука выполняются соотношения

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s, \quad p' = \rho c_1 v_s, \quad T' = 0, \quad (4.36)$$

тогда как для второго звука имеем

$$\mathbf{v}_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \mathbf{v}_s, \quad p' = 0, \quad T' = -\frac{c_2}{\sigma} v_s. \quad (4.37)$$

Видно, что в звуковой волне первого типа $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s$ т. е. жидкость колеблется как целое; нормальная и сверхтекучая массы движутся вместе. В результате, эти волны соответствуют обычным звуковым волнам в классических жидкостях. В волне же второго типа имеем $\mathbf{v}_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \mathbf{v}_s$ т. е. выполняется условие противотока и полная плотность потока равно нулю, $\mathbf{j} = 0$. Таким образом сверхтекучая и нормальная массы жидкости колеблются навстречу друг другу, так что центр инерции в каждом элементе объема остается неподвижным и суммарный поток вещества отсутствует. Ясно, что этот вид волн специфичен для сверхтекучей жидкости

Из выписанных уравнений немедленно следует, что для первого звука выполняются следующие соотношения

$$j = \frac{p'}{c_1}, \quad p' = c_1^2 \rho' \quad (4.38)$$

Выражения (4.38) это стандартные соотношения между переносом массы, колебаниями давления p' и колебаниями плотности ρ' в обычном звуке в классических жидкостях. Поэтому первый звук это полный аналог обычного звука в жидкостях, никакой специфики сверхтекучести здесь не имеется.

Качественно другая ситуация возникает для второго звука. В такой волне второго звука $T' \neq 0$. При этом $p' = 0$. Тогда

$$v_n - v_s = \frac{\sigma \rho}{c_2 \rho_n} T', \quad T' = \frac{\rho_n c_2^2}{\sigma^2 \rho_s} \sigma', \quad j = 0. \quad (4.39)$$

Из этого соотношения видно, что в волне второго звука плотность потока массы $j = 0$. Следовательно, в силу соотношения (4.38), колебания давления p' и колебания плотности ρ' также равны нулю.

Имея в своем распоряжении соотношение (4.39), получим выражение для теплового потока Q_h переносимого волной второго звука в амплитудной форме. С этой целью в определение плотности теплового потока подставим $v_n = \frac{\rho_s \sigma \cdot T'}{\rho_n c_2}$ из (4.39). Это приведет к следующему.

$$Q_{heat} = \rho \sigma T v_n = \rho \sigma T \cdot \frac{\rho_s}{\rho_n} \cdot \frac{\sigma \cdot T'}{c_2}. \quad (4.40)$$

Подставив в это выражение $c_2 = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\rho_s \cdot T}{\rho_n \cdot C}}$, получим, что

$$Q_{heat} = \rho c_2 C T'. \quad (4.41)$$

Таким образом, мы пришли к замечательному результату о существовании двух типов звуковых волн. Из выражения (4.38) видно, что в волне первого звука колеблются плотность ρ' и давление p' . Нормальные и сверхтекучие скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s равны между собой, так что обе компоненты колеблются в фазе. В волне второго звука ситуация намного интереснее. Полный поток массы равен нулю, $\mathbf{j} = 0$, а сверхтекучая и нормальная компоненты движутся навстречу друг другу, образуя нестационарный вариант противотока, обсужденного в предыдущей главе. В волнах второго звука колеблются температура T и энтропия σ , и связанная с ними относительная скорость $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Колебания давления и плотности и связанной с ними полной скорости \mathbf{v} во втором звуке отсутствуют. Существование температурных волн

есть специфическое свойство сверхтекучей жидкости, обязанное двухскоростной гидродинамике. В обычных средах, как известно, температурные волны подчиняются параболическому уравнению теплопроводности и затухают на расстояниях порядка $\sqrt{\chi/\omega}$, где χ — температуропроводность а ω — частота волны.

Второй звук можно рассматривать как волны сжатия и разрежения в газе возбуждений. Это непосредственно следует из того, что колебания температуры вызывают колебания плотности возбуждений. Скорость второго звука, таким образом, представляет собой скорость звука в газе возбуждений (см. книгу Халатникова [1]).

4.3 Тепловое зацепление и излучение звуков

Хотя второй звук был предсказан в основополагающих работах Ландау (см. [12],[13]), экспериментаторы некоторое время не могли его обнаружить. Дело в том, что в эксперименте, по сути дела, искали сигнал, распространяющийся со скоростью второго звука при возбуждении звука обычным методом - колебанием мембраны. Лифшиц (см. [74]). тщательно исследовал вопрос излучения звуков и объяснил что при возбуждении волн давления (например, колебания мембраны.), второй звук появляется только как примесь, очень малая в силу малости коэффициента температурного расширения $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$. С учетом этого коэффициента в первом звуке скорость нормальной компоненты приобретает малую добавку (второе слагаемое)

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s + \frac{\beta \rho}{\rho_s \sigma} \frac{c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)} \mathbf{v}_s. \quad (4.42)$$

Флуктуации температуры также не равны нулю и выражаются следующим образом

$$T' = \frac{\beta T}{C} \frac{c_1^3}{(c_1^2 - c_2^2)} v_s. \quad (4.43)$$

Таким есть, при учете теплового расширения в первом звуке имеется некоторое малое проскальзывание нормальной компоненты по отношению к сверхтекучей, т.е. они двигаются не синхронно. Также возникают малые колебания температуры. Это можно интерпретировать как появление второй звуковой моды, подробнее об этом написано в главе 6, посвященной инвариантам Римана.

В случае второго звука ситуация выглядит следующим образом. Скорость нормальной компоненты связана со скоростью \mathbf{v}_s посредством такого соот-

ношения

$$\mathbf{v}_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \mathbf{v}_s + \frac{\beta \rho}{\rho_n \sigma} \frac{c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)} \mathbf{v}_s. \quad (4.44)$$

Таким образом, мы имеем не с чистым противотоком (когда $\mathbf{v}_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \mathbf{v}_s$), но имеется некая поправка, связанная с коэффициентом теплового расширения β . Далее, флуктуации давления p' в этом случае не обращаются в нуль, а равны

$$p' = \frac{\beta \rho}{\sigma} \frac{c_1^2 c_2^3}{(c_1^2 - c_2^2)} \mathbf{v}_s. \quad (4.45)$$

Опять, как и случае первого звука, учет теплового расширения приводит к выводу, что появляется малая примесь связанная с "чужой" волновой модой - здесь с первым звуком.

Полученные соотношения (4.42)-(4.45) объясняют ситуацию, связанную с трудностями обнаружения второго звука в эксперименте. Действительно, при возбуждении звуков обычным образом например, колебаниями мембраны, амплитуда волн, соответствующая второму звука очень мала, в меру малости коэффициента теплового расширения β (см. формулы (4.42)-(4.43)). Для монохроматических волн ситуации выглядит еще критичнее, потому что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, следовательно отношение интенсивности второго звука к интенсивности первого звука будет содержать коэффициент теплового расширения в квадрате (β^2). Это приводит к тому что интенсивность второго звука в миллион раз меньше чем интенсивность первого (см. [1],[74],[76])

Из этих же соотношений (4.42)-(4.45) видно, что для того чтобы получить второй звук, нужно создать течение типа противотока, например, двигать пористую мембрану, которая толкает только нормальную компоненту. Другой вариант нагревать периодически стенку, или нагревать и охлаждать, чтобы были гармонические колебания. Такого рода эксперименты были выполнены Пешковым [76].

4.4 Затухание звуков

Для исследования вопроса о затухании звука выпишем линеаризованные уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных процессов (см. [14], [1]).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{v}_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \mathbf{v}_{nl}}{\partial x_l} \right) \right] \quad (4.47)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} [\zeta_1 \nabla \cdot (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \nabla \cdot \mathbf{v}_n] ,$$

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial t} + \sigma\rho \nabla \cdot [\mathbf{v}_n] = \chi \frac{\Delta T}{T}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = \nabla \cdot [\zeta_3 \nabla \cdot (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \nabla \cdot \mathbf{v}_n] \quad (4.49)$$

Как и выше, будем рассматривать монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени, т.е. пропорциональными $\exp[i\omega(t - x/c)]$. Как и ранее, обозначая штрихом переменные части получим из (4.46)-(4.49) систему алгебраических уравнений на амплитуды соответствующих величин. Исключая перекрестным дифференцированием скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s из уравнений, и пренебрегая коэффициентом теплового расширения в гелии II, можно получить два уравнения следующего вида на величины ρ' и σ' .

$$\left(c^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma \right) \rho' = \quad (4.50)$$

$$= i\omega \left\{ \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 \right) \frac{\rho'}{\rho} + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 - \rho\zeta_1 \right) \frac{\sigma'}{\sigma} \right\}$$

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} c^2 \right) \sigma' = i\omega \left\{ \zeta_4 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 - \frac{4}{3\rho} \eta \right\} \frac{\rho'}{\rho} + \quad (4.51)$$

$$+ i\omega \left\{ \left(\zeta_4 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 - \rho\zeta_3 + \zeta_1 - \frac{4}{3\rho} \eta \right) \frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\chi}{\rho\sigma T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \sigma' \right\}.$$

Система уравнений (4.23) и (4.25) является системой однородных линейных уравнений относительно неизвестных ρ' и σ' . Условием совместности этих уравнений является равенство нулю их определителя. Для небольших частот ω можно ограничиться в уравнениях линейными по ω членами. В результате получаем два независимых однородных уравнения, из которых следуют уравнения, определяющие скорости звука:

$$c_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma + \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 \right), \quad (4.52)$$

$$c_2^2 = \sigma^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \quad (4.53)$$

$$+ \frac{i\omega}{\rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left\{ \rho(\zeta_1 + \zeta_4) - \rho^2 \zeta_3 - \zeta_2 - \frac{4}{3}\eta - \frac{\rho_n \chi}{\rho_s T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}$$

Легко видеть что мы получили выражения, отличающиеся от скоростей первого и второго звуков, полученных ранее в бездиссипативном в случае, некоторыми добавками, которые являются чисто мнимыми величинами. Это означает что в экспоненте $\exp[i\omega(t - x/c)]$ эти добавки дадут отрицательную величину, и мы получим волну, затухающую по координате x по закону $\exp[-\alpha_{1,2}x]$. Затухание α_1 для первого звука, согласно (4.52), равно

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2}{2\rho c_1^3} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 \right) \quad (4.54)$$

Таким образом, коэффициент поглощения первого звука α_1 зависит только от коэффициента первой вязкости η и коэффициента ζ_2 . Главную роль, как показывают вычисления, играет вторая вязкость, связанная с коэффициентом ζ_2 .

Затухание α_2 для. первого звука, согласно (4.53), равно

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2}{2\rho c_2^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1 + \frac{\rho_n \chi}{\rho_s T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right). \quad (4.55)$$

Численный анализ показывает, что главную роль в затухании второго звука играет теплопроводность χ , входящая в последнее слагаемое в соотношении (4.55).

4.5 Прохождение звуков через межфазную поверхности

4.5.1 Преломление второго звука

Итак, мы выяснили, что первый звук ассоциируется с флуктуациями давления, в то время как второй звук ассоциируется с флуктуациями температуры. Интересная ситуация возникает на границе сверхтекучей жидкости, находящейся в равновесии со своим паром. На этой границе выполняется соотношение Клапейрона-Клаузиуса, которое определяет связь между флуктуациями давления и температуры. Таким образом, волны первого и/или второго звуков, достигнув границы инициируют добавочные флуктуации температуры или давления. Эти флуктуации затем распространяются в жидкости как смесь первого и второго звуков, и в паре в виде волн давления. Рассмотренный сценарий может быть интерпретирован как своего рода трансформация

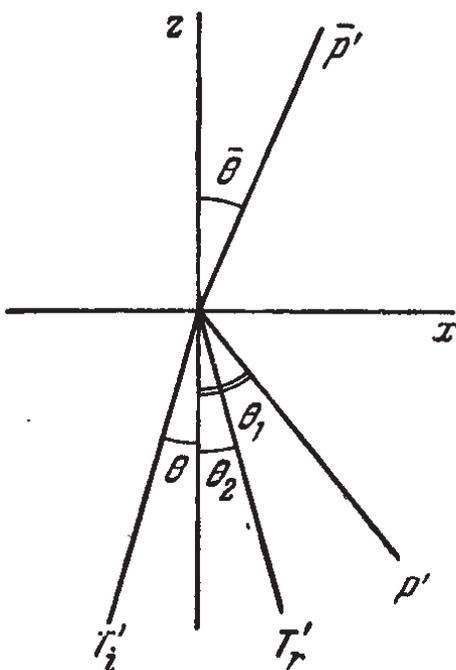


Рис. 4.20: Схема прохождения второго звука через межфазную поверхность HeII-пар

звуковых мод друг в друга. Ситуация усложняется тем, что волна давления, падающая под углом к поверхности раздела, деформирует ее. В результате вдоль поверхности распространяются капиллярные волны, а с учетом силы тяжести - гравитационно - капиллярные волны. Рассмотрим, следуя Халатникову (см. [1]) случай падения волны второго звука T'_i с частотой ω на границу между гелием II и его паром под углом θ (Рис. 4.20). При этом возникают две отраженные волны в жидкости: T'_r (отраженная волна второго звука) и p' (волна первого звука) и одна волна в паре p'_v (индекс v - обозначает "варопар"). Величина ζ' описывает деформации границы раздела. В качестве граничной плоскости выбираем плоскость xy . Из однородности задачи в этой плоскости следует, что все волны (отдельно для первого и второго звуков) будут иметь одинаковые компоненты k_x, k_y волнового вектора, откуда следует, что все волны лежат в одной плоскости: Математически это условие может быть записано как

$$\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_2} \sin \theta, \quad \theta_1 = \theta, \quad \sin \tilde{\theta} = \frac{c_v}{c_1} \sin \theta \quad (4.56)$$

Основу математического описания задачи составляет система уравнений, представляющих собой запись универсальных и специальных условий совместности на границе раздела фаз. Например, равенство сил, действующих на границу может быть найдено и баланса давлений в жидкости и газе. То

есть сумма давлений

$$p' - \bar{p}'_v = \gamma \frac{\omega^2}{c_2^2} \sin^2 \theta \zeta' \quad (4.57)$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения. Подобным образом формулируются для рассматриваемой одномерной задачи уравнения сохранения массы (Равенство плотностей потоков вещества через

границу) и энергии на межфазной поверхности (Равенство плотностей потоков энергии), т.е. связывающих соответствующие характеристики жидкой и паровой фаз. К перечисленным условиям следует добавить равенство температур и химических потенциалов на границе раздела. Отсылая за подробностями громоздких математических выкладок к оригинальной работе Халатникова (см. [1]), приведем окончательный результат и прокомментируем его:

Коэффициент отражения второго звука R_2

$$R_2 = \left(\frac{-\cos \theta_\nu + \frac{\rho_s \rho}{\rho_n \rho_v} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \cos \theta}{\cos \theta_\nu + \frac{\rho_s \rho}{\rho_n \rho_v} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \cos \theta} \right)^2 \quad (4.58)$$

коэффициент трансформации второго звука в первый R_1

$$R_1 = \frac{4 \frac{\rho_s \rho}{\rho_n} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \frac{c_\nu}{c_1} \cos \theta \cos \theta_1}{\left(\cos \theta_\nu + \frac{\rho_s \rho}{\rho_n \rho_v} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \cos \theta \right)^2} \quad (4.59)$$

коэффициент трансформации второго звука в обычный звук в паре R :

$$R = \frac{4 \frac{\rho_s \rho}{\rho_n \rho_v} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \frac{c_\nu}{c_1} \cos \theta \cos \theta_1}{\left(\cos \theta_\nu + \frac{\rho_s \rho}{\rho_n \rho_v} \left(\frac{\sigma}{\sigma_v} \right)^2 \frac{c_\nu}{c_2} \cos \theta \right)^2} \quad (4.60)$$

Из (4.60), (4.56) видно, что при углах падения $\theta > \arcsin(c_2/c_1)$ отсутствует отраженная волна первого звука в жидкости, а при углах $\theta > \arcsin(c_2/c_v)$ отсутствует и прошедшая в пар звуковая волна. Таким образом, в этом последнем случае происходит полное внутреннее отражение второго звука. Полное внутреннее отражение имеет место в области температур выше 0,7 К. в которой $c_v > c_2$. Следует обратить внимание на малость коэффициента R_1 определяющего трансформацию второго звука в первый в жидком гелии II (см. [1]).

4.5.2 Отражение волны давления в паре от межфазной поверхности

Рассмотрим теперь, в некотором смысле, противоположную задачу, а именно прохождение волны давления в паре через межфазную поверхность раздела

гелий II- пар. При этом считается, что пар находится в состоянии насыщения. Подробно эта задача рассмотрена в книгах Крюкова [98],[97]], изложим кратко, следуя цитируемым работам, постановку задачи, ее математическое описание и основные результаты решения.

Известна амплитуда колебаний давления в этой волне в паре p'_v , т.е. считается, что давление пара имеет значение $p_0 + p'_v$, где p_0 — невозмущенное давление насыщенного пара, связанное с температурой поверхности посредством уравнения Клайперона-Клаузиуса.

Вследствие повышения давления возникает конденсация пара на межфазной поверхности и температура этой границы раздела фаз начинает увеличиваться. Через интервал времени, равный полупериоду колебаний звуковой волны, картина меняется на обратную. Давление пара оказывается пониженным: $p_0 - p'_{vi}$, начинается испарение поверхностного слоя жидкости, температура границы раздела фаз понижается. В результате в паре возникает отраженная волна звука с амплитудой p'_{vr} , а в жидкости - проходящая волна звука с амплитудой p'_{lr} . (характеристики жидкости индексом l - "liquid"). Требуется определить амплитуду отраженной от межфазной поверхности волны давления в паре p'_{vr} или отношение p'_{vr}/p'_{vi} , которое будем называть коэффициентом отражения звука от межфазной поверхности жидкость — пар.

Также как и предыдущем параграфе, для математического описания задачи составляется система уравнений, следующих из условий совместности на границе раздела фаз. Таким образом формулируются для рассматриваемой одномерной задачи три уравнения сохранения: массы, импульса, энергии на межфазной поверхности, т.е. связывающих соответствующие характеристики жидкой и паровой фаз. Перечисленные уравнения дополняются соотношениями взаимосвязи колебаний температуры в падающей и отраженной волне в жидкости и проходящей и отраженной волне давления на основании уравнения Клайперона-Клаузиуса.

Дополнительно в работах Крюкова [98],[97] анализируется вклад дополнительного давления, связанного потоком вещества в процессах испарения. Это учитывается с помощью специального условия совместности, в котором используется линейная формула Лабунцова — Муратовой, полученная методами молекулярно—кинетической теории, которая позволяет рассчитывать плотность потока массы при испарении и конденсации при известной температуре границы раздела фаз и давлении пара (см. подробности, например, в статье [99]).

Система замыкается уравнением, определяющим тепловой поток, распространяющийся по гелию II в результате повышения или понижения температуры межфазной поверхности. В рассматриваемом процессе из-за периодически сменяющихся друг друга испарения и конденсации на границе раздела фаз,

обусловленных периодическим уменьшением и увеличением давлением пара при падении и отражении звуковых волн, имеет место периодическое изменение температуры межфазной поверхности. Такое изменение температуры является своеобразным источником волны второго звука, перемещающейся в глубь He II. С волной второго звука распространяется тепловой поток, величина которого определяется с учетом положительного направления оси координат x от межфазной поверхности в сторону пара соотношением (4.41), принимающим в данном случае вид

$$Q_{heat} = -\rho c_2 C T''_{surface}, \quad (4.61)$$

где Q_{heat} — амплитуда колебаний величины теплового потока, распространяющегося от границы раздела фаз в глубь He II, ρ — плотность He II, $T''_{surface}$ — амплитуда колебаний температуры межфазной поверхности.

В результате решения рассмотренной системы уравнений получается следующее выражение для коэффициента отражения звука R от поверхности He II, граничащей с насыщенным паром

$$R = \frac{1 - \chi - 0,86 \cdot (\rho - \rho_v)/A_L \rho}{1 + \chi + 0,86 \cdot (\rho - \rho_v)/A_L \rho}, \quad (4.62)$$

где ρ_v — плотность пара гелия, $A_L = 1 + \frac{0,86 \cdot r}{\rho c_2 Ca} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{sat}$, r — теплота испарения He II, a — скорость звука в паре гелия, $\chi = \rho c_v / \rho' c_1$ — приведенное волновое сопротивление пара по отношению к жидкости, c_1 — скорость первого звука в гелии II. Производную $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{sat}$ можно найти из уравнения Клапейрона—Клаузиуса

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{sat} = \frac{r \cdot \rho'}{T_0 (\rho' - \rho)} \quad (4.63)$$

Пример расчета по формуле (4.62), приведенный в [98],[97], показывает, что, например, при температуре невозмущенного He II $T_0 = 2$ К коэффициент отражения звука $R = 0,15$. Свойства He II при этом брались по справочнику Есельсона с соавторами [84]. Величина R^2 есть не что иное как отношение потоков энергии отраженной и падающей звуковых волн. Поскольку в данном случае $R^2 \approx 0,02$, постольку от межфазной поверхности отражается всего 2% потока энергии, приносимого падающей звуковой волной. Оставшиеся 98% поступающего потока энергии «проходят» в гелий II, преобразуясь в волны первого и второго звука. Таким образом, граница раздела фаз He II — пар в отличие от обычной жидкости практически не отражает звук, т.е. такое явление как «эхо» на «глади» сверхтекучего гелия невозможно.

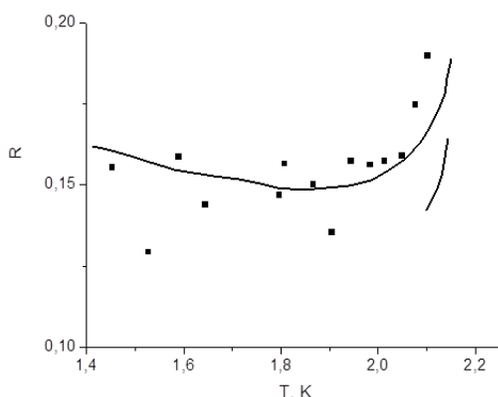


Рис. 4.21: Коэффициент отражения звука от свободной поверхности He II. Из книги Крюкова [97]

Сопоставление результатов расчета по формуле (4.62) с экспериментальными данными [100] представлено на рисунке 4.21

4.6 Звук вблизи λ - точки

Вблизи λ - точки имеются некоторые особенности для распространения звука. Одна из них связана с тем, что параметр порядка (или плотность сверхтекучей компоненты для низкочастотного звука) не является равновесной функцией термодинамических переменных, давления p и температуры T , а подчиняется релаксационному уравнению с характерным временем τ (см. параграф 3.6). Вдали от T_λ величина $\tau \rightarrow 0$, и мы возвращаемся к обычной ситуации уравнений Ландау-Халатникова. Вблизи T_λ величина τ возрастает по закону $\tau^{-1} \propto T_\lambda - T$, и процесс распространения звука не будет равновесным. Из теории Манденьштама-Леонтовича (см. [94]) следует, что звук будет испытывать дополнительную (на самом деле, основную) диссипацию и дисперсию, связанную с наличием релаксации. Эксперименты по затуханию второго звука в окрестности фазового перехода осуществил Тайсон [95], который продемонстрировал аномальный рост затухания вблизи T_λ .

Обычный путь для исследования релаксации при распространении волн состоит в выписывании системы уравнений для малых возмущений, включающей уравнение для релаксирующего параметра. Условие нетривиальности, т.е. равенство нулю определителя соответствующей однородной системы уравнений приводит к закону дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, который описывает как дисперсию так и затухание звука. Линеаризованная система уравнений (3.175)-(3.175), описывающая распространение второго звука вблизи λ - точки при-

водится к следующему виду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} - \sigma \frac{\partial T'}{\partial x} = 0, \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \mu_s \rho_s. \quad (4.66)$$

Мы предлагаем другой подход для исследования релаксации, который удобно распространить далее для случая нелинейных волн. При наличии релаксации соотношение (4.39) между изменениями температуры T' и изменениями энтропии σ' неверно, связь становится нелокальной во времени. Изменение температуры зависит от изменений энтропии в предыдущие моменты времени (см. [101])

$$T' = a\sigma' + b \int_0^\infty \sigma'(t-t') \varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau} \quad (4.67)$$

функция $\varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right)$ определяет релаксацию параметра порядка. Из уравнения (3.175) следует, что $\varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right)$ экспонента. Время τ удовлетворяет соотношению

$$\tau^{-1} = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right) \rho_s \quad (4.68)$$

Коэффициенты a и b в выражении (4.67) могут быть найдены из рассмотрения двух предельных случаев. В первом, высокочастотном случае $\omega\tau \gg 1$ интегральный член из-за быстроосциллирующей функции $\sigma'(t)$ исчезает и, следовательно,

$$a = \frac{\rho c_{2\infty}^2}{\rho_s \sigma}. \quad (4.69)$$

Во втором случае (при нормированной на единицу функции $\varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right)$ медленно меняющуюся функцию можно вынести из под интеграла и мы найдем

$$b = \frac{\rho}{\rho_s \sigma} (c_{20}^2 - c_{2\infty}^2). \quad (4.70)$$

Значком 0 и ∞ помечены низкочастотная и высокочастотная скорости звуков. Далее мы рассмотрим случай низкочастотных волн второго звука, поэтому выполняется условие $\omega\tau \ll 1$. В этом случае $\sigma'(t-t')$ под интегралом в соотношении (4.67) можно разложить по степеням t' , что дает (мы ограничимся

вторым порядком по параметру $\omega\tau$)

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s \sigma^2}{\rho} T' &= c_{20}^2 \sigma' + (c_{20}^2 - c_{2\infty}^2) \tau \dot{\sigma} \int_0^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta - \\ &- \frac{(c_{20}^2 - c_{2\infty}^2)}{2} \tau^2 \ddot{\sigma} \int_0^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Чтобы выяснить характер влияния релаксационных процессов на динамику волн второго звука, достаточно рассмотреть волны бегущие в одну сторону (так называемые простые волны), в которых реализуется связь между σ' и v_s следующего вида $\sigma' = \frac{\sigma \rho_s}{c_2 \rho} w$ (см. формулу (4.39)). Тогда, используя эту связь, а также связь между колебаниями температуры энтропии представленными формулой (4.71), можно из системы уравнений (4.64)-(4.65) получить уравнение лишь для одной величины, например скорости v_s

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + c_{20} \frac{\partial v_s}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^3 v_s}{\partial x^3}. \quad (4.72)$$

Здесь коэффициенты D_2 и D_3 равны

$$D_2 = \frac{(c_{20}^2 - c_{2\infty}^2) \tau}{2}, \quad D_3 = \frac{(c_{20}^2 - c_{2\infty}^2) c_{20} \tau^2}{2}. \quad (4.73)$$

Если, как и ранее, рассматривать монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени, т.е. пропорциональными $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, то уравнение (4.72) приведет к следующему соотношению между частотой и ω волновым вектором \mathbf{k} , так называемому дисперсионному соотношению

$$\omega_{\mathbf{k}} = c_{20} \mathbf{k} + i D_2 k^2 + D_3 k^3. \quad (4.74)$$

Таким образом, релаксация параметра порядка вблизи λ - точки, в случае распространения волн приводит к дополнительному затуханию, а также дисперсии скорости звука. как вблизи λ - точки, в случае распространения волн, приводит к дополнительному затуханию, а также дисперсии скорости звука.

4.7 О распространении второго звука вблизи раздела фаз He I-He II

В этой главе исследуется распространение звука в области раздела фаз между нормальным и сверхтекучим гелием. Ввиду наклона кривой λ -перехода в

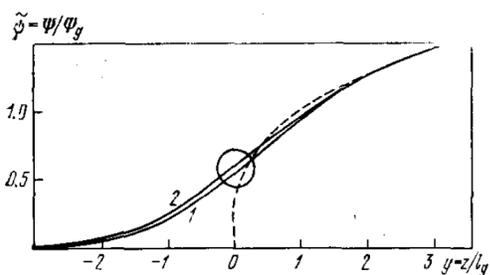


Рис. 4.22: Распределение плотности сверхтекучей компоненты $\rho_s(y)$, (где $y = z/l_g$, смотри текст) вблизи границы HeI-HeII в гравитационном поле $U(z) = g(z - z_0)$. Сплошные кривые получены путем численного решения уравнения (3.161) для двух различных модификаций теории, пунктирная кривая показывает распределение $\rho_s(z) = 1.43\rho_\lambda(t(z - z_0))^{2/3}$, которое быть получена без учета корреляционных эффектов. Рисунок взят из обзора [66]

координатах p, T (более правильно говорить в данной ситуации - в координатах μ, T), близость $t(\mathbf{r})$ к λ -линии зависит от координаты \mathbf{r} и определяется выражением [66]

$$t(\mathbf{r}) = T_\lambda - T + \frac{\partial T_\lambda}{\partial \mu} U(\mathbf{r}), \quad (4.75)$$

где $U(\mathbf{r})$ - некоторое поле массовых сил.

Поэтому в объеме гелия, помещенного в поле вида $\rho U(\mathbf{r})$ (в исследуемом нами случае гравитационном $U(\mathbf{r}) = gz$) возможна ситуация, когда "сверхтекучее" состояние $t(\mathbf{r}) > 0$ соответствует лишь части объема, занятого гелием. Подобная ситуация наблюдалась экспериментально. На поверхности $t(\mathbf{r}) = 0$ плотность сверхтекучей компоненты ρ_s не обращается в нуль, а из-за корреляционных эффектов "размыта" вблизи этой поверхности, как некоторая функция координат $\rho_s(\mathbf{r})$ (смотри Рис. 4.22). В принципе, это распределение $\rho_s(\mathbf{r})$ может быть найдено интегрированием уравнения равновесия для термодинамического потенциала $\Omega(\mu, T, |\Psi(\mathbf{r})|^2)$. При этом принципиально важен вопрос о зависимости Ω от $|\Psi(\mathbf{r})|^2$.

Первоначально такая задача была решена в работе [68] на основе самосогласованного варианта теории λ -перехода. Более строго, с учетом того, что ρ_s не является независимой величиной, а сама должна находиться из условий равновесия. Для зависимости потенциала Ω от $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ выбраны параллельно различные феноменологические разложения, предложенные в работах [68],[66].

В связи со сказанным представляет интерес найти распределение $\rho_s(\mathbf{r})$ экспериментальным путем. Эта задача особенно важна потому, что зная $\rho_s(\mathbf{r})$ можно восстановить зависимость плотности свободной энергии $F(|\Psi(\mathbf{r})|^2)$

от параметра порядка $|\Psi(\mathbf{r})|$. Возможность экспериментального определения $\rho_s(\mathbf{r})$ путем "зондирования" вторым звуком впервые обсуждалась в работе Гинзбурга и Собянина [102]. Авторы предложили использовать то обстоятельство, что скорость второго звука $c_2 \propto \sqrt{\rho_s(\mathbf{r})}$ и, следовательно, является функцией координаты. Был предложен следующий эксперимент: В области корреляционного "размытия" $\rho_s(\mathbf{r})$ в различных точках устанавливается приемник второго звука. По измерению времени пробега

$$t_{flight} = \int \frac{dr}{c_2(r)}$$

представляется возможность восстановить $c_2(r)$ и вместе с ней $\rho_s(\mathbf{r})$. Однако вследствие сильного наклона λ -кривой в координатах p, T для определения хотя бы десяти точек в области размытия требуется недостижимая пока стабилизация температуры $\sim 10^{-9}$ К.

В этой главе исследуется возможность экспериментального определения $\rho_s(\mathbf{r})$ в гравитационном поле зондированием вторым звуком на основании метода обратной задачи (см. статью автора [103]).

Сначала на основании результатов работы [66] опишем, что представляет собой область корреляционного размытия $\rho_s(\mathbf{r})$. Положение классической границы раздела фаз определяется из условия $t(z_0) = 0$. В области, где несущественны корреляционные эффекты, $\rho_s(z) = 1.43\rho_\lambda(t(z - z_0))^{2/3}$. Корреляционная область имеет размер порядка нескольких $(5 \div 10)l_g$, где $l_g \sim 7 * 10^{-3}$ см, она связана с решением уравнения (3.161) в присутствии гравитационного поля $U(\mathbf{r}) = g(z - z_0)$. В этой области $\rho_s(z)$ изменяется таким образом, что соответствующая ей скорость звука $c_2(z)$ падает от 10 см/сек до нуля, экспоненциально затухая в несверхтекучей части, где $t(z) < 0$. Чтобы пользоваться уравнениями гидродинамики, нам необходимо выбрать длину импульса λ_d так, чтобы она была больше корреляционного радиуса (см. раздел 3.6).

Предлагается следующий эксперимент. Недалеко от границы раздела, в сверхтекучей области $t(z) < 0$ (сверху) расположим источник второго звука, например, напыленную пластинку. Пусть на единице площади, этого источника выделяется мощность $N(t)$. Возникшая волна второго звука, отражаясь от неоднородностей $\rho_s(z)$ (При изменении $\rho_s(z)$ изменяется скорость звука, и среда становится оптически неоднородной), возвращается на источник. Измеряя температуру источника как функцию времени $T_h(t)$ и зная $N(t)$, можно определить функцию $\rho_s(z)$.

При изменении температуры на 10^{-6} К граница He I-He II смещается на 1 см, и фиксирование этой границы, как уже упоминалось, требует очень высокой стабилизации. На самом деле жесткое условие фиксированности границы относительно источника не требуется. Действительно, вне "корреляци-

онной" области зависимость $\rho_s(z)$ известна $\rho_s(z) = 1.43\rho_\lambda(t(z-z_0))^{2/3}$. Отклонение $\rho_s(z)$, полученное из эксперимента от этой зависимости, автоматически укажет на то, что импульс побывал в "корреляционной" области. Практически это означает, что выполняя ряд измерений и обрабатывая их с помощью приведенного ниже аппарата, мы можем выбрать нужные нам измерения. Нам необходимо лишь, чтобы температура менялась не очень быстро.

Поставим корректно краевую задачу. В рассматриваемом случае имеется два обстоятельства, позволяющие значительно упростить уравнения двухсвостной гидродинамики.

При распространении сигнала в среде с переменной оптической плотностью условие линейности $(v_n - v_s)/c_2$ сигнала не будет нарушаться. Поэтому при достаточно слабых сигналах можно

воспользоваться линеаризованной системой уравнений. Кроме того, мы можем пренебречь возбуждением первого звука, ибо в линейном случае величина, характеризующая это зацепление β_T , исчезающе мала. Тогда можно положить

$$\delta\rho = \delta p = 0, \quad j_z = \rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} = 0.$$

В рамках сделанных допущений уравнения, описывающие распространение сигнала второго звука, имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\rho_s}{\rho_n}v_s\sigma\right) = 0, \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} - \sigma \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (4.77)$$

На границе с источником ($z = 0$) выполняются следующие соотношения:

$$T - T_s = Rq = -R\sigma T\rho_s v_s, \quad (4.78)$$

$$C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - \sigma\rho_s T v_s = N(t). \quad (4.79)$$

Здесь C_s - теплоемкость единицы площади поверхности источника, а T_s - ее температура; R - тепловое сопротивление границы.

Условие (4.78) выражает скачок температуры на границе гелий - твердое тело. Коэффициент R складывается из обычного сопротивления Капицы, связанного с акустическим рассогласованием, и из сопротивления, связанного с градиентом температуры в прилежащем к твердому телу слое гелия (см. статью Цоя с соавторами [104]). Условие (4.79) выражает баланс тепла на границе. При этом пренебрегается потоком тепла в подложку напыленного источника.

Из (4.76)-(4.77) обычным способом получается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - c_2^2(z) \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + H_1(z) \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + H_2(z) v_s = 0. \quad (4.80)$$

Здесь $c_2(z)$ это z - зависящая скорость второго звука

$$c_2^2(z) = \frac{\sigma^2 T \rho_s(z)}{C \rho_n}. \quad (4.81)$$

Величины $H_1(z)$ и $H_2(z)$ равны

$$H_1(z) = \frac{\sigma^2 T}{C \rho} \frac{\partial \rho_s}{\partial z}, \quad H_2(z) = \frac{\sigma^2 T}{C \rho} \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial z^2}. \quad (4.82)$$

Из (4.78), (4.79) получается условие на границе с источником

$$\frac{\partial v_s}{\partial z} + \left[\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} + \frac{C}{C_s} \right] v_s \Big|_{z=0} = B(t). \quad (4.83)$$

Здесь C - теплоемкость единицы объема гелия, а $B(t)$ - следующая величина:

$$B(t) = \frac{RC \sigma_T}{\sigma \rho_s} \frac{\partial^2 T_s}{\partial t^2} - \frac{RC}{\sigma T \rho_s} \frac{\partial N(t)}{\partial t} + \frac{C}{C_s \sigma \rho_s C} N(t). \quad (4.84)$$

Кроме того, мы располагаем измеряемой величиной $v_s(0, t)$, которая связана с температурой стенки следующим образом:

$$v_s(0, t) = \frac{C_s \partial T_s / \partial t - N(t)}{\sigma T \rho_s} = f(t). \quad (4.85)$$

Функция $f(t)$ называется информацией. Наша цель – по функции $f(t)$ восстановить вид $c_2(z)$.

Решение этой задачи проводится по следующей схеме. Каким-либо образом находится решение прямой задачи (4.80)-(4.84). Это решение в точке $z = 0$ (естественно, равное $f(t)$) выражается в виде некоторого функционала от коэффициентов уравнения. Обращая этот функционал (если это удастся), можно выразить коэффициенты уравнения - скорость звука $c_2(z)$ и ее производные через информацию $f(t)$. Реализация этой схемы, основанная на использовании метода Фурье и метода интегральных уравнений для прямой задачи изложена в работе автора [103].

5 Нелинейные волны второго звука в сверхтекучем гелии

5.1 Особенности исследования нелинейных волн в He II

Следующим этапом исследования звуков в сверхтекучем гелии явилось изучение нелинейных волн. В сверхтекучем гелии могут существовать нелинейные волны первого и второго звуков. Причем, локальные скорости частичек среды в волне намного превышают критические скорости рождения вихрей в случае стационарных движений. Связано это с тем, что для образования вихрей требуется конечное время, больше характерных периодов волны, и механизм срыва сверхтекучести не успевает сработать. Это и дает указанную возможность осуществлять в гелии интенсивный нестационарный теплообмен. К одной из первых работ, посвященных нелинейным волнам второго звука в гелии, следует, по всей видимости, отнести работу Осборна [105]. Осборн наблюдал эволюцию прямоугольного импульса второго звука. Характерные потоки у него были порядка $W \sim 1.3$ вт/см². Этим потокам соответствуют скорости движения ~ 4 м/сек, при этом параметр линеаризации - $w/c_2 \sim 1/5$, т.е. ситуация явно нелинейная. Осборн наблюдал превращение прямоугольного импульса в зубец. Попытку теоретического объяснения сделал Темперли. Однако он основывался на неверных уравнениях Тиссы к тому же допустил ряд допущений. Более строго эта задача была решена Халатниковым [106], который использовал аппарат, известный в обычной газодинамике под названием инвариантов Римана или простых волн. Халатников получил (в квадратичном по w/c_2 приближении), что тепловая волна движется таким образом, что скорость движения каждого участка зависит от значения амплитуды в этой точке. Добавка к скорости звука дается следующим выражением:

$$\Delta c_2 = \alpha_2(T)v_n \quad (5.1)$$

Здесь $\alpha_2(T)$ - функция температуры, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это свойство может приводить к образованию ударных волн как на переднем, так и на заднем фронте волны. В обычных средах, как известно, ударные волны образуются лишь на переднем фронте, ударные волн разрежения возникают при специальных условиях, вблизи критической точки. Это было показано в работе Борисова, Борисова, Кутетеладзе, Накорякова [107].

Халатников получил хорошее согласие с экспериментами Осборна [105]. Десслер и Фейрбэнк [108] исследовали нелинейный второй звук в большом интервале температур. Они получили величину $\alpha_2(T)$ экспериментальным путем, хорошо согласующуюся с теоретическими результатами Халатнико-

ва. Автором монографии была исследована аналогичная ситуация вблизи T_λ , при этом учитывались процессы диссипации и дисперсии, С помощью аппарата так называемых квазипростых волн получено уравнение, которое может быть решено аналитически, и с помощью которого можно проследить за эволюцией нелинейного импульса второго звука. К нелинейным явлениям следует отнести взаимодействие тепловых волн со стационарным тепловым потоком. Эту задачу решил Халатников [50]. Эта же задача в более общей постановке была решена Архиповым [109]. Динамика импульсов второго звука несколько позднее изучалась в работах Гуляева [110]. С точки зрения теории квазилинейных уравнений вопрос об ударных волнах в гелии рассматривался Хиллсом [111].

В сверхтекучем гелии, как и во многих других средах, наблюдаются "стандартные" нелинейные явления, такие как укрупнение профиля волны, образование разрывов, самофокусировка волновых пакетов и т.д. В то же время имеется род специфических черт, присущих лишь этой жидкости. Специфика Не II с точки зрения нелинейной акустики состоит прежде всего в том, что в нем имеется две связанные волновые моды, одна из которых - температурные волны, представляет собой уникальное явление, не имеющее аналогов в классических средах. Наличие двух или нескольких волновых мод, конечно, не является исключением. Такая же ситуация для волн в плазме или, например, в океане. Однако, в отличие от этих систем, волны в гелии в большом диапазоне частот практически не обладают дисперсией скоростей звуков. В некоторых случаях, например, при рассмотрении одномерных волн, отсутствие дисперсии является упрощающим обстоятельством, т.к. распространение волн описывается системой уравнений первого порядка. В других случаях, например, при использовании гамильтоновских методов, отсутствие дисперсии затрудняет анализ, так как с дисперсией связан малый параметр, по которому можно построить теорию возмущений.

К особенностям Не II следует отнести сильную зависимость его свойств от температуры. Поскольку акустические явления в конечном счете обусловлены "игрой" термодинамических величин (с формальной точки зрения), то они также могут сильно зависеть от температуры. С одной стороны, это приводит к новым интересным эффектам, таким как, например, укрупнение задних фронтов волн или сингулярность коэффициента нелинейности. С другой стороны, быстрое изменение термодинамических свойств от температуры требует строгого обоснования того или иного приближения в уравнениях движения, а также, в ряде случаев, отдельного рассмотрения различных температурных областей. Особенность гелия состоит также в том, что при некоторых, вполне достижимых параметрах звуковых волн, он резко меняет свои свойства вплоть до того, что становится неадекватной выбранная гидродина-

мическая модель. Так, достаточно мощные и длительные тепловые импульсы развивают в гелии вихревую структуру, описание которой отсутствует в классических уравнениях двухскоростной гидродинамики. Образовавшиеся вихри могут в значительной степени изменить законы динамики породивших их импульсов, что приводит к ряду интересных и важных эффектов.

5.2 Динамика интенсивных импульсов второго звука

Система уравнений гидродинамики сверхтекучего гелия является достаточно громоздкой. Упростим ее, оставив в ней члены до второго порядка малости по отклонениям от равновесных значений и опуская эффекты преобразования звуков друг в друга. В предположении отсутствия потока массы ($\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s = 0$, что выполнялось при проведении большинства экспериментов, и полагая $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$, $T = T_0 + T'$ (T_0 – температура невозмущенного жидкого гелия; σ_0 – энтропия на единицу массы при температуре T_0 ; T' , σ' – отклонения от равновесных значений), и используя соотношения $\sigma(p, T, w) = \sigma(p, T) + 1/2w^2 \partial(\rho_n/\rho)/\partial T$ и $d\mu = -\sigma dT + dp/\rho - (\rho_n/\rho)w dw$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \left[\frac{\rho_{s0}}{\rho} - \frac{\sigma_0 (\rho + \rho_n)}{\sigma_T \rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \\ \frac{\rho_{s0}}{\rho} \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_T} + \left(1 - \frac{\sigma_{TT} \sigma_0}{\sigma_T^2} - \frac{\sigma_0}{\rho_{s0} \sigma_T} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \sigma' \right] \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{3\rho_{s0}}{\rho} - \frac{\sigma_0 \rho_s}{\sigma_T \rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_n} \left[\sigma_0 + \left(\sigma_T - \frac{\sigma_0}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \sigma' \right] \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения: $\sigma_T = \partial \sigma / \partial T$, $\sigma_{TT} = \partial^2 \sigma / \partial T^2$;

С помощью системы уравнений (5.2)–(5.3) можно исследовать динамику мощных тепловых импульсов в сверхтекучем гелии. Найдем, с какой скоростью c_2 движется точка, соответствующая заданному отклонению σ' от равновесной температуры. В этом разделе следует различать скорость малых (c_{20}), и конечных (c_2) возмущений. В одномерном линейном случае распространения волн в одном направлении (в сторону больших x) все параметры движения, происходящего с постоянной амплитудой, подчиняются соотношению: $\partial/\partial t = -c_{20}(\partial/\partial x)$. По сути дела, это предположение означает, что возмущение энтропии σ' и относительной скорости w не являются независимыми, они функционально связаны друг с другом $w = w(\sigma')$. В нелинейном случае этот результат также справедлив. Такие решения называются простыми волнами,

соответствующий математический аппарат изложен в математических учебниках (смотри, например, известную книгу Рождественского и Яненко [112]). Подставляя (неизвестное пока) соотношение $w = w(\sigma')$ в систему уравнений (5.2) –(5.3) и действуя по правилам $\partial w/\partial t = (\partial w/\partial \sigma')(\partial \sigma'/\partial t)$ и $\partial w/\partial x = (\partial w/\partial \sigma')(\partial \sigma'/\partial x)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений на величины $\partial \sigma'/\partial t$ и $\partial \sigma'/\partial x$. Из условия совместности этой системы относительно $\partial \sigma'/\partial t$ и $\partial \sigma'/\partial x$ находим искомое соотношение $w = w(\sigma')$. Используя, далее полученное соотношение в любом из соотношений (5.2) –(5.3) можно получить уравнение для эволюции относительной скорости w . Оно имеет следующий вид (в нелинейных членах взято $w = \frac{\sigma \rho}{c_2 \rho_n} \sigma'$):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (c_{20} + \alpha_{2w}(T)w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

С точки зрения эксперимента удобнее, однако, иметь дело не с относительной скоростью w , а со скоростью нормальной компоненты $v_n = (\rho_s/\rho)w$, которая связана с тепловой нагрузкой посредством формулы (3.57). Далее мы будем работать с переменными v_n и w взаимозаменяемо. Для переменной v_n уравнение для эволюции имеет вид, близкий к соотношению (5.4)

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_{20} + \alpha_2(T)v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0. \quad (5.5)$$

Здесь величина $\alpha_2(T)$ равна

$$\begin{aligned} \alpha_2(T) &= \frac{3\rho_s}{\rho} - \frac{3\sigma(\partial\rho_n/\partial T)}{2\rho_n\sigma_{TT}} - \frac{\sigma_0\sigma_{TT}\rho_s}{2\sigma_T^2\rho} = \\ &= \frac{\rho_s\sigma}{\rho\sigma_T} \frac{\partial}{\partial T} \ln(c_{20}^3\sigma_T). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Величина $\alpha_2(T)$ является принципиальной характеристикой для исследования динамики интенсивных импульсов второго звука. Формула (5.6) получена впервые Халатниковом [1]. При температурах выше 1.884 К и в интервале 0.4 – 0.9 К коэффициент $\alpha_2(T) < 0$, в остальной области $\alpha_2(T) > 0$ (см. Рис. 5.23).

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при начальном возбуждении плотности ρ' (или v) волну можно описывать переменной $v(x, t)$ уравнение для которой имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_{10} + \alpha_1(T)v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5.7)$$

где коэффициент нелинейности первого звука $\alpha_1(T)$ равен

$$\alpha_1(T) = 1 + \frac{\rho}{2c_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} = 1 + \frac{\partial \ln c_1}{\partial \rho} \quad (5.8)$$

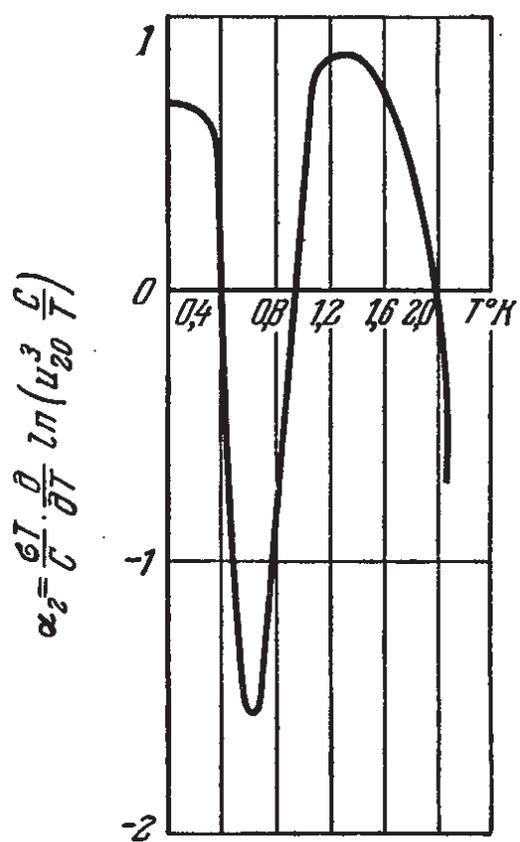


Рис. 5.23: Зависимость коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ от температуры [1]. Точки соответствуют результатам экспериментальной работы [108]

Решение задачи с граничными условиями для уравнений вида(5.4), (5.7) особого труда не представляет (см., например, [113]). Однако в целях большей наглядности мы опишем решение, исходя из качественных соображений. При бесконечно малых амплитудах (линейный случай) уравнения (5.4), (5.7) описывают распространение начальных возмущений как целого, со скоростями c_{20} и c_{10} соответственно. При конечных, но малых амплитудах выражения $\alpha_2(T)v_n$ (или $\alpha_1(T)v$) в уравнениях (2.17), (2.19) можно трактовать как добавки к скоростям c_{20} и c_{10} распространения звуков, которые, однако, зависят от местного значения колеблющейся величины v_n (или v). В частности, для второго звука имеем

$$c_2 = \left(\frac{\rho_s \sigma_0^2}{\rho_n \sigma_T} \right)^{1/2} + \left[\frac{3\rho_s}{\rho} - \frac{3\sigma(\partial\rho_n/\partial T)}{2\rho_n \sigma_T} - \frac{\sigma_0 \sigma_{TT} \rho_s}{2\sigma_T^2 \rho} \right] v_n = c_{20} + \alpha_2 v_n, \quad (5.9)$$

где

$$c_{20}^2 = \frac{\rho_s \sigma_0^2}{\rho_n \sigma_T}, \quad (5.10)$$

Это означает, что различные участки волнового импульса движутся с различными скоростями, и волновой профиль (вид волны в координатах v_n , $x - c_{20}t$ или v , $x - c_{20}t$) деформируется. На нем возникает укрупнение и образуется ударный фронт, после чего уравнения перестают быть справедливыми и требуются дополнительные соображения о дальнейшей эволюции волн.

Случай первого звука вплоть до буквенных обозначений совпадает обычной газодинамикой. Величина $\alpha_1(T)$ для гелия равна примерно четырем, т. е. является положительной $\alpha_1(T) > 0$. В результате импульс первого звука с положительным возмущением плотности $\rho' > 0$, ($v > 0$) ведет себя следующим образом: Более интенсивные участки движутся с большей скоростью, горб догоняет основание волны, передний фронт становится круче и на нем образуется разрыв. Схематически эволюция импульсов изображена на Рис. 5.24, а. характерное время образования разрыва $\tau_p \sim (\alpha_1(T)vk)^{-1}$, где k^{-1} — пространственный размер возмущения. В случае отрицательного импульса $\rho' < 0$, ($v < 0$), горб отстает, и разрыв образуется на заднем фронте волны. В Фурье представлении процесс описывает рождение высших гармоник.

Несколько интереснее случай звука. Коэффициент является сложной функцией температуры (Рис.5.23). Из рисунка видно, что имеются области как положительных, так и отрицательных значений величины. Если $\alpha_2(T) < 0$, то импульс энтропии с $\sigma' > 0$ ($v_n > 0$) укрупняется и образует разрыв на заднем фронте волны (Рис.5.24, б). Для положительных $\alpha_2(T) > 0$ ситуация совпадает со случаем первого звука.(Рис. а). При температурах $T_\alpha \approx 1.88$ К и $T_\alpha \approx 0.9$ К величина $\alpha_2(T) = 0$ равна нулю, квадратично нелинейный член

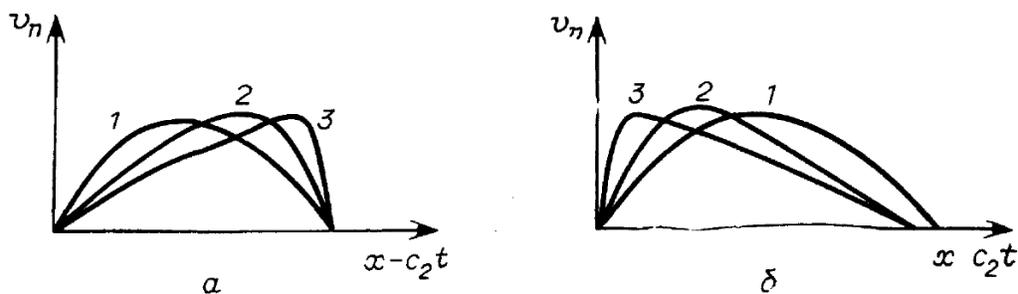


Рис. 5.24: Схематическое изображение эволюции импульса первого звука $\alpha_2(T) > 0$ (а) и импульса второго звука при отрицательном коэффициенте нелинейности $\alpha_2(T) < 0$ (б). Волновые профили изображены в системах координат, движущихся с соответствующими скоростями звуков. Цифрами 1—3 изображены последовательные моменты времени

исчезает и эволюция импульсов проистекает под влиянием членов следующего, третьего порядка малости. Образование разрывов на заднем фронте волны — явление связанное с отрицательностью величины $\alpha_2(T) < 0$. В свою очередь, отрицательность $\alpha_2(T)$ связана с уменьшением скорости второго звука с температурой $\partial c_{20}/\partial T$ (хотя это не единственный фактор, см. выражение (5.6)). В обычных классических случаях также может быть ситуация, что скорость звука падает при повышении давления такое случается например вблизи критической точки, в этом случае могут существовать ударные волны разрежения это была экспериментально обнаружены в работе [107].

После образования разрыва эволюцию импульса можно описать с помощью закона сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} v_n dx = 0, \quad (5.11)$$

который следует из уравнения (5.4), (для определенности возьмем случай второго звука). Из этого закона, в частности, следует, что разрыв с амплитудой Δv_n движется со скоростью U_p

$$U_p = c_{20} + \frac{1}{2} \alpha_2(T) \Delta v_n \quad (5.12)$$

Качественно эволюция волны изображена на Рис.5.25. Поскольку разрыв движется (в сопровождающей системе) со скоростью $\alpha_2(T) \Delta v_n / 2$ (5.12), импульс увеличивает свою пространственную протяженность. Из закона сохранения (5.11) для величины $\int_{-\infty}^{\infty} v_n dx$ следует, что амплитуда разрыва Δv_n должна уменьшаться. Асимптотическое решение описывается треугольником, амплитуда которого затухает со временем как $t^{-1/2}$.

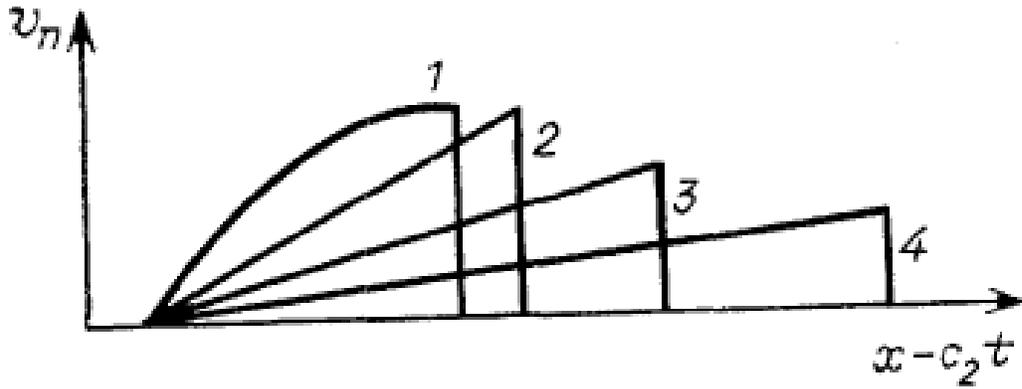


Рис. 5.25: Схематическое изображение распространения импульсов 2-го звука после образования разрыва. Коэффициент нелинейности $\alpha_2(T) > 0$

Обратим внимание на то, что, несмотря на уменьшение амплитуды, все равно ни на каком этапе распространения волны нельзя перейти к линейному случаю. Описанное поведение интенсивных тепловых импульсов наблюдалось во многих экспериментальных работах. При этом получено хорошее количественное согласие для величины v_n и для времени пролета импульса, рассчитанного по уравнению (5.12) (см. работу Луцета с соавторами [113])

5.3 Затухающие волны. Диссипативный случай, квазипростые волны, уравнение Бюргерса

В этом пункте мы рассмотрим влияние членов на распространение одномерных волн. Учесть члены при выводе уравнений для бегущих волн можно в рамках теории возмущений, рассматривая их как малые. Фактически необходимо, чтобы нелинейные и вязкие члены представляли величины одного порядка малости. Получим уравнение для волны второго звука. Дополняя диссипативными членами уравнения системы (5.2) –(5.3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \left[\frac{\rho_{\sigma 0}}{\rho} - \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \frac{(\rho + \rho_n)}{\rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] w \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \\ \frac{\rho_{\sigma 0}}{\rho} \left[\frac{\sigma_0}{\sigma_T} + \left(1 - \frac{\sigma_{TT} \sigma_0}{\sigma_T^2} - \frac{\sigma_0}{\rho_{\sigma 0} \sigma_T} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \sigma' \right] \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{3\rho\sigma_0}{\rho} - \frac{\sigma_0\rho_s}{\sigma_T\rho\rho_n} \frac{\partial\rho_n}{\partial T} \right) w \frac{\partial w}{\partial x} \\ & + \frac{\rho}{\rho_n} \left[\sigma_0 + \left(\sigma_T - \frac{\sigma_0}{\rho_n} \frac{\partial\rho_n}{\partial T} \right) \sigma' \right] \frac{\partial\sigma'}{\partial x} = b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Величина b равна

$$b = \frac{\rho_s}{\rho\rho_n} \left[\frac{4}{3}\eta - (\zeta_1 + \zeta_4)\rho + \zeta_2 + \zeta_3\rho^2 \right]. \quad (5.15)$$

В уравнениях (5.13) -(5.14) опущены члены, имеющие третий порядок малости. В отсутствии диссипативных членов эти уравнения имеют решение в виде бегущей волны, в которой имеется функциональная связь между переменными $w = w(\sigma')$ (см.раздел 5.2) При диссипации это соотношение не выполняется. Можно, однако, предположить, что изменит это на некоторую величину второго порядка $\psi(x, t)$

$$w = w(\sigma') + \psi(x, t). \quad (5.16)$$

Решения типа (5.16) называются квазипростыми волнами (см. книгу Карпмана [101]). Функция $\psi(x, t)$ может быть найдена методами теории возмущений (см., книгу Карпмана [101]) Используя затем найденную зависимость (5.16) в системе (5.13) -(5.14), а также используя соотношение $v_n = (\rho_s/\rho)w$, можно получить уравнение для величины v_n

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_{20} + \alpha_2(T)v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \quad (5.17)$$

где

$$\mu = \frac{\rho_s}{\rho\rho_n} \left[\frac{4}{3}\eta - (\zeta_1 + \zeta_4)\rho + \zeta_2 + \zeta_3\rho^2 \right]. \quad (5.18)$$

Уравнение (5.17) является знаменитым уравнением Бюргерса. Это уравнение описывает стандартную ситуацию, когда исследуются нелинейные волновые процессы во втором порядке малости с учетом диссипации. Линеаризованное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + c_{20} \frac{\partial v_n}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \quad (5.19)$$

описывает эволюцию слабо затухающей звуковой волны в линейном приближении. Ему удовлетворяют решения вида

$$v_n = v_{n0} e^{-\mu k^2 t} \exp[ik(x - c_{20}t)]. \quad (5.20)$$

Другим замечательным качеством уравнения Бюргерса (5.17) является то оно имеет аналитическое решение (см. оригинальную статью Хопфа [114]), покажем это. В движущейся со скоростью c_{20} системе отсчета, и при использовании замены $\alpha_2(T)v_n \rightarrow v_n$ уравнение Бюргерса (5.17) трансформируется к виду

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi^2}. \quad (5.21)$$

где $\xi = x - c_{20}t$. Сделав подстановку

$$v_n = -2\mu \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \xi} \quad (5.22)$$

получим после некоторых вычислений

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) = 0. \quad (5.23)$$

Полученное уравнение удовлетворяется, если φ эволюционирует в соответствии с классическим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}. \quad (5.24)$$

Из изложенного следует (см. оригинальную статью Хопфа [114]), что решение уравнения Бюргерса при начальном условии $v_n(\xi, 0) = v_{n0}(\xi)$ имеет вид (5.22), где

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-\frac{(\xi - \eta)}{4\mu\tau} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\eta} v_{n0}(\eta') d\eta' \right] \quad (5.25)$$

Выкладки, проведенные в соответствии с формулой (5.25) показывают, что первоначальное поведение волны близко к бездиссипативному случаю. Например, нелинейный член $\alpha_2 v_n \frac{\partial v_n}{\partial x}$ попрежнему описывает укрупнение волнового профиля. Однако, в отличие от невязкого случая, это укрупнение не приводит к образованию разрыва. Действительно, по мере укрупнения, малый вначале диссипативный $\mu \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ член за счет роста градиента скорости возрастает и препятствует дальнейшему искажению волнового профиля. Сравнивая по порядку величины нелинейный и вязкий члены в (5.17), найдем, что характерная протяженность волнового фронта

$$\mu \frac{\Delta v_n}{(\delta x)^2} \sim \alpha_2 \frac{(\Delta v_n)^2}{\delta x} \Rightarrow \delta x \sim \frac{\mu}{\alpha_2 \Delta v_n} \quad (5.26)$$

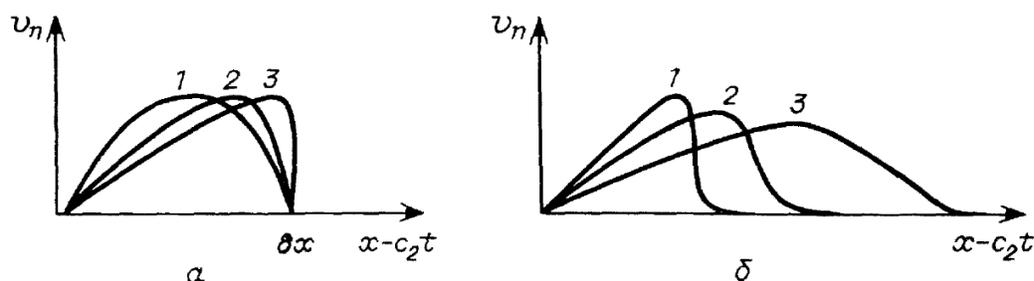


Рис. 5.26: Эволюция нелинейного импульса второго звука в диссипативной среде. На первом этапе (а) происходит укрупнение волнового профиля и образование «размытого» ударного фронта. На втором этапе (б) происходит увеличение длительности и соответствующее уменьшение амплитуд

где Δv_n — амплитуда импульса. Начальная стадия эволюции импульса изображена схематически на Рис.5.26,а. Дальнейшая эволюция волны происходит в соответствии с законом сохранения для величины $\int_{-\infty}^{\infty} v_n dx = 0$ (см. предыдущий раздел), который для уравнения Бюргерса также имеет место. Импульс увеличивает свою протяженность, а его амплитуда падает таким образом, что площадь волнового профиля остается постоянной, по мере уменьшения амплитуды растет протяженность крутого фронта

Заключительный этап эволюции, когда «размытие» фронта δx становится сравнимым с размером импульса, может быть описан в рамках линейной теории. Этим распространение затухающей волны отличается от бездиссипативного где предельный переход к линейной теории отсутствует. Схематически эволюция импульса после укрупнения переднего фронта изображена на Рис.5.26, б.

5.4 Дисперсия второго звука

Решение (5.20) означает, что имеется следующая связь между волновым вектором \mathbf{k} и частотой $\omega_{\mathbf{k}}^2$ (здесь 2 это индекс, означающий вторую волновую моду- не степень!) дисперсионное соотношение следующего вида

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = c_{20} |\mathbf{k}| + i\mu k^2 \quad (5.27)$$

Выражение (5.27) может быть рассмотрено как первые члены разложения частоты $\omega_{\mathbf{k}}^2$ по степеням волнового вектора \mathbf{k} . Второе слагаемое, описывающее затухание, является мнимой величиной. Следующий член разложения описывает дисперсию скорости звука. Запишем, с учетом дисперсии, частоту второго звука $\omega_{\mathbf{k}}^2$ в таком виде:

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = c_{20} |\mathbf{k}| + iD_2 k^2 + D_3 k^3 \quad (5.28)$$

В отличие от (5.27) обозначим здесь коэффициент затухания через D_2 , имея в виду, что он может отличаться от величины μ . Фактически дисперсия (как, впрочем, и затухание) связана с наличием внутренней структуры временной или пространственной, и выражение (5.28) суть разложение величины $\omega_{\mathbf{k}}^2/c_2k$ по степеням безразмерного параметра kl , где l внутренний масштаб системы. Например, в обычной акустике l определяется длиной свободного пробега молекул. При этом первое слагаемое в (2.27) соответствует приближению Эйлера, второе – приближению Навье–Стокса, третье учитывает Барнеттовские поправки. В гелии в низкотемпературной области в качестве l может выступить длина пробега квазичастиц.

Одной из областей, где возможно существенное влияние дисперсии, является окрестность λ перехода (см. 3.6). Вблизи T_λ дисперсия скорости второго звука обусловлена эффектами и взаимодействием звуковой волны с развитыми флуктуациями термодинамических величин [[1], [66], [115]]. Согласно флуктуационной теории фазовых переходов, закон дисперсии второго звука является функцией от безразмерного параметра $k\xi$, где ξ – корреляционный радиус (см. [115]), Перепишем с учетом сказанного выражение (2.27) в следующем виде:

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = c_{20} |\mathbf{k}| (1 + iA_2k\xi + A_3(k\xi)^2). \quad (5.29)$$

Коэффициент A_2 может быть определен из измерений затухания второго звука или экспериментов по рассеянию света (см. статью Вайнена [116]) и составляет величину порядка $A_2 \sim 1$. Сложнее обстоит дело с определением величины A_3 . Дело в том, что дисперсия очень мала и прямое ее измерение методами линейной акустики практически невозможно. Действительно, даже такие рекордные для второго звука частоты как $\nu \sim 10^4$ Гц, приводят к относительному изменению скорости $\Delta c_2/c_2$, равному 10^{-6} при $T_\lambda - T \sim 1$ мК (при этом для оценки использовано, что A_3 порядка единицы). В нелинейном случае, как можно видеть из предыдущего изложения, в волне самопроизвольно возникают высокочастотные гармоники, и дисперсия может сыграть существенную роль в эволюции звуковых импульсов.

С учетом дисперсии эволюционное уравнение для волны второго звука имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_{20} + \alpha_2(T)v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3}. \quad (5.30)$$

Оно может быть получено подобно уравнению Бюргерса (5.17), в предположении, что члены в правой части не превосходят по величине нелинейное слагаемое. Соотношение (5.30) также часто встречается в теории нелинейных волн и носит название уравнения Кортевега де Вриза – Бюргерса.

Если параметры волны таковы, что первое слагаемое в правой части уравнения КДФБ существенно превосходит второе, то дисперсией можно пренебречь, и эволюция волны происходит, как это описано в предыдущем пункте. В обратном случае, когда диссипация мала, соотношение (5.30) сводится к известному уравнению КДВ (см., например, [101]). Уравнение КДВ решается аналитически с помощью так называемого метода обратной задачи теории рассеяния (МОЗТР). Одним из наиболее ярких результатов МОЗТР является вывод о распаде начального импульса на ряд отдельных возмущений солитонов, имеющих неизменную форму и движущихся с постоянными, зависящими от амплитуд скоростями. Подробности, связанные с МОЗТР и решением уравнения КДВ, можно найти в монографии Захарова с соавторами [117].

Реально для гелия начальные импульсы, как правило, не содержат высоких гармоник, и их эволюция на первой стадии происходит в соответствии с уравнением Бюргера. Однако по мере укрупнения профиля волны член с третьей производной в (5.30) растет, и дисперсия начинает влиять на эволюцию волны. Как показывают численные исследования уравнения КДВБ (5.30), профиль волны может приобрести солитонный вид, а фронт приобретает осциллирующую структуру. Критерий, при котором возможно образование этих солитонообразных всплесков, можно получить, сравнивая диссипативный и дисперсионный члены в уравнении КДВБ (2.29). Член со второй производной имеет величину порядка $D_2 \Delta v_n / (\delta x)^2$, где v_n — амплитуда импульса второго звука. Дисперсионный член равен $D_3 \Delta v_n / (\delta x)^3$. Выбирая в качестве величину «размытия» δx ударного фронта $\delta x \sim D_2 / \alpha_2(T) \Delta v_n$, получим, что дисперсионный и диссипативный члены сравнимы при условии

$$\sqrt{\alpha_2(T) D_3 \Delta v_n} \sim D_2 \quad (5.31)$$

Более строгим образом критерий, при котором возможно наблюдение осциллирующей структуры фронта, может быть получен рассмотрением конкретного вида начального возмущения. Например, для стационарной ударной волны критерий типа (5.31) приведен в следующем разделе.

В связи с рассмотрением распространения второго звука в окрестности λ перехода, представляется важным рассмотреть поведение нелинейного члена $\alpha_2(T) v_n \partial v_n / \partial x$ в зависимости от температуры. Из формулы (5.6) и соотношений скейлинга следует, что $\alpha_2(T) \propto (T_\lambda - T)^{-1}$ т.е. быстро возрастает по мере приближения к T_λ (см. Рис. 5.27).

В связи с этим нужно обсудить правомерность линейной постановки акустических задач вблизи перехода. Скорость второго звука c_2 по мере приближения к T_λ уменьшается, $c_2 \propto (T_\lambda - T)^{1/3}$, следовательно, увеличивается (при постоянной амплитуде накачки $\Delta v_n / c_2$) параметр, по которому производится формальная линеаризация уравнений. Но даже если условие выполняется,

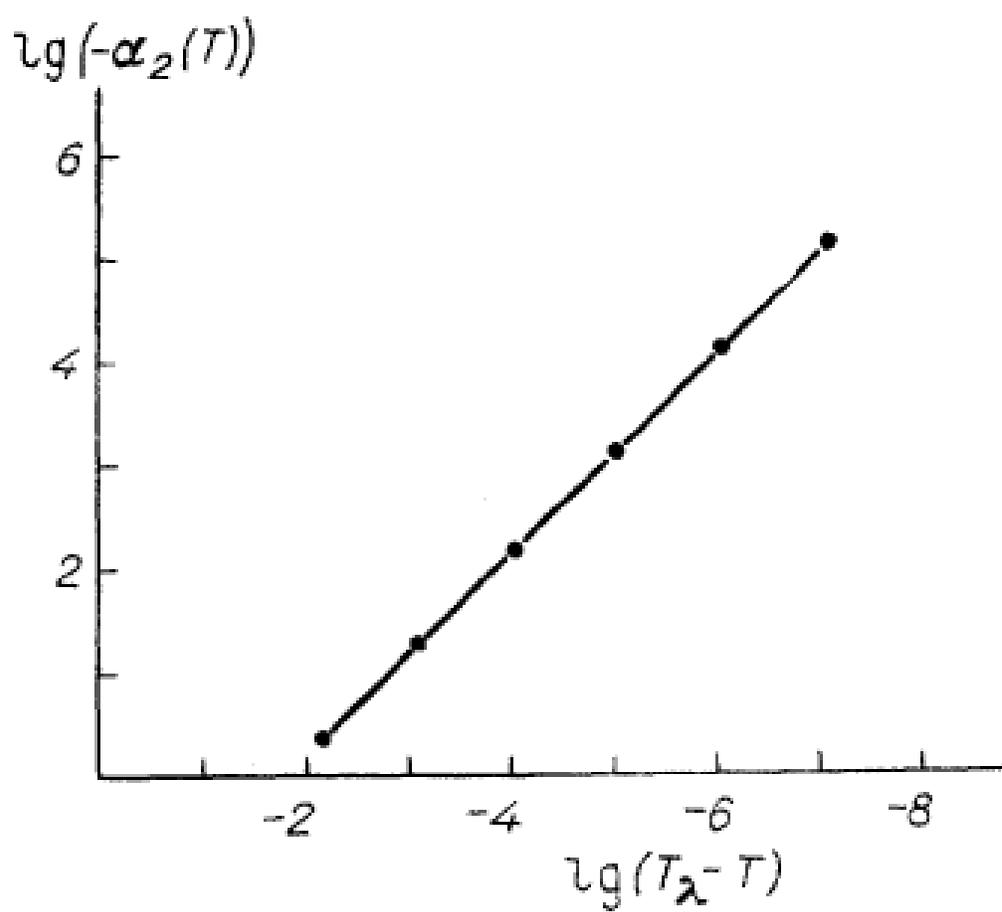


Рис. 5.27: Коэффициент $\alpha_2(T)$ вблизи λ - точки в логарифмических координатах

нелинейный член все равно может оказаться немалым из-за большой величины $\alpha_2(T)$. Это следует иметь в виду при изучении He II в области фазового перехода акустическими методами. Вполне возможно, что завышенное значение коэффициента поглощения второго звука, полученное в работе Тайсона [95], обусловлено незаконной линейной интерпретацией эксперимента.

5.5 Стационарные решения уравнения Бюргерса и КДВБ.

Полученные в предыдущих разделах уравнения Бюргерса и КДВБ имеют стационарные решения в виде бегущей со скоростью U волны неизменного профиля, $v_n(x, t) = v_n(x - Ut)$. Получим сначала такое решение для уравнения Бюргерса. Подстановкой $v_n(x, t) = v_n(x - Ut)$ соотношение (5.17) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(-U + c_2 + \alpha_2(T)v_n) v_n' = \mu_2 v_n'' \quad (5.32)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу $\xi = x - Ut$. Интегрирование уравнения (2.31) при граничных условиях $v_n(\infty) = 0$, $v_n'(\infty) = 0$ приводит к следующему результату:

$$v_n = \frac{\Delta v_n}{\left[1 + \exp\left(\frac{\alpha_2(T)\Delta v_n}{2\mu}\xi\right)\right]}. \quad (5.33)$$

Решение (5.33) представляет собой ступеньку с «размытым» фронтом, движущуюся слева направо со скоростью U , и скачком Δv_n величины v_n связанным с U следующим соотношением:

$$-\frac{2U}{\alpha_2} = \Delta v_n \Rightarrow U = c_{20} + \frac{\alpha_2 \Delta v_n}{2}. \quad (5.34)$$

Ширина переходной области равна $2\mu/\alpha_2(T)\Delta v_n$. Схематически решение изображено на Рис. 5.28. При стремлении $\mu \rightarrow 0$ ширина $2\mu/\alpha_2(T)\Delta v_n$ также стремится к нулю, решение переходит в ударную волну второго звука, описанную в разделе (5.2).

Рассмотрим случай, когда коэффициент нелинейности второго звука $\alpha_2(T)$ отрицательный. Из формулы для решения (5.33) видно, что скорость v_n на бесконечности равна нулю ($v_n(+\infty) = 0$) только при условии, что ударный фронт движется со скоростью, большей линейной скорости звука c_{20} . Поэтому, если коэффициент нелинейности второго звука $\alpha_2(T)$ отрицательный, то удовлетворить этому решению можно лишь в случае, когда перепад скорости Δv_n будет отрицательный. т.е. картинка будет перевернута "вверх ногами и мы имеем случай распространения ударной волны разрежения.

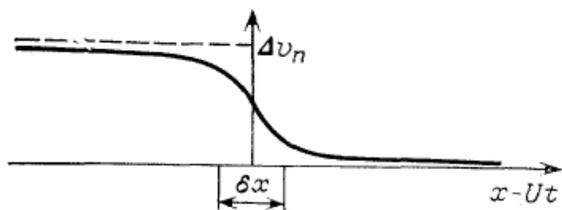


Рис. 5.28: Профиль ударной волны второго звука в диссипативной среде

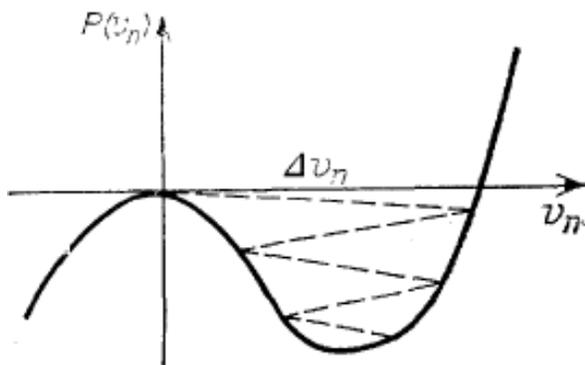


Рис. 5.29: Вид потенциала $P(w)$

Выясним теперь, каким образом влияет дисперсия на вид ударной волны. Подставляя решение $v_n(x, t) = v_n(x - Ut)$ в уравнение (5.30) и проинтегрировав его один раз при условии $v_n(\infty) = 0$, $v_n'(\infty) = 0$, $v_n''(\infty) = 0$, получим следующее уравнение второго порядка:

$$-D_3 v_n'' = \alpha_2(T) \frac{v_n^2}{2} + (-U + c_2) D_2 v_n'. \quad (5.35)$$

Уравнение (5.35) в общем виде не решается, однако можно качественно исследовать решение, воспользовавшись механической аналогией, основанной на том, что (5.35) имеет вид уравнения движения частицы массы D_3 в поле с потенциалом, равным

$$P(v_n) = \alpha_2(T) \frac{v_n^3}{6} + (-U + c_2) \frac{v_n^2}{2}. \quad (5.36)$$

и силой трения $D_2 v_n$. Вид потенциала $P(v_n)$ изображен на Рис. 5.29. Роль времени при этом играет величина $-\xi = -x + Ut$. В момент времени $t \rightarrow -\infty$ ($\xi = \infty$) частица находится в начале координат $v_n = 0$. К моменту времени $t \rightarrow \infty$ ($\xi = -\infty$) частица, совершив несколько колебаний, «упадет» на дно ямы.

Такое поведение соответствует решению $v_n(x - Ut)$, изображенному на Рис. 5.30. Оно представляет собой ступеньку, имеющую скачок величины v_n

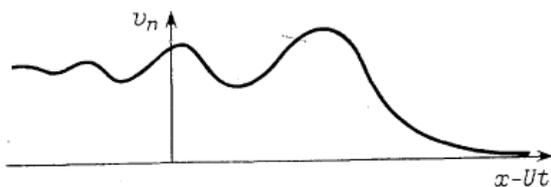


Рис. 5.30: Профиль ударной волны в диспергирующей среде при коэффициенте вязкости меньше критического

равный $v_n = v_n(\infty) - v_n(-\infty)$, который связан со скоростью распространения известным соотношением $U = c_2 + \alpha_2(T)\Delta v_n/2$. Ударный фронт этой ступеньки имеет осциллирующую структуру. При малом трении осцилляции представляют собой солитоны, имеющие амплитуду $3\alpha_2(T)\Delta v_n/2$ движущиеся, разумеется, со скоростью U . Если вязкость велика, движение частицы будет иметь аperiодический характер. Это означает, что фронт волны будет монотонным, как в чисто диссипативном случае.

Значения D_{2cr} , разделяющие осциллирующий и монотонный случаи, можно, как и в предыдущем разделе, получить, сравнивая по порядку величины диссипативный и дисперсионный члены. Эта оценка дает, естественно, выражение типа (5.31). Более точные вычисления (см. книгу [101]) изменяют эту оценку в $\sqrt{2}$ раз, и, таким образом,

$$D_{2cr} = \sqrt{2\alpha_2(T)D_3\Delta v_n}. \quad (5.37)$$

Если правая часть в (5.37) меньше левой $D_2 > D_{2cr}$, то и ударный фронт имеет монотонный вид. В противоположном случае $D_2 < D_{2cr}$, и можно наблюдать осцилляции на фронте ударной волны.

5.6 Кубически нелинейные эффекты

Поведение нелинейных волн второго звука, как было показано ранее, существенно зависит от температуры. В зависимости от знака величины возможно укручение как переднего, так и заднего фронта волны. Особый интерес поэтому вызывает область температур, где $\alpha_2(T)$ обращается в нуль (см. формулу (5.6) и рисунок 5.23) В этом случае квадратично - нелинейные члены отсутствуют, и эволюция волны определяется следующими, кубическими членами в уравнениях движения. В этом приближении на распространение волны второго звука оказывают влияние рожденные ею возмущения плотности и скорости ρ' (или v). Взаимодействие с этими возмущениями, а также нелинейные эффекты третьего порядка «внутри» второй звуковой моды определяют структуру волнового пакета. Кубически -нелинейная среда обладает одним

замечательным свойством. В ней возможно существование нелинейных стационарных (т. е. не изменяющих своего профиля) монохроматических волн вида $w \propto \exp[i(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2 t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, где $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2$ — перенормированная за счет нелинейности частота. Напомним, что в квадратично-нелинейной среде первоначально синусоидальная волна деформируется и превращается в пилообразную.

Задачу о нелинейной монохроматической волне удобно решать в гамильтоновской форме (см раздел 3.5) для величины

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a_{\mathbf{k}}^{\pm 2} \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{r}] d\mathbf{k} \quad (5.38)$$

которая имеет смысл комплексной огибающей волнового пакета. Переход от переменных $a_{\mathbf{k}}^{\pm 2}$ к функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является каноническим, что позволяет, располагая гамильтонианом $H(\Psi(\mathbf{r}, t))$, выписать непосредственно уравнения движения (см. статью автора [118]). Величина $H(\Psi(\mathbf{r}, t))$ находится простым перебором всех вкладов в энергию в данном приближении. Например, вклад от взаимодействия исходной волны с рожденным ею первым звуком можно учесть следующим образом (ср. с работой Захарова и Рубенчика [119] В присутствии первого звука частота $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2$ второго звука изменяется на величину $\delta\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2$

$$\delta\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\partial\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial\rho}\rho' + \frac{\partial\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}. \quad (5.39)$$

Последний член описывает Допплеровское смещение и равен, очевидно, $\mathbf{k}_0\mathbf{v}$. Изменению частоты соответствует изменение квадратичной части гамильтониана такого вида:

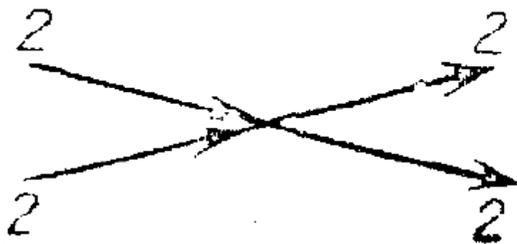
$$\delta H(\Psi(\mathbf{r}, t)) = \int \delta\omega_{2\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^2 a_{-\mathbf{k}}^{-2} d^3\mathbf{k} = \int \delta\omega_{2\mathbf{k}} |\Psi|^2 d^3\mathbf{r}. \quad (5.40)$$

Перебрав таким образом все возможные процессы, можно выписать гамильтониан $H(\Psi(\mathbf{r}, t))$ и, по общим правилам, получить из него следующее уравнение для функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \omega_{2\mathbf{k}}\Psi + \left[V_{\mathbf{k}_0} - \frac{\partial\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial\rho}\frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho} \right] |\Psi|^2 \Psi. \quad (5.41)$$

Здесь $V_{\mathbf{k}_0}$ —вершина процесса Рис. 5.31 (см. раздел 3.5) равная

$$(5.42)$$

Рис. 5.31: Вершина процесса $V_{\mathbf{k}_0}$

равная

$$\left(\frac{c_2^2}{8} \frac{\partial^3 T / \partial S^3}{\partial T / \partial S} + \frac{\partial}{\partial S} \frac{S^2}{2\rho_n} \right) k_0^2. \quad (5.43)$$

Уравнение (5.41) имеет, как легко видеть, такое решение:

$$\Psi = \Psi_0 \exp[i(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2 t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \quad (5.44)$$

здесь $(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2$ – перенормированная частота, равная

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2 = \omega_{2\mathbf{k}} + \left[V_{\mathbf{k}_0} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho} \right] |\Psi_0|^2. \quad (5.45)$$

Соотношения (5.44)- (5.45) описывают монохроматическую волну с волновым вектором \mathbf{k}_0 и частотой $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2$. Возмущение ρ' и скорость \mathbf{v} равны

$$\rho' = -\frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{c_1^2} |\Psi_0|^2, \quad \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}_0}{\rho} |\Psi_0|^2. \quad (5.46)$$

Таким образом, нелинейная волна движется медленнее, чем линейная. Основной вклад в изменение скорости волны обусловлен Доплеровским взаимодействием рассматриваемой волны с рожденным ею первым звуком. Таким образом, эффективное взаимодействие между квантами второго звука осуществляется через обычный звук. Эта ситуация напоминает теорию сверхпроводимости, где взаимодействие между электронами осуществляется через колебания решетки.

5.7 Неодномерные волновые пакеты

5.7.1 самофокусировка монохроматической волны

В предыдущих разделах этой главы были рассмотрены нелинейные явления при распространении одномерных волн. Одномерность волны означает, что поверхности равной фазы представляют собой плоскости в y, z измерениях.

Реально, разумеется, волны имеют конечный поперечный размер, вследствие чего возникает неоднородность в y, z направлениях. Для волн с бесконечно малой амплитудой учет поперечной неоднородности приводит к дифракционным явлениям. В случае конечных амплитуд может возникнуть ряд принципиально новых эффектов, связанных с совместным действием нелинейных и дифракционных членов в уравнениях движения. В этой главе будет рассмотрено распространение нелинейной волны второго звука, слабо промодулированной в поперечном направлении, т. е. в предположении, что нелинейные и дифракционные члены имеют один порядок малости.

Рассмотрим случай кубически нелинейной среды (см. раздел 5.6), где было показано, что в окрестности температуры $T_\alpha \approx 1.88$ К возможно существование монохроматической нелинейной волны второго звука. Изучим влияние поперечной неоднородности на эволюцию такой волны.

Как и в разделе 5.6, будем вести описание в терминах функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ которая, в отличие от ранее рассмотренного случая, зависит от пространственной координаты \mathbf{r} . Слабую зависимость функции от величины \mathbf{r} можно представить как появление в основной волне гармоник \mathbf{k} с волновыми векторами, близкими к \mathbf{k}_0 . Это приводит к изменению квадратичной части гамильтониана H_2 , следствием чего является присутствие в уравнениях движения слагаемых, описывающих линейную дифракцию. Полный гамильтониан H может быть получен путем простого перебора, подобно тому, как это сделано в предыдущем пункте. Отсылая за подробностями вычислений к работе автора [118], выпишем уравнение для комплексной огибающей $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (в стационарном случае).

$$2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Delta_\perp \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{2k_0}{c_1} \left[V_{\mathbf{k}_0} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho} \right] |\Psi|^2 \Psi \quad (5.47)$$

$$+ \frac{2k_0}{c_1} \left(\frac{3\rho^2}{2c_1^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho^2} + W_{\mathbf{k}_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_{\mathbf{k}_0}}{\partial \rho} \frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho c_1^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2}{\partial \rho} \right) |\Psi|^4 \Psi.$$

здесь $V_{\mathbf{k}_0}$ — матричный элемент шестиволнового процесса (см. предыдущий раздел).

Уравнение типа (5.47) было получено впервые для прохождения лазерного излучения через вещество (см. книгу Карпмана и цитированную там литературу) и называется нелинейным параболическим уравнением. Оно исследовалось в ряде работ (см., например, статью Захарова с соавторами [120]). Следуя результатам работы [120], опишем поведение исследуемой нами волны.

Коэффициент при члене $|\Psi|^2 \Psi$ (выражение в первой квадратной скобке) есть величина положительная и равная $\approx 2.18k_0^3/c_2\rho$. Положительность этой величины означает, что скорость распространения волны уменьшается

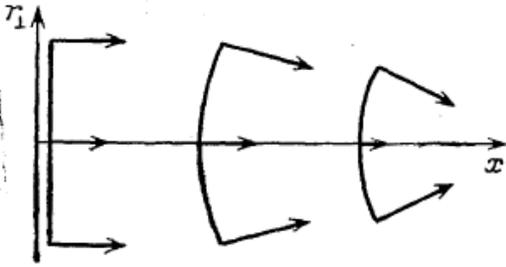


Рис. 5.32: Рисунок, качественно поясняющий возникновение самофокусирующего эффекта. Стрелками указано направление скорости движения волнового фронта. Разные длины стрелок соответствуют разным скоростям распространения участков волны

с амплитудой (см. раздел 2.9). В результате на периферии волнового пакета, где амплитуда меньше, скорости движения волны больше, чем на оси пучка. Фронт волны изгибается, как это показано на Рис.5.32, начинается фокусировка пакета. За счет фокусирующего действия амплитуда на оси возрастает, что приводит к еще большей разнице в скорости распространения периферийных и центральных участков. Это еще более усиливает эффект. Таким образом, положительность коэффициента при $|\Psi|^2 \Psi$ обеспечивает нелинейную самофокусировку волнового пакета.

Дифракционный член $\Delta_{\perp} \Psi(\mathbf{r}, t)$ в уравнении (3.1) приводит (в отсутствие нелинейных эффектов) к расплыванию пакета в поперечном направлении. Поэтому для наблюдения самофокусировки необходимо превысить некоторое пороговое значение потока энергии I_{cr} . Вычисление приводит к результату $I_{cr} \approx 0.5 \cdot 10^7 \nu^{-2}$ Вт, где ν — частота звука в герцах (см. статью [118]). Заметим, что может быть оценена из уравнения (5.47) сравнением по порядку величины дифракционного и нелинейного членов. Величина I_{cr} может быть достигнута в эксперименте, и наблюдение самофокусировки вполне реально.

Таким образом, нелинейные члены четвертого порядка в гамильтониане описывают сжатие волнового пучка. В результате амплитуда на оси резко возрастает, и дальнейшее поведение зависит от членов более высокого порядка, в нашем случае шестого. Как показывают вычисления (см. коэффициент перед членом $|\Psi|^4 \Psi$ (выражение во второй квадратной скобке в (5.47)) отрицателен. Это эквивалентно положительности шестиволнового гамильтониана, что соответствует трехчастичному отталкиванию. Конкурируя с двухчастичным притяжением, последнее стабилизирует волновой пакет и не дает ему сколлапсироваться до нулевых размеров. Это качественное рассуждение подтверждается результатами численного решения уравнения вида (5.47) (см. статью Захарова с соавторами [120]). В итоге пучок сжимается до некоторого размера, при котором дифракционные и нелинейные члены четвертого и шестого

порядка «уравновешивают» друг друга, пакет, как говорят, входит в режим самоканалирования. Размер канала δ_{ch} может быть оценен из следующего соотношения:

$$k_0 \delta_{ch} \sim \sqrt{\frac{\sigma_1 I}{I_{cr} - I}}. \quad (5.48)$$

здесь σ_1 —обезразмериванный коэффициент при члене $|\Psi|^4 \Psi$ в уравнении (3.1), $\sigma_1 \approx -0.02$. Условие (3.2) означает, что при значениях I , превышающих I_{cr} пучок может сжаться до очень малых размеров. При этом на оси пучка сосредотачивается большая энергия, что может вызвать значительный перегрев и облегчить наблюдение эффекта.

5.7.2 Волновые пучки в квадратичной нелинейной среде

В этом пункте мы опишем поведение широких пучков второго звука в квадратично нелинейных средах, где самфокусировочные явления сопровождаются укручением волны и образованием ударного фронта. При распространении эволюции волны будем предполагать, что диссипативные и дифракционные эффекты одного порядка малости с нелинейными. Фактически необходимо, чтобы параметр малости, связанный с поперечной неоднородностью, удовлетворял такому соотношению: $k_{\perp}^2/k_x^2 = O(\Delta w/c_2)$, где k_{\perp}, k_x — поперечный и продольный размеры волнового импульса, Δw — его амплитуда. В этих предположениях уравнение для эволюции звуковых импульсов в обычных средах получено в [[121], [122]]. Аналогичные выкладки для He II приводят к такому эволюционному уравнению для неоднородных возмущений второго звука (в движущейся скоростью системе)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + (c_{20} + \alpha_2(T)w) \frac{\partial w}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{c_2}{2} \Delta_{\perp} w \quad (5.49)$$

Уравнение (5.49) довольно слабо изучено по сравнению с нелинейным параболическим уравнением (5.47) Одна из причин этого -отсутствие стационарных волн неизменного профиля. Действительно, нелинейный член $\alpha_2(T)w \frac{\partial w}{\partial x}$ описывает образование ударных фронтов, на которых происходит сильная диссипация, и амплитуда волны должна уменьшаться. Кроме того, если для уравнения (5.47) влияние нелинейного члена могло быть сведено (по крайней мере качественно) к изгибу фронта (см. Рис.5.47), то здесь ситуация более запутанная. Действительно, величина $\alpha_2(T)w$, играющая роль нелинейной добавки к скорости звука, различна в разных точках волны, вследствие чего будет происходить неравномерная деформация волнового профиля, усложненная к тому же дифракционными явлениями.

Имеется, однако, довольно много работ по численному решению уравнения (3.3). Подробный обзор этих работ выполнен в статье Бахвалова, Жилейкина и Заболотской [123] (см. также известную книгу Руденко и Солуяна [124]) Опишем, следуя [123], основные закономерности эволюции волны, имеющей характерный поперечный размер k_{\perp}^{-1} . Как показывают расчеты, одним из основных параметров, влияющих на эволюцию волн, является величина $N = L_d/L_{sh}$; здесь $L_{sh} = c_2/\alpha_2(T)\Delta w k_x$ расстояние по оси, на котором возникает разрыв в одномерной волне (см. раздел 5.2), $L_d = k_x/k_{\perp}^2$ характерная длина дифракционного расплывания пакета. При $N < 1$ волна успевает превратиться в расходящуюся волну прежде, чем нелинейные эффекты окажут какое либо существенное влияние. Дальнейшая эволюция пакета проистекает как в нелинейной сферической волне (см. [124]). При увеличении N действие нелинейных эффектов проявляется раньше. Как и в одномерном случае, они приводят к деформации волнового профиля и образованию ударного фронта. Эта деформация, однако, происходит неодинаково для различных удалений от оси. Разрыв образуется прежде всего на оси пучка ($\mathbf{r}_{\perp} = 0$) Затем включаются периферийные участки. Расстояние, на котором образуется ударный фронт на оси пакета, составляет величину порядка L_{sh} , хотя в зависимости от N и начального распределения, несколько колеблется. После образования разрыва начинается интенсивная диссипация волновой энергии и пакет, также как и при малых амплитудах превращается в расходящуюся волну. Следует отметить, что до образования ударного фронта наблюдается некое подобие самофокусировки, а именно, амплитуда на оси возрастает, причем для пучков с резкими краями происходит увеличение амплитуды в два и более раз, а поперечное распределение становится более узким, т. е. пучок сжимается. Однако этот процесс очень непродолжителен, и стационарной самофокусировки, по-видимому, в квадратично-нелинейной среде нет.

Аналогичные явления происходят с одиночными (положительными или отрицательными) импульсами (см. [124], [118]). Они также, как и периодические волны испытывают неравномерное искажение профиля и образование ударного фронта. До момента образования ударного фронта происходит (при $\alpha_2(T)\Delta w < 0$) уменьшение ширины пакета и увеличение амплитуды на оси. Однако, как и для периодических волн, это не приводит к поперечному коллапсу. Действительно, характерная длина $L_c = (-c_2/\alpha_2(T)\Delta w k_{\perp}^2)^{1/2}$, на которой происходит нелинейное сжатие пучка (см. [124], [118]), удовлетворяет условию $L_c^2 = L_d L_{sh}$ т. е. либо $L_c > L_d$, либо $L_c > L_{sh}$. В первом случае доминируют дифракционные эффекты, ведущие к расплыванию пакета. Во втором случае ударный фронт образуется раньше, чем пучок успеет сфокусироваться. После образования разрыва возникнет мощная диссипация, амплитуда уменьшится и волновой пакет, в соответствии с законами линейной

акустики, превратится в расходящуюся волну.

6 Инварианты Римана и распространение нелинейных волн

При малых амплитудах зацепление между возмущениями плотности и энтропии в сверхтекучем гелии, т. е. между первым и вторым звуком, определяется коэффициентом расширения $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ и, поэтому, мало. Следовательно, с высокой степенью точности можно считать эти волновые моды независимыми. При больших амплитудах между ними возникает взаимодействие, обязанное нелинейным членам в уравнениях движения. Одним из примеров этого взаимодействия является описанная в предыдущей главе (см. главу {7}) устойчивость (и неустойчивость) звуков. В соответствующих работах исследование было проведено на основе гамильтоновского формализма для гидродинамики He II [62],[53]. Однако этот метод, хорошо зарекомендовавший себя для волн в плазме или, например, для волн в океане, мало удобен для гелия. Дело в том, что дисперсия скоростей звуков в He II практически отсутствует, и исчезает малый параметр, связанный с этой дисперсией. В этом смысле более общим является подход, основанный на обычных уравнениях движения Ландау — Халатникова (см. главу 3). Исследования по нелинейным волнам в рамках этой идеологии описаны в главе 5. Этот подход, однако, игнорирует взаимодействие между звуками и поэтому исследование нелинейных звуков с учетом взаимодействия волновых мод требует отдельного рассмотрения. В настоящей главе выведена система эволюционных уравнений для интенсивных волн первого и второго звуков, в которых учтены как процессы взаимодействия, так и процессы нелинейного укрупнения фронта волны. Система записана в форме уравнений для инвариантов Римана. Это, с одной стороны, значительно упрощает аналитическое и численное исследование конкретных задач, а с другой стороны, является удобной отправной точкой для дальнейших обобщений типа учета вязкости. На основе полученных уравнений качественно решена задача о нелинейном распаде волны энтропии и возникновении «предвестника» — волны давления, распространяющейся со скоростью первого звука.

6.1 Характеристическая запись уравнений нелинейной акустики

Выберем в качестве переменных, описывающих течение сверхтекучего гелия, следующие величины: ρ' — возмущение плотности, σ' — возмущение энтропии, v_x — x компоненту среднemasсовой скорости, и w_x — x компоненту среднemasсовой скорости. С точностью до членов второго порядка по этим вели-

чинам (в дальнейшем этой точностью ограничимся) уравнения одномерного движения будут следующими:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_i A_{ij}(\varphi) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0. \quad (6.1)$$

Здесь φ_i — вектор-столбец, составленный из величин $\{\rho', v_x, \sigma', w_x\}$. Элементы матрицы $A_{ij}(\varphi)$ размером 4×4 содержат φ в степени не выше первой и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{13} &= A_{14} = A_{23} = A_{32} = A_{41} = 0, & A_{12} &= \rho + \rho', & (6.2) \\ A_{11} &= A_{22} = v, & A_{21} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}, \\ A_{24} &= \frac{2\rho_s \rho_n}{\rho^2} w - \rho w \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho}, & A_{31} &= \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} w, \\ A_{33} &= v + \frac{w}{\rho} \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho_s \sigma, & A_{34} &= \sigma \frac{\rho_s}{\rho} + \sigma \rho' \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_s}{\rho} + \sigma' \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\sigma \rho_s}{\rho} \\ A_{42} &= \left[1 - \frac{\rho^2}{\rho_n} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho} \right] w, \\ A_{44} &= \left[\frac{3\rho_s}{\rho} - \frac{\rho \sigma}{\rho_n} \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho_n}{\rho} \right] w + v, \\ A_{43} &= \frac{\rho}{\rho_n} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \left[\frac{\rho}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\sigma \rho}{\rho_n} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho}{\rho_n} \right] \sigma' + \sigma \rho' \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{\rho_n}. \end{aligned}$$

здесь составленный из величин (индекс опускаем). Членами порядка $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$ пренебрегаем, уже упоминалось, что учет теплового расширения также приводит к взаимодействию между возмущениями давления и энтропии. Однако при больших амплитудах, реально для импульсов мощностью 1 Вт/см², взаимодействие, обусловленное нелинейными эффектами, будет доминировать.

В линейном случае (см. раздел 2.2) матрица имеет клеточно-диагональный вид и система уравнений (2.1) распадается на две подсистемы, имеющие решениями волны, в которых колеблются либо величины ρ', v_x (первый звук), либо σ', w_x (второй звук). Любое общее решение является суперпозицией этих двух звуков. В нелинейном случае матрица не является клеточно-диагональной, звуки «перепутаны», пары ρ', v_x а также σ', w_x уже не представляют «чистые» волновые моды и возбуждение любой из них приводит к колебаниям всех переменных. Интуитивно ясно, что при этом в гелии возникают оба типа волн, но что это за волны, что они переносят, как распространяются,

взаимодействуют и т. д. - этот вопрос оставался открытым. Существенного продвижения в исследовании этой задачи удалось достичь с помощью метода инвариантов Римана, который здесь можно развить для волн, бегущих в одном направлении вдоль оси x .

Следуя книге Рождественского и Яненко [112], умножим уравнения (2.1) на левый собственный для матрицы вектор строку определяемый таким образом: $\sum_i l_i^\mu(\xi_j) A_{ij} = \xi_i l_i^\mu$, где ξ_i собственные числа. Для различных собственных векторов $l_i^\mu(\xi_j)$ имеем.

$$\sum_i l_i^\mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \xi^{(\mu)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i, \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (6.3)$$

Чтобы в уравнениях (2.2) присутствовали члены не более чем второго порядка малости, нужно, чтобы элементы вектор-строки зависели не более чем линейным образом от величин. Приведенная запись уравнений движения отличается тем, что в каждом из четырех соотношений (2.2) все переменные дифференцируются в одном и том же направлении в x, t плоскости. Эти направления, называемые характеристиками, определяются равенствами

$$\frac{dx}{dt} = \xi^{(\mu)}(\varphi(x, t)). \quad (6.4)$$

Для различных собственных векторов характеристики имеют следующий вид:

$$\xi^{(1,2)} = v \pm \left(c_1 + \frac{1}{2c_1} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \rho' \right), \quad (6.5)$$

$$\xi^{(3,4)} = v + w \left(\frac{2\rho_s}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho_s}{\partial \sigma} \right) \pm \left\{ c_2 + \frac{\rho'}{2c_2} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\rho'}{2c_2} \left[\frac{2\rho_s}{\rho_n} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} + \sigma^2 \frac{\rho^2}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \right] \right\} \quad (6.6)$$

Формула (6.5) описывает местную скорость первого звука, формула (6.6) — второго звука. Если положить $v = 0, \rho' = 0$ то соотношение (6.6) переходит в соответствующую формулу для местной скорости волнового профиля ранее полученную Халатниковым [1] (см. также соотношение 5.6)).

6.2 Пфаффовы формы, Инварианты Римана

Если пфаффова форма $\sum_i l_i^\mu(\varphi) d\varphi$ интегрируется, т. е. является полным дифференциалом некоторой величины $dI_\mu(\varphi)$

$$\sum_i l_i^\mu(\varphi) d\varphi_i = dI_\mu, \quad (6.7)$$

то возможно дальнейшее упрощение уравнений

$$\frac{\partial I_\mu}{\partial t} + \xi^{(\mu)} \frac{\partial I_\mu}{\partial x} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (6.8)$$

Замечательное свойство системы (6.8), делающее ее исключительно удобной для исследования конкретных задач, состоит в том, что каждое из уравнений (6.8) описывает закон сохранения величины I_μ вдоль характеристического направления $\xi^{(\mu)}$. Величины называются инвариантами Римана (ИР). Если в начальный момент времени задан лишь один из ИР, то, как следует из системы (6.8), и в последующие моменты он будет один. Таким образом, возмущения, переносимые ИР, являются в этом смысле независимыми. Это обстоятельство, также относительно простой вид системы (6.8) позволяют рассматривать волны, описываемые инвариантами Римана, а также характеристиками (6.5), (6.6) как аналоги первого и второго звуков.

6.3 Линейный случай

В предельном случае бесконечно малых амплитуд, когда в величинах $l_i^\mu(\varphi), \xi^{(\mu)}(\varphi)$ можно пренебречь зависимостью от φ , пфаффовы формы представляют собой сумму дифференциалов с постоянными коэффициентами. Такие формы, разумеется, интегрируются. Эволюция величин I_μ^0 описывается уравнениями (6.8), в которых $\xi^{(1,2)} = \pm c_1, \quad \xi^{(3,4)} = \pm c_2$.

$$\frac{\partial I_\mu^0}{\partial t} + c_1 \frac{\partial I_\mu^0}{\partial x} = 0, \quad \mu = 1, 2.$$

$$\frac{\partial I_\mu^0}{\partial t} + c_2 \frac{\partial I_\mu^0}{\partial x} = 0, \quad \mu = 3, 4.$$

При этом линейные ИР имеют такой вид:

$$I_{1,2}^0 = \rho' \pm \frac{\rho}{c_1} v, \quad I_{3,4}^0 = \sigma' \pm \frac{s\rho_s}{c_2\rho} w \quad (6.9)$$

Таким образом, мы пришли к классическому результату (см. о существовании в двух типов звуковых волн). Из выражений (6.9) видно, что при начальном возмущении плотности (или) скорости в жидкости распространяется одна волна первого звука. Наоборот, при начальном возмущении энтропии и (или) относительной скорости в гелии будет распространяться одна волна второго звука. Таким образом, в пренебрежении членами, связанными с коэффициентом расширения, волновые моды независимы.

В линейном случае нетрудно включить в указанную схему члены, содержащие коэффициент температурного расширения $\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$. Ограничиваясь волнами, бегущих в одну сторону (вправо), получим, что ИР имеют следующий вид:

$$I_1^\beta = \rho' - \frac{\partial \rho / \partial T}{\partial \sigma / \partial T} \sigma', \quad I_3^\beta = \sigma' + \frac{c_2^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \rho' \quad (6.10)$$

Кроме ИР, на малые величины изменяются скорости звуков c_1, c_2 . В отличие от (6.9) выражения (6.10) содержат члены (например, в (6.10) входит переменная характеризующая второй звук), которые малы в меру малости. Наличие этих перекрестных членов ведет к «зацеплению» звуков. Например, при выдвигании поршня можно, помимо обычной волны плотности, зарегистрировать волну энтропии, движущуюся со скоростью, близкой к c_2 . Причем сама волна плотности, движущаяся со скоростью, близкой к c_1 содержит малую «примесь» возмущения энтропии. Однако, корректнее говорить здесь не о зацеплении звуков, а об ином представлении звуковых мод. То есть независимыми являются не колебания плотности ρ' и энтропии σ' , а некоторые их комбинации, совпадающие, очевидно, с ИР (6.10). В связи с описанными результатами нужно отметить недавнюю работу Ше-Сенга [125], в которой предложен некоторый общий формализм для описания линейных «зацепленных» акустических систем, в частности, для Не II.

6.4 Инварианты Римана в сверхтекучем гелии, Простые волны

В случае конечных (но малых) амплитуд пфаффовы формы представляют собой сумму четырех дифференциалов $\sum_i l_i^\mu(\varphi) d\varphi_i$ с коэффициентами, зависящими от φ (не более чем линейно). Такие формы, вообще говоря, не интегрируются, и получить ИР в общем случае нельзя. Однако оказалось возможным для волн, бегущих в одну сторону (см. работу автора [126]) Напомним, что такое бегущие в одну сторону волны или, как их называют, простые волны в обычной газодинамике. Аппарат простых волн, разработанный Риманом, сыграл очень важную роль при решении различных газодинамических задач (см. [112]), С математической точки зрения простые волны представляют собой частный случай решения уравнений Эйлера, при котором искомые переменные ρ' и v находятся между собой в некоторой функциональной зависимости $v = v(\rho')$. Для получения уравнений для простых волн применяется следующий прием: Зависимость $v(\rho')$ подставляется в уравнения Эйлера, при этом производные типа $\partial v / \partial t$ раскрываются как $(dv/d\rho') \partial \rho' / \partial t$

и т. д. В результате получается система алгебраических уравнений относительно производных $\partial\rho'/\partial t$ и $\partial\rho'/\partial x$. Условие совместимости этой системы позволяет определить функцию $v = v(\rho')$, с помощью которой легко получить эволюционное уравнение для величины $\rho'(x, t)$.

В случае сверхтекучего гелия аналогичным приемом воспользоваться нельзя. Действительно, как было показано в предыдущем пункте, в линейном случае в волнах, бегущих вправо, величины ρ' и v , а также σ' и w находятся между собой в функциональной зависимости такого вида (см. формулу (6.9))

$$v = v(\rho'), \quad w = w(\sigma'). \quad (6.11)$$

В нелинейном случае матрица $A_{ij}(\varphi)$ не является клеточно-диагональной, в ней присутствуют недиагональные элементы, вследствие чего в уравнениях движения появляются перекрестные члены, квадратичные по переменным φ_i . Естественно предположить поэтому, что в нелинейном случае соотношения (6.11) изменяются следующим образом:

$$v = v(\rho', \sigma'), \quad w = w(\sigma', \rho'),$$

причем зависимость от второго ("чужого") аргумента имеет второй порядок малости. Если, далее, функции $v(\rho', \sigma')$, $w(\sigma', \rho')$ искать из условия совместимости алгебраических уравнений (для переменных $\partial\rho'/\partial t$, $\partial\rho'/\partial x$, $\partial\sigma'/\partial t$ и $\partial\sigma'/\partial x$, то мы получим одно условие на две функции $v(\rho', \sigma')$, $w(\sigma', \rho')$, т. е. найти искомые зависимости подобным образом нельзя. Посмотрим, что представляют собой простые волны с несколько более глубокой точки зрения. Для обычной газодинамики описанную выше схему получения инвариантов Римана можно осуществить для изоэнтропических течений. Действительно, в этом случае имеется всего две переменные: ρ' и v и пфаффа форма $\Pi(\rho', v, d\rho', dv)$ будет иметь такую структуру:

$$a(\rho', v)d\rho' + b(\rho', v)dv = \Pi(\rho', v, d\rho', dv).$$

Очевидно, что величины $I(\rho', v)$, являющиеся решениями дифференциального уравнения $\Pi(\rho', v, d\rho', dv) = 0$, будут инвариантами Римана. Таким образом, в газодинамике имеется два инварианта Римана $I_1(\rho', v)$, $I_2(\rho', v)$, соответствующие двум различным характеристикам. Если один из них тождественно постоянен (равен нулю для звуковых случаев), то оставшийся инвариант описывает простую волну. Таким образом, два основных свойства волн, бегущих в одну сторону (простых волн), тривиально следующих одно из другого в обычной газодинамике, следующие. Это, во-первых, наличие функциональной зависимости между переменными и, во-вторых, тождественное исчезновение волны, бегущей в другую сторону. Эти два свойства будут

использованы для обобщения аппарата простых волн на случай сверхтекучего гелия. Схема дальнейших выкладок такова. Мы покажем прежде всего интегрируемость пфаффової формы $\sum_i l_i^\mu(\varphi) d\varphi_i$ для первой звуковой моды, т. е. найдем инварианты Римана $I_1(\rho', v)$, $I_2(\rho', v)$, сохраняющиеся вдоль характеристик $\xi^{(1)}$, $-\xi^{(1)}$. Потребовав, чтобы инвариант $I_2(\rho', v)$, описывающий 1 волну, бегущую влево, исчезал $I_2(\rho', v) = 0$, мы получим зависимость величины v от возмущений плотности ρ' и энтропии σ' , т. е. найдем функциональную зависимость $v(\rho', \sigma')$ в волне, бегущей вправо. Далее, предположив наличие зависимости $w(\rho', \sigma')$, мы, как в газодинамике, подставим эту функцию, а также функцию $v(\rho', \sigma')$ (уже известную) в исходные уравнения движения (6.1). При этом, как и в газодинамике, придем к системе четырех алгебраических уравнений для величин $v(\rho', \sigma')$. Условие разрешимости этой системы позволит получить искомую недостающую зависимость $w(\rho', \sigma')$. Эта функция будет использована для интегрирования пфаффової формы, соответствующей собственному значению $\xi^{(3,4)}$, что позволяет определить инвариант $I_3(\rho', \sigma')$.

Отсылая за подробностями вычислений к статье [126]], выпишем окончательный результат. Волны, распространяющиеся в положительном направлении вдоль оси x могут быть описаны с помощью ИР и которые равны

$$I_1 = \rho' + \alpha_1 \rho'^2 + \alpha_2 \sigma'^2, \quad (6.12)$$

$$I_3 = \sigma' + \beta_1 \sigma'^2 + \beta_2 \rho' \sigma'. \quad (6.13)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2c_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \right), \\ \alpha_2 &= \left(\frac{\rho c_2}{\rho_s \sigma c_1} \right) \left(\frac{2\rho_s \rho_n}{\rho^2} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho} \right), \\ \beta_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 T / \partial \sigma^2}{\partial T / \partial \sigma} + \frac{2\rho_n}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho_n}{\rho} \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{4\rho} \left[\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} - \frac{c_2 \rho^2}{c_1 - c_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_s}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Инварианты Римана I_1 , и I_2 удовлетворяют уравнениям (6.1), в которых следует выразить характеристики $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ через I_1 , I_2 . Таким образом, в случае бегущих в одну сторону волн исходная система четырех уравнений (2.1) приводится к двум уравнениям (6.12)-(6.13), каждое из которых описывает закон сохранения величины I_1 (или I_1) вдоль характеристического направления $\xi^{(1)}$

(или $\xi^{(2)}$). Несимметричный характер зависимости ИР I_1, I_2 от переменных ρ', σ' является следствием того, что термодинамические величины зависят от относительной скорости w а от среднemasсовой скорости v , разумеется, не зависят (см. раздел 3, а также книгу [1]).

6.5 Нелинейный распад волны энтропии

Специальный вид уравнений движения, записанных в форме ИР, значительно упрощает исследование различных конкретных задач. В качестве примера рассмотрим распространение волн в He II в таких двух случаях: а). на границе $x = 0$ создается возмущение плотности $\rho(t)$ (движется поршень); б). на границе создается возмущение энтропии $\sigma(t)$ (нагревается стенка). Прежде чем приступить к этой задаче, полезно явным образом выразить зависимость и от ИР I_1, I_2 . С удерживаемой точностью искомая зависимость будет следующей:

$$\rho' = I_1 - \alpha_1 I_1^2 - \alpha_2 I_3^2 \quad (6.15)$$

$$\sigma' = I_3 - \beta_1 I_3^2 - \beta_2 I_1 I_3 \quad (6.16)$$

В случае а). на границе $x = 0$ имеем $\rho'(0, t) = \rho_0(t)$, $\sigma(0, t) = 0$. В соответствии с формулами для ИР (2.12) в этом лишь один из ИР I_1 отличен от нуля. Этот инвариант в соответствии с первым из уравнений (2.5) остается постоянным вдоль характеристики ξ_1 . Таким образом, он описывает волну, распространяющуюся со скоростью близкой к c_1 . В этой волне, как можно видеть из формул обращения $-(6.15)-(6.16)$, имеется лишь возмущение плотности ρ' , в то время как возмущение энтропии σ' равно нулю. Итак, при возмущении плотности на границе жидкости в объем гелия распространяется лишь волна плотности ρ' (и, разумеется давления p , и скорости v).

В случае б) ситуация оказалась несколько интереснее. Если на стенке $x = 0$ создавать возмущение энтропии $\sigma'(0, t) = \sigma_0(t)$, (при этом $\rho(0, t) = 0$), то, как легко видеть, оба ИР отличны от нуля. Поскольку волны, связанные с I_1, I_2 распространяются с различными скоростями, то в x, t плоскости они разделяются, как показано на Рис. 6.33

Вперед со скоростью $\xi_1 \approx c_1$ убегает волна, несущая инвариант I_1 . В этой волне, как можно видеть из формул обращения, имеется возмущение плотности ρ' по порядку величины равное $\rho' \approx \alpha_2 \sigma_0^2$ при этом возмущение энтропии $\sigma' = 0$. Вслед за волной, переносящей I_1 движется со скоростью $\xi_2 \approx c_2$ волна, переносящая I_3 . С величиной I_3 связано как возмущение плотности $\rho' \approx -\alpha_2 \sigma_0^2$, так и возмущение $\sigma' \approx \sigma_0(t)$.

Таким образом, при импульсном нагреве стенки наблюдается следующая картина. От стенки со скоростью звука движется «предволна плотности.

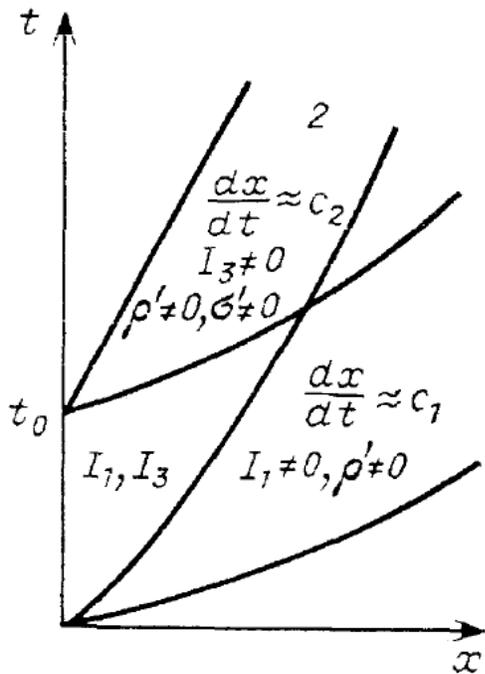


Рис. 6.33: Иллюстрация нелинейного распада импульса энтропии $\sigma'(0, t)$, возникающего при нагреве стенки в течение времени t_0 . Волна, переносящая ИР I_1 распространяется вдоль характеристик, заполняющих полосу 1. В этой волне, как следует из (6.15)-(6.16), отлично от нуля лишь возмущение плотности. Наклон полосы 1 равен $dx/dt \approx \xi^{(1)} \approx c_1$. Волна, переносящая ИР I_2 распространяется по характеристикам, заполняющим полосу 2. В этой волне отличны от нуля как возмущение плотности ρ' , так и возмущение энтропии σ' .

Вслед за ней со скоростью второго звука распространяется «смесь» волны плотности и энтропии.

Оценим величину описанного эффекта. Из выражения для ИР I_1 и формул обращения (2.15) видно, что количественно мера трансформации второго звука в «предвестник» определяется коэффициентом α_2 (см (6.14)). Давление δp в «предвестнике», следовательно, будет

$$\delta p = \frac{W^2}{2(\rho_s \sigma c_1)^2} \left(\frac{2\rho_s \rho_n}{\rho^2} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \quad (6.17)$$

Численные оценки показывают, что второе слагаемое во второй скобке всегда больше первого. При импульсе тепла с амплитудой порядка 10 Вт/см² давление в предвестнике будет величиной порядка $\delta p \approx 10^4$ г/см сек².

Отметим, что давление в заднем импульсе отличается от δp . Действительно, в заднем импульсе смеси звуков в отличие от предвестника имеется относительная скорость, следовательно, будет добавка в давлении, связанная с $\partial p / \partial w^2$. Кроме того, необходимо учесть следующее обстоятельство. Поскольку скорость второго звука c_2 значительно меньше скорости первого c_1 , то нелинейные добавки к скорости (см. выражения для характеристик 5(,4) (4), (5)) сильнее изменяют c_2 . В результате задний импульс быстрее изменит форму, образует ударный фронт и вследствие этого быстро затухает. Следует ожидать поэтому, что давление в заднем импульсе значительно меньше, чем в предвестнике.

7 Устойчивость нелинейных волн

7.1 Преобразование первого звука во второй в сверхтекучем гелии

Следующим важным этапом в исследовании нелинейных волн в сверхтекучем гелии был вопрос о нелинейном взаимодействии обеих звуковых мод. Впервые этот вопрос был рассмотрен Пушкиной и Хохловым [127],[128]. С помощью так называемых укороченных уравнений они исследовали процесс превращения волны первого звука в две волны второго звука и проследили их дальнейшее взаимодействие. Ими были найдены пороговые значения амплитуды первого звука для этого процесса. Этот же вопрос на основе гамильтоновского формализма для гидродинамики сверхтекучей жидкости рассматривали Покровский и Халатников [62],[53]. Ранее ими были введены канонические переменные для уравнений Ландау-Халатникова на основе вариационного принципа. Результаты работ [62],[53] были более полными по сравнению с работами [127],[128]. Был обнаружен, в частности, эффект черенковского излучения второго звука первым. Исследована также возможность изучения второго звука под углом. Однако, как в тех так и в других статьях, не учитывались собственные нелинейные процессы в первом звуке, которые, как известно, в этом случае обязательно приводят к деформации волнового профиля вплоть до образования ударного фронта. Это делает недопустимым применение формул для пороговых значений амплитуды введение укороченных уравнений. В этом смысле вопрос о превращении первого звука во второй представляет модельную задачу. Следует упомянуть здесь работу Паттермана [129], который исследовал вопрос о трансформации звуков с помощью полной системы уравнений Ландау-Халатникова. Но, во-первых, он пренебрег диссипативными процессами, и поэтому вопрос о превращении первого звука во второй потерял смысл, как пороговое явление, и во-вторых, ограничился лишь исследованием второго приближения, что дает лишь вторую гармонику, но образование ударной волны не описывает.

7.2 4. Устойчивость монохроматической волны первого звука

В теории нелинейных волн важное место занимает изучение устойчивости решений. Это, во-первых, позволяет определить область параметров, при которых реализуется найденное решение. Во-вторых, возможная неустойчивость волны связана с нелинейным характером уравнений, и поэтому вопросы устойчивости идеологически примыкают к нелинейной теории. Исследование

устойчивости проводится в рамках стандартной схемы (см., например, [130]) Переменные, описывающие систему, представляются в виде суммы двух частей, одна из которых является исходным решением, добавка – малая добавка, связанная, например, с флуктуациями. Затем общие уравнения линеаризуются по этим малым добавкам, и задача, таким образом, сводится к исследованию системы линейных уравнений (с коэффициентами, зависящими как от исходного решения, так и от свойств среды). На этом этапе весьма существенным является вопрос о временной зависимости исходного решения. Для нестационарных решений задача оказывается очень сложной и может быть решена в очень немногих случаях. Относительно простыми являются задачи, в которых исходные решения не зависят от времени (к этому случаю относятся также бегущие волны неизменного профиля, в которых переменные являются функциями от комбинации $x - Ut$). В этом случае коэффициенты линеаризованной системы не зависят от времени и уравнения имеют решения в виде суперпозиции экспонент $\sum e^{\lambda_i t}$, где λ_i – функционалы от исходного решения и свойств системы. Если среди множества имеются такие, что $Re \lambda_i > 0$, то малые добавки экспоненциально нарастают, что означает неустойчивость исследуемого решения.

В вопросе устойчивости волн имеется еще один интересный аспект. Допустим, в гелии возбуждается волна первого звука. Допустим далее, что малые возмущения, связанные со второй звуковой модой, неустойчивы в присутствии этого первого звука. Тогда они нарастают и могут быть зарегистрированы в эксперименте. Этот можно трактовать как рождение второго звука первым. Именно в этом аспекте было проведено исследование устойчивости первого звука в работах [127],[128],[62],[53]. Пусть имеется исходная монохроматическая волна первого звука. В гамильтоновских переменных ее можно записать следующим образом:

$$a_{\mathbf{k}}^1 = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) a_0 e^{ic_1|\mathbf{k}|t}, \quad a_{\mathbf{k}}^2 = 0. \quad (7.1)$$

Вообще говоря, решение вида (7.1) не удовлетворяет нелинейным уравнениям (3.149) с гамильтонианом (3.153) (см. раздел 3.4). Тем не менее результаты, полученные в работах [127],[128],[62],[53], имеют большое значение для понимания процессов нелинейного взаимодействия между звуками, и рассматриваемая задача, таким образом, имеет модельный характер.

При учете трехволновых процессов возможны два механизма развития неустойчивости, связанные с появлением второго звука. Это распадные и черенковские процессы, схематическое изображение которых имеет следующий вид: (Рис. 7.34)

Из общих результатов (см., например, обзор Захарова [55]), известно, что неустойчивость развивается в условиях резонанса. То есть, кроме выполнения



Рис. 7.34: Схематическое изображение распадного и черенковского процессов. На левом рисунке видно, как входящий квант первого звука в результате неустойчивости распадается на два исходящих кванта второго звука. Такой рисунок изображает, как говорят, вершину соответствующего процесса. На правом рисунке изображена вершина черенковского процесса, описывающая ситуацию, когда входящий квант первого звука в результате неустойчивости испускает квант второго звука и сам преобразуется при этом, меняя энергию (частоту) и импульс (волновой вектор).

условия $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (это условие является следствием пространственной однородности и обеспечивается δ функциями в гамильтониане H (3.153), требуется еще аналогичное условие для частот:

$$\omega_{1\mathbf{k}} = \omega_{2\mathbf{k}_1} + \omega_{2\mathbf{k}_2}, \quad \omega_{1\mathbf{k}} = \omega_{2\mathbf{k}_1} + \omega_{1\mathbf{k}_2}. \quad (7.2)$$

Здесь $\omega_{1\mathbf{k}}$, $\omega_{2\mathbf{k}}$ законы дисперсии для первого и второго звуков.

$$\omega_{1\mathbf{k}} = c_1 |\mathbf{k}|, \quad \omega_{2\mathbf{k}} = c_2 |\mathbf{k}|$$

Одновременное выполнение условий на частоты и волновые вектора разграничивает области в \mathbf{k} -пространстве, разрешающие черенковский и распадный процессы, что дает основание рассматривать их отдельно. Рассмотрим, например, распадный процесс. Условия резонанса запишем в следующем виде

$$c_1 |\mathbf{k}_0| = c_2 |\mathbf{k}_1| + c_2 |\mathbf{k}_2|, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (7.3)$$

Отсюда видно, что импульсы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ излученных квантов находятся на поверхности эллипсоида вращения (Рис. 7.35). Вследствие условия $c_2 \ll c_1$ соответствующий эллипс имеет малый эксцентриситет, и направления импульсов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 почти противоположны. Уравнения для малых возмущений второго звука $\delta a_{\mathbf{k}_1}^2, \delta a_{\mathbf{k}_2}^2$ представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных линейных уравнений, имеющих решения вида $\delta a_{\mathbf{k}_1}^2, \delta a_{\mathbf{k}_2}^2 \propto \exp[\nu^{dec} t - i\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^2 t]$, причем

$$\nu^{dec} = -\frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^2 + \gamma_{\mathbf{k}_2}^2}{2} + \left(\left| V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{1, -2, -2} a \right|^2 + \frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^2 - \gamma_{\mathbf{k}_2}^2}{2} \right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

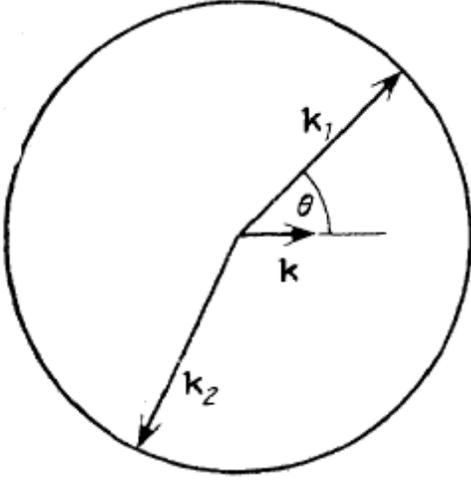


Рис. 7.35: Сечение поверхности, на которой находятся концы векторов, удовлетворяющих резонансным условиям (7.3) в распадном процессе

Здесь $\gamma_{\mathbf{k}}^2$ — затухание второго звука. Из соотношения (7.4) видно, что при превышении некоторой критической амплитуды $a > a_c^{dec}$ инкремент ν^{dec} приобретает вещественную положительную часть, и возмущения экспоненциальным образом нарастают. Пороговое значение a_c^{dec} равно

$$a_c^{dec} = \left(\frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^2 \gamma_{\mathbf{k}_2}^2}{V^{dec}(\omega_{1\mathbf{k}}, \theta)} \right). \quad (7.5)$$

Вершина распадного процесса $V^{dec}(\omega_{1\mathbf{k}}, \theta)$, выраженная через исходную частоту и угол вылета кванта второго звука, имеет вид

$$V^{dec}(\omega_{1\mathbf{k}}, \theta) = \left(\frac{2\omega_{1\mathbf{k}}^2}{\rho c_1^2} \right)^{1/2} \left(-\frac{\rho}{\rho} - \cos^2 \theta - \frac{\rho_n \rho}{\rho_s} \frac{\partial \rho_n^{-1}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p \partial \sigma^2}{\partial T \partial \sigma} \right).$$

Пороговая амплитуда a^{dec} зависит от направления излучения, минимальное значение достигается при $\theta = 0$, т. е. происходит излучение вперед. Второй излученный квант движется в почти противоположном направлении.

Аналогичные выкладки и соотношения имеют место и для черенковского излучения. Резонансные условия имеют для этого процесса такой вид:

$$c_1 |\mathbf{k}_0| = c_1 |\mathbf{k}_1| + c_2 |\mathbf{k}_2|, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (7.6)$$

Поскольку скорость второго звука много меньше скорости первого $c_2 \ll c_1$, то условия (7.6) выполняются, когда $|\mathbf{k}_0| \approx |\mathbf{k}_1|$ т.е. концы векторов \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_1 лежат на почти сферической поверхности (Рис. 7.36).

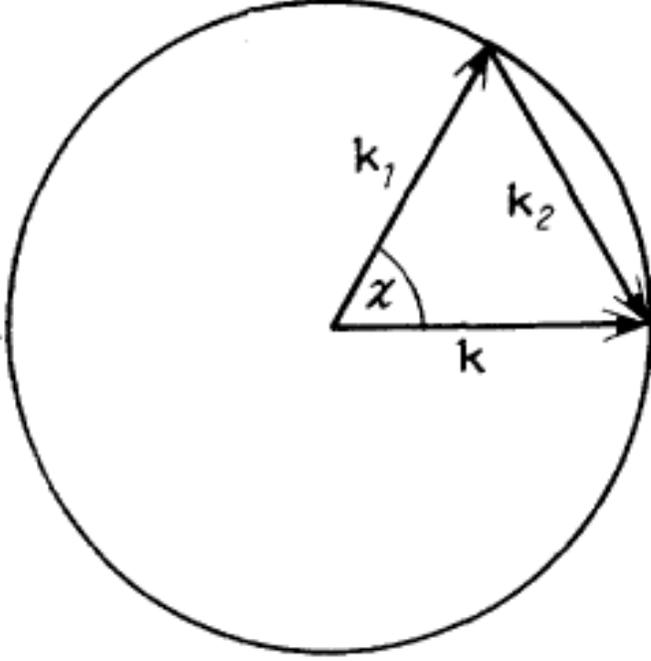


Рис. 7.36: Сечение поверхности, на которой находится конец вектора \mathbf{k} кванта первого звука при черенковском излучении. Поверхность задана соотношением (7.6)

Обозначим угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_1 через χ . В переменных $\omega_{1\mathbf{k}}$ и χ вершина черенковского процесса имеет вид (см. статью [53])

$$V^{ch}(\omega_{1\mathbf{k}}, \theta) = \frac{\omega_{1\mathbf{k}}^{3/2}}{2\rho^{3/2}} \frac{\partial\rho/\partial T}{(\partial\sigma/\partial T)^{1/2}} \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \frac{\chi}{2} \right)^{1/2} \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \ln \frac{\rho c_1^2}{\partial p/\partial\sigma} \right) + \cos \chi \right]. \quad (7.7)$$

Вершина черенковского процесса (7.7) зависит от угла χ . Ее максимальное значение достигается при χ близких к π , т. е. квант первого звука движется почти назад. Частота кванта второго звука при этом близка к $\frac{2\omega_{1\mathbf{k}}c_2}{c_1}$. Пороговое значение амплитуды, при которой инкремент ν^{ch} приобретает положительную вещественную часть, удовлетворяет такому условию:

$$|V^{ch}(\omega_{1\mathbf{k}}, \chi) a_{cr}^{ch}| = \left[\gamma_1(\omega_{1\mathbf{k}}) \gamma_2 \left(\frac{2\omega_{1\mathbf{k}}c_2}{c_1} \right) \right]^{1/2}. \quad (7.8)$$

На Рис. 7.37 изображено поведение отношения пороговых амплитуд в черенковском и распадном процессах $a_{cr}^{ch} \cdot a_c^{dec}$.

Из рисунка видно, что за исключением узкого «окна» вблизи температуры $T \approx 1.15$ К черенковский процесс предшествует распаднему. В работе Лебедева и Халатникова [131] проведено аналогичное исследование для

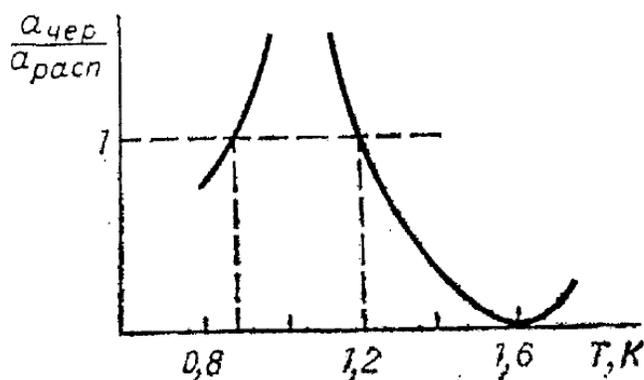


Рис. 7.37: Отношение пороговых амплитуд черенковского и распадного процессов в зависимости от температуры

смесей ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. В отличие от чистого ${}^4\text{He}$ черенковский процесс в смеси ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ оказывается намного эффективнее. В статье Пушкиной [132] автор предлагает использовать соответствующий нелинейный процесс для наблюдения специфического явления — обращения волнового фронта.

7.3 Устойчивость ударной волны давления

Как уже упоминалось, монохроматическая волна первого звука не является решением нелинейных уравнений движения. Напротив, первоначально синусоидальная волна укручается и превращается в пилообразную (с формальной точки зрения укручение является следствием неучтенных в работах [127],[128],[62],[53] нелинейных процессов «внутри» первого звука). Изучение условий, при которых эта пилообразная волна может излучать второй звук, представляет большой интерес. Однако соответствующая задача на устойчивость очень сложна; во первых, потому, что исходное решение зависит от времени, а, во вторых, потому, что оно содержит особенности (разрывы) .

Можно, тем не менее, перенести акценты в этой задаче и выяснить роль разрывов в устойчивости волны. Другими словами, поставить вопрос об устойчивости идеализированной ударной волны - ступеньки, движущейся слева направо и имеющей определенные значения переменных на ударном фронте. Этот вопрос представляет интерес еще по следующей причине. Дело в том, что при исследовании устойчивости ударных волн в обычных средах (см., например, статью Иорданского [133]), важное место занимает уравнение переноса энтропии. В He II, где перенос энтропии осуществляется, в отличие от остальных сред, волновым механизмом, могут возникнуть некоторые различия. Вопрос об устойчивости ударной волны давления исследован в статье автора.[134]. Решение задачи проведено на основе гамильтоновских уравне-

ний движения в классе обобщенных функций для исходного решения и малых добавок. Это позволило, в отличие от традиционных методов, исследовать устойчивость ударной волны не только относительно слабых искажений ударного фронта («ряби»), но также относительно набегающих на разрыв возмущений. В идеализированной ударной волне – ступеньке, движущейся слева направо – гидродинамические переменные пропорциональны функции единичного скачка $\theta(-x + Ut)$, где U скорость движения разрыва. В гамильтоновских переменных такая ступенька описывается следующим соотношением.

$$a_{\mathbf{k}}^{\pm 1} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi \rho}{c_1 k_x} \right) \frac{\Delta v \delta(k_{\perp}) \theta(k_x) \exp[-ik_x Ut]}{k_x \pm i0}, \quad a_{\mathbf{k}}^{\pm 2} = 0 : \quad (7.9)$$

здесь Δv – амплитуда разрыва, слагаемое $\pm i0$ в знаменателе дает правило обхода полюса, оно соответствует движущейся слева направо волне. Из-за малости черенковской вершины система уравнений для малых возмущений $\delta a_{\mathbf{k}}^1$, $\delta a_{\mathbf{k}}^2$ первой и второй звуковых мод разбивается на два идентичных по структуре соотношения следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta a_{\mathbf{k}}^{\nu}}{\partial \rho} + i(\omega_{\nu \mathbf{k}} - Uk_x) \delta a_{\mathbf{k}}^{\nu} \\ & + \frac{1}{\pi i} \int \frac{A_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\nu} \delta a_{\mathbf{k}}^{\nu} dk_{1x}}{k_{1x} - k_x + i0} + \frac{1}{\pi i} \int \frac{A_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{-\nu} \delta a_{\mathbf{k}}^{-\nu} dk_{1x}}{k_{1x} \pm k_x + i0} = 0, \quad (\nu = 1, 2) \end{aligned} \quad (7.10)$$

здесь $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\nu}$ – некоторые функции волновых векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 , связанные с вершинами нелинейных процессов. Знаменатели $k_{1x} + k_x + i0$ формально возникли из Фурье представления ступенчатой функции (см. формулу 7.9). Специальными преобразованиями соотношение (7.10) приводится к системе сингулярных интегральных уравнений с рациональными коэффициентами. Решение таких уравнений (см. книгу Векуа [135]) связано с восстановлением кусочно-аналитической функции (комплексного переменного k_x по ее разрыву на оси действительных значений величины k_x). Выполненные выкладки [134] приводят к следующему результату. Возникшие, например, вследствие флуктуационной «силы» $G(\mathbf{k}, t)$ возмущения $\delta a_{\mathbf{k}}^{\nu}$ в дальнейшем развиваются по закону

$$\delta a_{\mathbf{k}}^{\nu}(t) \propto \int e^{\lambda t} G(\mathbf{k}, t) \hat{F}(\lambda, \mathbf{k}) d\lambda$$

здесь $G(\mathbf{k}, \lambda)$ Лаплас-образ функции $G(\mathbf{k}, t)$, а $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ оператор, вид которого может быть определен из полного решения задачи. Соответственно, $\delta a_{\mathbf{k}}^{\nu}(t) \propto e^{\lambda_i t}$ где λ_i – полюса этого оператора, и, таким образом, задача на исследование устойчивости сводится к нахождению полюсов оператора $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$.

Исследования показывают, что имеется три ветви для λ_i , две из которых следующие:

$$\lambda = iUk_x \pm ic_v |\mathbf{k}|, \quad (7.11)$$

$$\lambda = i(U - \Delta v)k_x \pm i \left(c_v^2 + \frac{\partial c_v^2}{\partial v} \Delta v \right)^{1/2} |\mathbf{k}|. \quad (7.12)$$

Физический смысл найденных ветвей состоит в том, что они описывают колебание за и перед фронтом ударной волны (в системе координат, связанной с разрывом). Величина $Re\lambda = 0$, т. е. найденные ветви к неустойчивости не приводят. Третья ветвь полюсов оператора $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ дискретна (не зависит от k_x). Ее физический смысл состоит в том, что она описывает эволюцию возмущений на ударном фронте. Для возмущений типа второго звука оператор $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ не содержит полюсов указанного вида.

Что касается возмущений типа первого звука, то они, как известно (см. работу Иорданского [133]), приводят к ускорению и искажению ударного фронта, создавая на нем «рябь», эволюция которой описывается исследуемой ветвью. Иными словами, указанная ветвь полюсов оператора описывает устойчивость ударной волны относительно слабых искажений поверхности разрыва. Такого рода постановка задачи совпадает с работами по устойчивости ударных волн в обычных жидкостях, Выполненные в статье [134] выкладки приводят к такому простому результату. Начальные искажения ударного фронта $\xi(\mathbf{r}_\perp, t)$ в дальнейшем убывают по экспоненциальному закону с декрементом $U_1 k_\perp$, ($U_1 = U - \Delta v$) — скорость течения жидкости позади разрыва), что означает абсолютную устойчивость ударной волны. Этот результат совпадает с выводами работы [133], в которой исследовалась устойчивость ударных волн в обычных жидкостях. Резюмируя результаты этого раздела, можно сказать, что ударные волны давления в HeII устойчивы относительно искажений поверхности разрыва, и представляют собой, как и в обычных средах, очень устойчивый тип течения. Обратим внимание на то, что если задать конкретный вид начального возмущения (например, положить $G(\mathbf{k}, t) \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp(i\omega_{\nu\mathbf{k}} t)$, то описанный в этом пункте метод может быть использован для описания взаимодействия этого возмущения (звука) с ударной волной.

8 Стохастические нелинейные волновые процессы.

В предыдущих разделах были рассмотрены некоторые вопросы распространения нелинейных волн на основе динамических уравнений движения. Несколько иной подход возникает в задаче, когда в Нелл возбуждается волновой пакет, содержащий большое число не коррелированных между собой гармоник. Реально такая ситуация может возникнуть вследствие неустойчивости волн, или, например, при случайной накачке импульсов (тепла, или давления) в объем жидкости. Пусть имеется некоторый источник волновой энергии, рождающий гармоники с характерным волновым числом порядка k_+ . Обычно значение связывают (по порядку величины) с обратным размером системы, $k_+ \sim L^{-1}$. Вследствие нелинейных процессов в системе появляются гармоники с большими значениями $k > k_+$ которые, в свою очередь, рожают еще более высокие гармоники. При очень больших k , порядка k_- в уравнениях движения, и волны с импульсами $k > k_-$ быстро затухают. В итоге устанавливается некое распределение волн, характеризуемое потоком энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным. Описанная картина типична для турбулентных явлений, и, поскольку речь идет о звуковых волнах, называется акустической турбулентностью (АТ).

8.1 Постановка задачи, диаграммная техника Уайльда

В настоящем разделе исследуется АТ в Нелл, особенностью которого является то, что, кроме описанного взаимодействия волн, добавляется перекрестное взаимодействие между первым и вторым звуками. Последовательное описание стохастических волновых процессов может быть проведено в рамках неравновесной диаграммной техники (ДТ) Уайльда [136], которая была разработана им для гидродинамической турбулентности. Канонический вариант этой методики, описанной в работе Захарова и Львова [137] является более удобным для изучения стохастических волн. Мы изучаем стохастические волновые поля в гамильтоновых переменных $a_{q_1}^{\nu_1}(t_1)$ (см. уравнения 3.149). которые модифицируем следующим образом:

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{\nu}}{\partial t} = -i * \text{sign}(\nu) \frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{-\nu}} - \gamma_{\nu} a_{\mathbf{k}}^{\nu} + f_{\mathbf{k}}^{\nu}(t). \quad (8.1)$$

Здесь мы добавили слагаемое ответственное за затухание звука а также ввели некоторую случайную (Ланжевеновскую) силу, которая моделирует

возбуждение случайных гармоник. Индексы $\nu = \pm 1, 2$, как и ранее, идентифицируют волновые моды. Предполагается, что коррелятор Ланжевеновской силы имеют следующий вид:

$$\langle f_{\mathbf{k}}^{\nu_1}(t_1) f_{-\mathbf{k}}^{\nu_2}(t_2) \rangle = \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta(t_1 - t_2) F(\mathbf{k}), \quad (8.2)$$

где $F(\mathbf{k})$ функция отличная от нуля для $k \sim L^{-1}$.

Совершим в уравнении (8.1) временное Фурье-преобразование, в результате чего оно перейдет в следующее интегральное уравнение.

$$a_q^\nu = G_{0q}^\nu \left[\sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1, 2} \int \int \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2} a_{q_1}^{\nu_1} a_{q_2}^{\nu_2} \delta\left(\sum_i q_i \text{sign}(\nu_i)\right) dq_1 dq_2 + f_q^\nu \right]. \quad (8.3)$$

Здесь $q = (\mathbf{k}, \omega)$ — четырехмерный волновой вектор, a_q^ν — временная фурье-компонента комплексной амплитуды $a_{\mathbf{k}}^\nu$, f_q^ν — фурье-компонента внешней случайной (ланжевеновской) силы $f_{\mathbf{k}}^\nu(t)$ (см. (8.1)). В этой главе для удобства матричные элементы V переопределены, $V \rightarrow (1/2)V$. Величина G_{0q}^ν — затравочная функция Грина, равная

$$G_{0q}^\nu = \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\nu + i\gamma_{\mathbf{k}}^\nu \delta_p}, \quad (8.4)$$

где $\gamma_{\mathbf{k}}^\nu$ — вязкое затухание.

Суть диаграммной техники Уайльда состоит в представлении исходного решения $a_{\mathbf{k}}^\nu$ (см. [8.1]) в виде бесконечного ряда по степеням случайной силы $f_{\mathbf{k}}^\nu(t)$. Рассмотрим формальное разложение величины a_q^ν по степеням f_q^ν .

$$a_q^\nu = a_q^{0\nu} + a_q^{1\nu} + a_q^{2\nu} + \dots \quad (8.5)$$

Сравнив почленно правую и левую части (8.3), получим

$$a_q^{0\nu} = G_{0q}^\nu f_q^\nu \quad (8.6)$$

$$a_q^{1\nu} = G_{0q}^\nu \left[\sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1, 2} \int \int \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2} \delta\left(\sum_i q_i \text{sign}(\nu_i)\right) dq_1 dq_2 G_{0q_1}^{\nu_1} G_{0q_2}^{\nu_2} f_{q_1}^{\nu_1} f_{q_2}^{\nu_2} \right] \quad (8.7)$$

$$a_q^{2\nu} = G_{0q}^\nu \left[\sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1, 2} \int \int \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2} \delta\left(\sum_i q_i \text{sign}(\nu_i)\right) dq_1 dq_2 (a_{q_1}^{0\nu_1} a_{q_2}^{1\nu_2} + a_{q_1}^{1\nu_1} a_{q_2}^{0\nu_2}) \right] \quad (8.8)$$

Продолжая последовательно итерационную процедуру, можно видеть, что в каждом члене ряда (8.5) имеются схожие элементы (вершины $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}$, функции Грина G_{0q}^ν , случайные силы f_q^ν) и операции (суммирование по внутренним

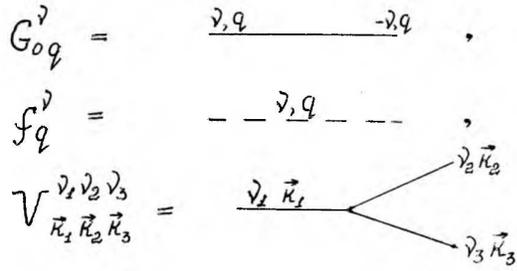


Рис. 8.38:

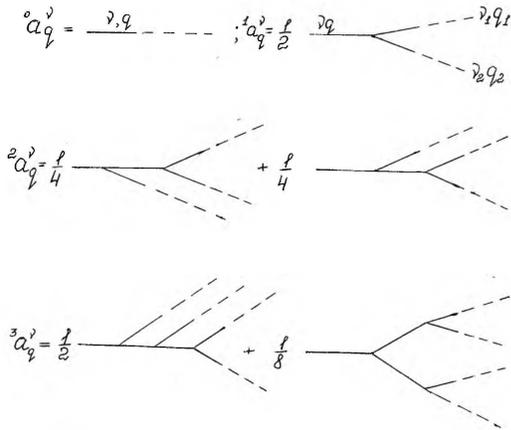


Рис. 8.39:

индексам и интегрирование по импульсам). В силу этого, каждый член ряда (8.5) можно изобразить графически, используя следующие элементы (см. Рис. 8.38):

О помощью этих элементов n -итерации $a_q^{n\nu}$ могут быть представлены в виде "деревьев" следующим образом (см. Рис. 8.39):

Следуя работам [136],[137] введем для описания случайных волновые поля следующие средние: тензор спектральной плотности $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и тензор Грина $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$, которые определены следующим образом:

$$\langle a_{q_1}^{\nu_1} a_{q_2}^{\nu_2} \rangle = n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} \delta(q_1 \text{sign}(\nu_1) + q_2 \text{sign}(\nu_2)), \tag{8.9}$$

$$\langle \delta a_{q_1}^{\nu_1} / \delta f_{q_2}^{\nu_2} \rangle = G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} \delta(q_1 \text{sign}(\nu_1) + q_2 \text{sign}(\nu_2)). \tag{8.10}$$

При вычислении средних мы будем полагать, что внешняя сила f_q^ν Гауссова и, в соответствии с этим считать, что средние от произведения нечетного числа f_q^ν отсутствуют, а средние от четного числа разбиваются на сумму парных корреляторов вида

$$\langle f_{q_1}^{\nu_1} f_{q_2}^{\nu_2} \rangle \propto \delta(q_1 \text{sign}(\nu_1) + q_2 \text{sign}(\nu_2)). \tag{8.11}$$

Это является аналогом теоремы Вика. Тогда вычисление тензора спектральной плотности $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ сводится к попарному "склеиванию" внешних ветвей двух

$$n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} = \text{---} \nu_1 \nu_2 \text{---} + \begin{array}{c} \nu_1 \nu_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nu_1 \nu_2 \end{array} \quad (8.10)$$

Рис. 8.40:

$$G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} = \text{---} \nu_1 \nu_2 \text{---} + \begin{array}{c} \nu_1 \nu_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nu_1 \nu_2 \end{array} + \text{---} \nu_1 \nu_2 \text{---} \quad (8.11)$$

Рис. 8.41:

"деревьев" а вычисление $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ – к склеиванию ветвей одного дерева при последовательном фиксировании каждой из ветвей. В результате для величин $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ получим следующие диаграммные ряды (см. рисунки 8.40 и 8.41) Ряды 8.40 и 8.41 представляют собой формальное разложение по степеням взаимодействия $|V_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\nu_1 \nu_2}|^2$. Члены нулевого порядка при этом имеют совпадающие внешние индексы ν . Это соответствует тому, что в линейном приближении отсутствует взаимодействие между звуками.

Диаграммные ряды 8.40 и 8.41 могут быть частично отсуммированы (см., например, [137]). Эта процедура основана на том, что внутренние фрагменты графиков, разделенные линиями G_{0q}^{ν} (слабо связанные диаграммы), могут быть рассмотрены как начальные члены разложения для исходных рядов $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$. Действительно, в полученных бесконечных выражениях 8.40 и 8.41 можно выделить структуры совпадающие с первоначальным определением искомым величин $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$, $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и провести частичное суммирование. После этого частичного суммирования получаются формулы аналогичные аналогичные выражениям 8.9 и 8.10, но в которых фигурируют уже переопределённые, или как говорят "одетые" исходные величины $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$. Эти перенормированные с учетом взаимодействия величины $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$, $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ удовлетворяют системе уравнений Дайсона:

$$G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} = G_{0q_1}^{\nu_1} + G_{0q_1}^{\nu_1} \sum_{q_1 q'}^{\nu_1 \nu'} G_{q' q_2}^{\nu' \nu_2}, \quad (8.12)$$

$$n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2} = G_{q_1 q'}^{\nu_1 \nu'} \left(F_{q' q''}^{\nu' \nu''} + \Phi_{q' q''}^{\nu' \nu''} \right) G_{q'' q_2}^{\nu'' \nu_2}. \quad (8.13)$$

Массовые операторы $\Phi_{q' q''}^{\nu' \nu''}$ и $\sum_{q_1 q'}^{\nu_1 \nu'}$ могут быть представлены в виде следующих диаграммных рядов: 8.42,

и для 8.43

Рис. 8.42:

Рис. 8.43:

Волнистые линии изображают $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$, прямые $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$. Внешние концы имеют индексы ν_1, ν_2 , импульсы q_1, q_2 ; по внутренним индексам ν_i проводится суммирование, а по импульсам q_i - интегрирование. Иногда бывает удобно провести суммирование по знакам индексов в явном виде. При этом в диаграммам, различающихся лишь знаками индексов ν , линиям приписывается направление.

Топологические свойства диаграмм в рядах (8.42, 8.43), описаны в работах [136],[137], мы не будем на них подробно останавливаться. Заметим лишь, что в диаграммах для величины $\sum \frac{\nu_1 \nu'}{q_1 q'}$ вход и выход соединены (единственным способом) линиями тензоров Грина $G_{q_1 q'}^{\nu_1 \nu'}$.

Таким образом, получена система диаграммных уравнений, где в качестве переменных фигурируют не плоские волны, а волны перенормированные с учетом взаимодействия. Эта система уравнений неоднородна, в нее входит коррелятор внешней силы $\langle f_{q_1}^{\nu_1} f_{q_2}^{\nu_2} \rangle$. Если взаимодействие волн между собой превышает взаимодействие с "термостатом" (или с накачкой), то коррелятор внешней силы может быть положен равным нулю. В теории турбулентности предполагают, что решения $n_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ и $G_{q_1 q_2}^{\nu_1 \nu_2}$ при этом остаются конечными. Это соответствует принципу максимальной случайности, в соответствии с которым турбулентность является результатом развития всех видов неустойчивости.

8.2 Кинетические уравнения

С помощью уравнений Дайсона (8.12)-(8.13) наиболее полным образом можно описать случайные волновые поля, но на пути к этому стоит нерешенная проблема суммирования рядов (8.42, 8.43). Другой подход - метод кинетических уравнений КУ возникает в предположении о малом уровне нелинейности, которое дает возможность ограничиться первыми диаграммами в рядах (8.42,

8.43).

В предположении малого уровня нелинейности, а именно, требования, чтобы нелинейный сдвиг частоты $\Delta\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ был много меньше любой из частот, уравнения Дайсона могут быть сведены к системе к системе кинетических уравнений (КУ) для величины $n_{\mathbf{k}}^{\nu} = \int n_{q,q_2}^{\nu_1\nu_2} \delta(q - q_2) \delta(\nu - \nu_2) d\omega$ — одновременного коррелятора комплексной амплитуды (см. [137],[130]). Корреляторы свободных волн, как несложно убедиться, имеют следующую зависимость от частоты

$$n_q^{\nu} \propto \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\nu}), \quad (8.14)$$

т.е. лежат на дисперсионной кривой. Предполагая, что слабое нелинейное взаимодействие слабо меняет эту зависимость можно получить, что величины $\Sigma_{q_1q'}^{\nu_1\nu'}$ и $\Phi_{q'q''}^{\nu'\nu''}$ пропорциональны $\delta(\omega_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2})$, т.е. отличны от нуля лишь в диагональных по ν_1, ν_2 членах. Необходимый условием для этого является малость нелинейного сдвига частоты $\Delta\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ по отношению к любой из частот $\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$.

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \ll \omega_{\mathbf{k}}^{\nu}.$$

При выполнении условия (бЛо) в уравнениях Дайсона следует учесть лишь диагональные члены $n_{q-q}^{\nu-\nu} = n_q^{\nu}$ и $G_{q-q}^{\nu-\nu} = G_q^{\nu}$, причем

$$n_q^{\nu} = n_q^{-\nu}, \quad G_q^{\nu} = (G_q^{-\nu})^*. \quad (8.15)$$

Запишем уравнения Дайсона (8.12)-(8.13) для величин $n_q^{\nu}, G_q^{-\nu}$ в следующем виде

$$n_q^{\nu} = |G_q^{\nu}|^2 \Phi_q^{\nu} \quad (8.16)$$

$$G_q^{\nu} = \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\nu} + \Sigma_{\mathbf{k}}^{\nu}} \quad (8.17)$$

Сравнивая выражения (8.16),(8.17) с формулой для затравочной функции Грина (8.4), заключаем, что нелинейный сдвиг частоты $\Delta\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ равен

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} = \text{Re}\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{\nu}.$$

Затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{\nu}$, обязанное нелинейным процессам, равно

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{\nu} = \text{Im}\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{\nu}.$$

Перепишем (8.16),(8.17) в следующем, эквивалентном виде.

$$n_q^{\nu} \Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{\nu} - \Phi_q^{\nu} \text{Im}G_q^{\nu} = 0. \quad (8.18)$$

Последовательно считая, что взаимодействие слабо меняет затравочные характеристики, положим

$$n_q^\nu \propto n_{\mathbf{k}}^\nu \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\nu), \quad \text{Im}G_q^\nu \propto \pi \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\nu). \quad (8.19)$$

Проинтегрировав (8.18) по частоте ω , получим (с учетом (8.19))

$$\pi \Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu = n_{\mathbf{k}}^\nu \Gamma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu \quad (8.20)$$

Функции $\Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu, \Gamma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu$ представляют собой значения операторов $\Phi_q^\nu, \text{Im}\Sigma_q^\nu$ на массовой поверхности $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\nu$. Далее, в соответствие с выбранным приближением, вычислим величины $\Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu, \Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu \Phi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^\nu$, ограничиваясь первыми петлями в рядах (8.42, 8.43). Подставив найденные соотношения в (8.20) и отсуммировав по знакам внутренних индексов ν_1, ν_2 получим систему КУ для величин $n_{\mathbf{k}}^\nu$ (индексы $\nu = 1, 2$). В стационарном и пространственно однородном случае система КУ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{st}^\nu \{n\} = & \sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1, 2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 [D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2} (n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2} - n_{\mathbf{k}}^\nu n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} - n_{\mathbf{k}}^\nu n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2}) \\ & - D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{\nu_1\nu_2\nu} (n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2} n_{\mathbf{k}}^\nu - n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} n_{\mathbf{k}}^\nu - n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2}) \\ & - D_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{\nu_2\nu\nu_1} (n_{\mathbf{k}}^\nu n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} - n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2} n_{\mathbf{k}}^\nu - n_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2} n_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1})] = 0, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Здесь

$$D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2} = \frac{\pi}{2} |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\nu - \omega_{\mathbf{k}_1}^{\nu_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}^{\nu_2}). \quad (8.22)$$

Уравнения (8.21), (8.22) совпадают с КУ, используемыми для описания фоновых систем (см. книгу Гуревича [138]), с тем отличием, что в них опущены спонтанные процессы (формально из-за того, что $\hbar \ll n_{\mathbf{k}}^\nu$). Обычным способом (см. [137]) можно убедиться, что КУ (8.21), (8.22) имеют решение такого вида:

$$n_{\mathbf{k}}^1 = \frac{T}{c_1 |\mathbf{k}|}, \quad n_{\mathbf{k}}^2 = \frac{T}{c_2 |\mathbf{k}|}. \quad (8.23)$$

Здесь T — некоторая константа, имеющая смысл температуры. Решение (8.23) есть равновесное распределение Рэлея-Джинса, оно характеризуется отсутствием каких-либо потоков (в k -пространстве) и, соответственно, не подходит для задачи об АТ.

В неравновесной ситуации постановка задачи о нахождении спектров АТ $n_{\mathbf{k}}^\nu$ предполагает, помимо уравнений (8.21), (8.22), также наличие источника и стока волн. Вообще говоря, решение $n_{\mathbf{k}}^\nu$ зависит от конкретного вида источника (и стока). Однако, как это часто бывает, области влияния источника k_+ и стока k_- сильно разнесены в \mathbf{k} пространстве, т. е. $k_+ \ll k_-$. При

этом в диапазоне волновых чисел удаленных как от k_+ так и от k_- (т. е. $k_+ \ll k \ll k_-$), в так называемом инерционном интервале (ИИ) может установиться некоторое распределение не зависящее от вида источника (и стока) и определяемое лишь нелинейным взаимодействием между волнами.

Таким образом, задача о нахождении спектров АТ сводится к выявлению таких решений КУ (8.21), которые обеспечивают постоянство потока энергии $P_{\mathbf{k}}$ в \mathbf{k} -пространстве. Эта задача очень сложна, так как связана с решением системы нелинейных интегральных уравнений. Даже в более простом случае одной волновой моды точное решение удастся найти лишь в изотропной ситуации и при весьма жестких ограничениях на вид функций $\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ и $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}$, а именно, при требовании, чтобы эти величины являлись однородными функциями своих аргументов. Это требование, а также условие $k_+ \ll k_-$, в силу которого можно положить $k_+ = 0$, $k_- = \infty$, приводит к предположению о масштабной инвариантности задачи, т. е. отсутствию характерных размеров для \mathbf{k} . Это позволяет предположить, что решение $n_{\mathbf{k}}^{\nu}$ имеет степенной вид: $n_{\mathbf{k}}^{\nu} = Ak^s$. Показатель степени s может быть вычислен с помощью так называемых преобразований Захарова (подробно об этом см. в книге Захарова, Львова и Фальковича [60]). С помощью этих преобразований удастся выполнить факторизацию подынтегрального выражения в КУ (5.1), при этом один из сомножителей приводит к решению $n_{\mathbf{k}}^{\nu} \propto k^s$, характеризующему постоянным потоком энергии в k пространстве. В частности, таким путем Захаровым и Сагдеевым [139] был найден спектр АТ в обычной жидкости. Они нашли, что $s = -9/2$ и вычислили связь между амплитудой спектра A и мощностью источника волновой энергии P .

Ввиду наличия нескольких типов нелинейных процессов, выполнить факторизацию интеграла столкновений непосредственно не удастся. Тем не менее, как сейчас будет показано, система КУ (8.21) имеет изотропное масштабнo-инвариантное решение следующего вида:

$$n_{\mathbf{k}}^1 = Ak^s, \quad n_{\mathbf{k}}^2 = Bk^s \quad (8.24)$$

с одинаковым показателем степени s (см. статью автора [140]).

Доказательство этого утверждения может быть проведено следующим образом. Если подставить спектры (8.24) в КУ (8.21), (8.22), то выяснится такое важное обстоятельство: в силу одинаковой степени однородности всех вершин $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}$, а также в силу линейности обоих законов дисперсии $\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ внешний аргумент \mathbf{k} входит во все слагаемые в виде множителя k^{5+2s} . В результате, после сокращения на k^{5+2s} , КУ (8.21) редуцируется к системе алгебраических

билинейных уравнений относительно величин A и B :

$$\begin{aligned} X_{AA}A^2 + X_{AB}AB + X_{BB}B^2 &= 0, \\ Y_{AA}A^2 + Y_{AB}AB + Y_{BB}B^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Величины X, Y вычисляются из интегралов, входящих в КУ, они являются функциями параметра s . Будучи однородной (по A, B), система (5.4) имеет решения лишь при определенных значениях s , играющих роль собственных чисел. Ниже будет показано, что $s = -9/2$ является собственным числом системы (5.4).

Выпишем слагаемые в КУ (8.21), соответствующие распадным процессам (из изложения будет видно, что для черенковских процессов ситуация вполне аналогичная). Обозначив их J^{122}, J^{212} , где первый индекс указывает номер уравнения, а два остальных обозначают вид процесса, получим

$$J^{122} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{122} (n_{\mathbf{k}_1}^2 n_{\mathbf{k}_2}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_1}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_2}^2) \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} J^{212} &= - \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{122} (n_{\mathbf{k}_2}^2 n_{\mathbf{k}}^2 - n_{\mathbf{k}_1}^1 n_{\mathbf{k}}^2 - n_{\mathbf{k}_1}^1 n_{\mathbf{k}_2}^2) - \\ &- \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 D_{\mathbf{q}_2\mathbf{k}\mathbf{q}_1}^{\nu_2\nu\nu_1} (n_{\mathbf{k}}^\nu n_{\mathbf{q}_1}^{\nu_1} - n_{\mathbf{q}_2}^{\nu_2} n_{\mathbf{k}}^\nu - n_{\mathbf{q}_2}^{\nu_2} n_{\mathbf{q}_1}^{\nu_1}) \end{aligned} \quad (8.27)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (8.27). Законы сохранения, входящие в множитель $D_{\mathbf{q}_2\mathbf{k}\mathbf{q}_1}^{\nu_2\nu\nu_1}$ требуют выполнения следующих условий:

$$c_1 |\mathbf{q}_2| = c_2 |\mathbf{k}| + c_2 |\mathbf{q}_1|, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{k} + \mathbf{q}_1. \quad (8.28)$$

аналогично аналогично законы сохранения в интеграле J^{122} имеют вид

$$c_1 |\mathbf{k}| = c_2 |\mathbf{k}_1| + c_2 |\mathbf{k}_2|, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (8.29)$$

Изобразим тройки векторов, связанных условиями (8.28, 8.29) на Рис. 8.44, причем треугольники выберем подобные.

Повернем треугольник $\mathbf{q}_2\mathbf{k}\mathbf{q}_1$ таким образом, чтобы совместить направление \mathbf{k} с направлением \mathbf{k}_1 первого треугольника $\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$ и растянем его в k/k_1 раз, после чего оба треугольника совпадут, как это показано на Рис. 8.45.

Приведенные операции эквивалентны следующей замене переменных:

$$q_1 = \frac{k}{k_1} k_2, \quad q_2 = \left(\frac{k}{k_1} \right)^2 k_1. \quad (8.30)$$

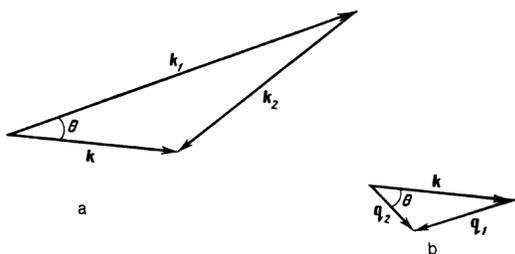


Рис. 8.44:

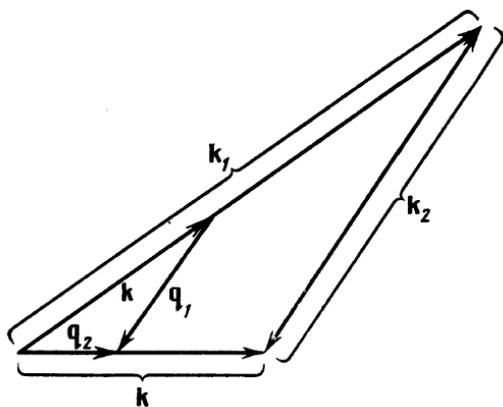


Рис. 8.45:

Используя подстановки (5.9) и воспользовавшись свойством однородности величин $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu\nu_1\nu_2}$, $\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$, $n_{\mathbf{k}}^{\nu}$, приведем исследуемый член к выражению

$$\int \left(\frac{k}{k_1}\right)^{8+2s} D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{122} (n_{\mathbf{k}_1}^2 n_{\mathbf{k}_2}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_1}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_2}^2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (8.31)$$

которое отличается от J^{122} множителем $(k/k_1)^{8+2s}$ в подынтегральном выражении. Аналогичные выкладки показывают, что первое слагаемое в (8.27) приводится к виду с множителем $(k/k_2)^{8+2s}$ под интегралом. Умножив далее J^{122} на c_1 , а J^{212} на c_2 и сложив их, получим

$$c_1 J^{122} + c_2 J^{212} = \int D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{122} \left[c_1 - c_2 \left(\frac{k}{k_1}\right)^{8+2s} - c_2 \left(\frac{k}{k_2}\right)^{8+2s} \right] \times \quad (8.32)$$

$$\times (n_{\mathbf{k}_1}^2 n_{\mathbf{k}_2}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_1}^2 - n_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}_2}^2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2.$$

Нетрудно видеть, что при $8+2s = -1$ (т. е. при $s = -9/2$), квадратная скобка в (8.32) совпадает с аргументом частотной δ -функции, входящей в $D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{122}$, в силу чего интеграл обращается в нуль. Таким образом, вне зависимости от амплитуды спектров A и B , при значении $s = -9/2$ величины J^{122} и J^{212}

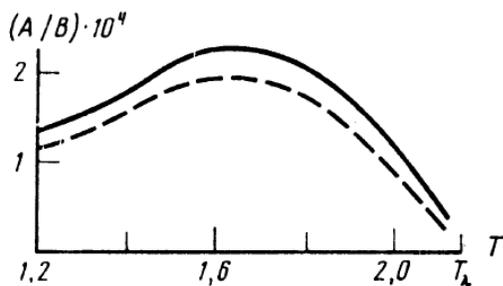


Рис. 8.46:

связаны между собой соотношением $c_1 J^{122} + c_2 J^{212} = 0$. В частности, если подобрать такое соотношение между A и B , чтобы J^{122} обращался в нуль, то J^{212} будет также равен нулю. В результате вклады в $I_{st}^\nu\{n\}$ от распадных процессов в обоих уравнениях системы (8.21) обращаются в нуль. Вклады от нелинейных процессов «внутри» каждой из волновых мод обращаются (при $s = -9/2$) в нуль автоматически, так как ситуация вполне аналогична АТ в обычных средах, описанной в [139]. Таким образом, выбором соотношения между A и B (и положив $s = -9/2$ можно обратить в нуль оба интеграла столкновений в КУ, иными словами, получить решение вида (8.24). Связь между A и B может быть установлена с помощью любого из уравнений (8.25). Результаты вычислений представлены на Рис. 8.46, где отношение A/B изображено как функция температуры.

Обратим внимание на то, что по порядку величины / близко к величине $(1/2)(2c_2/c_1)^{9/2}$ (на Рис. 8.46 последняя изображена пунктиром). Этому факту можно дать такое физическое объяснение. Как показывают вычисления, вклад в величины X, Y (см. от распадных процессов много больше вклада от черенковских. Но в распадных процессах, как показано в разделе 7 один квант первого звука с импульсом \mathbf{k} распадается на два кванта второго звука с импульсами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, причем $k_1, k_2 \approx c_1 k / 2c_2$. Таким образом, по порядку величины справедливо соотношение $2n_{\mathbf{k}}^1 \sim n_{c_1 \mathbf{k} / 2c_2}^2$, из которого учитывая, что $n_{\mathbf{k}}^\nu \propto k^{-9/2}$ получим

$$\frac{A}{B} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{9/2}.$$

Изобразим схематически спектры первого и второго звуков, как функции волнового числа k (Рис. 8.47).

Область I - это область влияния источника, в области III существенны эффекты вязкого затухания волн. Область II представляет собой инерционный интервал, в котором реализуются найденные выше спектры $n_{\mathbf{k}}^1, n_{\mathbf{k}}^2$.

Оценим энергии $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$, запасенные в волновых полях. Эти величины могут быть получены усреднением квадратичной части гамильтониана H (см.

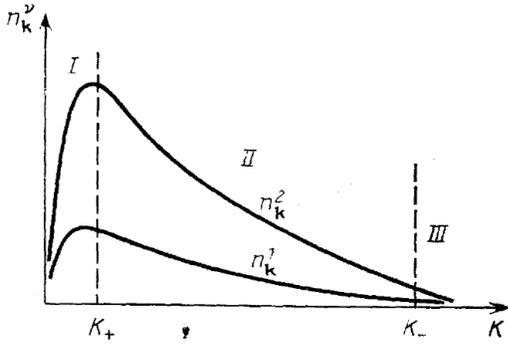


Рис. 8.47:

формулу 3.148). Для величины $\varepsilon^{(1)}$ имеем

$$\varepsilon^{(1)} = \int \omega_{\mathbf{k}}^1 n_{\mathbf{k}}^1 d\mathbf{k} = 4\pi A \int k^{-3/2} dk \sim \frac{8\pi c_1 A}{k_+^{1/2}} \quad (8.33)$$

Обрезание интеграла проведено на $k_+ \sim L^{-1}$, где L , повторяем, размер системы. Аналогично, для второго звука имеем $\varepsilon^{(2)} \sim 8\pi c_2 B/k_+^{1/2}$. Отношение энергий $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ равно $\varepsilon^{(1)}/\varepsilon^{(2)} \sim (2c_2/c_1)^{7/2}$, т. е. энергия, запасенная во второй, более мягкой моде, значительно превышает энергию первого, более жесткого звука. Это является особенностью неравновесного распределения, так как для рэлеевского решения (8.23) энергии $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ равны, что согласуется с законом равнораспределения (см курс теоретической физики [141]).

Рассмотрим вопрос о потоках энергии в \mathbf{k} -пространстве. Система уравнений (8.21) сохраняет полную энергию $\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$ и, как следствие, может быть записана в виде уравнения непрерывности в k -пространстве для спектральной плотности энергии ε_k . В интересующем нас стационарном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = P\delta(\mathbf{k}). \quad (8.34)$$

Здесь $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ — вектор потока энергии \mathbf{k} -пространстве. В правую часть соотношения (8.34) мы ввели источник волновой энергии, сосредоточенный в начале координат $\mathbf{k} = 0$. Из аналогии с электростатикой легко получить, что $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = (P/4\pi k^2)\mathbf{k}/k$. При этом абсолютная величина сферически нормированного потока энергии $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = 4\pi k^2 |\mathbf{P}_{\mathbf{k}}|$ не зависит от вектора \mathbf{k} , что означает постоянство полного потока через любую поверхность, окружающую начало координат. Чтобы получить связь между амплитудами спектров A и B и мощностью источника, необходимо выразить $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ через интегралы столкновений. Для этого умножим первое из уравнений (8.21) на $4\pi c_1 k^3$, второе — на $4\pi c_2 k^3$ и сложим. Переходя к изотропному случаю и представив сумму в

дивергентном виде, получим

$$\tilde{P}_k = \frac{4\pi k^{9+2s}}{9+2s} \{c_1 \tilde{I}_{st}^1 + c_2 \tilde{I}_{st}^2\}. \quad (8.35)$$

Здесь \tilde{I}_{st}^1 — интегралы столкновений, взятые без множителя k^{5+2s} . Видно, что при $s = -9/2$ величина \tilde{P}_k не зависит от k , т. е. найденные решения для спектров $n_{\mathbf{k}}^{\nu}$ обеспечивают постоянство потока энергии. Чтобы получить интересующую нас связь между величинами A , B , и P , нужно раскрыть неопределенность $\{\}/(9+2s)$, где $\{\}$ — выражение в фигурных скобках. Указанную неопределенность можно раскрыть, полагая s отличным от значения $-9/2$ и устремляя затем выражение $9+2s$ к нулю. Разделив вклады от различных видов нелинейных процессов, получим

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\mathbf{k}} = P = \lim_{s \rightarrow -9/2} \left\{ \frac{4\pi k^{9+2s}}{9+2s} [c_1 J^{111} + c_2 J^{222}] + \right. \\ \left. + \frac{4\pi k^{9+2s}}{9+2s} \int D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{122} \left[c_1 - c_2 \left(\frac{k}{k_1} \right)^{8+2s} - c_2 \left(\frac{k}{k_2} \right)^{8+2s} \right] \times \right. \\ \left. \times [B^2 k_1^s k_2^s - AB k^s k_1^s - AB k^s k_2^s] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \right. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Здесь мы вновь для краткости ограничимся распадными процессами. Рассмотрим интегральный член в (8.36). Подынтегральное выражение содержит произведение двух квадратных скобок. Первая из них обращается в нуль (при $s = -9/2$) на резонансной поверхности, задаваемой условиями (8.29). Вторая скобка обращается в нуль в силу того, что связь между A и B выбрана таким образом, чтобы интеграл столкновений \tilde{I}_{st}^1 обратился в нуль (см. выше). Поэтому при малых отклонениях величины s от $-9/2$ интегральное выражение пропорционально $(9+2s)^2$, в то время как знаменатель содержит $(9+2s)$ в первой степени. В результате вклад в общий поток энергии от перекрестного взаимодействия обращается в нуль, т. е., несмотря на общую неравновесность системы, «газы» квантов первого и второго звуков находятся между собой в равновесии. Что касается вкладов в поток энергии от собственных нелинейных процессов, то для них, как показывают вычисления, справедливы следующие соотношения:

$$\tilde{P}_1 \approx \frac{6\alpha_1^2(T)c_1}{\rho} A^2, \quad \tilde{P}_2 \approx \frac{6\alpha_2^2(T)c_2\rho_s}{\rho\rho_n} B^2, \quad (8.37)$$

где $\alpha_1(T)$ и $\alpha_2(T)$ — коэффициенты нелинейности первого и второго звуков (см. раздел 5). Полный поток энергии $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$ разумеется, совпадает с энергией накачки (или диссипацией) в единице объема. Это позволяет, зная

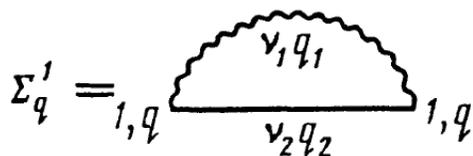


Рис. 8.48:

отношение A/B выразить амплитуду спектра A (или B) через мощность источника P . Интересно отметить, что, несмотря на общую неравновесность, "газы" квантов первого и второго звуков находятся между собой в равновесии, общий поток энергии от одной моды к другой равен нулю.

В заключение этого раздела обсудим вопрос об единственности найденных нами решений для спектров $n_{\mathbf{k}} \propto k^{-9/2}$. Вообще говоря, уравнения (14) — (15) в силу нелинейности могут иметь иные, отличные от величины $-9/2$ собственные значения s . Однако, как легко видеть, в этом случае поток энергии $P \propto k^{5+2s}$ существенно зависит от k . В результате при выяснении связи между амплитудами спектров A и B и мощностью источника мы должны вводить внешний масштаб турбулентности k_+ , что противоречит исходному предположению о масштабной инвариантности задачи.

8.3 Акустические свойства турбулентного He II

He II, в котором возбуждена АТ, обладает отличными от невозмущенной жидкости акустическими свойствами. Действительно, любая звуковая волна, распространяясь по турбулентному гелию, будет взаимодействовать с развитыми волновыми полями. Результатом этого взаимодействия является некоторое дополнительное затухание Γ и дисперсия Δ . Вычислим эти величины. В предположении, что волновой вектор внешней волны \mathbf{k} принадлежит инерционному интервалу (т. е. $k_+ \ll k \ll k_-$), искомые величины равны мнимой и вещественной частям массового оператора $\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{\nu}$, вычисленного на массовой поверхности $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$ (см. (8.10)). Вычисление величин $\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{\nu}$ мы проведем в первом порядке теории возмущений, т. е. ограничимся первыми петлями в разложении (8.42, 8.43). Учет высших поправок будет выполнен в конце раздела. Проведем сначала вычисления для первого звука. Массовый оператор $\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^1$ изображается такой петлей (см. Рис. 8.48):

Аналитическое выражение для этой диаграммы имеет следующий вид:

$$\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^1 = \sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1, 2} \int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\nu_1\nu_2}|^2 n_{q_1}^{\nu_1} G_{q_1}^{\nu_1} dq_1 dq_2$$

Здесь — $n_q^\nu = n_{qq}^{\nu, -\nu}$, $G_q^\nu = G_{qq}^{\nu, -\nu}$, Рассмотрим вклад в $\Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^1$, обусловленный взаимодействием внешней волны с волновым полем первой звуковой моды. По аналогии с интегралами столкновений обозначим этот вклад через $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}}^{111}$. При попытке вычисления $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}}^{111}$ на «затравочной» функции Грина G_{0q}^ν возникает «стандартная» трудность, появляющаяся, например, при вычислении затухания звука в системе фононов с линейным законом дисперсии (см. [138]). Эта трудность связана с тем, что для таких систем резонансные условия выполняются для коллинеарных векторов, вследствие чего аргумент $\omega_{1\mathbf{k}} - \omega_{1\mathbf{k}_1} + \omega_{1\mathbf{k}_2}$ у функции Грина тождественно равен нулю, в то время как фазовый объем интегрирования также равен нулю. Возникающая неопределенность снимается при учете взаимодействия, вследствие которого δ -функция (мнимая часть затравочной функции Грина) заменяется узким лоренцевским профилем с шириной $\approx \Sigma_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^1$. Отсылая за подробностями вычислений к работе (см. [138]), приведем конечный результат:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{111} = \frac{\alpha_1^2(T)A}{2\pi\rho} \frac{k}{k_+^{1/2}} \quad (8.38)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{111} = \frac{\alpha_1^2(T)A}{\pi^2\rho} \frac{k}{k_+^{1/2}} \ln \frac{c_1 k}{\Sigma_{\mathbf{k}}^1} \quad (8.39)$$

Здесь $\Gamma_{\mathbf{k}}^{111}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{111}$ — затухание и дисперсия первого звука, обусловленные взаимодействием с волновым полем первой моды. При вычислении (8.38) и (8.39) использовалось, что спектры $n_{\mathbf{k}}^1 = Ak^{-9/2}$ и проведено обрезание интегралов на нижнем пределе k_+ .

Таким образом, получено, что волна, распространяясь по турбулентному гелию, испытывает дополнительное затухание, пропорциональное k , и дисперсию, роль которой, в силу линейной зависимости от k , сводится к перенормировке скорости, т. е. $\Delta c_1^{111} = \Delta_{\mathbf{k}}^{111}/k$.

Рассмотрим теперь вклад в $\Sigma_{\mathbf{k}}^1$, обусловленный распадному взаимодействию внешней волны, т. е. положим $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2$. Значения $\nu_1 = -2$, или $\nu_2 = -2$ запрещены законами сохранения. В этом случае, не опасаясь противоречий, можно при вычислении $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}}^{122}$ подставлять затравочную функцию Грина. Затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ выражается следующим соотношением:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{122} = \text{Im} \Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}}^{122} = \pi \int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}|^2 n_{\mathbf{k}_1}^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^1 - \omega_{\mathbf{k}_1}^2 + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^2) d\mathbf{k}_1. \quad (8.40)$$

Вычисление интеграла сводится к интегрированию по резонансной поверхности, представляющей собой эллипсоид $c_1|\mathbf{k}| = c_2|\mathbf{k}_1| - c_2|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$. При этом величины $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$ близки к значению $c_1k/2c_2$. Выполняя интегрирование и пренебрегая членами порядка $(c_1/c_2)^2$ по отношению к оставленным, получим, что затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ равно

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{122} = \frac{\alpha_p}{16\pi\rho} \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{3/2} Bk^{1/2}. \quad (8.41)$$

Здесь

$$\alpha_p = \int_0^\pi \left(-\frac{\rho}{\rho} - \cos^2 \theta - \frac{\rho_n \rho}{\rho_s} \frac{\partial \rho_n^{-1}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p \partial \sigma^2}{\partial T / \partial \sigma} - \cos^2 \theta \right) d \cos \theta.$$

Перейдем к вычислению вклада распадных процессов в дисперсию первого звука $\Delta_{\mathbf{k}}^{122} = Im \Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^1}^{122}$. Аналитическое выражение для $\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$ имеет следующий вид:

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{122} = \int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}|^2 \frac{n_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{\omega_{\mathbf{k}}^1 - \omega_{\mathbf{k}_1}^2 + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^2}. \quad (8.42)$$

Интеграл в (35) понимается в смысле главного значения. Вблизи резонансной поверхности подынтегральное выражение имеет особенность типа $(k - k_{res})^{-1}$ разного знака по обе стороны поверхности резонансного эллипсоида. Интеграл, тем не менее, оказывается отличным от нуля ввиду того, что имеется быстроспадающая функция $n_{\mathbf{k}_1}^2 = Bk_1^{-9/2}$. Оценим приближенно дисперсию $\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$, пренебрегая зависимостью матричного элемента $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}$ от направления, т. е. полагая $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122} = const(kk_1k - k_1)^{1/2}$. В этом случае удастся выполнить в аналитическом виде интегрирование по углу между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 . В результате интегрирования особенность типа $(k - k_{res})^{-1}$ расщепляется на две особенности логарифмического типа; подынтегральное выражение, как функция $|\mathbf{k}_1|$ приобретает вид, схематически изображенный на Рис. 8.49.

Основной вклад в интеграл вносит инфракрасная область, $k_1 \rightarrow 0$, а также области вблизи k'_1, k''_1 . Первая область приводит к следующему (по порядку величины) выражению для ${}^1\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$:

$${}^1\Delta_{\mathbf{k}}^{122} \approx \frac{B}{\pi^2 \rho} \frac{k}{k_+^{1/2}}. \quad (8.43)$$

Роль этой части дисперсии сводится к перенормировке скорости звука Δc_1^{122} , причем $\Delta c_1^{122} \gg \Delta c_1^{111}$. Оценки, проведенные для областей вблизи , приводят к такому результату:

$${}^1\Delta_{\mathbf{k}}^{122} \approx = \frac{\alpha_p}{\pi^2 \rho} \frac{c_2}{c_1} Bk^{1/2}. \quad (8.44)$$

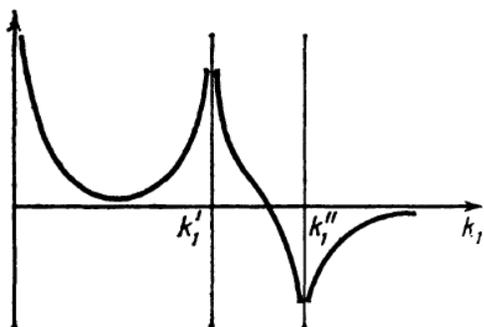


Рис. 8.49:

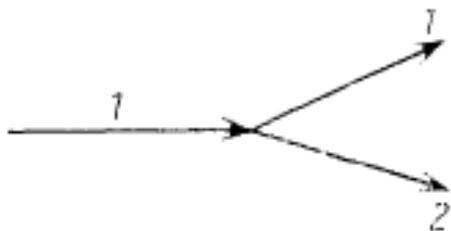


Рис. 8.50:

Таким образом, распадные нелинейные процессы приводят к дополнительному затуханию и дисперсии, имеющим корневую зависимость от волнового числа k .

Вклады черенковских процессов в величины $\Gamma_{\mathbf{k}}^{112}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{112}$ вычисляются аналогично. В качественном отношении результаты схожие, т. е. дополнительные $\Gamma_{\mathbf{k}}^{112}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{112}$ пропорциональны $k^{1/2}$. Однако количественно эти поправки много меньше распадных, формально оттого, что черенковские вершины малы, а также мал фазовый объем интегрирования в процессах 8.50

Перейдем к задаче о вычислении корреляционных характеристик второго звука. По аналогии с первым звуком здесь имеются вклады в затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{222}$ и дисперсию $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$, связанные с нелинейными процессами «внутри» второй волновой моды:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{222} = \frac{\alpha_2^2(T)\rho_s B}{2\pi\rho\rho_n} \frac{k}{k_+^{1/2}}, \quad (8.45)$$

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{222} = \frac{\alpha_2^2(T)\rho_s B}{\pi^2\rho\rho_n} \frac{k}{k_+^{1/2}} \ln \frac{c_2 k}{\Sigma \frac{2}{\mathbf{k}}}. \quad (8.46)$$

Таким образом, как и в первом звуке, имеются линейное затухание и дисперсия, роль которых сводится к перенормировке скорости звука.

Аналогично первому звуку перекрестные нелинейные процессы дают вклад в затухание и дисперсию, пропорциональные $k^{1/2}$. Однако эти вклады малы

$$\Sigma_{\mathbf{k}}^{212} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

Рис. 8.51:

$$\text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6}$$

Рис. 8.52:

по сравнению с $\Gamma_{\mathbf{k}}^{222}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$. Рассмотрим, например, распадные процессы. Массовый оператор $\Sigma_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^1}^{212}$ представляется следующими диаграммами (см. рисунок 8.51): Первый график содержит функцию Грина $G_{0, \mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^2 = (\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_{\mathbf{k}_1}^2 + \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^1)^{-1}$. Соответствующая резонансная поверхность представляет собой почти сферу с площадью $\propto (c_2 k / c_1)^2$, в силу чего интеграл мал в меру малости этого множителя. Схожая ситуация имеется во второй диаграмме, а также в черенковских процессах.

Кратко резюмируем полученные результаты. Волна первого звука, распространяясь по турбулентному гелию, испытывает затухание и дисперсию, обусловленные взаимодействием с волновыми полями. Наибольший вклад здесь дают распадные процессы, вследствие чего величины $\Gamma_{\mathbf{k}}^1$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^1$ имеют корневую зависимость от волнового числа k и могут быть легко экспериментально обнаружены. Затухание и дисперсия второго звука обязаны прежде всего собственным нелинейным процессам во второй моде. При этом величины $\Gamma_{\mathbf{k}}^2$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^2$ линейны по k и также могут быть легко отличимы от обычного вязкого затухания $\gamma_{\mathbf{k}}^2 = \gamma^2 k^{1/2}$.

Рассмотрим теперь опущенные диаграммы более высокого порядка в рядах для Σ_q^ν , Φ_q^ν (8.42, 8.43). Выпишем, например, диаграммы второго порядка (см. рис 8.52) по квадрату взаимодействия (см. рис 8.52) $|V|^2$ для оператора Σ_q^ν

Видно из 8.52, что учет диаграмм более высокого порядка сводится, как обычно, к усложнению одной из вершин. Проведем оценки для усложненных вершин. Рассмотрим для примера случай, когда вершина 8.53

усложняется следующим образом (см. Рис. 8.54):

Аналитическое выражение для усложненной вершины V^{111} имеет следующий вид:

$$\Delta V_{\mathbf{k}}^{111} = \int \frac{V^{111} |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}|^2 n_{\mathbf{k}_1}^2 \delta(q - q_1 - q_2) d\mathbf{k}_1}{(\omega_{\mathbf{k}_1}^1 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}^1 + i\Gamma) (\omega_{\mathbf{k}_1}^1 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^1 + i\Gamma)}. \quad (8.47)$$

При оценке интеграла воспользуемся тем, что ввиду наличия δ -функции $\delta(q -$

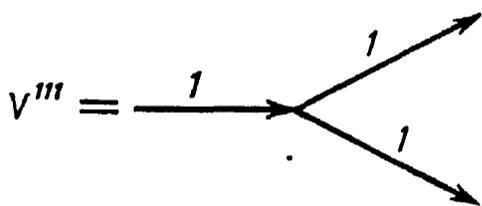


Рис. 8.53:

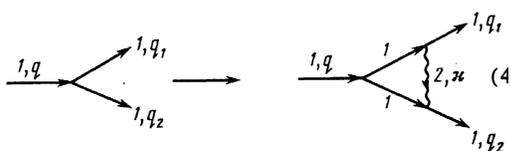


Рис. 8.54:

$q_1 - q_2$) импульсы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ «прижаты» к направлению вектора \mathbf{k} (Рис. 8.55). Основной вклад в интеграл вносят резонансные поверхности — области, где каждый из сомножителей в знаменателе обращается в нуль. Эти области представляют собой черенковские сферы (см. главу 7), касающиеся друг друга. Интеграл по каждой из таких поверхностей составляет величину порядка черенковского затухания $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$, в то время как другая скобка в знаменателе дает множитель порядка $1/\omega_{\mathbf{k}}^1$. Таким образом, имеем для поправки $\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}$ к вершине $\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}$

$$\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}/V_{\mathbf{k}}^{111} \approx \Gamma^{112}/\omega_{\mathbf{k}}^1. \quad (8.48)$$

Описанная ситуация типична для случаев, когда усложняются либо вершина $V_{\mathbf{k}}^{111}$ ($V_{\mathbf{k}}^{222}$) с участием другой звуковой моды, либо распадные и черенковские вершины. В результате относительная поправка к перечисленным вершинам не превышает величину $\Gamma^{\nu}/\omega_{\mathbf{k}}^{\nu}$, где Γ^{ν} — полное нелинейное затухание, а ряды (8.42, 8.43) представляют собой разложение по малому параметру. Рассмотрим теперь случай, когда вершина $V_{\mathbf{k}}^{111}$ усложняется линиями n_q^1, G_q^1 первой звуковой моды. В этом случае приведенные выкладки для оценки величины

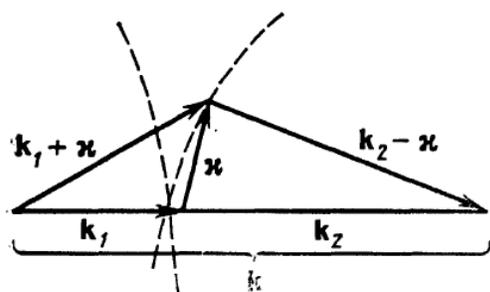


Рис. 8.55:

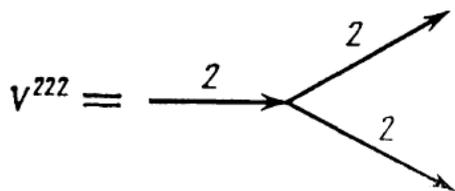


Рис. 8.56:

$\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}$ несправедливы, так как в силу линейности закона дисперсии резонансные поверхности совпадают и сливаются в узкую «трубку» вблизи вектора \mathbf{k} , толщина которой определяется затуханием Γ . Оценка интегралов типа (8.47), где выполнены замены $\omega_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow \omega_{\mathbf{k}}^1$, $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122} \rightarrow V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}$ проведенная в духе работы [138] показывает, что относительная поправка $\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}/V_{\mathbf{k}}^{111}$ к вершине $V_{\mathbf{k}}^{111}$ равна

$$\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}/V_{\mathbf{k}}^{111} \approx \Gamma_{\mathbf{k}}^{111}/\Gamma_{\mathbf{k}}^1.$$

Здесь $\Gamma_{\mathbf{k}}^{111}$ — затухание первого звука, обусловленное собственными нелинейными процессами в первой моде, $\Gamma_{\mathbf{k}}^1$ — полное нелинейное затухание первого звука. Как уже упоминалось, основной вклад в $\Gamma_{\mathbf{k}}^1$ дают распадные процессы, в силу чего отношение $\Gamma_{\mathbf{k}}^{111}/\Gamma_{\mathbf{k}}^1$ мало, а следовательно, малы и поправки к вершине $\Delta V_{\mathbf{k}}^{111}/V_{\mathbf{k}}^{111}$. В этом смысле исключение составляет вершина $V_{\mathbf{k}}^{222}$ (см. Рис. 8.56)

относительная поправка $\Delta V_{\mathbf{k}}^{222}/V_{\mathbf{k}}^{222}$, к которой является величиной порядка единицы. Формально это получается из того, что основной вклад в затухание дают собственные процессы во второй звуковой моде. Указанная поправка, однако, мала при температурах T_{α} , где коэффициент нелинейности второго звука $\alpha_2(T)$ (см. (5.6)) мал, т. е. в окрестностях $T_{\alpha} \approx 0.95$ К и $T_{\alpha} \approx 1.88$ К. Таким образом, в окрестностях указанных температур отброшенные при выводе КУ члены в разложениях 8.42, 8.43 содержат малые поправки, что и оправдывает применение метода КУ.

Как представляется, и в других температурных областях, где $\alpha_2(T)$ не является малой величиной, также имеются основания применять кинетические уравнения для исследования стохастических волновых полей. Наши соображения мы изложим, основываясь на качественной теории турбулентности волн с линейным законом дисперсии (в обычных жидкостях), развитой в работе Кадомцева и Петвиашвили [122], где показано, что стохастические волны имеют тенденцию к образованию отдельных узких трубок («струй») в \mathbf{k} -пространстве. Внутри каждой из струй устанавливается спектральное

распределение для плотности энергии $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ такого вида: $\varepsilon_{\mathbf{k}} \propto k^{-2}$. Отличие от спектра Захарова — Сагдеева ($\varepsilon_{\mathbf{k}} \propto k^{-2}$) возникает из того, что в каждой из струй устанавливается жесткая корреляция между фазами отдельных гармоник, ведущая в \mathbf{r} -представлении к укрупнению профиля волн и образованию ударных фронтов. Количественные оценки, проведенные в [122], показывают, однако, что характерное время образования разрывов τ_p , служащее критерием для времени установления корреляции, сравнимо с характерным временем τ_{kin} , вытекающим из КУ и служащим критерием для времени хаотизации фаз. Таким образом, вопрос о трехмерной турбулентности акустических волн в классических жидкостях остается открытым.

Ситуация изменяется в He II, где имеется дополнительная волновая мода. Когерентные волновые процессы перекрестного взаимодействия между звуками характеризуются временами τ_{kor} , гораздо меньшими, чем кинетические времена τ_{kin} (это является следствием $\Delta\omega'_{\mathbf{k}} \ll \omega'_{\mathbf{k}}$), и, следовательно, меньшими, чем времена образования разрывов в отдельных струях. В результате нелинейное взаимодействие «внутри» волновых мод, ведущее к возникновению разрыва, происходит медленнее, чем, скажем, распад волны или черенковское излучение. Сами перекрестные процессы не препятствуют хаотизации фазы, поскольку взаимодействие волн происходит под углом. Формально это находит отражение в том факте, что усложненные с участием обоих мод вершины слабо изменяют затравочную вершину. В результате процессы, приводящие к хаотизации фазы, преобладают, что и оправдывает применение метода КУ.

9 Макроскопическая динамика конденсата Бозе-Эйнштейна

Исследование квантовых жидкостей, инициированное открытием сверхтекучести в жидком гелии, получило новый, мощный импульс после обнаружения бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в ультрахолодных атомных газах и наблюдения нового типа квантовой жидкости с параметрами, управляемыми в эксперименте. В этой главе мы кратко изложим теорию бозе-эйнштейновской конденсации и опишем макроскопическую динамику бозе-эйнштейновского газа.

9.1 Теория бозе-эйнштейновской конденсации и идеальном газе

Конденсат Бозе-Эйнштейна (БЕС) является состоянием материи разреженного газа бозонов, охлажденных до температур, близких к абсолютному нулю (меньше миллионной доли градуса выше абсолютного нуля). В таких условиях, большая часть бозонов занимает нижнее квантовое состояние с нулевой энергией, и квантовые эффекты начинают проявляться на макроскопическом уровне. Согласно квантовой статистике (см., например, [141]), среднее число частиц в состоянии с энергией ε_i равно:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} - 1} \quad (9.1)$$

Здесь μ – химический потенциал, величины n_i называются числами заполнения, фактор. g_i – статистический вес (кратность вырождения энергетического уровня ε_i); Для одноатомных бесспиновых частиц

$$g_i(\varepsilon_i) = \frac{m^{3/2} \sqrt{\varepsilon_i}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \quad (9.2)$$

Из формулы (9.1) очевидно, что химический потенциал отрицателен

$$\mu < 0,$$

иначе при $\mu > \varepsilon_i$ числа заполнения станут отрицательными, что бессмысленно. Легко показать однако, что производная $(\partial\mu/\partial T)_N < 0$, (здесь N – полное число частиц в системе). То есть будучи отрицательным, химический потенциал возрастает при понижении температуры. При некоторой температуре T_c , химический потенциал достигает нуля, как это изображено на рисунке 9.57. Определить T_c можно путем вычисления полного количества частиц на

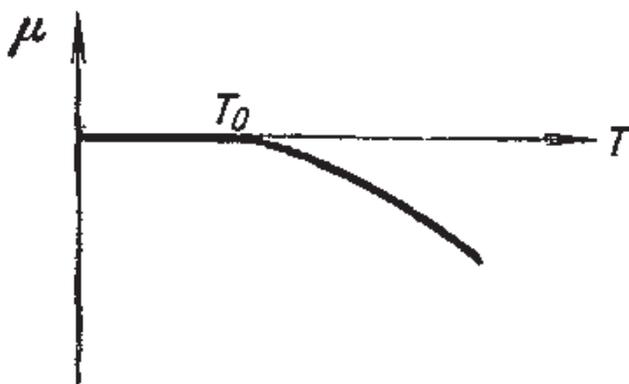


Рис. 9.57: Поведение химического потенциала в области перехода

основании распределения (9.1) в котором положено $\mu = 0$. В термодинамическом пределе ($V \rightarrow \infty$), в котором плотность $n = N/V$ постоянная, мы заменим сумму на интеграл:

$$\sum_i \rightarrow \int g(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (9.3)$$

Тогда

$$n = \frac{N}{V} = \int \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\varepsilon_i/k_B T} - 1}. \quad (9.4)$$

Вычисление интеграла приводит к следующему результату:

$$n = \frac{N}{V} = \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2), \quad \zeta(3/2) = 2.6124, \quad (9.5)$$

где $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ — функция Римана. Таким образом критическая температура равна:

$$T_c = \left(\frac{n}{2.6124} \right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}. \quad (9.6)$$

Так как $(\partial\mu/\partial T)_N < 0$, то при $T < T_c$ химический потенциал должен расти (с понижением температуры). Но он не может быть положительным. Следовательно, при $T < T_c$ химический потенциал μ должен оставаться постоянным и равным нулю. Однако при ($\mu = 0$ правая часть равенства (9.4)) есть убывающая функция температуры, в то время как в левой части n есть заданное число, и мы приходим к кажущемуся парадоксу. Этот парадокс, как объяснили Бозе-Эйнштейн, связан с тем, что при статистическом весе вида (9.2), замена суммы на интеграл (см. (9.3)) является незаконной, поскольку не учитывает того обстоятельства, что с понижением температуры бозоны должны скапливаться в состоянии $\varepsilon_i = 0$, и при $T = 0$ все они окажутся в

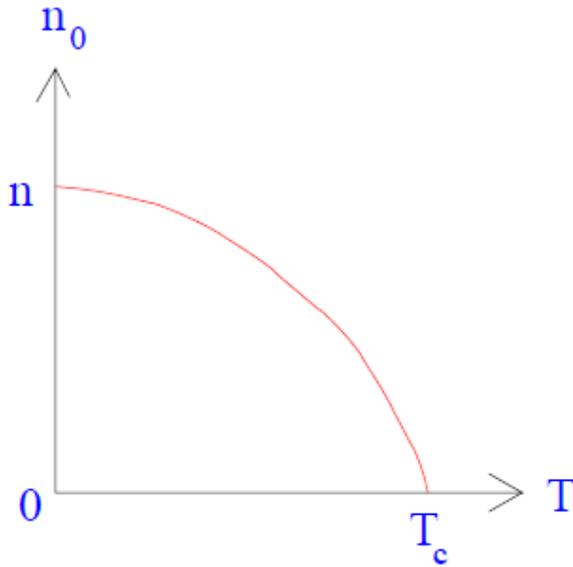


Рис. 9.58: Плотность конденсата Бозе-Эйнштейна как функция температуры.

этом состоянии. Переход от суммирования к интегрированию тем не менее законен для всех уровней, кроме самого нижнего. Поэтому при $T < T_c$ полное число частиц N^* с энергиями $\varepsilon > 0$ определяется по формуле (9.4) (с произвольной температурой $T < T_c$) плюс частицы, находящиеся в нулевом состоянии, т.е.

$$n = \frac{n_0}{V} + \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2) = . \quad (9.7)$$

Сравнивая (9.7) и (9.5), получим, что плотность частиц n_0 в основном состоянии $\varepsilon = 0$ (конденсате) меняется с температурой как

$$n_0 = n \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right). \quad (9.8)$$

Этот результат показан на Рис. 9.58.

Если $T = 0$, то все частицы находятся в основном состоянии ($n_0 = n$); при увеличении T все больше и больше частиц в состояниях с более высокими энергиями, пока, при $T = T_c$, плотность конденсата обратится в нуль $n_0 = 0$. Используя эти результаты можно вычислить общую внутреннюю энергию газа, U , и среднюю энергию на одну частицу, $U = U/N$. Тогда мы можем вычислить удельную теплоемкость $v(T) = (\partial U / \partial T)_V$. Результат показан на Рис. 9.59, обратите внимание на излом при $T = T_c$.

В соответствии с принятой классификацией этот излом означает, что мы имеем дело с фазовым переходом третьего рода (скачок в третьей производной от термодинамического потенциала по температуре).

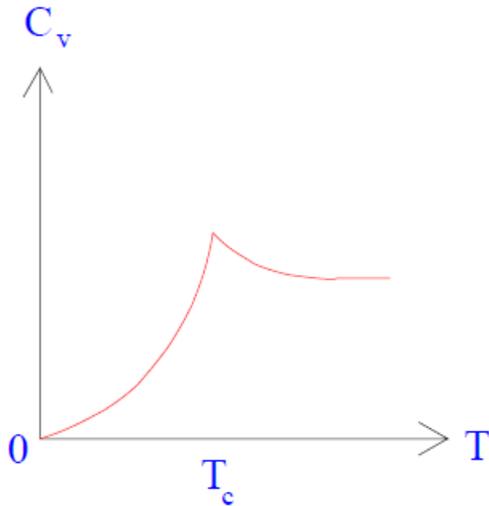


Рис. 9.59: Теплоемкость конденсата Бозе-Эйнштейна как функция температуры.

9.2 Бозе-эйнштейновская конденсации в ультра-холодных атомов газов

Несмотря на то, что БЭК была предсказана Бозе и Эйнштейном в 1924 году, экспериментально она была реализована только в 1995 году для очень разреженных газов, в условиях, аналогичных тем, которые были предсказаны Бозе и Эйнштейном (см. формулу 9.6). Этот прорыв стал возможен благодаря новым методам лазерного охлаждения газов и создания ловушек с помощью лазеров и магнитных полей. Первый бозе-конденсат был получен в Объединённом институте лабораторной астрофизики из университета штата Колорадо Эриком Корнеллом и Карлом Виманом. За эту работу им, совместно с Вольфгангом Кеттерле из Массачусетского технологического института, была присуждена Нобелевская премия по физике 2001 года (см. [142]). На Рис. 9.60 показаны распределения скорости захваченных ультра-холодных атомов рубидия, охлаждённых до 170 нанокельвин (нК) ($1.7 \cdot 10^{-7}$ кельвин). при температурах выше критической температуры T_c (слева), чуть ниже T_c (средний) и значительно ниже T_c . На левом рисунке наблюдается классическое распределение скоростей Максвелла-Больцмана; острый пик, который появляется в средней фигурой означает, что некоторые атомы имеют нулевую скорость; узкий пик на рисунке справа показывает, что почти все атомы имеют нулевую скорость.

Эти фигуры получены в результате выключения ловушки, которая ограничивает атомы. Расстояния, пройденные атомами измеряется их освещением с помощью лазера, следовательно, их скорости могут быть вычислены. Размер полученной капли конденсата Бозе-Эйнштейна, был порядка 0,1 мм; а

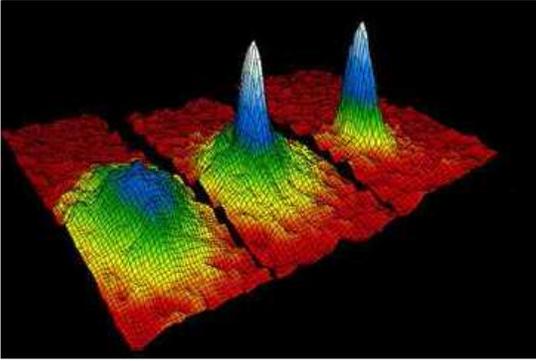


Рис. 9.60: Распределения скоростей атомов для $T < T_c$ (слева), чуть ниже T_c (средний) и значительно ниже T_c (справа). Острый пик при нулевых отметок скорости означает появление конденсата.

количество атомов было порядка $10^4 \div 10^6$.

9.3 Макроскопическая волновая функции

Газы, в которые была открыта Бозе-эйнштейновской конденсация состоят из атомов щелочных металлов (лития, натрия и калия, рубидия), в котором имеется по одному электрону на внешней оболочке. Для изотопов с нечетным числом протонов и нейтронов спин равен целому числу, в результате такие атомы являются бозонами.

В отличие от идеального газа теории Бозе-Эйнштейна, атомы, полученные в описанных экспериментах взаимодействуют на коротких расстояниях, отталкиваясь друг от друга. Такого рода взаимодействие может быть описано дельта потенциалом

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \approx U_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (9.9)$$

где $U_0 = 4\pi a \hbar^2 / m$ (a – длина рассеяния). Величина g положительная, что соответствует отталкиванию бозонов. Можно показать, что в таком слабо-неидеальном бозе газе также осуществляется фазовый переход, как и идеальном газе бозонов.

Перейдем к описанию динамики Бозе-эйнштейновского конденсата. При изложении этих вопросов мы следуем книге Лифшиц и Питаевский [143]. Первый вопрос - в каких терминалах вообще описывать это состояние. Конечно, будучи квантовым объектом, конденсат Бозе-Эйнштейна, вообще говоря требует квантово-механического описания многочастичных систем, например, в терминах формализма вторичного квантования. Следуя идее Боголюбова

[144] можно заменить операторы $\Psi(\mathbf{r}, T)$ и $\Psi^\dagger(\mathbf{r}, T)$ уничтожения и рождения частиц на классические поля $\psi(\mathbf{r}, T)$ и $\psi^*(\mathbf{r}, T)$, что формально оправдано большим числом частиц $n(0)$ в основном состоянии. Таким образом возникает уникальная ситуация, когда квантово-механические явления описываются практически в терминах классической величины. Однако, несмотря на то, что мы имеем дело с классическими полями, квантовые свойства должны сохраняться и быть отражены в этом новом формализме. В частности плотность числа частиц в какой-либо точке пространства \mathbf{r} задается квадратом модуля макроскопической волновой функции точно также, как это бы происходило для плотности вероятности реальной волновой функции отдельных частиц. Имея ввиду представить далее гидродинамическое описание, более удобно записать выражение для плотности Бозе-конденсата $\rho(\mathbf{r}, t) = mn_0$ в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m|\psi|^2. \quad (9.10)$$

В этом разделе мы будем пользоваться обозначением для плотности Бозе-конденсата ρ . Это сделано, во-первых, с целью упрощения формул, и, во-вторых, здесь нет особенного противоречия, так как при нулевой температуре вся жидкость становится сверхтекучей, также мы уберем индекс s в обозначении для скорости \mathbf{v}). Подобным образом, мы можем описать поток плотности массы \mathbf{j} , отталкиваясь от классического квантово-механического выражения для потока плотности вероятности

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t)). \quad (9.11)$$

Если взять полярное представление для комплексной волновой функции

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)/m} \exp(i\phi(\mathbf{r}, t)) \quad (9.12)$$

тогда, комбинируя формулы (9.10) – (9.12), можно получить следующее выражение для поля скорости

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\hbar}{m}\nabla\phi. \quad (9.13)$$

По аналогии с квантово-механическим описанием можно также представить энергию системы в виде (см. [67], [145], [146]).

$$E = \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 - \mu|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}U_0|\psi(\mathbf{r})|^4 + V_{ext}(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \quad (9.14)$$

В выражение для энергии системы введен внешний одночастичный потенциал (например, потенциал улавливания холодных атомов БЭК в ловушке) $V_{ext}(\mathbf{r})$.

Величина $U_0 = \int U(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ является амплитудой взаимодействия двух частиц ($U(\mathbf{r})$ – реальный двухчастичный потенциал взаимодействия). Химический потенциал μ в этом случае равен $\mu = U_0$ (напомним, что n – плотность частиц в конденсате)

Позже в этом параграфе мы опускаем внешний потенциал. Нелинейное уравнение Шредингера является уравнением Эйлера - Лагранжа для лагранжиана L_B

$$L_B = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - \frac{U_0}{2} |\psi|^4. \quad (9.15)$$

Плотность энергии (гамильтониан) соответствующая этому лагранжиану имеет такой вид:

$$E_B = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* - L = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi|^4. \quad (9.16)$$

Теорема Нётер дает закон сохранения массы $\rho(\mathbf{r}, t)$ (9.10) и закон сохранения импульса \mathbf{j} . (9.11) При этом тензор потока импульса Π_{ij} задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= -\frac{\partial L}{\partial \nabla_j \psi} \nabla_i \psi - \frac{\partial L}{\partial \nabla_j \psi^*} \nabla_i \psi^* + L \delta_{ij} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_i \psi \nabla_j \psi^* + \nabla_i \psi^* \nabla_j \psi) + \delta_{ij} p. \end{aligned} \quad (9.17)$$

где давление p задается формулой

$$p = \frac{U_0}{2} |\psi|^4 - \frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 |\psi|^2. \quad (9.18)$$

Смысл полученных соотношений мы обсудим несколько позднее.

Минимизируя энергию (9.14) по бесконечно малым вариациям в $\psi(\mathbf{r})$, и удерживая количество атомов постоянным, получаем следующее уравнение, описывающее макроскопическую динамику волновой функции:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi(\mathbf{r}, t)} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + V_{ext}(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (9.19)$$

Это уравнение называется уравнением Гросса-Питаевского (GPE) (также нелинейное уравнение Шредингера):

Необходимо сделать следующее важное замечание. Изложенная теория (вплоть до терминологии) напоминает теорию, описывающую гидродинамику гелия вблизи λ - точки, или Ψ -теорию сверхтекучего перехода (см. раздел

3.6). Конечно, это другая ситуация. Ψ -теория является феноменологической теорией, главная идея которой разложение термодинамического потенциала по степеням малой величины - параметра порядка. Эмпирические коэффициенты этого разложения "абсорбируют" различные физические процессы, такие как флуктуации термодинамических величин или взаимодействие с нормальной компонентой. В отличие от этого, представленная здесь теория основывается на атомарных представлениях, и, поэтому все параметры, входящие в эту теорию, связаны с конкретными характеристиками газов, такими как массы частиц, сила взаимодействия между атомами, и так далее.

Резюмируя, можно заключить, что динамика Бозе-конденсата, который, вообще говоря, является квантовым объектом, описывается в терминах классической макроскопической функции. На основании этой функции с помощью формул (9.10)-(9.19) можно определить плотности массы, импульса и энергии, а также эволюцию этих величин, т.е. построить гидродинамическое описание конденсата Бозе-Эйнштейна.

Квантовая специфика, вошедшая в определение различных физических величин, приводит к возникновению разнообразных физических эффектов, таких как собственно сверхтекучесть - бездиссипативное течение, квантованность завихренности, наличие волн энтропии (второй звук) и др.-являются прямым следствием квантовой природы Бозе-конденсата. Эти эффекты, комбинируясь с классическими гидродинамическими явлениями, приводят к необыкновенно захватывающей картине

9.4 Некоторые решения

9.4.1 Равновесное решение

Простейшим решением уравнения GPE (9.19) является однородное состояние, для которого функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ не зависит от \mathbf{r} или t . Предполагая, что на бесконечности $Im\psi(\mathbf{r} = \infty, t) = 0$, уравнение (9.19) (в отсутствии внешнего потенциала, $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$) приводит к результату

$$\psi(\mathbf{r} = \infty, t) = \sqrt{\mu/U_0}, \quad (9.20)$$

или

$$\rho(\mathbf{r} = \infty, t) = m\mu/U_0,$$

что эквивалентно используемому соотношению $nU_0 = \mu$. Заметим, что при температуре выше критической, где химический потенциал $\mu < 0$, уравнение (9.20) не имеет решения, и Бозе-конденсат отсутствует, что согласуется с общей концепцией.

9.4.2 Длина восстановления

Характерный масштаб ξ_H , на котором происходят существенные изменения макроскопической волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ можно получить, сравнивая кинетическую энергию и слагаемое с взаимодействием в соотношении (9.19) (в отсутствие внешнего потенциала, $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\hbar^2}{2m \xi_H^2} \psi = U_0 |\psi|^2,$$

откуда

$$\xi_H = \frac{\hbar}{\sqrt{2mnU_0}}. \quad (9.21)$$

В однородном конденсате $nU_0 = \mu$, следовательно,

$$\xi_H = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mu}} \quad (9.22)$$

величина ξ_H называется длиной восстановления (healing length).

9.4.3 Пристеночное решение

Рассмотрим Бозе-Эйнштейн конденсат вблизи твердой стенки. В соответствии с законами квантовой механики, твердую стенку можно интерпретировать как бесконечный потенциал, следовательно плотность БЭК обращается на стенке в нуль, $\psi(x=0) = 0$, где x – координата отсчитываемая от стенки. В стационарном случае ($\partial/\partial t = 0$) уравнения Гросса -Питаевского (9.19) (в отсутствие внешнего потенциала, $V_{ext}(\mathbf{r}) = 0$) имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \mu\psi + U_0 |\psi|^2 \psi = 0. \quad (9.23)$$

Интегрируя это уравнение с заданным граничным условием $\psi(x=0) = 0$, в диапазоне $0 \leq x < \infty$ можно получить следующий результат

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\mu}{U_0}} \tanh\left(\frac{x}{2\xi_H}\right).$$

9.4.4 Звук в Бозе-Эйнштейновском конденсате.

Линеаризованное уравнение (9.19) дает звуковое решение для малых возмущений скорости \mathbf{v} (9.13) и плотности ρ (9.10)

$$\rho' = \rho - \rho_0 \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \quad \mathbf{v} \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$$

со следующим законом дисперсии

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}}. \quad (9.24)$$

здесь c скорость распространения длина волновых возмущений

$$c = \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}. \quad (9.25)$$

Обратим внимание, что длина восстановления и скорость звука связаны между собой следующим соотношением

$$c\xi_H = \frac{\hbar}{m\sqrt{2}}$$

Закон дисперсии (9.24) показывает, как звуковой спектр $\omega = c|\mathbf{k}|$ при малых волновых векторах k , переходит при больших k к спектру свободных частиц с энергией $\hbar\omega = \hbar^2 k^2 / 2m$.

Спектр (9.24) был получен в основополагающей статье Боголюбова [144] с использованием формализма вторичного квантования. Здесь он был получен как спектр плоских волн в классической области, а именно для макроскопической волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$. Это наглядно демонстрирует связь теории Гросса - Питаевского с гидродинамикой. Следует отметить, что в модели Гросса - Питаевского не имеется коротковолновых возбуждений типа ротоннов, которые присутствуют в сверхтекучем He II.

Из-за нелинейных эффектов, звуковые волны (фононы) взаимодействуют между собой, в результате чего устанавливается локальное распределение Планка для газа квазичастиц. Таким образом, существует сверхтекучая компонента с недиссипативным движением и газ квазичастиц (фононов), который может дрейфовать как целое, формируя вязкое течение. Ситуация здесь аналогична теории сверхтекучести Ландау, изложенной в главе 2, и, соответственно, можно построить двухжидкостную гидродинамику как для HeII (смотри, например, статьи Сонина [147] и Проукакиса [148]).

9.5 Преобразование Маделунга

В 1926 году Э. Маделунг [149] показал, что если записать волновую функцию в форме $\exp(R + iS)$, то из уравнения Шредингера следует, что S подчиняется классическому уравнению Гамильтона — Якоби для действия S частицы,

или, альтернативно, что $\mathbf{v} = (\hbar/m)\nabla S$ подчиняется классическому уравнению (Маделунг, [149]) (см. также курс Ландау [69]). С этого времени эти уравнения послужили основой для многочисленных классических интерпретаций квантовой механики, в том числе и гидродинамической интерпретации. Мы не будем касаться здесь этих глубоких вопросов, а перенесем аспекты с целью установить связь теории Гросса-Питаевского с гидродинамикой. Преобразование (9.12) заменяет сложную волновую функцию двумя вещественными функциями, плотностью жидкости $\rho(\mathbf{r}, t) = m|\psi|^2$ и фазой $\phi(\mathbf{r}, t)$, последняя определяет скорость жидкости $\mathbf{v} = (\hbar/m)\nabla\phi$, (см. (9.10), (9.13)) После преобразования плотность энергии (9.14) преобразуется в следующее уравнение

$$E = \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \cdot \rho)^2}{\rho} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \frac{U_0 \rho^2}{2m^2}. \quad (9.26)$$

Подстановка волновой функции (9.12) в уравнение (9.19) приводит в уравнению с вещественной и мнимой частями. Мнимая часть дает уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.27)$$

Из вещественной части находим скорость изменения фазы

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu \quad (9.28)$$

Здесь химический потенциал μ вычисляется как функциональная производная от полной энергии $\int E d\mathbf{r}$

$$\mu = \frac{\delta E}{\delta \rho} = \frac{\partial E}{\partial \rho} - \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial \nabla \rho} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\frac{(\nabla \rho)^2}{4\rho^2} - \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} \right] + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{U_0 \rho}{m^2} \quad (9.29)$$

Давление p связано с химическим потенциалом μ обычным термодинамическим соотношением

$$p = \mu \rho - E = \frac{V \rho^2}{2m^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla^2 \rho. \quad (9.30)$$

Применив к уравнению (9.28) операцию градиента, мы приходим к следующему соотношению

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_k \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial r_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r_j}, \quad (9.31)$$

где давление p взято из формулы (9.30). Таким образом мы пришли в замечательному результату, что динамика Бозе-Эйнштейн конденсата подчиняется уравнению Эйлера, т.е. совпадает с классической гидродинамики. Имеются однако различия, что, во-первых, эта гидродинамика потенциальна (т.е.

$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{v}^2/2)$ в силу того, что $\nabla \times \mathbf{v} = 0$), а во-вторых, давление зависит не только от плотности ρ , но также от градиента плотности. В обычной гидродинамике и в газодинамике такое явление приводит к дисперсии скорости звука.

9.6 Quantum vortices

Одним из самых ярких приложений уравнений гидродинамики конденсата Бозе-Эйнштейна являются так называемые квантовые вихри. Полное изложение общей теории квантовых вихрей предполагается выполнить во второй части монографии, здесь мы приведем результаты только с целью проиллюстрировать полученные выше уравнения гидродинамики БЭК.

Приведенные выше соображения показывают, что движение бозе-конденсата, связано с неоднородностью фазы $\psi(\mathbf{r})$. Рассмотрим циркуляцию скорости вдоль некоторого замкнутого контура

$$\oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l}. \quad (9.32)$$

Интеграл может быть преобразован помощью известной формулы Стокса

$$\oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{S} \quad (9.33)$$

В силу того, что ротор скорости равен нулю, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, циркуляция должна также обращаться в нуль. Такое рассуждение, однако, несправедливо в случае возможных сингулярностей, т.е. при условии, когда теорема Стокса не применима. Предположим что-е. некая линия в пространстве, содержащая сингулярности $\nabla \times \mathbf{v}$ (почему линии –смотрите далее), тогда циркуляции вокруг этой линии может быть выражена через фазу волновой функции следующим образом

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \Delta \phi. \quad (9.34)$$

Поскольку волновая функция однозначна, то изменение фазы при возвращение к исходной точке должно быть кратно 2π , следовательно,

$$\oint \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi\hbar}{m} n. \quad (9.35)$$

Окончательно

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \kappa. \quad (9.36)$$

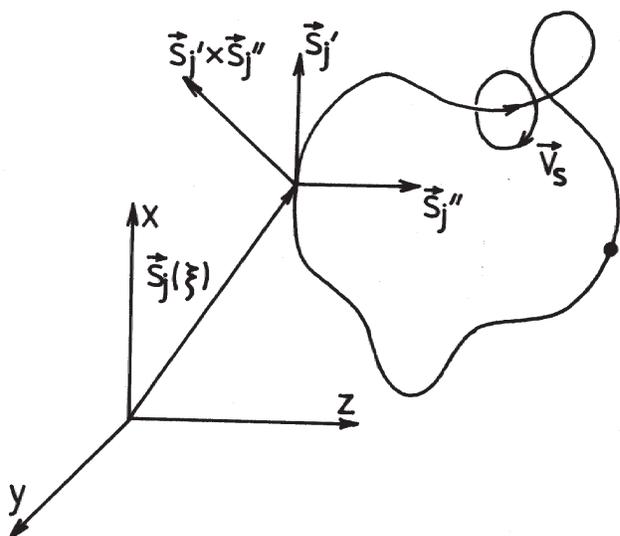


Рис. 9.61: Система координат. Каждая точка вихревой линии s_i определяется декартовыми координатами x_i , y_i , z_i и параметром ξ вдоль линии. Вектора \mathbf{s}' , \mathbf{s}'' и $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ – это тангенциальный вектор, вектор локальной кривизны и направление локально-индуцированной скорости, связанные с точкой s_i вихревой линии, соответственно.

Здесь мы ввели обозначение $\kappa = 2\pi\hbar/m$ для кванта циркуляции, мы оставим случай когда n равно единице, $n = 1$, вихри со значением $n > 1$ неустойчивы и распадаются.

Изложенная ситуация описывает так называемые квантовые вихри. То есть квантовый вихрь – это сингулярное распределение завихренности, сосредоточенное на линии вокруг которой происходит круговое движение конденсата Бозе-Эйнштейна. Соответствующая линия называется квантовой вихревой нитью (quantum vortex filament). Эта нить не может оборваться в объеме жидкости, она либо уходит на бесконечность, либо кончается на стенках сосуда, иначе это бы противоречило теореме Стокса. Обычно такую нить записывают в параметрическом виде $\mathbf{s}(\xi, t)$ где \mathbf{s} – радиус-векторы точек линии, а параметр ξ "пересчитывает" точки линии, часто величина ξ является параметром длины дуги. Мы ввели также время t , чтобы описывать случай движущихся нитей. Пример квантовой вихревой нити показан на Рис. 9.61, где ξ является параметром длины дуги.

Поле завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}$ устроено таким образом, что $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = 0$ вне линии, и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \infty$ в точках нити $\mathbf{s}(\xi, t)$ и направлена вдоль тангенциального вектора. При этом циркуляция по любому заданному контуру вокруг вихревой нити остается конечной и постоянной и равной $2\pi n\hbar/m$. Формально

такое поле завихренности $\omega(\mathbf{r})$ можно записать следующим образом:

$$\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v} = \kappa \int ds \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi, t)) \quad (9.37)$$

Обычным образом (см., например, монографию Алексеенко с соавторами [16]) из (9.37) следует, что единая бесконечная прямая индуцирует круговое движение жидкости с полем скорости, которое в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\mathbf{v}(r, \theta, z) = \left(0, \frac{\kappa}{2\pi r}, 0 \right) \quad (9.38)$$

Концепция квантованных вихревых нитей была введена первоначально для сверхтекучего гелия в работах Онзагера [150] и Фейнмана [39]. Эта теория была чистой феноменологической. Догадка о квантованности циркуляции (9.36) была основана на квантово-механических соображениях. Важно отметить, что гипотеза вихревых нитей только утверждает, что их наличие не противоречит законам квантовой механики, в то же время не предлагая никаких механизмов для их появления в гелии. На самом деле механизм появления вихрей в гелии является одной из наиболее загадочных проблем теории квантованных вихрей. В настоящее время существует большое число гипотез, начиная от гипотезы рождения вихрей космическими лучами вплоть до идеи, что вихри в виде зародышей существуют всегда и приобретают большие размеры во время течений гелия.

Циркуляционная скорость резко возрастает при приближении к оси вихря (см. (9.38)). В частности, на масштабе нескольких ангстрем (что является типичным межатомным расстоянием) скорость превышает пороговую скорость рождения ротонов, т.е. критическую скорость Ландау. В результате, при малых расстояниях от вихревой нити, порядка немногих ангстрем, свойство сверхтекучести пропадает и нить не может быть рассмотрена как бесконечно тонкая. На таких расстояниях вихревая линия должна обнаруживать некоторую структуру. В настоящее время не имеется точной микроскопической теории вихревых нитей в реальном гелии.

В отличие от этой гипотезы, теории слабо взаимодействующих бозе-газа предсказывает микроскопическую структуру вихревых нитей. В стационарной ситуации макроскопическая волновая функция ψ в уравнении (9.19) не зависит от времени. В случае единственного вихря (расположенного вдоль оси z) задача обладает цилиндрической симметрией, и уравнение (9.19) может быть решено методом разделения переменных. Соответствующее решение в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\psi = \sqrt{n} \exp(i\varphi) f(r/a_0), \quad (9.39)$$

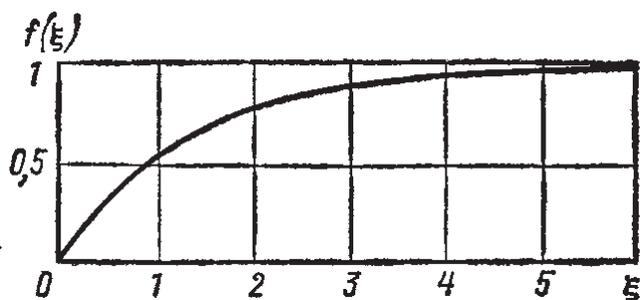


Рис. 9.62: Модуль макроскопической волновой функции, описывающий квантованный вихрь

где φ - азимутальный угол вокруг оси z и $a_0 = \hbar/\sqrt{2mnU_0}$ (заметим, что a_0 совпадает с длиной восстановления ξ_H (9.21)). Фаза этой функции отвечает значению циркуляции (9.35). Положив $r/a_0 = \xi$ и подставляя в (9.19), найдем что функция f подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d}{d\xi} f \right) - \frac{1}{\xi^2} + f - f^3 = 0 \quad (9.40)$$

При $\xi \rightarrow 0$ функция f обращается в нуль, а при $\xi \rightarrow \infty$ стремится к 1. Численное решение уравнения (9.40), изображено на рисунке 9.62.

При $r \gg a_0$ плотность конденсата стремится к равновесной $\psi(\mathbf{r} = \infty, t) = \sqrt{\mu/U_0}$ (см (9.20)), и поле скорости совпадает с формулой (9.38). Для $r \ll a_0$, плотность конденсата уменьшается до нуля, что приводит к подавлению сверхтекучей компоненты на оси вихря. Это явление также упоминается как истощение "depletion" плотности вблизи центра вихревой нити. Предполагается, что эта модель описывает качественно также вихри в реальном жидком гелии, хотя имеются принципиальные отличия. В частности, величина a_0 , играющая роль радиуса ядра вихря, для БЭК существенно больше, чем межатомные расстояния, в то время как в He II она близка к этой величине. Тем не менее, как правило, предполагается, что картина аналогична для квантовых вихрей в реальном He II с той разницей, что a_0 порядка расстояния между частицами.

Вблизи λ -перехода, где сверхтекучая плотность мала, можно использовать подход Ландау - Гинзбурга, описанной в параграфе 3.6. Динамика параметра порядка подчиняется уравнению типа Гросса-Питаевского с коэффициентами, зависящими от температуры. Соответственно, оно также имеет вихревое решение типа описанного выше. Размер радиуса ядра вихря, однако, вычисленный из комбинации коэффициентов, составляет величину порядка корреляционной длины и быстро растет, когда $T \rightarrow T_\lambda$. Подробности вихре-

вой структуры вблизи λ - перехода описаны в обзоре Гинзбурга и Собянина [66].

9.7 Вихри как топологические дефекты

Исследование квантовых вихрей представляет обширнейший раздел теории сверхтекучести, это касается как фундаментальных проблем, так и разнообразных технических приложений. Поскольку мы получили квантованный вихрь в рамках теории конденсата Бозе-Эйнштейна, то очевидно, что динамика вихрей связана с динамикой Бозе-газа, конкретно с уравнением Гросса - Питаевского. С другой стороны эволюция вихревых нитей может быть получена также обычным, известным в гидродинамике способом, восстанавливающим поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ по полю завихренности $\omega(\mathbf{r})$ с использованием формулы 9.37. Последний подход известен как метод вихревых нитей. То есть имеется своего рода дуализм для описания динамики вихревых нитей. Этот дуализм является благоприятным обстоятельством, поскольку как один, так и другой подходы зачастую сталкиваются с очень сложными вопросами. И часто бывает так, что очень сложные проблемы при одном подходе, могут быть сравнительно просто решены при другом подходе. Ярким примером сказанному служит процесс так называемой "reconnection" перезамыкание вихревых линий при их столкновении, подробно это явление будет описано во второй части монография. Красивой иллюстрацией к обсуждаемому дуализму может служить представление квантовых вихрей как топологических дефектов макроскопической волновой функции. Как следует из вышесказанного, на оси ядра вихря волновая функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ обращается в ноль, $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$. Но волновая функция это комплексная величина, поэтому в ноль должны обращаться как реальная так и мнимая части волновой функции, т.е.

$$\text{Re}\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{Im}\psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (9.41)$$

Но обращение в ноль функции от трех переменных (мы пока фиксируем время t) означает, что данное выражение описывает поверхность. Одновременная обращение в ноль как реальной $\text{Re}\psi(\mathbf{r}, t)$, так и мнимой части $\text{Im}\psi(\mathbf{r}, t)$ волновой функцию (условия 9.41) описывает линию, которая и является вихревой нитью (см. Рис 9.63).

По этой причине квантовые вихри как линии обращения в ноль полной волновой функции, называются топологическими дефектами. Другими примерами топологических дефектов, встречающихся в физике могут служить дислокации в твердом теле, точечные вихри в двумерной гидродинамике, или монополи Дирака.

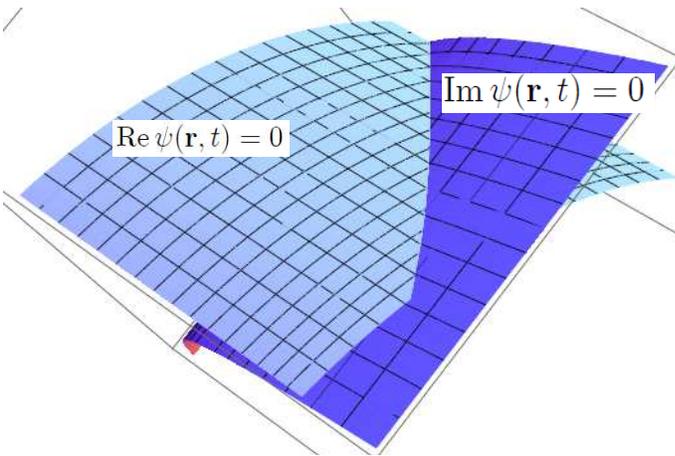


Рис. 9.63: Схематический рисунок, иллюстрирующий вихревую линии как топологический дефект, или геометрическое место точек, где макроскопическое волновая функция равна нулю

9.8 Конденсат Бозе-Эйнштейна и теория сверхтекучести

Открытие конденсации Бозе-Эйнштейна в реальных газах является одним из крупнейших научных событий последнего времени. В настоящее время исследования конденсата Бозе-Эйнштейна является интенсивно разрабатываемой областью, как экспериментально, так и теоретически. Обсудим, однако, вопрос, какое влияние может оказать это открытие на теорию сверхтекучести, и, в частности, на проблемы гидродинамики квантовых жидкостей.

Безусловно, одно из главных преимуществ это появление теории, основанной на представлении макроскопический волновой функции $\psi(r, t)$, которая дают возможность детального исследования всех процессов, включая гидродинамические. Примером может служить описание структуры квантового вихря. Для сверхтекучего гелия соответствующая теория отсутствует.

Динамика конденсата Бозе-Эйнштейна идентична динамике сверхтекучей компоненты, имеется ввиду потенциальность течения, отсутствие переноса энтропии и отсутствие сдвиговой вязкости, что приводит к сверхтекучести. Появление фононов при температурах отличных от нуля аналогично концепции квазичастиц и служит основанием для построения двухскоростной гидродинамики (смотри, например, статьи Сони́на [147] и Проукаки́са [148]). В изложенном виде, однако, в этой теории отсутствует такой важный элемент, как ротонная часть спектра, хотя имеются попытки модифицировать теорию Гинзбурга Питаевского так, чтобы появились возбуждения типа ротоннов. Одна из таких попыток, связанная с предписанием пространственной зависимости зависимости в коэффициенте U_0 в слагаемом, описывающем

взаимодействие атомов (см. выражение (9.14)), описана в книге Румера и Рывкина [151]. Также дополнительным преимуществом является то обстоятельство что уравнением Гросса - Питаевского содержит параметры, которые связаны с самыми фундаментальными свойствами газов такими, как массы атомов, константы взаимодействия, в то время как феноменологические теории Не II содержат эмпирические коэффициенты, которые извлекаются из различных экспериментальных данных, например по теплоемкости или по динамике вихрей. Еще одна характерная черта связана со внешним потенциал -ловушкой.- Меняя форму этого потенциала (как в как в эксперименте так и в теоретическом моделировании) можно добиться большого разнообразия в постановке задач, вплоть до того что можно варьировать размерность системы, практически от чисто двумерного случая переходить в трехмерный. Это обстоятельство очень важно, например, при изучении турбулентных явлений, где размерность пространства критически сказывается на свойствах спектра, характера затухания и других свойств.

10 Экспериментальные исследования по нелинейной акустике сверхтекучего гелия

Настоящая монография посвящена, в основном, теоретическим результатам. Причина этого не только и даже не столько в том, что автор является теоретиком, а скорее в том, что теория нелинейных волн в HeII представляет собой более или менее разработанную область, чего нельзя сказать об эксперименте. За немногим исключением, известные "классические" экспериментальные работы сконцентрированы вокруг относительно частного вопроса о динамике интенсивных импульсов второго звука. При этом чисто нелинейные эффекты, наблюдаемые во многих цитируемых работах, перепутаны с явлениями, связанными с квантовыми вихрями. Что касается других вопросов динамики нелинейных волн в то они практически не изучались экспериментаторами. В последнее время, правда, появился цикл работ посвященный исследованию различных аспектов акустической турбулентности пилообразных волн второго звука (смотри далее), а также были попытки наблюдения параметрической неустойчивости интенсивные волны первого звука и рождения двух волн второго звука.

В силу изложенных причин было сочтено целесообразным вопросы, связанные с экспериментальными исследованиями, вынести в отдельную главу. Основная цель этого краткого раздела описать, как развивались экспериментальные исследования, какие тенденции имеются в этом вопросе. Особое внимание уделено аспектам, иллюстрирующим теоретические результаты, описанные в предыдущих главах монографии. Важно отметить, что в ходе выполнения экспериментальных работ интерес исследователей постепенно смещался в сторону наблюдения явлений, связанных с квантовыми вихрями, такими как критические скорости, динамика вихревого клубка, перегрев, вскипание и т. д. Упомянутые явления, несомненно, важны и интересны, но, с одной стороны, их описание выходит за рамки нелинейной акустики (и даже за рамки классической двухскоростной гидродинамики), а с другой стороны, смешиваясь с чисто нелинейными эффектами, усложняют общую картину. Поэтому при описании работ мы будем акцентировать внимание лишь на той части результатов, которая связана с чисто нелинейными процессами.

Хотя, предлагаемая глава посвящена экспериментальным работам по нелинейной акустике He II, это скорее описательный обзор работ без детализации каждого отдельного эксперимента. Взамен, как мы надеемся, обзор является практически полным, все более менее заметные эксперименты по этой тематике представлены и читатель может представить состояние дел в экспериментальной физике по нелинейным волнам сверхтекучих жидкостей. Мы разбили изложение на две части, одна из них имеет дело с классическими экс-

периментами по динамике интенсивных волн второго звука, включая тепловые ударные волны. В другой части описаны сравнительно недавние экспериментальным работам в которых затрагиваются такие, более тонкие вопросы, как неоднородность, устойчивость и турбулентность. Кроме того представлен большой раздел в котором обсуждаются экспериментальные предложения, представляющие определенный интерес.

10.1 Эксперименты по динамике интенсивных волн второго звука

Классическим экспериментом, послужившим толчком к изучению нелинейных волн в HeII следует считать, повидимому, эксперимент Осборна [105]. Он первым увидел эффект укрупнения заднего фронта волны второго звука — явление, не имеющее в то время аналога в классической газодинамике. В работах Халатникова [106] было дано объяснение этому эффекту в несколько измененном виде. Эти результаты изложены в главе 5. Экспериментальное изучение нелинейных волн было продолжено Десслером и Фэйрбэнком [108]. Основной целью работы было измерение коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ (см. главу 5), теоретическое вычисление которого проведено Халатниковым. Авторы использовали оригинальную методику для измерения величины $\alpha_2(T)$. На основной импульс второго звука, имевший прямоугольную форму, подавался сверху короткий импульс "наездник". В зависимости от температуры «наездник» перемещался по основному импульсу вперед или назад со скоростью, пропорциональной амплитуде последнего. Коэффициент пропорциональности, очевидно совпадающий с величиной $\alpha_2(T)$ представлен на Рис. 5.23. Следует отметить, что эксперимент имел довольно низкую точность.

Цитированные работы относятся к середине пятидесятых годов. После почти десятилетнего перерыва интерес к этой теме возобновился. Одним из первых был цикл работ, выполненный Гуляевым. Подробно его результаты изложены в статье [110]. Используя метод шпирен фотографии, Гуляев получил теневые картины звуковых возмущений в He II при импульсном выделении тепла на плоском и цилиндрическом нагревателях. Одним из главных результатов является вывод о возникновении двух типов волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_1 . Правда, теневой метод, основанный на регистрации изменений плотности, не позволяет детально идентифицировать структуру возмущений. Сам автор считает, что волны, бегущие со скоростью c_1 — это волны давления, возникающие вследствие вскипания жидкости и образования пленки. На этом основании он подвергает сомнению результаты работ [105],[106],[108], считая, что наблюдаемое там искажение формы волн второго звука связаны с кипением, а не с нелинейными эффектами. В 1979 г.

появилась работа Померанца [152], который также регистрировал две волны при импульсном выделении тепла на источнике. Он регистрировал обе волны с помощью термометра. Передняя волна имеет вид импульса охлаждения, из чего автор делает вывод об отрицательности коэффициента расширения.

Со второй половины семидесятых годов число экспериментальных и теоретических работ начинает резко возрастать. Это обусловлено как повышением интереса к нелинейным эффектам в Нт II, так и более широкими экспериментальными возможностями. Так Каммингс, Шмидт и Вагнер [153] использовали для регистрации коротких температурных волн довольно необычный по тем временам датчик. Он представлял собой напыленную на кварцевую подложку пленку из сверхпроводящего материала. Сверхпроводящий переход в такой системе растянута по температуре, и подобное устройство может служить чувствительным и, что очень важно, малоинерционным термометром. В работе [153] приведены осциллограммы нелинейных импульсов, имеющие четкую форму характерных Бюргерсовских треугольников с крутым передним или задним фронтами. С целью сравнения своих экспериментов с теоретическими предсказаниями авторы измеряют время пробега нелинейной волны между двумя датчиками. Малая инерционность позволяет сделать это с высокой точностью. Средняя скорость пробега, которую авторы называют нелинейной скоростью сигнала, зависит от поданной мощности, но отнюдь не по линейному закону, что, казалось бы, противоречит теории (см. соотношение (5.12)). Полученное противоречие разрешено в экспериментальной работе Цой с соавторами [113]. В этой работе было обращено внимание на то, что, хотя соотношение (5.12) верно на разрыве волны, динамика отдельного импульса, в частности его скорость и время пробега, подчиняется более сложным зависимостям (ср. с разделом 5, см. также [113]). Рассчитанное время пробега хорошо согласуется с измеренным. В этой работе обращается внимание на то, что для более интенсивных импульсов ($W > 20 \text{ Вт/см}^2$) появляются систематические отклонения от предсказанной теории. Располагая расчетной методикой для зависимости времени пробега, Цой экспериментально решил задачу об измерении коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ (см. [154]). Полученные результаты определяют искомую величину с точностью, намного превышающей точность, достигнутую в работе Десслера и Фэйрбэнка. В частности, с высокой точностью определена температура T_α при которой $\alpha_2(T)$ обращается в нуль. Как уже упоминалось, в работе [113] было отмечено, что для очень больших интенсивностей имеются отклонения от классической нелинейной теории. Было высказано предположение, что эти отклонения связаны с рождением квантовых вихрей. Нужно сказать, что раннее возникновение вихрей наблюдали лишь в стационарных течениях (или переходных). Характерные тепловые потоки были порядка долей Вт/см^2 , а время развития вихре-

вой структуры порядка десятков или сотен секунд. Представляется, что при значительном увеличении тепловых потоков эти времена могут уменьшиться до миллисекунд. Это предположение было подтверждено экспериментально в работе Немировского и Цоя [155]. Интересно отметить, что дополнительное затухание зондирующей волны, обязанное наличию вихрей, регистрировалось методами нелинейной акустики (использована зависимость времени пробега от амплитуды волны).

В это же время начались экспериментальные исследования нелинейных волн в сверхтекучего гелия в Институте физики твердого тела (Черноголовка) в группе Межова-Деглина [156], [157]. В этих работах качественно обнаружено увеличение ширины импульса, предсказанное теорией (см. раздел 5). Авторы также наблюдали интересное явление возникновения отрицательного импульса температуры позади основного сигнала. Этот эффект, связанный с непланарностью волны, аналогичной волне разрежения в обычной акустике (см., например, [158]), был впервые обнаружен для второго звука. Теоретически задача о сферическом нелинейном импульсе второго звука исследована Аткинсом и Фоксом [159]. В цитируемых работах проведено основательное исследование динамики волн при импульсном выделении тепла в HeII в большом диапазоне интенсивностей и длительностей. Показано, что при умеренных интенсивностях имеется хорошее согласие динамики волн с теоретическими предсказаниями. В частности, наблюдается укрупнение импульсов на заднем или переднем (в зависимости от температуры) фронтах. Показано, что форма импульса сохраняется при T_α . Зарегистрированы также волны, распространяющиеся со скоростью первого звука. Как и в работе [113], также наблюдается отклонение от теоретических предсказаний при сильных мощностях. Примерно в это же время появилась работа Китаботакки и Савады [160]. В ней экспериментально исследована динамика импульса второго звука и показано, что она согласуется с уравнением Бюргерса (ср. раздел 5). В цикле работ Цветкова с соавторами [161], относящемся к тому же периоду, исследованы нелинейные волны как первого так и второго звуков. В отличие от традиционных методов возбуждение звуков было получено с помощью оптической накачки погруженного в HeII кристалла германия. Параметры звуковых волн при этом были рекордными, например, длительность была порядка 10 нс. Неясно, возможно ли для второго звука очень большой интенсивности и малой длительности вообще пользоваться гидродинамическими уравнениями. Что касается первого звука, то показано, что скорость распространения ударных волн первого звука пропорциональна корню из подаваемой мощности, т. е. линейна по скачку давления (ср. с разделом 5). Коэффициент пропорциональности близок к задаваемому соотношением (5.12).

Нужно отметить, что в этот период интересы исследователей постепенно смещаются от чисто нелинейных эффектов в сторону явлений, происходящих в закритических (относительно вихреобразования) режимах. В таком духе выполнен цикл работ в Калифорнийском технологическом институте (например, Тюрнером [162]). В этих работах автор наблюдает типичные нелинейные явления, такие как укрупнение заднего и переднего фронтов или рождение волны давления при тепловом возбуждении. Например, для интенсивности накачки порядка 10 Вт/см^2 он регистрирует импульс давления $\Delta p \sim -0.1$ бар, что согласуется с формулами (6.16). Далее, Тюрнер, повышая амплитуду накачки, наблюдает отклонение от теории, на основании чего он делает вывод о существовании предельной интенсивности тепловой волны, которую он связывает с «внутренней критической скоростью». Работы Торцинского [163], [164] посвящены той же теме. Интересен эксперимент со сходящейся ударной волной второго звука. Такая постановка задачи позволила получить очень большие интенсивности в волне, что опровергает выводы Тюрнера о существовании предельных амплитуд. Представляется, что Тюрнер наблюдал дополнительное затухание волны второго звука, вызванное затуханием на вихрях, ею же рожденных.

Аналогичный цикл исследований был проведен в Институте Макса Планка (Гёттинген) (см. работы Фишдона с соавторами [165], [166]). Авторы исследовали динамику очень мощных тепловых импульсов в плоской и цилиндрической геометриях. Они показали, что экспериментальные результаты хорошо описываются нелинейной теорией, в которую введены добавочные члены, обязанные возникающим в волне вихрям (уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности (см. также [155])). Интересно отметить, что для калибровки температурного датчика они использовали нелинейную волну второго звука с известными параметрами.

Примерно в это же время, большой цикл работ экспериментальных, по исследованию нелинейных волн как первого так и второго звуков был проведен в Институте физики твердого тела (Черноголовка). Чисто нелинейным эффектам посвящена работа Борисенко, Ефимова и Межова-Деглина [167]. В ней экспериментально изучаются нелинейные волны второго звука в резонаторе. Теоретически данный вопрос не рассматривался. Однако, если отвлечься от процессов нелинейной трансформации волн первого и второго звуков, то следует ожидать, что динамика волн будет близкой к нелинейным волнам обычного звука в резонаторе. Действительно, авторы наблюдали пилообразные волны, но не стоячие (как в линейном случае), а бегущие вдоль резонатора. Такая картина соответствует теоретическим предсказаниям Честера [168]. В зависимости от температуры пики имели разную ориентацию. Интересно, что при T_α форма волн была синусоидальной. Это означает, что

коэффициент нелинейности $\alpha_2(T)$ (см. формулу (5.6)) обращается в нуль не только для бегущих, но также и для стоячих волн.

Среди других экспериментов представляется нужным выделить работу Данильченко с соавторами [169], в которой мощные импульсы второго звука в HeII изучаются с помощью отраженных вглубь нагревателя фононных сигналов. Авторы этой статьи приходят к неожиданному выводу, что механизм теплообмена на границе гелий — твердое тело одинаков для HeI и HeII. Также с точки зрения эксперимента интересна работа Коцубы и Свифта [170], в которой интенсивный второй звук, в отличие от традиционных методов, получается продавливанием жидкости через пористую перегородку.

Как упоминалось ранее, HeII является необычной акустической системой. Такие свойства, как существование двух мод, имеющих различную физическую природу, сильная зависимость акустических параметров от температуры, укрупнение заднего и переднего фронта, и прочие черты — все это делает делает нелинейную акустику мощным инструментом для исследования различных свойств сверхтекучести. Так в группе профессора Алерса были проведены исследование по изучению фазового перехода в гелии II а также изучены вопросы возникновения квантовых вихрей вблизи λ -точки с помощью мощных нелинейных волн второго звука [171],[172]. Так в статье [171] описываются экспериментальные исследования по нелинейной эволюции плоских импульсов второго звука в сверхтекучем He при температуре от 2 до 25 мК ниже T_λ . Эволюция импульса в гелии сравнивалась с решениями уравнения Бюргерса (см. главу 5) с учетом поправок возникших от влияния нагревателя и болометрических подложек. Решение уравнения Бюргерса находилось путем численного интегрирования уравнения тепловой диффузии с соответствующими граничными условиями. Авторы рапортууют о прекрасном согласии между измеренными и вычисленными формами нелинейных импульсов. Этот подход к данным модели используется также для получения линейной скорости второго звука. Авторы отмечают достоинства методов нелинейной акустики для изучения критического He II вблизи T_λ где нелинейные эффекты всегда важны. Эти исследования продолжены в работе [172] где представлены результаты экспериментального исследования эволюции плоской, нелинейных, второго звуковых импульсов в сверхтекучем ^4He , при температуре 650 нК от λ -перехода, Также был продемонстрирован новый метод для измерения скорости и затухания второго звука, основанный на формулах нелинейной акустики полученных в главе 5. Полученные данные использовались для определения критических индексов жидкого гелия в области фазового перехода.

Распространение тепловой ударной волны и явлений нестационарного теплопереноса в He II экспериментально исследовалось с помощью сверхпрово-

дящего датчика температуры в работах японских авторов (Мураками с соавторами, см. [173]). Изменение амплитуды волны тепловой ударной волны при распространении сравнивалось с предсказанием сохранения энергии в уравнении Бюргерса. Общее количество энергии, уносимое тепловой волной от поверхности нагрева оценивается измерением площади профиля волны и ее изменение для различных тепловых потоков и времени нагрева (длительности импульсов). Было обнаружено, что только небольшое количество энергии транспортируется через He II в виде второй звуковой волны для случая большого теплового потока и длительного времени нагрева. Остальная часть приложенной энергии от нагревателя распространяется диффузно, так как возникающий плотный клубок запутанных вихревых нитей препятствуют идеальному переносу тепла в режиме второго звука. Сходные выводы были сделаны группой тех же самых авторов при изучении тепловых ударных волн в сверхтекучем гелии (He II) с помощью лазерного голографического интерферометра (см. работу [174]).

10.2 Неоднородность, устойчивость и турбулентность

Хотя динамика нелинейных тепловых импульсов несомненно интересна с точки зрения нелинейных волн, она, как видно из содержания монографии, представляет собой лишь небольшую часть нелинейной теории. Большинство других вопросов и эффектов, предсказанных теорией, оставались долгое время вне поля зрения экспериментаторов. В 90-е годы появились исследования по нелинейным эффектам для неоднородных волновых пакетов конечной ширины, также были сделаны попытки обнаружить параметрическую неустойчивость первого звука относительно рождения второго звука. Тогда же появилась серия экспериментальных работ по акустической турбулентности сверхтекучего гелия.

Исследования непланарного второго звука большой интенсивности в гелии II были проведены в широком диапазоне температур, от 1.57 до 2,165 К канадским физиком Л. Крысак с соавторами [175] [176], [175]. Используя технику времени пролета одиночного импульса, был измерен коэффициент нелинейности $\alpha_2(T)$, предложенный Халатниковом (см. формулу (5.23)) вблизи T_λ . Нелинейный коэффициент $\alpha_2(T)$ рассчитывался в предположении, что эволюция импульса описывается уравнения Бюргерса для плоской одномерной волны. Для импульсов второго звука конечной ширины применялась другая методика, учитывающая изменение амплитуды за счет дифракционных эффектов. Было установлено, что рассчитанный с помощью соответствующей модели нелинейный коэффициент $\alpha_2(T)$ находится в хорошем согласии с теоретическими предсказаниями. Автор констатировал, что

самофокусировка является важным нелинейным эффектом для непланарной волны второго звука вблизи λ - перехода. Л. Крысак также отдельно изучала эволюцию импульсов нелинейного второго звука в широких пучках [177]. Как обсуждалось в главе 5, в определенных условиях, в частности вблизи T_λ , возможно наблюдать некое подобие самофокусировки, когда амплитуда на оси возрастает, причем для пучков с резкими краями происходит увеличение амплитуды в два и более раз, и поперечное распределение становится более узким, т. е. пучок сжимается. В работе [177] автор наблюдала, что умеренно высокие импульсы второго звука, распространяющиеся вдали от отражающих стен самофокусируются, превращаясь в стабильные плоские волны по мере приближения температуры к T_λ . Как пишет автор: "Это новое явление в гелии II, которое может возникнуть только в свободно распространяющемся вторым звуком от источника конечного размера в области температур вблизи T_λ " (см. также статью [176]).

Занг [178] исследовал непланарные нелинейные звуки в открытом объеме He II. Было обнаружено, что распространение звуковой волны характеризуется появлением отрицательным хвостовой части, чего не наблюдается в плоских волнах, распространяющихся в канале (напомним ранее цитируемую работу Межова-Деглина с соавторами [156], [157]). Форма отрицательной хвостовой части второго звука варьируется в зависимости от места положения источника в открытом объеме He II. Теоретическое рассмотрение осуществлялось на основе двухжидкостной модели Ландау-Халатникова с добавленными уравнениями для эволюции вихревой системы [179], [180]. Установлено, что экспериментальные и теоретические результаты достаточно хорошо согласуются друг с другом.

После предсказания явлений нелинейного преобразования первого звука во второй (см. главу 7), экспериментаторы начали изучать возможность наблюдения этих эффектов. Так в работе Ринберга и Штейнберга [181] сообщалось о первом экспериментальном наблюдении параметрической генерации второго звука первым звуком в сверхтекучем гелии в узком интервале температур вблизи T_λ . Температурная зависимость пороговой амплитуды первого звука оказалась в хорошем количественном согласии с теорией Покровского Халатникова [62], [53] с поправкой на размеры резанатора. Сильные колебания амплитуды и два типа спектров второго звука наблюдались выше бифуркации. Последний эффект объясняется дискретностью волнового вектора и сильной температурной зависимостью длины рассеяния второго звука.

Далее те же авторы провели более детальные исследования по параметрическому возбуждению второго звука с помощью первого звука (см. статьи Ринберга и Штейнберга [182], [183]). Авторы подробно доложили об экспериментальном исследовании параметрического возбуждения второго звука

первым звуком в сверхтекучем гелии в резонаторе. Были представлены результаты по нескольким ключевым темам. В частности, были описаны линейные свойства неустойчивости, а именно, порог распадного процесса, его зависимость от температуры и геометрических параметров резонатора. Были также измерены спектральные характеристики второго звука сразу после превышения порогового значения звука распадного процесса. Они оказались в хорошем количественном согласии с теоретическими предсказаниями. Было показано, что механизм развития амплитуды рождённого второго звука связан с трехволновым взаимодействием между гармониками исходной волны первого звука и двух гармоник второго звука. Авторы также отмечают появление сильных низкочастотных колебаний амплитуды второго звука в закритической области. Спектры этих колебаний имели универсальную форму с экспоненциально убывающими "хвостами". Кроме того, ширина спектра постоянно росла с амплитудой первого звука. Были проведены исследования по роли трех и четырех-волнового взаимодействия в нелинейном поведении второго звука. Получено свидетельство Гауссовой статистики ансамбля амплитуд параметрически генерируемых волн. Выше порога неустойчивости были найдены два новых эффекта: гигантское усиление интенсивности и сильные резонансные колебания амплитуды волны второго звука как функции амплитуды первого звука. Авторы предложили качественные объяснения наблюдаемых эффектов.

Среди более недавних работ следует отметить серию работ Ефимова с соавторами (полный материал можно найти в диссертации Ефимова [184]), в которой представлены материалы по различным физическим эффектам, касающимся генерации, распространению и взаимодействию волн второго звука в сверхтекучем гелии. В отличие от процитированных выше работ исследования этой группы значительно расширили круг изучаемых задач. Так, проведены эксперименты при повышенных давлениях и в условиях ограниченной геометрии (неоднородные импульсы, волны резонаторе). Большое количество работ было посвящено изучению акустической турбулентности. В частности, было экспериментально моделировано поведение волн Бюргерса и исследована турбулентность пилообразных волн Бюргерса, так называемая "Бюргюленс" (см. главу 5). Исследованы динамика бегущих ударных волн второго звука и стоящих волн в резонаторе. Проведен широкий круг исследований генерации импульсных волн второго и первого звуков малоинерционным нагревателем в одномерной и трехмерной геометрии, в том числе при повышенных давлениях. Теоретическое сопровождение соответствующих работ было выполнено Колмаковым [185],[186], [187],[188].

Изложим некоторые важные результаты работ Ефимова с соавторами. Так, экспериментально были исследованы процессы формирования ударных

волн второго звука в зависимости от интенсивности волны, расстояния, пройденного волной, и коэффициента нелинейности скорости волны. Найдено, что от нагревателя при интенсивном нагреве распространяются не только тепловые волны, но и волны первого звука, рождение которых происходит порообразным путем за счет пленочного вскипания при давлении насыщенных паров или за счет перехода He II в нормальное состояние. Было показано, что при малых интенсивностях нагрева источника за счет температурной зависимости плотности гелия тепловое сжатие жидкости рождает волну разряжения первого звука. Экспериментальные значения отношения энергий, передаваемых нагревателем в волны первого и второго звука при таких процессах, хорошо коррелируют с теоретическими оценками. Показано, что при распространении импульсных волн второго звука от точечного источника в трехмерной геометрии в сверхтекучем гелии возможна уникальная ситуация, когда нагреватель рождает сначала импульс нагрева с характерным для нелинейной волны разрывом либо на фронте, либо на хвосте волны, затем значительное время температура волны оставалась постоянной и равной температуре ванны и только затем от нагревателя приходил импульс охлаждения с противоположным разрывом (либо на хвосте волны, либо на фронте). Были наблюдаемы N-образные и U-образные формы волны с разрывами на краях биполярного импульса или по его середине. (см. статью [189]).

Было исследовано поведение нелинейных волн при повышенных давлениях. Показано, что при повышении давления коэффициент нелинейности скорости второго звука $\alpha_2(T)$ меняет знак при более низких температурах, что соответствует теоретическим расчетам. Таким образом, при любых давлениях существует достаточно широкая область температур вблизи T_λ , при которых коэффициент нелинейности остается отрицательным.

Было экспериментально моделировано поведение волн Бюргерса (поведение слабо затухающих сильнонелинейных волн в среде с близким к линейному закону дисперсии) и исследована турбулентность волн Бюргерса (см. статьи [190],[191]). Авторы показали, что использование резонатора волн второго звука в сверхтекучем гелии может создавать сильно нелинейную волну при малом общем тепловом потоке, что позволяет исследовать акустическую турбулентность в частотном континууме с дискретным спектром частот f . Найдено, что при накачке на резонансной частоте в резонаторе с He II возникает достаточно большое количество кратных гармоник (несколько десятков), амплитуды $A(f)$ которых в достаточно широком частотном интервале (инерционный интервал), описываются зависимостью типа Колмогоровской с дискретным спектром $A(f) \propto f^{-m}$, где показатель степени m для развитых спектров приближается к 1.5, что близко к предсказываемым теоретическим зависимостям для слабой турбулентности (см. главу 8). Подробно изучены

свойства дискретной турбулентности (см. детали в статье [190]).

В этом же цикле работ обнаружена возможность возникновения обратного волнового каскада одновременно с прямым каскадом, когда наряду с кратными гармониками в резонаторе возбуждаются еще и субгармоники. Поток энергии от источника накачки при формировании субгармоник перераспределяется между прямым и обратным каскадами. Взаимодействие субгармоник с кратными гармониками прямого каскада приводит к возникновению большого количества комбинационных частот. Было замечено, что при возникновении обратного каскада амплитуда волн в прямом каскаде уменьшается, т.е. происходит подавление прямого каскада за счет перераспределения потока энергии в прямом каскаде между основными гармониками и дополнительными колебаниями с комбинационными частотами, как и при накачке на двух частотах (см. статьи [187],[192],[191]).

Представляется очень интересной работа по спонтанному возникновению аномально больших волн вследствие нелинейной перекачки в низкие гармоники. Экспериментально было показано, что в процессе формирования обратного каскада в резонаторе возможно рождение единичных низкочастотных волн с амплитудой, сильно превосходящей окружение. Таким образом, показано, что одиночные волны большой амплитуды ("freak waves") могут возникать и в бездисперсионной среде при акустической турбулентности в конденсированной фазе (в турбулентности Бюргерса), т.е. эксперименты с нелинейными волнами второго звука в сверхтекучем гелии могут быть использованы для выяснения природы формирования одиночных "freak waves" – «волн убийц» (см. [193] [194]).

Интересным примером использования нелинейных волн второго звука в качестве инструмента для изучения процессов в сверхтекучем гелии, является работа по зондированию вихревой структуры He II при резком фазовом переходе (Quench). Проведены эксперименты по адиабатическому расширению жидкого гелия для моделирования рождения линейных дефектов (струны во Вселенной – вихри в гелии) при расширении Вселенной при Большом Взрыве. Ударные волны второго звука были использованы для тестирования концентрации вихрей, формирующихся при быстром переходе в сверхтекучее состояние из нормального гелия. Было показано, что образующаяся концентрация вихрей определяется, в основном, не нарушением симметрии волновой функции гелия, а неустойчивостью вихревой структуры в гелии-4 к потокам нормальной и сверхтекучей компонент He II (см. статью [195]).

10.3 Некоторые экспериментальные предложения

В этой части главы предложен ряд экспериментов по нелинейным волнам в квантовых жидкостях, которые либо представляют самостоятельный интерес, либо могут служить своего рода инструментом для изучения методами нелинейной акустики.

Приведенный выше обзор экспериментальных работ показывает, что основная масса экспериментов посвящена динамике интенсивных импульсов второго звука в He II. Между тем, как это следует из содержания монографии, физика нелинейных явлений намного «богаче» и разнообразнее. Так, один из наиболее интригующих эффектов о нелинейном взаимодействии двух волновых мод, практически не исследовался экспериментально. В этом разделе статьи мы обсудим, какого рода наблюдения следует выполнить, чтобы обнаружить предсказанные теорией (но не охваченные экспериментом) эффекты.

Одним из важнейших результатов теоретического исследования является вывод о нелинейном распаде первоначальных возмущений температуры или давления, и определение количественных характеристик этого процесса (см. главу 6). Вообще говоря, эффект образования двух видов волн при импульсном выделении тепла наблюдался многими авторами (см. предыдущий пункт), хотя интерпретация этого явления была разная. Однако экспериментальные методы регистрации волн не позволяли определить детально структуру возмущений. По всей видимости, необходимо в эксперименте одновременно использовать калиброванные датчики давления и температуры, которые позволят количественно определить все величины, переносимые в образовавшихся волнах.

Другим интересным, на наш взгляд, результатом является вывод о самофокусировке нелинейной монохроматической волны второго звука при температуре $T_\alpha \approx 1.885$ К (см. главу 5). Для наблюдения такого эффекта необходим плоский нагреватель с неоднородным выделением тепла по его поверхности и перемещаемый в пространстве датчик температуры. Теория предсказывает сужение ширины волнового пучка по мере удаления от нагревателя и одновременно усиление амплитуды на оси пакета. Интересным было бы наблюдение также одиночных тепловых импульсов конечной ширины при других температурах. Здесь также возможна поперечная деформация пакета и частичная самофокусировка.

Существование степенных законов для корреляторов гидродинамических величин в турбулентных явлениях всегда было довольно интригующим. Особенно интересно проявление этих законов в акустически «зацепленных» системах, каковым является HeII. Волновую турбулентность, описанную в разделе 8, в принципе можно создавать стохастической накачкой низкочастотных

первого и второго звуков. Корреляционные функции могут непосредственно измеряться датчиками температуры и давления известными в теории турбулентности методами. Косвенное определение этих величин может быть осуществлено путем измерения дополнительного затухания звуков (см. раздел 8).

Предложенные выше эксперименты непосредственно касаются предсказанных теорией нелинейных эффектов. Другой аспект экспериментальных приложений связан с использованием методов нелинейной акустики для изучения свойств сверхтекучего гелия. Приведем ряд примеров того, какие из полученных результатов могут быть использованы для этой цели.

Одна из главных особенностей нелинейной теории состоит в том, что амплитуда волн оказывается связанной с другими акустическими характеристиками, такими как скорость распространения волн, размер волнового канала, затухание и т. д. Это очень существенно, потому что непосредственные измерения температуры (особенно в нестационарных случаях) связаны с серьезными, зачастую непреодолимыми трудностями. Соотношения нелинейной акустики позволяют перейти от измерения возмущений температуры δT_K измерению других характеристик, например, времени пролета интенсивного импульса на заданном расстоянии, что представляет собой более легкую задачу. Например, в работе Цоя [104] был предложен следующий, принципиально новый метод измерения сопротивления Капицы R_K . Анализ граничных условий показывает, что при нагревании поверхности, граничащей с HeII, на стенке происходит релаксационный процесс с характерным временем $\tau_K = R_K C_S$, где C_S теплоемкость единицы поверхности. Поэтому, если, например, на стенке выделяется тепло с интенсивностью W в течение времени $t < \tau_K$, то оно не все поступает в гелий, часть тепла задерживается в подложке. В результате амплитуда теплового импульса Δv_n будет меньше ожидаемой $\Delta v_n = W/ST$, причем уменьшение амплитуды функционально связано с сопротивлением Капицы. Поскольку, далее, время пролета нелинейного импульса зависит от амплитуды, то оно также будет функционально связано с величиной R_K . Таким образом, в результате эксперимента по распространению теплового импульса в HeII можно определить сопротивление Капицы R_K . Другим примером такого подхода может служить зондирование HeII, содержащего вихревые нити, нелинейным вторым звуком. Здесь также можно связать время пролета нелинейного сигнала с характеристиками вихревого клубка (см. [155])., Подобным образом времяпролетная методика может быть использована для измерения параметров каких либо процессов, например, для определения тепла, выделившегося на нагреваемых поверхностях. Данная идеология может найти применение в вопросах метрологии. В частности, в работе Цоя [154] предложено использовать в качестве реперной

температурной точки величину $T_\alpha \approx 1.885$ К (см. раздел 5). Процедура установления этой реперной точки связана с тем свойством, что время пробега нелинейного импульса второго звука (при $T = T_\alpha$) с большой точностью не зависит от его амплитуды.

Далее, в разделе 6 было показано, что при импульсном нагреве стенки в гелии, помимо волн энтропии, распространяется «предвестник» — волна давления. По амплитуде δp этого «предвестника» можно определить интенсивность теплового импульса, выделившегося на стенке. Это может оказаться полезным в прикладных задачах, например, при создании контрольной системы в криогенных устройствах.

Нелинейная акустика дает новые возможности для изучения затухания второго звука. Например, это затухание может быть определено по «размытию» ударного фронта нелинейного импульса (см. разделы 5). Пороговые амплитуды распадного и черенковского процессов связаны с коэффициентами вязкости, и последние могут быть определены из измерений пороговых амплитуд.

Многие количественные соотношения, приведенные в обзоре, могут служить основой для измерения термодинамических величин. Заметим, кстати, что хорошее совпадение экспериментально определенной величины $\alpha_2(T)$ (см., например, [113]) и рассчитанной по формуле (2.27) подтверждают найденную зависимость термодинамических величин от относительной скорости $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$. В связи с этим еще раз обратим внимание на результаты главы 5 Коэффициенты $\alpha_2(T)$, D_2, D_3, μ_2 , входящие в уравнение (2.29), являются величинами, несущими богатейшую информацию о таких фундаментальных процессах в HeII как взаимодействие квазичастиц, динамика флуктуаций и т. д. Сопоставление найденного аналитического решения с экспериментально наблюдаемой динамикой тепловых импульсов позволяет выяснить таким образом важные черты этих процессов. На этом пути возможно измерение кинетических индексов термодинамических величин вблизи T_λ , определение их абсолютных значений и т. д.

Интересным представляется новый метод обнаружения и измерения квантового вихря с помощью рассеяния второго звука от ядра квантованных вихрей в сверхтекучем гелии (см. работы Лунда и Штейнберга [196],[197]). Теоретические расчеты амплитуды рассеянных волн второго звука от одного квантового вихря, вихревого кольца, и объемной завихренности показывают, что экспериментальная проверка метода является возможным. Кроме того, даже может быть использован для обнаружения одиночного квантовой вихря.

Перечисленные примеры в известной степени иллюстрируют утверждение о широких возможностях методов нелинейной акустики для изучения свойств

сверхтекучего гелия. Как упоминалось ранее, квантовая жидкость является уникальной акустической системой. Такие свойства, как существование двух мод, имеющих различную физическую природу, что позволяет отдельно регистрировать оба звука, сильная зависимость акустических параметров (таких, как коэффициенты нелинейности, вязкости, дисперсии, скорость второго звука и пр.) от температуры, укрупнение заднего и переднего фронта, существование монохроматической волны в недиспергирующей среде — все это делает He II исключительно интересным объектом с точки зрения нелинейной теории волн. Такое разнообразие его свойств позволяет моделировать в эксперименте большое число различных экзотических ситуаций для распространения и взаимодействия нелинейных волн.

Список литературы

- [1] И М Халатников. *Теория сверхтекучести*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.
- [2] S.J. Putterman. *Superfluid Hydrodynamics*. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [3] С Паттерман. *Гидродинамика сверхтекучей жидкости: Пер. с англ.* Мир, 1978.
- [4] В Кeesом. *Гелий*. 1949.
- [5] P Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, 141(3558):74, 1938.
- [6] ПЛ Капица. Теплоперенос и сверхтекучесть гелия-ii. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 11(6):58, 1941.
- [7] JF Allen and AD Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, 141(3558):75, 1938.
- [8] H Keesom and JN van den Ende. Commun. leiden, no. 203d *Proc. roy. Acad. Amsterdam*, 33:243, 1930.
- [9] F LONDON. The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, 141:643–644, 1938.
- [10] László Tisza. Transport phenomena in helium ii. *Nature*, 141:913, 1938.
- [11] ЛД Ландау. ЖЭТФ 11 592 (1941). *J. Phys. USSR*, 5:71, 1941.

- [12] L. D. Landau. *J. Phys.*, 5:71, 1941.
- [13] Лев Давидович Ландау. *Собрание трудов*. Наука, 1969.
- [14] ИМ Халатников. Гидродинамика растворов посторонних частиц в гелии П. *ЖЭТФ.—1952.*, 23(2):169–181, 1952.
- [15] R.J. Donnelly. *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.
- [16] S. V. Alekseenko, P. A. Kuibin, and V. L. Okulov. *Theory of Concentrated Vortices*. Springer, 2007.
- [17] EB Gordon, AV Karabulin, VI Matyushenko, VD Sizov, and II Khodos. Electric properties of metallic nanowires obtained in quantum vortices of superfluid helium. *Low Temperature Physics*, 36:590–595, 2010.
- [18] DD Osheroff, RC Richardson, and DM Lee. Evidence for a new phase of solid he 3. *Physical Review Letters*, 28(14):885, 1972.
- [19] Mike H Anderson, Jason R Ensher, Michael R Matthews, Carl E Wieman, and Eric A Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [20] Kendall B Davis, M-O Mewes, Michael R Andrews, NJ Van Druten, DS Durfee, DM Kurn, and Wolfgang Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22):3969, 1995.
- [21] J Peter Toennies and Andrey F Vilesov. Superfluid helium droplets: A uniquely cold nanomatrix for molecules and molecular complexes. *Angewandte Chemie International Edition*, 43(20):2622–2648, 2004.
- [22] E Kim and MHW Chan. Probable observation of a supersolid helium phase. *Nature*, 427(6971):225–227, 2004.
- [23] Minoru Kubota, Nobutaka Shimizu, Yoshinori Yasuta, Patryk Gumann, and Sergey Nemirovskii. Vortex dynamics in hcp solid 4he. *Journal of Low Temperature Physics*, 158:572–577, 2010.
- [24] AB Migdal. Superfluidity and the moments of inertia of nuclei. *Nuclear Physics*, 13(5):655–674, 1959.
- [25] H Kamerlingh Onnes. The liquefaction of helium. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 11:168–185, 1908.

- [26] Carlo F Barenghi. *Quantum Fluids and Vortices*. School of Mathematics and Statistics Newcastle University, 2009.
- [27] WH Keesom and K Clusius. Leiden comm. 219e (1932). *Proc. Sect. Sci. K. Ned. Acad. Wet*, 35:307, 1932.
- [28] WH Keesom and AP Keesom. New measurements on the specific heat of liquid helium. *Physica*, 2(1):557–572, 1935.
- [29] W.H. Keesom and A.P. Keesom. On the heat conductivity of liquid helium. *Physica*, 3(5):359 – 360, 1936.
- [30] JF Allen and H Jones. New phenomena connected with heat flow in helium ii. *Nature*, 141(3562):243–244, 1938.
- [31] David R Tilley and John Tilley. *Superfluidity and superconductivity*. CRC Press, 1990.
- [32] JG Daunt and K Mendelssohn. The transfer effect in liquid he ii. i. the transfer phenomena. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 423–439, 1939.
- [33] JG Daunt and K Mendelssohn. Surface transport in liquid helium ii. *Nature*, 143:719–720, 1939.
- [34] AK Kikoin and BG Lasarew. Experiments with liquid helium ii. *Nature*, 141:912–913, 1938.
- [35] WH Keesom and GE MacWood. The viscosity of liquid helium. *Physica*, 5(8):737–744, 1938.
- [36] J. Wilks. *The Properties of Liquid and Solid Helium*. Clarendon, Oxford, 1967.
- [37] Лев Давидович Ландау and Евгений Михайлович Лифшиц. *Статистическая физика, часть 1*, volume 1. Наука, Физматлит, 1995.
- [38] DG Henshaw and ADB Woods. Modes of atomic motions in liquid helium by inelastic scattering of neutrons. *Physical Review*, 121(5):1266, 1961.
- [39] R. P. Feynman. *Progress in Low Temperature Physics, Vol. 1*, page 17. North-Holland, Amsterdam, 1955.
- [40] Lars Onsager. Suppl. *Nuovo cimento*, 6:249–250, 1949.

- [41] Эл Андроникашвили. Непосредственное наблюдение двух видов движения в гелии ii. *Журн. эксперим. и теорет. физики*, 16:780–785, 1946.
- [42] Sergei K Godunov and Evgenii I Romenskii. *Elements of continuum mechanics and conservation laws*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [43] Сергей Константинович Годунов, Т Ю Михайлова, and Евгений Игоревич Роменский. Системы термодинамически согласованных законов сохранения, инвариантных относительно вращений. *Сибирский математический журнал*, 37(4):790–806, 1996.
- [44] Сергей Константинович Годунов and ЕИ Роменский. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. *Университетская серия*, 1978.
- [45] С.В. Алексеенко. *Феноменологическая теория процессов переноса в сплошных средах*. Красноярский госуниверситет, Красноярск, 1988.
- [46] ЛД Ландау and ЕМ Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. 3-е изд., перераб.* М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986.
- [47] Сергей Константинович Годунов. Термодинамическая формализация уравнений гидродинамики заряженного диэлектрика в электромагнитном поле. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 52(5):916–929, 2012.
- [48] ЕИ Роменский. Законы сохранения и симметричная форма уравнений нелинейной теории упругости. 1984.
- [49] Sadao Nakajima, Kazuhisa Tomita, and Tunemaru Usui. The phenomenological theory of liquid helium ii. *Phys. Rev.*, 78:768–779, Jun 1950.
- [50] Исаак Маркович Халатников. Гидродинамика гелия ii. *Успехи физических наук*, 60(9):69–160, 1956.
- [51] PL Kapitza. Heat transfer and superfluidity of helium ii. *Physical Review*, 60(4):354, 1941.
- [52] ИМ Халатников. Теплообмен между твердым телом и гелием ii. *ЖЭТФ*, 47:489, 1952.
- [53] V. L. Pokrovskii and I. M. Khalatnikov. Transformation of first sound into second in superfluid helium. *Sov. Phys. JETP*, 44:1036, 1976.

- [54] S. K. Nemirovskii. Nonlinear acoustics of superfluid helium. *Sov. Phys. Usp*, 33:429, 1990.
- [55] ВЕ Захаров. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией. *Изв. вузов. Радиофизика*, 17(4):431–453, 1974.
- [56] Владимир Евгеньевич Захаров and Евгений Александрович Кузнецов. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн. *Успехи физических наук*, 167(11):1137–1167, 1997.
- [57] Б Давыдов. Вариационный принцип и канонические уравнения для идеальной жидкости. *Доклады Академии Наук*, 69:165–168, 1949.
- [58] Г Лэмб. Гидродинамика. М. Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.
- [59] Harry Bateman. *Partial differential equations of mathematical physics*, volume 1. Cambridge University Press, 1932.
- [60] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [61] Исаак Маркович Халатников. Гидродинамика гелия ii. *Успехи физических наук*, 60(9):69–160, 1956.
- [62] ВЛ Покровский and ИМ Халатников. Гамильтонов формализм в классической и двухжидкостной гидродинамике. *Письма в ЖЭТФ*, 23:653, 1976.
- [63] IM Khalatnikov, GV Kolmakov, and VL Pokrovsky. Transformation of 2nd sound into surface-waves in superfluid-helium. *ZHURNAL EKSPERIMENTALNOI I TEORETICHESKOI FIZIKI*, 107(5):1563–1572, 1995.
- [64] ВЛ Гинзбург and ЛП Питаевский. К теории сверхтекучести. *ЖЭТФ. —1958.*, 34(5):1240–1245, 1958.
- [65] ВЛ Гинзбург. Несколько замечаний о фазовых переходах второго рода и микроскопической теории сегнетоэлектриков. *Физ. твердого тела*, 2:2031, 1960.
- [66] Виталий Лазаревич Гинзбург and АА Собянин. Сверхтекучесть гелия ii вблизи λ -точки. *Успехи физических наук*, 120(10):153–216, 1976.
- [67] L. P. Pitaevskii. Phenomenological theory of superfluidity near the lambda point. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 35:1271, 1958.

- [68] ЮГ Мамаладзе. Параметры феноменологической теории сверхтекучести и сдвиг лямбда точки. *ЖЭТФ*, 52:729, 1967.
- [69] Л Д Ландау and ЛМ Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. Наука, Физматлит, 1974.
- [70] L. M. Pismen. *Vortices in Nonlinear Fields*. Clarendon, Oxford, 1999.
- [71] C. J. Gorter and J. H. Mellink. On the irreversible processes in liquid helium ii. *Physica*, 15(3-4):285 – 304, 1949.
- [72] K. W. Schwarz. Turbulence in superfluid helium: Steady homogeneous counterflow. *Phys. Rev. B*, 18(1):245–262, Jul 1978.
- [73] R Kronig and A Thellung. On the theory of the propagation of sound in he ii. *Physica*, 16(9):678–690, 1950.
- [74] ЕМ Лифшиц. Изучение звука в гелии II. *ЖЭТФ*, 14:116, 1944.
- [75] ВП Пешков. Определение скорости распространения второго звука в гелии II. *ЖЭТФ*, 16:1000–1010, 1946.
- [76] ВП Пешков. Второй звук в he ii. *ЖЭТФ*, 18(10):857–566, 1948.
- [77] John R Pellam and Russell B Scott. Second sound velocity in paramagnetically cooled liquid helium ii. *Physical Review*, 76(6):869, 1949.
- [78] RD Maurer and Melvin A Herlin. Pressure dependence of second sound velocity in liquid helium. ii. *Physical Review*, 81(3):444, 1951.
- [79] D De Klerk, RP Hudson, and JR Pellam. Second sound velocity measurements below 1° k. *Physical Review*, 89(1):326, 1953.
- [80] KR Atkins and DV and Osborne. *Phil. Mag.*[7], 41:1078, 1950.
- [81] ИМ Халатников. Звук в растворах посторонних частиц в He ii и дисперсионная функция растворов. *Ж. эксп. и теор. физ.*, 23(3):265, 1952.
- [82] КН Зиновьева. поглощение второго звука в гелии II. *ЖЭТФ*, 25:235–247, 1953.
- [83] KR Atkins and КН Hart. The attenuation of second sound above 1° k. *Physical Review*, 92(1):204, 1953.
- [84] БН Есельсон, ВН Григорьев, ВГ Иванцов, and ЭЯ Рудаковский. *Свойства жидкого и твердого гелия*. Москва: Изд-во стандартов, 1978.

- [85] БН Есельсон, МИ Каганов, ЭЯ Рудаковский, and ИА Сербин. "Звук" в сверхтекучей жидкости. *Успехи физических наук*, 112(4):591–636, 1974.
- [86] Джумбер Григорьевич Саникидзе. *Волновые процессы в сверхтекучей жидкости*. Изд-во "Мецниереба" 1981.
- [87] Sh E Kekutia and ND Chkhaidze. Hydrodynamic equations and collective modes in a system comprising a porous medium and a ^3He - ^4He superfluid mixture. *Low Temperature Physics*, 32:621–627, 2006.
- [88] Lev Petrovich Pitaevskii. Second sound in solids. *Physics-Uspekhi*, 11(3):342–344, 1968.
- [89] S. Bargmann and P. Steinmann. Modeling and simulation of first and second sound in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 45(24):6067 – 6073, 2008.
- [90] ST Lu and H Kojima. Observation of second sound in superfluid ^3He . *Physical review letters*, 55(16):1677, 1985.
- [91] A. Griffin and E. Zaremba. First and second sound in a uniform Bose gas. *Physical Review A*, 56:4839–4844, December 1997.
- [92] Peter Brusov, Paul Brusov, Gavin Lawes, Chong Lee, Akira Matsubara, Osamu Ishikawa, and Pinaki Majumdar. Novel sound phenomena in superfluid helium in aerogel and other impure superfluids. *Physics Letters A*, 310(4):311–321, 2003.
- [93] Peter Brusov and Pavel Brusov. Novel sound phenomena in impure superfluids. *International Journal of Modern Physics B*, 20(03):355–380, 2006.
- [94] ЛИ Мандельштам and МА Леонтович. К теории поглощения звука в жидкостях. *Журн. эксперим. теорет. физики*, 7(3):438–449, 1937.
- [95] JA Tyson. Critical-region second-sound damping in ^4He . *Physical Review Letters*, 21(17):1235, 1968.
- [96] Guenter Ahlers. Heat capacity near the superfluid transition in ^4He at saturated vapor pressure. *Physical Review A*, 3(2):696, 1971.
- [97] А.П. Крюков. *Элементы гидродинамики и теплопереноса в гелии II*. М.: Издательство МЭИ, 2004.
- [98] А.П. Крюков. *Элементы физической кинетики*. Москва. МЭИ., 1995.

- [99] ТМ Муратова and ДА Лабунцов. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации. *Теплофизика высоких температур*, 7(5):959–967, 1969.
- [100] H Wiechert. Boundary conditions for the liquid-vapour interface of helium ii. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 9(4):553, 1975.
- [101] Владимир Иосифович Карпман. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. Москва: Наука, 1973.
- [102] VL Ginzburg and AA Sobyenin. Use of second sound to investigate the inhomogeneous density distribution of the superfluid part of helium ii near the lambda point. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 17:483, 1973.
- [103] SK Nemirovskii. Inverse problem method for investigating an inhomogeneous distribution of superfluid components in he ii near t/λ . *Fizika Nizkikh Temperatur*, 2:81–85, 1976.
- [104] AN Tsoi and SK Nemirovskii. Measurement of kapitsa resistance using second sound in he ii. *Sov. J. Low Temp. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, 6(5), 1980.
- [105] D. V. Osborne. Second sound in liquid helium ii. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 64(2):114, 1951.
- [106] ИМ Халатников. Разрывы и звук большой амплитуды в гелии ii. *ЖЭТФ*, 23(3):253–264, 1952.
- [107] СС Кутателадзе, Ал А Борисов, АА Борисов, and ВЕ Накоряков. Экспериментальное обнаружение ударной волны разрежения вблизи критической точки жидкость—пар. *ДАН СССР*, 252(3):595–598, 1980.
- [108] Alexander J. Dessler and W. M. Fairbank. Amplitude dependence of the velocity of second sound. *Phys. Rev.*, 104(1):6, Oct 1956.
- [109] RG Arkhipov. Critical phenomena in the propagation of second sound in he ii with a large thermal flux. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 59:2055–2058, 1970.
- [110] АИ Гуляев. ШЛИРЕН-ФОТОГРАФИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ЖИДКОМ He4. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 57(1):55, 1969.
- [111] RN Hills. Discontinuities in helium ii. *Applied Scientific Research*, 27(1):145–155, 1973.

- [112] Борис Леонидович Рождественский and Николай Николаевич Яненко. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. наука, 1978.
- [113] MO Lutset, SK Nemirovskii, and AN Tsoi. Propagation of nonlinear second sound waves in he ii. *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States)*, 54(1), 1981.
- [114] Eberhard Hopf. The partial differential equation $ut + uux = \mu xx$. *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3):201–230, 1950.
- [115] Александр Захарович Паташинский and Валерий Леонидович Покровский. *Флуктуационная теория фазовых переходов*. "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1982.
- [116] WF Vinen and DL Hurd. Light-scattering studies of the dynamical behaviour of liquid ^4He close to the λ -line. *Advances in Physics*, 27(4):533–608, 1978.
- [117] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, S.P. Novikov, and L.P. Pitaevskii. *Theory of Solitons*. Nauka, Moscow, 1980.
- [118] S.K. Nemirovskii. Self-focusing of second sound in superfluid helium. *Sov. J. Low Temp. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, 4:10, Oct 1978.
- [119] VE Zakharov and AM Rubenchik. Nonlinear interaction of high-frequency and low-frequency waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 13(5):669–681, 1972.
- [120] VE Zakharov, VV Sobolev, and VC Synakh. Behavior of light beams in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 33(1):77–81, 1971.
- [121] ЕА Заболотская and РВ Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. *Акустический журнал*, 15(1):106–109, 1969.
- [122] ББ Кадомцев and ВИ Петвиашвили. О звуковой турбулентности. *ДАН СССР*, 208:794, 1973.
- [123] Николай Сергеевич Бахвалов, Яков Михайлович Жилейкин, and ЕА Заболотская. *Нелинейная теория звуковых пучков*. М. "Наука" 1982.
- [124] ОВ Руденко and СИ Солуян. *Теоретические основы нелинейной акустики*. Наука, 1975.

- [125] Lim Chee-Seng. Coupled acoustic systems. *Wave motion*, 9(4):349–359, 1987.
- [126] SK Nemirovskii. Riemann invariants and the propagation of nonlinear waves in superfluid helium. *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States)*, 59(6), 1984.
- [127] NI Pushkina and RV Khokhlov. Parametric excitation of second sound by first sound in liquid helium ii. *JETP Lett*, 19:348, 1974.
- [128] НИ Пушкина and ВК Руденко. О НЕЛИНЕЙНОМ КОМБИНАЦИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ ii. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 70(1):191, 1976.
- [129] S. Putterman and S. Garrett. Resonant mode conversion and other second-order effects in superfluid ^4He . *Journal of Low Temperature Physics*, 27:543–559, 1977.
- [130] EM Lifshits and LP Pitaevskii. *Theoretical physics. V. 10. Physical kinetics*. Nauka, Moscow, 1979.
- [131] VV Lebedev and IM Khalatnikov. Lagrange and hamilton hydrodynamics equations for anisotropic superfluid ^3He -a liquid. *JETP Lett*, 25:352, 1977.
- [132] NI Pushkina. Wave front reversion in superfluid ^3He - ^4He solutions. *Fizika Nizkikh Temperatur*, 14:794–798, 1988.
- [133] SV Iordanskii. About stability of a plane shock wave. *Prikl. Mat. Mekh*, 321:465–471, 1957.
- [134] S. K. Nemirovskii. Stability of shock wave in superfluid helium. *Fizika N*, 11:787, 1985.
- [135] Николай Петрович Векуа. *Системы сингулярных интегральных уравнений*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
- [136] Henry William Wyld. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. *Annals of Physics*, 14:143–165, 1961.
- [137] VE Zakharov and VS L'vov. Statistical description of nonlinear wave fields. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 18(10):1084–1097, 1975.
- [138] VL Gurevich. *Phonon system kinetics*. Nauka, Moscow, 1980.

- [139] VE Zakharov and RZ Sagdeev. Acoustic turbulence spectrum. *DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR*, 192(2):297, 1970.
- [140] SK Nemirovskii. Acoustic turbulence in superfluid helium. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 90:2023–2037, 1986.
- [141] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Vol. 5. Statistical physics part 1*. Pergamon Press, Oxford, third edition edition, 1980.
- [142] Э. А. Корнелл and К. Э. Виман. Бозе-эйнштейновская конденсация в разреженном газе. Первые 70 лет и несколько последних экспериментов. *Успехи физических наук*, 173(12):1320, 2003.
- [143] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Statistical Physics, Part 2*. Pergamon, Oxford, 1980.
- [144] НН Боголюбов. *Избранные труды по статистической физике*. МГУ, 1979.
- [145] Eugene P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):195–207, 1963.
- [146] Lev P Pitaevskii and Sandro Stringari. *Bose-einstein condensation*. Number 116. Oxford University Press, 2003.
- [147] Edouard Sonin. Magnus force, aharonov-bohm effect, and berry phase in superfluids. In C. Barenghi, R. Donnelly, and W. Vinen, editors, *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, volume 571 of *Lecture Notes in Physics*, pages 131–137. Springer Berlin / Heidelberg, 2001.
- [148] Nick P. Proukakis and Brian Jackson. Finite temperature models of bose-einstein condensation. *J. Phys. B*, 41:203002, 2008.
- [149] E Madelung. The hydrodynamical picture of quantum theory. *Z. Phys*, 40:322–326, 1926.
- [150] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento suppl.*, 6:249–250, 1949.
- [151] Ю Румер and М Рывкин. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика*. Рипол Классик, 2001.
- [152] M Pomerantz. Propagation of "cool" pulses in liquid he ii. *Physical Review Letters*, 26(7):362, 1971.

- [153] J. C. Cummings, D. W. Schmidt, and W. J. Wagner. Experiments on second sound shock waves in superfluid helium. *Phys. Fluids*, 21:713, 1978.
- [154] A. N. Tsoi. *Ph.D. thesis*. Institute of Thermophysics, Soviet Academy of Sciences, Novosibirsk, 1987.
- [155] S. K. Nemirovskii and A. N. Tsoi. Generation of vortices in he ii by a powerful thermal pulse. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 35:229, 1982.
- [156] L. P. Mezhov-Deglin, A. Yu. Iznankin, and V. P. Mineev. Observation of second-sound-rarefaction shock waves in superfluid helium. *JETP Lett*, 32:199, 1980.
- [157] A Yu Iznankin and LP Mezhov-Deglin. Shock waves in liquid helium. *JETP Lett*, 1983.
- [158] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Vol. 6. Fluid Mechanics, 2nd edition*. Pergamon Press,Oxford, third edition edition, 1987.
- [159] R. J. Atkin and N. Fox. Non-linear waves in helium ii. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 16(9):1615, 1983.
- [160] Shigenobu Kitabatake and Yasuji Sawada. On the nonlinear profile of the heat pulse in liquid helium ii. *Journal of the Physical Society of Japan*, 45(1):345–346, 1978.
- [161] VA Tsvetkov, AS Alekseev, TI Galkina, and NV Zamkovets. Transfer of electronic-excitation energy of germanium to liquid helium. *JETP Lett*, 42(7), 1985.
- [162] T. N. Turner. Using second-sound shock waves to probe the intrinsic critical velocity of liquid helium ii. *Phys. Fluids*, 26:3227, 1983.
- [163] J. R. Torczynski. Converging second sound shock waves in superfluid helium. *Phys. Fluids*, 27:1138, 1984.
- [164] J. R. Torczynski. On the interaction of second sound shock waves and vorticity in superfluid helium. *Phys. Fluids*, 27:2636, 1984.
- [165] W. Fiszdon and M.v. Schwerdtner. Influence of quantum turbulence on the evolution of moderate plane second sound heat pulses in helium ii. *J. Low Temp. Phys.*, 75:253, 1989.

- [166] W. Fiszdon, M. v. Schwerdtner, G. Stamm, and W. Poppe. Temperature overshoot due to quantum turbulence during the evolution of moderate heat pulses in he ii. *Journal of Fluid Mechanics*, 212:663–684, 1990.
- [167] I Yu Borisenko, VB Efimov, and LP Mezhov-Deglin. Nonlinear second-sound waves in a liquid helium resonator. *Fizika Nizkikh Temperatur*, 14:1123, 1988.
- [168] W Chester. Resonant oscillations in closed tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(01):44–64, 1964.
- [169] BA Danilchenko, MO Lutset, and VN Poroshin. Limit of transient heat absorption by superfluid helium for very large heat pulses. *Cryogenics*, 29(4):444–447, 1989.
- [170] V. Kotsubo and G. W. Swift. Vortex turbulence generated by second sound in superfluid *he4*. *Phys. Rev. Lett.*, 62(22):2604–2607, May 1989.
- [171] Lori S. Goldner, Guenter Ahlers, and Ravi Mehrotra. Quantitative studies of nonlinear second sound in superfluid *he4*. *Phys. Rev. B*, 43(16):12861–12873, Jun 1991.
- [172] Lori S Goldner, Norbert Mulders, and Guenter Ahlers. Second sound very near $t\lambda$. *Journal of low temperature physics*, 93(1-2):131–182, 1993.
- [173] Takeshi Shimazaki, Teruhito Iida, and Masahide Murakami. Experimental study of thermal shock wave deformation and decay due to tangled mass of quantized vortices in he ii. *Advances in Cryogenic Engineering*, 39:1859–1864, 1994.
- [174] Teruhito Iida, Takeshi Shimazaki, and Masahide Murakami. Laser holographic interferometer visualization of a thermal shock wave in he ii. *Advances in Cryogenic Engineering*, 39:1851–1857, 1994.
- [175] LC Krysac, BW Statt, and GM Graham. The amplitude dependence of the velocity of nonlinear second sound in helium ii neart λ . *Journal of low temperature physics*, 98(3):183–194, 1995.
- [176] L. C. Krysac. *Nonplanar and Nonlinear Second Sound in Helium II Near T*. PhD thesis, UNIVERSITY OF TORONTO (CANADA)., 1994.
- [177] LC Krysac. First observation of self-focusing of nonlinear second sound in superfluid helium near $t \lambda$. *Physical review letters*, 73(18):2480, 1994.

- [178] Peng Zhang, Seiji Kimura, Masahide Murakami, and Ru zhu Wang. Non-planar and non-linear second sound waves in he ii. *Chinese Physics Letters*, 17(1):43, 2000.
- [179] S.K. Nemirovskii and V.V. Lebedev. The hydrodynamic of superfluid turbulence. *Sov. Phys. JETP*, 57:1009, 1983.
- [180] S. K. Nemirovskii and W. Fiszdon. Chaotic quantized vortices and hydrodynamic processes in superfluid helium. *Rev. Mod. Phys.*, 67(1):37–84, Jan 1995.
- [181] Dmitry Rinberg, Vladimir Cherepanov, and Victor Steinberg. Parametric generation of second sound by first sound in superfluid helium. *Physical review letters*, 76(12):2105, 1996.
- [182] Dmitry Rinberg and Victor Steinberg. Acoustic phase conjugation in superfluid helium. *Physical review letters*, 81(26):5812, 1998.
- [183] Dmitry Rinberg and Victor Steinberg. Parametric generation of second sound in superfluid helium: Linear stability and nonlinear dynamics. *Physical Review B*, 64(5):054506, 2001.
- [184] Виктор Борисович Ефимов. *Нелинейные волны второго звука и акустическая турбулентность в сверхтекучем гелии*. PhD thesis, Институт физики твердого тела РАН, Черногловка, 2011.
- [185] GV Kolmakov. Acoustic turbulence in media with two types of sound. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 86(3):470–479, 1995.
- [186] GV Kolmakov, AA Levchenko, M Yu Brazhnikov, VB Efimov, EV Lebedeva, and LP Mezhov-Deglin. Nonlinear second sound waves in superfluid helium in a resonator. *Journal of low temperature physics*, 138(3-4):525–530, 2005.
- [187] GV Kolmakov, VB Efimov, AN Ganshin, Peter VE McClintock, and LP Mezhov-Deglin. Formation of a direct kolmogorov-like cascade of second-sound waves in he ii. *Physical review letters*, 97(15):155301, 2006.
- [188] German V Kolmakov, Peter Vaughan Elsmere McClintock, and Sergey V Nazarenko. Wave turbulence in quantum fluids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(Supplement 1):4727–4734, 2014.
- [189] VB Efimov, GV Kolmakov, AS Kuliev, and LP Mezhov-Deglin. Propagation of short nonlinear second-sound pulses through he-ii in one-and three-dimensional geometry. *Low Temperature Physics*, 24(2):81–85, 1998.

- [190] Viktor B Efimov, AN Ganshin, Peter VE McClintock, GV Kolmakov, and LP Mezhov-Deglin. Nonlinear second sound waves and acoustic turbulence in superfluid ^4He . *Journal of Low Temperature Physics*, 148(3-4):251–255, 2007.
- [191] Victor B Efimov, Andrei N Ganshin, and Peter VE McClintock. Second-sound acoustic turbulence in superfluid helium: Decay of the direct and inverse energy cascades. *Physical Review B*, 86(5):054515, 2012.
- [192] AN Ganshin, VB Efimov, GV Kolmakov, LP Mezhov-Deglin, and Peter VE McClintock. Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium. *Physical review letters*, 101(6):065303, 2008.
- [193] VB Efimov, AN Ganshin, GV Kolmakov, PVE McClintock, and LP Mezhov-Deglin. Rogue waves in superfluid helium. *The European Physical Journal Special Topics*, 185(1):181–193, 2010.
- [194] Andrey N Ganshin, Victor B Efimov, German V Kolmakov, Leonid P Mezhov-Deglin, and Peter VE McClintock. Nonlinear second sound waves in superfluid helium: instabilities, turbulence and rogue waves. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(10):1250242, 2012.
- [195] VB Efimov, OJ Griffiths, PC Hendry, GV Kolmakov, Peter VE McClintock, and L Skrbek. Experiments on the rapid mechanical expansion of liquid ^4He through its superfluid transition. *Physical Review E*, 74(5):056305, 2006.
- [196] Fernando Lund and Tullio Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Physical Review D*, 14(6):1524, 1976.
- [197] Fernando Lund and Victor Steinberg. Scattering of second sound waves by quantum vorticity. *Physical review letters*, 75(6):1102, 1995.