

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕПЛОФИЗИКИ ИМ. С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

**С. К. Немировский**

**ГИДРОДИНАМИКА КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ.  
ВОЛНЫ, ВИХРИ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

**ЧАСТЬ 2**

**Квантовые вихри, сверхтекучая турбулентность**

Ответственный редактор  
доктор физико-математических наук

*П. А. Куйбин*



НОВОСИБИРСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

2016

УДК 532  
ББК 22.253.3  
Н 50

**Немировский, С. К.**

Гидродинамика квантовых жидкостей. Волны, вихри, турбулентность. Часть 2: Квантовые вихри, сверхтекучая турбулентность / С. К. Немировский; отв. ред. П. А. Куйбин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т теплофизики. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. — 293 с.

Книга представляет собой вторую часть монографии, посвященную различным аспектам гидродинамики квантовых жидкостей. В ней излагается теория квантовых вихрей — уникального явления, происходящего из самой квантово-механической природы сверхтекучих жидкостей. Рассматривается концепция квантовых вихрей и приводится ряд классических результатов, как теоретических, так и экспериментальных. Большая часть книги посвящена популярной в настоящее время теории квантовой турбулентности, связанной с хаотической динамикой квантовых вихрей.

Монография рассчитана на физиков и инженеров, непосредственно занимающихся изучением и техническим применением квантовых жидкостей, а также на специалистов других областей, желающих глубже ознакомиться с этими интересными явлениями. Она также предназначена для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики низких температур и гидродинамики сложных систем.

Рис. 55. Библ. 210 назв.

*Утверждено к печати Ученым советом  
Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН*

**Рецензенты:**

д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю. Н. Григорьев*

д-р физ.-мат. наук *В. Б. Ефимов*

д-р техн. наук, проф. *А. П. Крюков*

Подготовка данной монографии, а также вошедшие в нее исследования выполнены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-29-00093)

ISBN 978-5-7692-1482-0 (часть 2)  
ISBN 978-5-7692-1480-6

©Немировский С. К., 2016  
©Издательство СО РАН, 2016

# Оглавление

Предисловие . . . . .	8
<b>1. Квантовые вихри. Исторический обзор . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Вихри Онзагера — Фейнмана . . . . .	11
1.2. Ранние эксперименты . . . . .	20
<b>2. Вихревые линии в квантовых жидкостях: динамика и структура . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1. Вихревая динамика: Уравнения движения . . . . .	35
2.1.1. Движение линий в квантовых жидкостях . . . . .	35
2.1.2. Движение линий в бозе-эйнштейновском конденсате . . . . .	44
2.2. Вихревая динамика: пересоединение (Reconnection) линий . . . . .	53
2.2.1. Этап 1. Столкновение нитей . . . . .	53
2.2.2. Этап 2. Динамика внутри ядер вихревых нитей . . . . .	57
2.3. Характеристики вихревого клубка . . . . .	61
2.3.1. Геометрические свойства . . . . .	62
2.3.2. Динамические характеристики . . . . .	69
<b>3. Сверхтекучая турбулентность, введение в предмет . . . . .</b>	<b>81</b>
3.1. Введение и обзор . . . . .	81
3.2. Вихревая динамика и квантовая турбулентность . . . . .	91
3.3. Сценарий Фейнмана . . . . .	96
3.4. Феноменологическая теория Вайнена . . . . .	99
<b>4. Аналитические исследования 1: динамика линий без учета реконнекций . . . . .</b>	<b>108</b>
4.1. Кинетическое уравнение для распределения длины в пространстве кривизны . . . . .	109
4.2. Ланжевеновская постановка задачи . . . . .	117
4.2.1. Функциональный формализм . . . . .	117
4.2.2. Термодинамическое равновесие в системе хаотических квантованных вихрей . . . . .	120

4.2.3.	Тепловое равновесие вихревых линий в противотоке Не II . . . . .	125
4.3.	Хаотические малые возмущения на вихревых линиях. Нелинейные волны Кельвина . . . . .	130
4.4.	Хаотическая динамика вихревой петли. Приближение прямого взаимодействия . . . . .	135
<b>5.</b>	<b>Аналитические исследования 2:</b>	
	<b>кинетика колец и петель . . . . .</b>	<b>147</b>
5.1.	Модели взаимодействующих идеальных (или слабо неидеальных) вихревых колец . . . . .	147
5.2.	Гауссова модель . . . . .	149
5.2.1.	Обобщенное распределение Винера . . . . .	149
5.2.2.	Характеристический функционал $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$ . . . . .	155
5.3.	Кинетика сети гауссовых вихревых петель . . . . .	157
5.3.1.	Кинетическое уравнение . . . . .	157
5.3.2.	Вычисление коэффициентов $A(l_1, l_2, l)$ и $B(l, l_1, l_2)$ . . . . .	159
5.3.3.	Точное решение кинетического уравнения . . . . .	164
5.4.	Кинетика петель и теория квантовой турбулентности . . . . .	170
5.4.1.	Свойства вихревого клубка при нулевой температуре . . . . .	170
5.4.2.	”Чистый” поток $P_{net}$ и плотность вихревых линий . . . . .	173
5.4.3.	Полная интенсивность реконнекций . . . . .	174
5.4.4.	Уравнение Вайнена . . . . .	175
<b>6.</b>	<b>Гидродинамика сверхтекучей</b>	
	<b>турбулентности . . . . .</b>	<b>181</b>
6.1.	Постановка задачи . . . . .	181
6.2.	Неупорядоченные вихревые клубки . . . . .	182
6.3.	Случай вихревых пучков . . . . .	191
<b>7.</b>	<b>Приложения гидродинамики</b>	
	<b>сверхтекучей турбулентности . . . . .</b>	<b>197</b>
7.1.	Взаимодействие между вторым звуком и противотоком . . . . .	198
7.2.	Распространение интенсивных тепловых импульсов, генерирующих вихри и взаимодействующих с ними . . . . .	200

7.2.1.	Генерация вихрей в интенсивных тепловых импульсах . . . . .	200
7.2.2.	Уравнения эволюции мощных тепловых импульсов . . . . .	203
7.2.3.	Эволюция интенсивных тепловых импульсов. Аналитическое исследование . . . . .	204
7.2.4.	Эволюция интенсивных тепловых импульсов. Численные исследования . . . . .	207
7.3.	Передача тепла и кипение Не II . . . . .	213
7.4.	Генерирующий член или остаточные вихри? . . . . .	217
7.5.	Аномальный распад вихревого клубка . . . . .	218
7.6.	Эффект “сухого” трения. Справедливость и интерпретация уравнения Вайнена . . . . .	220
<b>8.</b>	<b>Приложения гауссовой модели . . . . .</b>	<b>224</b>
8.1.	Гидродинамический импульс вихревого клубка . . . . .	224
8.1.1.	Статические свойства . . . . .	224
8.1.2.	Динамика импульса Лэмба . . . . .	226
8.1.3.	Несохранение импульса Лэмба . . . . .	228
8.2.	Динамика неоднородной квантовой турбулентности . . . . .	231
8.2.1.	Диффузия вихревого клубка . . . . .	231
8.3.	Распространение турбулентных фронтов . . . . .	234
8.4.	Распад квантовой турбулентности при нулевой температуре . . . . .	235
8.4.1.	Затухание плотности вихрей и квазиклассическое поведение квантовой турбулентности . . . . .	235
8.4.2.	Диффузионное затухание квантовой турбулентности . . . . .	237
8.5.	Энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцируемого вихревыми нитями. Фрактальная вихревая нить . . . . .	240
8.5.1.	Энергетический спектр и характеристический функционал . . . . .	240
8.5.2.	Модели вихревой нити . . . . .	243
8.5.3.	Определение энергетического спектра . . . . .	245
8.6.	Энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцируемого вихревыми нитями. Реконnectирующие вихревые нити . . . . .	250

8.6.1.	Роль сингулярных решений в формировании спектров турбулентности . . . . .	250
8.6.2.	Форма кривых реконnectирующих вихревых линий . . . . .	252
8.6.3.	Аналитическое вычисление спектра . . . . .	254
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>259</b>

## Список часто используемых символов и сокращений

$\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n$	— скорости движения сверхтекучей и нормальной компонент, соответственно
$\rho_s, \rho_n$	— плотности сверхтекучей и нормальной компонент, соответственно
$\rho$	— полная плотность
$S, \sigma$	— энтропия единицы объема и единицы массы, соответственно
$p$	— давление
$\kappa$	— квант циркуляции
$\mu$	— химический потенциал
$T$	— температура
$T_\lambda$	— температура $\lambda$ -перехода
$\mathcal{L}$	— плотность вихревых линий
$\mathbf{j}$	— плотность импульса
$\mathbf{j}_0$	— плотность импульса в системе сверхтекучего движения
$\Pi_{ik}$	— тензор плотности потока импульса
$R$	— диссипативная функция
$\mathbf{s}(\xi, t)$	— радиусы-векторы точек вихревой линии
$\delta$	— межвихревое расстояние
$A(T)$	— константа Гортера — Меллинка
$\psi(\mathbf{r}, t)$	— макроскопическая волновая функция, или параметр порядка
$\varepsilon(\mathbf{p})$	— энергия квазичастиц (фононов и ротонов) как функция их импульсов $\mathbf{p}$
$\lambda_{dB}$	— квантово-механическая де-Бройлевская длина волны
$m$	— масса атома гелия
$a_0$	— радиус ядра квантового вихря
ВК	— вихревой клубок
ПВЛ	— плотность вихревых линий
QT	— квантовая турбулентность
БЭК	— бозе-эйнштейновский конденсат
МВН	— метод вихревых нитей

## Предисловие

Во второй части монографии рассматривается теория квантовых вихрей — совершенно уникального явления, происходящего из самой квантово-механической природы сверхтекучих жидкостей. Представлена концепция квантовых вихрей и приведен ряд классических результатов, как теоретических, так и экспериментальных. Большая часть книги посвящена популярной в настоящее время теории квантовой турбулентности (или сверхтекучей турбулентности), связанной с хаотической динамикой квантовых вихрей. Причина выбора такой темы заключается в основном в том, что квантовая турбулентность менее освещена в монографиях и учебниках по сравнению с другими разделами теории квантовых вихрей.

В первой части монографии мы отмечали, что основой книги стал курс лекций, прочитанный для студентов гидродинамических специальностей Новосибирского государственного университета. По этой причине мы неоднократно подчеркивали, что в определении “квантовая гидродинамика” акцент при изложении материала смещен в сторону термина “гидродинамика”. Именно квантовые жидкости рассматривались как образец комплексной сплошной среды (типа многофазных жидкостей) со специфическими, экзотическими свойствами. Соответственно, законы динамики квантовых жидкостей вполне совместимы с феноменологией сложных гидродинамических систем. Продолжая эту линию, мы во второй части монографии также сосредоточимся на гидродинамических аспектах теории квантовых вихрей. Ближайшим аналогом квантовых вихрей в классической гидродинамике являются так называемые вихревые трубки. В классической жидкости они рассматриваются скорее как удобная и плодотворная математическая модель. Квантовые жидкости, где вихревые нити являются реальными объектами, дают отличную возможность для исследования роли дискретных вихрей в вихревых течениях жидкости, в частности, в турбулентных явлениях.

Во второй части монографии будет изложена теория квантовых вихрей применительно к гидродинамическим процессам в сверхтекучих жидкостях. В настоящее время имеется огромное число научных работ, посвященных различным аспектам теории квантовых вихрей в различных системах, а также теории топологических дефектов в нелинейных волновых полях. Охватить эту деятельность в рамках одной монографии практически невозможно, и возникает необходимость сузить материал, представив какую-нибудь одну актуальную

область. В настоящей книге мы посвятили основное внимание теории квантовой турбулентности — области, связанной с хаотической динамикой квантовых вихрей. Как и в первой части монографии, основное внимание уделено теоретическим и численным методам

Предлагается следующая структура книги. Первая глава представляет собой исторический обзор, посвященный возникновению концепции вихревых нитей в квантовых жидкостях, а также ключевым результатам и приложениям этой теории. Изложение носит описательный характер, без рассмотрения деталей, как экспериментальных, так и теоретических. Многие темы изложены довольно фрагментарно, а некоторые и вовсе опущены, при этом даются ссылки на оригинальные источники и статьи, а также на известные книги.

Во второй главе описаны свойства и динамика вихревых линий в  $4\text{He}$ ,  $3\text{He-B}$ , а также в слабо взаимодействующем конденсате Бозе — Эйнштейна (БЭК). По сути дела, эта глава также вводная, в ней рассматриваются различные аспекты математического формализма для теоретической работы с квантовыми вихрями. Конечно, изложенный математический формализм является универсальным аппаратом, но мы будем представлять материал, имея в виду постановку задачи стохастического поведения системы.

Следующие главы монографии посвящены собственно сверхтекучей, или квантовой, турбулентности, связанной с хаотической динамикой квантовых вихрей (так называемых вихревых клубков “vortex tangle”). Квантовая турбулентность представляет собой бурно развивающуюся область. В ней имеются некоторые классические результаты, такие как теория Фейнмана — Вайнена (ссылки будут даны позднее) или так называемая гидродинамика квантовой турбулентности, обобщающая двухскоростную гидродинамику Ландау с учетом вихревых клубков. В то же время в этой области получено множество сравнительно недавних результатов, как экспериментальных, так и теоретических (включая численные исследования). Несмотря на обилие результатов, в настоящее время, однако, не создано сколько-нибудь продвинутой теории квантовой турбулентности. Это связано с необыкновенной сложностью задачи. Тем не менее в теории квантовой турбулентности разработаны отдельные фрагменты — теоретические модели, которые в той или иной степени описывают свойства вихревых клубков и которые, несомненно, послужат “кирпичиками” при создании будущей теории квантовой турбулентности.

Основной целью изложения результатов, касающихся квантовой турбулентности, является обсуждение упомянутых теоретических моделей. Экспериментальные результаты и численные исследования приводятся в основном как иллюстрация к теории (хотя автор, безусловно, предполагает главенство эксперимента в физике).

Часть из результатов, вошедших в представленную монографию, получена ранее при поддержке таких фондов, как Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ) — гранты № 96-02-19414, 99-02-16942, 03-02-16179, 05-08-01375, 07-02-01124, 10-02-00514, 15-02-05366, Международный фонд Европейского Союза ИНТАС, грант № 2001-0618, а также Совет по поддержки ведущих научных школ, гранты № НШ 6749.2006.8 и № НШ 4366.2008.8. Автор выражает благодарность перечисленным фондам.

# 1. Квантовые вихри. Исторический обзор

## 1.1. Вихри Онзагера — Фейнмана

Как указывалось в предисловии, первая глава представляет собой исторический обзор, посвященный возникновению и развитию концепции вихревых нитей в квантовых жидкостях. Здесь также изложены и обсуждены ключевые результаты и приложения этой теории. Изложение носит вводный, описательный характер, экспериментальные детали и подробные теоретические выкладки не представлены. Подробно этот материал широко освещен в литературе (см. например, [1, 2, 3, 4]).

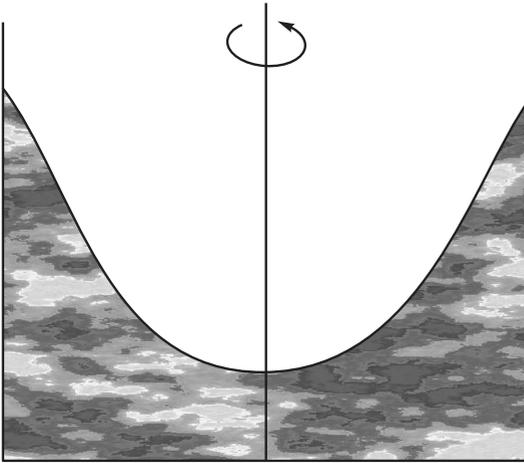
По-видимому, два эксперимента, выполненные в начале 1950-х гг., послужили основой для возникновения теории квантовых вихрей. Описанная в первой части книги (см. [5]) теория сверхтекучести Ландау была чрезвычайно успешной. Эта теория не только объясняла большое количество необычных экспериментальных наблюдений, таких, например, как фонтанный эффект, но и предсказала новые эффекты, типа волнового распространение тепла (второй звук). Тем не менее, уже в самом начале эта теория столкнулась с принципиальными трудностями. Одна трудность касалась существования критической скорости, т. е. потери свойства сверхтекучести при некоторых пороговых скоростях, и появления диссипации. Согласно теории Ландау, в He II ниже критической скорости рождения ротоннов (см. пункт 2.3 в первой части книги [5]) около 60 м/с, течение сверхтекучей компоненты должно быть бездиссипативным. В то же время, как показал эксперимент [6] (см. также обзор [7]), при гораздо более низком значении скорости противотока резко появлялось “взаимное трение” между двумя компонентами. Классическая безвихревая гидродинамика He II приводит к результату, согласно которому при стационарном течении сверхтекучего гелия типа противотока ( $j = 0$ ), возникшем под действием тепловой нагрузки  $\dot{Q}$ , в жидкости наблюдается перепад температуры  $\Delta T$ , обусловленный появлением вязкости нормальной компоненты, и, как следствие, пропорциональный плотности теплового потока  $\dot{Q}$ , т. е.  $\Delta T \propto \dot{Q}$ . Эксперимент [6] (см. также обзор [7]) подтверждает эту зависимость, однако, уже при очень небольших значениях плотности теплового потока порядка  $\dot{Q} \sim 10^{-2}$  Вт/см<sup>2</sup>, что соответствует относительной скорости  $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$  порядка 0.5 см/с, (что примерно на три порядка меньше предсказанного Ландау), линейная связь нарушается, и градиент температуры резко возрастает, асимптотически приближаясь

к зависимости  $\Delta T \propto \dot{Q}^3$  (см. рис. 3.1 в первой части книги [5]). Рост температуры, очевидно, связан с появлением некоторого механизма, препятствующего равновесному бездиссипативному течению сверхтекучей и нормальной компонент. Природа этого механизма была неясна.

Другой серией экспериментов, противоречащих классической теории Ландау, были исследования, связанные с невовлечением сверхтекучей компоненты во вращательное движение. Для подтверждения этого факта Осборном [8] был задуман эксперимент по измерению глубины параболического мениска вращающегося гелия. Хорошо известно, что обычная вращающаяся жидкость образует параболический мениск с глубиной, пропорциональной квадрату угловой скорости. С другой стороны, как обсуждалось ранее, вследствие того, что сверхтекучая компонента не взаимодействует со стенками, она не может быть вовлечена во вращательное движение. Ожидалось, что в соответствии с тем, что вращается лишь нормальная компонента, глубина мениска должна быть в  $\rho/\rho_n$  раз меньше, чем в обычной жидкости (см. рис. 1.1). Опыт дал отрицательный результат. Мениск оказался глубже, причем таким, как если бы вращалась вся жидкость, что могло бы произойти, если бы была только одна нормальная компонента. Однако в опытах Андроникашвили (см. обзор [9]) было продемонстрировано, что во вращающемся He II имеет место термомеханический эффект, а это означает, что гидродинамика остается двухскоростной.

Как мы теперь знаем, обе “трудности” теории Ландау имеют одно происхождение, и связаны они с квантованными вихрями, топологическими одномерными особенностями, возникающими в сверхтекучей компоненте гелия.

Вспомним рассуждения Ландау, приведшие к выводу о том, что течение сверхтекучей компоненты является потенциальным (см. пункт 2.3.1 в первой части книги). Анализируя квантовомеханические коммутационные соотношения, Ландау заключил, что компоненты ротора скорости  $\nabla \times \mathbf{v}$  не коммутируют ни друг с другом, ни с компонентами скорости  $\mathbf{v}$  и, вообще говоря, не сохраняются. Исключением является случай, когда во всем объеме жидкости  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . В этом случае компоненты  $\nabla \times \mathbf{v}$  коммутирует с  $\rho$  и  $\mathbf{v}$ , а потому и с функцией Гамильтона. Таким образом, равный нулю ротор скорости сохраняется. Другими словами, квантовая жидкость всегда обладает такими стационарными состояниями, в которых  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  во всем объеме. Такие состояния по аналогии с классической гидро-



*Рис. 1.1.* Эксперимент Осборна [8] по измерению глубины параболического мениска вращающегося гелия. Глубина мениска оказалась такой, как если бы вращалась вся жидкость, а не только нормальная компонента, как ожидал Осборн. Рисунок взят из книги Тилли и Тилли [1]

динамикой описывают потенциальное движения жидкости (точнее, сверхтекучей компоненты, поскольку рассуждения Ландау касались случая нулевой температуры).

Однако, если течение изначально не потенциально, то утверждение, что  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  во всем объеме, неверно, и в принципе вихревое движение возможно. В силу квантованности имеется энергетический барьер, поэтому  $\nabla \times \mathbf{v}$  не может быть сколь угодно малым во всем объеме жидкости. По мнению Ландау: “Другими словами, между состояниями потенциального ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ) и вихревого ( $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ ) движения квантовой жидкости нет непрерывного перехода. Отсюда непосредственно вытекают основные особенности энергетического спектра жидкости. Наличие разрыва между состояниями потенциального и вихревого движений означает, что между низшими энергетическими уровнями вихревых и потенциальных движений должен существовать некоторый конечный энергетический интервал. Что касается вопроса о том, который из этих двух уровней лежит ниже, то логически, по-видимому, возможны оба случая” (см. оригинальную работу [10, 11]). Это наблюдение демонстрирует, что Ландау, по

сути дела, предвосхитил открытие квантованности вихревого движения в сверхтекучей жидкости.

Он, однако, не конкретизировал, каким образом эти квантованные вихри возникают в гелии и что они из себя представляют. Эта задача была решена Онзагером [12] и Фейнманом [13]. Основываясь на квантово-механических свойствах сверхтекучей жидкости, они предсказали, что вихревое движение He II реализуется очень специфическим способом. В частности, они предположили, что в гелии возникают одномерные особенности, или вихревые нити, на которых нарушается условие  $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ . Вокруг этих особенностей возможно круговое движение или циркуляция сверхтекучей компоненты гелия. Квантово-механические свойства сверхтекучей жидкости накладывают ограничения на круговое движение. В частности, циркуляция сверхтекучей скорости принимает только определенные, квантованные значения

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = n\kappa. \quad (1.1)$$

Интеграл в (1.1) вычисляется вдоль любого контура, охватывающего нить, а величина  $\kappa$  — квант циркуляции — равна

$$\kappa = 2\pi\hbar/m_{He} = 9,97 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}, \quad (1.2)$$

где  $m_{He}$  — масса атома гелия.

Следуя Халатникову [14], проиллюстрируем высказанное выше утверждение. Известно, что при движении квантовой системы преобразование Галилея для волновой функции имеет следующий вид (см., например, [15]):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}' - \mathbf{v}t, t) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( m\mathbf{v}\mathbf{r} - \frac{mV^2}{2}t \right) \right]. \quad (1.3)$$

Это означает, что при движении  $N$  частиц волновая функция “набирает” фазу

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left( \frac{i}{\hbar} m \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{r}_i \right). \quad (1.4)$$

Для плавного изменения скорости сверхтекучего движения по замкнутому контуру изменение фазы может быть переписано следующим образом:

$$\frac{m_{He}}{\hbar} \sum_i \mathbf{v}_{s,i} \mathbf{r}_i \rightarrow \frac{m_{He}}{\hbar} \oint \mathbf{v}_s dl. \quad (1.5)$$

При обходе контура и возвращении в исходную точку мы должны получить то же самое значение волновой функции. Это возможно при единственном условии, что фаза меняется на  $2\pi n$ , где  $n$  — целое число. Из термодинамических соображений (см. далее) следует, что вихри с  $n > 1$  неустойчивы, поэтому далее мы будем полагать  $n = 1$ .

Таким образом, в гелии могут существовать вихри лишь с определенной (квантованной) циркуляцией. Важно отметить, что гипотеза вихревых нитей только утверждает, что их наличие не противоречит законам квантовой механики, в то же время не предлагая никаких механизмов для их появления в гелии. На самом деле механизм возникновения вихрей в гелии является одной из наиболее сложных проблем теории квантованных вихрей. В настоящее время существует большое число гипотез, начиная от гипотезы рождения вихрей космическими лучами вплоть до идеи, согласно которой вихри образуются во время фазового перехода (см., например, [16]). Эти вихри в гелии II в виде зародышей существуют всегда и приобретают большие размеры во время течения (противотечения) жидкости.

Если в соотношении (1.1) ( $n = 1$ ) в качестве охватывающего контура взять окружность радиуса  $r$  вокруг прямолинейной нити, направленной вдоль оси  $z$ , то (учитывая симметрию) можно видеть, что азимутальная скорость  $v_{s\varphi}$  сверхтекучей компоненты вокруг вихря равна



$$v_{s\varphi} = \frac{\kappa}{2\pi r}. \quad (1.6)$$

При этом как радиальная  $v_{sr}$ , так и тангенциальная  $v_{sz}$  компоненты скорости обращаются в нуль, т. е. поле скорости  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  в окрестности прямолинейной вихревой нити имеет вид (в цилиндрических координатах)

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \left(0, \frac{\kappa}{2\pi r}, 0\right). \quad (1.7)$$

Заметим, что движение, удовлетворяющее закону (1.7), в области вне вихревой нити потенциально, т. е.  $\nabla \times \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ . Это, в частности, означает, что если мы вычислим циркуляцию скорости по контуру, который не охватывает нулевую точку (квантовую нить), то циркуляция скорости по такому контуру будет равна нулю. В соответствии с теоремой Стокса криволинейный интеграл для поля  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  по замкнутому контуру равен поверхностному интегралу от ротора скорости  $\nabla \times \mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  через поверхность  $S$ , натянутую на контур  $C$

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Таким образом, можно заключить, что поле завихренности  $\omega(\mathbf{r})$  обращается в нуль вне точки вихря, но при этом интеграл, охватывающий эту точку конечен, т. е.  $\omega(\mathbf{r})$  имеет вид дельта-функции. Изложенные выше рассуждения касаются прямолинейной вихревой нити. Для изогнутой нити они справедливы на таких расстояниях от (изогнутой) нити, которые гораздо меньше, чем ее радиус кривизны.

Подытоживая, можно утверждать, что квантовый вихрь — это сингулярное распределение завихренности, сосредоточенное на линии, вокруг которой происходит круговое движение сверхтекучей жидкости. Соответствующая линия называется квантовой вихревой нитью (quantum vortex filament). Эта нить не может оборваться в объеме жидкости, она либо уходит на бесконечность, либо кончается на стенках сосуда, иначе это противоречило бы теореме Стокса. Обычно такую нить записывают в параметрическом виде  $\mathbf{s}(\xi)$ , где  $\mathbf{s}$  — радиусы-векторы точек линии, а параметр  $\xi$  “пересчитывает” точки линии. Часто величина  $\xi$  является параметром длины дуги. Мы ввели также время  $t$ , чтобы описывать случай движущихся нитей. Пример квантовой вихревой нити показан на рис. 1.2, где  $\xi$  является параметром длины дуги.

Поле завихренности  $\omega(\mathbf{r}) = \nabla \times v_s$  устроено таким образом, что  $\omega(\mathbf{r}) = 0$  вне линии, и  $\omega(\mathbf{r}) = \infty$  в точках нити  $\mathbf{s}(\xi, t)$  и направлено вдоль тангенциального вектора. При этом циркуляция по любому заданному контуру вокруг вихревой нити остается конечной постоянной, равной  $2\pi n\hbar/m$ . Формально такое поле завихренности  $\omega(\mathbf{r})$  можно записать следующим образом:

$$\omega(\mathbf{r}) = \kappa \int ds \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi, t)), \quad (1.9)$$

где интегрирование происходит вдоль нити. Таким образом, квантовые вихри ведут себя абсолютно идентично (если отвлечься от факта квантование циркуляции) тонким вихревым трубкам, изучаемым в классической гидродинамике, за исключением того, что последние рассматриваются всего лишь как удобная и плодотворная математическая модель. Квантовые жидкости, где вихревые нити являются реальными объектами, дают отличную возможность для исследований, в том числе экспериментальных, различных вопросов динамики дискретных вихрей. В частности, в настоящее время очень активно проводятся исследования, касающиеся роли дискретных вихревых нитей в турбулентных явлениях.

Предыдущее утверждение о сходстве вихревых трубок и квантовых вихревых нитей, однако, несправедливо для малых расстоя-

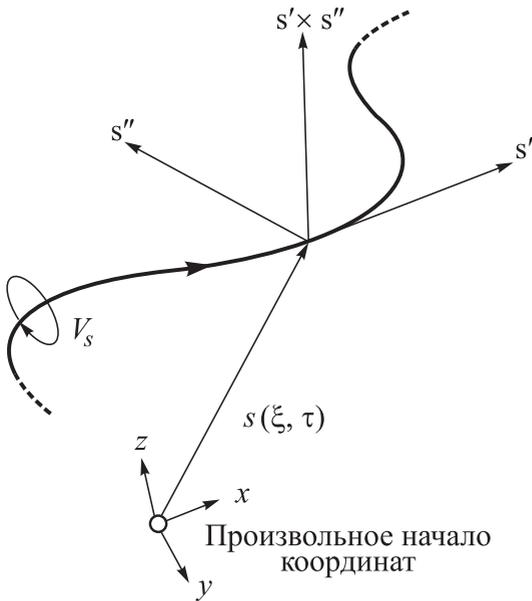


Рис. 1.2. Схематическое изображение вихревой линии в произвольной системе координат (изображенной внизу). Каждая точка вихревой линии  $s(\xi, t)$  определяется декартовыми координатами  $x_i, y_i, z_i$  и параметром  $\xi$  вдоль линии. Векторы  $s', s''$  и  $s' \times s''$  — это тангенциальный вектор, вектор локальной кривизны и вектор бинормали, совпадающий с направлением локально-индуцированной скорости  $\dot{s}$  точки  $s(\xi, t)$  вихревой линии

ний от оси вихря. Циркуляционная скорость резко возрастает при приближении к вихревой нити. В частности, на масштабе порядка  $3\text{Å}$  (что является типичным межатомным расстоянием) скорость превышает пороговую скорость рождения ротонов, т. е. критическую скорость Ландау. В результате при малых расстояниях от вихревой нити порядка нескольких ангстрем нить не может быть рассмотрена как бесконечно тонкая. На таких расстояниях вихревая линия должна обнаруживать некоторую структуру (так называемое ядро вихря — “vortex core”). Структура ядра вихря должна быть получена из решения соответствующей квантово-механической задачи. В настоящее время, однако, не имеется точной микроскопической теории вихревых нитей в реальном гелии. Основные сведения о структуре

вихревой нити были получены в результате косвенных рассуждений и многочисленных экспериментальных исследований; подробное их изложение можно найти в книгах [1–4].

Другим источником сведений о вихревом ядре является апелляция к модели слабо неидеального бозе-газа (или Бозе — Эйнштейн конденсата (БЭК), изложенной в гл. 9 первой части монографии [5]. Как теоретическая модель, БЭК возник очень давно, еще до открытия сверхтекучести. Начиная с работ Гинзбурга, Гросса и Питаевского (см. [17–19]), модель слабо неидеального бозе-газа стала, в частности, использоваться для интерпретации многих явлений в сверхтекучем гелии.

Напомним, в рамках этой модели состояние системы описывается с помощью макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , квадрат модуля которой совпадает с плотностью числа частиц  $n_0(\mathbf{r}, t)$ . Имея в виду представить далее гидродинамическое описание, удобно записать выражение для величины  $\psi(\mathbf{r}, T)$  в полярной форме

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)/m} \exp(i\phi(\mathbf{r}, t)), \quad (1.10)$$

где  $\rho(\mathbf{r}, t)$  — это плотность бозе-конденсата  $\rho(\mathbf{r}, t) = mn_0$ , а  $\phi(\mathbf{r}, t)$  — фаза волновой функции. Из квантово-механического выражения для потока плотности вероятности  $j_\psi$  можно получить следующее уравнение для поля скорости бозе-газа

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{j}_\psi}{\rho} = \frac{\hbar}{m} \nabla\phi. \quad (1.11)$$

Приведенные выше соображения показывают, что движение бозе-конденсата связано с неоднородностью фазы  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . Тогда циркуляция скорости вдоль некоторого замкнутого контура  $\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l}$  может быть выражена через фазу волновой функции следующим образом

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\hbar}{m} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \Delta\phi. \quad (1.12)$$

Поскольку волновая функция однозначна, то изменение фазы при возвращении к исходной точке должно быть кратно  $2\pi$ , следовательно,

$$\oint \frac{\hbar}{m} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi\hbar}{m} n. \quad (1.13)$$

что совпадает с формулой (1.1).

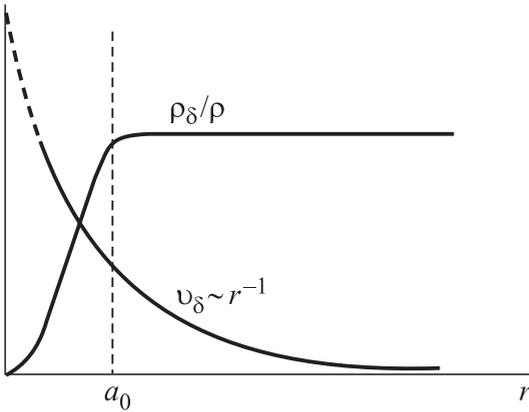


Рис. 1.3. Зависимость  $v_s$  и  $\rho_s/\rho$  от расстояния  $r$  от оси вихревой нити(схематически),  $a_0$  — радиус сердцевины

Таким образом, в слабо неидеальном бозе-газе, как и в сверхтекучем гелии, существуют квантовые вихри. Принципиальным отличием при этом является то, что для бозе-конденсата имеется продвинутая теория, на основании которой могут быть изучены различные детальные вопросы теории квантовых вихрей. В частности, теория слабо взаимодействующего бозе-газа предсказывает микроскопическую структуру вихревых нитей. Отсылая за деталями к первой части книги (и приведенных там ссылок), изложим конечный результат.

В соответствии с этой моделью скорость  $v_\varphi$  сверхтекучей компоненты вокруг вихря по-прежнему равна  $v_\varphi = \kappa/2\pi r$ , а плотность в сердцевине радиуса  $a_0$  убывает до нуля, это явление называют подавлением сверхтекучей компоненты на оси вихря. В отличие от He II, величина  $a_0$  (так называемый радиус ядра) может быть больше межатомных расстояний, это обстоятельство связано с выбранной моделью. Схематически данная ситуация изображена на рис. 1.3. Хотя, как неоднократно подчеркивалось, слабо неидеальный бозе-газ не эквивалентен полностью сверхтекучему гелию; обычно полагают, что для квантовых вихрей в реальном He II имеет место близкая картина с тем лишь отличием, что  $a_0$  — порядка межатомных расстояний. Из различных косвенных измерений получено, что значение  $a_0$  в He II составляет величину порядка нескольких ангстрем.

Ситуация с квантовыми вихрями в сверхтекучем  $^3\text{He-B}$  довольно похожая, однако имеются некоторые различия. Прежде всего значение кванта циркуляции в  $^3\text{He-B}$  в 2 раза меньше,  $\kappa = h/2m_{^3\text{He}}$ . Это отличие отражает тот факт, что сверхтекучее состояние в  $^3\text{He}$  появляется в результате спаривания двух атомов с полуцелым спином и образования куперовских пар с целым спином. Последнее позволяет применять для экспериментального исследования сверхтекучих фаз  $^3\text{He}$  методы ЯМР. Далее, нормальная компонента в  $^3\text{He-B}$ , в отличие от сверхтекучего  $^4\text{He}$ , имеет очень высокую вязкость, это сильно влияет на движение вихрей. Ядро квантового вихря в  $^3\text{He-B}$  гораздо больше, чем в  $^4\text{He}$ , порядка  $10 \div 100$  нм, даже при очень низких температурах. В ядре квантового вихря в  $^3\text{He-B}$  имеются коллективные движения (Matrikon states), которые вносят также вклад в динамику системы. Это неизбежно приводит к различию в эволюции вихрей в  $^3\text{He-B}$  и  $^4\text{He}$ .

Важным случаем, когда необходимо знать структуру квантовых вихрей на малых масштабах, является столкновение (самостолкновение) вихревых нитей с последующим перезамыканием (reconnection). Из-за отсутствия микроскопической теории эта задача также не может быть решена для гелия, и поэтому апелляция к модели слабо неидеального бозе-газа является основной для выяснения механизма реконнекции вихревых нитей. Такая программа была начата с пионерской работы Коуплика [20]. На основе решения нелинейного уравнения Шрёдингера авторы продемонстрировали детали распада вихря и последующего перезамыкания.

Резюмируя вышесказанное, подчеркнем, что вопрос о структуре ядра квантовых вихрей в сверхтекучем гелии является открытым. Тем не менее, как и в других статистических теориях, где стохастические характеристики не слишком чувствительны к деталям взаимодействия между частицами, а также к структуре частиц, это обстоятельство не должно существенно сказываться на свойствах вихревых клубков в случае квантовой турбулентности.

## 1.2. Ранние эксперименты

В этом подразделе мы представим некоторые ключевые эксперименты, подтверждающие концепцию квантованных вихрей в сверхтекучих жидкостях и дающие численные значения различных параметров теории.

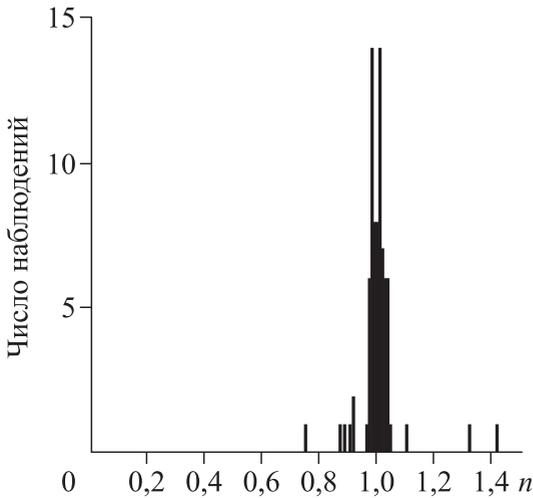


Рис. 1.4. Гистограмма, характеризующая частоту наблюдения циркуляции в зависимости от коэффициента  $n$  в формуле (1.1). Рисунок взят из статьи [21]

Первое экспериментальное подтверждение квантованности циркуляции сверхтекучей компоненты было получено Вайненом [21]. Основой экспериментальной схемы являлся вращающийся сосуд с проволокой, натянутой вдоль его оси. Таким образом, была смоделирована классическая ситуация погруженного в жидкость твердого цилиндра, вокруг которого имеется циркуляционное движение. Известно, что если такой цилиндр начинает движение, то на него действует так называемая сила Магнуса  $\mathbf{f}_M$  (см. например [22]), равная

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{V}. \quad (1.14)$$

Здесь  $V$  — скорость проволоки относительно сверхтекучей компоненты, а  $\mathbf{\Gamma}$  — циркуляция скорости течения вокруг цилиндра. По проволочке пропускался электрический ток и ее движение осуществлялось с помощью магнитного поля. Эта методика позволила выполнить измерения циркуляции, которые представлены в виде гистограммы на рис. 1.4. Из этого рисунка видно, что изменения циркуляции  $\kappa$  квантованы и близки к  $h/m_{He}$ .

Работу Вайнена по наблюдению этого макроскопического квантового эффекта повторили в более усложненном виде Уитмор и Цим-

мерман [23] и обнаружили циркуляции с квантами, кратными величине  $h/m$ .

Другой цикл экспериментальных работ, сыгравших исключительную роль в ранних исследованиях квантовых вихрей, связан с исследованиями динамики вихревых колец, создаваемых быстро движущимися ионами. Из классической гидродинамики известно, что вихревые кольца являются весьма информативными объектами для изучения вихревых течений (см., например, книгу Лэмба [24]). Так, скорость вихревого кольца  $V_{ring}$  радиуса  $R$  с толщиной ядра  $a_0$  направлена перпендикулярно его плоскости и равна

$$\mathbf{V}_{ring} = \frac{\kappa}{4\pi R} \ln \frac{R}{Ca_0}. \quad (1.15)$$

Константа  $C$  связана со структурой вихревого ядра (например, твердотельное вращение или полый вихрь), различные конфигурации обсуждены во многих учебниках по классической гидродинамике (см., например, монографию Алексеенко и др. [25]). Формула (1.15) сыграла большую роль в экспериментальном подтверждении гипотезы вихревых нитей. Дело в том, что электрические заряды — ионы при движении могут образовывать вихревые кольца, размер которых пропорционален кинетической энергии ионов. После образования колец связанная пара ион — кольцо движется в соответствии с формулой (1.15). Экспериментально скорость движения ионов может быть определена из измерения электрического тока. Результат соответствующих измерений, выполненных Рейфилдом и Райфом, изображен на рис.1.5. Теоретическая кривая построена по формуле (1.15), где  $\kappa = h/m_{He}$ ,  $a_0 = 1,3 \text{ \AA}$ . Константа  $C$  выбрана для случая твердотельного вращения ядра (вихрь Лэмба). Отчетливо видно совпадение экспериментальных результатов с теоретической формулой. Это совпадение является убедительным доказательством того, что энергичные ионы в He II могут создавать вихревые кольца. Заметим, что без привлечения гипотезы о создании вихрей результаты выглядят парадоксально. Действительно, из графика следует, что чем больше энергия влетающего иона, тем с меньшей скоростью он движется. Без концепции вихревой нити объяснить, почему скорость ионов уменьшается с их энергией, было бы невозможно. Особого внимания заслуживает подтверждение того, что циркуляция  $\kappa$  равна:  $\kappa = h/m_{He}$ . Это, несомненно, подтверждает гипотезу Онзагера и Фейнмана о квантовых вихрях.

Из других динамических величин, характеризующих вихревые кольца (помимо скорости), представляет интерес энергия  $E_{ring}$  и

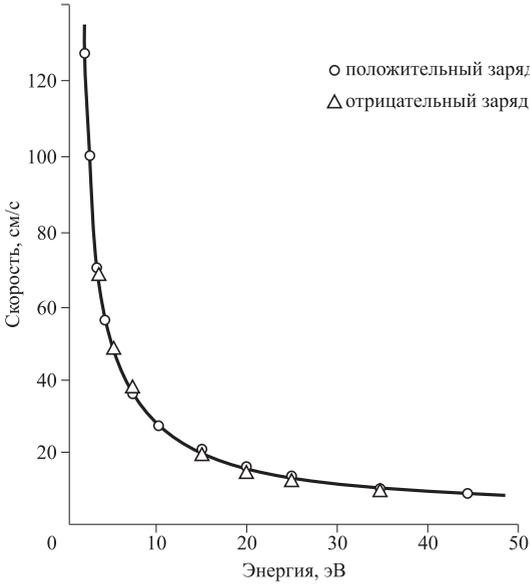


Рис. 1.5. Зависимость скорости ионов в He II от их энергии.

Кривая вычислена согласно формуле (1.15) в предположении, что ион связан с одиночным квантованным вихревым кольцом, радиус сердцевинки которого равен  $a_0 = 1,3 \text{ \AA}$ . Рисунок взят из статьи [26]

импульс  $\mathbf{P}_{ring}$  вихрей. Энергию можно (с некоторыми оговорками) определить как интеграл от квадрата скорости 1.7. Так, энергия вихревого кольца радиуса  $R$  приблизительно (в зависимости от модели) равна

$$E_{ring} = \frac{\rho_s \kappa^2 R}{2} \ln \frac{R}{Ca_0}. \quad (1.16)$$

Ситуация с импульсом несколько сложнее. Дело в том, что при обычном определении импульса как полного потока массы  $\int \rho_s v_s d\mathbf{r}$  соответствующий интеграл расходится на больших расстояниях. Обычно в теории вихревых движений оперируют с так называемым импульсом Лэмба (определение см. далее, в следующей главе). Для кольца радиуса  $R$  импульс Лэмба  $\mathbf{P}_{ring}$  равен (в направлении движения)

$$\mathbf{P}_{ring} = \rho_s \kappa \pi R^2. \quad (1.17)$$

В первой части монографии [5] обсуждался критерий Ландау (см. формулу (2.2)), определяющий критическую скорость для рождения квазичастиц и начала диссипации. Если применить этот критерий, именно  $V_{cr} = E(P)/P$  для вихревых колец, и использовать в качестве радиуса кольца  $R$  размер канала  $D$ , то можно получить, что

$$V_{cr} = \frac{\kappa}{2\pi D} \ln \frac{D}{Ca_0}. \quad (1.18)$$

Этот результат дает близкие к реальным критическим скоростям значения и указывает на то, что природа разрушения сверхтекучести связана с квантовыми вихрями. Мы, разумеется, привели здесь только общую идеологию. В действительности имеется громадное число различных нюансов и усложнений, и исследование обсужденных вопросов проводится вплоть до настоящего времени.

Еще одна область исследований и приложений теории квантовых вихрей, давшая большую серию классических результатов, — это исследования во вращающемся гелии (ранние работы представлены в обзоре [9]). Причем диапазон исследований огромен — от одиночных вихрей и вихревых решеток до запутанных клубков вихревых нитей (квантовая турбулентность).

Обсудим условие потенциальности сверхтекучего движения  $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$  и не вовлечение сверхтекучей компоненты гелия во вращательное движение (см. [5]) с термодинамической точки зрения (см., например, [27, 28]). Условием термодинамического равновесия является минимальность величины

$$F_{rot} = E - \mathbf{M}\Omega. \quad (1.19)$$

Здесь  $E$  и  $M$  — энергия и момент импульса системы относительно неподвижной системы координат. При достаточно больших скоростях вращения  $\Omega$  безвихревое состояние с  $\mathbf{M} = 0$  становится термодинамически невыгодным. Таким образом, должно возникнуть вихревое движение, и, в соответствии с идеями Фейнмана [13] и Онзагера [12], это состояние возникает в виде квантовых вихрей. Заметим, что данное термодинамическое рассмотрение не дает никаких конкретных сценариев для появления вихрей.

Предполагая, что возникшие вихревые нити являются прямыми линиями, параллельными оси вращения, легко посчитать энергию и момент импульса этих нитей. Так, энергия одиночной нити в сосуде радиуса  $R$  и высоты  $H$  может быть вычислена с помощью формулы (1.6) для аксиальной скорости

$$E_{cyl} = \frac{1}{2} \int \rho_s v_s^2 d^3 r = \frac{\rho_s \kappa^2 H}{4\pi} \ln \frac{R}{Ca_0}. \quad (1.20)$$

Подобным образом вычисляется момент импульса этой нити:

$$\mathbf{M} = \rho_s \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}_s d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \rho_s \kappa H R^2. \quad (1.21)$$

Термодинамический потенциал  $F_{rot}$  (1.19) обращается в нуль при значении скорости углового вращения  $\Omega_{cr}$ , равной

$$\Omega_{cr} = \frac{\kappa}{2\pi R^2} \ln \frac{R}{Ca_0}. \quad (1.22)$$

Для типичных значений радиуса  $R = 1$  см,  $\Omega_{cr} \sim 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>, т. е. очень низкая. Это означает, что при “обычных” экспериментах легко возникают вихревые нити. И, наоборот, чтобы реализовать безвихревое движение, требуются специальные усилия.

Аналогичные вычисления для двух, трех и большего количества вихрей приводят к другим критическим скоростям вращения. Они изменяются дискретно, что является следствием квантованности вихревого движения в сверхтекучем гелии. Таким образом, при ускорении вращения сосуда со сверхтекучим гелием следует ожидать дискретной реакции системы, связанной с последовательным появлением вихревых нитей. Один из первых экспериментов, где такое поведение действительно наблюдалось, был выполнен Паккардом и Сандерсом [29]. Авторы провели измерение электрического тока ионов, проходящих сквозь гелий, во вращающемся с небольшим ускорением сосуде. Было продемонстрировано, что ток имеет ступенчатую структуру, связанную с образованием одиночных квантованных вихрей.

Другим важным случаем вихрей во вращающемся гелии являются вихревые решетки. Если вернуться к эксперименту Осборна [8] по измерению глубины мениска, то “отрицательный” результат может быть объяснен тем, что в сверхтекучей компоненте вращающегося гелия возникает строй прямолинейных вихревых нитей. Наведенная ими суммарная циркуляционная скорость сверхтекучей компоненты является точно такой, чтобы имитировать полное вращение жидкости. Схематически это изображено на рис. 1.6.

Можно видеть, как строй нитей пронизывает гелий II. Нетрудно подсчитать количество нитей, необходимое для того, чтобы организовать такую имитацию вращения. Проще всего это сделать, вос-

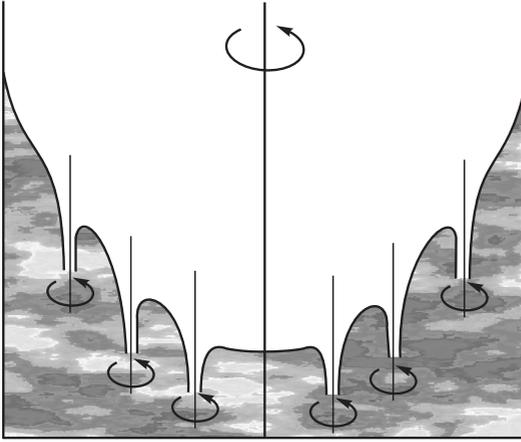


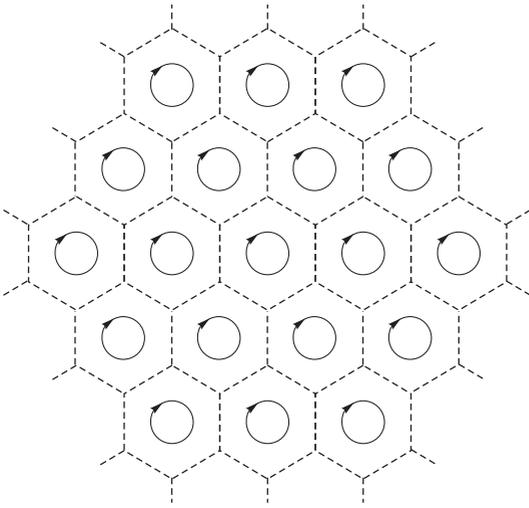
Рис. 1.6. Расположение вихревых нитей во вращающемся He II. Рисунок взят из книги Тилли и Тилли [1]

пользавшись теоремой Стокса (см. 1.8). Полагая, что каждый квантовый вихрь (находящийся в точке  $\mathbf{r}_0$ ) создает поле завихренности, равное  $\kappa\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  — двумерная дельта-функция, можно получить, что суммарная циркуляция (с точностью до множителя  $\kappa$ ) совпадает с числом нитей  $N$ .

По теореме Стокса, это значение должно получаться вычислением двумерного интеграла от завихренности  $\nabla \times \mathbf{v}_s$ . Последнюю можно определить, принимая, что средняя (по распределению вихрей) сверхтекучая скорость  $\langle \mathbf{v}_s \rangle$  удовлетворяет условию твердотельного вращения  $\langle \mathbf{v}_s \rangle = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Величина  $\nabla \times \mathbf{v}_s$  в этом случае равняется просто  $2\boldsymbol{\Omega}$ , и, следовательно, двумерный интеграл равен  $2\boldsymbol{\Omega}S$ , где  $S$  — площадь поверхности, натянутой на контур. Отсюда немедленно следует известная формула Фейнмана для плотности  $n$  вихревых нитей во вращающемся сосуде

$$n = \frac{2\Omega}{\kappa}. \quad (1.23)$$

Если применить данное рассуждение не ко всему сосуду, а локально, к какой-то его части, то можно заключить, что плотность распределения будет равномерной по всей поверхности. Формула Фейнмана (1.23) показывает, что число нитей автоматически подстраивается под скорость вращения. Поэтому, если вращение ускорять или замедлять, то число вихревых нитей будет меняться. Изменение числа



*Рис. 1.7.* Схематическая картина распределения вихревых нитей во вращающемся сосуде со сверхтекучей жидкостью. Вихри (если смотреть сверху) образуют строгую треугольную решетку — так называемую решетку Ткаченко. Такая картина наблюдается во вращающейся системе координат. Рисунок взят из книги Тилли и Тилли [1]

вихрей, например их уменьшение, связано с выходом вихрей на боковую стенку сосуда. При этом вихри передают момент импульса стенкам сосуда, который при этом резко ускоряется. Данный сценарий используется в качестве гипотезы для объяснения так называемых глитчей — периодических ускорений нейтронных звезд (пульсаров).

Обсудим еще один вопрос, связанный с квантовыми вихрями во вращающемся гелии, а именно, каким образом распределены вихревые нити. Тщательный теоретический анализ, выполненный Ткаченко [30], показал, что вихри (если смотреть сверху) образуют строгую треугольную решетку — так называемую решетку Ткаченко, схематично изображенную на рис. 1.7.

Именно такая конфигурация является устойчивой и термодинамически выгодной. Более того, эта решетка обладает определенной упругостью. Это означает, что если сдвинуть часть вихрей, то возникнут распространяющиеся волны — так называемые волны Ткаченко. Исследованию вихревых решеток посвящено большое коли-

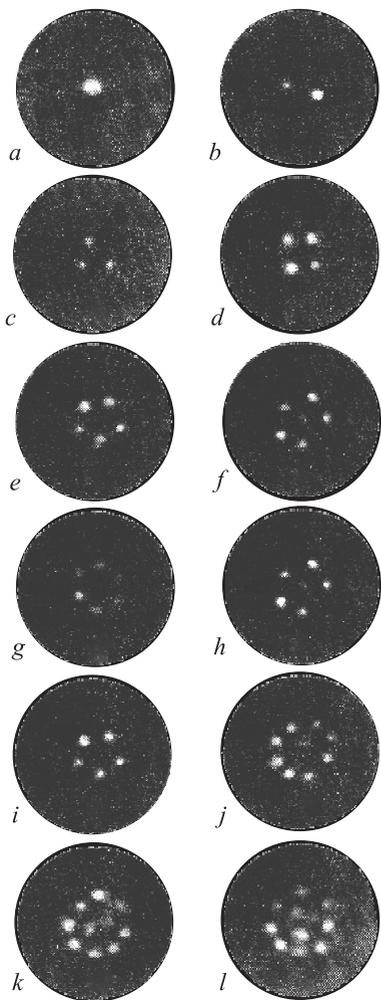
чество работ, изложение можно найти в книгах [1, 2, 4]. Имеются экспериментальные наблюдения стационарных вихревых линий во вращающемся сверхтекучем гелии. Так, в работе Yarmchuk et al. [31] были определены позиции квантованных вихревых линий во вращающемся сверхтекучем гелии. На фотографиях 1.8 изображены стационарные массивы вихрей. Основной метод, используемый для того, чтобы записать положение линии, состоит в использовании ионов, которые захватываются вихревыми линиями. Электрическим полем захваченные ионы извлекаются на свободную поверхность и отображаются на люминофорном экране.

В начале этой главы было сказано, что два эксперимента послужили основой для создания теории квантовых вихрей. Первый связан с вращением сверхтекучего гелия, мы разобрали подробно этот парадокс. Второй эксперимент был связан с резким возникновением градиента температуры в противотоке сверхтекучего гелия (см. рис. 3.1 в первой части книги [5]). Парадокс объясняется также с позиции концепции вихревых нитей, но ситуация несколько сложнее чем в случае вращающегося гелия, где вихри выстраиваются вдоль оси вращения. В случае противотока нет никакой оси симметрии и вихревые нити образуют хаотическую структуру — так называемый вихревой клубок. Это состояние обычно называют сверхтекучей, или квантовой турбулентностью. Вихревые нити, образующие вихревой клубок, создают препятствие для свободного сечения нормальной компоненты, так называемую силу взаимного трения. Преодоление действия этой силы требует больших перепадов температуры, свойство теплопроводности значительно подавляется, а линейная зависимость между  $\nabla T$  и  $Q_{heat}$  заменяется следующей:

$$\nabla T = \frac{A(T)\rho_n}{\sigma^4 \rho_s^3 T^3} Q_{heat}^3. \quad (1.24)$$

Здесь  $A(T)$  — величина, называемая константой Гортера — Меллика. Также возникают нелинейные отклонения градиента давления  $\nabla p$ . Описанная ситуация изображена на рис. 1.9. Подробно вопросы, связанные с вихревыми клубками, будут обсуждены далее.

Мы описали некоторые ключевые классические эксперименты, подтверждающие концепцию квантованных вихрей в сверхтекучих жидкостях. Большинство этих экспериментов было проведено практически параллельно с пионерскими теоретическими исследованиями. В последнее время, однако, в связи с мощным развитием экспери-



*Рис. 1.8.* Фотографии устойчивых вихревых решеток при различных угловых скоростях. Рисунок взят из статьи [31]

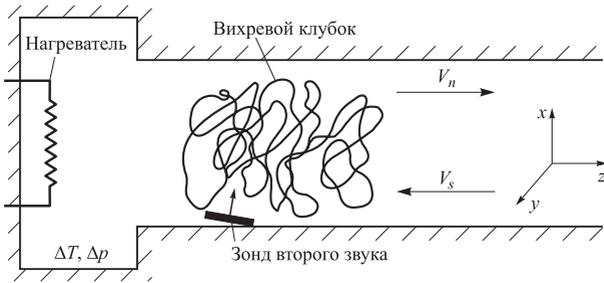


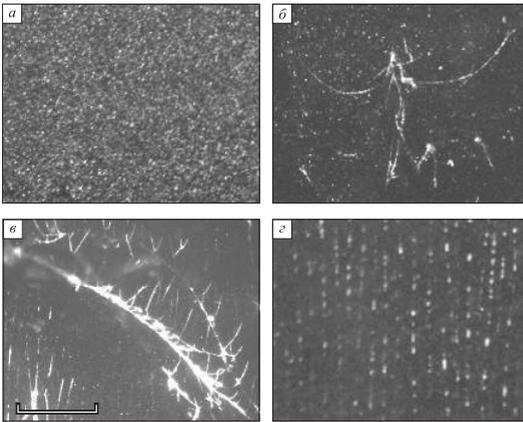
Рис. 1.9. Иллюстрация турбулентного противотока в He II. При превышении критических скоростей возникают квантовые вихри, которые образуют хаотическую структуру — вихревой клубок. Датчик второго звука служит для регистрации квантовых вихрей

ментальной техники был выполнен ряд эффектных экспериментов, демонстрирующих природу этого явления.

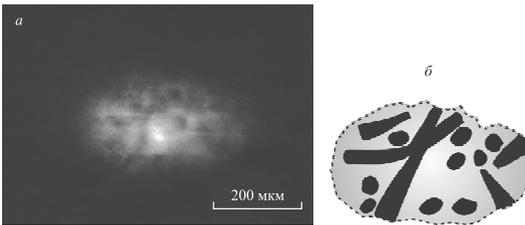
Первая серия из этих экспериментов связана с визуализацией потоков гелия при температурах выше и ниже  $\lambda$ -перехода. Классическим примером такого эксперимента является работа Bewley et al. [32], результаты представлены на рис. 1.10. Визуализация осуществлялась с помощью индикаторов — частиц твердого водорода (tracers), имеющих плотность, близкую к плотности гелия. Эти частицы захватывались ядрами вихревых нитей, и по их концентрации можно проследить как существование вихрей, так и их динамику

Другим примером визуализации вихревых нитей являются исследования слабо взаимодействующих газов Бозе — Эйнштейна. Примером такой деятельности могут быть измерения оптической плотности бозе-газов, в которых наблюдаются линии с аномально низкой плотностью, эти линии ассоциируются с вихревыми нитями (см. рис. 1.11 из работы Henn et al. [33]).

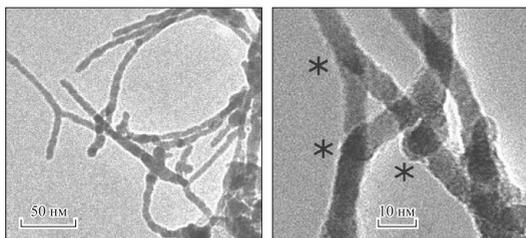
Недавно была проведена серия элегантных экспериментов по коалесценции примесей в сверхтекучем He II [34, 35]. Особое внимание уделено обнаруженному в последние годы явлению катализа коалесценции примесей, введенных в сверхтекучий гелий, с возбужденными в нем квантованными вихрями. Наличие вихрей не только во много раз ускоряет конденсацию любых введенных в гелий веществ, но и приводит к образованию совершенно нового продукта — длинных и тонких нанонитей. Образец таких нанонитей изображен на рис. 1.12.



*Рис. 1.10.* Изображения частиц-индикаторов (светлые точки на темном фоне), полученные с помощью камеры при различных условиях: *а* — чуть выше температуры  $\lambda$ -перехода, когда они равномерно распределены; *б, в* — при температурах около 10 мК ниже температуры  $\lambda$ -перехода, когда индикаторы, захваченные вихревыми линиями, образуют одномерные структуры; *г* — частицы-индикаторы перегруппированы вдоль вертикальных линий для стационарного вращения вокруг вертикальной оси. Размер светлой палочки на рис. *а* равен 1 мм. Рисунок взят из статьи [32]



*Рис. 1.11.* *а* — атомная оптическая плотность в конденсате Бозе — Эйнштейна, после 15 мс свободного расширения демонстрирующая наличие вихревых структур (темные области). Вихревые нити распространились по всему образцу, они напоминают режим вихревого клубка; *б* — схематическая диаграмма, показывающая распределение вихрей, полученная из изображения на рис. *а*. Рисунок взят из статьи [33]



*Рис. 1.12.* Металлические нанопроволоки, полученные в квантованных вихрях сверхтекучего гелия. Фрагмент пучка нанопроволок свинца, перенесенный на подложку (слева), и его детали при большем увеличении, демонстрирующие участки, похожие на точечные контакты (отмечены звездочками, справа). Рисунок взят из статьи [34]

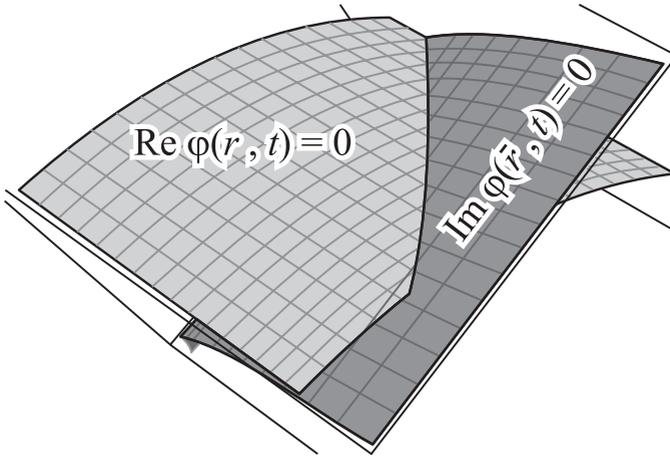
Таким образом, мы представили исторический обзор, описывающий возникновение и развитие теории квантовых вихрей. Данный текст также может быть рассмотрен как введение в этот предмет. Для интересующихся более подробными деталями изложенных вопросов можно рекомендовать литературу [1–4].

## 2. Вихревые линии в квантовых жидкостях: динамика и структура

В этой главе будут описаны свойства и динамика вихревых линий в  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He-B}$ , а также в конденсате Бозе — Эйнштейна. По сути дела, будут изложены различные аспекты математического формализма для теоретической работы с квантовыми вихрями. Конечно, изложенный здесь математический формализм является универсальным аппаратом, но мы будем представлять материал, имея в виду постановку задачи стохастического поведения набора вихревых нитей. По этой причине будут часто упоминаться такие термины, как квантовая турбулентность или вихревой клубок.

Математический формализм состоит из описания структуры и динамики квантованных вихрей, рассматриваемых как очень тонкие трубки, зачастую просто линии. Динамика этих трубок включает в себя следующие основные ингредиенты. Это, во-первых, динамика свободных трубок, которая определяется с помощью закона Био — Савара. Далее, учитываются взаимодействие с внешним потоком и граничные эффекты. В квантовых жидкостях имеется специфический вклад в динамику вихрей, связанный со взаимодействием с нормальной компонентой. Динамика квантованных вихрей также включает в себя процесс реконнекции, когда две линии пересекаются и перезамыкаются, изменяя, таким образом, топологию системы. Наконец, стохастический подход требует рассмотрения происхождения хаоса, изучения неустойчивостей, введения внешних случайных сил, развития сингулярностей и т. д. В этой главе мы также представим ряд математических соотношений, описывающих геометрические и динамические свойства ансамбля вихревых нитей.

Изучение квантовых вихрей и вихревой динамики может осуществляться либо на основе метода вихревых нитей (МВН), либо с использованием уравнения Гросса — Питаевского (GPE), описывающего квантовые вихри в конденсате Бозе — Эйнштейна. В первом методе вихревые нити рассматриваются как бесконечно тонкие трубки или линии. Такую линию можно описать параметрически с помощью функции  $\mathbf{s}(\xi, t)$ , где  $\mathbf{s}$  — радиусы-векторы точек линии, а параметр  $\xi$  “пересчитывает” точки линии, часто величина  $\xi$  является параметром длины дуги (см. рис. 1.2). Набор линий  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$  эволюционирует, подчиняясь уравнениям движения (вывод уравнений см. далее) и граничным условиям. Кроме этой детерминистской эволюции имеется еще один, стохастический, элемент динамики — это



*Рис. 2.1.* Схематическое изображение вихревой линии как топологического дефекта. Вихревая линия представляет собой геометрическое место точек, где значение макроскопической волновой функции (как реальной, так и мнимой части) обращается в нуль

случайные столкновения нитей друг с другом с последующим пере-замыканием или реконнекцией (reconnection). Важно отметить, что в этом методе изучается эволюция уже существующих вихрей. Первоначальное рождение вихрей не рассматривается, некоторый набор линий (иногда в виде вихревых зародышей) задается в качестве начального условия.

В случае теории конденсата Бозе — Эйнштейна исследуется эволюция макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , которая изучается на основе уравнения Гросса — Питаевского (см. например, первую часть монографии [5]). Вихревые линии (точнее, центральные линии вихря) являются геометрическим местом пересечения поверхностей  $Re\psi(\mathbf{r}, t) = 0$  и  $Im\psi(\mathbf{r}, t) = 0$  (см. рис. 2.1) (из соображений удобства мы воспроизвели рис. (9.7) из первой части монографии [5]). Таким образом, проследив эволюцию нулей функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , возможно описать эволюцию вихрей. В отличие от метода вихревых нитей, первоначально квантовые вихри могут отсутствовать, они возникают спонтанно в

процессе эволюции, например, из состояния с флуктуирующей фазой при фазовом переходе (см., например, статью Berloff & Svistunov [36]) или при течении бозе-газа вблизи твердой стенки (см., например, Frisch et al. [37]). Конечно, метод изучения динамики вихрей, основанный на уравнении Гросса — Питаевского, прежде всего предназначен для реального объекта — слабо неидеальных газов Бозе — Эйнштейна, открытых сравнительно недавно. Вместе с тем такой подход очень часто используется для изучения (или, точнее говоря, для иллюстрации) некоторых проблем динамики вихревых линий в  $^4\text{He}$  или  $^3\text{He-B}$ . Примерами изучения динамики вихрей, основанной на уравнении Гросса — Питаевского, могут быть, например, определение структуры вихря или проблема перезамыкания.

В силу того, что квантовые линии являются геометрическим местом точек обращения в нуль макроскопической волновой функции, они также называются топологическими дефектами. Другими примерами топологических дефектов, встречающихся в физике, могут служить дислокации в твердом теле, точечные вихри в двумерной гидродинамике или космические струны.

## 2.1. Вихревая динамика: Уравнения движения

### 2.1.1. Движение линий в квантовых жидкостях

В этом разделе мы проведем вывод уравнений движения вихревых нитей для сверхтекучего гелия.

Имея поле завихренности, выраженное формулой (1.9), можно легко восстановить поле скоростей сверхтекучей компоненты  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ , индуцируемое вихревой линией. Поле  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  выражается известным законом Био — Савара

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \oint \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi', t)) \times \mathbf{s}' d\xi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi', t)|^3}, \quad (2.1)$$

где интеграл следует принимать вдоль линии  $\mathbf{s}(\xi', t)$ , здесь аргумент  $\xi'$  — произвольный параметр, “пересчитывающий” точ-

ки линии. Удобно в качестве параметра  $\xi$  выбирать длину дуги, формально из-за того, что тангенциальный вектор  $\mathbf{s}'$  в этом случае равен единице. Из (2.1) следует, что бесконечная прямая линия, направленная вдоль оси  $z$ , индуцирует поле скоростей  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ , определяемое соотношением (1.7), — результат, полученный ранее из других соображений.

Как обсуждалось в предыдущей главе, закон (2.1) становится несправедливым на малых расстояниях  $a_0$  от оси вихревой нити. Эта величина рассматривается как радиус ядра (сердцевины) вихревой трубки. Поскольку точной микроскопической теории сверхтекучего гелия не имеется, основные сведения о структуре вихревой нити были получены в результате косвенных рассуждений. Так, например, имеется наблюдение, что в  $r \leq a_0$  скорость  $v_s$  становится больше, чем критическая скорость Ландау для рождения ротоннов (см. комментарии в статье Glaberson [38] или в книге Donnelly [2]). Из этих соображений можно оценить, что радиус ядра составляет величину  $a_0 \approx 0,3$  нм. Hills и Roberts [39, 40, 41] описали структуру вихревой линии без использования модели слабо взаимодействующего бозе-газа. В их феноменологической теории сверхтекучая плотность  $\rho_s$  используется в качестве независимой переменной. Качественно это решение аналогично решению уравнения Гросса — Питаевского (см. предыдущую главу, а также гл. 9 в первой части монографии [5]). Hills и Roberts [39, 40, 41] получили, что радиус ядра  $a_0$  близок к экспериментально найденному значению — около  $0,1 \div 0,2$  нм. Существенную информацию о вихревой структуре, полученную в многочисленных экспериментах и феноменологических теориях, можно найти в книге Donnelly [2].

Вблизи  $\lambda$ -перехода, где сверхтекучая плотность мала, можно использовать подход Ландау — Гинзбурга. Динамика параметра порядка подчиняется уравнению типа Гросса — Питаевского с коэффициентами, зависящими от температуры. Соответственно, это уравнение также имеет вихревое решение типа описанного в предыдущей главе. Размер радиуса ядра вихря, однако, вычисленный из комбинации коэффициентов, состав-

ляет величину порядка корреляционной длины и быстро растет, когда  $T \rightarrow T_\lambda$ . Подробности вихревой структуры вблизи  $\lambda$ -перехода описаны в обзоре Гинзбурга и Собянина [42].

Применяя закон Био — Савара (2.1) для точек, лежащих на кривой  $\mathbf{s}(\xi, t)$ , можно получить уравнение движения элементов вихревой линии

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)] \times \mathbf{s}'_{\xi'}}{|\mathbf{s}(\xi', t) - \mathbf{s}(\xi, t)|^3} d\xi'. \quad (2.2)$$

Интеграл (2.2) расходится при  $\mathbf{s}(\xi', t) \rightarrow \mathbf{s}(\xi, t)$ , что требует дополнительных условий, налагаемых на  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t)$ . Решение этой проблемы тесно связано с вопросом внутренней структуры вихревой линии. Соответствующие исследования в случае вихревых трубок в классических жидкостях широко описаны в литературе (см., например, Саффман [43] или Алексеенко, Куйбин, Окулов [25]). Поскольку интеграл (2.2) расходится логарифмически, т. е. слабо, один из самых простых, широко используемых методов устранить расходимость состоит в том, чтобы ввести конечный радиус ядра  $a_0$  и заменить знаменатель в (2.2) на:

$$|\mathbf{s}(\xi') - \mathbf{s}(\xi)| \rightarrow \left( (\mathbf{s}(\xi') - \mathbf{s}(\xi))^2 + a_0^2 \right)^{1/2}.$$

Более тонкие подходы учитывают распределение скоростей внутри ядра, которое рассчитывается либо из уравнений Навье — Стокса, либо из уравнений Эйлера с учетом распределения давления. Часто классические вихревые трубки моделируются либо равномерным распределением завихренности, либо распределением Гаусса, либо вообще исследуются полые трубки. Описание и сравнение различных методов, используемых для сглаживания ядра в формуле Био — Савара (2.2) для вихревых трубок в классических жидкостях, предлагается в книге Sethian [44]. Различные модели вихревого ядра приводят к различным полям скоростей  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t)$ , но они близки друг к другу, а разница между ними уменьшается логарифмически с радиусом сердцевинки, как  $1/\ln a_0$ . В контексте сверхтекучих вихрей

вопрос регуляризации сингулярного ядра в интеграле (2.2) обсуждается в работах Kivotides et al. (см., например, [45–47]). В дальнейшем мы будем использовать в качестве параметра обрезания радиус сердцевины  $a_0$ , предложенный Hills и Roberts [39, 40, 41].

Другой проблемой, связанной с регуляризацией интеграла Био — Савара (2.2), является поведение радиуса сердцевины,  $a_0$ , в процессе растяжения вихревых трубок. В большинстве работ, посвященных классическим вихрям, предполагается сохранение объема вихревой трубки. Это накладывает функциональную связь между величиной  $a_0$  и параметром  $\xi$ , т. е.  $a_0 = a_0(\xi)$ . Такое ограничение не может быть наложено на  $a_0$  в случае сверхтекучих жидкостей, поскольку по квантовомеханическим причинам радиус ядра вихря остается постоянным. В статье Агиштейна и Мигдала [48, 49] было отмечено, что введение радиуса обрезания, зависящего от параметра  $\xi$ , нарушает параметрическую инвариантность уравнения движения вихревой линии. Под параметрической инвариантностью понимается эквивалентность описания динамики вихревой линии при преобразовании от переменной  $\xi$  к другой переменной, монотонно зависящей от  $\xi$ .

Закон Био — Савара (2.2) движения вихревой линии элементов чрезвычайно сложен как для аналитического, так и для численного исследования. Действительно, в первую очередь, закон Био — Савара не локален, движение любого элемента, зависит от конфигурации всей вихревой линии. Во-вторых, он существенно нелинейный с нелинейностью в знаменателе. В-третьих, ядро интеграла имеет сингулярность при  $\mathbf{s}(\xi', t) \rightarrow \mathbf{s}(\xi, t)$ . Очень популярным подходом для упрощения закона Био — Савара (2.2), широко используемым как в теории тонких вихревых трубок (в классической гидродинамике), так и в теории квантовых вихревых нитей, является так называемое приближение локальной индукции (local induction approximation — LIA). В классической гидродинамике этот метод обычно приписывается Нама [50], хотя (как было отмечено Ricca [51]) он был использован ранее в работе Rios [52]. Для

квантовых вихрей подробная схема описана в статье Schwarz [53]. Приближение локальной индукции часто используется в численном моделировании динамики вихревой линии, в том числе в случае сверхтекучей турбулентности.

Опишем кратко подход, предложенный Schwarz [53]. Для этого разложим величину  $\mathbf{s}(\xi') - \mathbf{s}(\xi)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $\xi$ :  $\mathbf{s}(\xi') - \mathbf{s}(\xi) = \xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots$ . Это выражение продифференцируем по  $\xi$ :  $d\mathbf{s}(\xi')/d\xi = \mathbf{s}' + \xi \mathbf{s}'' + \dots$  и подставим полученный результат в уравнение (2.2):

$$\mathbf{v}_B = \frac{\tilde{\kappa}}{4\pi} \oint_L \frac{(\xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots) \times (\mathbf{s}' + \xi \mathbf{s}'' + \dots)}{|\xi \mathbf{s}' + \xi^2 \mathbf{s}''/2 + \dots|^3} d\xi. \quad (2.3)$$

Пренебрегая в этом уравнении производными высших порядков, получим самоиндуцированную скорость вихревой точки  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t)$  в локальном приближении:

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''}{|\mathbf{s}'|^3} \int \frac{d(\xi - \xi')}{(\xi - \xi')} + \text{nonlocal terms}. \quad (2.4)$$

Интеграл (2.4) логарифмически расходится как на верхнем, так и на нижнем пределе интегрирования. Что касается расходимости на нижнем пределе, здесь можно поступить так же, как и в полном законе Био — Савара (2.2) — путем введения радиуса  $a_0$  вихревого ядра. В качестве верхнего предела представляется естественным использовать радиус кривизны  $R$  вихревой линии в точке  $\xi$ . В случае детерминированного движения эта величина более или менее известна. В задаче стохастического клубка, где кривизна сложным образом флуктуирует вдоль линии, эта проблема является более сложной, и параметр обрезания на верхнем пределе не фиксирован, а зависит от решения задачи. Обычно при исследовании квантовой турбулентности выбирают средний радиус кривизны  $\langle R \rangle$ , который составляет величину порядка среднего расстояния  $\delta$  между вихрями. Окончательно основной вклад в движение линии, определяемый первым членом в правой части соотношения (2.4), имеет вид

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \beta \frac{\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''}{|\mathbf{s}'|^3}, \quad (2.5)$$

где

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{c < R >}{a_0}. \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) величина  $c$  (порядка единицы) является неким подгоночным параметром, используемым в численном моделировании. Напомним, что вектор  $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''/|\mathbf{s}'|^3$  направлен вдоль бинормали и его значение равно радиусу кривизны в рассматриваемой точке (см. рис. 1.2). Что касается нелокальных членов, то они, в соответствии с выполняемой процедурой, меньше локального на порядок величины  $\ln(c < R > /r_0)$ . Как правило, для вихревого клубка в сверхтекучем гелии значения  $\ln(c < R > /r_0)$  составляют величину порядка 10. Schwarz [53] заметил, что локальное приближение справедливо с точностью в 90 %, за исключением случаев, когда две вихревые линии очень близко подходят друг к другу или когда линия приближается к границе. Такие случаи должны рассматриваться отдельно на основании полного закона Био — Савара (2.2). Тем не менее проблема является более сложной, так как пренебрежение малыми нелокальными слагаемыми сопровождается отбрасыванием очень важного эффекта — процесса растяжения вихревой нити вследствие нелокальных эффектов. Движение под действием только локального члена не изменяет длину нити. Роль приближения локальной индукции в квантовой турбулентности будет обсуждаться далее. Логарифмическая коррекция к скорости движения вихревых нитей наблюдалась в экспериментах Swanson и Donnelly [54]. Тем не менее, из-за слабой логарифмической расходимости, величина  $\beta$  часто предполагается постоянной для типичных экспериментов  $\beta$  порядка величины кванта циркуляции  $\kappa$ .

Скорость линии вихря,  $\dot{\mathbf{s}}_i$ , заданная с помощью полного закона Био — Савара (2.2) или формулой локального приближения (2.5), может изменяться под воздействием внешнего потока —  $\mathbf{v}_s$ . Другая очевидная поправка  $\mathbf{v}_{s,b}$  должно быть внесена,

когда вихревая линия приближается к границе. Соответствующая коррекция  $\mathbf{v}_{s,b}$  зависит от формы границы и, в частности, от шероховатостей на ней. Принимая во внимание эти поправки, запишем скорость вихревой линии в виде

$$\dot{\mathbf{s}}_s = \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{s,b}. \quad (2.7)$$

Следующим важным фактором, который определяет динамику вихревых линий и который мы сейчас обсудим, является взаимодействие между квантовыми вихрями и нормальной компонентой. Этот феномен является специфическим для квантовых жидкостей и не имеет никакой аналогии в теории вихревых трубок в классических жидкостях. Как описано в первой части монографии [5], движение нормальной компоненты представляет собой просто дрейф квазичастиц — фононов и ротонов, которые образуют эту компоненту. Энергия этих квазичастиц зависит от сверхтекучей скорости  $\mathbf{v}_s$  (точнее, от относительной скорости  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ ) и поэтому является сильно изменяющейся функцией вблизи линии вихря. Другими словами, существует эффективный потенциал, описывающий взаимодействие между квазичастицами и вихревой линией. Это взаимодействие приводит к рассеянию квазичастиц на вихревой линии во время относительного движения, и, соответственно, обмену импульсом.

Таким образом, появляется сила взаимодействия, называемая взаимным трением. Соответствующая теория полностью описана во многих книгах и обзорах (см., например, книгу Donnelly [2], обзор Varenghi et al. [55] а также недавнюю книгу Сони́на [56]). Мы приведем здесь только результаты, важные для описания динамики вихревых линий. Сила  $\mathbf{f}_D$ , действующая на вихревую нить, зависит от относительной скорости  $(\mathbf{v}'_n - \dot{\mathbf{s}})$ , где  $\mathbf{v}'_n$  — скорость нормальной компоненты вблизи нити, а  $\dot{\mathbf{s}}$  является скоростью вихревой линии, которая не совпадает с введенной ранее скоростью свободного движения  $\dot{\mathbf{s}}_s$  именно вследствие силы, действующей на нить. Вектор  $\mathbf{f}_D$  зависит также от ориентации вихревой нити, тангенциального

вектора  $\mathbf{s}'$ . В общем виде сила  $\mathbf{f}_D$ , действующая на единицу длины вихревой линии, может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{f}_D = D_1 \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}'_n - \dot{\mathbf{s}})] + D_2 \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}'_n - \dot{\mathbf{s}}). \quad (2.8)$$

Имеется множество работ, посвященных расчету коэффициентов  $D_1$ ,  $D_2$ . Есть также много работ, относящихся к различным методам их экспериментального определения (см., например, Varenghi [55]; Donnelly [2]). Эти коэффициенты зависят не только от термодинамических величин, таких как давление и температура, но также (слабо) от скоростей  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  (см. Swanson et al. [57]) и их производных  $\partial \mathbf{v}_n / \partial t$  и  $\partial \mathbf{v}_s / \partial t$  [58], т. е. они не локальны во времени. Это вносит некоторую неопределенность в соотношении (2.8), но, к счастью, эти последние эффекты малы и могут рассматриваться как поправки. Скорость дрейфа квазичастиц вблизи вихревых линий обозначается  $\mathbf{v}'_n$ , и она несколько отличается от  $\mathbf{v}_n$ . В дальнейшем мы будем считать  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}'_n$ , принимая во внимание, что разница между этими величинами может быть учтена в переопределении коэффициентов  $D_1$  и  $D_2$ . Детали такой процедуры можно найти, например, в обзоре Varenghi et al. [55].

Искомой величиной является скорость движения вихревой нити  $\dot{\mathbf{s}}$ , которая, как уже говорилось, не равна величине  $\dot{\mathbf{s}}_s$  (2.7). Из классической гидродинамики известно, что если цилиндрическая область, обладающая завихренностью, движется со скоростью  $\dot{\mathbf{s}}$ , не совпадающей со скоростью движения жидкости  $\dot{\mathbf{s}}_s$ , то возникает так называемая сила Магнуса  $\mathbf{f}_M$ . В терминах введенных нами величин сила Магнуса  $\mathbf{f}_M$  (на единицу длины вихревой линии) имеет вид

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \frac{\mathbf{s}'}{|\mathbf{s}'|} \times (\dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{s}}_s). \quad (2.9)$$

Чтобы найти скорость движения вихревой нити  $\dot{\mathbf{s}}$ , необходимо сравнить силы  $\mathbf{f}_D$  (2.8) и силу Магнуса  $\mathbf{f}_M$  (2.9). Этот

метод, который является оправданным тогда, когда можно пренебречь массой цилиндра (из-за малости радиуса сердцевинки вихря), был предложен Hall и Vinen [59, 60]. Сравнивая  $\mathbf{f}_M$  и  $-\mathbf{f}_D$ , можно получить после решения векторных уравнений, что искомая величина  $\dot{\mathbf{s}}$  равна

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i) - \alpha' \mathbf{s}' \times \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i). \quad (2.10)$$

Здесь скорость  $\mathbf{v}_{s,b}$ , индуцированная краевыми эффектами, включена в общую скорость сверхтекучей компоненты  $\mathbf{v}_s$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha'$  могут быть выражены через ранее использованные коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  (см., например, [53, 61]):

$$\alpha = \frac{D_1 \tilde{\kappa} \rho_s}{D_1^2 + (D_2' - \tilde{\kappa} \rho_s)^2}, \quad (2.11)$$

$$\alpha' = \frac{D_1^2 + D_2(D_2 - \tilde{\kappa} \rho_s)}{D_1^2 + (D_2 - \kappa \rho_s)^2}. \quad (2.12)$$

Величины  $\alpha$  и  $\alpha'$  очень важны для исследования динамики вихревой нити, они являются функцией температуры  $T$  и (слабо) давления  $p$ . Как правило, они малы везде, кроме области, близкой к  $\lambda$ -точке. Величина  $\alpha'$  существенно меньше, чем  $\alpha$ , и нередко опускается в расчетах. Для того, чтобы иметь представление об основных величинах и их температурной зависимости, ниже приводится часть таблицы, предложенной в [61]:

$T$	1.07	1.26	1.62	2.01	2.15
$\alpha$	0.010	0.030	0.100	0.300	1.000
$\alpha'$	0.005	0.0125	0.016	0.010	-0.270

Полезно переписать выражение (2.8) для взаимной силы  $\mathbf{f}_{ns}$  между вихрями и нормальной компонентой (на единицу длины вихревой линии), исключив скорость  $\dot{\mathbf{s}}$  (с помощью (2.10))

$$\mathbf{f}_{ns}/\rho_s \kappa = \alpha \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i)] - \alpha' \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i). \quad (2.13)$$

Уравнение (2.10) является основным уравнением, используемым для описания различных проблем, связанных с движением вихревых линий. В частности, проблема стохастического вихревого клубка исследуется с помощью этого уравнения.

Отметим, что сама индуцированная скорость  $\dot{s}_i$  в правой части (2.10) может быть выражена в терминах полного закона Био — Савара (2.2) или с использованием приближении локальной индукции (2.5).

Описанная выше динамика вихревых линий относится в первую очередь к  ${}^4\text{He II}$ . В  ${}^3\text{He-V}$  ситуация очень похожа, однако есть некоторые различия. Так, например, коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha'$  изменяются более существенно, чем в  ${}^4\text{He II}$ , это может привести к новым эффектам. Другой разницей является то, что нормальная компонента в  ${}^3\text{He-V}$  имеет очень высокую вязкость. В небольших объемах она прикреплена к стенкам контейнеров, и нормальное движение практически отсутствует.

### 2.1.2. Движение линий в бозе-эйнштейновском конденсате

Очевидно, что в случае конденсата Бозе — Эйнштейна движение вихревых линий должно быть похожим. Действительно, гидродинамика БЭК описывается (за исключением члена с “квантовым давлением”, который замечен лишь при больших градиентах плотности) уравнениями Эйлера (см., например, раздел 9.5 в первой части монографии [5]). Поэтому движение вихревых линий при нулевой температуре должно быть идентичным динамике в случае сверхтекучего гелия и, соответственно, подчиняться уравнению (2.7). При конечной температуре, как было упомянуто выше, появляются тепловые возбуждения, и их дрейф формирует движение нормальной компоненты. Микроскопическая теория динамики БЭК при конечных температурах была разработана в серии работ Zarembo, Proukakis, Nikuni [62, 63]. Суть этого подхода заключается в том, что конденсат моделируется уравнением Гросса — Питаевского, которое объединено с кинетическим уравнением Больцмана для облака тепловых возбуждений [64]. При использовании этого формализма авторы показали, что движение вихрей совпадает с предсказанным в феноменологической модели сверхтекучего гелия и представленным выше в соотношениях (2.8), (2.10), (2.13). Таким образом, разработанный форма-

лизм разъясняет микроскопическое происхождение силы трения, действующей на вихри, и обеспечивает оценку коэффициентов трения.

Другой способ описать диссипативное движение вихрей на основе уравнением Гросса — Питаевского восходит к пионерской работе Питаевского [17] (см. также Pismen [65]). Следуя работе [17], запишем уравнение Гросса — Питаевского для макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в следующем виде (ср. с соотношением (9.19) в первой части монографии [5]):

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\Lambda + i) \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*} + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (2.14)$$

Функционал свободной энергии  $H\{\psi\}$  Гинзбурга — Ландау имеет вид

$$H\{\psi\} = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 - \mu |\psi|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi|^4 \right]. \quad (2.15)$$

Слагаемое с коэффициентом  $\Lambda$  описывает релаксационные процессы при конечных температурах, и, соответственно, эволюция должна иметь диссипативный характер. Поэтому оператор, действующий на функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в правой части уравнения (2.14), должен содержать антиэрмитову часть. Мы ввели также внешнюю силу  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , которая может быть связана, например, с потенциалом ловушки. Имея в виду исследовать стохастические процессы, мы примем здесь, что  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  — это случайная (или ланжевеновская) сила, имитирующая, например, взаимодействие с термостатом или связанная с развитием неустойчивости, что типично для турбулентности. В случае взаимодействия с термостатом тепловой шум подчиняется флуктуационно-диссипативной теореме

$$\langle \zeta(\mathbf{r}_1, t_1) \zeta^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 2k_B T \Lambda \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (2.16)$$

Перейдем к проблеме определения динамики вихрей, появляющихся в бозе-конденсате, динамика которого описывается уравнением Гросса — Питаевского (2.14). Эта проблема относится к числу общих проблем получения уравнения движения

топологических дефектов (доменных стенок, дислокаций, космических струн и т.д.) на основе нелинейной динамики полей, порождающих эти дефекты. В контексте движения вихревых нитей в квантовых жидкостях такая задача исследовалась ранее, начиная с работ Fetter [66] (см. также монографию [65]). Здесь мы предлагаем другой метод, удобный для исследования стохастических процессов.

Вихри в квантовых жидкостях представляют собой очень тонкие вихревые трубки, и их динамика аналогична динамике струн. Это подразумевает, что мы должны сосредоточить наши усилия на исключении радиальных степеней свободы. Это может быть достигнуто с помощью нижеследующей процедуры. Как уже говорилось, эволюция вихревых нитей в квантовых жидкостях определяется динамикой макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , т.е. уравнением Гросса — Питаевского (2.14). С другой стороны, если не рассматривать (на момент) внешнее потенциальное течение, можно утверждать, что все движение бозе-конденсата определено динамикой вихревых нитей. Таким образом, имеется взаимное соответствие, и макроскопическая волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  может рассматриваться как некоторый функционал полной вихревой конфигурации, т.е.  $\psi(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}(\xi, t))$ . Так, например, временная зависимость поля  $\psi(\mathbf{r}, t)$  (в некоторой точке трехмерного пространства  $\mathbf{r}$ ), связанная с движением всей вихревой конфигурацией  $\mathbf{s}(\xi, t)$ , описывается в соответствии со следующим цепным правилом

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int_{\Gamma} \frac{\delta \psi(\mathbf{r}, t)}{\delta \mathbf{s}(\xi', t)} \frac{\partial \mathbf{s}(\xi', t)}{\partial t} d\xi'. \quad (2.17)$$

Здесь и в последующем мы обозначаем индексом  $\Gamma$  контурные интегралы вдоль отдельных линий и суммирование по всем вихревым петлям.

Перейдем к выводу уравнения движения вихревых нитей. Перепишем уравнение (2.14) в следующей форме:

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*} + \frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Умножим уравнение (2.18) на  $\delta\psi^*/\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)$ , где  $\xi_0$  — некоторая выбранная точка на кривой. Складывая результат с комплексно сопряженным и интегрируя по всему пространству, имеем

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{r} \left( \frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\delta\psi^*}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \frac{\delta\psi}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} \right) = \\ & = - \int d^3\mathbf{r} \left( \frac{\delta H(\psi, \psi^*)}{\delta\psi^*} \frac{\delta\psi^*}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\delta H(\psi, \psi^*)}{\delta\psi} \frac{\delta\psi}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} \right) + \\ & + \int d^3\mathbf{r} \left( \frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\mathbf{r}, t) \frac{\delta\psi^*}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} \zeta^*(\mathbf{r}, t) \frac{\delta\psi}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} \right). \quad (2.19) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части этого соотношения (вторая строчка) выражает цепное правило для функциональной производной  $\delta H(\mathbf{s})/\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)$ , где  $H(\mathbf{s})$  — энергия бозеконденсата, выраженная через полную вихревую конфигурацию. Последовательно рассматривая вихри очень тонкими трубками (что оправдано, когда радиус кривизны  $R$  намного превышает размер кора  $a_0$ ) и пренебрегая энергиями, связанной с ядром вихря, запишем кинетическую энергию сверхтекучего движения, созданного вихрями (см., например, книги [43, 25], а также раздел 2.3.2)

$$H(\mathbf{s}) = \frac{\rho_s \kappa^2}{8\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{s}'(\xi')}{|\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi')|} d\xi d\xi'. \quad (2.20)$$

Здесь  $\mathbf{s}'(\xi)$  — тангенциальный вектор вдоль вихревой линии,  $\kappa$  — квант циркуляции равный  $2\pi\hbar/m$ . Прямое вычисление функциональной производной  $\delta H(\mathbf{s})/\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)$  ведет к результату

$$\frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0). \quad (2.21)$$

В этой главе нам удобно ввести величину  $\mathbf{B}(\xi_0)$  — скорость элемента вихревой нити в точке  $\xi_0$ , выраженную с помощью закона Био — Савара (см. (2.2))

$$\mathbf{B}(\xi_0) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')) \times \mathbf{s}'(\xi)}{|\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')|^3} d\xi'. \quad (2.22)$$

Очевидно, что  $\mathbf{B}(\xi_0)$  совпадает с ранее введенной величиной  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t)$ . Таким образом, мы записали интересующий нас интеграл в соотношении (2.19) чисто в терминах переменной  $\mathbf{s}(\xi, t)$ , описывающей вихревую конфигурацию

Перейдем к интегралу в левой части уравнения (2.19) (первая строчка в этом соотношении). Подставив соотношение (2.17) для временной производной  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  (а также комплексно сопряженное выражение (*c.c.*)) в подынтегральное выражение, мы имеем

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \int d^3 \mathbf{r} \int_{\Gamma'} \left( \frac{\delta \psi(\mathbf{r} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta \mathbf{s}(\xi', t)} \frac{\partial \mathbf{s}(\xi', t)}{\partial t} \right) \frac{\delta \psi^*(\mathbf{r} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} d\xi' + c.c. \quad (2.23)$$

Интеграл (2.23) зависит от полной вихревой конфигурации. Однако этот и другие подобные интегралы, включающие квадратичные выражения от градиентов параметра порядка, может быть вычислен приближенно в общей форме, при оговоренном условии, что радиус кривизны нити существенно превышает размер кора (см., например, [65]). Соответствующие выкладки, однако, оказываются довольно громоздкими, детали можно найти в статье автора [67]. Как следует из выкладок, приведенных в этой статье, интересующее нас слагаемое, т. е. первая строчка уравнения (2.19), преобразовывается в виде

$$\frac{2\pi\rho_s}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{2\pi\rho_s\sigma_v\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0). \quad (2.24)$$

Здесь величина  $\sigma_v = \ln R/a_0$ , ( $R$  — радиус кривизны нити). Таким образом, мы опять записали интересующий нас интеграл в соотношении (2.19) чисто в терминах переменной  $\mathbf{s}(\xi, t)$ , описывающей вихревую конфигурацию.

Обсудим теперь последнее слагаемое в уравнении (2.19), включающее случайную силу  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  (третья строчка выражения (2.19)). Последовательно рассматривая, что все движение бозе-конденсата связано с движением вихрей (напомним, что мы не рассматриваем пока внешнее потенциальное течение), мы можем представить, случайную силу, фигурирующую в уравнении (2.19), как некоторую “вторичную” величину, возникающую от случайных смещений (всех) элементов (всех) нитей. То есть малые случайные вариации параметра порядка  $\delta\psi$  связаны с малыми случайными вариациями смещений элементов нити  $\delta\mathbf{s}$  и связаны между собой с помощью цепного правила

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} \frac{\delta\psi(\mathbf{r}, t)}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \delta\mathbf{s}(\xi', t) d\xi'. \quad (2.25)$$

Малые вариации  $\delta\psi$  и  $\delta\mathbf{s}$  (за некоторый интервал времени  $\delta t$ ) связаны со случайными силами очевидным образом:

$$\delta\mathbf{s}(\xi, t) = \zeta(\xi, t)\delta t, \quad (2.26)$$

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = \zeta(\mathbf{r}, t)\delta t. \quad (2.27)$$

Читатель должен отличить случайную силу  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , действующую на параметр порядка, и случайную скорость  $\zeta(\xi, t)$ , действующую на линию по их аргументам, кроме того,  $\zeta(\xi, t)$  — конечно, вектор.

Подставляя (2.26), (2.27) в (2.25) и сокращая на  $\delta t$ , мы получим следующую связь между случайной силой  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , действующей на параметр порядка, и случайной силой  $\zeta(\xi, t)$ , действующей на вихревую нить

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} \frac{\delta\psi(\mathbf{r}, t)}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \zeta(\xi', t) d\xi'. \quad (2.28)$$

Далее мы должны подставить это выражение (а также комплексно сопряженное выражение (*c.c.*) ) во второй член в правой части уравнения (2.19) (третья строчка), что дает

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \int d^3\mathbf{r} \int_{\Gamma'} \left( \frac{\delta\psi(\mathbf{r} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \zeta(\xi', t) \right) \frac{\delta\psi^*(\mathbf{r} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} d\xi' +$$

$$+ c.c. \quad (2.29)$$

Но это выражение совпадает с выражением (2.23) с очевидной заменой  $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \rightarrow \zeta(\xi_0, t)$ . По этой причине мы можем просто записать результат в виде, аналогичном выражению (2.24):

$$\frac{2\pi}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_0, t) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{2\pi\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_0, t). \quad (2.30)$$

Обратите внимание, что наше рассмотрение не связывает интенсивность между случайной силой  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , действующей на параметр порядка, и случайной силой  $\zeta(\xi_0, t)$ , действующей на вихревую нить, это будет сделано несколько позже. Собирая вместе все (преобразованные) члены уравнения (2.19), а именно (2.21), (2.24) и (2.30), мы получаем (после сокращения на  $2\pi$ ):

$$\frac{1}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{\Lambda\sigma_v}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) = \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0) +$$

$$+ \frac{1}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_0, t) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{\Lambda\sigma_v}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_0, t) \quad (2.31)$$

Векторное уравнение (2.31) может быть разрешено относительно величины  $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0)$  с точностью до составляющей  $\dot{\mathbf{s}}_{\parallel}(\xi_0)$  вдоль кривой, которая не имеет физического значения, и может быть удалено подходящей параметризацией переменной  $\xi$ . В результате имеем

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) = \frac{1 + \Lambda^2}{1 + \Lambda^2\sigma_v^2} \mathbf{B}(\xi_0) + \frac{(1 + \Lambda^2)\Lambda\sigma_v}{1 + \Lambda^2\sigma_v^2} \mathbf{s}'(\xi_0) \times$$

$$\times \mathbf{B}(\xi_0) + (m/\hbar)\zeta(\xi_0, t). \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) описывает движение элементов вихревой линии в терминах непосредственно самой вихревой линии. Замечательный факт (не очевидный заранее) состоит в том, что

шум  $\zeta(\xi_0, t)$ , действующий на линии, также является аддитивным, как и шум  $\zeta(\mathbf{r}, t)$ , действующий на параметр порядка (см. уравнение (2.14)).

Раскладывая первый член в правой части уравнения (2.32) и используя “ортогональную” параметризацию  $\mathbf{s}'(\xi) \cdot \mathbf{B}(\xi) = 0$ , перепишем его в виде

$$\frac{1 + \Lambda^2}{1 + \Lambda^2 \sigma_v^2} \mathbf{B}(\xi_0) = \mathbf{B}(\xi_0) - \frac{(1 + \Lambda^2) \Lambda \sigma_v}{1 + \Lambda^2 \sigma_v^2} \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0).$$

В результате соотношение (2.32) преобразуется в уравнение движения вихревой линии в сверхтекучем гелии (2.10) (когда средние макроскопические скорости  $\mathbf{v}_n = 0, \mathbf{v}_s = 0$ ) с коэффициентами  $\alpha, \alpha'$ , равными

$$\alpha = \frac{(1 + \Lambda^2) \Lambda \sigma_v}{1 + \Lambda^2 \sigma_v^2}, \alpha' = \frac{\Lambda^2 (\sigma_v^2 - 1)}{\sigma_v^2 \Lambda^2 + 1}. \quad (2.33)$$

Таким образом, коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha'$  связаны с одной и той же величиной  $\Lambda$ , которая описывает неконсервативную часть уравнения Гросса – Питаевского (2.14). Несмотря на это, они играют различную роль в динамике линии. Этот факт обсуждается Finne et al. [68], которые заключили, что переход к турбулентности в  $^3\text{He-B}$  обусловлен значением параметра  $q = \alpha / (1 - \alpha')$ . Они считали, что диссипация энергии определяется взаимным трением, относящимся только к коэффициенту  $\alpha$ , в то время как коэффициент  $\alpha'$  просто перенормирует инерционный член в обычной гидродинамике.

Последнее усилие, которое мы должны сделать, — это установить статистические свойства шума  $\zeta(\xi_0, t)$  и его интенсивность. Уравнение (2.30) является результатом преобразования второго слагаемого в правой стороне уравнения (2.19), (третья строчка), так что они представляют собой два равных вектора, а именно:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi\rho_s}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_1, t_1) \times \mathbf{s}'(\xi_1) + \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi\rho_s\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\xi_1, t_1) = \\ & = \int d^3\mathbf{r}_1 \left( \frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \zeta(\mathbf{r}_1, t_1) \frac{\delta\psi^*}{\delta\mathbf{s}(\xi_1, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} \zeta^*(\mathbf{r}_1, t_1) \frac{\delta\psi}{\delta\mathbf{s}(\xi_1, t)} \right). \quad (2.34) \end{aligned}$$

Умножая скалярно обе части уравнения ( 2.34) на самих себя, но взятых в другой момент времени  $t_2$  и в другой точке  $\xi_2$ , мы получаем

$$\begin{aligned} & 4\pi^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1 + \Lambda^2 \sigma_v^2}{(\Lambda^2 + 1)^2} (\zeta_{\eta_1}(\xi_1, t_1) \zeta_{\eta_1}(\xi_2, t_2) + \zeta_{\eta_2}(\xi_1, t_1) \zeta_{\eta_2}(\xi_2, t_2)) \\ &= \frac{2}{\Lambda^2 + 1} \iint d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \frac{\delta \psi(\mathbf{r}_1, t_1)}{\delta \mathbf{s}(\xi_1, t_1)} \frac{\delta \psi^*(\mathbf{r}_2, t_2)}{\delta \mathbf{s}(\xi_2, t_2)} \zeta(\mathbf{r}_1, t_1) \zeta^*(\mathbf{r}_2, t_2). \quad (2.35) \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta_{\eta_1}$  и  $\zeta_{\eta_2}$  — компоненты случайных скоростей в (взаимно перпендикулярных)  $\eta_1, \eta_2$  направлениях, лежащих в плоскости, нормальной к линии. Мы опустили остальные слагаемые в правой части, предвидя, что они исчезнут после усреднения. Усредняя (2.35) и используя флуктуационно-диссипативную теорему (2.16), а также вычисляя трехмерные интегралы по правилам, описанным в статье [67], имеем

$$\begin{aligned} & \langle \zeta_{\eta_1}(\xi_1, t_1) \zeta_{\eta_2}(\xi_2, t_2) \rangle = \\ &= \frac{k_B T}{\rho_s \pi (\hbar/m)} \frac{(\Lambda^2 + 1) \Lambda \sigma_v}{1 + \Lambda^2 \sigma_v^2} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1 \eta_2}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Таким образом, стартуя с ланжевеновской динамики бозе-конденсата (соотношения (2.14),(2.16)), мы получили уравнения (2.32) и (2.36), описывающие ланжевеновскую динамику вихревой нити непосредственно в терминах самой нити. Очень важно отметить, что аддитивный шум, действующий на бозе-конденсат, трансформируется также в аддитивный шум. Выписанные соотношения (2.32) и (2.36) заканчивают формулировку проблемы стохастической динамики квантованных вихрей, взаимодействующих с термостатом. Роль термостата играют тепловые возбуждения параметра порядка. В разделе 4.2.2 будет показано, что уравнение Фоккера — Планка, соответствующее ланжевеновской постановке задачи (2.14),(2.16), имеет стационарное решение в виде равновесного распределения Гиббса  $\exp(-H \{\infty\} / k_B T)$ , где  $H \{\mathbf{s}\}$  — энергия вихревой системы (см. уравнение ( 2.20)), и  $T$  — температура бозе-конденсата.

## 2.2. Вихревая динамика: пересоединение (Reconnection) линий

### 2.2.1. Этап 1. Столкновение нитей

Помимо описанного выше самоиндуцированного движения вихрей под действием закона Био — Савара, а также поправок, связанных со взаимодействием (трением) с нормальной компонентой, имеется еще один очень важный элемент динамики вихревых нитей. Этим процессом, оказывающим большое влияние на эволюцию вихревых нитей, является столкновение (самостолкновение) и последующее пересоединение (реконнекция) вихревых линий. Данный замечательный и малоизученный процесс появляется также в других областях физики, имеющих дело с линейными протяженными объектами, такими как космические струны, дефекты в твердых телах и т. д. Во время их движения вихревые линии неизбежно пересекаются друг с другом, и вопрос о том, что происходит во время столкновения, имеет решающее значение для структуры и динамики вихревого клубка. Фейнман в своей знаменитой, фундаментальной работе [13] предсказал, что пересечение двух вихревых линий сопровождается процессом пересоединения. Это схематично показано на рис. 2.2. Вихревые линии при столкновении разрушаются и перезамыкаются с точками другой линии, изменяя, таким образом, топологию течения.

Проблема реконнекции может быть условно разделена на две части. Первая из них описывает движение линий в их процессе эволюции, когда они приближаются друг к другу настолько близко, что их взаимное (нелокальное) влияние на скорости движения больше, чем самоиндуцированная скорость из-за локальной кривизны. Но в то же время они находятся недостаточно близко, чтобы влиять на поток внутри сердцевины вихрей. Количественным критерием этого условия служит соотношение  $a_0 < \Delta \leq R/\ln(R/a_0)$ , где  $\Delta$  является расстоянием между линиями. В этих случаях эволюция приближающихся сегментов может происходить в соответствии с законом Био — Савара (2.2). В случае квантовых жидкостей радиус  $a_0$  явля-

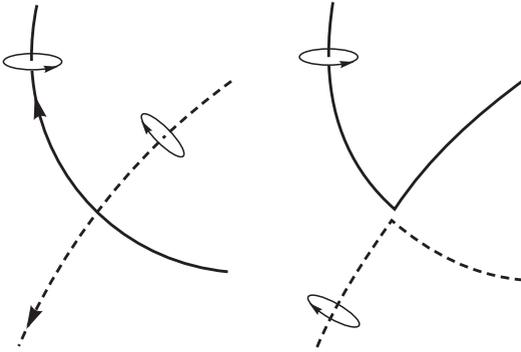


Рис. 2.2. Схематическое изображение реконнекции вихревых нитей. Рисунок взят из книги Баренги [69]

ется постоянной величиной (см., например, [53, 70, 71]), тогда как для классических жидкостей  $a_0$  зависит от переменной  $\xi$ ,  $a_0 = a_0(\xi)$  (см., например, [72, 73]). Качественно результаты этих исследований очень близки и могут быть описаны, как в классическом сценарии, предложенном Siggia [72].

Благодаря нелокальному дальнему действию в интеграле Био–Савара, на близких сегментах двух (примерно антипараллельных) вихревых линий могут появиться небольшие возмущения — “кинки”. Кривизна на кончиках этих кинков может быть настолько большой, что самоиндуцированная скорость (2.5) каждого возмущения преодолевает отталкивание от соседней вихревой линии. Игра локального и нелокального эффектов приводит к тому, что кинки растут, приближаясь друг к другу. В результате увеличивается кривизна в ближайших точках нитей и, соответственно, растут самоиндуцированные скорости. Этот процесс повторяется все быстрее и быстрее, он растет взрывообразно. Расстояние  $\Delta$  между кончиками кинков уменьшается по закону  $\Delta \sim (t^* - t)^{1/2}$ , где момент схлопывания  $t^*$  является некоторой величиной, зависящей от параметров задачи и начальных условий. Таким образом, за конечное время происходит коллапс вихревой линии. Время схлопывания намного меньше характерного времени движения других видов

эволюции вихревой линии. Шварц [53] описал подобное поведение вихревой линии, находящейся вблизи границы, что означает разрыв линии на твердой стенке.

Таким образом, антипараллельные вихревые линии, когда они находятся на близком расстоянии, подвергаются быстрому сближению и схлопыванию. Изначально произвольно ориентированные вихри, как показано также Шварцем [53], по мере приближения друг к другу начинают переориентироваться в пространстве таким образом, чтобы привести их близкие сегменты в антипараллельное положение, которое сопровождается схлопыванием по описанному выше сценарию. Эти идеи были далее разработаны де Waele и Aarts [71], которые в численном моделировании динамики вихревых линий подтвердили поведение, описанное выше. Они также предложили элегантную графическую иллюстрацию (см. рис. 2.3). Этот рисунок изображает два приближающихся сегмента (кинка) вихревых нитей. Асимптотически линии образуют пирамиду, и вихревые нити лежат на двух отрезках гипербол. Из иллюстрации следует, что минимальное расстояние  $\Delta$  между кончиками кинков составляет величину порядка радиуса кривизны  $R_c$  на кончиках кинков. Поэтому скорость сближения может быть оценена из модельного уравнения

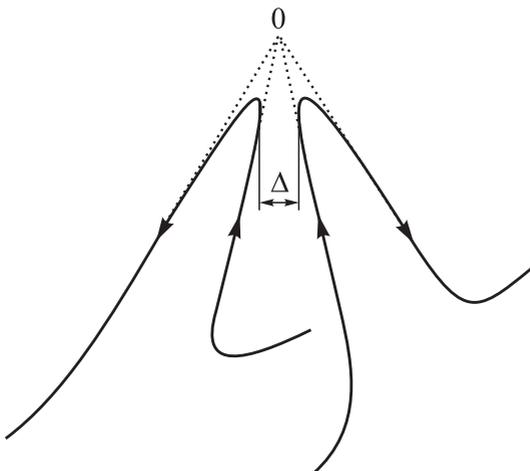
$$\frac{d\Delta}{dt} = C \frac{\beta}{\Delta}, \quad (2.37)$$

где  $C$  — постоянная порядка единицы, зависящая от начальной конфигурации, и  $\beta = (\kappa/4\pi) \ln \frac{c < R >}{a_0}$ . Из (2.37) непосредственно следует

$$\Delta \sim (\kappa/2\pi)(t^* - t)^{1/2}, \quad (2.38)$$

что согласуется с результатом, полученным в работе Waele и Aarts [71]. Заметим, что данная корневая зависимость непосредственно вытекает также из простых соображений размерности.

В серии работ по визуализации сверхтекучего потока гелия с использованием твердых частиц водорода микронного размера — трейсеров (см., например, [74, 75]) авторами наблюдалось



*Рис. 2.3.* Два приближающихся кинка на вихревых нитях. Асимптотические линии образуют гиперболические кривые, лежащие на гранях пирамиды. Рисунок взят из статьи Waele & Aarts [71]

и исследовалось движение частиц, захваченных вихревыми линиями. Анализируя большое количество экспериментальных данных, авторы сделали вывод, что корневой закон (2.37) для сближения линий должен быть подкорректирован. Они предложили два варианта для коррекции корневого закона. Первый вариант предполагает описать минимальное расстояние  $\Delta$  с помощью степенной функции  $\Delta = B |t^* - t|^a$  с индексом  $a$ , близким к  $1/2$ , но имеющим некоторую дисперсию. Во втором предложенном варианте предлагается описать минимальное расстояние  $\Delta$  в виде  $\Delta = A(t^* - t)^{1/2}(1 + c |t^* - t|)$ . Авторы объяснили отклонение от квадратного корня закона влиянием других вихрей или/и наличием границы. Этот вопрос был проанализирован также в работе Tebbs et al. [76], которые обсуждали эти отклонения с точки зрения уравнения Гросса — Питаевского (см. следующий параграф). Последние работы по исследованию динамики пересоединения вихревых нитей (см. Zuccher et al. [77]) выявили асимметрию между поведением минимального вихре-

вого расстоянии до и после реконнекции. Этот эффект может быть вызван излучением звука, и, следовательно, потерей кинетической энергии во время процесса реконнекции вихрей в конденсате Бозе — Эйнштейна.

В работе Андриющенко с соавторами [78] проведено численное исследование динамики квантованных петель вихрей непосредственно перед реконнекцией при конечной температуре, когда взаимное трение существенно меняет эволюцию линий. Моделирование осуществляется на основе метода вихревых нитей, на основе полного закона Био — Савара (2.2). Было обнаружено, что температура сильно влияет на зависимость от времени минимального расстояния  $\Delta(t)$  между кончиками на выступах двух вихревых петель. В частности, в некоторых случаях из-за взаимного трения происходит схлопывание отдельных вихревых петель раньше, чем возникает реконнекция. Важно также, что из-за взаимного трения зависимость от времени минимального расстояния  $\Delta(t)$  не описывается универсальным корневым законом (2.37) и может быть скорректирована с помощью линейной добавки типа  $\Delta = A(t^* - t)^{1/2}(1 + c|t^* - t|)$  (см. выше). Однако на расстояниях, меньших, чем расстояние, удовлетворяющее критерию Шварца [61, 53], когда нелокальный вклад в уравнении Био — Савара становится примерно равным локальному, устанавливается корневая “универсальная” зависимость (2.37). Как и в случае нулевой температуры, в “универсальной” области ближайшие части вихрей (кинки) образуют пирамидальную структуру с углами, которые не зависят ни от начальной конфигурации, ни от температуры.

### 2.2.2. Этап 2. Динамика внутри ядер вихревых нитей

Вторая часть процесса реконнекции начинается, когда расстояние между вихревыми линиями  $\Delta$  сравнимо с радиусом сердцевин  $a_0$ . Прежде всего нас интересует вопрос, происходит ли полная аннигиляция двух антипараллельных отрезков, что необходимо для пересоединения и, во-вторых, какова длительность этого процесса, если он вообще происходит. В слу-

чае классических жидкостей индуцированные скорости, рассчитанные из интеграла Био — Савара, искажают поле скорости внутри сердцевины, что приводит к необходимости решения полных уравнений Навье — Стокса.

Полное исследование реконнекции классических вихревых трубок было проведено многими авторами (см., например, Меландер et al. [79], а также Kida et al. [80, 81], Боратов и др. [82]), которые показали, что при столкновении трубок развивается очень сложная картина течения. Вместо полной аннигиляции появляются очень сложные структуры, где происходят сильные эффекты диссипации. Вдобавок вновь образованные вихревые линии не разделяются окончательно, а, напротив, между ними возникают перемычки — “bridging”.

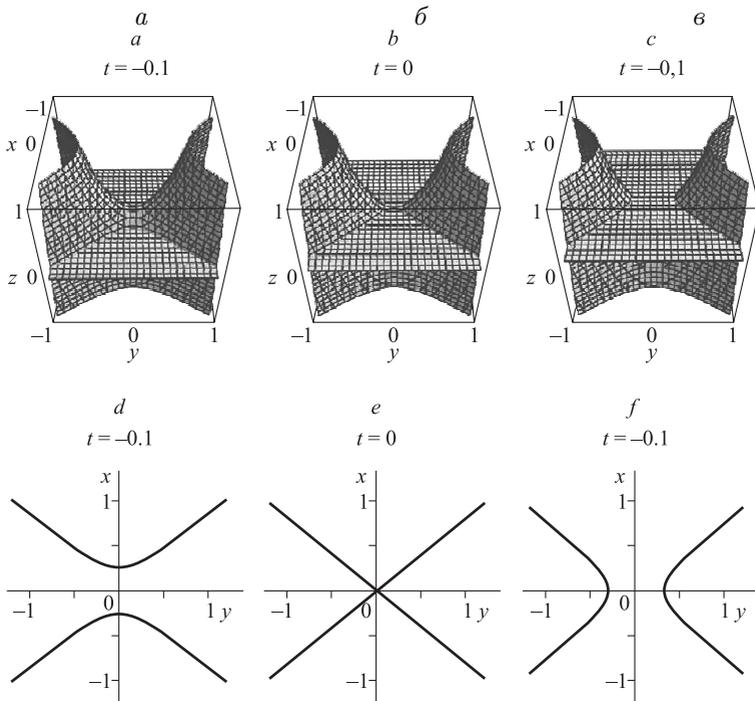
Что касается сверхтекучего гелия, то в настоящее время из-за отсутствия микроскопической теории не имеется прямого теоретического подтверждения полного пересоединения вихревых линий. Тем не менее, существует ряд косвенных доказательств. Одно из них предложено Шварцем, который использовал сложную процедуру определения вероятности полного пересоединения и на основании сравнения численного моделирования с экспериментальными данными заключил, что вероятность близка к единице. Далее, многочисленные численные расчеты динамики вихревых клубков, которые используют концепцию полного пересоединения сталкивающихся вихревых нитей и которые получают результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными, также могут рассматриваться в качестве доказательства полной реконнекции. Наиболее убедительные аргументы в пользу выполнения полного пересоединения квантовых вихревых нитей появились из экспериментальных исследований по визуализации течения (см., например, Van Sciver et al. [83] и Bewly et al. [32, 75]). Авторы наблюдали движение частиц (tracers), захваченных вихревыми нитями, как это представляется из теоретических предсказаний (см. на рис. 2.2)

Теоретически полное исследование реконнекции было проведено для квантовых вихрей в модели слабозаимодействую-

щего Бозе — Эйнштейна газа. Так, Nakajima et al. [84], используя численное моделирование двумерного уравнения Гросса — Питаевского, продемонстрировали полную аннигиляцию пары вихрь — антивихрь. Было также показано, что длительность этого процесса мала по сравнению с характерными временами динамики вихревого клубка. Численное исследование трехмерной задачи впервые было выполнено Korplik et al. [20]. На основе решения трехмерного уравнения Гросса — Питаевского авторы продемонстрировали, что две близкие вихревые нити подвергаются полному перезамыканию. С тех пор была выполнена большая серия исследований, в которых открывались различные новые черты этого явления. Так, недавние расчеты показали, что пересоединение сопровождается излучением звуковых волн с длиной волны порядка радиуса сердцевин  $a_0$  (см., например, Leadbeater et al. [85] или Ogawa и et al. [86]). Напомним, что в отличие от сверхтекучего гелия, где радиус сердцевин порядка межатомных расстояний, в слабоидеальном бозе-газе радиус сердцевин  $a_0$  зависит от параметров уравнения Гросса — Питаевского и равен

$$a_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mnU_0}}. \quad (2.39)$$

Элегантная иллюстрация того, как в рамках уравнения Гросса — Питаевского происходит процесс пересоединения, представлена в статье Nazarenko, West [87]. Отсылая читателя за подробностями к оригинальной статье, представим схематическую фигуру (рис. 2.4), которая иллюстрирует процесс изменения топологии. Пусть имеются две поверхности, одна из которых представляет собой плоскость, движущуюся с постоянной скоростью, а другая — неподвижный гиперболический параболоид. Предполагается, что эти поверхности являются нулями вещественной и мнимой частей макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющей уравнению Гросса — Питаевского. Пересечение этих двух поверхностей является вихревой линией (см. рис. 2.1). На рис. 2.4 видно, как вследствие приближения плоскости к седловой точке два вихря



*Рис. 2.4.* Иллюстрация процесса реконнекции на основе уравнения Гросса — Питаевского: *a*, *b* и *в* показывают эволюцию поверхностей, которые являются нулями вещественной (плоскость) и мнимой (гиперболический параболоид) частей функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . На рис. (*г*), (*д*) и (*е*) изображена эволюция вихревых нитей, соответствующих линиям пересечения указанных поверхностей. Момент реконнекции возникает тогда, когда плоскость проходит седловую точку и топология пересечения двух поверхностей резко меняется. Рисунок взят из статьи Nazarenko, West [87]

сближаются друг с другом. После того как плоскость проходит седловую точку, топология пересечения двух поверхностей резко меняется, что соответствует пересоединению линий. Авторы этой работы утверждают, что в качестве побочного продукта они аналитически подтвердили закон  $\Delta \propto (t^* - t)^{1/2}$  (см. (2.37)). Следует заметить, однако, что корневой закон Pumir & Siggia

[72, 73] получен в ситуации, когда разделение линий  $\Delta$  значительно превышает  $a_0$  размер ядра, что не выполнялось в работе Nazarenko, West [87].

С точки зрения прямого численного моделирования квантовой турбулентности наиболее важными итогами вышесказанного являются следующие факты: (I) полное переподключение линий действительно имеет место; (II) продолжительность этого процесса очень мала по сравнению с характерным временем динамики вихревого клубка; (III) переподключения сопровождается потерей кинетической энергии (связанной с вихрями) и соответственно длины вихревой линии. Информация о кратковременности процесса пересоединения очень полезна, поскольку она оправдывает предположение, впервые предложенное в численных расчетах Шварцем [53, 61] (см. также [88]). Он предложил считать, что событие переподключения происходит мгновенно. Это обстоятельство позволяет избавиться от любого подробного рассмотрения процесса пересоединения и заменить его специальной процедурой — так называемой “the reconnection ansatz”. Детали этой процедуры описаны в разделе 6 обзорной статьи автора [89], посвященной прямому численному моделированию динамики вихревого клубка.

### 2.3. Характеристики вихревого клубка

Этот подраздел посвящен вопросу о том, как выразить различные макроскопические характеристики (например, энергетический спектр) потока (или противотока) турбулентных жидкостей в терминах вихревой конфигурации  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$ . Некоторые из этих величин известны либо из экспериментальных работ, либо из прямого численного моделирования, другие еще предстоит определить. Часто исследователи при интерпретации экспериментов используют различные полуколичественные предположения о связи между структурой вихревого клубка и характеристиками потока. Очевидно, наличие общего формализма, который связывает наблюдаемые свойства сверхтекучей турбулентности с конфигурацией вихревых нитей, может

облегчить задачу интерпретации некоторых экспериментальных (или численных) данных.

### 2.3.1. Геометрические свойства

Современные взгляды на устройство вихревого клубка можно резюмировать следующим образом: вихревой клубок, сформированный в противотоке He II, состоит из множества замкнутых (или оканчивающихся на стенах) линий, обозначенных индексом  $j$ . Они могут быть описаны в виде набора функций  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$ , где  $\mathbf{s}_j(\xi_j)$  – радиус-вектор точек, лежащих на петле  $j$ . Переменная  $\xi_j$  “пересчитывает” точки  $j$ -петли (см. рис. 1.2). Мы будем использовать взаимозаменяемые обозначения для переменной  $\xi_j$  как для длины дуги, так для произвольной величины (например, длины дуги в нулевой момент времени). Если мы интересуемся мгновенной картиной вихревого клубка, то зависимость от времени может быть опущена, в противном случае следует положить  $\mathbf{s}_j(\xi_j) \rightarrow \mathbf{s}_j(\xi_j, t)$ . Общая конфигурация вихревого клубка  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$  есть совокупность всех кривых, т. е.  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\} = \bigcup_j \mathbf{s}_j(\xi_j)$ . Из-за частых пересоединений как количество петель, так и их длины  $L_j$  не являются фиксированными величинами.

Одной из наиболее часто используемых величин в различных контекстах является плотность вихревых линий (ПВЛ)  $\mathcal{L}$  – общая длина линий в единице объема. В случае, когда переменная  $\xi$  – произвольная величина (не длина дуги), величина  $\mathcal{L}$  определяется как

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_j \int_0^{L_j} |\mathbf{s}'_j(\xi_j)| d\xi_j \right\rangle = \mathcal{L}. \quad (2.40)$$

Здесь  $\mathcal{V}$  – объем; скобки  $\langle \rangle$  обозначают полное усреднение по различным конфигурациям вихревых петель  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$ , встречающихся в реальных потоках сверхтекучего гелия. Термин “полное усреднение” означает усреднение (I) по форме каждой из  $j$ -петель; (II) по числу  $j$ -петель и их длин и (III) по начальным точкам каждой из  $j$ -петель. Следует понимать, что правила

усреднения различаются для разных видов сверхтекучей турбулентности (см. далее). В случае, когда выбрана переменная  $\xi_j$ , являющаяся длиной дуги, абсолютное значение касательного вектора равно единице, т. е.

$$|\mathbf{s}'_j(\xi_j)| = 1, \quad (2.41)$$

что предполагает

$$\left\langle \sum_j \int_0^{L_j} d\xi_j \right\rangle = \nu \mathcal{L}. \quad (2.42)$$

Еще одной важной характеристикой вихревого клубка, связанной с плотностью вихревых линий, является характерное межвихревое расстояние

$$\delta = \mathcal{L}^{-1/2}. \quad (2.43)$$

Плотность вихревых линий была введена Вайненом в серии работ по сверхтекучей турбулентности [90, 91, 92]. Предполагая, что вихревые нити распределены в пространстве равномерно и изотропно, Вайнен оценивал ПВЛ  $\mathcal{L}$  из измерения ослабления второго звука в противотоке  ${}^4\text{He II}$ , который взаимодействует с квантовыми вихрями (см. далее, гл. 7).

На самом деле нити, содержащиеся в вихревом клубке, распределены в пространстве анизотропным образом. Есть два вида анизотропии. Первый связан с ориентацией линейных элементов и был обнаружен в опытах по затуханию поперечного (по отношению к направлению противотока (см. рис. 1.9)) и продольного второго звука [93]. Мера этой анизотропии может быть определена с использованием структурных параметров  $I_{\parallel}$ ,  $I_{\perp}$ , введенных Swanson & Donnelly, и несколько позднее Шварцем (см. [54, 61]), которые подтвердили анизотропию вихревого клубка в численном моделировании. Более удобно использовать другие параметры  $I_{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ), которые просто связаны с введенными Шварцем (см. [54, 61]). Так, например,

фракция элементов вихревой линии, ориентированных вдоль оси  $z$ , определяется как

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{L}} \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) d\xi_j \right\rangle, \quad (2.44)$$

где  $\xi_j$  — длина дуги.

Предполагая однородность вихревого клубка в пространстве, соотношение (2.44) можно разложить и переписать в локальной форме

$$\langle \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) \rangle \left\langle \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{L}} \sum_j \int_0^{L_j} d\xi_j \right\rangle = \langle \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_{jz}(\xi_j) \rangle = I_{zz}. \quad (2.45)$$

Смысл выполненной процедуры состоит в том, что мы разделили глобальное усреднение на средние по форме петель и другие средние. Поэтому, совершая предварительное усреднение по длинам петель, по числу петель и их начальным точкам, мы остаемся только с некоторой “усредненной” петлей с теми же структурными параметрами, как и весь вихревой клубок.

Соотношения, аналогичные (2.45), можно записать для  $x$  и  $y$  компонент:

$$\langle \mathbf{s}'_{jx}(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_{jx}(\xi_j) \rangle = I_{xx}, \quad \langle \mathbf{s}'_{jy}(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_{jy}(\xi_j) \rangle = I_{yy}. \quad (2.46)$$

Параметры  $I_{\alpha\alpha}$  связаны со структурными параметрами  $I_{\parallel}$ ,  $I_{\perp}$ , введенными Шварцем (см. [54, 61]), простыми соотношениями:

$$1 - I_{\parallel} = I_{zz}, \quad 1 - I_{\perp} = I_{yy}. \quad (2.47)$$

Так как  $|\mathbf{s}'_j(\xi_j)| = 1$  (если  $\xi$  — длина дуги), то параметры  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  подчиняются очевидному тождеству

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 1. \quad (2.48)$$

Второй вид анизотропии – так называемая поляризация – связан с взаимной ориентацией касательного вектора  $\mathbf{s}'_j(\xi_j)$  сегментов линии и вектора кривизны  $\mathbf{s}''_j(\xi_j)$ . Мера поляризации  $I_l$  была введена Шварцем [61] при изучении свертующей турбулентности в противотоке Не II с помощью следующего соотношения:

$$\left\langle \frac{1}{\nu \mathcal{L}^{3/2}} \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j) d\xi_j \right\rangle = I_l \mathbf{e}_z, \quad (2.49)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении  $z$  (вдоль противотока  $\mathbf{V}_{ns}$ ). Направление вектора  $\mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j)$  совпадает с направлением бинормали  $\mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j) / \left| \mathbf{s}'_j(\xi_j) \right|$  (см. рис. 1.2), а его длина равна кривизне линии в точке  $\xi_j$ . На основании рассмотренных выше аргументов условие (2.49) может быть также приведено к локальной форме

$$\langle \mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j) \rangle = I_l \mathcal{L}^{1/2} \mathbf{e}_z. \quad (2.50)$$

Хотя мера поляризации  $I_l$  в соотношении (2.49) была определена из численного моделирования, ее можно также получить из экспериментальных данных. Действительно, комбинация  $\langle \mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j) \rangle$  появляется при первом слагаемом в уравнении для скорости изменения длины линейного элемента (так называемый производящий член (см. (2.75)). Таким образом, величину  $I_l$  можно получить из сравнения уравнения для роста вихревой нити с первым членом в правой части уравнения Вайнена (3.8) (см. далее подраздел 3.4). Эта процедура была проведена в работах [94, 61].

Следующее свойство вихревого клубка касается средней кривизны вихревых линий. Идея о том, что средняя кривизна вихревого клубка должна быть порядка межвихревого расстояния, восходит к работам Холла о свертующей турбулентности [95]. Позже эта точка зрения была обсуждена многими авторами и строго подтверждена в численном моделировании

Шварца [61]. В наших обозначениях средний квадрат кривизны вихревой нити равен

$$\left\langle \frac{1}{\nu \mathcal{L}} \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{s}_j''(\xi_j) \cdot \mathbf{s}_j''(\xi_j) d\xi_j \right\rangle. \quad (2.51)$$

В локальной форме предположение о том, что средняя кривизна вихревого клубка должна быть порядка межвихревого расстояния, имеет вид

$$\langle \mathbf{s}_j''(\xi_j) \cdot \mathbf{s}_j''(\xi_j) \rangle = c_2^2 \mathcal{L}, \quad (2.52)$$

где  $c_2^2$  является безразмерным параметром порядка единицы.

Введенные выше параметры  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_l, c_2^2$  содержат ценную информацию о структуре вихревого клубка. Кроме того, они могут служить основой для вычисления различных макроскопических (гидродинамических) величин, связанных с наблюдаемыми физическими явлениями. К таким величинам можно отнести постоянную Гортера — Меллинка, коэффициенты экстратухания второго звука (как поперечные, так и продольные), дрейфовую скорость вихревого клубка и т. д. Подробную информацию о соответствующей процедуре можно найти в [61].

Вслед за Шварцем [61] мы будем называть величины  $I_{\perp}, I_{\parallel}$  (или  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ),  $I_l$ ,  $c_2$  структурными параметрами вихревого клубка. Они зависят от температуры  $T$  и давления  $p$  и не зависят от приложенного противотока скорости  $V_{ns}$ . Численные значения параметров структуры как функции температуры приведены в оригинальной работе Шварца [61] и в работах [54, 96, 89] (см. также книгу Donnelly [2]). Позднее они были вычислены во многих работах по численным исследованиям сверхтекучей турбулентности (см., например, [97, 98]).

Однородная сверхтекучая турбулентность, которая нас интересует, реализуется в широких каналах. Более строго, это предполагает, что межвихревое расстояние  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$  должно быть значительно меньше, чем размер канала. В этом случае

мы должны считать, что линии являются замкнутыми петлями. Условие замкнутости петли можно записать следующим образом:

$$\int_0^{L_j} \mathbf{s}'_j d\xi = \mathbf{s}(L_j) - \mathbf{s}(0) = 0 \rightarrow \langle \mathbf{s}'_j \rangle = 0. \quad (2.53)$$

Очень важной характеристикой кривой в трехмерном пространстве являются так называемые топологические числа зацепления (linkage)  $N_{ij}$ . Числа зацепления выступают инвариантом, который описывает (взаимное) связывание двух замкнутых кривых. Они представляют собой число, характеризующее, сколько раз одна кривая огибает другую. Числа зацепления были введены Гауссом, они могут быть записаны в виде двойного контурного интеграла

$$N_{ij} = \frac{1}{4\pi} \oint \oint \frac{(\mathbf{s}(\xi_i, t) - \mathbf{s}(\xi_j, t)) (\mathbf{s}'(\xi_i, t) \times \mathbf{s}'(\xi_j, t)) d\xi'}{|\mathbf{s}(\xi_i, t) - \mathbf{s}(\xi_j, t)|^3} d\xi d\xi'. \quad (2.54)$$

По определению, величина  $N_{ij}$  всегда является целым числом, но может быть положительным или отрицательным в зависимости от относительной ориентации двух кривых. В идеальной жидкости, в отсутствие реконнекций, вихревые линии не могут проходить друг через друга, и числа зацепления являются инвариантом потока. Из-за реконнекций числа зацепления могут изменяться. Если следить за изменением числа  $N_{ij}$ , то можно подсчитать количество пересоединений. Числа зацепления и некоторые другие геометрические и топологические свойства вихревых линий в квантовых жидкостях рассмотрены в работах Varenghi et al. [99, 100].

Идея о том, что хаотические одномерные топологические дефекты имеют структуру (форму) типа случайного блуждания, широко обсуждается в научной литературе (исчерпывающее изложение можно найти в известной книге Клейнерта [101]). Предположение, что квантовые вихревые линии в турбулентном сверхтекучем гелии имеют структуру случайного

блуждания, впервые было высказано Шварцем [61]. Это предположение было развито автором монографии в статье [102], в которой разработана так называемая Гауссова модель вихревого клубка. Следуя этой модели, рассмотрим некоторые фрактальные свойства вихревых петель. Одной из главных характеристик фрактальной линии является размерность Хаусдорфа, которая связывает длину кривых нитей  $L$  с их реальным трехмерным размером  $D$ . Следуя [103], рассмотрим величину  $D^2 = \langle (\mathbf{s}^\alpha(\xi_j) - \mathbf{s}^\alpha(0))^2 \rangle$ , которая является усредненной мерой квадрата трехмерного реального размера между начальной (произвольной) точкой кривой  $\mathbf{s}(0)$  и точкой  $\mathbf{s}(\xi_j)$ . Величину  $\langle (\mathbf{s}^\alpha(\xi_j) - \mathbf{s}^\alpha(0))^2 \rangle$  можно оценить из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_j} \int_0^{\xi_1} d\xi_1 d\xi_2 \langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) \rangle = \left\langle \int_0^{\xi_j} \int_0^{\xi_1} d\xi_1 d\xi_2 \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) \right\rangle = \\ & = \left\langle \int_0^{\xi_j} d\xi_1 \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \int_0^{\xi_1} \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) d\xi_2 \right\rangle = \langle (\mathbf{s}^\alpha(\xi_j) - \mathbf{s}^\alpha(0))^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Таким образом, трехмерный размер вихревой петли определяется корреляционной функцией второго порядка между касательными векторами  $\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) \rangle$ , который, в силу однородности, должен быть функцией разности аргументов  $\xi_1 - \xi_2$ . Будем считать, что величина  $\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) \rangle$  является степенной функцией  $\langle \mathbf{s}'_\alpha(\xi_1) \cdot \mathbf{s}'_\alpha(\xi_2) \rangle = N(\xi_1 - \xi_2) = N * (\xi_1 - \xi_2)^\lambda$ . Здесь  $N$  является константой с надлежащей размерностью. Тогда интеграл в левой части (2.55) оценивается как  $\propto (\xi_1 - \xi_2)^{\lambda+2}$ . Это означает, что когда длина вихревой петли  $L$  возрастает, ее трехмерный размер  $D$  растет по закону  $D \propto L^{(\lambda+2)/2}$ . Последнее, в свою очередь, означает, что вихревая линия является фрактальным объектом, имеющим размерность Хаусдорфа  $H_D$ , равную:  $H_D = 2/(\lambda+2)$  (см. также работы по: Grassberg & Procaccia [104]). В случае “чистого” случайного блуждания цепи с эффективным шагом  $\xi_0$  функция  $N(\xi_1 - \xi_2)$  моделируется просто дельта-функцией,  $N(\xi_1 - \xi_2) = \xi_0 \delta(\xi_1 - \xi_2)$  (см., например, известную книгу Doi & Edwards [105] по теории полимеров). Тогда величина  $\lambda$  равна (формально)  $-1$ , соответственно

$H_D = 2$ , а длина линии возрастает пропорционально квадрату трехмерного размера петли,  $L \propto D^2$ . Для гладкой (нефрактальной) кривой (например, прямая линия),  $\lambda = 0$ , и  $H_D = 1$ , как это и должно быть. Интересен случай так называемой линии без самопересечений (кривая Флори), для которой  $L \propto D^{5/3}$  (см. подробно в книге [105]).

В случае реальных вихревых нитей функция  $N(\xi' - \xi'')$  не является чисто степенной функцией, так как в противном случае это могло бы привести к бесконечной кривизне, что невозможно (см. [102, 103], а также раздел ,5.2). Поэтому близкие участки нити ведут себя как плавная кривая, у которой формально  $\lambda = 0$  и трехмерные размеры (реальные расстояния) изменяются линейно вместе с величиной  $(\xi' - \xi'')$  вдоль кривой. Для больших величин  $(\xi' - \xi'')$  нить имеет структуру случайного блуждания с эффективным шагом, равным среднему радиусу кривизны  $\xi_0$ . Мы будем называть такой объект полуфрактальной цепью (в теории полимеров такие линии называются червеобразными полимерами). Хорошим приближением для  $N(\xi' - \xi'')$  в этом случае может быть функция типа  $1/(1 + ((\xi' - \xi'')/\xi_0)^2)$ .

Для вихревых линий в квантовой турбулентности оценки фрактальной размерности  $H_D$  получены с помощью численного моделирования (см. [106, 107]); Авторы предлагают значения  $H_D \approx 1.4 - 1.6$  (в зависимости от температуры). Это значение близко к показателю Флори ( $5/3$ ), соответствующему случаю чистого случайного блуждания без самопересечений.

### 2.3.2. Динамические характеристики

Опишем динамические характеристики потока, содержащего вихревой клубок. Поля скорости и завихренности представлены соотношениями (2.1) и (1.9) соответственно. Для аналитического исследования большое значение имеет преобразование Фурье поля завихренности, определяемое как

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\kappa}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_j \oint ds_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}_j(\xi_j)) =$$

$$\frac{\kappa}{(2\pi)^{3/2}} \sum_j \oint d\mathbf{s}_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}_j(\xi_j)}. \quad (2.56)$$

Для несжимаемой к жидкости  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{k} = 0$  ( $\mathbf{v}_\mathbf{k}$  — преобразование Фурье поля скорости), откуда следует результат, что  $\mathbf{v}_\mathbf{k} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_\mathbf{k}/k^2$ . Для изотропной и однородной квантовой турбулентности средние значения скорости  $\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle$  и завихренности  $\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \rangle$  равны нулю. Эти величины могут иметь отличные от нуля значения (и должны быть приняты во внимание), когда появляется более сложная структура, содержащая множество поляризованных вихрей. Ближайшим примером течения сверхтекучей компоненты с ненулевым значением усредненной завихренности, создаваемой набором вихревых линий, является случай вращающегося He II (см. гл. 1). В этом случае сверхтекучая компонента имитирует (в среднем) вращение твердого тела, а средняя завихренность  $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$  — просто поверхностная плотность вихревых линий  $n$ , умноженная на квант циркуляции, как следует из правила Фейнмана (1.23).

Другой важной величиной, определяющей гидродинамические свойства сверхтекучей турбулентности, является средняя сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ , индуцируемая вихревым клубком. Она получается усреднением закона Био — Савара (2.1). Соответственно, полное количество движения  $\mathbf{P}_V$ , созданное сверхтекучей скоростью  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ , связанной с наличием вихревого клубка, может быть записано в виде

$$\mathbf{P} = \rho_s \int \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.57)$$

Прямое использование формул (2.1), (2.57) сталкивается с проблемой, типичной для вихревых течений. Интеграл в соотношении (2.57) расходится как на малых, так и на больших расстояниях (см., например, [108, 43]). Поэтому вопрос о средней скорости или о полном импульсе, генерируемом вихрями, не может быть решен обычным способом. С другой стороны, известно, что в некоторых случаях (например, в нестационарных ситуациях) так называемый вихревой импульс (или импульс

Лэмба) играет роль количества движения (см. подробно в книгах [25, 108, 43]). В общем случае плотность импульса Лэмба  $\mathbf{P}_V$  определяется как

$$\mathbf{P}_V = \frac{\rho_s}{2V} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2.58)$$

где  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  — распределение завихренности. Для сингулярного распределения завихренности, а именно, для набора вихревых нитей импульс Лэмба (2.58) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_V = \frac{\rho_s \kappa}{2V} \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{s}_j(\xi_j) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j. \quad (2.59)$$

Поведение величины  $\mathbf{P}_V$  в противотоке Не II, в котором развит вихревой клубок, изучалось в работах автора [109, 110].

Аналогичная ситуация имеет место с моментом  $\mathbf{M}(t)$ , определяемым как

$$\mathbf{M} = \rho_s \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.60)$$

Это определение также имеет дело с расходящимся интегралом. Во многих задачах поведение вращающегося гелия может быть изучено с помощью так называемого углового вихревого импульса  $\mathbf{M}_V$ , определяемого как

$$\mathbf{M}_V = \frac{1}{3} \rho_s \kappa \int \mathbf{s}(\xi) \times \mathbf{s}(\xi) \times \mathbf{s}'(\xi) d\xi. \quad (2.61)$$

Обсудим энергию течения, создаваемого вихревой структурой. Энергия  $E$  системы линейных вихрей определяется как (см. подробно в книгах [25, 43, 108]):

$$E = \frac{1}{2} \int \rho_s \mathbf{v}_s^2 d^3\mathbf{r} = \frac{\rho_s \kappa^2}{8\pi} \sum_{j,i} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} \frac{\mathbf{s}'_i(\xi_i) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j)}{|\mathbf{s}_i(\xi_i) - \mathbf{s}_j(\xi_j)|} d\xi_i d\xi_j. \quad (2.62)$$

Вычисляя функциональную производную  $\delta E(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})/\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)$ , получим гамильтоновскую форму уравнения движения для линейных элементов линии  $\mathbf{s}_j(\xi_j)$ :

$$\frac{\delta E(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi_0) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0), \quad (2.63)$$

где  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0)$  является скоростью вихревой линии, выраженной законом Био — Савара (2.2).

Рассмотрим уравнение (2.62) для одиночной линии, например, положив  $i = j$ . Это можно выполнить с помощью следующей замены  $\mathbf{s}_j(\xi_j) \rightarrow \mathbf{s}_i(\xi'_i)$ ,  $\xi_j \rightarrow \xi'_i$ . Разлагая в правой части полученного уравнения  $\mathbf{s}_i(\xi'_i)$  вблизи точки  $\xi_i$  и интегрируя по отклонению  $\Delta\xi = \xi'_i - \xi_i$ , получим выражение для энергии в так называемой локальной форме

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\langle R \rangle}{a_0} \right) \sum_j \int_0^{L_i} |\mathbf{s}'_j(\xi_j)| d\xi_j = \varepsilon_V L_i. \quad (2.64)$$

Здесь средний радиус кривизны нитей  $\langle R \rangle$  связан с плотностью вихревых линий как  $\langle R \rangle \sim \mathcal{L}^{-1/2}$ . Таким образом, энергия в локальной форме пропорциональна длине. Энергия  $\varepsilon_V$  вихревой линии на единицу длины (так называемая напряженность — "tension") равна:

$$\varepsilon_V = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \left( \frac{\langle R \rangle}{a_0} \right). \quad (2.65)$$

Отметим, что использование правила (2.63) с локальной энергией (2.64) приводит к локальному виду самоиндуцированной скорости (2.5).

Применяя к (2.62) известную формулу из теории обобщенных функций ([111])

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \int_{\mathbf{k}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\pi^2 k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.66)$$

можно переписать среднюю энергию  $E$  (2.62) в следующем виде:

$$E = \int_{\mathbf{k}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \times \left[ \frac{1}{k^2} \frac{\rho_s \kappa^2}{2} \sum_{i,j} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} \mathbf{s}'_j(\xi_i) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_i d\xi_j e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}_i(\xi_i) - \mathbf{s}_j(\xi_j))} \right]. \quad (2.67)$$

Уравнение (2.67) имеет решающее значение, поскольку оно предлагает простой способ вычисления энергетического спектра  $E(\mathbf{k})$  трехмерного поля скоростей, индуцированного вихревым клубком. Действительно, согласно формуле (2.67), величина  $E(\mathbf{k})$  — просто выражение в квадратных скобках  $[\cdot]$ . Обратите внимание, что энергетический спектр  $E(\mathbf{k})$  может быть также получен из выражения для преобразования Фурье поля завихренности  $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ . Учитывая, что уравнение непрерывности несжимаемой жидкости в фурье-компонентах имеет вид  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = 0$ , легко получить, что  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \times \omega_{\mathbf{k}}/k^2$ , откуда следует

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_{-\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} \cdot \omega_{-\mathbf{k}}/k^2. \quad (2.68)$$

Применив формулу (2.56) в правой части (2.68), получим (с точностью до множителя  $\rho_s$ ) выражение (2.67).

Для изотропного случая спектральная плотность зависит от абсолютного значения волнового числа  $k$ . Интегрируя по телесному углу  $2\pi \sin\theta d\theta d\varphi$ , где  $\varphi$  — азимутальный угол вокруг нити, а  $\theta$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{k}$  и  $(\mathbf{s}_i(\xi_i) - \mathbf{s}_j(\xi_j))$ , получим соотношение для изотропной спектральной плотности (см. [112]):

$$E(k) = \frac{\rho_s \kappa^2}{(2\pi)^2} \sum_{i,j} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} \mathbf{s}'_j(\xi_i) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_i d\xi_j \frac{\sin(k |\mathbf{s}(\xi_j) - \mathbf{s}(\xi_i)|)}{k |\mathbf{s}(\xi_i) - \mathbf{s}(\xi_j)|}. \quad (2.69)$$

Следующим примером, который мы хотели бы обсудить, является собственная энтропия вихревого клубка

$$S^V = k_B \langle \ln \Gamma(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}) \rangle, \quad (2.70)$$

где  $\Gamma(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})$  — число конфигураций вихревых петель. Величина  $S^V$  является существенной переменной при рассмотрении термодинамически равновесного ансамбля вихревых нитей, она также входит в уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности (см. [113, 96], а также гл. 6). В силу того, что аргументом статистического являются непрерывные функции  $\mathbf{s}_j(\xi_j)$  (линии), статистический вес  $\Gamma(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})$  является бесконечной величиной, более того, эта величина не определена корректно. По этой причине часто прибегают к так называемым решеточным моделям, когда непрерывные вихревые нити заменяются линиями, состоящими из отрезков на ребрах трехмерной решетки. Существенным недостатком решеточных моделей является то, что в этом случае многие результаты теории зависят от параметра решетки.

Рассмотрим следующую величину:

$$\mathcal{A} = \kappa \sum_j \int_0^{L_j} (\dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j)) d\xi_j, \quad (2.71)$$

Скорость  $\dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j)$  линейного элемента функционально выражается через мгновенную конфигурацию вихревого клубка  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$  с помощью уравнения движения (см. уравнение (2.10)). Правая сторона (2.71) (без фактора  $\kappa$ ) представляет собой площадь, заметаемую движущейся линией. Величина  $\mathcal{A}$  имеет многообразное физическое значение. Прежде всего, подынтегральное выражение в (2.71) является дискретным вариантом величины  $\mathbf{v}_s \times (\nabla \times \mathbf{v}_s)$ , которая называется вихревой силой и которая играет важную роль в динамике вихрей (см., например, [108, 43]). Кроме того, уравнение движения вихревой линии может быть получено из вариационного принципа, и величина  $\mathcal{A}$ , пропорциональная площади, заметаемой движущимися линиями, является просто действием (см. [114]). И, наконец, величина  $\mathbf{V}_{ns} \cdot \mathcal{A}$  описывает скорость проскальзывания фазы,

вызванного движением вихревых линий поперек противотока  $\mathbf{V}_{ns}$  (см. [54]). Конечно, не все из этих свойств  $\mathcal{A}$  являются независимыми, и мы перечислили их, чтобы подчеркнуть важность  $\mathcal{A}$  для приложений.

Интеграл от скалярного произведения  $\dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j)$

$$\mathcal{H} = \kappa \sum_j \int_0^{L_j} \left( \dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j) \right) d\xi_j, \quad (2.72)$$

называется спиральностью. Как энергия и импульс, спиральность является инвариантом движения — сохраняющейся величиной. Спиральность  $\mathcal{H}$  — также очень важная характеристика вихревой динамики. Она непосредственно связана с тонким вопросом о связности (knottedness) конфигурации вихревой нити, или зацеплении петель, который мы обсуждали в предыдущем параграфе (см. дискуссию после формулы (2.54)). В деталях эта проблема обсуждена в книгах [25, 108, 43]. Для сверхтекучей турбулентности спиральность обсуждалась в работах [99, 100]. В приближении локальной индукции для свободных нитей спиральность  $\mathcal{H}$  обращается в нуль, поскольку скорость  $\dot{\mathbf{s}}$  перпендикулярна тангенциальному вектору  $\mathbf{s}'$  (см. (2.5)). По этой причине спиральность  $\mathcal{H}$  может служить мерой нелокального вклада в динамику вихрей.

До сих пор мы обсуждали макроскопические величины, которые функционально связаны с мгновенными конфигурациями вихревых нитей  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\}$ , и зависимость от времени была опущена. Временная динамика различных макроскопических величин  $A(\{\mathbf{s}_j(\xi_j)\})$ , усредненных по конфигурации петель, может быть получена из следующих соображений. Возвращая временную зависимость для элементов линии  $\mathbf{s}_j(\xi_j) \rightarrow \mathbf{s}_j(\xi_j, t)$  и используя цепное правило, мы можем записать скорость изменения величины  $\langle A(\{\mathbf{s}_j(\xi_j, t)\}) \rangle$  в виде

$$\frac{\partial \langle A(\{\mathbf{s}_j(\xi_j, t)\}) \rangle}{\partial t} = \left\langle \sum_i \int_0^{L_j} \frac{\delta A(\{\mathbf{s}_j(\xi, t)\})}{\delta \mathbf{s}_i(\xi'_i, t)} \frac{\partial \mathbf{s}_i(\xi'_i, t)}{\partial t} d\xi'_i \right\rangle. \quad (2.73)$$

Выражая скорость элементом вихревой нити  $\dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j)$  с помощью уравнения движения (например, (2.10)), можно заключить, что правая сторона (2.73) является усредненным функционалом от конфигурации вихревых линий  $\{\mathbf{s}_j(\xi_j, t)\}$ . Таким образом, мы получили правило для эволюции величины  $\langle A(\{\mathbf{s}_j(\xi_j, t)\}) \rangle$ . В качестве примера продемонстрируем, как на основании вышеописанного рецепта можно получить уравнение для эволюции плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  (см. статью Шварца [115]). Для расчета  $\partial \mathcal{L} / \partial t$  мы используем соотношение для скорости изменения длины  $\partial \delta l / \partial t$  некоторого произвольного элемента линии с длиной  $\delta l$ . Учитывая, что длина  $\delta l$  элемента линии равна  $\delta l = |\mathbf{s}'| \delta \xi$ , и выбрав (временно), что  $\xi$  — произвольная переменная (а не длина дуги), мы получим следующую цепочку равенств:

$$\frac{\partial \delta l}{\partial t} = \frac{\partial |\mathbf{s}'| \delta \xi}{\partial t} = \frac{|\mathbf{s}'| \partial |\mathbf{s}'| \delta \xi}{|\mathbf{s}'| \partial t} = \frac{\mathbf{s}' \cdot \partial \mathbf{s}' \delta \xi}{|\mathbf{s}'| \partial t} = \mathbf{s}' \cdot \dot{\mathbf{s}}' \delta \xi. \quad (2.74)$$

Из уравнения (2.74) следует, в частности, что если есть внешняя неоднородная скорость  $\zeta(\xi, t)$ , действующая на нити, то скорость роста (или уменьшения) длины  $\partial \delta l / \partial t$  равна  $\mathbf{s}' \cdot \zeta'$ . Возвращаясь к случаю, когда  $\xi$  является длиной дуги, и принимая скорость линии  $\dot{\mathbf{s}}_i$  из уравнения (2.10), где самоиндуцированная скорость взята в локальном приближении (2.5), мы имеем после небольших алгебраических преобразований

$$\frac{\partial \delta l}{\partial t} = (\alpha(\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') \mathbf{v}_{ns} - \alpha \beta (\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')^2) \delta \xi. \quad (2.75)$$

Интегрируя уравнения (2.75) по длине дуги  $\xi$  и выбрав усреднение (в единичном объеме) по ансамблю, найдем скорость изменения плотности вихревых нитей

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \alpha \mathbf{v}_{ns} \int \langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle d\xi - \alpha \beta \int \langle |\mathbf{s}''|^2 \rangle d\xi. \quad (2.76)$$

Формально в правой части уравнения (2.76) находятся те же самые параметры, что и в стационарном случае (см. (2.50) и (2.52)).

Таким образом, мы описали временную эволюцию макроскопической величины  $\mathcal{L}(t)$  в терминах стационарной конфигурации. Следует сказать слово предостережения. Общее усреднение  $\langle \cdot \rangle$  соответствует стационарным состояниям вихревого клубка. Следовательно, когда мы используем термин “динамика”, мы имеем в виду лишь небольшие отклонения от стационарного состояния. Соответственно, макроскопическая динамика величины  $\mathcal{L}(t)$  должна быть намного медленнее, чем релаксация других степеней свободы, описывающих состояние вихревого клубка. Например, при выводе основного уравнения для эволюции  $\mathcal{L}(t)$  Вайнен сделал очень важное предположение, что  $d\mathcal{L}/dt$  является функцией только от мгновенного значения  $\mathcal{L}$  [90, 91, 92]. Это свойство было названо предположением самоподобия. Как обсуждалось в работах [113, 61, 116, 96], это предположение оправдано только тогда, когда другие характеристики вихревого клубка (например, структурные параметры  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_l, c_2^2$ , обсуждаемые выше), отличные от  $\mathcal{L}(t)$ , релаксируют к стационарному состоянию гораздо быстрее, чем сама плотность вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ . Предположение самоподобия может быть подтверждено или опровергнуто на основе анализа соотношений, аналогичных (2.73) для структурных параметров.

Другим примером использования связи типа (2.73) является статья автора [110], где была изучена динамика импульса Лэмба (2.59).

Обсудим еще один формальный инструмент для работы с вихревыми линиями, часто используемый в стохастических задачах, — так называемый характеристический (или производящий) функционал (см., например, [117]). Для набора хаотических вихревых линий этот подход был предложен Мигдалом [49, 48]. Следуя указанным работам, мы определяем характери-

стический функционал  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  с помощью соотношения

$$W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\}) = \left\langle \exp \left( i \sum_j \int_0^{L_j} \mathbf{P}_j(\xi_j) \cdot \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j \right) \right\rangle. \quad (2.77)$$

Здесь усреднение проводится по ансамблю конфигураций вихревых нитей. Характеристический функционал  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  (2.77) позволяет вычислить среднее от любой величины, зависящей от конфигурации вихревых линий, с помощью функционального дифференцирования. Например, средний вектор касательной  $\langle \mathbf{s}'_{j\alpha}(\xi_j) \rangle$ , средний вектор кривизны  $\langle \mathbf{s}''_{j\alpha}(\xi_j) \rangle$  или корреляционная функция между тангенциальными векторами различных элементов вихревой нити  $\langle \mathbf{s}'_{j\alpha}(\xi_j) \mathbf{s}'_{j\beta}(\xi_j) \rangle$  легко выражаются через характеристический функционал  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  (2.77) в соответствии с правилами

$$\langle \mathbf{s}'_{j\alpha}(\xi_j) \rangle = \left. \frac{\delta W}{i \delta \mathbf{P}_j^\alpha(\xi_j)} \right|_{\text{all } \mathbf{P}=0}, \quad (2.78)$$

$$\langle \mathbf{s}''_{j\alpha}(\xi_j) \rangle = \left. \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\delta W}{i \delta \mathbf{P}_j(\xi_j)} \right|_{\text{all } \mathbf{P}=0}, \quad (2.79)$$

$$\langle \mathbf{s}'_{j\alpha}(\xi_j) \mathbf{s}'_{j\beta}(\xi_j) \rangle = \left. \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}_j^\alpha(\xi_{j1}) i \delta \mathbf{P}_j^\beta(\xi_{j2})} \right|_{\text{all } \mathbf{P}=0}. \quad (2.80)$$

Другие величины могут быть выражены с помощью характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  несколько более сложным способом. Например, преобразование Фурье усредненной завихренности  $\omega_{\mathbf{k}}$  (2.56) может быть вычислено с помощью характеристического функционала путем использования следующей процедуры:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sum_j \int_0^{L_j} d\xi_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}_j(0)} \left. \frac{\delta W}{i \delta \mathbf{P}_j(\xi_j)} \right|_{\{\mathbf{P}_j(\xi'_j)\} = -\mathbf{k}\theta(\xi'_j)\theta(\xi_j - \xi'_j)},$$

где  $\theta(\xi'_j)$  — функция единичного скачка (функция Хевисайда). Произведение  $\theta(\xi'_j)\theta(\xi_j - \xi'_j)$  отбирает точки, лежащие в диапазоне  $0 \leq \xi'_j \leq \xi_j$  на  $j$ -кривой. Этот выбор обеспечивает появление правильной величины  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}_j(\xi'_j)}$  после интегрирования в экспоненте в (2.77). Величина  $\mathbf{s}_j(0)$  — начальная точка  $j$ -кривой, которая выбирается произвольно.

Аналогичным образом средняя энергия  $\langle E \rangle$  (2.67) может быть вычислена по правилу

$$\langle E \rangle = \frac{\rho_s \kappa^2}{2(2\pi)^3} \sum_{i,j} \int_{\mathbf{k}} \frac{d^3\mathbf{k}}{k^2} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} d\xi_i d\xi_j e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{s}_i(0) - \mathbf{s}_j(0))} \times \\ \times \frac{\delta^2 W}{i\delta \mathbf{P}_i^\alpha(\xi_i) i\delta \mathbf{P}_j^\alpha(\xi_j)}. \quad (2.81)$$

Здесь множество  $\mathbf{P}_n(\xi'_n)$  в характерной функциональной  $W(\{\mathbf{P}_n(\xi'_n)\})$  снова определяется с помощью  $\theta$ -функций

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i(\xi'_i) &= -\mathbf{k}\theta(\xi'_i)\theta(\xi_i - \xi'_i), \\ \mathbf{P}_j(\xi'_j) &= -\mathbf{k}\theta(\xi'_j)\theta(\xi_j - \xi'_j), \\ \mathbf{P}_n(\xi_n) &= 0, n \neq i, j. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Из соотношения (2.82) следует, что мы выбираем под знаком интеграла в экспоненте характеристического функционала (2.77) только точки, лежащие в интервале от 0 до  $\xi_i$  на  $i$ -кривой и от 0 до  $\xi_j$  на  $j$ -кривой. Это гарантирует появление правильной величины  $e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}_i(\xi_i) - \mathbf{s}_j(\xi_j))}$  в выражении для энергии  $E$  (см. уравнение (2.67)). При оценке собственной энергии одной и той же петли,  $i = j$ , нужно разделить различные точки  $\xi_i$  и выбрать, например,  $\xi'_i$  и  $\xi''_i$ .

Хотя характеристический функционал определяется с помощью процедуры усреднения в качестве вспомогательной величины, он играет существенную независимую роль в стохастических теориях. Например, в задачах статистической физики систем, состоящих из многих частиц, использование характеристического функционала (в этой теории его обычно называют “производящий функционал”) позволяет получать краткое

описание статистических свойств в терминах функции Грина и уравнений для них (см., например, [117, 101]). Другим примером может быть теория классической турбулентности, где основное кинетическое уравнение для характеристического функционала (называемое уравнением Хопфа) выводится непосредственно из уравнений Навье — Стокса, не прибегая к функции распределения, которая в любом случае неизвестна (см., например, [118, 119]). Аналогичным образом в нашей работе характеристический функционал используется не только для расчета различных средних, он также играет ключевую роль в построении гауссовой модели вихревого клубка (см. главу 5).

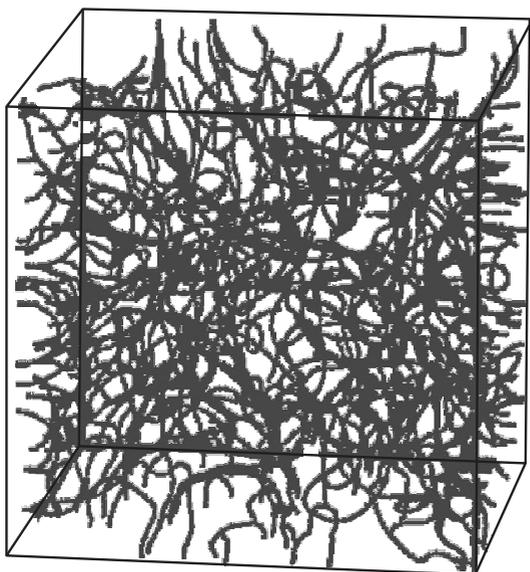
### 3. Сверхтекучая турбулентность, введение в предмет

#### 3.1. Введение и обзор

Термин “сверхтекучая турбулентность” (СТ) был введен Фейнманом в его основополагающем труде [13], где он объяснил результаты работы Гортера и Меллинка (см. [6]), которые наблюдали резкое увеличение перепада температуры в противотоке He II, когда скорость превышает определенное, достаточно небольшое значение (см. формулу (1.24) в главе 1). На первый взгляд казалось, что речь идет о прекращении явления сверхтекучести (или связанной с ней сверхтеплопроводности). Фейнман связал кризис Гортера и Меллинка с появлением в системе неупорядоченного набора квантованных вихревых линий или вихревого клубка (ВК), который оказывает сопротивление потоку нормальной компоненты, переносящей энтропию (более подробное описание будет представлено в разделе 3.4). Фейнман также предложил качественный сценарий развития вихревого клубка. В частности, он описал механизмы, которые ведут к росту плотности вихревых нитей, а также предложил законы распада вихревого клубка. Идеи Фейнмана были развиты в серии экспериментальных работ Вайнена, который построил феноменологическую теорию сверхтекучей турбулентности. Первое наглядное подтверждение идей Фейнмана было получено три десятилетия спустя в работе Шварца [61], который продемонстрировал появление вихревого клубка в прямом численном моделировании. Пример ВК, который развивается в противотоке He II из начально гладких (шести) вихревых колец, изображен на рис. 3.1.

Еще спустя почти три десятилетия была проведена серия экспериментов по визуализации потоков гелия [32]. На представленных рисунках (см. например, рис. 1.10) можно видеть массу неупорядоченных вихрей.

Со времен пионерских работ Фейнмана и Вайнена изучено огромное число разнообразных ситуаций, где появляется за-



*Рис. 3.1.* Вихревой клубок в противотоке He II (см. текст). Рисунок взят из статьи Шварца [61, fig. 13]

путанная масса вихревых нитей, оказывающая существенное влияние на свойства квантовых жидкостей. Кроме противотока He II, наблюдается образование хаотических вихрей в импульсе интенсивного второго звука или с помощью обычного ультразвука. Вихревой клубок был также обнаружен в экспериментах с буксируемой сеткой и вибрирующими объектами — сферами, сетками, вилками и пр. Хаотические вихри наблюдались также в переходных процессах во вращающихся  $^3\text{He}$ -В или  $^4\text{He}$ . Обычный поток (не противоток) квантовых жидкостей в каналах также может сопровождаться возникновением хаотических вихрей, которые, однако, частично упорядочены путем крупномасштабных вихрей в турбулентной нормальной компоненте. Обтекание препятствия также приводит к рождению случайных вихревых петель. Кроме того, в некоторых экспериментах турбулентность возникает в результате резкого торможения вращающегося куба с He II. Существуют также

и другие, искусственные методы создания вихревого клубка, например, в результате эволюции от начальной конфигурации вихрей Тейлора — Грина. Недавно было реализовано образование множества хаотических вихрей в колеблющемся конденсате Бозе — Эйнштейна.

Кроме турбулентных, сильно неравновесных вихрей, существуют также предельно неупорядоченные вихревые клубки в состоянии, близком к термодинамическому равновесию. К ним относятся структуры, которые появляются при резких фазовых переходах, например, после быстрого охлаждения в сверхтекучее состояние (так называемый механизм Kibble — Zurek, см. [16]) или при быстром увеличении плотности вихревых нитей при приближении к температуре  $\lambda$ -перехода. Хаотическая динамика этих равновесных вихрей обладает многими чертами, свойственными статистическим свойствам турбулентных вихрей.

Мы намеренно избегали цитирования в перечисленных выше примерах, потому что количество соответствующих работ огромно и их рассмотрение могло бы занимать большую часть данного параграфа. Мы исправим это упущение при дальнейшем изложении материала.

Все перечисленные выше виды сверхтекучей турбулентности имеют различные конфигурации вихревых линий (в статистическом смысле), которые приводят к различному макроскопическому поведению. Некоторые из конфигураций более или менее известны, в основном из численного моделирования, в то время как другие являются весьма неясными. Некоторые из вихревых клубков, описанных выше, состоят из замкнутых вихревых петель разного размера, равномерно распределенных в пространстве. Напротив, турбулентность во вращающихся жидкостях имеет линии, оканчивающиеся на стенках сосуда. Считается, что механически возбужденная турбулентность сформирована с помощью так называемых вихревых пучков, состоящих из набора поляризованных вихревых нитей.

Несмотря на разнообразие различных физических ситуаций, а также множества различных механизмов генерирования

хаотических вихрей, все перечисленные явления обычно называют квантовой турбулентностью. Мы также будем использовать этот термин, но будем иметь в виду, что статистические свойства хаотических вихревых клубков различаются в различных ситуациях.

Интерес к квантовой турбулентности мотивирован несколькими причинами. В первую очередь, квантовая турбулентность, как часть теории сверхтекучести, тесно связана с другими проблемами общей теории квантовых жидкостей, такими, как генерация вихрей, взаимодействие между близко расположенными вихревыми линиями и, следовательно, их перезамыкание, проблема критических скоростей, роль квантовых вихрей при фазовых переходах и т.д. Изучение стохастической системы вихрей часто ведет к нестандартным способам решения проблем, упомянутых выше. Другая мотивация состоит в том, что теория сверхтекучей турбулентности имеет также важное значение для многих прикладных задач и проблем квантовых жидкостей. В качестве важного примера можно указать на использование сверхтекучего гелия для охлаждения сверхпроводящих магнитов высокой мощности или электронного оборудования в космических исследованиях. Наличие вихревого клубка чрезвычайно сильно влияет на поток тепла, который больше не может быть описан в рамках обычной двухжидкостной модели Ландау (см., например, первую часть монографии [5]). В этой ситуации, очевидно, требуется обобщение гидродинамики сверхтекучей жидкостей, учитывающее присутствие вихревого клубка (см. далее главу 6).

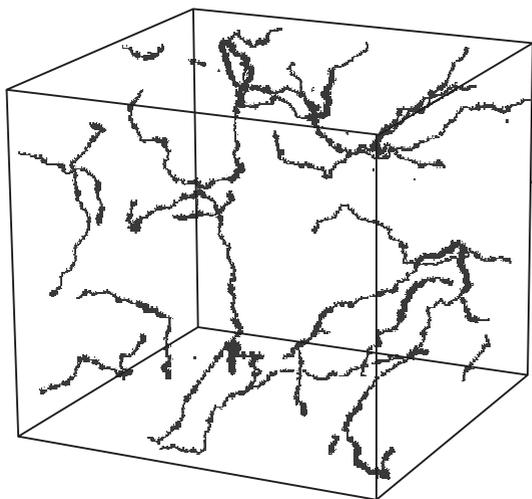
Следующее обоснование интереса к квантовой турбулентности, привлекательное для теоретиков, состоит в том, что теория сверхтекучей турбулентности является элегантно и сложной проблемой статистической физики хаотического набора струно-подобных объектов с нелинейным и нелокальным взаимодействием. Дополнительную сложность вызывают реконнекции, приводящие к слиянию или расщеплению вихревых петель. Последняя особенность позволяет классифицировать

квантовую турбулентность (с формальной точки зрения) как вариант струнной теории поля.

Еще одна линия интереса к данной теме, имеющая чрезвычайно важное значение и интенсивно обсуждаемая в настоящее время, касается взаимосвязи квантовой турбулентности с обычной турбулентностью в классических жидкостях. Это направление является несомненным мейнстримом, и оно связано с надеждами на то, что использование теории случайных вихревых линий поможет прояснить извечную проблему классической турбулентности (или, по крайней мере, объяснить некоторые ключевые особенности, такие как постоянство потока энергии в пространстве масштабов, колмогоровский спектр флуктуации скорости, перемежаемость и т.д.). Или, если быть более точным, это исследование может дать ответ на следующий вопрос: “В какой степени динамика хаотического набора вихревых линий в состоянии воспроизвести свойства реальной гидродинамической турбулентности?” Соответствующий раздел обычно называют квазиклассической квантовой турбулентностью.

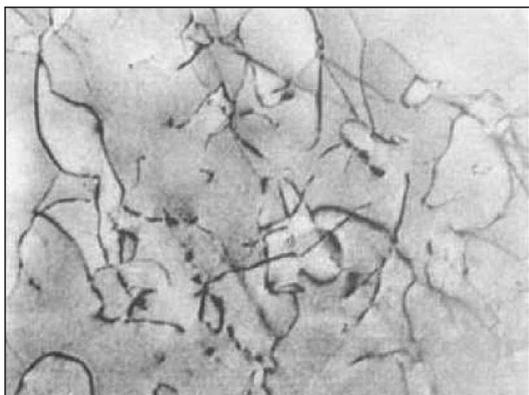
На самом деле эта идея не нова: роль концентрированных вихрей в природе турбулентности обсуждается уже в течение многих лет, имеются даже упоминания имени Леонардо да Винчи (см., например, знаменитую книгу Фриша [118]). Однако в классических жидкостях тонкие вихревые трубки, и тем более линии, являются скорее плодотворной математической моделью. Квантовые жидкости, где вихревые нити представляют собой реальные объекты, дают прекрасную возможность для развития идеи о квазиклассическом поведении квантовой турбулентности.

Современная экспериментальная техника позволяет нам обнаруживать и измерять различные характеристики, связанные с наличием вихревых нитей (см., например, недавний обзор Vinen [120, 121]). Это обстоятельство наряду с теоретическими и численными исследованиями делает квантовые жидкости чрезвычайно привлекательным объектом для тестирования идеи моделирования классической турбулентности хаотическими квантованными вихревыми линиями.



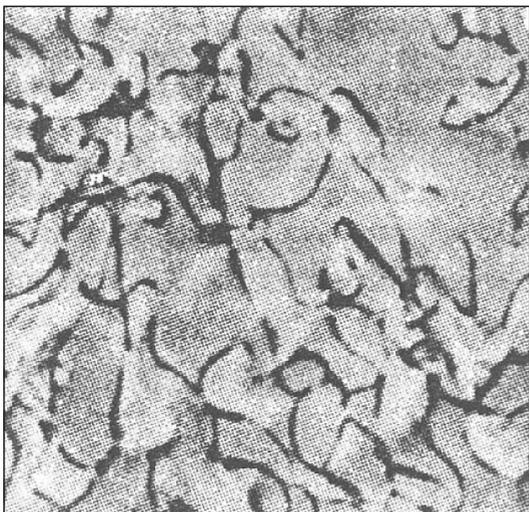
*Рис. 3.2.* Сеть космических струн. Результаты высокоточного численного моделирования эволюции космических струн в расширяющейся Вселенной. Рисунок взят из статьи Bennet et al. [132]

Кроме перечисленных выше примеров, касающихся квантовых и классических жидкостей, мы хотели бы отметить, что теория стохастического вихревого клубка представляет большой интерес с точки зрения общей физики. Эта точка зрения оправдывается тем обстоятельством, что во многих физических системах возникают неупорядоченные наборы одномерных особенностей. В качестве примеров мы укажем на глобальные космические струны [122, 123] (см., например, рис. 3.2), линии потока магнитного поля в сверхпроводниках [124], дислокации в твердых телах [125], (рис. 3.3), линейные топологические дефекты в жидких кристаллах [126] (рис. 3.4). Сравнительно недавним примером стохастического вихревого клубка является поведение нелинейного светового поля, которое пронизано хаотическими переплетенными одномерными линиями темноты. Линии темноты (lines of darkness) определяются как совокупность точек, где интенсивность — амплитуда комплекс-

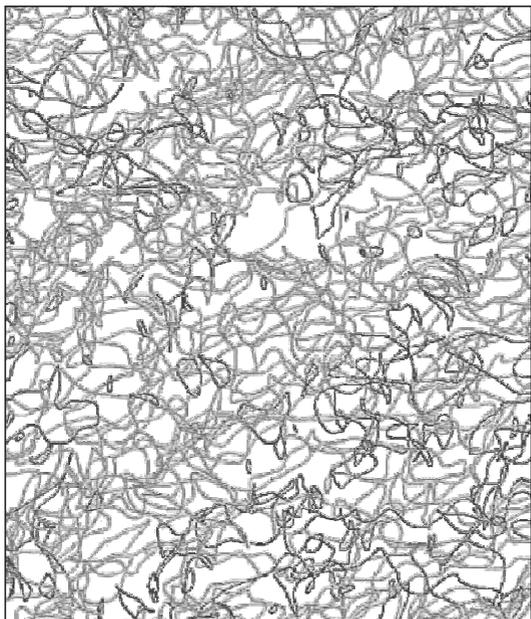


*Рис. 3.3.* Изображение сети линейных дислокаций в твердых телах. Рисунок взят из статьи Feuerbacher et al. [133]

ной огибающей — обращается в нуль [127] (см. рис. 3.5). Термин “квантовая турбулентность” также упоминается в исследованиях кварк-глюонной плазмы [128] и нейтронных звезд [129].



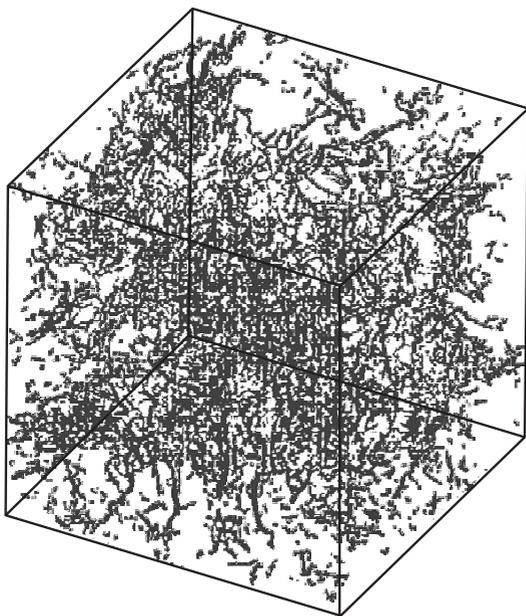
*Рис. 3.4.* Клубок струноподобных дефектов в нематическом жидком кристалле. Рисунок взят из статьи Chuang et al. [126]



*Рис. 3.5.* Нелинейные световые поля, пронизанные линиями темных областей. Эти линии являются оптическими вихрями (аналогами квантовых вихрей в He II), которые простираются по всему объему поля. Рисунок взят из статьи O’Holleran et al. [127]

Еще один пример, который чрезвычайно важен для темы монографии, — это поле завихренности, полученное в численных расчетах турбулентных потоков жидкости при умеренно больших числах Рейнольдса (см., например, [130]). Показано, что завихренность  $\omega(\mathbf{r})$  в этом случае сосредоточена в тонких трубках, поэтому вся картина напоминает клубок вихревых нитей в квантовых жидкостях (см. рис. 3.6).

Обратите внимание, мы не включили в число перечисленных объектов такой, казалось бы, очевидный пример, как полимерные цепи (см., например, [131]). Дело в том, что полимерные цепи — это материальные объекты, состоящие из цепочек атомов, в отличие от перечисленных примеров, где объекты являются топологическими дефектами — “нулями” некоторых



*Рис. 3.6.* Клубок вихревых нитей, полученный в турбулентном потоке при умеренно высоких числах Рейнольдса. Рисунок взят из статьи Vincent & Meneguzzi [130]

нелинейных полей. Тем не менее, многие формальные методы, связанные с математическим описанием данных систем, близки к теории полимеров и часто используются в теоретических подходах.

Основным источником наших представлений о структуре и динамике вихревых клубков и их связи с уравнениями движения вихревых нитей (см. предыдущую главу) являются прямое численное моделирование и, конечно же, экспериментальные данные. Теория сильно отстает как от численных исследований, так и от экспериментальных измерений. Этот факт является неудовлетворительным, причем не только для самой теории, но также и для других отраслей, которые по этой причине сами сталкиваются с рядом трудностей. Действительно, для того чтобы численные исследования и экспериментальные

измерения были более эффективными и надежными, требуются поддержка и новые идеи от аналитических исследований. Отставание аналитических исследований связано с невероятной сложностью проблемы. В следующем параграфе мы сформулируем и проанализируем основные трудности поставленной задачи.

Ситуация с численным моделированием также не простая. Основная причина очевидна. Для того чтобы описать полную динамику струноподобных вихревых линий, в том числе взаимодействие их ядер, необходимо покрыть диапазон около восьми порядков (соотношение между размером объема и радиусом сердцевин  $a_0$ ). В трехмерном случае эта проблема выходит за рамки возможностей любого современного компьютера. По этой причине существуют различные численные трюки, такие как приближение локальной индукции, периодические граничные условия — или искусственный алгоритм для описания реконнекции — так называемый *reconnection ansatz*. Этот алгоритм представляет собой набор феноменологических правил, по которому в численных вычислениях осуществляется процесс пересоединения вихревых нитей, минуя детальные расчеты этого процесса. Роль всех этих приемов неоднозначна, и их использование может привести к разным результатам при решении одинаковых проблем.

Ситуация в газах Бозе — Эйнштейна в этом смысле принципиально иная, поскольку моделируется нелинейная динамика макроскопической волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , а квантовые вихри являются вторичными объектами от этого нелинейного поля. Поэтому упомянутые выше трудности метода вихревых линий при решении уравнения Гросса — Питаевского отсутствуют. Однако при этом возникает необходимость решать трехмерную нелинейную задачу, что намного сложнее и требует намного больше компьютерных ресурсов. Кроме того, конденсат Бозе — Эйнштейна не является несжимаемой жидкостью, акустические эффекты играют большую роль. В силу изложенных причин динамика вихрей в  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He-B}$  не эквивалентна полностью динамике вихрей в слабо взаимодействующих газах

Бозе — Эйнштейна. Можно сказать, что в трехмерном случае численное исследование газов Бозе — Эйнштейна отражает более общую и более сложную проблему и что динамика вихревых линий (более точно, вихревых трубок) являются лишь частью этой проблемы.

Что касается стохастической динамики вихрей в  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}$ -В, то, по-видимому, оптимальным является комбинированный подход. А именно, использование более простого метода вихревых нитей с обращением к теории Гросса — Питаевского для иллюстрации решения некоторых сложных проблем.

### **3.2. Вихревая динамика и квантовая турбулентность**

Основной задачей аналитического и числового исследования квантовой турбулентности является описание свойств реального вихревого клубка на основе динамики вихревых нитей. В этом параграфе мы обсудим общие проблемы, которые появляются в теории квантовой турбулентности с точки зрения эволюции вихрей. Главной особенностью, которая делает эту проблему практически неразрешимой, является то, что существуют два ингредиента полной динамики: детерминированное движение нитей и случайные столкновения петель. Даже без рассмотрения пересоединений проблема чрезвычайно сложна. Действительно, уравнение (2.10), описывающее динамику движения вихревых линий, существенно нелинейно — имеет несколько видов нелинейности. Более того, из-за существования сингулярного знаменателя в законе Био — Савара (2.2) нелинейность не имеет полиномиальную форму. Далее, основное уравнение движения (2.10) также содержит нелокальные члены, выраженные законом Био — Савара (2.2). Существование взаимного трения приводит к нарушению некоторых законов сохранения, например закона сохранения энергии. Чтобы оценить сложность задачи, можно указать на то, что если в уравнении (2.10) опустить все члены, за исключением первого, представленного законом Био — Савара (2.2), а в нем

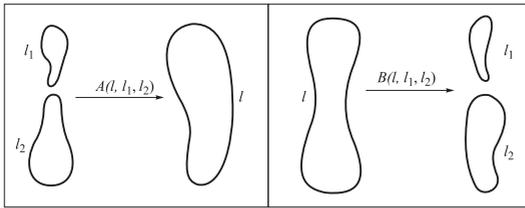


Рис. 3.7. Слияние и расщепление вихревых петель (см. текст).  
Рисунок взят из статьи автора [138]

ограничиться локальным приближением (2.5) с фиксированной длиной нити, то оставшаяся часть может быть сведена к нелинейному уравнению Шрёдингера (см. статью Hasimoto [134]). Описание стохастического поведения системы, подчиняющегося нелинейному уравнению Шрёдингера, является весьма нетривиальной проблемой (см. [135, 136, 137]).

Тем не менее некоторый прогресс был достигнут в аналитическом исследовании одиночных стохастических вихревых линий в квантовых жидкостях, соответствующие результаты будут описаны далее в главе 4.

Возможность возникновения реконнекции сильно усложняет уже и без того не простую ситуацию. Реконнекция вихревых нитей приводит к процессам слияния и распада (рекомбинации) петель. Процессы рекомбинации схематически изображены на рис. 3.7.

Слева изображены процессы слияния двух петель с длинами  $l_1$  и  $l_2$  и образование петли с длиной  $l = l_1 + l_2$ , справа показано самопересечение и превращение петли с длиной  $l$  в две дочерние петли с длинами  $l_1$  и  $l_2$ . Интенсивности этих процессов характеризуются коэффициентами  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l, l_1, l_2)$  соответственно. Чтобы прояснить роль рекомбинаций, выполним следующую численную оценку. Полная интенсивность реконнекций  $\dot{N}_{rec}$  (в единице объема) как функция плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}$  была получена в работах [99, 139, 140] (см. также главу 5)

$$\dot{N}_{rec} = C_{rec} \kappa \mathcal{L}^{5/2}, \quad (3.1)$$

где  $C_{rec}$  — константа порядка единицы и  $\kappa$  — квант циркуляции. Рассмотрим, например, типичный эксперимент со сверхтекучей турбулентностью, создаваемой противотоком, с относительной скоростью порядка 1 см/с в объеме порядка 1 см<sup>3</sup>. При этих условиях типичные значения плотности вихревых линий  $\mathcal{L}$  будут величиной порядка  $\mathcal{L} \approx 10^4$  1/см<sup>2</sup>. Межвихревое расстояние  $\mathcal{L}^{-1/2}$  примерно равно 10<sup>-2</sup> см, что совпадает по порядку величины со средним радиусом кривизны. Тогда полная интенсивность реконнекций  $\dot{N}_{rec}$  составляет величину порядка 10<sup>7</sup> событий в секунду (в единице объема). Разделив это значение на  $\mathcal{L} \approx 10^4$  1/см<sup>2</sup>, получаем, что интенсивность реконнекций на единицу длины вихревой нити, равная  $C_{rec}\kappa\mathcal{L}^{3/2}$ , является величиной порядка 10<sup>3</sup> 1/см·с. Возьмем, например, петлю с длиной порядка десяти межвихревых расстояний  $l \sim 10^{-1}$  см. Эта петля испытывает (в среднем) 10<sup>2</sup> реконнекций в секунду, Или, другими словами, она существует (в среднем) 10<sup>-2</sup> с без реконнекций (как единое целое). С другой стороны, собственная вихревая динамика петли, например динамика волн Кельвина, является гораздо более медленным процессом. Так, если мы возьмем опять петлю с размером 10<sup>-1</sup> см, тогда любой сигнал на линии (например, размытие сингулярности, появившейся вследствие реконнекции (см. [88])) занимает время порядка  $l^2\kappa \approx 10$  с. Таким образом, характерное время динамики волны Кельвина превышает время существования петли, умноженное на 10<sup>2</sup> (!!!). Если взять петлю меньшего размера, ситуация будет примерно такой же (с несколько другой количественной оценкой).

На самом деле вплоть до самых маленьких петель (порядка межвихревого расстояния) время жизни петли без реконнекций меньше, чем время, за которое волна Кельвина пробежит вокруг петли. Только для петель размера порядка межвихревого расстояния  $\mathcal{L}^{-1/2}$  эти времена будут величинами одного и того же порядка. Но это означает, что петли (как целое) не живут достаточно долго, чтобы выполнить какую либо существенную эволюцию благодаря детерминистическому движению (описываемому, например, уравнением движения (2.10)). И, наоборот,

петли очень часто сталкиваются, и в результате реконнекций они либо сливаются друг с другом, либо расщепляются. По этой причине процессы рекомбинации являются наиболее важными, и поэтому основной подход к изучению сверхтекучей турбулентности должен быть основан на рассмотрении квантовой турбулентности как набора случайно сталкивающихся и трансформирующихся друг в друга вихревых петель.

Возникает вопрос: как ввести реконнекции в математический формализм? В полной постановке проблемы мы должны иметь дело с набором объектов (вихревые петли), число которых не фиксировано, они могут рождаться и умирать. Поэтому требуется некоторый аналог вторичного квантования с той разницей, что объекты (вихревые петли) сами по себе обладают бесконечным числом степеней свободы с очень сложной динамикой. Это позволяет классифицировать квантовую турбулентность как вариант полевой теории струн. Ясно, что такая проблема вряд ли может быть решена в ближайшее будущее и требуется значительное упрощение в постановке задачи.

Изучение динамики одиночной петли (игнорируя процессы рекомбинации) может быть полезно для некоторых частных ситуаций, например при исследовании нелинейных волн Кельвина. Однако этот путь развития теории сверхтекучей турбулентности является тупиковым просто потому, что он не позволяет инкорпорировать процессы реконнекций в математическую схему.

Действительно, это приближение стартует с уравнения движения вихревых линий в форме  $ds(\xi)/dt = F(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}, t)$ , где  $F(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}, t)$  является функционалом от полной конфигурации вихревых нитей  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$ , в общем нелинейным и нелокальным (см. 2.10). Переменная  $\xi$  вдоль нити принимает значения  $0 < \xi < L$ , где  $L$  — длина вихревой нити. Эволюция, описанная таким уравнением, имеет смысл только до момента, когда петля либо сталкивается и перезамыкается с другой петлей, либо происходит самопересечение, и рождаются две дочерние петли. В этот момент времени переменная  $\xi$ , заданная в интервале

$0 < \xi < L$ , теряет смысл, и некоторый новый набор переменных должен быть включен (или исключен) вместо  $0 < \xi < L$ .

Все, что было сейчас изложено, является общим описанием, и неясно, как это может быть реализовано в математической форме. Тем более что число реконнекций огромно. Попытка аналитического трактования описанной проблемы была предпринята в контексте космических струн (где возникает полностью идентичная ситуация) в работе Embacher [141], который развил технику, описывающую появление (или исчезновение) целого набора новых переменных  $\xi'$ , который вставляется (или удаляется) внутри интервала  $0 < \xi < L$ . Эта процедура соответствует присоединению или отсоединению новых петель во время события реконнекции. Формализм работы Embacher [141] использует очень громоздкий (нелинейный и нелокальный) функционал, и соответствующая теория вряд ли разрешима. Заметим, что представленная проблема легко разрешаема в численном моделировании динамики вихревых нитей, где новый полный набор переменных  $\{\xi\}$  для разных, вновь образованных (или исчезнувших) петель переопределяется после каждого события реконнекции.

Таким образом, исследование динамики одиночной линии является не очень удобной отправной точкой для рассмотрения динамики многих петель, для обобщения на случай с пересоединениями. В этом смысле другой, “противоположный”, подход, основанный на рассмотрении вихревого клубка в виде набора петель с небольшим числом собственных степеней свободы, как представляется, является более перспективным. Такой подход будет изложен в главе 5, посвященной кинетике взаимодействующих и сталкивающихся колец и петель.

Таким образом, мы обсудили, как могла бы выглядеть общая постановка проблемы квантовой турбулентности, основанная на динамике вихревых нитей.

### 3.3. Сценарий Фейнмана

В этом разделе рассматриваются ранние работы по теории сверхтекучей турбулентности, прежде всего статьи Фейнмана, Холла и Вайнена, и это не только дань исторической справедливости. На самом деле основные идеи, концепции и сценарии, представленные в этих работах, не потеряли актуальность. Более того, например, знаменитое уравнение Вайнена, полученное для описания эволюции плотности вихревой линий  $\mathcal{L}(t)$ , в настоящее время широко используется в других областях, где также имеются одномерные топологические дефекты, такие как космические струны или линейные дислокации в твердых телах (см., например, [16, 142]). Мы будем излагать здесь концепцию квантовой турбулентности так, как она была первоначально разработана, несмотря на то, что в настоящее время многие черты (например, распад вихревого клубка) получили несколько отличные интерпретации и объяснения.

Как было описано в главе 1, явление сверхтеплопроводности сверхтекучего гелия имеет место только при очень малых тепловых потоках, порядка  $10 \text{ мВт/см}^2$ , после чего линейный закон  $\dot{Q} \propto \nabla T$  (обязанный пуазейлевскому течению нормальной компоненты) больше не действует (см. рис. 3.1 в первой части книги [5] и формулу (1.24)). В частности, Gorter & Mellink [6] показали, что свойство противотока (т.е. двухжидкостная гидродинамика) остается, но возникает некоторое дополнительное взаимодействие (сопротивление) между двумя компонентами. Для того чтобы преодолеть сопротивление, необходимо применять большие перепады температуры, т.е. свойство сверхтеплопроводности значительно нарушается, и вместо линейной зависимости между  $\nabla T$  и  $\dot{Q}$  следует их кубическая зависимость (1.24).

В своей знаменитой статье Фейнман [13] объясняет наблюдаемое экспериментально существование критических скоростей и появление взаимного трения следующим образом. Он предполагает, что в противотоке He II, при превышении некоторой критической относительной скорости  $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ , появляются

ся квантованные вихри, такие же как и в случае вращающегося гелия. Причины и процессы образования вихрей не обсуждаются. В отличие от случая вращающегося гелия, где из-за симметрии сгенерированные вихревые нити выровнены вдоль оси вращения, вихревые линии в противотоке произвольно ориентированы и запутаны. По аналогии с обычными жидкостями Фейнман предположил, что: “вихревые линии закручиваются все более сложным образом, увеличивая свою длину за счет кинетической энергии основного потока. То есть, если жидкость течет с равномерной скоростью и вихревые линии зарождаются где-то выше по течению, то далее, вниз по течению, вихревые линии формируют запутанный вихревой клубок с большой длиной вихревых нитей. К равномерной скорости движения добавляется сложное нерегулярное поле скоростей, а энергия для увеличения длины нитей и для флуктуации скорости поставляется из основного потока”. В какой-то мере этот сценарий напоминает “вихревую мельницу”, описанную позже Шварцем [143].

Линии при увеличении длины заполняют более плотно объем жидкости, и все большую роль начинают играть процессы взаимодействия между вихревыми линиями. Фейнман предположил, что вихревые нити по мере увеличения их плотности часто сталкиваются в пространстве, и результатом этого столкновения является реконнекция линий (см. рис. 2.2). Как обсуждалось в предыдущем параграфе, реконнекция вихревых нитей приводит к процессам слияния и распада (рекомбинации) петель (см. рис. 3.7). Фейнман сделал предположение, что последнее свойство доминирует, т. е. в среднем происходит распад вихревых петель. Это приводит к лавинообразному процессу формирования все меньших и меньших петель. Схематически описанный процесс изображен на рис. 3.8.

Далее Фейнман предполагает: “когда масштаб мелких колец становится порядка межатомных расстояний, что является заключительным этапом каскада, вихревое движение вырождается в тепловые возбуждения”. В некотором смысле Фейнман отождествил тепловые возбуждения – ротоны с микроскопически малыми вихревыми кольцами.

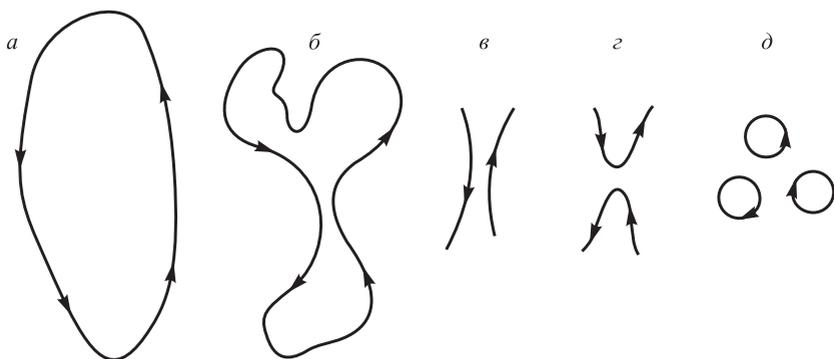


Рис. 3.8. Схематическое изображение лавинообразного дробления вихревых петель: *a* — начальный этап; *b* и *в* — стадии распада; *г* — стадия перезамыкания; *д* — стадия вырождения вихревых колец в тепловые возбуждения. Рисунок взят из статьи Фейнмана [13, fig. 10]

Таким образом, происходит уменьшение общей длины вихревых нитей и преобразование энергии вихрей, которая первоначально была взята из основного потока, в тепловые возбуждения. Это уменьшение общей длины, при достаточно высокой плотности вихревого клубка, компенсирует процесс роста за счет взаимного взаимодействия квантовых вихрей с нормальной компонентой. Таким образом, достигается равновесное состояние, характеризующееся общей длиной вихревых нитей (на единицу объема), которая является функцией термодинамических переменных, а также относительной скоростью  $v_{ns}$ . Структура вихревой линии представляет собой сложной запутанный клубок, чья хаотичная динамика определяется совокупностью рассматриваемых процессов. Фейнман назвал это сложное состояние сверхтекучей турбулентностью. Он прозорливо угадал те процессы, которые значительно позже были получены в прямом численном моделировании динамики хаотических вихревых линий.

### 3.4. Феноменологическая теория Вайнена

Качественная модель Фейнмана получила дальнейшее развитие в классических трудах Вайнена [90, 91, 92]. Он сформулировал эти идеи в количественных соотношениях и, в частности, получил уравнение (носящее его имя), которое описывает макроскопическую динамику вихревого клубка. Уравнение Вайнена описывает эволюцию общей длины вихревых линий на единицу объема  $\mathcal{L}(t)$  (см. уравнение 2.40). Мы изложим теорию Вайнена, сосредоточившись на вопросе о том, как микроскопические динамические законы движения вихревой линии приводят к макроскопическим соотношениям сверхтекучей турбулентности. Вайнен рассматривал однородную сверхтекучую турбулентность. Понятно, что говорить об однородности можно лишь при условии, когда характерное межвихревое расстояние  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$  много меньше характерных размеров системы  $d$ . В окончательном варианте Вайнен ввел поправки, связанные с конечностью  $d$ . Здесь такого рода эффекты обсуждаться не будут. Рассмотрим, следуя Вайнену, сверхтекучую турбулентность (СТ) в противотоке гелия II (см. рис. 1.9), созданном при подаче плотности теплового потока  $\dot{Q}$  на нагреватель и характеризуемом постоянным значением скорости противотока  $\mathbf{v}_{ns}$ . Обратим внимание, что величина  $\mathbf{v}_{ns}$  фигурирует здесь как некоторый фиксированный внешний параметр. Целью теории Вайнена было получение эволюционного уравнения для плотности вихревых нитей (ПВН)  $\mathcal{L}(t)$ . Он предположил, что изменение  $\mathcal{L}(t)$  во времени подчиняется уравнению первого порядка (безынерционность). При этом производная  $d\mathcal{L}/dt$  представляет собой разность двух членов, точно отвечающих качественной картине Фейнмана:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{gen} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{dec} \quad (3.2)$$

Первое слагаемое в правой части данного соотношения соответствует росту ПВН, обязанному силе взаимодействия между вихрями и нормальной компонентой, второе — уменьше-

нию ПВН, обязанному каскадному дроблению вихревых петель. Чтобы определить вид обоих слагаемых, Вайнен привлек размерные соображения, аналогию с классической турбулентностью и известные результаты на динамике одиночных вихревых колец. В своих рассуждениях он сделал важное предположение о том, что  $d\mathcal{L}/dt$  является функцией только величины  $\mathcal{L}$  в данный момент времени, силы взаимодействия  $\mathbf{f}$  и циркуляции  $\kappa$  (а также функцией некоторых параметров). Это предположение означает локальность производной  $d\mathcal{L}/dt$ , как и в классической турбулентности, где такой подход считается справедливым. Размерный анализ приводит к соотношению

$$\left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right]_{gen} = \kappa \mathcal{L}^2 \phi_{gen} \left[ \frac{\mathbf{f}}{\rho_s \kappa \mathcal{L}^{1/2}} \right], \quad (3.3)$$

где  $\phi_{gen}$  — некоторая безразмерная функция своего аргумента. Предполагается, что зависимость от скорости противотока  $\mathbf{v}_{ns}$  включена в силу  $\mathbf{f}$ . Определение вида функции  $\phi_{gen}$  является одним из наиболее тонких вопросов феноменологической теории. Здесь Вайнен опирался на полученный им результат (см. [60]), касающийся динамики единичного вихревого колечка, ориентированного поперек противотока Не II. Этот результат гласит, что скорость роста радиуса кольца (и, следовательно, его длины) линейно связана с силой  $\mathbf{f}$ . А именно, колечко радиуса  $r$  изменяет свой размер согласно следующему уравнению (ср. с уравнением (2.75)):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{|\mathbf{f}|}{\rho_s \kappa}. \quad (3.4)$$

Предполагая далее, что свойство линейности по силе сохраняется также для вихревого клубка и сила трения  $\mathbf{f}$  входит в комбинации  $\mathbf{f}/\rho_s \kappa$ , Вайнен заключает, что

$$\left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right]_{gen} = a_V |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2}, \quad (3.5)$$

где  $a_V$  — постоянная порядка величины коэффициента трения  $a$ , которая должна быть определена экспериментально.

В своем обзоре, посвященном вихрям в гелии, Hall [95] интерпретировал соотношение (3.5) следующим образом. Он предположил, что в вихревом клубке с ПВН, равной  $\mathcal{L}(t)$  характерная средняя кривизна  $R$  является величиной порядка межвихревого расстояния  $\delta$ , которое в свою очередь — порядка  $\mathcal{L}^{-1/2}$ . Подстановка в соотношение (3.4)  $r \sim \mathcal{L}^{-1/2}$  дает изменение  $(d\mathcal{L}/dt)_{gen}$  в виде (3.5). В дальнейшем идея о том, что средняя кривизна вихревой нити сопоставима с межвихревым расстоянием, неоднократно используется в качественном анализе сверхтекучей турбулентности.

Вид слагаемого  $(d\mathcal{L}/dt)_{ann}$ , отвечающего за распад вихрей, Вайнен определил из аналогии с классической турбулентностью. Он предположил, что фейнмановская картина дробления вихрей вполне аналогична колмогоровскому распаду в классической турбулентности. В теории однородной изотропной турбулентности диссипация энергии, связанная с каскадом энергии, описывается следующим соотношением:

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial t}\right)_{dec} \propto -\frac{u^3}{l_{visc}}, \quad (3.6)$$

где  $u$  — характеристическая скорость пульсаций на масштабе  $l_{visc}$ , соответствующем вязкому пределу инерционного интервала (см., например, Монин и Яглом [119]). Взяв в качестве предела инерционного интервала  $l_{visc}$  межвихревое расстояние  $\delta \sim \mathcal{L}^{-1/2}$ , а для скорости  $u$  азимутальную скорость вокруг вихревой линии на расстоянии  $\delta$  (что эквивалентно  $\kappa/2\pi\delta = (\kappa/2\pi)\mathcal{L}^{1/2}$ ), Вайнен получил

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{dec} = -\chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} \mathcal{L}^2 = -\beta_V \mathcal{L}^2. \quad (3.7)$$

Здесь  $\beta_V$  — другой параметр теории Вайнена, по порядку величины близкий к значению  $\kappa/2\pi$ . Суммируя процессы роста и затухания плотности вихревых нитей, приходим к соотношению, которое называется уравнением Вайнена:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = a_V |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2. \quad (3.8)$$

Вихревой клубок, макроскопическая динамика которого управляется уравнением (3.8), будем называть, вслед за Вайненом, автомодельной сверхтекучей турбулентностью. Этот термин означает возможность описания динамики ПВН  $\mathcal{L}(t)$  на языке самой  $\mathcal{L}$ , не прибегая к другим, более тонким, характеристикам вихревого клубка.

Теория Вайнена, включая уравнение (3.8), играет исключительно важную роль в понимании процессов, происходящих в турбулентном He II. Фактически все без исключения работы, связанные с этой темой, обращаются к данной теории.

Понимая важность соотношения (3.8) для будущих приложений, а также нестрогость теоретических предпосылок, приведших к этому уравнению, Вайнен параллельно провел эксперимент, в котором проверил справедливость формулы (3.8) и определил значения феноменологических параметров  $a_V$  и  $\beta_V$ . Схема проведения эксперимента была следующей. На нагреватель, расположенный на одном из концов канала, подавался ступенчатый тепловой импульс. Стенки канала служили резонатором второго звука. Связывая дополнительное (к безвихревому случаю) затухание второго звука с длиной вихревых нитей (см. подраздел 7.1), Вайнен воспроизвел картину развития ПВН во времени. Результат удовлетворительно согласовался с уравнением (3.8). Однако, учитывая разброс экспериментальных данных и погрешность эксперимента, он отметил, что не исключена другая форма зависимости  $d\mathcal{L}/dt$  как функции  $\mathcal{L}$  и  $\mathbf{v}_{ns}$ . В частности, он допускал, что экспериментальный результат (хотя, возможно, и хуже) может соответствовать иной зависимости генерирующего члена, а именно:

$$\left[ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right]_{gen} = a_{alt} |\mathbf{v}_{ns}|^2 \mathcal{L}. \quad (3.9)$$

Это соотношение соответствует квадратичной зависимости функции  $\phi_{gen}$  (3.3) от своего аргумента  $\phi(\xi) \sim \xi^2$ . В пользу такого выбора можно привести следующие аргументы. Зависимость типа (3.9) по духу ближе соответствует феноменологической теории классической турбулентности, развитой Ландау

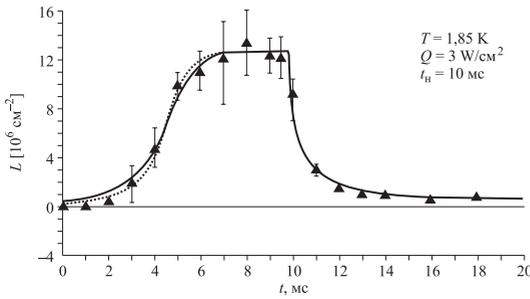


Рис. 3.9. Эволюция плотности вихревых линий в He II при прохождении мощного прямоугольного импульса второго звука. Входной поток тепла (амплитуда импульса) равен  $3 \text{ Вт/см}^2$ , длительность импульса 10 мс, температура ванны 1,85 К. Линии отвечают решениям уравнений (3.8) (сплошные линии) и (3.10) (пунктирная линия). См. пояснения в работе [96] и ссылки в ней

(см., например, [144]). Действительно, полагая, что турбулентность характеризуется некоторым параметром (в данном случае  $\mathcal{L}$ ) и производная  $[d\mathcal{L}/dt]_{gen}$  является аналитической функцией величины  $\mathcal{L}$ , можно получить, что (3.9) — первый член разложения в ряд по степеням  $\mathcal{L}$ . Далее, поскольку фигурирующая в (3.3) величина  $\phi_{gen}$  является скалярной функцией векторного аргумента, представляется более логичным предположить, что разложение этой функции начинается с квадрата аргумента. Если выбрать генерирующий член  $(d\mathcal{L}/dt)_{gen}$  в виде (3.9), то полное уравнение должно иметь следующий альтернативный вид:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = a_{alt} |\mathbf{v}_{ns}|^2 \mathcal{L} - \beta_{alt} \mathcal{L}^2, \quad (3.10)$$

где  $a_{alt}$ ,  $\beta_{alt}$  — некоторые параметры. На рис. 3.9 приведено сравнение экспериментальных результатов по развитию ПВН  $\mathcal{L}(t)$  с решениями уравнения Вайнена (3.8) и альтернативного уравнения (3.10).

Из рисунка видно, что в пределах экспериментальной точности оба уравнения одинаково хорошо соответствуют измененным результатам. По этой причине представляется, что

“прямые” измерения эволюции величины  $\mathcal{L}(t)$  вряд ли способны определить точный вид генерирующего члена в уравнении для эволюции ПВН. Тем не менее, несмотря на указанные трудности, в настоящее время для описания нестационарных явлений в сверхтекучей турбулентности используется уравнение эволюции ПВН  $\mathcal{L}(t)$  в форме (3.8).

В стационарном случае ПВН  $\mathcal{L}_\infty$  должна быть равна:

$$\mathcal{L}_\infty = \frac{a_V^2}{\beta_V^2} \mathbf{v}_{ns}^2 = \gamma^2 \mathbf{v}_{ns}^2. \quad (3.11)$$

Вспоминая, далее, выражение (2.8) для взаимной силы между вихрями и нормальной компонентой (на единицу длины вихревой линии) и полагая, что клубок изотропен и что полная сила трения пропорциональна полной длине вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ , можно заключить, что сила трения Гортера — Меллинка, действующая на сверхтекучую компоненту, равна

$$F_{ns} = (2\alpha\rho_s\kappa/3)\mathcal{L}v_{ns} = A(T)\rho_s\rho_n v_{ns}^3 \quad (3.12)$$

Это соотношение немедленно приводит к формуле Гортера—Меллинка (1.24). Таким образом, эксперимент, инициирующий возникновение целой отрасли в науке, был объяснен на основе теории Фейнмана — Вайнена. На самом деле, в формуле (3.12) должна быть некоторая добавка, связанная с тем, что самоиндуцированная скорость при усреднении не исчезает (см. предыдущую главу, а также статью Шварца [61]). Однако эта добавка может быть внесена в переопределение постоянной  $A(T)$  Гортера — Меллинка

Исследуя экспериментально свободный распад ПВН  $\mathcal{L}$  (после выключения противотока), Вайнен обнаружил дополнительные сложности, связанные со вторым членом в уравнении (3.8). Из экспериментов по затуханию второго звука в стационарном противотоке он определил отношение  $a_V/\beta_V$ . Комбинируя эти измерения с экспериментами по росту плотности вихревых нитей (см. 3.8), Вайнен измерил отдельно величину  $a_V$ . Таким образом, можно определить независимо величины

$a_V$  и  $\beta_V$ . Однако величина  $\beta_V$  может быть определена также из эксперимента по свободному распаду вихревого клубка. В соответствии с уравнением (3.8), при выключении противотока, величина  $\mathcal{L}^{-1}(t)$  должна изменяться по закону

$$\mathcal{L}^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}(0) + \beta_V t.$$

Здесь  $\mathcal{L}(0)$  — это ПВН в момент выключения противотока. В эксперименте было показано, что  $\mathcal{L}^{-1}(t)$  в асимптотике стремится к линейной функции. Однако, во-первых, наблюдается некоторый переходной процесс, природа которого не понятна. Во-вторых, коэффициент наклона асимптотической прямой в 4–6 раз меньше  $\beta_V$ , полученного из сравнения растущего случая со случаем свободного распада клубка. Чтобы снять противоречие, Вайнен предположил, что свободный распад вихрей и распад вихрей во время действия приложенного противотока отвечают различным состояниям вихревого клубка. Как следствие, соотношение (3.8), полученное на основе размерного анализа, справедливо в обоих случаях (с противотоком и без), но коэффициенты  $\beta_V$ , соответствующие этим двум случаям, различны, скажем,  $\beta_V^{gr}$  и  $\beta_V^{dec}$ , хотя оба состояния описывают автомодельную сверхтекущую турбулентность. Иными словами, по мнению Вайнена, генерирующий и распадный члены не просто аддитивно складываются, а имеется некоторое влияние их друг на друга. Причем существует одно важное различие в зависимости поведения коэффициентов  $\beta_V^{gr}$  и  $\beta_V^{dec}$  от температуры. Если коэффициент  $\beta_V^{gr}$  в эксперименте с включенным противотоком растет с величиной  $a_V$ , то коэффициент  $\beta_V^{dec}$  в эксперименте со свободным распадом уменьшается. Идея существования двух автомодельных состояний находится в некотором логическом противоречии с самой концепцией автомодельных состояний. Введение же двух состояний эквивалентно признанию, что имеется еще какая-то дополнительная характеристика, влияющая на макроскопическую динамику клубка. Есть несколько попыток устранить это расхождение, в которых учитывается обратная реакция вихрей на скорость противотока (см. статьи [96, 116, 145, 89], а также главу 7).

Помимо описанных сложностей, в теории Вайнена возникает еще один вопрос, связанный со временем образования вихревого клубка  $\tau_v$ . Если вслед за Вайненом определить величину  $\tau_v$  как время, необходимое для развития ПВН до своего половинного значения, то из уравнения (3.8) получим для  $\tau_v$  следующее выражение:

$$\tau_v = \int_0^{\mathcal{L}_\infty/2} \frac{d\mathcal{L}}{a_V |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2}. \quad (3.13)$$

Этот интеграл расходится в нижнем пределе, т.е.  $\tau_v \rightarrow \infty$ . Происхождение этой расходимости связано с тем, что уравнение (3.8), которое, будучи уравнением баланса между ростом и распадом уже существующего клубка, не содержит никакой информации о первоначальном возникновении вихрей. Эксперименты, выполненные Вайненом, а также другими авторами, которые исследовали сверхтекучую турбулентность, созданную противотоком, показывают, что время  $\tau_v$  (естественно, конечное) является функцией приложенного противотока. Эмпирически найденная зависимость имеет следующий вид:

$$\tau_v = a_V(T) Q^{-3/2}. \quad (3.14)$$

Чтобы исправить возникшую сложность, Вайнен ввел в уравнение (3.8) малый затравочный член, учитывающий механизм зарождения вихревых нитей. Этот затравочный член имеет вид  $\gamma |\mathbf{v}_{ns}|^{5/2}$ , где  $\gamma$  — некоторая сильно зависящая от температуры величина. Вычисление интеграла (3.13) с добавочным членом в знаменателе подынтегрального выражения приводит к формуле (3.14). Идея использования затравочного члена не получила широкого применения. В исследовании динамики сверхтекучей турбулентности используется другой подход, а именно, предполагается существование некоего фонового значения ПВН  $\mathcal{L}_0$ , который в расчетах является просто подгоночным параметром.

Помимо описанных сложностей следует отметить, что уравнение Вайнена получено для величин тепловых потоков, не превышающих значения  $0,3 \text{ Вт/см}^2$ . В связи с этим возникает

вопрос: в какой степени результаты Вайнена могут быть экстраполированы в область больших тепловых потоков. Кроме того, не были исследованы область низких температур (ниже 1), а также область температур вблизи  $\lambda$ -перехода.

Изложенное выше показывает, что основные идеи теории Фейнмана — Вайнена оказались плодотворными и самосогласованными и остаются, по существу, без изменений до сих пор, хотя в изучении квантовой турбулентности был достигнут существенный прогресс. Как будет показано ниже, в современной версии феноменологическая теория только модернизирована. Более того, многие отклонения и эффекты (подробно описанные, например, в обзорах [7, 96]), могут быть уложены в рамки общей концепции Фейнмана — Вайнена с учетом более тонких вопросов динамики вихревых нитей. Конечно, это утверждение не относится к микроскопической теории, т. е. теории, которая изучает свойства вихревого клубка, стартуя с уравнения движения вихревых нитей, и ставит целью описать тонкую структуру вихревого клубка. Состояние такой микроскопической теории является довольно слабым, мы представим его в следующих разделах.

## 4. Аналитические исследования 1: динамика линий без учета реконнекций

Как обсуждалось в главе 3, динамика вихревого клубка состоит из двух основных ингредиентов. Первым из них является детерминированное движение элементов линий, которое подчиняется уравнению (2.10). Другим ингредиентом являются случайные столкновения (с последующим слиянием) или самопересечения (с последующим расщеплением) вихревых петель. Количество реконнекций (в единицу времени) огромно (см. формулу (3.2)), поэтому динамику сверхтекучей турбулентности следует рассматривать, прежде всего, как кинетику слияния и расщепления вихревых петель, которые, однако, имеют свою собственную, очень сложную динамику с бесконечным числом степеней свободы.

Соответственно, в современной литературе, представляющей попытки аналитических исследований по сверхтекучей турбулентности, можно выделить два направления. Первое связано с динамикой одиночной линии. Пересоединения в этих подходах либо полностью игнорируются, либо в лучшем случае авторы, упоминая важную роль реконнекций, обсуждают их на основе некоторых дополнительных предположений. Тем не менее, остается неясным, как ввести их в эту теоретическую схему (см. раздел 3.2). Другая, в некотором смысле противоположная, тенденция состоит в трактовке квантовой турбулентности как кинетики сливающихся и расщепляющихся вихревых петель, при этом обращается меньше внимания на их собственную динамику.

Есть и другие (более экзотические) подходы, такие как теория перколяции (Schakel [146], Chorin [147, 148]), а также трактовки вихревых клубков на основе результатов теории фракталов или из топологических и геометрических соображений (Varenghi et al. [100, 139]). Однако в представленной монографии мы сосредоточим свое внимание на первых двух тенденциях. В этой главе будут изложены различные теории, которые

имеют дело только с нелинейной динамикой одиночной вихревой линии (игнорируя полностью реконнекции).

#### 4.1. Кинетическое уравнение для распределения длины в пространстве кривизны

Одна из первых попыток аналитического описания сверхтекучей турбулентности была предпринята Шварцем [115]. В указанной работе он вернулся к основным положениям сценария Фейнмана с целью получить количественное описание вихревого клубка. Более того, это была попытка получить не просто количественные характеристики описанных Фейнманом процессов но, главным образом, сами эти процессы, стартуя от первых принципов, т. е. на основе уравнения движения вихревой нити (представленных в главе 2). Шварц стартовал с основного уравнения движения нити (2.10). Первый выполненный им шаг (вызвавший и вызывающий сейчас множество возражений) — это представление самоиндуцированной скорости в локальной форме (2.5). Если в дополнение пренебречь вторым (поперечным) коэффициентом взаимного трения  $\alpha''$  (что оправданно в большой температурной области), то уравнение движения нити (2.10) в системе сверхтекучего движения редуцируется к следующему соотношению:

$$\dot{\mathbf{s}} = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''). \quad (4.1)$$

В локальном приближении скорость элементов вихревой линии зависит только от локального значения самоиндуцированной скорости  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \beta \mathbf{b}/R$  (где  $\mathbf{b}$  — бинормаль (см. рис. 1.2)). Шварц предложил рассматривать локальный радиус кривизны  $R (= 1/|\mathbf{s}''|)$  элемента линии и его ориентацию в пространстве (в случае азимутальной симметрии — это угол  $\theta$  между  $\dot{\mathbf{s}}_i$  и скоростью противотока  $\mathbf{v}_{ns}$ ) в качестве фазового пространства для описания структуры и динамики хаотических вихревых клубков. Альтернативным утверждением является то, что динамика вихревой нити зависит от первой

$\mathbf{s}'(\xi, t)$  и второй  $\mathbf{s}''(\xi, t)$  производных величины  $\mathbf{s}(\xi, t)$  по аргументу  $\xi$ . Соответственно, Шварц ввел функцию распределения общей длины линии  $\lambda(R, \theta, t)$ . Уравнение эволюции для функции  $\lambda(R, \theta, t)$  можно рассматривать в качестве кинетического уравнения в представленном фазовом пространстве

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\alpha}{\beta} (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i) \cdot \dot{\mathbf{s}}_i \lambda. \quad (4.2)$$

Правая часть возникает из уравнений для растяжения вихревой линии (2.75). На этом этапе имеется одна принципиальная трудность. Величины  $\partial \theta / \partial t$  и  $\partial R / \partial t$  не являются функциями  $R$  и  $\theta$  или, что то же самое, функциями величин  $\mathbf{s}'$  и  $\mathbf{s}''$ , а содержат также третью  $\mathbf{s}'''$  и четвертую  $\mathbf{s}^{IV}$  производные от величины  $\mathbf{s}(\xi, t)$ . Иными словами, кинетическое уравнение (4.2) является незамкнутым, а введенное фазовое пространство (т. е. переменные  $R$  и  $\theta$ ) — неполным. Попытки расширить фазовое пространство до четвертой производной  $\mathbf{s}^{IV}$  и, соответственно, переопределить функцию распределения как  $\lambda(\mathbf{s}', \mathbf{s}'', \mathbf{s}''', \mathbf{s}^{IV}, t)$  будут также неудачными. Действительно, нетрудно видеть, что временные производные  $\partial \mathbf{s}''' / \partial t$  и  $\partial \mathbf{s}^{IV} / \partial t$  будут включать в себя производные еще более высокого порядка, что требует дальнейшего расширения фазового пространства и так далее до бесконечности. Такая ситуация вполне аналогична попыткам построения уравнений для функций распределения из уравнения Луивилля в статистической механике. Эта попытка, как известно, также приводит к бесконечной боголюбовской цепочке уравнений. Обрыв цепочки возможен при наличии некоторого малого параметра, как, например параметра газовой теории разреженного газа. В этом случае цепочку можно оборвать, а именно, выразить быстро релаксирующие многочастичные функции распределения через одночастичную. К сожалению, данная процедура невозможна для случая вихревого клубка, поскольку все производные  $\mathbf{s}^{(n)}$  релаксируют с одним характерным временем  $\tau \cong \beta / v_{ns}^2$ . В этом можно убедиться, дифференцируя соотношение (4.1) по  $\xi$ .

Другая возможность оборвать цепочку, как известно, возникает в случае плотного газа (или в случае дальнедействующих сил). В этом случае траектория частицы в фазовом пространстве представляет собой случайные блуждания в усредненном поле, созданном другими частицами. В этом случае эволюция функции распределения подчиняется уравнению Фоккера — Планка (см., например, курс Ландау — Лифшиц, Питаевский [149]). Кроме слабости взаимодействия, ведущего к малым изменениям в функции распределения, требуется еще предположение марковости процесса, т. е. отсутствия корреляций между последовательными актами взаимодействия.

Именно эту ситуацию использовал Шварц для описания стохастической динамики вихревого клубка. Он предположил, что нелокальные члены, к которым он отнес также возникающие в уравнении (4.1) высшие (более высокие, чем вторая производная  $s''$ ) производные, существенны только в процессах пересечения вихревых нитей. Качественный анализ показал, что для клубка со средним радиусом кривизны порядка межвихревого расстояния можно принять предположение об отсутствии корреляции в процессах пересечения. Как следствие, динамика элемента нити, обязанная высшим производным, сводится к случайным блужданиям и, следовательно, может быть учтена феноменологически введенными диффузионными членами (несколько другой подход, приводящий к аналогичному выводу, изложен в статье Yamada et al. [94]). Далее Шварц определил соответствующие диффузионные члены, правда, с неопределенными коэффициентами диффузии, которые сами являются некоторыми функционалами от функции распределения  $\lambda(R, \theta, t)$ . Численно решая затем окончательное уравнение (4.2) для  $\lambda(R, \theta, t)$ , Шварц использовал некоторую самосогласованную схему, позволившую ему определить необходимые параметры.

Полученное решение для функции распределения  $\lambda(R, \theta, t)$  позволило Шварцу описать многие свойства сверхтекучей турбулентности. Мы хотели бы остановиться здесь на результатах,

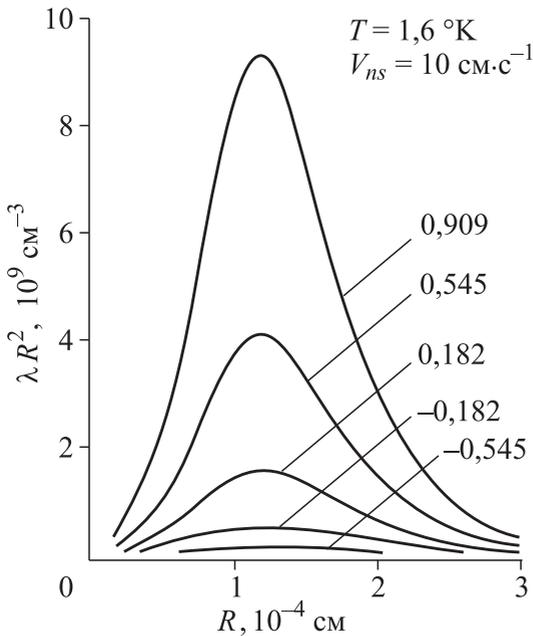


Рис. 4.1. Типичный вид функции распределения  $\lambda(R, \theta, t)$ . Кривые соответствуют различным значениям  $\cos \theta$ . Рисунок взят из статьи Шварца [115, fig. 13]

касающихся внутренней структуры вихревого клубка и вывода уравнения для ПВН  $\mathcal{L}(t)$ .

На рис. 4.1 изображена функция распределения  $\lambda(R, \theta, t)$ . Как можно видеть, функция распределения  $\lambda(R, \theta, t)$  сильно зависит от аргумента  $\theta$ . Таким образом, вихревой клубок является существенно анизотропным для функции распределения  $\lambda(R, \theta, t)$ , т.е. по направлениям вектора  $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ . Этот результат находится в противоречии с моделью Вайнена, предположившего полную изотропию клубка, и является одним из важнейших современных представлений о структуре вихревого клубка.

Другой важный результат, представленный на этом графике, — наличие пика, не зависящего от величины  $\theta$  у функции

распределения  $\lambda(R, \theta, t)$  при  $R = R_{peak}$ . Это говорит о том, что в клубке преобладают размеры кривизны порядка  $R_{peak}$ . Существенным является тот факт, что наиболее вероятный радиус кривизны  $R_{peak}$  близок к среднему межвихревому расстоянию  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ , отличаясь от него множителем  $c(T)$ , т. е.  $\delta = c(T)R_{peak}$ , что эквивалентно формуле (2.51). Величина  $c(T)$  зависит только от температуры, но не от относительной скорости. Более того, Шварц обнаружил, что безразмерная функция распределения  $\lambda_{red}$ , построенная по правилу

$$\lambda_{red} \left( \frac{R}{R_{peak}}, \theta \right) = \mathcal{L}^{-1} \tilde{\lambda}(R, \theta) R_{peak}^3, \quad (4.3)$$

является функцией, слабо зависящей как от  $v_{ns}$ , так и от температуры  $T$ . Иными словами, вся зависимость от этих параметров погружена в величины  $R_{peak}$  и  $\mathcal{L}$ , и функция  $\lambda_{red} \left( \frac{R}{R_{peak}}, \theta \right)$  обладает скейлинговыми свойствами. Это означает, что при увеличении  $v_{ns}$  вихревой клубок становится плотнее, сохраняя свою структуру в новом масштабе  $R' = R/R_{peak}$ . В частности, степень анизотропии клубка не зависит от приложенной скорости  $v_{ns}$ . Этот результат является в равной степени как великодушным, так и очень неожиданным и загадочным фактом. Действительно, поскольку единственной причиной появления анизотропии в структуре вихревого клубка является приложенное внешнее течение, то, казалось бы, естественно ожидать изменения этих свойств с изменением  $v_{ns}$ .

Следующий важный результат, полученный Шварцем в цитируемой работе, — это вывод динамического уравнения для плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}(t)$ . В рамках Шварца приближения величина  $\mathcal{L}(t)$  является нулевым моментом функции распределения

$$\mathcal{L}(t) = \int \lambda(R, \theta, t) 2\pi R^2 dR d\theta. \quad (4.4)$$

Таким образом, чтобы получить эволюционное уравнение для  $\mathcal{L}(t)$ , необходимо проинтегрировать соотношение (4.2). Диффузионные члены, содержащие высшие производные от  $\lambda$  по ар-

гументам  $R, \theta$ , входящие в величины  $\partial\theta/\partial t$  и  $\partial R/\partial t$ , в соответствии с общей картиной приводят лишь к перераспределению функции  $\lambda$  в  $R, \theta$  пространстве, не меняя ПВН  $\mathcal{L}(t)$ . Оставшиеся члены могут быть проинтегрированы. С учетом обсужденных выше скейлинговых свойств результат может быть записан в следующем виде:

$$\dot{\mathcal{L}} = g_1 \alpha v_{ns} \frac{\mathcal{L}}{R_{peak}} - g_2 \alpha \beta \frac{\mathcal{L}}{R_{peak}^2} \quad (4.5)$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  — некоторые коэффициенты, полученные интегрированием скейлинг-инвариантной функции  $\lambda_{red}(R')$  по  $R', (R' = \frac{R}{R_{peak}})$ , следовательно  $g_1$  и  $g_2$  не зависят от  $\mathbf{v}_{ns}$ . Используя далее условие, что  $\delta = c(T)R_{peak}$ , а среднее межвихревое расстояние  $\delta$  равно  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ , уравнение (4.5) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{L} = \alpha_s |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_s \mathcal{L}^2, \quad (4.6)$$

совпадающему по форме с уравнением Вайнена (3.8).

Таким образом, исходя из “первых” принципов, т.е. из динамических уравнений для движения вихревой нити (2.10), редуцированного после некоторых упрощений к соотношению (4.1)), Шварц получил макроскопическое уравнение для эволюции ПВН  $\mathcal{L}(t)$ . В отличие от теории Вайнена, Шварц не использовал каких-либо подгоночных параметров, получая все коэффициенты в рамках своего теоретического рассмотрения. Нужно отметить однако, что  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  сильно (почти на порядок) отличаются от соответствующих коэффициентов  $\alpha_V$  и  $\beta_V$  в уравнении Вайнена (3.8).

Другое и более фундаментальное различие состоит в том, что физическая интерпретация соотношения (4.6) радикально отличается от концепции Фейнмана — Вайнена. В отличие от их модели, где, напоминаем, рост ПВН  $\mathcal{L}(t)$  был связан с взаимным трением, а распад — с каскадным процессом дробления

вихревых колец, в приближении Шварца оба слагаемых связаны со взаимодействием вихрей с нормальной компонентой.

Учитывая важность эволюционного уравнения для величины  $\mathcal{L}(t)$ , а также описанные в предыдущем пункте трудности и сомнения, возникшие при его феноменологическом выводе, имеет смысл критически проследить главные допущения, принятые Шварцем при выводе соотношения (4.6). Главные сомнения (ранее отмеченные), касаются, конечно, законности вывода кинетического уравнения для функции  $\lambda(R, \theta, t)$ .

Прежде всего, как отмечал сам Шварц, использование полученного им равновесного решения  $\lambda(R, \theta, t)$  для описания неравновесного, переходного процесса не является вполне законным. Конечно, смена состояния клубка может происходить квазиравновесным образом (клубок, изменяя свое состояние, проходит все стадии, оставаясь очень близким к равновесию), но это всего лишь гипотеза, не подкрепленная убедительными доказательствами. Во всяком случае, равновесие предполагает зависимость  $\mathcal{L} = (a_V^2/\beta_V^2)v_{ns}^2 = \gamma^2 v_{ns}^2$ , (см. (3.11)) или близость к этому условию, а, например, при ступенчатых изменениях относительной скорости  $v_{ns}$ , это соотношение в высшей степени нарушается.

Но даже если принять условие квазиравновесности процесса, все равно имеется некий изъян в логических построениях Шварца. При выводе уравнения (4.6) существенно использовалось скейлинговое свойство приведенной функции распределения  $\lambda_{red}$  (см. уравнение (4.3)). Однако нужно заметить, что с равным основанием могла бы быть использована эквивалентная форма для  $\lambda_{red}$ , а именно:

$$\lambda_{red}(R\gamma c(T)v_{ns}, \theta) = \mathcal{L}^{-1}\lambda(R, t)(\gamma c(T)v_{ns})^{-3}, \quad (4.7)$$

где, напомним,  $\gamma$  определяется равенством  $\mathcal{L}^{1/2} = \gamma v_{ns}$ . Действительно, коль скоро в равновесном состоянии имеет место такая цепочка равенств

$$R_{peak} = \delta/c(T) = 1/c(T)\mathcal{L}^{1/2} = 1/c(T)\gamma v_{ns}, \quad (4.8)$$

то любая из трех последних величин в цепочке равенств (4.8) может служить для обезразмеривания аргумента  $R$  у функции  $\lambda_{red}$ , и  $\lambda_{red}$ , конечно, должна сохранять свои скейлинговые свойства. В равновесном состоянии, когда  $\mathcal{L} = (a_V^2/\beta_V^2)v_{ns}^2 = \gamma^2 v_{ns}^2$ , это, разумеется, не приводит ни к каким изменениям. Однако, если же взять для вывода уравнения эволюции для ПВН  $\mathcal{L}(t)$  соотношение (4.8) и вместо  $1/c(T)\mathcal{L}^{1/2}$  использовать  $1/c(T)\gamma v_{ns}$ , то нетрудно видеть, что оба слагаемых в (4.5) приобретут одинаковую структуру, и динамическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$\dot{\mathcal{L}} = \alpha_{alt} v_{ns}^2 \mathcal{L}. \quad (4.9)$$

То есть, во-первых, как предполагал Фейнман, консервативное взаимодействие (хотя и описывает как рост, так и убывание ПВН  $\mathcal{L}(t)$ ) приводит в среднем к увеличению тотальной длины. Во-вторых, распадный член в эволюции  $\mathcal{L}(t)$  отсутствует, поскольку в модели Шварца не заложен процесс каскада в пространстве вихревых колец и последующего превращения их в термические возбуждения. А в-третьих, генерирующий член совпадает в этом случае с альтернативным уравнением (см. (3.10) и предложенную дискуссию по поводу этого соотношения). Конечно, изложенные выше выводы связаны с конкретным выбором скейлингового параметра (как, впрочем, и выводы Шварца) и на том же основании могут быть подвергнуты критике. На самом деле мы здесь столкнулись, хотя и на другом уровне, с той же проблемой, как и Вайнен при выводе генерирующего члена из размерного анализа (см. раздел 3.4). В методе Шварца, как и в теории Вайнена, выбор генерирующего члена на основе размерного анализа возможен лишь с точностью до некоторой функции  $\phi_{gen}$  аргумента  $v_{ns}/\kappa\mathcal{L}^{1/2}$ . В равновесии  $\mathcal{L}^{1/2} \propto v_{ns}$ , что устраняет трудный вопрос о выборе вида  $\phi_{gen}$ . В неравновесном случае вопрос выбора аргумента функции  $\phi_{gen}$  остается открытым.

## 4.2. Ланжевенковская постановка задачи

### 4.2.1. Функциональный формализм

С целью создания математического аппарата для работы со стохастической динамикой вихревых нитей Мигдал [49] разработал функциональный формализм. В частности, стартуя с уравнения ланжевенковского типа, он вывел функциональное уравнение Фоккера — Планка для характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  (см. (2.77)). Основной целью этого формализма была разработка стратегии для описания турбулентности в терминах стохастической динамики вихревых нитей. Первоначально эта работа была выполнена для классических, очень тонких вихревых трубок в обычных жидкостях. Что касается квантовых вихрей, то этот случай соответствует отсутствию нормальной компоненты, т.е. нулевой температуре. Обобщение на случай конечной температуры будет выполнено позднее, в следующем параграфе.

Основная идея является стандартной и состоит в введении случайной (ланжевенковской) силы  $\zeta(\xi, t)$  в уравнения движения вихревой линии ((2.10)) (с равными нулю коэффициентами  $\alpha, \alpha'$ )

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i + \zeta(\xi, t). \quad (4.10)$$

Напомним,  $\dot{\mathbf{s}}_i$  — это самоиндуцированная скорость Био — Савара, входящая в правую часть соотношения (2.2). Сверхтекучая жидкость предполагается покоящейся  $\mathbf{v}_s = 0, \mathbf{v}_n = 0$ . Конечно, поскольку речь идет об уравнении на скорость движения  $\dot{\mathbf{s}}$  (а не на ускорение), более правильно было бы говорить не о случайных силах, а о случайных скоростях, вызванных, например, хаотически расположенными вихрями, окружающими данный элемент вихревой нити. Мы, однако, будем придерживаться терминологии, принятой при изучении ланжевенковских процессов, и называть случайное воздействие “силой” (или “перемешивающей силой”). Предполагается, что перемешивающая случайная сила является белым шумом во времени

и имеет “распределенную” пространственную корреляционную функцию вида

$$\langle \zeta_\alpha(\xi, t) \cdot \zeta_\beta(\xi', t') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') F(\xi - \xi'). \quad (4.11)$$

Характеристический функционал  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$ , предложенный Мигдалом, определяется соотношением (2.77). Выведем уравнение эволюции величины  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$ . Далее мы опустим индекс  $j$  для маркировки различных петель и будем писать  $\int d\xi$  вместо  $\sum_j \int d\xi_j$ . Мигдал назвал полученное соотношение уравнением Фоккера — Планка, хотя было бы правильнее называть это равенство уравнением Хопфа (см, например, [119]), резервируя термин “уравнение Фоккера — Планка” для эволюции функционала вероятности  $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$ . Принимая во внимание, что, по определению,  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  зависит от времени только через переменную  $\mathbf{s}_\alpha(\xi, t)$ , и используя цепное правило для функциональной производной, мы получим следующие уравнения для эволюции величины  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$ :

$$\begin{aligned} \frac{dW(\{\mathbf{P}(\xi)\}, t)}{dt} &= \\ &= \left\langle i \int d\xi \dot{\mathbf{s}}_{i\alpha}(\xi, t) \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \exp \left( i \int d\xi \mathbf{s}_\alpha(\xi, t) \cdot \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle i \int d\xi [\dot{\mathbf{s}}_{i\alpha} + \zeta_\alpha(\xi, t)] \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \exp \left( i \int d\xi \mathbf{s}_\alpha(\xi, t) \mathbf{P}'_\alpha(\xi, t) \right) \right\rangle. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Слагаемое с “перемешивающей силой”  $\zeta_\alpha(\xi, t)$  (второй член в квадратных скобках) во второй строчке уравнения (4.12) может быть преобразовано с помощью хорошо известного свойства гауссовых величин, а именно, с помощью соотношения Новикова — Фурутцу (см. [49]). Применяя это правило для флуктуирующей экспоненты, мы получаем

$$\langle W(\xi, t) \zeta_\alpha(\xi_1, t) \rangle = \int d\tilde{\xi} \frac{\delta W(\xi, t)}{\delta \zeta_\beta(\tilde{\xi}, t)} \langle \zeta_\beta(\tilde{\xi}, t) \zeta_\alpha(\xi_1, t) \rangle. \quad (4.13)$$

Функциональная производная  $\delta W(\xi, t)/\delta\zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t)$  вычисляется с использованием цепного правила

$$\frac{\delta W(\xi, t)}{\delta\zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')} = \int d\xi_2 \frac{\delta W(\xi, t)}{\delta\mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)} \frac{\delta\mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)}{\delta\zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')}, \quad (4.14)$$

где функция Грина  $\delta\mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)/\delta\zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')$  при  $t \rightarrow t'$  удовлетворяет условию

$$\frac{\delta\mathbf{s}_\beta(\xi_2, t)}{\delta\zeta_\alpha(\tilde{\xi}, t')} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta(\xi_2 - \tilde{\xi}). \quad (4.15)$$

Собрав все выкладки вместе и подставив результат в (4.12), мы получим (заменяв переменную интегрирования  $\xi$  на  $\xi_1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dW(\{\mathbf{P}(\xi)\}, t)}{dt} = & -\frac{1}{2} \int \int d\xi_1 d\xi_2 \mathbf{P}'_\alpha(\xi_1) \mathbf{P}'_\alpha(\xi_2) F(\xi_1 - \xi) \\ & + i \int d\xi_1 \mathbf{P}'_\alpha(\xi_1) \dot{\mathbf{s}}_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Уравнение (4.16) — искомое эволюционное уравнение Фоккера — Планка для характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}_j(\xi_j)\})$  (см. [49]). В этой форме оно весьма неудобно, так как переменные  $\mathbf{s}(\xi)$  не полностью исключены, они входят в выражение  $\dot{\mathbf{s}}_i$  для формулы Био — Савара. Исключение функции  $\mathbf{s}(\xi)$  быть выполнено с помощью  $\mathbf{k}$ -представления. В  $\mathbf{k}$ -пространстве закон Био — Савара гласит (см. формулу (2.66)):

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi, \mathbf{t}) = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int i\mathbf{k} \times \mathbf{s}' e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}(\xi, \mathbf{t}) - \mathbf{s}(\xi_2, \mathbf{t}))} d\xi_2 \frac{4\pi d^3\mathbf{k}}{k^2}. \quad (4.17)$$

Другой путь для получения этой формулы состоит в применении  $\mathbf{k}$ -представления для поля завихренности и формулы  $\mathbf{v}_\mathbf{k} = i\mathbf{k} \times \omega_\mathbf{k}/k^2$  (см. текст после соотношения (2.56)). Используя, далее, что  $\mathbf{s}'$  равно  $\delta/i\delta\mathbf{P}$  (применительно к экспоненте), перепишем уравнение (4.16) в следующем виде:

$$\frac{\partial W[\mathbf{P}(\xi), t]}{\partial t} = \int d\xi_1 \mathbf{P}'_\alpha(\xi_1) \int d\xi_2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.18)$$

$$\left[ -\frac{1}{2}F(\mathbf{k})\mathbf{P}'_{\alpha}(\xi_2) - i\frac{e_{\alpha\beta\gamma}k_{\gamma}}{\mathbf{k}^2}\frac{\delta}{\delta\mathbf{P}_{\beta}(\xi_2)} \right] W[\mathbf{P}(\xi) + \mathbf{k}\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi), t].$$

Далее соотношение (4.18) будем называть “уравнение Мигдала”. Здесь функция  $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi)$  определяется с помощью ступенчатой функции  $\theta(\xi)$

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi) = \theta(\xi - \xi_1) - \theta(\xi - \xi_2).$$

Эта функция появилась из преобразования Фурье для выражения  $\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi_2, t)$ , входящего в закон Био — Савара в  $\mathbf{k}$ -представлении (4.17), и коррелятора случайной силы (4.11). Функциональное уравнение (4.18) является аналогом известного уравнения Хопфа ([119]) для классической турбулентности, соответственно, оно также необычайно сложное. В настоящее время нет никакой надежды решить эту проблему. Тем не менее уравнение (4.18) позволяет сделать некоторые выводы, касающиеся стохастической динамики вихрей (см. оригинальную статью [49]). Мигдал также предложил способ изучения этого уравнения численно на основе вариационного принципа. Мы хотели бы еще раз обратить внимание читателей, что процессы пересоединения и рекомбинации вихревых петель полностью остаются вне рассмотрения в данном формализме.

#### 4.2.2. Термодинамическое равновесие в системе хаотических квантованных вихрей

Функциональный формализм Мигдала, описанный в подразделе 4.2.1, хотя и опускает процессы реконнекций, является очень сложным и нуждается в существенных упрощениях. Имеется один физический важный случай, когда уравнение Фоккера — Планка имеет точное решение — это случай термодинамического равновесия. Квантованные вихри играют фундаментальную роль в термодинамических свойствах квантовых жидкостей, сверхпроводников и других систем. Фазовые превращения, кинетические свойства, а также много других физических явлений связаны с появлением в системах квантованных вихрей и их динамикой. Как и в случае квантовой турбулентности, вихревые нити могут развиваться в запутанные

хаотические структуры — вихревые клубки. Поэтому, чтобы описать любые термодинамические явления в квантовых жидкостях, содержащих вихревые клубки, необходимо иметь информацию относительно их структуры и статистики. Самый распространенный способ преодолеть эту трудность состоит в том, чтобы трактовать вихревые петли как своего рода тепловые возбуждения и использовать термодинамические методы. Другими словами, принимается, что набор хаотических вихревых петель находится в тепловом равновесии с основной системой (квантовой жидкостью).

Предположение о тепловом равновесии основано на фундаментальных физических принципах, если рассматривать квантованные вихри как подсистему, погруженную в термостат, с которым вихри обмениваются энергией. Роль термостата в данном случае играет соответствующее физическое поле, образующее сверхтекучую компоненту с соответствующими тепловыми возбуждениями — квазичастицами.

Хорошо известно, что распределение Гиббса может быть альтернативно получено в рамках некоторых модельных задач, например, из кинетических уравнений или из уравнений Фоккера — Планка. Этот путь, конечно, не имеет такую большую общность, как принцип максимальной энтропии, но взамен он позволяет проследить динамические детали установления распределения Гиббса. Это, в свою очередь, может прояснить также динамические детали и механизмы разрушения равновесного состояния. В данном подразделе мы выбираем этот способ и ставим своей целью изучить, как в рамках ланжевеновского подхода устанавливается тепловое равновесие в системе хаотических вихревых петель.

Чтобы показывать это, мы сначала получим уравнение Фоккера — Планка, соответствующее ланжевеновской динамике вихревой петли в He II. В отличие от изложения Мигдала (см. предыдущий подраздел 4.2.1), мы используем не характеристический функционал, а непосредственно функционал распределения вероятности. Кроме того, мы воспользуемся урав-

нением движения вихревой нити (2.10) со слагаемыми, отвечающими за взаимодействие с нормальной компонентой.

Рассмотрим динамику вихревых петель в трехмерном пространстве без границ. Выберем уравнение движения вихревой линии элементов в виде соотношения (2.10) с отпущенным малым слагаемым, содержащим коэффициент  $\alpha'$ .

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) - \alpha(\mathbf{s}' \times \dot{\mathbf{s}}_i) + \zeta(\xi, t), \quad (4.19)$$

где  $\dot{\mathbf{s}}_i$  — самоиндуцированная скорость (см. соотношение (2.2)). Также в этом подразделе мы исследуем случай, когда внешнее течение отсутствует:  $\mathbf{v}_s = 0, \mathbf{v}_n = 0$ . Предполагается, что корреляционная функция для ланжевеновской силы  $\zeta(\xi, t)$  связана с температурой системы через флуктуационно-диссипативную теорему

$$\langle \zeta_\alpha(\xi_1, t) \cdot \zeta_\beta(\xi_2, t') \rangle = \frac{k_B T \alpha}{\rho_s \pi (\hbar/m)} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1, \eta_2}. \quad (4.20)$$

Введем следующий функционал распределения вероятности:

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \langle \mathcal{P}^M \rangle = \langle \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi, t)) \rangle. \quad (4.21)$$

Здесь  $\delta$  является дельта-функционалом в пространстве конфигураций вихревых петель. Усреднение выполнено по ансамблю случайной силы. Эволюция величины  $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$  может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= \\ &= \left\langle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta \mathcal{P}^M}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \dot{\mathbf{s}}_d \right\} \right\rangle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \langle \zeta(\xi, t) \mathcal{P}^M \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{s}}_d$  — детерминированная часть скорости, определяемая уравнением (4.19). Опуская стандартные детали (см., например, [117], а также предыдущий параграф), запишем следующее из (4.22) функциональное уравнение Фоккера — Планка для эволюции функционала распределения вероятности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \{ [\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)] \mathcal{P} \} + \\ \int \int d\xi d\xi' \langle \zeta_\alpha(\xi) \zeta_\beta(\xi') \rangle \delta(\xi - \xi') \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1, \eta_2} \times \\ \times \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_{\eta_1}(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_{\eta_2}(\xi')} \mathcal{P} = 0. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \zeta_\alpha(\xi) \zeta_\beta(\xi') \rangle$  — корреляционная функция случайной силы, действующей на линию (см. (4.20)).

Наша цель теперь состоит в том, чтобы доказать, что уравнение (4.23) имеет решение в виде  $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}) = \mathcal{N} \exp(-E\{\mathbf{s}\}/T)$ , где  $\mathcal{N}$  — нормировочный множитель. Величина  $E\{\mathbf{s}\}$  — энергия вихревой системы (см. уравнение (2.62)).

Мы начинаем доказательство с первого слагаемого в подынтегральном выражении (4.23). Используя параметризацию, в которой скорость  $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0)$  нормальна вихревой нити, перепишем (2.63) в виде

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)}. \quad (4.24)$$

Тогда первое слагаемое в подынтегральном выражении (4.23) имеет вид

$$\mathcal{N} \frac{1}{\rho_s \kappa} \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left( \mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \exp(-E(\{\mathbf{s}\})/k_B T) \right). \quad (4.25)$$

Выполняя функциональное дифференцирование и используя тензорные обозначения, мы перепишем (4.25) в следующем виде (мы опускаем коэффициент перед интегралом):

$$\begin{aligned} \int d\xi \exp(-E\{\mathbf{s}\}/k_B T) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi)}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} + \\ + \int d\xi \exp(-E\{\mathbf{s}\}/k_B T) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \left( \mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{k_B T} \int d\xi \exp(-E\{\mathbf{s}\}/k_B T) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}'_{\beta}(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_{\gamma}(\xi, t)} \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_{\alpha}(\xi, t)}. \quad (4.26)$$

Производная оператора  $\delta \mathbf{s}'_{\beta}(\xi)/\delta \mathbf{s}_{\alpha}(\xi) \propto \delta_{\beta\alpha}$  поэтому все члены тождественно исчезают из-за симметрии. Таким образом, обратимый (не связанный с диссипацией) член в исходном уравнении движения (2.10) не дает вклада в динамику функционала распределения вероятности. Принято говорить, что это дивергентно-свободное слагаемое. Понятно, что сказанное выше относится только к случаю теплового равновесия, т. е. справедливо только для решения Гиббса.

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении (4.23) может быть преобразовано с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы для линии (2.36) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int d\xi \int d\xi' \langle \zeta_{\alpha}(\xi) \cdot \zeta_{\beta}(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \mathcal{P} = & \quad (4.27) \\ \int d\xi \int d\xi' \frac{k_B T \alpha}{\pi} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1, \eta_2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \exp(-E\{\mathbf{s}\}/k_B T). \end{aligned}$$

Воспользовавшись снова соотношениями (2.63) и (4.24), мы можем легко убедиться, что получившееся выражение точно компенсирует второе слагаемое в подынтегральном выражении (4.23), как это и должно быть.

Таким образом, рассматривая ланжевеновскую динамику хаотического набора квантовых вихревых нитей, мы проследили механизм установления термодинамического равновесия в вихревом клубке. При анализе нашего доказательства можно видеть, что основная причина состоит в том, что случайная сила  $\zeta(\xi, t)$  действующая на элементы вихревой нити, в уравнении Фоккера — Планка точно компенсирует диссипативный поток распределения вероятности. Причем компенсация происходит в подынтегральном выражении, иными словами, реализуется детальный баланс между накачкой и диссипацией. В свете этого наблюдения представляется естественным, что при возникновении других источников случайного воздействия на систему (например, при развитии неустойчивости в теку-

шем/противотекущем He II) возможен переход в неравновесное (турбулентное состояние).

На основании результатов, полученных в данном подразделе, можно исследовать задачи по динамике вихревых нитей в термодинамическом приближении. Например, можно проследить рост вихревых зародышей под действием термических флуктуации, как это было сделано Иорданским ([150]) в случае идеальных вихревых колец. Другой пример касается равновесной (квазиравновесной) динамики вихрей вблизи точки фазового перехода, которая описывает рост плотности вихревых нитей при приближении к  $T_\lambda$  (см., например, [16, 151]).

Можно рассматривать, однако, задачи по стохастическому поведению вихревых нитей безотносительно к термодинамике, но тогда, когда корреляционная функция является белым шумом как в пространстве, так и во времени. Данная ситуация может реализоваться, например, когда изучаемая вихревая нить окружена ансамблем других вихревых нитей. В этом случае флуктуирующее дельта-скоррелированное поле скоростей окружающего вихревого клубка играет роль “перемешивающей силы” для изучаемой вихревой нити. При этом температура, в соответствии с флуктуационно-диссипативной теоремой, будет неким искусственным параметром, связанным с интенсивностью “перемешивающей силы”. Близким примером статической задачи, где появляется искусственная температура, является известная модель Онзагера по статистической механике двумерных вихрей [152–154]. Схожие вопросы для классической турбулентности обсуждены в известной книге McComb [155].

#### **4.2.3. Тепловое равновесие вихревых линий в противотоке He II**

В этом подразделе мы опишем динамику вихревой нити под действием случайной силы Ланжевена в присутствии относительной скорости  $\mathbf{v}_{ns}$ . Мотивация данной темы обусловлена тем, что хаотическое множество вихревых нитей, так называемая квантовая турбулентность, развивается в противотоке сверхтекучего гелия без случайного перемешивания, поэтому

важно сравнить оба механизма генерации вихревого клубка. Выберем уравнение движения вихревой линии элементов в виде соотношения (2.10), с опущенным малым слагаемым, содержащим коэффициент  $\alpha'$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}'(\xi) \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)) + \zeta(\xi, t). \quad (4.28)$$

Корреляционная функция для ланжевеновской силы  $\zeta(\xi, t)$ , как предполагается, удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме 4.20. Уравнение Фоккера — Планка для эволюции во времени для функционала распределения вероятностей  $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \langle \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi, t)) \rangle$  (см. определение (4.21)) может быть получено из уравнения движения (4.28) стандартным образом (см., например, [117] а также предыдущие два подраздела 4.2.1 и 4.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \{ [\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}'(\xi)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi))] \mathcal{P} \} + \\ \iint d\xi d\xi' \langle \zeta_\alpha(\xi) \zeta_\beta(\xi') \rangle \delta(\xi - \xi') \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1, \eta_2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_{\eta_1}(\xi)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_{\eta_2}(\xi')} \mathcal{P} = \\ = 0 \quad (4.29) \end{aligned}$$

Нашей целью является продемонстрировать, что уравнение (4.29) имеет решение в виде распределения Гиббса

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right), \quad (4.30)$$

где гамильтониан  $H_c\{\mathbf{s}\}$  в присутствии относительной скорости  $\mathbf{v}_{n_s}$  имеет вид

$$H_c(\{\mathbf{s}\}) = E(\{\mathbf{s}\}) - \mathbf{P} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (4.31)$$

Здесь  $\mathbf{P}$  — импульс Лэмба, определенный в разделе 2.3.2 (формула (2.59)). В обычной статистической механике, когда  $\mathbf{P}$  — истинный импульс частицы (или квазичастицы), справедливость уравнений (4.30), 4.31 очевидна и является следствием

преобразований Галилея. Так как импульс Лэмба  $\mathbf{P}$  не является “реальным” импульсом, справедливость соотношений (4.30),(4.31) не очевидна и нуждается в детальной проверке. Далее мы приведем доказательство реализации распределения Гиббса в виде уравнения (4.30) с гамильтонианом (4.31).

В первую очередь рассмотрим два тождества. Вариационная производная энергии вихрей по переменной  $\mathbf{s}(\xi)$  связана с самоиндуцированной скоростью  $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi)$  Био — Савара следующим образом:

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \Rightarrow \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) = \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}. \quad (4.32)$$

Что касается вариационной производной от функционала  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ , то для постоянного вектора  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  имеет место соотношение

$$\rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_{ns} = \frac{\delta(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{ns})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}. \quad (4.33)$$

В качестве следующего шага мы должны подставить распределение Гиббса (4.30) в уравнение Фоккера — Планка (4.29). В случае постоянного противотока величина  $\mathbf{v}_n$  не зависит от времени и пространственных координат, что допускает возможность работать в системе координат, где  $\mathbf{v}_n$  равна нулю.

Мы начнем с недиссипативных членов, это первые два слагаемых в квадратных скобках в первой строчке уравнения Фоккера — Планка (4.29). Легко проверить, что они преобразуются к следующему виду:

$$\int d\xi \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right) \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left[ \left( \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right) \right] - \frac{1}{k_B T} \int d\xi \left( \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right) \left( -\frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{s}'(\xi) \mathbf{v}_s \right) \exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right). \quad (4.34)$$

Давайте проверим первую строку, которая включает в себя дифференцирование слагаемых внутри квадратной скобки

$$\int d\xi \left\{ \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left[ \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + \mathbf{v}_s \right] \right\} \exp \left( -\frac{H_c\{\mathbf{s}\}}{k_B T} \right). \quad (4.35)$$

Выполняя функциональное дифференцирование и используя тензорные обозначения, получим, что первое слагаемое в квадратных скобках пропорционально

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \left( \mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \right). \quad (4.36)$$

Функциональная производная  $\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi)/\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi) \propto \delta_{\beta\alpha}$ , поэтому этот член исчезает в силу симметрии. Кроме того, функциональная производная от постоянной скорости  $\mathbf{v}_s$ , очевидно, также обращается в нуль,  $\delta \mathbf{v}_s/\delta \mathbf{s}(\xi) = 0$ .

Слагаемые второй строки уравнения (4.34) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k_B T} \int d\xi \left\{ \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} (\mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}) - \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{v}_s) (\mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}) + \right. \\ & \left. + \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s - \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s) \mathbf{v}_s \right\} \exp \left( -\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T} \right). \quad (4.37) \end{aligned}$$

Как и ранее, первое слагаемое в фигурных скобках обращается в нуль в силу симметрии, а четвертый член исчезает, так как произведение  $\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{v}_s$  нормально вектору  $\mathbf{v}_s$ . Остальные преобразуются к следующему выражению (мы опускаем фактор  $-1/k_B T$ ), и выбираем параметризацию, где  $\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{s}'(\xi) = 0$ :

$$\begin{aligned} & \int d\xi \left[ \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s - \rho_s \kappa (\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{v}_s) (\mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}) \right] \exp \left( -\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T} \right) = \\ & \int d\xi \left[ -\mathbf{v}_s \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} + (\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{v}_s) (\mathbf{s}'(\xi) \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)}) + \frac{\delta E(\{\mathbf{s}\})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \mathbf{v}_s \right] \times \\ & \quad \times \exp \left( -\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T} \right). \quad (4.38) \end{aligned}$$

В силу тождества (4.32) комбинация  $\mathbf{s}'(\xi)\delta E(\{\mathbf{s}\})/\delta \mathbf{s}(\xi, t) = 0$ , и все члены уравнения (4.38) равны нулю.

Таким образом, обратимые (не связанные с диссипацией) члены в исходном уравнение движения (2.10) не приводят к эволюции функционала распределения вероятностей  $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$ . Мы опять говорим, что это дивергентно-свободный член. Понятно, что вышеизложенное относится только к случаю теплового равновесия, т. е. справедливо только для решения (4.30).

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении (4.29) может быть преобразовано с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы (4.20) следующим образом:

$$\int d\xi \int d\xi' \frac{k_B T \alpha}{\pi} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{n_1, n_2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \exp(-H\{\mathbf{s}\} / k_B T) \quad (4.39)$$

Применяя тождества соотношений (4.24) и (4.33), мы можем легко убедиться, что полученное выражение точно компенсирует диссипативный член в подынтегральном (4.29) (напомним, что мы работаем в системе отчета, где  $\mathbf{v}_n$  равна нулю). Это означает, что распределение Гиббса с гамильтонианом  $H\{\mathbf{s}\}$  (4.31) действительно является решением уравнения Фоккера — Планка, как это и должно быть в соответствии с общими физическими принципами. Важно отметить, что импульс Лэмба  $\mathbf{P}$  (2.59) сыграл роль реального импульса.

Таким образом, мы показали, что в противотоке Не II может быть реализовано состояние термодинамического равновесия вихревых линий. Это замечательный результат, так как обычно в данной ситуации рассматриваются только турбулентные явления. Соотношения (4.30), (4.31) предназначены для вычисления статистической суммы, и, соответственно, для определения различных свойств вихревого клубка. Примером реализации такой стратегии могут служить работы по статистической механике взаимодействующих струн [156, 101]). Ключевым моментом в этих работах является так называемый трюк Эдвардса (см. [157]), а именно, величину  $\exp[-E\{\mathbf{s}\}]$  можно записать

в виде гауссова интеграла по траекториям от вспомогательного векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , который легко вычисляется.

С использованием этой методики возможно вычислить структурные факторы квантовой турбулентности, например, среднюю поляризацию вихревых петель, входящих в состав вихревого клубка в противотоке He II, а также анизотропию и среднюю кривизну. Эти величины были ранее получены только в численной работе Шварца [61]. Представляет интерес сравнить результаты по равновесным свойствам вихревого клубка, которые могут быть получены на основании развитого здесь формализма, с многочисленными данными по квантовой турбулентности.

### 4.3. Хаотические малые возмущения на вихревых линиях. Нелинейные волны Кельвина

Помимо термодинамического равновесия, описанного в предыдущих разделах, имеются другие примеры исследования неравновесной динамики одиночных вихревых нитей, игнорируя реконнекции. Одним из очевидных упрощений общего функционального формализма Мигдала, описанного в подразделе 4.2.1, является рассмотрение задачи о малых деформациях вихревых нитей, что позволяет использовать теорию возмущений. Часто деформации вихревых линий называют волнами Кельвина (Kelvin waves (KW)). Существует, однако, некоторая терминологическая путаница в отношении содержания этого определения. Кельвин в своей классической работе “Вибрации колоннообразного вихря” [158] представил анализ волнового движения столбчатого вихря (подробнее об этом см., например, книгу Алексеенко, Куйбина & Окулова [25]). В этой работе Кельвин рассматривает бесконечно малые возмущения тонкой вихревой трубки, а именно отклонение  $a$  линии (линии центра трубки) от ее невозмущенного положения (которое рассматривалось как прямая линия) должно быть намного меньше длины деформации вдоль нити  $\lambda$ , т. е.  $a \ll \lambda$ . Но в квантовой турбулентности термин “волны Кельвина” часто использует-

ся при описании любых, даже не удовлетворяющих условию  $a \ll \lambda$ , деформаций вихревой линии. В принципе, это может быть не очень большой проблемой, если авторы при этом не используют математический аппарат, присущий лишь малым волнам Кельвина. В качестве примера приведем задачу о распаде излома на вихревой линии после реконнекции (см., например, [88, 159]). Решение часто формулируется в терминах волн Кельвина, хотя в первые моменты деформации чрезвычайно велики и условие  $a \ll \lambda$  радикально нарушается.

Несмотря на то, что волны Кельвина, вследствие их малости, описывают лишь “малую часть” общей эволюции вихревого клубка, они могут иметь важное значение для некоторых конкретных применений. Одним из главных из них, с точки зрения теории квантовой турбулентности, является то, что они описывают поток энергии в область очень малых масштабов, сопоставимых с радиусом сердцевины вихря  $a_0$ . Каскадная передача энергии по различным масштабам — это обычный нелинейный механизм, общий для всех нелинейных волн (см., например, [160]). По этой причине каскад нелинейных волн Кельвина считается одним из основных механизмов объяснения распада низкотемпературной сверхтекучей турбулентности, когда обычный механизм диссипации (взаимное трение) отсутствует. Существуют также теории, связывающие появление энергетического спектра Колмогорова ( $E(k) \propto k^{-5/3}$ ) в квантовых жидкостях с волнами Кельвина.

Основной вклад в теорию стохастических нелинейных волн Кельвина и изучение их роли в сверхтекучей турбулентности был сделан в серии работ Kozik, Svistunov [161, 162, 163, 164] и в работах L’vov et al. [165, 166, 167, 168]. Мы изложим здесь материал, следуя недавно опубликованной статье [167] на эту тему.

Отправной точкой теории турбулентности волн Кельвина (как, впрочем, почти любой волновой турбулентности) является гамильтонова формулировка задачи (см. подраздел 2.3.2) и первую часть монографии [5]). Для малых возмущений прямой вихревой линии этот формализм был первоначально разрабо-

тан Феттером [66]. Исходя из уравнения движения вихревой линии в виде (2.63) и введя переменную

$$w(z, t) = x(z, t) + iy(z, t), \quad (4.40)$$

где  $x(z, t)$  и  $y(z, t)$  представляют собой небольшие отклонения от прямой линии, расположенной в направлении  $z$ , получаем уравнение

$$i\kappa \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta w^*}. \quad (4.41)$$

Гамильтониан  $H$  в терминах переменной  $w(z, t)$  имеет вид (см. статьи [169, 170]):

$$H = \frac{\kappa^2}{4\pi} \int \frac{1 + \text{Re}(w'^*(z_1) \cdot w'(z_2))}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + |w(z_1) - w(z_2)|^2}} dz_1 dz_2. \quad (4.42)$$

Здесь используется обозначение  $w'(z) = dw/dz$ . Анализ волновой турбулентности обычно выполняется в терминах комплексных канонических волновых амплитуд  $a_{\mathbf{p}}(t)$  и  $a_{\mathbf{p}}^*(t)$ , которые являются классическими аналогами бозе-операторов рождения и уничтожения в квантовой механике. Выполнение преобразования Фурье для переменной  $w(z, t)$  как  $w(z, t) = \kappa^{-1/2} \sum_p a_p(t) \exp(ipz)$  позволяет переписать уравнение (4.41) в канонической форме

$$i \frac{da_p(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a_p^*(t)}. \quad (4.43)$$

Основная цель теории состоит в вычислении фурье-образа парной корреляционной функции  $n_p(t)$  или спектра, определяемого как

$$n_p(t) \equiv \frac{L}{2\pi} \langle a_p(t) a_p^*(t) \rangle, \quad (4.44)$$

и связанной с ним энергии волн  $E(p)$ , а также потока энергии волн  $\varepsilon_p$  в  $p$ -пространстве. Энергия волн  $E(p)$  определяется как

$$E(p) = \omega(p) n_p. \quad (4.45)$$

Здесь  $\omega(p)$  — закон дисперсии линейных волн Кельвина:

$$\omega(p) = \frac{\kappa p^2}{4\pi} \ln \left( \frac{1}{pa_0} \right). \quad (4.46)$$

В отличие от сильной гидродинамической турбулентности, описание слабой волновой турбулентности можно получить в замкнутой форме в терминах величины  $n_p(t)$ . Эволюция величины  $n_p(t)$  подчиняется кинетическому уравнению (КЕ). Оно может быть получено из (4.43) разными способами, например, на основе квантово-механической аналогии для амплитуд переходов (см. общую теорию в книге [160]), для КВ это было выполнено в работах [163, 167].

Детальное изложение техники кинетических уравнений для волн Кельвина можно найти, например, в работах [163, 167]. Одной из проблем, связанных с реализацией этой схемы, является то, что в силу одномерности задачи нетривиальные взаимодействия между волнами, приводящие к обмену энергией, происходят только в высоком (шестом) порядке нелинейности. Вследствие этого обстоятельства возникают очень громоздкие математические выкладки, которые очень сложно интерпретировать, и авторы прибегают к помощи некоторых спекуляций и численных оценок в столкновительном члене. Поэтому, несмотря на то, что проблема чрезвычайно ясная, две научные группы получили различные результаты. Например, Козик и Свистунов [161] получили следующее выражение для энергетического спектра Кельвина волновой турбулентности:

$$E_{KS}(p) = C_{KS} \frac{\kappa^{7/5} \epsilon^{1/5}}{p^{7/5}} \ln(\delta/a_0), \quad (4.47)$$

где  $\epsilon$  — поток энергии по масштабам и  $C_{KS}$  — безразмерная константа. Позже L'vov et al. [171, 167] предложили иной результат для того же спектра:

$$E_{LN}(p) = C_{LN} \frac{\ln(\delta/a_0) \kappa \epsilon^{1/3}}{\Psi^{2/3} p^{5/3}}, \quad \Psi \equiv \frac{8\pi E}{\ln(\delta/a_0) \kappa^2}. \quad (4.48)$$

В заключение этого раздела относительно стохастических волн Кельвина мы хотели бы подчеркнуть, что эта важная и интересная проблема полностью не решена, по крайней мере, полемика между научными группами еще не закончилась. Думается, однако, что эти исследования представляют большой интерес для теории нелинейных волн. Что касается сверхтекучей турбулентности, то существуют два непосредственных применения теории KW: это распад вихревого клубка и 3D-спектр поля скоростей, индуцированного вихревыми линиями с возбужденными на них волнами Кельвина.

Другой комментарий заключается в следующем: по определению, волны Кельвина составляют лишь малую часть всей динамики вихревых линий. В такой постановке задачи полностью отсутствует рассмотрение каких-либо крупномасштабных деформаций, порядка межвихревого расстояния, тем более порядка размера объема системы. Этот формализм игнорирует деформации петель из-за взаимодействия с другими линиями, столкновение линий в вихревом клубке и т.п.

Еще одно замечание касается реконнекции петель и формирования нелинейного каскада. Как обсуждалось в подразделе 3.2, частые реконнекции означают, что время жизни вихревой петли без повторной реконнекции гораздо меньше, чем время, которое требуется волне Кельвина, чтобы оббежать вокруг петли. Поэтому возникает вопрос о том, что же происходит с нелинейными волнами и потоком энергии после того, как вихревая петля распадается на две дочерние петли (или сливается с другой петлей). Козик и Свистунов [163] утверждают, что процессы рекомбинаций не имеют значения для эволюции нелинейных волн. По их мнению, “возможность пренебречь реконнекциями гарантируется локальностью каскада в пространстве волновых чисел”. Но из-за принципа неопределенности локальность в пространстве волновых чисел предполагает значительное взаимное влияние удаленных (в реальном пространстве) частей вихревой линии, а это в свою очередь означает, что все эти части линии должны “чувствовать” процесс реконнекции.

#### 4.4. Хаотическая динамика вихревой петли. Приближение прямого взаимодействия

Как уже обсуждалось, волны Кельвина в силу их малости не в состоянии описать любую существенную деформацию вихревых петель. Стохастическая динамика больших деформаций одиночной петли (игнорируя реконнекции) на основе метода Ланжевена была изучена в статьях автора и др. (см. [172, 173, 174]).

Постановка задачи аналогична методу, предложенному Мигдалом (см. подраздел 4.2.1). В дополнение к этой постановке мы добавили диссипативный механизм, который действует на очень малых масштабах, сравнимых с межвихревым расстоянием  $\delta$ . Мы также ввели случайную силу  $\zeta(\xi, t)$ , которая зависит от величины  $\xi$  и сосредоточена на больших масштабах. Одно из принципиальных упрощений, позволивших решить аналитически эту задачу, связано с использованием уравнения движения элементов вихревой нити в форме локального приближения индукции (2.5). Окончательно задача формулируется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{s}(\xi, t)}{dt} = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \delta(\xi, t) + \zeta(\xi, t). \quad (4.49)$$

Величина  $\delta(\xi, t)$  описывает диссипативные процессы, которые малы для обычных масштабов и являются эффективными для очень малых масштабов, сравнимых с межвихревым расстоянием  $\delta$ . Предполагается, что корреляционная функция для ланжевенской силы  $\zeta(\xi, t)$  удовлетворяет соотношению

$$\langle \zeta_\alpha(\xi_1, t) \cdot \zeta_\beta(\xi_2, t') \rangle = \delta_{\alpha\beta} F^\alpha(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (4.50)$$

Здесь  $F^\alpha(\xi_1 - \xi_2)$  меняется на большом масштабе, порядка длины вихревой петли. Таким образом, область действия случайных возмущений и область действия диссипации сильно разнесены в пространстве масштабов. Далее мы будем работать с величиной  $s_q^\alpha$ , которая является пространственной и временной

компонентами Фурье векторной функции  $s^\alpha(\xi, t)$  точек вихря

$$\mathbf{s}_q^\alpha = \int \int \mathbf{s}^\alpha(\xi, t) e^{i(\omega t - p\xi)} dt d\xi . \quad (4.51)$$

В результате действия ланжевендовской силы в системе возникает добавочная энергия (что в локальном приближении соответствует добавочной длине), которая сосредоточена, однако, только на больших масштабах или, что эквивалентно, в области малых волновых векторов  $p$ . Вследствие нелинейных взаимодействий (см. первое слагаемое в правой части уравнения (4.49)) эта добавочная энергия перераспределяется в  $p$ -пространстве в область очень малых масштабов (или, что эквивалентно, в область очень больших волновых векторов  $p$ ), где эта энергия диссипирует. Такой сценарий полностью эквивалентен теории классической турбулентности Колмогорова. В области волновых чисел  $p$ , удаленных как от области накачки  $p_+$ , так и от области диссипации  $p_-$ , ( $p_+ \ll p \ll p_-$ ), так называемом инерционном интервале, энергия сохраняется, происходит только перераспределение между гармониками. Поскольку в локальном приближении энергия соответствует длине вихревой нити, нами использовано уравнение, которое предполагает сохранение локальной длины дуги, ( $|\mathbf{s}'(\xi)| = 1$ ). В стационарном случае, очевидно, поток энергии равен скорости диссипации  $\varepsilon$ . Уравнение (4.49) принадлежит к классу так называемых вполне интегрируемых систем. Такие системы характеризуются наличием бесконечного множества законов сохранения. Это приводит к высокой устойчивости исходной структуры вихревых линий и, вообще говоря, предотвращает возникновение полного хаоса. Мы вернемся к этому важному вопросу позднее.

В пространстве Фурье уравнение (4.49) имеет вид

$$-i\omega \mathbf{s}_q^\alpha = \int \Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{q_1}^\beta \mathbf{s}_{q_2}^\gamma \delta(q - q_1 - q_2) dq_1 dq_2 + \delta_q + \zeta_q^\alpha . \quad (4.52)$$

Вершина  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma}$  (не зависящая от времени и, следовательно, от  $\omega$ ), отвечающая за нелинейное взаимодействие между гармониками, имеет вид

$$\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{i\beta}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} p_1 p_2 (p_2 - p_1), \quad (4.53)$$

где  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$  — единичный антисимметричный тензор. Можно показать, что вершина  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma}$  удовлетворяет тождеству Якоби

$$\left[ p^n \Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} + p_2^n \Gamma_{p_2p_1p}^{\gamma\alpha\beta} + p_1^n \Gamma_{p_1p_2p}^{\beta\gamma\alpha} \right] \delta(p+p_1+p_2) = 0, \quad n=2, 4. \quad (4.54)$$

Эти соотношения тесно связаны с законами сохранения величин  $L$  и  $K$ , определяемых как

$$L = \int_0^{2\pi} \mathbf{s}' \mathbf{s}' d\xi = \text{const}, \quad K = \int_0^{2\pi} \mathbf{s}'' \mathbf{s}'' d\xi = \text{const}. \quad (4.55)$$

В этом подразделе мы приняли длину вихревой петли равной  $2\pi$ . Введенные величины могут быть ассоциированы с полной длиной (в локальном приближении) и квадратом полной кривизны  $K$ . Сохранение этих величин легко получить из любого из соотношений (4.49, (4.52)). Понятно, что законы сохранения справедливы только в отсутствие диссипации  $\delta(\xi, t)$  и случайной силы накачки  $\zeta(\xi, t)$ .

Один из подходов для описания случайных классических полей основан на применении диаграммной техники Уайлда (см. Wyld [175]), изначально разработанной для изучения гидродинамической турбулентности. Следуя этой методике, мы вводим для описания случайных процессов следующие средние: тензор спектральной плотности  $S_q^{\alpha\beta}$  (или коррелятор, или просто спектр) и тензор Грина  $G_q^{\alpha\beta}$  (или просто функция Грина), которые определяются следующим образом:

$$S_q^{\alpha\beta} \delta(q + q_1) = \left\langle \mathbf{s}_q^\alpha \mathbf{s}_{q_1}^\beta \right\rangle, \quad (4.56)$$

$$G_q^{\alpha\beta} \delta(q + q_1) = \left\langle \frac{\delta \mathbf{s}_q^\alpha}{\delta \zeta_{q_1}^\beta} \right\rangle. \quad (4.57)$$

Анализ диаграмм (см. далее) показывает, что из-за антисимметрии тензора  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ , содержащегося в выражении для вершины  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma}$ , обе введенные величины, как  $S_q^{\alpha\beta}$ , так и  $G_q^{\alpha\beta}$ , пропорциональны  $\delta_{\alpha\beta}$ , т. е.  $S_q^{\alpha\beta} \equiv S_q^\alpha$  и  $G_q^{\alpha\beta} \equiv G_q^\alpha$ . Подробности

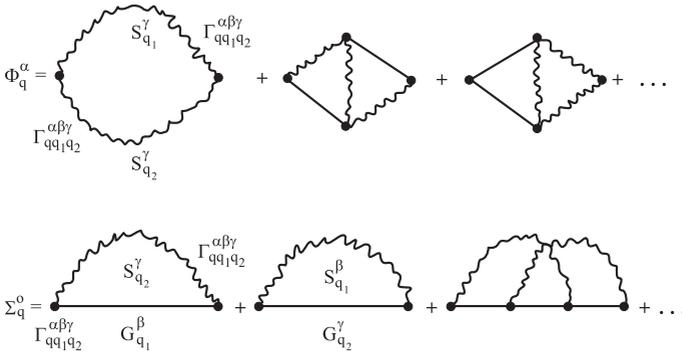


Рис. 4.2. Диаграммные ряды для массовых операторов  $\Phi_q^\alpha$  и  $\Sigma_q^\alpha$  (см. пояснения в тексте)

диаграммной техники для поставленной выше задачи описаны в статьях [172, 96, 174].

Перенормированные, т. е. частично отсуммированные, величины  $S_q^\alpha$  и  $G_q^\alpha$  (с учетом взаимодействий) удовлетворяют системе диаграммных уравнений Дайсона:

$$G_q^\alpha = {}^0G_q^\alpha + {}^0G_q^\alpha \Sigma_q^\alpha G_q^\alpha, \quad (4.58)$$

$$S_q^\alpha = G_q^\alpha (F_q^\alpha + \Phi_q^\alpha) G_q^{\alpha*}. \quad (4.59)$$

Здесь  ${}^0G_q^\alpha = (\omega - \delta_p)^{-1}$  — это функция Грина в нулевом приближении, когда взаимодействие полностью отпущено,  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} = 0$ . Функция  $F_q^\alpha$  является фурье-образом от величины  $F^\alpha(\xi_1 - \xi_2)$  (см. формулу (4.50)). Величины  $\Phi_q^\alpha$  и  $\Sigma_q^\alpha$ , так называемые массовые операторы, можно записать в виде диаграммных рядов серии (см. подробности в оригинальных статьях [175, 176] и, для поставленной здесь задачи, в статьях [172, 96, 174]). Эти ряды, которые представляют собой формальное разложение по степеням взаимодействия  $\left| \Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} \right|^2$ , имеют стандартную форму для неравновесных процессов, они приведены на рис. 4.2.

Здесь точки с “хвостиками” изображают вершины  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma}$ , волнистые линии — корреляторы  $S_q$ , а прямые линии представляют функции Грина  $G_q$ . В представленных диаграммах

интегрирование должно быть выполнено по внутренним импульсам  $q$  и суммирование по внутренним индексам  $\beta, \gamma$ . Так, например, первый член  $(1)\Sigma_q^\alpha$  в разложении для  $\Sigma_q^\alpha$  имеет вид

$$\Sigma_q^\alpha = \int \int |\Gamma_{pp_1 p_2}^{\alpha\beta\gamma}|^2 S_{q_1}^\gamma G_{q_2}^\beta dq_1 dq_2. \quad (4.60)$$

Топологические свойства диаграмм в рядах (8.5, 8.6) описаны в работах [175, 176], мы не будем на них подробно останавливаться. Заметим лишь, что в диаграммах для величины  $\Sigma_q^\alpha$  вход и выход соединен (единственным способом) линиями тензоров Грина  $S_{q_1}$ .

Таким образом, получена система диаграммных уравнений, где в качестве переменных фигурируют не начальные переменные  $s_q^\alpha$  и связанные с ними величины  $S_q^{\alpha\beta}$  и  $G_q^{\alpha\beta}$ , а функции, перенормированные с учетом взаимодействия. Эта система уравнений неоднородна, в нее входит фурье-образ  $F_q^\alpha$  коррелятора внешней силы  $\langle \zeta_\alpha(\xi_1, t) \cdot \zeta_\beta(\xi_2, t') \rangle$ . Если взаимодействие гармоник между собой превышает взаимодействие с “термостатом” (или с накачкой), то коррелятор внешней силы может быть принят равным нулю. В теории турбулентности предполагают, что решения  $S_q^\alpha$  при этом остаются конечными. Это соответствует принципу максимальной случайности, в соответствии с которым турбулентность является результатом развития всех видов неустойчивости.

Конечно, в общем виде диаграммные уравнения Дайсона неразрешимы, однако, они могут быть изучены в некоторых специальных случаях. Один из таких случаев связан с законами сохранения величин  $L$  и  $K$ , определяемых формулами (4.55). Рассмотрим сохранение полной квадратичной кривизны  $K$ , так как для интеграла  $L$  справедливы те же самые рассуждения. В фурье-пространстве закон сохранения полного квадрата кривизны  $K$  может быть выражен в виде уравнения непрерывности

$$\frac{\partial K_p}{\partial t} + \frac{\partial P_p^K}{\partial p} = I_+^K(p) - I_-^K(p). \quad (4.61)$$

Здесь

$$K_p = \left\langle \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{s}''(\xi_1) \mathbf{s}''(\xi_2) e^{-ip(\xi_1 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \right\rangle = \\ = \langle \mathbf{s}''(p) \mathbf{s}''(-p) \rangle, \quad (4.62)$$

плотность кривизны в  $p$ -пространстве. Аналогично  $P_p^K$  является потоком этой величины в пространстве волновых чисел  $p$  (или, в равной степени, в пространстве масштабов). Правая часть уравнения (4.61) описывает создание дополнительной кривизны  $K_p$  со скоростью  $I_+^K(p)$  под влиянием внешних ланжевенских воздействий и уничтожение ее вследствие диссипативного механизма (со скоростью стока  $-I_-^K(p)$ ). В равновесном случае поток  $P_p^K$  отсутствует, накачка и диссипация локально компенсируют друг друга через флуктуационно-диссипативную теорему (4.20), и мы возвращаемся к ситуации, описанной в разделе 4.2.2. Если волновые числа  $p_+$  и  $p_-$ , где сконцентрированы источники  $I_+^K(p)$  и стоки  $-I_-^K(p)$ , соответственно, широко разнесены в  $p$ -пространстве, как в рассматриваемом нами случае, то условие равновесия, очевидно, нарушается, и появляется поток кривизны  $P_p^K$  в  $p$ -пространстве. В области волновых чисел  $p$ , удаленной как от области накачки  $p_+$ , так и от области стока  $p_-$ , ( $p_+ \ll p \ll p_-$ ), т. е. в инерционном интервале, производная  $\partial P_p^K / \partial p = 0$  и, следовательно,  $P_p^K$  является константой, равной, скажем,  $P^K$ .

Таким образом, поставленная выше задача сводится к решению уравнений Дайсона (4.58)–(4.59) в инерционном интервале при условии постоянного потока кривизны  $K$ . В этом случае естественно предположить, что величины  $S_q^\alpha$  и  $G_q^\alpha$  не зависят от конкретного типа источника и стока, но зависят от значения  $P^K$ .

Далее, вершины  $\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma}$  являются однородными функциями своих аргументов  $p, p_1, p_2$  (см. формулу (4.53)). Это свойство, а также условие  $p_+ \ll p_-$ , в силу которого можно положить  $p_+ = 0$  и  $p_- = \infty$ , приводят к предположению, что проблема является масштабно-инвариантной, т. е. она не имеет ника-

кого характерного масштаба для аргумента  $p$ . Это позволяет предположить, что величины  $S_q^\alpha$  и  $G_q^\alpha$  должны быть степенной функцией аргументов  $\omega, p$ . Наиболее общая форма, совместимая с уравнениями Дайсона (4.58)–(4.59), имеет вид

$$S_q^\alpha = \frac{1}{p^{r+p}} f \left[ \frac{\omega}{p^r} \right], \quad G_q^\alpha = \frac{1}{p^r} g \left[ \frac{\omega}{p^r} \right]. \quad (4.63)$$

Здесь,  $f$  и  $g$  — безразмерные функции своих аргументов. Наша цель теперь — найти скейлинговые индексы  $r$  и  $p$ .

Первое соотношение между индексами  $r$  и  $p$  можно получить из анализа диаграммных рядов, полагая, что все слагаемые должны иметь одну и ту же степень аргумента  $p$ . Это приводит к первому скейлинговому соотношению:

$$2r + p = 7. \quad (4.64)$$

Другое скейлинговое соотношение для индексов  $r$  и  $p$  можно получить из уравнений Дайсона (4.58), (4.59), которые следует переписать в виде (см., например, [177]):

$$\int d\omega \text{Im} \{ S_q^\alpha \Sigma_q^\alpha - \Phi_q^\alpha G_q^{\alpha*} \} = 0. \quad (4.65)$$

Это соотношение играет роль кинетических уравнений для систем со слабым взаимодействием. Оно было получено из выражения для функции Грина  $G_q^\alpha = (\omega - \Sigma_q^\alpha)^{-1}$  и из условия, что коррелятор ланжевеновской силы  $F_p^\alpha$  исчезает в инерционном интервале. Для того чтобы найти соотношение для индексов  $r$  и  $p$ , перепишем уравнение (4.65), раскрывая выражения для массовых операторов  $\Phi_q^\alpha$  и  $\Sigma_q^\alpha$  и ограничиваясь членами первого порядка в диаграммных рядах. Эта процедура, известная как приближение прямого взаимодействия (Direct Interaction Approximation (DIA)), была впервые предложена в работе Крейчнана [178, 179] и часто используется в классической турбулентности (см., например, [177, 180]).

В нашем случае эта процедура имеет дополнительное преимущество. Опуская члены более высокого порядка в диа-

граммном разложении, мы изменяем нелинейную часть исходного уравнения движения (4.49), что позволяет избежать проблемы полной интегрируемости (см. статьи Абловица [181] и Куксина [182]). В некотором роде данный подход аналогичен тому, который используется в работе Лурье и др. [166], которые, также стартуя от приближения локальной аппроксимации (LIA), также преобразовали вклады более высокого порядка. Эта модель, названная усеченной, LIA (или truncated LIF (TLIA)), устраняет проблему полной интегрируемости. Поскольку конечная цель состоит в том, чтобы получить масштабно-инвариантное (степенное) решение для спектральной плотности, мы также сошлемся на цитату Сонина из статьи [183], заметившего, что “изучение скейлинговых соотношений в локальной модели гораздо проще, в то же время, имеющее отношения к динамике Био – Савара, также допускающее каскадное неравновесное решение”.

После применения процедуры приближения прямого взаимодействия и некоторых вычислений уравнение (4.65) преобразуется к следующему соотношению (см. также [184]):

$$\begin{aligned}
 & \text{Im} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 dp_1 dp_2 \delta(q + q_1 + q_2) \times \Gamma_{pp_1 p_2}^{\alpha\beta\gamma} \\
 & \times \left\{ \Gamma_{pp_1 p_2}^{\alpha\beta\gamma} G_q^\alpha S_{q_1}^\beta S_{q_2}^\gamma + \Gamma_{p_2 p p_1}^{\gamma\alpha\beta} G_{q_2}^\gamma S_q^\alpha S_{q_1}^\beta + \Gamma_{p_1 p_2 p}^{\beta\gamma\alpha} G_{q_1}^\beta S_{q_2}^\gamma S_q^\alpha \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Чтобы двигаться дальше, выполним преобразования во втором и третьем члене в фигурных скобках в подынтегральном выражении, известные как преобразования Захарова (см., например, Захаров [160] и Кузнецов и Львов [184]). Например, для второго члена эти преобразования для наборов аргументов  $(\omega, \omega_1, \omega_2) \rightarrow (\omega, \omega', \omega'')$  и  $(p, p_1, p_2) \rightarrow (p, p', p'')$  имеют вид

$$p = p''(p/p''), p_1 = p'(p/p''), p_2 = p(p/p''), \tag{4.67}$$

$$\omega = \omega''(p/p'')^r, \omega_1 = \omega'(p/p'')^r, \omega_2 = \omega(p/p'')^r. \tag{4.68}$$

Третий член преобразуется аналогичным образом. В результате подынтегральное выражение в (4.66) принимает вид

$$\Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} G_q^\alpha S_{q_1}^\beta S_{q_2}^\gamma \left\{ \Gamma_{pp_1p_2}^{\alpha\beta\gamma} + \left[ \frac{p}{p_2} \right]^x \Gamma_{p_2pp_1}^{\gamma\alpha\beta} + \left[ \frac{p}{p_1} \right]^x \Gamma_{p_1p_2p}^{\beta\gamma\alpha} \right\}, \quad (4.69)$$

где новый индекс  $x$  связан с величинами  $r, p$  следующим образом:

$$x = 7 - r - 2p. \quad (4.70)$$

Из тождества Якоби (4.54) следует, что подынтегральное выражение обращается в нуль (т. е. удовлетворяет модифицированному уравнению Дайсона (4.66)) при  $x = -2$  для сохранения величины  $L$  и при  $x = -4$  для сохранения полной кривизны  $K$ , определяемых формулами (4.55).

Подставляя  $x = -2$  и  $x = -4$  в уравнение (4.70) и объединяя с уравнением (4.64), мы получаем замкнутую систему соотношений, имеющую решения ( $r = 5/3$ ,  $p = 11/3$ ) и ( $r = 1$ ,  $p = 5$ ). Первая пара ( $r = 5/3$ ,  $p = 11/3$ ) соответствует неравновесному состоянию с потоком энергии (длины)  $L_p$ , вторая пара ( $r = 1$ ,  $p = 5$ ) описывает состояния с потоком кривизны  $K_p$ .

Для многих приложений представляет интерес временная зависимость корреляционной функции, которая вычисляется по правилу  $\langle \mathbf{s}_q^\alpha \mathbf{s}_{q_1}^\beta \rangle$  (напомним, это выражение пропорционально  $\delta(q + q_1) = \delta(p + p_1)\delta(\omega + \omega_1)$ ).

$$\langle \mathbf{s}_p^\alpha(t_1) \mathbf{s}_p^\alpha(t_2) \rangle = \int \langle \mathbf{s}_q^\alpha \mathbf{s}_q^\alpha \rangle \exp(i\omega(t_1 - t_2)) d\omega. \quad (4.71)$$

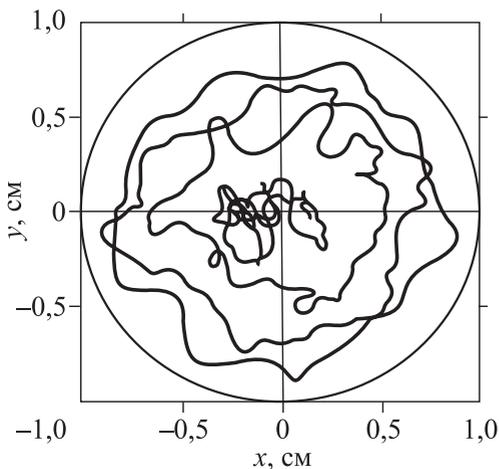
Одновременные спектры  $\langle \mathbf{s}_p^\alpha \mathbf{s}_p^\alpha \rangle$ , т. е. взятые в один и тот же момент времени ( $t_1 = t_2$ ), вычисленные по правилу (4.71) ( $t_1 = t_2$ ), можно найти с помощью интегрирования по частоте  $\omega$ : Соответствующие вычисления приводят к результату

$$\langle \mathbf{s}_p^\alpha \mathbf{s}_p^\alpha \rangle = \int d\omega \frac{1}{p^{r+p}} f \left\{ \frac{\omega}{p^r} \right\} \propto \begin{cases} p^{-\frac{11}{3}} & \text{для } L \\ p^{-5} & \text{для } K \end{cases} \quad (4.72)$$

В зависимости от способа возбуждения системы можно получить реальный спектр как “смесь” полученных решений, в которой одновременно присутствуют потоки длины и кривизны. Аналогичная ситуация для стохастических нелинейных волн обсуждалась ранее (см., например, [160] и библиографию в ней), такие решения называют многопоточковыми. Интересно отметить, что спектр формы  $p^{-11/3}$  был получен в предыдущем подразделе, посвященном нелинейным волнам Кельвина. Не ясно, однако, как связать решение представленной задачи с динамикой малых возмущений на прямой. Скорее всего, здесь справедливо упомянутое выше замечание Сони́на [183], касающееся универсальности скейлинговых соотношений в формировании степенных решений для спектров.

Параллельно аналитическому исследованию в работах [172, 173, 174] было проведено прямое численное моделирование эволюции вихревого кольца (с длиной, равной  $2\pi$ ) под действием случайного перемешивания.

Для имитации крупномасштабного характера наложенного шума были взяты только первые несколько гармоник в разложении Фурье величины  $F^\alpha(\xi_1 - \xi_2)$  (см. соотношение (4.50)). Рис. 4.3 показывает эволюцию изначально гладкого кольца, помещенного на плоскость  $x, y$ , в различные моменты времени (на рисунке изображены проекции вихревой линии на плоскость  $x, y$  в различные моменты времени). Как и было предсказано, происходит последовательная генерация высших гармоник (отсутствующих в перемешивающем внешнем воздействии  $F^\alpha(\xi_1 - \xi_2)$ ). В итоге это приводит к запутыванию первоначального кольца и образованию плотного вихревого клубка. Другой численный результат, полученный в работах [172, 173, 174], показан на рис. 4.4. Здесь логарифм величины  $\langle \mathbf{s}_p^x \mathbf{s}_p^x \rangle$ , усредненной по нескольким реализациям, изображен как функция  $\log p$ . Средний наклон зависимости, изображенной на рис. 4.4, равен  $-13/3$ . Это значение является промежуточным между  $-11/3$  и  $-5$ , и отражает, по-видимому, то обстоятельство, что



*Рис. 4.3.* Эволюция вихревого кольца под действием внешней случайной силы в локальном подходе (уравнение (4.49)). Показаны проекции вихревой нити на плоскость исходного кольца в различные моменты времени. Как предсказано, вследствие возникновения высших гармоник происходит запутывание первоначально гладкого вихревого кольца. Рисунок взят из статьи [172]

в данном численном эксперименте реализуется многопоточное решение.

Резюмируя содержание данной главы, можно утверждать, что мы описали несколько попыток развить теорию стохастической динамики вихревых нитей, которые были выполнены на основе уравнения движения. Здесь случайные процессы слияния и распада петель, связанных с процессами реконнекции, были проигнорированы. Конечно, такая постановка задачи далека от полного и адекватного описания динамики реального вихревого клубка. Тем не менее, полученные результаты могут быть использованы для изучения некоторых конкретных проблем. В качестве примера укажем теорию нелинейных волн Кельвина, которая используется для объяснения распада сверхтекучей турбулентности при нулевой температуре. Другим примером может служить теория Шварца, изложенная в

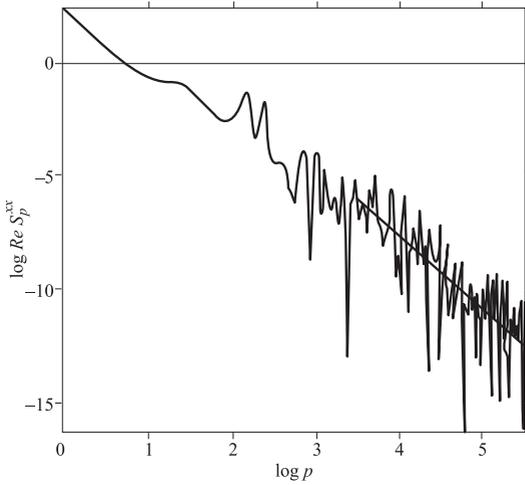


Рис. 4.4. Логарифм преобразования Фурье одновременного коррелятора  $\langle \mathbf{s}_p^x \mathbf{s}_p^x \rangle$  как функция логарифма волнового числа ([172], рис. 1). Прямая линия, рассчитанная с помощью линейной регрессии, имеет наклон  $-13/3$

разделе 4.1, в которой он предсказал, что кривизна линий порядка является величиной порядка межвихревого расстояния. Еще одним примером может быть изложенная в этом подразделе теория хаотической динамики вихревых петель, которая объясняет запутывание первоначально гладких вихревых колец и рост общей кривизны. Мы хотели бы подчеркнуть, что, несмотря на то, что реконнекции, которые являются важной частью общей динамики вихревого клубка, опущены, оставшаяся часть, связанная с собственной динамикой одиночной вихревой нити, является все равно чрезвычайно сложной и запутанной. Функциональный формализм Мигдала, изложенный в подразделе 4.2.1, — яркое подтверждение такого заключения. Постановка задачи о стохастическом поведении вихревых нитей даже без реконнекций требует очень тонких математических инструментов, которые имеют дело с функционалами, работающими с конфигурациями вихревой линии  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$ .

## 5. Аналитические исследования 2: кинетика колец и петель

### 5.1. Модели взаимодействующих идеальных (или слабо неидеальных) вихревых колец

Предыдущая глава 4 была посвящена динамике отдельных вихревых линий, при этом игнорировались любые рекомбинации вихревых петель. В предисловии к этой главе мы обсуждали, что практически нет никакой возможности введения рекомбинаций, стартуя с уравнения движения в форме  $ds(\xi)/dt = \mathcal{F}(\{s(\xi, t)\}, t)$ , где вихревая конфигурация  $\{s(\xi, t)\} = \bigcup_j s_j(\xi_j)$  представляет собой набор различных вихревых петель. Реконнекции и рекомбинации перераспределяют множество переменных  $\xi_j$  между различными петлями, и не ясно, как ввести это перераспределение в теоретическую схему.

Альтернативный подход заключается в том, чтобы начать с “противоположного конца”, чтобы разработать подход, при котором взаимодействие и столкновение вихревых петель являются отправной точкой теории. Собственная динамика вихревых линий в такой идеологии “погружена” в предписываемую структуру петель и имеет второстепенное значение. Так, например, могут быть использованы различные модели, начиная от случая взаимодействующих идеальных вихревых колец одного и того же размера до модели деформированных и сталкивающихся (рекомбинирующихся) вихревых петель с заданной (статистически) структурой. Мы представим соответствующие исследования в нижеследующих подразделах. В настоящем подразделе мы рассмотрим моделирование сверхтекучей турбулентности совокупностью взаимодействующих идеальных (или слабо неидеальных) вихревых колец.

На самом деле первые работы по этому вопросу возвращают нас к ранним годам, и они были связаны с описанием турбулентного течения классических жидкостей с помощью набора концентрированных вихрей. Например, был развит так называемый метод вортон, который должен представлять поля за-

вихренности с помощью точечных вихревых особенностей (см., например, работу Aksman [185] и ссылки в ней). В частности, Чифранов и Новиков [186] получили уравнения, описывающие динамику дельта-сингулярных вихревые диполей, которые соответствуют трехмерным уравнениям гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости. Исследуя поставленную динамическую задачу, авторы показали возможность взрывного роста (коллапса) локализованной завихренности в системе, состоящей из двух вихревых диполей.

В ряде работ Григорьев и др. [187] развили гамильтонов подход для взаимодействующих идеальных, не меняющих форму вихревых колец с одинаковыми размерами. Модель вихревых колец была использована Кузьминым [188] для описания течений идеальной несжимаемой жидкости в терминах плотности вихревого импульса (импульс Лэмба). Примерно такой же подход, в котором импульсы Лэмба вихревых колец служили новыми переменными, был разработан Buttke & Chorin [189] для вывода уравнений динамики несжимаемой жидкости.

Williams et al. ([190–192]) опубликовали серию статей, где также использовалась модель слабо деформированных вихревых колец, но вместо изучения статистической задачи с дальним действием (как это было выполнено в [187]) авторы использовали ренормализационную теорию Костерлица — Таулесса [193], точнее, ее 3D-обобщение. Так, Williams утверждает: “Перенормировка позволяет свести сложную задачу вихревого клубка к более простой задаче взаимодействующих неидеальных круговых петель. Это достигается путем усреднения по малым масштабам длин, пока лишь не остается разреженный газ вихревых колец размера, равного длине когерентности. В проблеме турбулентности в систему будут закачиваться кольца большого размера, затем следует каскад превращения петель в более мелкие петли за счет силы взаимного трения, пока самые маленькие петли размера  $a_0$  не будут удалены из объема. Следует отметить, что при таком подходе весьма сложная эволюция и рекомбинация индивидуальных петель может вообще не рассматриваться”. Уверенность в такой позиции была подкрепле-

на тем обстоятельствам, что данный подход удовлетворительно описывает физику  $\lambda$ -перехода, возникающего как лавинообразный рост длинных вихревых нитей при приближении к точке перехода (см., например, [194, 131]).

## 5.2. Гауссова модель

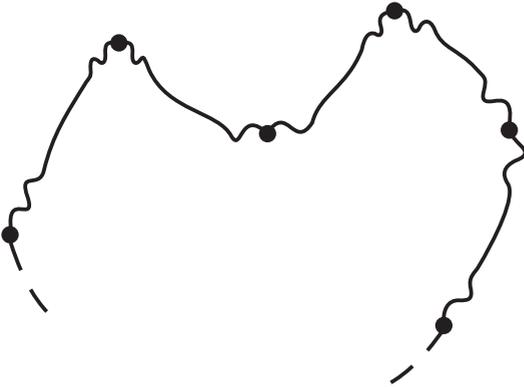
### 5.2.1. Обобщенное распределение Винера

Модели взаимодействующих идеальных вихревых колец, конечно же, не реальны (хотя могут оказаться полезными для некоторых конкретных приложений). На самом деле любые столкновения и реконнекции (или даже далекодействующее влияние) деформируют геометрическую форму и превращают идеальные кольца в более сложные объекты. Помня о том, что количество реконнекций огромно (см. раздел 3.2), следует ожидать, что вихревые петли будут существенно отличаться от колец. Действительно, многочисленные численные эксперименты указывают на необыкновенно сложную и стохастическую форму вихревых линий в реальном вихревом клубке.

Принципиально другой подход, отличный от моделей идеальных вихревых колец, был разработан в контексте космических струн Copeland et al. (см. [122] и библиографию в ней). Авторы предлагают представить форму вихревой линии (или космической струны) как имеющие структуру случайного (броуновского) блуждания. Это предположение может быть мотивировано следующим соображением. Из-за огромного числа случайных столкновений (см. (3.1)) структура любой петли определяется множеством предыдущих пересоединений. Таким образом, любая петля состоит из мелких частей, которые были получены в результате выполненных рекомбинаций. Это изображено схематически на рис. 5.1. Точки условно указывают на места, где произошли предыдущие реконнекции. Волны на линиях условно изображают волны Кельвина, распространяющиеся из точек столкновений. Фрагменты линии между точками предыдущих пересоединений являются некоррелированными, так как столкновения случайны, а де-

терминированные волновые сигналы Кельвина, инициируемые столкновениями нитей, не успевают распространяться достаточно далеко (см. текст после формулы (3.1)).

Таким образом, вихревые петли имеют структуру случайного блуждания (типа полимерной цепи), мы назовем данную структуру гауссовой моделью вихревой петли. Налагая условие гауссовости структуры на вихревые петли, мы можем описать эволюцию множества этих петель, т. е. динамику вихревого клубка. Конечно, при реализации этой схемы нам нужно будет использовать некоторые динамические свойства вихревых нитей (например, скорость линейных элементов, см. ниже), тем не менее, подавляющее большинство динамических степеней свободы “поглощается” ключевой идеей гауссова характера формы вихревой петли. Понятно, что такой подход не может заменить полную формулировку задачи квантовой турбулентности, но, принимая во внимание, что эта задача абсолютно нерешаема (см. раздел 3.2), гауссова модель может быть принята в качестве важного первого шага. Например, насколько нам известно, этот метод является единственным, позволяющим описать реконнекции и рекомбинации вихревых петель на основе более или менее систематического подхода. Необходимо сделать несколько следующих замечаний. Во-первых, трактуя свертхтекучую турбулентность как эволюцию сети вихревых петель, мы исключаем из рассмотрения очень маленькие петли, размеров меньших межвихревого расстояния. Данный подход не позволяет проследить, что происходит в меньших масштабах. Во-вторых, имея в виду рассмотрение однородной квантовой турбулентности, мы опускаем влияние стенок и игнорируем линии, простирающиеся от стенки до стенки (в контексте космических струн они называются бесконечными линиями). В-третьих, мы не рассматриваем здесь случай, когда вихревые линии сильно поляризованы так, что движение, индуцированное пучками нитей, имитирует крупнозернистую завихренность (см. [195, 196, 197]). Здесь мы рассмотрим случай турбулентности Вайнена, когда вихревые петли сильно не упо-



*Рис. 5.1.* Картина, иллюстрирующая броуновскую природу вихревых петель. Структура любой петли определяется множеством предыдущих реконнекций (черные кружки). Таким образом, любая петля состоит из отдельных частей, которые “помнят” предыдущие столкновения. Эти части являются некоррелированными, так как детерминированные волновые сигналы волн Кельвина (волнистые части вблизи черных кружков) не успевают распространиться достаточно далеко. Таким образом, петля имеет структуру случайного блуждания (типа полимерной цепи)

рядочены и движение происходит с нулевым значением усредненной завихренности.

Основным математическим инструментом для описания структуры типа случайного блуждания является распределение Винера  $\mathcal{P}_{Wiener}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  (см., например, [101, 124, 131]). Распределение Винера  $\mathcal{P}_{Wiener}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  определяет вероятность нахождения определенной конфигурации  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$  как функционал следующего вида:

$$\mathcal{P}_{Wiener}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}) = \mathcal{N} \exp \left( -\frac{3}{2b} \int_0^l \mathbf{s}'(\xi) \cdot \mathbf{s}'(\xi) d\xi \right). \quad (5.1)$$

Здесь  $b$  — параметр теории, имеющий смысл элементарного шага. Классическое распределение Винера (5.1) имеет неко-

торые недостатки для описания реальной вихревой нити. Наиболее очевидным является то, что распределение Винера  $\mathcal{P}_{Wiener}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  не имеет конечного среднего для величины  $\langle \mathbf{s}'(\xi, t) \cdot \mathbf{s}'(\xi, t) \rangle$ , который представляет собой квадрат касательного вектора (для произвольной переменной  $\xi$ ). Ближайшей квантово-механической аналогией этого результата является тот факт, что квантовая частица (электрон) не имеет значения скорости. Кроме того, распределение Винера не имеет конечной величины  $\langle \mathbf{s}''(\xi, t) \cdot \mathbf{s}''(\xi, t) \rangle$ , которая является квадратом вектора кривизны. В классической форме оно также не описывает возможную анизотропию и поляризацию петель. Чтобы преодолеть эти трудности, в статье [102] было предложено так называемое обобщенное распределение Винера  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$ . Оно учитывает возможную анизотропию и конечную кривизну вихревой нити.

Обобщенное распределение Винера определяется следующим образом. Вероятность  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  нахождения определенной конфигурации  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$  выражается функционалом распределения вероятности (для получения детальной информации см. статью автора [102])

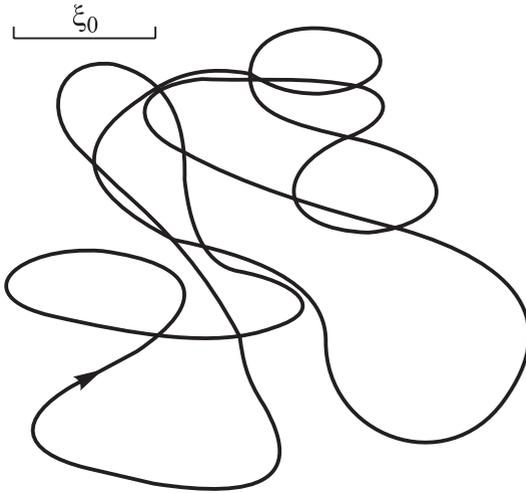
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}) &= \\ &= \mathcal{N} \exp \left( - \int_0^l \int_0^l \mathbf{s}'^\alpha(\xi_1, t) \Lambda^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2) \mathbf{s}'^\beta(\xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2 \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь  $\mathcal{N}$  — нормализующий фактор, а  $l$  — длина кривой.

Параметры обобщенного распределения Винера (элементы матрицы  $\Lambda^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$ ) выбираются таким образом, что некоторые величины (например, средняя кривизна, коэффициенты анизотропии и т. д.), полученные на основе  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$ , имеют значения, известные из экспериментальных исследований и численного моделирования. Физический смысл уравнения (5.2) состоит в том, что он подавляет вероятность близких (вдоль линии,  $\xi_1 - \xi_2$  мало) точек находиться далеко друг от друга в реальном 3D-пространстве (см. [102]), иногда это назы-

вают “условием связности” (*connectivity condition*). Типичным видом диагональных функций  $\Lambda_{\alpha\beta}(\xi, \xi')$  (пропорциональных  $\delta_{\alpha\beta}$ ) являются сглаженные  $\delta$ -функции, имеющие форму мексиканский шляпы (сомбреро) с шириной, равной  $\xi_0$ . Заметим, что случай  $\Lambda^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2) = \delta_{\alpha\beta} \delta(\xi_1 - \xi_2)$  соответствует классическому распределению Винера. Именно дельта-функция препятствует существованию средних  $\langle \mathbf{s}'(\xi, t) \cdot \mathbf{s}'(\xi, t) \rangle$ ,  $\langle \mathbf{s}''(\xi, t) \cdot \mathbf{s}''(\xi, t) \rangle$  и т. д. Недиagonальные функции  $\Lambda_{\alpha\beta}(\xi, \xi')$  ( $\alpha \neq \beta$ ), ответственные за существование средних типа  $\langle \mathbf{s}'(\xi, t) \cdot \mathbf{s}''(\xi, t) \rangle$ , описывающих анизотропию, имеют типичный вид производных от диагональных функций  $\Lambda_{\alpha\beta}(\xi, \xi')$ . Мы будем называть теорию вихревых петель, основанную на обобщенном распределении Винера, Гауссовой моделью вихревого клубка.

Согласно вышеприведенной модели, “средняя” вихревая петля имеет типичную структуру, как показано на рис. 5.2. Усредненную петлю можно представить как состоящую из множества арок со средним радиусом кривизны (равным  $\xi_0$ ), которые случайным образом (но плавно) соединены друг с другом. Близкие (вдоль линии) участки нити, когда значение  $\xi_1 - \xi_2$  много меньше среднего радиуса кривизны  $\xi_0$ , т. е.  $\xi_1 - \xi_2 \ll \xi_0$ , сильно коррелируют:  $\langle \mathbf{s}'(\xi_1, t) \cdot \mathbf{s}'(\xi_2, t) \rangle \rightarrow 1$ , и линия является гладкой. Удаленные части линии, когда  $\xi_2 - \xi_1 \gg \xi_0$ , не коррелируют вообще:  $\langle \mathbf{s}'(\xi_1, t) \cdot \mathbf{s}'(\xi_2, t) \rangle \rightarrow 0$ . Таким образом, гладкая на малых масштабах линия при больших расстояниях имеет типичную структуру “случайного блуждания”. Это “полуфрактальное” поведение подчиняется обобщенному распределению Винера. Предложенный способ описать это “полуфрактальное” поведение вихревых петель с размытой дельта-функцией отличается от стандартных подходов, используемых в теории полимеров (см., например, известную книгу Doi и Edwards [105]). Для описания так называемых червеобразных цепей в физике полимеров обычно добавляются члены с высшими производными ( $\mathbf{s}''(\xi, t) \cdot \mathbf{s}''(\xi, t)$ ,  $\mathbf{s}'''(\xi, t) \cdot \mathbf{s}'''(\xi, t)$  и т. д.) в подынтегральную функцию (в экспоненту) в классическом распределении Винера.



*Рис. 5.2.* Схематический эскиз “усредненной” вихревой петли, полученный на основе анализа статистических свойств. Близкие ( $\Delta\xi \ll \xi_0$ ) части линии разделены в  $3D$ -пространстве на расстояние  $\Delta\xi$ . Отдаленные части ( $\xi_0 \ll \Delta\xi$ ) разделены в  $3D$ -пространстве на расстояние  $\sqrt{\xi_0 \Delta\xi}$ , т. е. на больших масштабах вихревая петля имеет типичную структуру случайного блуждания. Масштаб  $\xi_0$  изображен в левом верхнем углу

Ключевым параметром Гауссовой модели является величина  $\xi_0$ , она играет роль “элементарного” шага в теории полимеров. Кроме того, величина  $\xi_0$  является нижним параметром обрезания в разработанной модели: т. е. теория не описывает явлений, происходящих на масштабах, меньших величины  $\xi_0$ . Позже мы увидим, что величина  $\xi_0$  является общим параметром для всей системы, поэтому различные петли, составляющие вихревой клубок, отличаются только длиной. Можно утверждать, что в вихревом клубке, состоящем из различных петель, имеется только одна степень свободы, а именно длина петли  $l$ .

Распределение Винера позволяет легко вычислить любую среднюю функцию  $A(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$ , зависящую от конфигурации набора вихревых линий  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$ . Это может быть сделано

путем вычисления функционального интеграла следующего вида:

$$\langle \mathcal{A}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}) \rangle = \int D\mathbf{s} A(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}) \mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\}). \quad (5.3)$$

### 5.2.2. Характеристический функционал $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$

На практике удобнее иметь дело с характеристическим функционалом  $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$ , определяемым соотношением (2.77). Вычисление характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$  на основе функционала вероятности  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  (5.2) сводится к функциональному интегрированию (5.3), которое, в свою очередь, редуцируется к процедуре “выполнения полного квадрата”. Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{Gauss}(\{\mathbf{P}(\xi, t)\}) &= \\ &= \exp \left\{ - \int_0^l \int_0^l \mathbf{P}^\alpha(\xi_1) N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2) \mathbf{P}^\beta(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Функции  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$  также представляют собой сглаженные  $\delta$ -функции формы мексиканской шляпы с шириной, равной  $\xi_0$ . Удобными кандидатами для диагональных функций, упрощающими громоздкие вычисления, могут служить следующие комбинации:

$$N^{\alpha\alpha}(\xi_1 - \xi_2) = N^{\alpha\alpha} \exp \left[ - \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4\xi_0^2} \right] \quad (5.5)$$

с коэффициентами  $N^{\alpha\alpha}$ , независимыми от  $\xi_1 - \xi_2$ . Недиagonальные функции  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$ , ответственные за анизотропию, имеют структуру

$$N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2) N^{\alpha\beta} \exp \left[ - \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4\xi_0^2} \right] \quad (5.6)$$

с коэффициентами  $N^{\alpha\beta}$ , не зависимиыми от  $\xi_1 - \xi_2$ .

Варьируя  $N^{\alpha\beta}$ , можно подобрать любую желаемую структуру анизотропного вихревого клубка (см. оригинальную статью [102]). Для небольших расстояний  $\xi_2 - \xi_1 \ll \xi_0$ , сумма  $\sum_{\alpha} N^{\alpha\alpha}(\xi_1 - \xi_2) \rightarrow 1/2$ . Это гарантирует, что  $\langle \mathbf{s}'(\xi, t) \cdot \mathbf{s}'(\xi, t) \rangle = 1$ , как и должно быть для гладких линий. Для больших расстояний ( $\xi_2 - \xi_1 \gg \xi_0$ ) экспонента в (5.5) стремится к дельта-функции  $\delta_{\alpha\beta}(2\sqrt{\pi}\xi_0/6)\delta(\xi_1 - \xi_2)$ . Поэтому для больших расстояний  $\xi_2 - \xi_1 \gg \xi_0$  корреляция между касательными векторами ослабевает,  $\langle \mathbf{s}'(\xi, t)\mathbf{s}'(\xi, t) \rangle \rightarrow 0$ , как и должно быть для “случайных блужданий”.

Для замкнутых вихревых петель функции  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$  должны быть скорректированы. Действительно, для замкнутых петель

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^{\xi_J} \int_0^{\xi_j} d\xi_1 d\xi_2 \mathbf{s}'_{\alpha}(\xi_1) \cdot \mathbf{s}'_{\alpha}(\xi_2) \right\rangle = \\ = \left\langle \int_0^{\xi_J} \int_0^{\xi_j} d\xi_1 d\xi_2 N^{\alpha\alpha}(\xi_1 - \xi_2) \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для получения (5.7) мы используем (2.55) и (2.80). Соответствующая функция, которая принимает во внимание условие замыкания, может быть получена из  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$  (5.5) посредством вычитания постоянной величины (более подробно см. [102]). Полученный характеристический функционал с перенормированной функцией  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$  (5.5) описывает необходимое “полуфрактальное” поведение линии, удовлетворяет условию замыкания (5.7) и в дальнейшем будет использоваться для оценки различных средних значений.

Таким образом, резюмируя содержание данного подраздела, мы рассматриваем вихревой клубок как совокупность (сеть) вихревых петель с разными длинами  $l$ . Каждая петля имеет броуновское структуру “случайного блуждания”. Математически эта структура описывается либо функционалом распределения вероятности  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  (5.2), либо характеристическим функционалом  $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$  (5.4) с ядром  $N^{\alpha\beta}(\xi_1 - \xi_2)$ . Число петель не фиксируется: петли могут “рождаться” и

“умирать” во время рекомбинаций, превращаясь в другие петли. Мы можем рассмотреть длину петель  $l$  в качестве единственной степени свободы полной системы. Конечно, моделирование вихревого клубка путем взаимодействия идеальных (или слабо неидеальных) вихревых колец, рассмотренных в разделе 5.1, также имеет дело с объектами с одной степенью свободы, радиусами колец. Очевидная разница состоит в том, что если возникает слияние или расщепление колец, то кольца теряют свою форму, и модель становится недействительной. Напротив, броуновские петли остаются теми же объектами, имеющими структуру случайных блужданий после рекомбинации (конечно, с другой длиной  $l$ ), так что модель является самоогласованной. Идеи гауссовой статистики для вихревых петель получили дальнейшее развитие в ряде работ Jou et al. [198, 199, 200, 201].

### 5.3. Кинетика сети гауссовых вихревых петель

#### 5.3.1. Кинетическое уравнение

В предыдущем разделе мы представили аргументы в пользу того, что вихревые петли, образующие вихревой клубок, имеют структуру “случайного блуждания”, которое может быть описано с помощью обобщенного распределения Винера. Было принято, что параметры этой структуры не изменяются во время рекомбинаций, поэтому набор вихревых петель обладает только одной степенью свободы, а именно длиной вихревой петли  $l$ . Эта точка зрения совпадает с концепцией, разработанной в работе Copeland et al. [122], где аналогичная проблема изучалась в контексте космических струн. Следуя данной концепции, мы введем функцию распределения  $n(l, t)$ , которая представляет плотность вихревых петель в пространстве их длин  $l$  (см. также оригинальные работы [140, 202, 138]). Функция распределения  $n(l, t)$  определяется как количество петель (в единице объема) с длинами, лежащими между  $l$  и  $l + dl$ .

Следуя работе [140], мы рассматриваем эволюцию системы вихревых петель в турбулентном He II на основе “кинетическо-

го” уравнения баланса для функции распределения  $n(l, t)$ . Имеется два механизма изменения  $n(l, t)$ . Первым из них является детерминированное движение элементов отдельных петель, в течение которых они подвергаются растяжению или сжатию, тем самым плавно меняя функцию  $n(l, t)$ . Вторым механизмом являются случайные процессы пересоединения и рекомбинации вихревых петель. Различают два вида этих процессов: слияние двух петель в одну петлю большего размера, и распад одной петли на две дочерние петли (см. рис. 3.7). Мы опускаем редкие события, когда две петли одновременно пересекаются друг с другом в двух или более различных точках или когда одна петля одновременно претерпевает два или более самопересечения. Эти процессы могут быть важны только для очень плотных клубков, но соответствующие оценки для плотности вихревых линий требуют информации о деталях (например, о продолжительности) процесса реконнекции.

Кинетика вихревого клубка зависит от интенсивности процессов рекомбинации вихревых петель (см. рис. 3.7), т. е. от числа событий на единицу объема и единицу времени. Интенсивность первого процесса выражается коэффициентом  $A(l_1, l_2, l)$ , описывающим число столкновений (в единицу времени) двух петель с длинами  $l_1$  и  $l_2$  с образованием петли длиной  $l = l_1 + l_2$ . Интенсивность второго процесса характеризуется коэффициентом  $B(l, l_1, l_2)$ , описывающим число самопересечений (в единицу времени) и распада петель длиной  $l$  на две дочерние петли с длинами  $l_1$  и  $l_2$ . С учетом сказанного выше мы можем непосредственно записать “кинетическое” уравнение баланса для скорости изменения функции распределения  $n(l, t)$

$$\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial(n(l, t)\dot{l}}{\partial l} = \int \int A(l_1, l_2, l)n(l_1)n(l_2)\delta(l - l_1 - l_2)dl_1dl_2; \quad l_1 + l_2 \rightarrow l - \int \int A(l_1, l, l_2)\delta(l_2 - l_1 - l)n(l)n(l_1)dl_1dl_2; \quad l_1 + l \rightarrow l_2 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
& - \int \int A(l_2, l, l_1, ) \delta(l_1 - l_2 - l) n(l) n(l_1) dl_1 dl_2; \quad l_2 + l \rightarrow l_1 \\
& - \int \int B(l, l_1, l_2) n(l) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2; \quad l \rightarrow l_1 + l_2 \\
& + \int \int B(l_1, l_2, l) \delta(l_1 - l - l_2) n(l_1) dl_1 dl_2; \quad l_1 \rightarrow l + l_2 \\
& + \int \int B(l_2, l, l_1) \delta(l_2 - l - l_1) n(l_2) dl_1 dl_2 \quad l_2 \rightarrow l + l_1.
\end{aligned}$$

Все процессы изображены в правой части каждой строки. Несмотря на очень громоздкую форму, уравнение (5.8) вполне очевидно. Действительно, возьмем, к примеру, шестую строку. В ней утверждается, что число петель длины  $l$  увеличивается всякий раз, когда петля с длиной  $l_1$  распадается на две меньшие петли и одна из дочерних петель имеет длину  $l$ . Скорость роста пропорциональна числу больших петель  $n(l_1)$  и интенсивности распада  $B(l_1, l_2, l)$ . Далее мы собираем (интегрируем) все размеры  $l_1$  и  $l_2$ . Дельта-функция  $\delta(l_1 - l - l_2)$  просто контролирует сохранение полной длины в процессе рекомбинации. Здесь мы не учитываем небольшую потерю длины во время реконнекции; в контексте нашего подхода подробно этот вопрос был изучен в работе Кузьмина [203].

### 5.3.2. Вычисление коэффициентов $A(l_1, l_2, l)$ и $B(l, l_1, l_2)$

Кинетическое уравнение (5.8) имеет “бухгалтерский” характер, в таком виде оно применимо и для других систем, например для сети космических струн (см. работу Copeland et al. [122]). Физика данного подхода заключается в корректном определении и вычислении коэффициентов  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l, l_1, l_2)$  этого уравнения на основе правдоподобной модели динамики вихревых петель.

Изложим кратко основные идеи и выведем математические тождества для коэффициентов интенсивности рекомбинаций  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l, l_1, l_2)$  для случая произвольного набора петель. Детальный расчет этих величин для вихревых петель в турбу-

лентном сверхтекучем гелии на основе Гауссовой модели был выполнен в работах автора [140, 202, 138].

Мы начнем с величины  $B(l, l_1, l_2)$ . По определению, ее физический смысл — это частота событий, при которых какой-то элемент вихревой нити с общей длиной  $l$  пересекает другой элемент той же самой нити. Это самопересечение разбивает первоначальную большую петлю на две дочерние петли с длинами  $l_1$  и  $l_2$ . Как было сказано выше, мы предполагаем, что каждое столкновение приводит к реконнекции линий. Рассмотрим функцию

$$\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t) = \mathbf{s}(\xi_2, t) - \mathbf{s}(\xi_1, t), \quad (5.9)$$

которая является вектором, соединяющим точки  $\mathbf{s}(\xi_2, t_2)$  и  $\mathbf{s}(\xi_1, t_1)$  (см. 5.3). Очевидно, что условие  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t) = 0$  означает, что событие самопересечения участков линии с координатами  $\xi_2, \xi_1$  происходит в момент времени  $t$ . Величина  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)$  представляет собой флуктуирующую трехкомпонентную функцию трех аргументов  $\xi_2, \xi_1, t$ .

Нас интересует вопрос, как часто функция  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)$  обращается в нуль в кубическом объеме пространства  $\zeta = \{\xi_2, \xi_1, t\}$ . Из теории обобщенных функций (см., например, известную книгу Владимирова [111]) следует, что число таких точек (обозначим их далее как  $\zeta_a$ ) может быть выражено через дельта-функцию величины  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)$  с помощью следующей формулы:

$$\sum_a \delta(\zeta - \zeta_a) = \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi_2, \xi_1, t)} \right|_{\zeta=\zeta_a} \delta(\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)). \quad (5.10)$$

Здесь  $X, Y, Z$  являются компонентами вектора  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)$ . Интегрируя обе части уравнения (5.10) по  $d\xi_1 d\xi_2$ , получим полное число самопересечений за единицу времени. Длины отрезков самопересекающейся линии, однако, произвольные. Требование, что дочерние петли должны иметь длину  $l_1$  и  $l - l_1$ , может быть удовлетворено путем введения дополнительного множителя  $\delta(\xi_2 - \xi_1 - l_1)$  в подынтегральное выражение. Наконец, необходимо выполнить усреднение по всем возможным

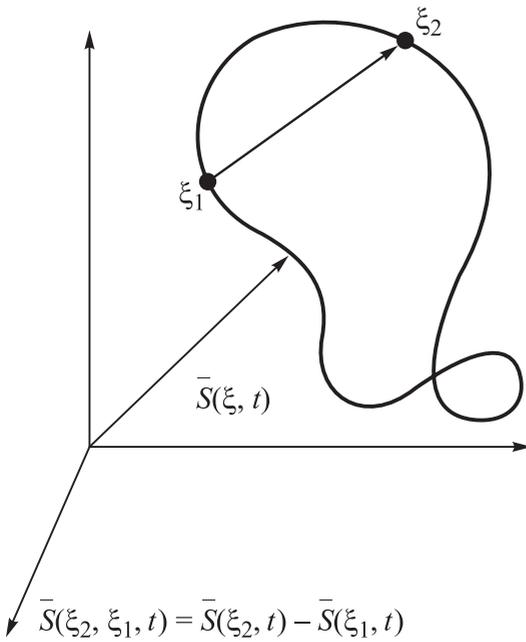


Рис. 5.3. Схематическое изображение процессов самопересечения. Элементы линии описываются как векторы  $\mathbf{s}(\xi)$ , где переменная  $\xi$  принимается как длина дуги. Мы ассоциируем момент самопересечения с обращением в нуль вектора  $\mathbf{S}(\xi_1, \xi_2, t)$ , соединяющего точки  $\mathbf{s}(\xi_2, t)$  и  $\mathbf{s}(\xi_1, t)$ . Таким образом, коэффициент интенсивности дробления вихревых петель равен числу нулей функции  $\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)$  в пространстве переменных  $\zeta = \{\xi_2, \xi_1, t\}$

флуктуирующим конфигурациям. В результате коэффициент интенсивности самопересечений  $B(l, l_1, l - l_1)$  с размерностью  $[B]$  с<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup> имеет вид

$$\begin{aligned}
 & B(l, l_1, l - l_1) = \\
 & = \iint d\xi_1 d\xi_2 \delta(\xi_2 - \xi_1 - l_1) \left\langle \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi_2, \xi_1, t)} \right|_{\zeta \in \zeta_a} \delta(\mathbf{S}_b(\xi_2, \xi_1, t)) \right\rangle. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы получить коэффициент  $A(l_1, l_2, l)$ , мы используем аналогичную процедуру. Рассмотрим две петли с длина-

ми  $l_1$  и  $l_2$ . Наша цель сейчас состоит в том, чтобы найти скорость слияния  $A(l_1, l_2, l)$  этих двух петель в одну петлю длины  $l = l_1 + l_2$ . Размерность  $A(l_1, l_2, l)$  равна  $[A] = \text{см}^3 \text{с}^{-1}$ . Как и прежде, мы представляем вихревые нити, маркируя радиус-векторы их элементов  $\mathbf{s}(\xi_1, t)$  и  $\mathbf{s}(\xi_2, t)$ . В отличие от предыдущего случая самопересечения, здесь две переменные  $\xi_1, \xi_2$  принадлежат к двум разным петлям и изменяются в пределах  $(0 \leq \xi \leq l_1)$  и  $(0 \leq \xi \leq l_2)$ , соответственно. Еще одно важное отличие от предыдущего случая состоит в том, что обе функции  $\mathbf{s}(\xi_1, t)$  и  $\mathbf{s}(\xi_2, t)$  зависят от начальных позиций  $\mathbf{s}(\xi_1 = 0, t) = \mathbf{R}_1(t)$  и  $\mathbf{s}(\xi_2 = 0, t) = \mathbf{R}_2(t)$ , которые выбираются произвольно. Конечно, как и в предыдущем случае самопересечения одной петли, величина  $\mathbf{s}(\xi, t)$  также зависит от “начальных” позиций, но это не влияет на скорость самопересечения. В случае слияния данная зависимость имеет большое значение, так как очень отдаленные петли имеют малые вероятности столкновения. Введем функцию “слияния” двух петель:

$$\mathbf{S}_f(\xi_2, \xi_1, t) = \mathbf{s}(\xi_2, t) - \mathbf{s}(\xi_1, t). \quad (5.12)$$

Очевидно, как и в случае самопересечений, условие  $\mathbf{S}_f(\xi_2, \xi_1, t) = 0$  означает, что событие столкновения участков двух различных линий с координатами  $\xi_2, \xi_1$  происходит в момент времени  $t$ . Повторяя соображения для случая одной петли, мы находим, что число слияний (в единицу времени) точек  $\xi_2, \xi_1$  формально совпадает с уравнением (5.10), что дает

$$\sum \delta(\zeta - \zeta_a) = \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi_2, \xi_1, t)} \right|_{\zeta=\zeta_a} \delta(\mathbf{S}_f(\xi_2, \xi_1, t)) \quad (5.13)$$

с той разницей, что  $\xi_2, \xi_1$  принадлежат к разным кривым. Полученный результат справедлив только для выбранной пары петель. Для того чтобы получить общее количество событий, мы должны умножить этот результат на величину  $n(l_1)n(l_2)d\mathbf{R}_1d\mathbf{R}_2$ , т. е. полное число петель выбранных размеров в элементе объема. Так как пересечение любых элементов линий приводит к слиянию петель, мы должны интегрировать

полученный результат по  $d\xi_1 d\xi_2$ . Выполняя, далее, интегрирование по  $d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2$  и сравнивая с кинетическим уравнением (5.8), находим окончательное выражение для коэффициента слияния  $A(l_1, l_2, l)$ :

$$A(l_1, l_2, l) = \frac{1}{\mathcal{V}} \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \iint d\xi_1 d\xi_2 \times \left\langle \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi_2, \xi_1, t)} \right|_{\xi=\xi_a} \delta(\mathbf{S}_f(\xi_2, \xi_1, t)) \right\rangle, \quad (5.14)$$

где  $\mathcal{V}$  представляет собой общий объем системы.

Таким образом, мы получили выражения для коэффициентов (5.11) и (5.14), которые позволяют рассчитать темпы слияния и разрушения вихревых петель. Они, однако, представляют собой лишь формальные математические тождества. Конкретные результаты зависят от статистики и динамики отдельных линий. Поэтому, для того чтобы двигаться вперед, необходимо определить процедуру усреднения. Мы проведем усреднение с использованием гауссовой модели вихревых петель, изложенной в разделе 5.2. Чтобы не перегружать текст, мы отсылаем читателя к оригинальным статьям [202, 138], а здесь выпишем конечный результат:

$$A(l_1, l_2, l) = b_m V_l l_1 l_2, \quad (5.15)$$

$$B(l, l_1, l - l_1) = b_s V_l \frac{l}{(\xi_0 l_1)^{3/2}}, \quad (5.16)$$

где постоянные  $b_m = 1/\sqrt{18} \approx 0.2357$ ,  $b_s = \sqrt{3/64}\pi^{-9/4} \approx 1.6477 \times 10^{-2}$  появляются вследствие геометрического фактора и комбинаторного анализа (подробнее см. [202, 138]).

Рассмотрим фактор скорости  $V_l$ , введенный в соотношении (5.16), (5.15). В соответствии с формулами (5.11), (5.14) вычисление коэффициентов  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l, l_1, l_2)$  включает в себя расчеты производных по времени для линейных элементов нити (коэффициенты скорости), а также производные по величине  $\xi$  (структурные факторы). Различные системы, такие

как полимерные цепи, космические струны или вихревые петли, имеют сходные структуры “случайного блуждания”. Таким образом, структурные факторы для этих систем вычисляются схожим образом. Однако ситуация с фактором скорости  $V_l$  довольно сильно отличается, что отражает различные законы детерминированной эволюции для различных систем. Даже для изучаемых здесь квантованных вихрей скорость элементов может быть определена по-разному, в зависимости от того, что преобладает в динамике линии — самоиндуцированное движение или внешний поток (ср. с [139]). С учетом этого факта и ради общности мы предпочитаем использовать общий коэффициент скорости  $V_l$ , вместо того чтобы вычислять его в явном виде. Это позволяет расширить наш формализм на другие системы. В принципе, можно было бы избежать введения фактора скорости  $V_l$  и действовать следующим образом. Во-первых, необходимо выразить скорость элементов линии  $ds/dt$  через функционал, зависящий от конфигурации клубка  $\{\mathbf{s}(\xi, t)\}$  (см. соотношение (2.10)). Во-вторых, следует заменить компоненты вектора  $ds/dt$  в определителях, входящих в формулы (5.11), (5.14), и вычислить среднее абсолютное значение этих определителей с помощью функционала вероятности  $\mathcal{P}_{Gauss}(\{\mathbf{s}(\xi, t)\})$  (5.2). Это очень длинная цепочка расчетов дает оценку для скорости  $V_l$ , а именно:  $V_l = C_v \kappa/\xi_0$ , где  $C_v$  является константой порядка единицы.

### 5.3.3. Точное решение кинетического уравнения

Здесь мы опишем одно частное, но очень важное решение уравнения (5.8). Уравнение, аналогичное (5.8), с коэффициентами  $A$  и  $B$  (5.15–5.16) было ранее численно исследовано в работах [122], [123] в контексте космических струн. В частности, в статье [122] было показано, что (5.8) имеет асимптотическое решение  $n(l) \propto e^{-\beta l} l^{-5/2}$ , которое описывает состояние термодинамического равновесия с температурой  $1/k_B\beta$ . Это решение было получено в предположении детального равновесия, в котором каждая из линий в интеграле столкновений равна нулю. Оно, однако, является приближенным решением уравне-

ния (5.8) и действует только в случае очень маленьких дочерних петель.

Здесь мы будем искать стационарное решение (5.8), пренебрегая детерминированным членом. Как обсуждалось в разделе 3.2, процессы рекомбинации (слияния и расщепления) являются самыми быстрыми. Таким образом, вполне естественно предположить, что интегральный столкновительный член  $I_{st}\{n\}$ , выраженный линиями 2 – 7 в (5.8), является ведущим. Мы предполагаем, что не зависящее от времени решение уравнения  $I_{st}\{n\} = 0$  будет основным решением, и нестационарные процессы, а также процессы, связанные с детерминированным движением, можно получить в рамках теории возмущений. Поэтому в качестве первого шага мы пренебрегаем другими слагаемыми и сосредоточимся на поиске решения уравнения  $I_{st}\{n\} = 0$ .

Коэффициенты  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l_1, l - l_1, l)$  являются степенными функциями, следовательно, они представляют собой масштабно инвариантные величины. Это означает, что для масштабов, значительно превышающих  $\xi_0$ , нет характерной длины в постановке задачи. Это указывает на то, что уравнение  $I_{st}\{n\} = 0$  должно иметь масштабно инвариантное, или степенное, решение вида  $n(l) = C * l^s$ . Чтобы найти это степенное решение, мы будем использовать “анзатц” Захарова, который является специальным методом обработки интеграла “столкновений” в уравнении (5.8). Данный метод был разработан Захаровым для волновой турбулентности (см., например, [160], а также первую часть монографии [5]). Теперь мы покажем, как он работает в нашем случае. Возьмем, к примеру, первое и второе слагаемые в интеграле “столкновений” уравнения (5.8). Выполним, далее, следующую замену переменных во втором интеграле:

$$l = \tilde{l}_2 \left( \frac{l}{\tilde{l}_2} \right), \quad l_1 = \tilde{l}_1 \left( \frac{l}{\tilde{l}_2} \right), \quad l_2 = l \left( \frac{l}{\tilde{l}_2} \right). \quad (5.17)$$

В соответствии с этими преобразованиями переменных различные множители в подынтегральном выражении во втором ин-

теграле преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(l_2 - l_1 - l) &\rightarrow \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^{-1} \delta(l - \tilde{l}_1 - \tilde{l}_2). \\ n(l) &\rightarrow n(\tilde{l}_2) \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^s, \quad n(l_1) \rightarrow n(\tilde{l}_1) \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^s, \\ A(l_1, l, l_2) &\rightarrow \frac{1}{2} V_l \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^2 = A(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, l) \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В результате второй интеграл в “столкновительном” члене принимает вид (дополнительное слагаемое 3 при подсчете степеней возникает из якобиана преобразования)

$$\int \int \left(\frac{l}{\tilde{l}_2}\right)^{2+2s-1+3} A(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, l) n(\tilde{l}_1) n(\tilde{l}_2) \delta(l - \tilde{l}_1 - \tilde{l}_2) d\tilde{l}_1 d\tilde{l}_2. \quad (5.19)$$

Легко видеть, что преобразованный второй член в интеграле “столкновений” в правой части кинетического уравнения (5.8) превращается в первый интеграл с дополнительным коэффициентом  $\left(l/\tilde{l}_2\right)^{4+2s}$  в подынтегральном выражении. Выполняя такую же процедуру для всех линий, мы приходим к выводу, что “интеграл столкновений” кинетического уравнения (5.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\int \int A(l_1, l_2, l) n(l_1) n(l_2) \left(1 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^{4+2s} - \left(\frac{l}{l_2}\right)^{4+2s}\right) \times \\ &\quad \times \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 - \\ &= \int \int B(l_1, l_2, l) n(l) \left(1 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^{s+3/2} - \left(\frac{l}{l_2}\right)^{s+3/2}\right) \times \\ &\quad \times \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Для  $s = -5/2$  обе комбинации  $1 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^{4+2s} - \left(\frac{l}{l_2}\right)^{4+2s}$  и  $1 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^{s+3/2} - \left(\frac{l}{l_2}\right)^{s+3/2}$  равны  $(l - l_1 - l_2)/l$ , совпадающим с аргументами дельта-функций. Таким образом, подынтегральные

выражения в обоих интегралах в уравнении (5.20) включают в себя комбинацию типа  $x\delta(x)$ , вследствие чего эти интегралы обращаются в нуль. Это означает, что в стационарном случае, при пренебрежении детерминированными слагаемыми в уравнении (5.8), имеет место степенное решение вида  $n = C * l^{-5/2}$  для функции распределения  $n(l, t)$  плотности вихревых петель в “пространстве” их длин.

**Поток длины и энергии в пространстве размеров вихревых петель.** Обсудим физический смысл полученного решения. Прежде всего, мы хотели бы подчеркнуть, что оно не связано с детальным равновесием. Следовательно, найденное степенное решение  $n = C * l^{-5/2}$  соответствует неравновесному состоянию. Для выяснения природы этого неравновесного состояния введем плотность длины  $L(t)$  (в пространстве размеров  $l$ ), которая есть полная длина, аккумулированная в петлях размера  $l$  (в расчете на единицу объема)

$$L(l, t) = n(l, t)l = \frac{\text{длина всех петель с размером } l}{\text{единица объема} \times \text{интервал длины}}. \quad (5.21)$$

Общая длина (на единицу объема), или плотность вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ , определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}(t) = \int L(l, t)dl = \int ln(l, t)dl. \quad (5.22)$$

Величина  $\mathcal{L}(t)$ , очевидно, сохраняется во время реконнекций,  $d\mathcal{L}(t)/dt = 0$  (см., однако, замечание в разделе 5.3 и статью [203]). Сохранение плотности вихревых линий может быть выражено в виде уравнения непрерывности для плотности длины  $L(l, t)$  в пространстве длин  $l$

$$\frac{\partial L(l, t)}{\partial t} + \frac{\partial P(l)}{\partial l} = 0. \quad (5.23)$$

Эта форма уравнения показывает, что скорость изменения длины связана с “потоком” длины в пространстве размеров петель.

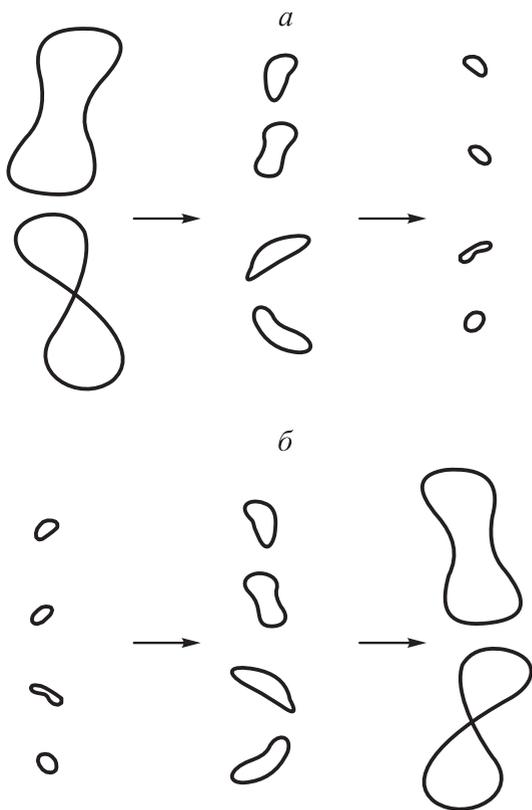
Термин “поток” здесь означает просто перераспределение длины (или энергии, так как в локальном приближении энергия линии пропорциональна ее длине) между петлями различных размеров вследствие рекомбинаций. Чтобы получить выражение для величины  $P(l)$ , мы умножим уравнение скорости (5.8) на длину  $l$  и снова применим “анзац” Захарова (напомним, детерминистский член, второе слагаемое уравнение в левой части уравнения (5.8), мы пока опускаем). Переписывая затем “столкновительный” член в виде производной по  $l$ , приходим к следующему выражению для потока  $P$  (ниже были использованы замены  $l_1/l = x$  и  $l_2/l = y$ ):

$$\begin{aligned}
 P = & \left( \frac{l^{5+2s}}{5+2s} \right) \iint \frac{1}{2} b_m V_l x y C^2 x^s y^s \left( 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^{4+2s} - \left( \frac{1}{y} \right)^{4+2s} \right) \\
 & \delta(1-x-y) dx dy \\
 - & \left( \frac{l^{s+5/2}}{s+5/2} \right) \iint \frac{1}{2} b_s V_l \frac{1}{(\xi_0 x)^{3/2}} C \left( 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^{s+3/2} - \left( \frac{1}{y} \right)^{s+3/2} \right) \\
 & \delta(1-x-y) dx dy. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Оба интеграла в соотношении (5.24) совпадают с интегралами в (5.20), поэтому они обращаются в нуль при  $s = -5/2$ . Однако они имеют предынтегральные множители со знаменателями, которые также обращаются в нуль, т. е. при  $s = -5/2$  мы получаем неопределенность вида  $0/0$ . Вычисляя интегралы в (5.24) как функции параметра  $s$  и устремляя  $s \rightarrow -5/2$ , находим окончательное выражение для “потока” длины в пространстве размеров петель

$$P_{net} = P_+ - P_- = \frac{12.555}{2} C^2 b_m V_l - \frac{5.545}{2\xi_0^{3/2}} C b_s V_l. \quad (5.25)$$

Положительный знак первого слагаемого соответствует потоку длины  $P_+$  в направлении крупных масштабов. Это оправдано, так как процессы слияния приводят к формированию больших петель. Отрицательный знак второго члена соответствует потоку длины  $P_-$  в направлении малых масштабов, так как процессы дробления приводят к формированию маленьких петель.



*Рис. 5.4.* Изображения, иллюстрирующие поток длины (или, что примерно то же самое, энергии) в пространстве размеров петель. Термин “поток” означает просто перераспределение общей длины (энергии) между петлями различных размеров вследствие процессов рекомбинации: *a* — отрицательный поток, или прямой каскад, возникает из-за последовательного дробления петель, что приводит к образованию маленьких петель; *b* — положительный поток, или обратный каскад, описывает последовательное слияние петель, приводящее к формированию больших петель

Эта ситуация схематически изображена на рис. 5.4. Мы будем использовать термин “прямой каскад”, чтобы описать лавинообразное дробление петель, и “обратный каскад”, чтобы описать формирование все бóльших и бóльших петель. Как об-

суждалось в главе 3, прямой каскад последовательного дробления вихревых петель был предсказан Фейнманом в его пионерской работе [13]. Идея Фейнмана была подтверждена в различных численных расчетах, где использовалась процедура искусственного устранения малых петель (см., например, [61, 97]). Наши аналитические расчеты подтвердили гипотезу Фейнмана и дали точную оценку для лавинообразного потока петель (второе слагаемое в правой части соотношения (5.25)). Кроме того, мы получили результат, подтверждающий существование обратного каскада, ответственного за формирование больших петель. “Чистый”, суммарный поток  $P_-$  получается сложением положительного  $P_+$  и отрицательного  $P_-$  потоков, его направление пока не определено. Этот факт будет обсуждаться более подробно позже.

Таким образом, мы нашли стационарное степенное решение кинетического уравнения (5.8), пренебрегая “детерминированными” членами в левой части уравнения. Как уже упоминалось, это решение, связанное с рекомбинацией петель, описывает самые быстрые процессы и может рассматриваться в качестве первой итерации для решения общей задачи, сформулированной кинетическим уравнением (5.8). Подход, разработанный выше, позволяет сделать несколько выводов, касающихся как структуры, так и динамики реального вихревого клубка в турбулентном He II. Это будет сделано в следующих подразделах.

## 5.4. Кинетика петель и теория квантовой турбулентности

### 5.4.1. Свойства вихревого клубка при нулевой температуре

В настоящем разделе мы рассматриваем некоторые свойства вихревого клубка на основе решения уравнения  $I_{st}\{n\} = 0$ , которое было получено и проанализировано в предыдущем пункте. Как уже упоминалось, данное решение является стационарным решением кинетического уравнения (5.8) при прене-

брежении детерминированными слагаемыми. Последнее означает, что взаимодействие с нормальной компонентой опускается. Из-за огромного количества реконнекций каждый в отдельности член в правой части соотношения велик для чистого потока (5.25). “Чистый” поток  $P_{net}$ , который представляет собой разницу между положительным  $P_+$  и отрицательным  $P_-$ , т. е.  $P_{net} = P_+ - P_-$ , значительно меньше. Пренебрегая “чистым” потоком  $P_{net}$  и приравнявая  $P_+ = P_-$ , мы можем определить константу  $C$ :

$$C = \frac{5,455}{12,555} \frac{b_s}{b_m} \frac{1}{\xi_0^{3/2}} = C_{VLD} \frac{1}{\xi_0^{3/2}}. \quad (5.26)$$

Новый численный параметр  $C_{VLD} \approx 1.8104 \times 10^{-2}$ . Таким образом, в окончательном виде степенное решение  $n(l)$  кинетического уравнения (5.8) запишется как

$$n(l) = \frac{C_{VLD}}{\xi_0^{3/2}} l^{-5/2}. \quad (5.27)$$

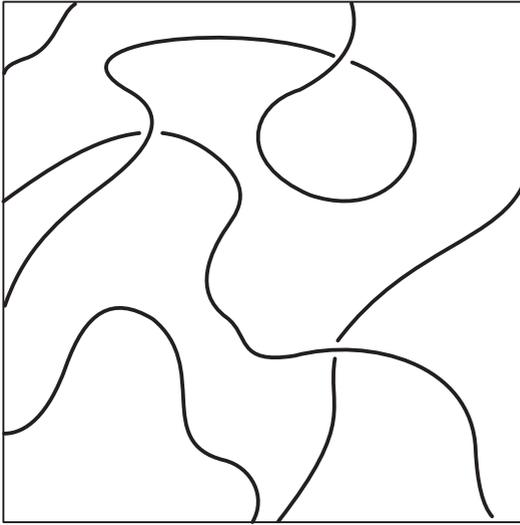
Общая длина  $\mathcal{L}$  на единицу объема вычисляется следующим образом (напомним, величина  $\xi_0$  является параметром обрезания на малых масштабах):

$$\mathcal{L} = \int_{\xi_0}^{\infty} \ln(l) dl = \frac{2C_{VLD}}{\xi_0^2}. \quad (5.28)$$

Результат (5.28) является очень примечательным. Из него следует, что межвихревое расстояние  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$  составляет величину порядка среднего радиуса кривизны  $\xi_0$ , а именно:

$$\xi_0 = \sqrt{2C_{VLD}} \mathcal{L}^{-1/2} \quad (5.29)$$

Эта идея впервые была высказана Шварцем (см. [61]) и подтверждена в огромном количестве численных работ по квантовой турбулентности (см., например, обзор автора [89]). Иллюстрация к этому факту показана на рис. 5.5. Природа данного



*Рис. 5.5.* Схематическая конфигурация вихревого клубка, когда средний радиус кривизны нитей  $\xi_0$  является величиной порядка межвихревого расстояния  $\delta$

явления не выяснена до настоящего времени. В нашем изложении это соотношение возникает вследствие кинетики сталкивающихся вихревых петель. В более реальной ситуации ненулевой температуры связь между межвихревым расстоянием  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$  и средним радиусом кривизны  $\xi_0$  была получена в работе Шварца [61] по численному моделированию вихревого клубка, результат имеет следующий вид:

$$\xi_0 = \frac{1}{c_2(T)\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1/2}. \quad (5.30)$$

Параметр  $c_2(T)$ , зависящий от температуры, является одной из структурных констант вихревого клубка, введенного Шварцем (см. подраздел 2.3.1). Он отвечает за “гладкость” вихревых нитей. Функция  $c_2(T)$  уменьшается при повышении температуры. Это означает, что при низких температурах на вихревом клубке становится больше участков с большой кривизной (“изломов”). Данный факт также получен в численных работах

(см., например, [61, 97] и обзор автора [89]). Сравнивая формулы (5.30) и (5.29), мы приходим к выводу, что параметр  $C_{VLD}$ , полученный в нашем подходе, является пределом нулевой температуры величины  $1/4c_2^2(T)$ , т. е.

$$C_{VLD} = 1/4c_2^2(0).$$

Для минимальной температуры  $T = 1,07K$ , рассмотренной в численном моделировании Шварца, он составляет около  $2,04 \times 10^{-2}$ . Это значение очень близко к величине  $C_{VLD} \approx 1,8104 \times 10^{-2}$ , полученной нами для случая нулевой температуры.

#### 5.4.2. "Чистый" поток $P_{net}$ и плотность вихревых линий

В предыдущем разделе мы определили константу  $C$  в отношении  $n(l) = C \cdot l^{-5/2}$  (см (5.27)) и обнаружили связь между плотностью вихревых нитей  $\mathcal{L}$  и средней кривизной  $\xi_0$  (см. (5.28)). Это дает нам возможность выразить чистый поток  $P_{net}$  (5.25) с помощью величины  $\mathcal{L}$ . Подставив (5.28) в уравнение для чистого потока (5.25), мы приходим к выводу, что как положительный  $P_+$ , так и отрицательный  $P_-$ , составляющие полного потока, пропорциональны квадрату плотности вихревых линий  $\mathcal{L}^2$ . В нестационарных случаях при конечных температурах  $P_+$  и  $P_-$  не компенсируют друг друга. Таким образом, чистый поток  $P_{net}$  не обращается в нуль, но остается величиной, также пропорциональной квадрату плотности вихревых линий  $\mathcal{L}^2$ . "Чистый", нескомпенсированный поток уносит длину вихревых линий из системы. В результате скорость распада величины  $\mathcal{L}(t)$  вследствие процессов рекомбинаций можно записать в виде

$$\left( \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \right)_{recombination} \propto -\mathcal{L}^2. \quad (5.31)$$

Уравнение (5.31) описывает частный случай уравнения Вайнена (см. уравнение (3.8)), коэффициент пропорциональности мы обсудим позднее. Примечательно, что соотношение (3.8) является в связи с процессами пересоединения. Собственная

динамика нитей, различная для различных систем, абсорбирована параметром  $\xi_0$ , который вообще выпал из уравнения Вайнена.

Таким образом, уравнение (5.31) имеет универсальный характер и может быть применено к другим системам. Оно отражает корневой рост пространства между топологическими дефектами  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2} \propto \sqrt{t}$ , что является типичным поведением для несохраняющегося параметра порядка в полевых теориях (см., например, [204]). Следует, однако, иметь в виду одно важное обстоятельство: мы использовали стационарное решение кинетического уравнения (5.8), чтобы описать нестационарную ситуацию, а это может быть оправдано только тогда, когда изменение в  $\mathcal{L}(t)$  происходит медленно и структура петель (в частности, величина  $\xi_0$ ) имеет время, чтобы отрелаксировать к своему равновесному значению, выраженному формулой (5.28). Такое поведение подтверждается результатами численного моделирования в [116].

### 5.4.3. Полная интенсивность реконнекций

Полную интенсивность реконнекций  $\dot{N}_{rec}$  (число событий в единицу времени в единице объема) можно вычислить непосредственно из столкновительного члена в уравнении баланса (5.8). В самом деле, столкновительный член описывает изменение  $n(l)$  вследствие рекомбинаций. Он учитывает “знаки” событий рекомбинаций, т. е. рождается ли петля размера  $l$  или умирает в результате реконнекции. Поэтому, если мы придадим всем слагаемым в интеграле столкновений знак плюс и используем найденное решение  $n(l) = C \cdot l^{-5/2}$  (см. (5.27)), то получим полную интенсивность реконнекций  $\dot{N}_{rec}$ . Соответствующие расчеты приводят к следующему результату:

$$\dot{N}_{rec} = \frac{1}{3} \frac{\kappa(b_s C_{VLD} + b_m^2 C_{VLD})}{\xi_0^5} = C_{rec} \kappa \mathcal{L}^{5/2}, \quad (5.32)$$

где  $C_{rec}$  — константа порядка 0.1 – 0.5. Этот результат согласуется с недавними численными исследованиями [97, 139, 98].

#### 5.4.4. Уравнение Вайнена

Целью данного подраздела является изучение одного из ключевых вопросов в теории сверхтекучей турбулентности, а именно, эволюции плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ . В отличие от предыдущих подразделов, мы не опускаем детерминированные слагаемые в уравнении (5.8), откуда следует, что во внимание принимается взаимодействие с нормальной компонентой. В этом случае уравнение баланса для скорости изменения функции распределения  $n(l, t)$  получает дополнительный вклад, равный  $\partial(n(l, t)\dot{l})/\partial l$ . Умножая кинетическое уравнение (5.8) на длину  $l$  (с детерминированным слагаемым) и интегрируя по всем размерам, имеем

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = \int l \frac{\partial(n(l, t)\dot{l})}{\partial l} dl - |P_{net}|. \quad (5.33)$$

Первый член в правой части уравнения (5.33) описывает изменение плотности вихревой линии  $\mathcal{L}(t)$  в связи с детерминированным движением. Он фактически ответствен за перераспределение плотности вихревых петель  $n(l, t)$  из-за изменения длины каждой петли вследствие взаимного трения. Количество  $P_{net}$  является чистым “поток” длины в  $l$ -пространстве. Мы используем абсолютное значение  $|P_{net}|$ , так как чистый поток  $P_{net}$  всегда уносит длину вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  из системы (либо в сторону больших, либо в сторону малых масштабов), а различные знаки относятся к направлению каскада. Первый член в уравнении (5.33) можно вычислить с использованием уравнения (2.75) для скорости изменения длины линейного элемента вследствие взаимного трения в противотоке гелия со скоростью  $\mathbf{v}_{ns}$ . Оценивая, далее, возникшие при этом средние  $\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle$  и  $\langle (\mathbf{s}'')^2 \rangle$  на основе гауссовой модели (5.2), получаем:

$$\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle = \frac{I_l}{\sqrt{2}c_2\xi_0} \frac{\mathbf{v}_{ns}}{|\mathbf{v}_{ns}|}, \quad \langle (\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')^2 \rangle = \langle (\mathbf{s}'')^2 \rangle = \frac{1}{2\xi_0^2}. \quad (5.34)$$

Подставляя (5.34) в уравнение (5.33) и интегрируя по частям, мы получаем вклад в  $d\mathcal{L}(t)/dt$  от детерминированного слагаемого

$$\begin{aligned}
\left(\alpha \frac{I_l |\mathbf{v}_{ns}|}{\sqrt{2}c_2\xi_0} - \alpha\beta \frac{1}{2\xi_0^2}\right) \int n(l,t)ldl &= -\alpha \frac{2I_l |\mathbf{v}_{ns}|}{\sqrt{2}c_2\xi_0} \mathcal{L} + \frac{\alpha\beta}{\xi_0^2} \mathcal{L} = \quad (5.35) \\
&= \alpha I_l |V_{ns}| \mathcal{L}^{\frac{3}{2}} - \alpha\beta c_2^2 \mathcal{L}^2.
\end{aligned}$$

При вычислении последней строчки мы воспользовались соотношением (5.30), связывающим плотность вихревых линий  $\mathcal{L}$  и среднюю кривизну линии  $\xi_0$ . Полученный результат очень близок по духу и конечной форме к теории Шварца (см. соотношения (4.5),(4.6)). Отличие состоит в том, что Шварц опирался на результаты развитой им теории для распределения длины нитей в пространстве их кривизны, в то время как мы использовали другую идеологию — связанную с кинетикой вихревых петель. Тем не менее, если мы ограничиваемся детерминистской частью (т.е. пренебрегая рекомбинациями), результаты, конечно, должны быть близкими.

Теперь мы должны рассмотреть последний член в правой части уравнения (5.33), связанный с абсолютным значением чистого потока  $|P_{net}|$ . Мы последовательно полагаем, что столкновения и рекомбинации, которые приводят систему в состояние равновесия (по отношению к решению (5.27)), происходят гораздо быстрее, чем медленные детерминированные процессы. Это означает, что параметры  $\xi_0$ ,  $c_2$ , и  $I_l$  успевают отрелаксировать к их равновесным значениям. Данное предположение широко применяется и подтверждается в численном моделировании [116]. Используя выражение для чистого потока (5.25) и исключая, далее, с помощью условия нормировки  $\mathcal{L}(t) = \int n(l)ldl$  константу  $C$ , а также используя определение параметра Шварца  $c_2(T)$  (см. подраздел 2.3.1, уравнение (5.30)), перепишем выражение для потока (5.25) в форме  $P_{net} = C_F \kappa \mathcal{L}^2$ , где зависящая от температуры постоянная  $C_F$  равна:

$$C_F = (2.22b_m - 3.926c_2^2b_s). \quad (5.36)$$

Мы назвали эту константу в честь Фейнмана, который был первым, кто обсуждал эволюцию плотности вихревых линий

вследствие процессов столкновений и рекомбинаций. Напомним, что Фейнман предполагал рассматривать распад вихревого клубка благодаря лавинообразному разрушению вихревых петель с последующим исчезновением их на очень малых масштабах. Соотношение (5.36) показывает, однако, что возможен также обратный каскад, который соответствует каскадному слиянию вихревых петель. К сожалению, наш подход имеет слишком приближенный характер, чтобы сделать сколько-нибудь сильный количественный вывод. Понятно, однако, что при низких температурах, когда вихревой клубок является более “изломистым”, и соответственно  $c_2(T)$  велико, значение  $C_F$  будет отрицательным. Это соответствует прямому каскаду в область очень малых петель. Наоборот, при высоких температурах линии являются более гладкими,  $c_2(T)$  мала и  $C_F$  положительна, откуда следует, что существует обратный каскад с образованием больших петель. Если мы, например, примем значения для  $b_m$  и  $b_s$ , полученные в соотношениях (5.16), (5.15)), и используем для  $c_2^2(T)$  значения, предложенные в статье Шварца (см. [61]), то мы получим  $C_F \approx -0,252$  для температуры 1,07 К, и  $C_F \approx 0,4$  для температуры 2,01 К.

Собирая все вклады в  $d\mathcal{L}(t)/dt$  как от детерминированных, так и столкновительных процессов (5.33), (5.35) и (5.36), а также принимая во внимание, что  $P_{net} = |C_F| \kappa \mathcal{L}^2$ , мы, окончательно, имеем

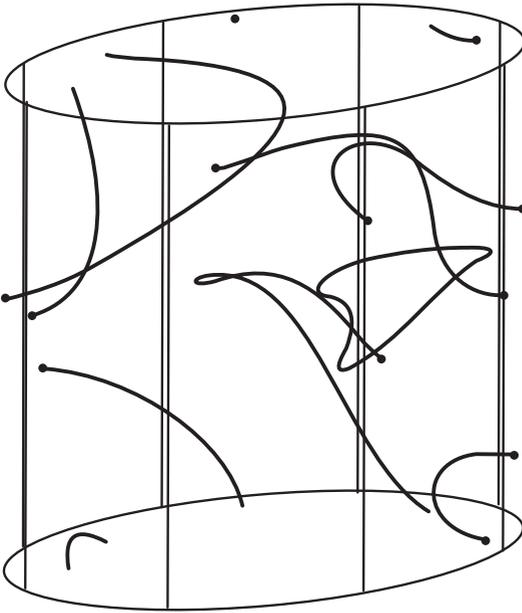
$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = \alpha I_l |V_{ns}| \mathcal{L}^{\frac{3}{2}} - \alpha \beta c_2^2 \mathcal{L}^2 - |C_F| \kappa \mathcal{L}^2. \quad (5.37)$$

Таким образом, начиная с кинетики сети вихревых петель, мы получили знаменитое уравнение Вайнена [90, 91, 92, 205, 206].

Обсудим смысл различных слагаемых в этом уравнении. Первый, так называемый производящий, член в правой части уравнения Вайнена описывает рост вихревого клубка вследствие взаимного трения. Второй член также связан с взаимным трением, тем не менее, он ответствен за уменьшение плотности вихревых линий. Такая точка зрения совпадает с идея-

ми Шварца [61], который получил детерминированный вклад в  $d\mathcal{L}(t)/dt$  с использованием другого подхода. Третье слагаемое в правой части уравнения (5.37) связано со случайными столкновениями вихревых петель. Оно описывает уменьшение плотности вихревых линий вследствие потока их длины в пространстве размеров вихревых петель. В зависимости от “игры” между коэффициентами  $b_m$  и  $b_s$  и параметра Шварца  $c_2(T)$  поток может быть положительным или отрицательным. Еще раз подчеркнем, что независимо от знака чистого потока, этот третий член должен приводить к уменьшению плотности вихревых линий, однако физика этих процессов разная. Для  $C_F < 0$  поток отрицательный и преобладает лавинообразный процесс дробления вихревых петель, непрерывно генерирующий очень маленькие петли. На таких очень малых масштабах существует ряд механизмов исчезновения энергии вихрей. Это могут быть, например, акустическое излучение, нелинейные волны Кельвина или вылетание быстро движущихся маленьких петель из объема. Эти механизмы могут сбалансировать рост длины линий из-за взаимного трения. В результате в системе формируется полностью развитая турбулентность с потоком энергии в направлении малых масштабов, что предполагает весьма хаотичное состояние вихревого клубка, как это, например, изображено на рис. 3.1.

Случай с обратным каскадом менее ясен. Обратный каскад предполагает лавинообразный процесс генерации больших петель. В отличие от предыдущего варианта прямого каскада, в этом случае нет никакого очевидного механизма исчезновения очень больших петель. Вероятным сценарием является то, что части больших петель прикрепляются к стенкам объема. В результате в системе реализуется состояние с несколькими линиями, простирающимися от стенки до стенки, с очень “бедной” динамикой и редкими событиями реконнекций. Такая ситуация соответствует вырожденному состоянию вихревого клубка, полученному в ряде численных работ (см., например, [61, 207]). Образец вырожденного состояния вихревого клубка изображен на рис. 5.6. Это наблюдение может быть альтернативным объ-



*Рис. 5.6.* Пример высокотемпературного численного моделирования вихревого клубка [207]. Видно, что вихревой клубок трансформируется в состояние с несколькими длинными линиями, простирающимися от стенки до стенки, с “бедной” динамикой и редкими событиями реконнекций

яснением феномена, который был открыт Хельсинкской группой [68] и в котором переход к сверхтекучей турбулентности определяется температурой.

Резюмируя содержание этой главы, мы можем констатировать следующее. Рассмотрение эволюции сети вихревых петель в He II, которые сливаются и расщепляются в результате рекомбинаций, можно считать хорошей отправной точкой для разработки удовлетворительной теории квантовой турбулентности. В самом деле, даже очень простой подход (а именно, простое уравнение больцмановского типа для плотности петель  $n(l)$  только с одной степенью свободы, длиной  $l$ ) позволил описать многие черты хаотического вихревого клубка и предложить

объяснения для многих фактов, ранее известных только из численного моделирования. Например, мы можем указать на подтверждение факта образования каскадного дробления (или слияния) петель, ранее предложенного в качестве гипотезы в сценарии Фейнмана. Другим заключением является объяснение ранее непонятого факта, что средняя кривизна  $\xi_0$  порядка межвихревого расстояния  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ . Кроме того, получен результат о полной интенсивности реконнекций, согласующийся с недавними численными исследованиями [97, 98, 139]. Особо следует упомянуть аналитический вывод уравнения Вайнена — к нашему сведению, пока единственный результат.

Важно, что представленная модель может получить дальнейшее развитие, например, в теоретическую схему можно включать незамкнутые петли или расширить пространство степеней свободы (например, добавить в степень свободы вихревой петли импульс Лэмба). Также можно разнообразить статистику вихревых линий, что позволило бы рассматривать другие структуры вихревого клубка, к примеру, вихревые пучки. Тем не менее, основной принцип, утверждающий, что регулярный способ изучения квантовой турбулентности должен быть основан на рассмотрении множества случайным образом сливающихся и дробящихся петель, сохраняет свою ключевую позицию.

## 6. Гидродинамика сверхтекучей турбулентности

### 6.1. Постановка задачи

Предыдущие главы были посвящены вопросам стохастического поведения вихревых нитей в He II, устройству вихревого клубка и феноменологическому описанию сверхтекучей турбулентности на языке плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}(t)$ . Экспериментальное изучение сверхтекучей турбулентности в подавляющем большинстве базируется на гидродинамических методах. К ним относятся, например, исследование вихревого клубка первым и вторым звуком, измерение разности температур или давлений, измерение потоков тепла и массы и т.д. С другой стороны, большинство известных способов создания сверхтекучей турбулентности также являются гидродинамическими — это генерация вихревого клубка потоком (противотоком), звуковыми полями и т.д. Наконец, в последнее время изучаются гидродинамические процессы в He II, развитие которых в значительной степени определяется возникновением и динамикой вихревых нитей. К таким процессам можно отнести эволюцию нелинейных волн первого и второго звуков, нестационарный теплообмен и/или процессы кипения гелия.

Приведенные примеры демонстрируют, что имеется взаимное влияние гидродинамических процессов и динамики вихревого клубка друг на друга и поэтому как задача сверхтекучей турбулентности, так и исследование гидродинамических процессов в присутствии вихревого клубка являются неотъемлемыми частями одной общей проблемы [96]. Поэтому изучение свойств вихревого клубка, например в противотоке, исходя из допущения, что параметры противотока фиксированы ( $\mathbf{v}_{ns} = \text{const}$ ), не является оправданной процедурой. Столь же неправильной процедурой является исследование гидродинамических задач (например, изучение распространения звуков), предполагая, что плотность вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  фиксирована. Нужно отметить, что, несмотря на очевидность последних

двух утверждений, такие подходы тем не менее широко распространены.

Итак, мы заключаем, что изменения параметров вихревого клубка и гидродинамических переменных происходят согласованно, и главная цель теперь — построить систему уравнений, описывающую это согласованное изменение. Эволюцию системы, подчиняющуюся такому набору уравнений, будем называть гидродинамикой сверхтекучей турбулентности (ГСТ). Соответствующая задача, как оказалось, является довольно запутанной, и существует несколько подходов к этой проблеме. Мы рассмотрим в настоящей главе имеющиеся способы описания и обсудим расхождения. Перед тем как перейти к различным вариантам вывода уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности, представляется необходимым сделать ряд замечаний, касающихся самой постановки проблемы.

Во-первых, следует подчеркнуть, что мы будем здесь иметь дело с макроскопическими (усредненными) уравнениями гидродинамики, где сингулярные вклады в скорость, давление из окрестностей отдельных вихрей устраняются с помощью процедуры усреднения. Такой подход называется “крупнозернистой” (“coarse-grained”) гидродинамикой.

Во-вторых, решение поставленной задачи, безусловно, зависит от типа турбулентности или в равной степени от статистики хаотических вихревых нитей, составляющих квантовую турбулентность. Здесь мы рассмотрим случай неупорядоченных вихревых клубков, развивающихся в противотоке He II (турбулентность Вайнена), и случай поляризованных вихревых пучков, которые, как полагают, реализуются, например, при течении сверхтекучего гелия в каналах или при обтекании препятствий (квазиклассическая турбулентность).

## 6.2. Неупорядоченные вихревые клубки

Основной целью формулировки ГСТ (для неупорядоченных вихревых клубков) является объединение уравнение Вайнена и классических уравнений двухжидкостной гидродинамики

ки Ландау — Халатникова (см., например, Халатников [208], Putterman [209], а также первую часть книги [5]. Чтобы реализовать эту схему, представляется важным еще раз внимательно рассмотреть предположение Вайнена, касающееся автомодельного состояния вихревого клубка (см. подраздел 3.4), т. е. гипотезы, согласно которой изменение величины ПВЛ  $\mathcal{L}(t)$  определяется только самой  $\mathcal{L}(t)$  и гидродинамическими параметрами. Более тонкие характеристики вихревой структуры, которые отличаются от ПВЛ  $\mathcal{L}(t)$ , не участвуют в макроскопическом описании процесса. В стационарных однородных случаях, когда только  $\mathcal{L}(t)$  и ориентация вихрей в пространстве определяют взаимную силу трения, отвечающую за большинство встречающихся эффектов, это предположение более-менее оправдано. Когда поток не может рассматриваться как стационарный и однородный, возникают вопросы, касающиеся возможности описания гидродинамических процессов (в присутствии вихревого клубка) с точки зрения только одной переменной  $\mathcal{L}(t)$ . Действительно, в этом случае величина ПВЛ  $\mathcal{L}(t)$ , участвующая в наборе гидродинамических уравнений, должна приобрести полевые свойства, т. е. необходимо ввести дополнительную зависимость от координаты,  $\mathcal{L}(t) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ . Скорость изменения  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  должна тогда подчиняться соотношению

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{L} \mathbf{v}_L), \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{v}_L$  является скоростью дрейфа клубка, определяемой как

$$\mathbf{v}_L = \left\langle \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{L}} \sum_j \int_0^{L_j} \dot{\mathbf{s}}_j d\xi_j \right\rangle. \quad (6.2)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{s}}_j$  — скорость элементов вихревой линии (см. уравнение (2.10)). Очевидно, что скорость дрейфа клубка  $v_L$  не выражается через величину  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ , а должна привлечь более тонкие характеристики, например, распределение и ориентацию нитей в пространстве, распределение кривизны и т. д. Таким образом, уже в стационарном, но неоднородном случае появляется новая

переменная, связанная с тонкой структурой вихревого клубка. Очевидно, что в рамках феноменологической теории Вайнена не представляется возможным определить  $\mathbf{v}_L$ , если только не сделаны некоторые дополнительные предположения или не использованы экспериментальные данные. Напомним, что, по мнению Вайнена, скорость дрейфа клубка  $\mathbf{v}_L$ , должна быть (в силу изотропии клубка) равна скорости  $\mathbf{v}_s$  сверхтекучей компоненты. Анализируя свои численные работы, Шварц [53, 61] заключил, что вихревой клубок должен дрейфовать в направлении нормальной компоненты со скоростью, пропорциональной скорости противотока  $\mathbf{v}_{ns}$ . Это предположение согласуется с ранее выполненными экспериментами Ashton et al. [210].

Далее мы также будем считать, что в нестационарных случаях, описываемых уравнением (6.1), скорость дрейфа клубка  $\mathbf{v}_L$  связана со скоростью противотока  $\mathbf{v}_{ns}$  соотношением  $\mathbf{v}_L = b \mathbf{v}_{ns}$ , где  $b$  — постоянный коэффициент, как и в случае стационарных течений.

Таким образом, уже в стационарном, но неоднородном случае необходимо ввести в дополнение к ПВЛ  $\mathcal{L}(t)$  новую переменную, которая не связана прямо с  $\mathcal{L}(t)$ . Нестационарные проблемы являются гораздо более сложными случаями с точки зрения ситуации, обсужденной выше (а также в подразделе 3.4).

Понимая, что вопрос о включении в теоретическую схему переменных, связанных более тонкими характеристиками вихревого клубка, является открытым и не может быть решен до построения полной теории квантовой турбулентности, мы предполагаем, что гидродинамические процессы могут быть полностью описаны набором из уравнений двухжидкостной гидродинамики Ландау — Халатникова, плюс уравнения Вайнена для ПВЛ  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  (3.8). Последнее, однако, должно быть слегка изменено, чтобы включить эффекты неоднородности (см. (6.1))

Попытки описать нестационарные гидродинамические процессы в Не II, содержащем вихревой клубок, возникли с открытием соотношения Гортера — Меллинка (см., например, [209],

а также соотношение (3.181) в первой части монографии [5]). В простейшем случае существование вихревого клубка было учтено путем введения стационарной силы Гортера — Меллинка как  $F_{ns} = A(T)\rho_s\rho_n\mathbf{v}_{ns}^2\mathbf{v}_{ns}$  (см. формулу (3.12)), в правой части уравнений для сверхтекучей и нормальной скорости (с противоположными знаками, конечно). Важным усовершенствованием было введение в закон Гортера — Меллинка плотности вихревых линий  $\mathcal{L}$ . Это было достигнуто использованием асимптотического соотношения для ПВЛ  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L} = \gamma^2\mathbf{v}_{ns}^2$  (3.11), приводящего к зависимости

$$F_{ns} = A(T)\rho_n\rho_s(\mathcal{L}(t)/\gamma^2)\mathbf{v}_{ns}. \quad (6.3)$$

Соотношение 6.3 используется для решения нестационарных задач (см., например, [209]). При этом предполагается, что плотность вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ , хотя и меняется во времени, всегда подстраивается под изменение относительной скорости  $\mathbf{v}_{ns}$ . Собственная динамика величины  $\mathcal{L}(t)$ , связанная с уравнением Вайнена (3.8), игнорируется. Конечно, некоторый класс задач (например, с медленно меняющимися параметрами) с помощью такой идеологии можно решить. Однако этот подход имеет очень ограниченную область применения, потому и, что очень важно, не удовлетворяет всем необходимым законам сохранения.

С другой стороны, если гидродинамические уравнения рассматривались как совокупность законов сохранения, то можно получить полную замкнутую систему уравнений для всех независимых переменных, включая ПВЛ  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ . Эта схема была реализована в работе Немировского и Лебедева [113] на основе формализма, разработанного Бекаревичем и Халатниковым [211].

Как известно, плотность энергии  $E$  безвихревого течения Не II равна

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 + E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0). \quad (6.4)$$

Здесь  $j_0$  — плотность импульса в системе отсчета сверхтекучей компоненты;  $S$  — плотность энтропии и  $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$  — плотность

энергии в этой системе. Дифференциал величины  $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$  имеет вид

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + \mathbf{v}_{ns} \cdot d\mathbf{j}_0. \quad (6.5)$$

В классической двухжидкостной модели уравнения движения выводят таким образом, чтобы, используя законы сохранения для  $\rho$ ,  $S$ ,  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathbf{j}_0$ , получить закон сохранения энергии (см. первую часть монографии [5]). Этот самосогласованный подход может быть распространен на случай He II, содержащего вихревой клубок. Присутствие вихрей изменяет плотность энергии  $E_0$ , изменение может быть выполнено путем добавления слагаемого

$$\delta E_0 = \varepsilon_V d\mathcal{L}. \quad (6.6)$$

Здесь  $\varepsilon_V$  — энергия единичной длины вихревой линии, которая берется из (2.65). Таким образом, в присутствии вихревого клубка энергия потока He II становится функцией величины  $\mathcal{L}$ , являющейся в данном формализме новой независимой переменной в дополнение к основному набору переменных  $\rho$ ,  $S$ ,  $v_s$ ,  $\mathbf{j}_0$ . При этом важным шагом будет то обстоятельство, что переменная  $\mathcal{L}$  не подстраивается под вышеупомянутые термодинамические и гидродинамические функции, а изменяется в соответствии с независимым уравнением Вайнена (3.8) в виде (6.12). Наряду с изменением плотности энергии (6.6) другие гидродинамические характеристики, такие как диссипативная функция, тензор плотности импульса и т.д., должны также быть изменены соответствующим образом. Эти изменения, однако, не являются независимыми, а должны быть такими, чтобы законы сохранения для множества  $\rho$ ,  $S$ ,  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathcal{L}$  приводили к закону сохранения полной энергии  $E(\rho, S, \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0, \mathcal{L})$ . Это последнее требование дает все поправки к набору уравнений двухжидкостной гидродинамики, т. е. к новому набору уравнений при условии, что относительно диссипативной функции  $R$  сделано дополнительное предположение. В работе [113] авторы использовали модель Фейнмана — Вайнена. В представленной модели за производство энтропии отвечают два процесса. Одним из них является работа сила взаимного трения между

вихревыми линиями и нормальной составляющей. Она пропорциональна суммарной длине вихревой линии  $\mathcal{L}$  в единице объема и усредненному квадрату скорости вихрей относительно нормальной компоненты. Кроме того, имеется еще один механизм производства энтропии, связанный с преобразованием энергии дробления мелких вихревых колец в тепловые возбуждения. Этот последний механизм дает выражение для производства энтропии, равное произведению энергии единицы длины и вихревой нити  $\varepsilon_V$  на скорость распада вихревого клубка  $\beta_V \mathcal{L}^2$ . Таким образом, вклад  $R'$ , вихревого клубка, в диссипативную функцию равен

$$R' = (K v_{ns}^2 \mathcal{L} + \varepsilon_V \beta_V \mathcal{L}^2) / T \quad (6.7)$$

Коэффициент  $K$  равен  $K = B \kappa \rho_s \rho_n / 3\rho$  (где  $B$  — коэффициент Холла — Вайнена, связанный с коэффициентами трения  $\alpha$  и  $\alpha'$ ), он может быть определен при предположении, что в стационарном однородном случае величина  $TR'$  соответствует работе силы Гортера — Меллинка. Использование (6.7) позволяет однозначно определить уравнения движения Не II в присутствии вихревого клубка и тем самым разработать гидродинамическую теорию сверхтекучей турбулентности (ГСТ). Совокупность полученных уравнений имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (6.8)$$

$$\frac{d\mathbf{j}_i}{dt} + \frac{d\Pi_{ik}}{dx_k} = 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{dS}{dt} + \nabla \cdot [S \mathbf{v}_n + S^L (v_L - v_n)] = \frac{1}{T} [K \mathcal{L} v_{ns}^2 + \varepsilon_V \beta \mathcal{L}^2], \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \left\{ \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla \mu \right\} - b \nabla \varepsilon_V - S^L b \nabla T \\ = K \mathcal{L} \mathbf{v}_{ns} + \varepsilon_V \alpha_V \frac{\mathbf{v}_{ns}}{|\mathbf{v}_{ns}|} \mathcal{L}^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Уравнение Вайнена в этой схеме запишем как:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{L} \mathbf{v}_{\mathcal{L}}) = \alpha_V |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2. \quad (6.12)$$

Здесь  $\Pi_{ik}$  — тензор потока импульса с дополнительным членом,  $\varepsilon_V \mathcal{L} \delta_{ik}$ , связанным с наличием вихрей, и  $S^L$  — дополнительная энтропия из-за вихревого клубка. Уравнения (6.8) — (6.11) плюс модифицированное уравнение Вайнена (6.12) являются существенным обобщением двухжидкостной модели Ландау — Халатникова и могут быть использованы для изучения нестационарных гидродинамических проблем He II в присутствии квантовой турбулентности.

Дополнительные (по отношению к классическим уравнениям двухжидкостной гидродинамики Ландау — Халатникова) слагаемые в левых частях приведенных выше уравнений, так называемые реактивные члены, связаны с соответствующей симметрией гамильтониана системы. Диссипативные слагаемые в правых частях соотношений (6.12) и (6.11) можно записать в виде антисимметричной матрицы (см. детали в [113]), и, поскольку  $\partial E / \partial v_{s,k} = -\rho v_{ns,k}$ , а  $\partial E / \partial \mathcal{L} = \varepsilon_V$ , то такая форма демонстрирует принцип взаимности Онзагера для кинетических коэффициентов. Антисимметрия коэффициентов следует из различного поведения  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathcal{L}$  по отношению к обращению времени (см. курс Ландау и Лифшица [28]).

Отметим, что правая часть (6.11) наряду с обычным членом Гортера – Меллинка  $K \mathcal{L} v_{ns}$  содержит также дополнительный член  $\varepsilon_V \alpha_V (\mathbf{v}_{ns} / |\mathbf{v}_{ns}|) \mathcal{L}^{3/2}$ . Этот член описывает дополнительное затухание в результате поглощения кинетической энергии потока вихревым клубком в процессе его роста. Следуя идеям Фейнмана, при распаде клубка эта часть энергии возвращается к основному потоку в форме энтропии. Обычно в случае, когда вихревой клубок близок к равновесной ситуации (по отношению к скорости  $\mathbf{v}_{ns}$ , и  $\mathcal{L} = \gamma^2 \mathbf{v}_{ns}^2$ ), первый член гораздо больше, чем этот дополнительный. Тем не менее, когда  $\mathcal{L}$  очень велико, это слагаемое, обычно небольшое, может стать значительно больше, чем член Гортера — Меллинка. Следует отметить, что дополнительный член имеет особую форму и не зависит от величины скорости, а только от его направления. Это свойство напоминает эффект “сухого трения” в классической механике, и поэтому дополнительный член будет назы-

ваться “dry friction term” [212]. Этот термин произошел от известного в обычной механике факта, утверждающего, что сила взаимодействия скользящих относительно друг друга поверхностей не зависит от величины скорости, а направлена только против движения. Конкретный вид этого термина напрямую связан с генерирующим членом в уравнении Вайнена (3.8). В самом деле, если бы мы использовали альтернативное уравнение (3.10) вместо уравнения Вайнена (3.8) при выводе ГСТ, тогда дополнительный член имел бы форму  $\mathcal{L}\mathbf{v}_{ns}$ , т.е. совпадал бы со структурой члена Гортера — Меллинка. Отметим, что в стационарном случае  $\mathcal{L} \propto \mathbf{v}_{ns}^2$  оба слагаемых в правой части (5.14) приобретают одну и ту же структуру, они пропорциональны  $v_{ns}^3$ . Поэтому влияние дополнительного члена имеет значение с точки зрения эволюции динамики ВК, и его эффект может наблюдаться лишь в нестационарных случаях.

Другой способ получения уравнений ГСТ на основе микрокопической кинетической теории Шварца (см. раздел 4.1) был выполнен Ямада et al. [94]. Постановка задачи была сформулирована на основе стохастического кинетического уравнения для функции распределения общей длины линии  $\lambda(R, \theta, t)$  в представленном фазовом пространстве  $R, \theta$  (см. подраздел 4.2). Этот метод обеспечил более глубокое понимание сущности стохастического подхода по сравнению с уравнениями ГСТ, полученными на основе феноменологического метода, описанного выше. Сосредоточившись на диссипативных эффектах, Ямада et al. [94] не получили реактивные члены в левых частях уравнений движения (см. (6.8)–(6.11)), связанные с энергетическим вкладом вихревого клубка в термодинамические переменные. Следует отметить, однако, что это не имеет большого значения, так как вклад клубка в энергию или давление в обычно встречающихся условиях эксперимента очень мал, хотя может стать заметным при очень низких температурах.

Опуская проблему реактивных терминов, мы хотели бы обсудить очень важное различие между результатами, полученными Ямада et al. [94], и в работе [113] (см. предыдущий параграф). Речь идет о дополнительном слагаемом

$\varepsilon_V \alpha_V (\mathbf{v}_{ns}/|\mathbf{v}_{ns}|) \mathcal{L}^{3/2}$  в силе взаимного трения, которое мы называли “сухим трением”. В работе Ямада et al. [94] этот член действительно имеется, однако он имеет противоположный знак по сравнению с (6.11). С формальной точки зрения этот результат был получен потому, что авторы приняли точку зрения Шварца, утверждающего, что как производящий, так и распадный члены в уравнении Вайнена (3.8) связаны с действием сил трения. Следовательно, затухание вихревого клубка сопровождается возвращением энергии из вихревого клубка в кинетическую энергию основного потока. (Напомним, что в модели Фейнмана энергия из вихревого клубка в основной поток возвращается в виде тепловых возбуждений). Это может обнаружиться экспериментально, например, как уменьшение эффективной силы взаимного трения Гортера — Меллинка. Таким образом, формальное, на первый взгляд, различие в интерпретации уравнения Вайнена (3.8) появилось в уравнениях гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Это обстоятельство предоставляет возможность экспериментально проверить, какой механизм распада вихревого клубка (Фейнмана — Вайнена или Шварца) находится ближе к физической реальности.

Geurst [1989, 1992] (см. подробности в [213] и ссылки в ней) получил уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности для случая одномерного потока из вариационного принципа. Такой подход с использованием модели вихревого клубка, изменяющего термодинамические свойства текущего He II, является близким к феноменологическому методу Немировского и Лебедева [113], описанному выше. Отличительной особенностью используемого метода является то, что Geurst не считал скорости дрейфа  $\mathbf{v}_L$  в качестве переменной, определяемой из других величин. Напротив, Geurst использовал скорость дрейфа  $\mathbf{v}_L$  в качестве новой независимой переменной, ответственной за макроскопическую динамику вихревого клубка, и получил дополнительное дифференциальное уравнение для нее. Сравнивая уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности, полученные Geurst, с уравнениями, описанными в предыдущих параграфах, мы хотели бы сделать несколько за-

мечаний. Что касается реактивных условий, они близки к полученным Немировским и Лебедевым [113], формально — из-за “сходства” между феноменологическим и вариационным методами. Дополнительный член в правой части уравнения (6.11), связанный с дополнительной силой, действующей на сверхтекучую компоненту, представляет особый интерес, потому что, как обсуждалось ранее, эта сила имеет противоположные знаки в работах Немировского и Лебедева [113] и Ямада et al. [94]. Как упоминалось, это противоречие связано с использованием либо феноменологического, либо кинетического метода для получения уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности. В работе Geurst [213] этот дополнительный член имеет знак  $sign(v_L - v)$ , т. е. в зависимости от направления дрейфа ВК по отношению к среднemasсовой скорости жидкости он может быть положительным или отрицательным. Подробное обсуждение сложившейся ситуации содержится в обзорных статьях [212, 96, 89].

Мы продемонстрировали в настоящей главе три различных метода получения уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности для полностью неупорядоченных вихревых клубков. Эти уравнения предназначены для описания гидродинамических процессов в противотоке He II при скоростях выше критической скорости. Поскольку критические скорости очень малы, наиболее интересные практические проблемы находятся в исследуемом диапазоне. Решения этих уравнений описывают множество наблюдаемых нестационарных гидродинамических явлений. Они также прогнозируют много новых интересных эффектов, которые еще предстоит открыть (см. главу 7).

### 6.3. Случай вихревых пучков

Другим важным случаем является ситуация, когда множество вихревых линий, как полагают, состоит из множества пучков, содержащих внутри много нитей. Эта ситуация реализуется в случае так называемой квазиклассической турбулентно-

сти, возникающей при течении сверхтекучего гелия в каналах или при обтекании препятствий. Макроскопическое поведение этих пучков напоминает динамику вихрей в обычных жидкостях. “Крупнозернистая” гидродинамика вихревых пучков изучается многими авторами (см., например, [214, 215, 216]). Интерес к этой модели связан с квазиклассической квантовой турбулентностью, т. е. с поведением вихревого клубка, воспроизводящего свойства классической турбулентности (см., например, серию работ Вайнена [195, 217, 120] и обзор автора [89]).

Основой для математического формализма модели вихревых пучков стала гидродинамика вращающихся сверхтекучих жидкостей, или модель Холла — Вайнена — Бекаревича — Халатникова (НВБК) (см., например, книгу [208]).

Ввиду малости кванта циркуляции  $\kappa$  даже относительно слабая скорость вращения производит большую плотность вихревых нитей. Таким образом, можно построить крупнозернистую гидродинамику гидродинамических уравнений, которые усредняют вклад многих отдельных вихревых линий и инкорпорируют их вклад в макроскопические эволюционные уравнения для сверхтекучей и нормальной скоростей He II.

Гидродинамические уравнения используют модели НВБК, модифицированные для включения присутствия вихрей простым добавлением силы взаимного трения  $\mathbf{F}_{mf}$  и натяжения  $\mathbf{T}$ , а также наложением условия, что  $\nabla \times \mathbf{v}_s \neq 0$ . В случае несжимаемой жидкости (обеих компонент  $\nabla \cdot \mathbf{v}_n = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0$ ) и в инерциальной системе отсчета уравнения НВБК записываются как

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p_n - \mathbf{F}_{mf} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_n, \quad (6.13)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p_s + \mathbf{F}_{mf} + \rho_s \mathbf{T}. \quad (6.14)$$

Здесь  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$  являются макроскопическими, “крупнозернистыми” скоростями нормальной и сверхтекучей компонент (усредненных в малом объеме  $\mathcal{V}$ ). Величины  $p_n$  и  $p_s$  являются эффективными давлениями, действующими на нормальную и

сверхтекучую компоненты ( $\nabla p_n = \nabla p - \nabla p_s$  и  $\nabla p_s = \nabla \mu - (\rho_n/2)\nabla w^2$ ),  $\eta$  — это динамическая вязкость нормальной компоненты, и  $w$  — модуль относительной скорости  $w = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ . Влияние вихрей описывается силой трения, оказываемой совокупностью вихревых пучков взаимно на обе компоненты  $\mathbf{F}_{mf}$ , и вихревой силой натяжения  $\rho_s \mathbf{T}$ , действующей на сверхтекучую компоненту. Уравнения (6.13) и (6.14) — макроскопические уравнения, следовательно, включение эффектов вихревых линий требует высокой вихревой плотности линий  $\mathcal{L}$  на единицу объема,

Макроскопические выражения  $\mathbf{F}_{mf}$  и  $\rho_s \mathbf{T}$  происходят из микроскопических величин, усредненных в малом объеме  $\mathcal{V}$ . Нормальная составляющая реагирует на движущиеся со скоростями  $\dot{\mathbf{s}}_i$  вихри, возникает “микроскопическая” взаимная сила трения  $\mathbf{f}_{ns}$  (см. (2.13)). Также, начиная с динамики отдельной вихревой нити, можно найти микроскопическое выражение силы натяжения вихря, которая является возвратной силой, возникающей в искривленных вихрях (см. комментарии к определению (2.71)). Усредняя эти силы по всем вихрям внутри вихревого пучка, можно получить следующие выражения для “крупнозернистых”  $\mathbf{F}_{mf}$  и  $\rho_s \mathbf{T}$ :

$$\mathbf{F}_{mf} = [\mathbf{f}_{mf}]_{av} = \mathcal{L} \langle \mathbf{f}_{MF} \rangle = \alpha \rho_s \kappa \mathcal{L} \langle \mathbf{s}'[\mathbf{s}'(\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i)] \rangle + \alpha' \rho_s \kappa \mathcal{L} \langle \mathbf{s}'(\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i) \rangle, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_i \omega_{micr}]_{av} = \kappa \mathcal{L} \beta \langle (\mathbf{s}' \mathbf{s}'') \mathbf{s}' \rangle = \kappa \mathcal{L} \beta \langle \mathbf{s}'' \rangle. \quad (6.16)$$

Напомним,  $\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{c \langle R \rangle}{a_0}$  (см. формулу (2.6)). В НВБК уравнениях выражения (6.15) и (6.16) обычно аппроксимируются с помощью усредненной завихренности

$$\mathbf{F}_{mf}^{(HVBK)} = \rho_s \alpha \hat{\omega} [\omega(\mathbf{v}_{ns} - \beta \nabla \hat{\omega})] + \rho_s \alpha' \omega (\mathbf{v}_{ns} - \beta \nabla \hat{\omega}) \quad (6.17)$$

и

$$\mathbf{T}^{(HVBK)} = (\beta \nabla \hat{\omega}) \omega = \beta (\omega \nabla) \hat{\omega}. \quad (6.18)$$

Здесь  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}_s$  является усредненной сверхтекучей завихренностью,  $\hat{\omega} = \omega/|\omega$ .

Если сверхтекучая жидкость приводится во вращение с угловой скоростью  $\Omega$ , то образуется упорядоченный массив параллельных квантованных вихревых линий с плотностью вихревых линий  $\mathcal{L} = 2\Omega/\kappa$  (см. соотношение (1.23), во вращающемся случае ПВЛ  $\mathcal{L}$  сводится к поверхностной плотности  $n_v$ ) и завихренность равна  $\omega = 2\Omega$ . Таким образом, в чистом вращении взаимная сила трения имеет упрощенное выражение

$$\mathbf{F}_{mf} = 2\rho_s\alpha\hat{\Omega} \times [\Omega \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] + 2\rho_s\alpha'\Omega \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (6.19)$$

Сила натяжения равна нулю, так как во вращающемся образце вихревые линии являются прямыми, параллельными оси вращения.

НВБК уравнения (6.13) и (6.14) с выражениями (6.17), (6.18), (6.19) были использованы для изучения различных экспериментальных ситуаций в He II (течение Тэйлора — Куэтта, плоского течения Пуазейля и т. д.). Но только в некоторых случаях с помощью этих уравнений удалось получить количественное согласие с экспериментом, как, например, это было сделано в работе Henderson et al. al. [218].

При использовании НВБК уравнения в трехмерном случае остается открытым ряд важных вопросов. Основой идеологии НВБК является соотношение Фейнмана (1.23), связывающее плотность вихрей и усредненную завихренность. Но это правило имеет очевидное “термодинамическое” происхождение, оно применимо для стационарных состояний равновесия. В реальных турбулентных потоках, когда нестабильные течения быстро искажаются, для множества квантованных вихрей может просто “не хватить” времени, чтобы адаптироваться к быстро меняющемуся нормальному потоку и сформировать вихревые пучки. Вопрос о переходном поведении квантованной системы вихрей во вращающейся системе отсчета и времени релаксации имеет большое значение для всей теории.

Далее, несмотря на то, что понятие вихревых пучков, поддерживающих квазиклассическое поведение квантовой турбу-

лентности, широко используется в настоящее время, не имеется строгих подтверждений или убедительных аргументов в пользу их существования. Напомним, что завихренность в классических жидкостях и, в частности, крупные вихри, в конечном итоге появляются из-за сдвиговой вязкости, полностью отсутствующей в квантовых жидкостях. Иногда существование пучков квантовых вихрей рассматривается в качестве гипотезы, которая до сих пор не подтверждена. Иногда авторы обращаются к численному моделированию (например, [219, 220, 221, 222, 223, 224]), не принимая во внимание, что пучки появляются в этих работах из-за (ранее созданной) завихренности в нормальной компоненте. Часто авторы считают, что существование вихревых пучков — это очевидный факт, который не нуждается в каких-либо доказательствах. Так, например, Козик и Свистунов [163] отмечают, что крупномасштабное поведение завихренной квантовой жидкости полностью идентично эволюции классической гидродинамики. Основанием для этого служит то обстоятельство, что уравнения движения, написанные в терминах фурье-образа завихренности  $\omega_{\mathbf{k}} = (\kappa/(2\pi)^{3/2}) \oint d\mathbf{s} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}(\xi)}$  (см. формулу (2.56)), вообще не включают в себя кванта циркуляции  $\kappa$  и идентичны уравнению завихренности для нормальной идеальной несжимаемой жидкости (см. уравнение (70) в [163]).

Таким образом, мы приходим к выводу, что до сих пор нет убедительного подтверждения существования вихревых пучков. В то же время имеется ряд аргументов, показывающих, что пучки (если они появляются) являются очень нестабильными структурами. Воловик [196] продемонстрировал этот факт на основе исследуемых здесь НВВК уравнений. Очевидным (хотя не единственным) источником разрушения вихревых пучков являются различные реконнекции. Так, в работе Курса, Вајег & Липниаки [225], а также в работе Керра [226] показано, что даже единичные события реконнекции приводят к каскадному рождению вихревых петель различных размеров, хаотично излучаемых из точки реконнекции. Очевидно, что эти распространяющиеся петли сталкиваются с линиями, составля-

ющими вихревые пучки, что приводит к новым реконнекциям. Такой процесс лавинообразно усиливает хаотизацию вихревых петель и разрушает любые регулярные вихревые структуры, в частности вихревые пучки. Данный сценарий должен привести к раздроблению регулярных массивов и появлению хаотических петель — запутанного вихревого клубка.

## 7. Приложения гидродинамики сверхтекучей турбулентности

В этой главе мы приведем несколько примеров применения гидродинамики сверхтекучей турбулентности, разработанной выше. Мы хотели бы подчеркнуть еще раз, что любой анализ гидродинамического потока должен быть выполнен на основе согласованных изменений всех переменных. Это обеспечивает взаимное обратное влияние всех величин друг на друга. Как будет видно, такой подход позволяет изменить взгляд на некоторые из классических задач и получить новые объяснения или интерпретации для известных результатов.

Исследование нестационарных явлений значительно расширяет возможности изучения динамики вихревого клубка. Подчеркнем, что речь идет не о простом добавлении новых фактов, а о некоторых принципиальных вопросах теории стохастической динамики вихревых нитей в He II, которые вообще не возникают в стационарных однородных случаях. Во-первых, изучение нестационарных и неоднородных явлений приводит к довольно серьезным проблемам теории Вайнена, вплоть до сомнений в правомерности описания вихревого клубка на языке переменной  $\mathcal{L}(t)$  даже в гидродинамических задачах. Это замечание, конечно, касается и самого уравнения Вайнена. Далее, в отличие от стационарных и однородных случаев, в которых возможно в ряде ситуаций изучение стохастического вихревого клубка при фиксированных внешних параметрах, в нестационарных и неоднородных ситуациях такой подход некорректен. Действительно, в этом случае следует учитывать обратное действие сверхтекучей турбулентности на эволюцию гидродинамических переменных. Учет этого обратного влияния приводит к весьма существенным изменениям гидродинамических характеристик, что, в свою очередь, влияет на динамику вихревого клубка. Последовательный подход к этой проблеме обеспечивает разработанная в главе 6 гидродинамика сверхтекучей турбулентности (ГСТ), которая является связующим звеном между теорией вихревого клубка и экспериментально наблю-

даемыми явлениями. Ниже мы рассмотрим некоторые задачи гидродинамики сверхтекучего гелия в присутствии квантовой турбулентности.

### 7.1. Взаимодействие между вторым звуком и противотоком

Исследование квантовой турбулентности с помощью акустических методов, в первую очередь зондированием вторым звуком, является одним из наиболее часто используемых экспериментальных методов (см. рис. (1.9)). Основная идея заключается в том, чтобы воспользоваться дополнительным ослаблением волн второго звука вследствие силы трения из-за взаимодействия между нормальной компонентой и вихревым клубком. Соответствующее соотношение для этого затухания, которое значительно больше, чем обычное вязкое демпфирование (см. первую часть книги [5]), даже при очень малых значениях плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ , полученное Вайненом [90], имеет вид

$$\Gamma_V = B\kappa\mathcal{L}_0/6. \quad (7.1)$$

Здесь  $B$  — коэффициент Холла — Вайнена, связанный с коэффициентом  $\alpha$  следующим образом:

$$B = \frac{2\rho}{\rho_n}\alpha. \quad (7.2)$$

Выражение (7.1) получено из решения системы уравнений для распространения волн второго звука, где была добавлена сила взаимодействия между нормальной компонентой и вихревым клубком, пропорциональная величине  $B\mathcal{L}_0v_n/3$ . При таком подходе предполагалось, что вихревой клубок изотропен (отсюда множитель  $1/3$ ) и что значение плотности вихревых линий “заморожено” и равно  $\mathcal{L}_0$ . Как обсуждалось ранее, условие замороженности плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}_0$  не является вполне корректным. На самом деле, поскольку во втором звуке

есть изменение относительной скорости  $\mathbf{v}_{ns}$ , то плотность вихревого клубка должна “чувствовать” эти изменения. Если отказаться от состояния “замороженности” величины  $\mathcal{L}_0$  и использовать описанную выше полную схему гидродинамики сверхтекучей турбулентности, то видно, что развивается гораздо более сложная картина. Из последовательного изучения этой проблемы автором [113] и позднее Кузнецовым [227] следует, что закон дисперсии  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  монохроматической волны второго звука  $\delta T \propto \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]$ , распространяющейся в противотоке турбулентного He II с невозмущенной плотностью вихревых линий  $\mathcal{L}_0$  (см. рис. 1.9), имеет следующий вид:

$$\omega = u_2 |\mathbf{k}| + i \left\{ \frac{\Gamma_z k_z^2}{k^2} + \frac{\Gamma_x k_x^2}{k^2} + A_1 \frac{k_z}{k} \right\} + i \frac{A_3 k_z^2 - A_2 k k_z}{(i u_2 k \tau_V + 1) k^2}. \quad (7.3)$$

Здесь коэффициенты  $\Gamma_x$  и  $\Gamma_z$  равны

$$\Gamma_x = \frac{K \rho \mathcal{L}_0 I_{\perp}}{2 \rho_s \rho_n}, \quad \Gamma_z = \frac{1}{2} \left( \frac{K \rho \mathcal{L}_0 I_{\parallel}}{\rho_s \rho_n} \pm \frac{\varepsilon_V \alpha_V \mathcal{L}_0^{3/2}}{\rho_s v_s} \right). \quad (7.4)$$

Величина  $K$  определяется как  $K = B k \rho_s \rho_n / 3 \rho$  (см. (6.7)), а время релаксации  $\tau_V$  вихревого клубка имеет вид

$$\tau_V = 2 \beta_V / (\alpha_V^2 v_{ns}^2), \quad (7.5)$$

остальные обозначения см. в [113]. Величины  $\Gamma_x$  и  $\Gamma_z$  являются демпфирующими коэффициентами в  $x$  и  $z$  направлениях, т. е. поперек и вдоль противотока (рис. (1.9)). Приведенные соотношения (7.3)–(7.4) показывают, что физика взаимодействия волны второго звука и вихревого клубка гораздо богаче, чем просто дополнительное затухание, введенное Вайненом (см. 7.1). Основные отличия возникают, когда волна распространяется под углом к основному противотоку, когда  $k_x \neq 0$ . В этом случае существуют такие явления, как дисперсия скорости звука, зависимость затухания от частоты, анизотропия затухания звука и т. д. Если же, например, зафиксировать внешний противоток (не учитывать обратную реакцию, т. е. формально принять  $\tau_V \rightarrow \infty$ ) и полагать вихревой клубок изотропным ( $I_{\perp} = 1/3$ ,  $I_{\parallel} = 1/3$ ), то поперечный коэффициент

затухания  $\Gamma_x$  в (7.4) совпадает с дополнительным затуханием  $\Gamma_V$ , предложенным Вайненом (7.1). Это, однако, действует только в стационарном потоке. Интересно отметить, что когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  наклонен по отношению к продольной оси  $z$ , то флуктуации  $\delta\mathbf{v}_{ns}$  не параллельны вектору  $\mathbf{k}$ , звук перестает быть продольным. Причиной отсутствия коллинеарности векторов  $\mathbf{k}$  и  $\delta\mathbf{v}_{ns}$  является то обстоятельство, что наклонная звуковая волна, которая модулирует значения плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_0$ , производит периодическое изменение силы Гортера — Меллинка, и это, в свою очередь, приводит к появлению флуктуаций относительной скорости  $\delta\mathbf{v}_{ns}$  в продольном  $z$ -направлении. Некоторые из указанных эффектов, такие как анизотропия затухания или зависимость затухания от частоты, были экспериментально обнаружены и принесли важную информацию о макроскопической динамике квантовой турбулентности и о ее структуре (см., например, обзор Tough [7], Fiszdon et al. [228], Donnelly [2]).

## 7.2. Распространение интенсивных тепловых импульсов, генерирующих вихри и взаимодействующих с ними

### 7.2.1. Генерация вихрей в интенсивных тепловых импульсах

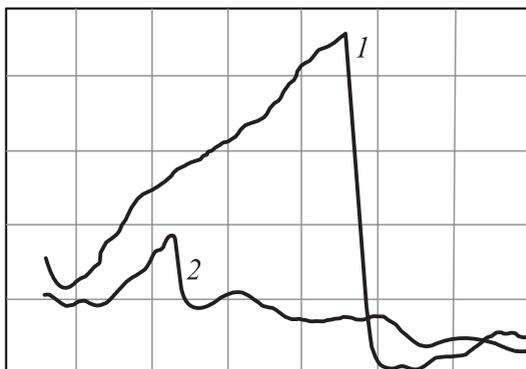
Следующий пример применения гидродинамики сверхтекучей турбулентности, который мы хотели бы обсудить здесь, это проблема распространения интенсивных импульсов второго звука — или тепловых импульсов, генерирующих вихревые клубки и взаимодействующих с этими (собственными) вихрями.

При не очень больших амплитудах и длительностях эволюция тепловых импульсов (по сути дела, нелинейных импульсов второго звука) происходит в соответствии с выводами Халатникова [229, 230] или, более строго, в соответствии с уравнением Бюргерса (см. главу 5 в первой части книги [5]). Это было

показано во многих экспериментальных работах (см. главу 10 в первой части книги [5]).

Экспериментальные работы по изучению тепловых импульсов были задуманы с целью проверки теоретических результатов по нелинейной акустике He II. Однако, как представляется, дальнейший интерес к данному вопросу был вызван не отмеченным соответствием, а, напротив, тем обстоятельством, что по мере увеличения амплитуды и длительности импульсов возникало значительное отклонение экспериментальных данных от теоретических предсказаний. К таким отклонениям относятся отличие формы импульса от предсказанного теорией бюргерсовского треугольника и количественное отличие нелинейной добавки к скорости второго звука от рассчитанного по формуле Халатникова [229]. В противоречии с классической нелинейной акустикой находится отмеченный некоторыми авторами факт вскипания He II и образования паровой пленки. Эти явления наблюдались авторами уже цитированных работ, а также Межовым-Деглиным и Изнанкиным [231, 232], Turner, [233], Pomerantz [234], Данильченко и др. [235], Torczynski [236, 237] Цоем и др. [238]. Некоторые из указанных вопросов изложены в обзоре автора и Фишдона [96].

В это время пришло понимание, что указанные расхождения обязаны тому обстоятельству, что в He II, при прохождении в нем мощных тепловых импульсов, возникают квантовые вихревые нити, способные в значительной мере изменить динамику породивших их импульсов. Вопрос о вихреобразовании при нестационарных течениях гелия, в частности при прохождении в нем звуковых волн, ранее практически не обсуждался. Первой работой, в которой была экспериментально доказана генерация вихрей, вызванная интенсивным тепловым импульсом, стала статья автора и Цоя [239]. Эксперимент был проведен по схеме Вайнена. След прошедшего вдоль канала мощного теплового импульса (в дальнейшем называемого опорным) зондировался поперечным импульсом второго звука (зондом). Наличие вихрей в следе опорного импульса должно приводить к дополнительному затуханию зонда. Соотношение (3.14), связы-



*Рис. 7.1.* Осциллограммы зондирующей волны второго звука в невозмущенном гелии (1) и в гелии, в котором предварительно был запущен опорный импульс (2)

вающее время развития вихревого клубка с мощностью опорного импульса, было выбрано в качестве ориентира при выборе параметров эксперимента.

Одним из наиболее ярких результатов эксперимента являются осциллограммы зонда, выполненные в невозмущенном гелии и в гелии, через который предварительно был пропущен интенсивный тепловой импульс (см. рис 7.1). Отчетливо видно сильное уменьшение амплитуды зонда (почти в 4 раза), пройденного через возмущенный гелий, что указывает на наличие мощного диссипативного механизма, очевидно, связанного с вихрями.

Последующие работы Межова-Деглина и Изнанкина [231, 232], а также исследования Turner [233] и Torczynski [236, 237] подтвердили этот результат. В другой серии экспериментов по исследованию интенсивных коротких тепловых импульсов наблюдалось вскипание гелия, что тоже указывает на сильный рост температуры, также связанный с вихрями. Очевидно, количественное описание эволюции таких импульсов должно осуществляться с помощью уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности.

### 7.2.2. Уравнения эволюции мощных тепловых импульсов

Выпишем систему уравнений эволюции мощных тепловых импульсов. Мы стартуем от общих уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности (6.8)– (6.11), а также от модифицированного уравнения Вайнена (6.12). Мы продолжим исследование этой системы уравнений при предположении отсутствия потока массы:  $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s = 0$ , что выполнялось при проведении упомянутых выше экспериментов. Исследование будет проведено в нелинейном (втором) приближении для одномерного случая распространения волны вдоль оси  $x$ .

Как показывает проведенный в предыдущем пункте анализ линейного звука, основным результатом взаимодействия тепловых импульсов с вихрями является затухание. Учет нелинейных членов внесет малую поправку как в основное движение (без учета вихрей), так и в обусловленные турбулентностью эффекты затухания и дисперсии, уже и без того малые. Поэтому в членах, связанных с наличием вихревого клубка, мы оставим лишь линейные по амплитуде второго звука, и кроме того, опустим все члены, приводящие к очень малой дисперсии, зависящей от частоты добавки к диссипации. Еще раз напомним, что мы не рассматриваем обычную диссипацию, а лишь обусловленную вихрями. Учет обычной для He II вязкости привел бы также к зависящему от частоты затуханию.

Далее, полагая  $\sigma = \sigma_o + \sigma'$ ,  $T = T_o + T'$  ( $T'$ ,  $\sigma'$  — отклонения от равновесных значений) и поступая так же, как в разделе 5.2 в первой части монографии [5], мы придем к следующей системе уравнений для возмущения температуры  $T'$  относительной скорости  $w$  и плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} - \left( \frac{\sigma_o(\rho + \rho_n)}{\sigma_T \rho_n \rho} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{\rho_s}{\rho} \right) w \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\rho_s}{\rho} \left( \frac{\sigma_o \sigma_{TT}}{\sigma_T^2} - 1 \right) T' \frac{\partial w}{\partial x} + \\ + \frac{\sigma_o \rho_s}{\sigma_T \rho} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\rho \sigma_T T_o} [K \mathcal{L} v_{ns}^2 + \varepsilon_V \beta \mathcal{L}^2] \quad (7.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho_s}{2\rho} \left( 3 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho \sigma_o}{\rho_n} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\rho \sigma_T}{2\rho_n} \frac{\partial T'^2}{\partial x} = \\ = - \frac{\rho K}{\rho_s \rho_n} w - \frac{\rho \varepsilon_V \alpha_V}{\rho_s} \mathcal{L}^{3/2} \frac{w}{|w|}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial w \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha_V |w| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2. \quad (7.8)$$

В уравнении (7.8) учтено, что согласно имеющимся в настоящее время измерениям [30] скорость дрейфа клубка  $v_L \approx v_s$ .

Из-за сложности уравнений (7.6)–(7.8) более или менее полное решение может быть получено только с помощью численных методов (см., например, статьи [240, 241, 242, 243, 244, 245]).

### 7.2.3. Эволюция интенсивных тепловых импульсов. Аналитическое исследование

Попытка аналитического описания была предпринята в работе автора [246]. Соответствующее исследование проведено в рамках теории возмущений, а влияние рожденных волной вихрей рассматривалось как поправка к невозмущенной эволюции импульса. В силу громоздкости системы уравнений (7.6)–(7.8), вряд ли можно было рассчитывать на какое-либо более строгое решение. Тем не менее, такой подход оказался способным “качественно” и даже “полуколичественно” (по порядку величин) объяснить многие результаты, а главное, понять механизмы, ведущие к тем или иным эффектам.

Уравнения (7.6)–(7.8) представляют собой систему квазилинейных уравнений. В отсутствие вихревого клубка уравнения допускают некоторые решения, в которых  $T'$  и  $w$  функционально связаны друг с другом,  $T' = T'(w)$  — так называемые инварианты Римана, или простые волны. Присутствие правых частей в уравнениях (7.6), (7.7) нарушает эту связь. Полагая, однако, что плотность вихревой линий  $\mathcal{L}$  невелика и правые части малы, можно искать решение в виде “подправленной” простой волны (ср. с выводом уравнение Бюргерса методом

квазипростой волны в пункте 5.3 в первой части монографии [5]). “Подправленное” Риманово решение запишем в виде

$$T' = T'(w) + T_V(x, t), \quad (7.9)$$

где поправка  $T_V(x, t)$  является величиной, имеющей второй порядок малости. Используя это обстоятельство, можно получить следующее уравнение для одномерной волны (в системе координат, перемещающейся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью линейного второго звука  $c_{20}$ ):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_2(T)w \frac{\partial w}{\partial x} = -A\mathcal{L}w. \quad (7.10)$$

Здесь  $A = K\rho/2\rho_s\rho_n$ . Коэффициент нелинейности второго звука  $\alpha_2(T)$  приведен в первой части монографии [5] (глава 5). Изменение температуры в импульсе имеет следующий вид:

$$T' = T'(w) + \frac{u_2}{\sigma} \int_{-\infty}^t Aw\mathcal{L}dt'. \quad (7.11)$$

Решение уравнения (7.10) проведем с помощью метода последовательных приближений. Нулевая итерация  $w^0$  описывается уравнением типа (7.10) без правой части. Эволюция одиночного импульса, происходящая в соответствии с таким уравнением, как известно (см., например, пункт 5.3 в первой части монографии [5]), разбивается на ряд стадий таких, как укрупнение профиля волны, образование ударного фронта и превращение волны в “бюргерсовский” треугольник. Асимптотический вид любого одиночного импульса представляет собой треугольник с убывающей амплитудой. Следующим этапом вычислений является определение правой части уравнения (7.10), в которой для вычисления  $\mathcal{L}(x, t)$  следует использовать уравнение Вайнена (3.8). Затем полученное уравнение снова решается методом характеристик, и на основании этого решения с помощью соотношения (7.11) вычисляется следующая итерация  $T'$ .

Схематически первая и нулевая итерации для температуры  $T'(x, t)$  (для некоторого момента времени) показаны на рис. 7.2

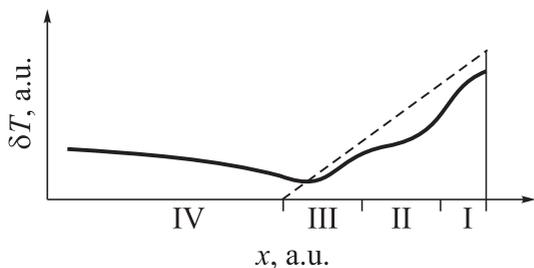


Рис. 7.2. Схематическое изображение искажения температурного импульса из-за взаимодействия с его “собственными” вихревыми линиями (Немировский и Шмидт [247, 246]). Пунктирная линия представляет безвихревой случай, когда пульс должен быть “бюргерсовским” треугольником. Объяснения см. в тексте

для случая, когда на границе возбуждается прямоугольный импульс второго звука длительностью  $t_H$ .

Нулевая итерация представляет собой обычный “бюргеровский” треугольник (изображен пунктиром), являющийся асимптотическим решением нелинейной бегущей волны. Следующую итерацию можно разбить на несколько участков, соответствующих различным этапам теплового импульса. На втором участке, где накапливаются вихри за время, прошедшее от начала импульса, величина  $\mathcal{L}w$  велика. Это приводит к типичному провалу в профиле температуры, наблюдавшемуся во многих экспериментах. На передних участках тепловых импульсов вихри не успевают генерироваться, в силу чего правая часть уравнения (7.10) обращается в нуль. Интересно отметить, что первая итерация не равна нулю на ударном фронте волнового импульса, т. е.  $T'(x, t)$  меньше “бюргеровского” значения. Это может показаться странным на первый взгляд, поскольку на передних участках импульса вихрей нет. Однако в силу того, что исходное уравнение (7.10) содержит в левой части нелинейный член вида  $w \frac{\partial w}{\partial x}$ , первая итерация температуры переносится из центральных участков к передней кромке, и дефицит температуры  $T'(x, t)$  на ударном фронте монотонно возрастает. Поскольку, далее, скорость распространения ударного фронта

$\alpha_2(T)w/2$  (а  $w \propto T'$ ), как это следует из соотношений Гюгонио для скорости второго звука, то дефицит температуры  $T'(x, t)$  на ударном фронте приводит к тому, что импульс движется медленнее, чем это было бы без вихрей.

В конце импульса правая часть равна нулю в силу того, что скорость нулевой итерации обращается в нуль, иными словами, отсутствует сила взаимного трения, пропорциональная  $w^0$ , и кривая здесь снова приближается к “бюргеровскому” треугольнику. На четвертом участке, где формально звуковой импульс уже закончился, возмущение температуры  $T'(x, t)$ , тем не менее, отлично от нуля (как это было бы в безвихревом случае). Рост температуры связан с двумя механизмами. Один из них — диссипация энергии, связанная с распадом образованного вихревого клубка. Второй механизм, более тонкий, связан со следующим обстоятельством. Ввиду того, что уравнения движения имеют правые части, волна не может быть представлена в виде чистого инварианта Римана (бегущего вправо вдоль оси  $x$ ). Неизбежно имеются своего рода отражения, приводящие к тому, что после времени  $t_H$  все равно присутствуют как возмущения скорости  $w$ , так и возмущения температуры  $T'$ . Причем, поскольку при переносе импульс в целом затухает, максимум остаточной температуры наблюдается у нагревателя. Наблюдается типичный “выброс”, описанный во многих экспериментальных работах. Этот рост температуры может быть причиной сильного нагрева гелия и даже его вскипания.

Конечно, полученные соотношения неприемлемы для очень больших тепловых нагрузок и, вообще говоря, зависят от способа генерации импульсов. Тем не менее, описанное поведение интенсивных тепловых импульсов наблюдается во многих экспериментальных работах.

#### 7.2.4. Эволюция интенсивных тепловых импульсов.

##### Численные исследования

Из-за громоздкости уравнений (7.6)–(7.8) случай распространения теплового импульса мощной амплитуды даже в упрощенном виде, когда исследуется только второй звук, изу-

чался в основном численно. Соответствующие расчеты были выполнены в серии работ Fiszdon et al. (Gottingen, FRG), Кондауровой и др. (Новосибирск, СССР), Murakami, Iwashita (Tsukuba, Japan). Среди этих работ следует выделить результаты геттингенской группы, в которых вычисления выполнялись параллельно с экспериментальными измерениями. Результаты упомянутых выше работ количественно близки друг к другу.

Fiszdon et al. в работах [240, 228] подробно исследовали влияние различных факторов, о которых ранее развитая теория гидродинамики сверхтекучей турбулентности не могла дать однозначного ответа, например, влияние дрейфовой скорости вихревого клубка, генерирующего члена в уравнении Вайнена и т.д. На сегодняшний день неизвестно, каким образом происходит начальное зарождение вихревого клубка, поэтому при исследовании динамики тепловых импульсов используются различные подходы. Так, в работах [240, 228] выяснено, в частности, что предложенное Вайненом выражение для генерирующего члена очень мало и не приводит к каким-либо существенным изменениям в динамике импульса, поэтому авторы [240, 228] выбрали другой путь, предполагая, что в объеме гелия уже существует начальная плотность вихревого клубка. Однако следует заметить, что для удовлетворительного описания экспериментальных данных при расчетах они пользовались подгоночными параметрами, такими как задание начального уровня плотности вихревого клубка, выбор граничных условий и варьирование коэффициентов в уравнении Вайнена.

Уравнения ГСТ численно также исследовались Murakami, Iwashita [242]. В отличие от цитированных выше работ геттингенской группы, они не разлагали систему уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности по степеням отклонения от равновесия. Однако такой подход требует знания зависимости термодинамических величин от  $w^2$ , которая известна только во втором порядке, что и использовалось ими в полных уравнениях.

Несмотря на то, что взаимодействие импульсов второго звука и вихревого клубка численно и аналитически исследовали

довольно интенсивно, еще долго оставался ряд открытых проблем. В частности, температурная область, где коэффициент нелинейности второго звука отрицательный или принимает нулевое значение, вообще выпала из рассмотрения, хотя имелись соответствующие эксперименты. Так, например, Goldner et al. [248] наблюдали поведение нелинейных импульсов второго звука вблизи  $\lambda$ -точки, которое значительно отличается от динамики тепловых импульсов в низкотемпературной области. И было непонятно, связано это со сверхтекучей турбулентностью или с близостью к  $T_\lambda$  и, следовательно, с характерными особенностями, присущими данной области. Между тем это важно с точки зрения применимости теории Фейнмана — Вайнена вблизи области фазового перехода.

Для завершения этой части мы также отметим численные расчеты конвергентных тепловых импульсов в цилиндрической геометрии, где прогнозировалось (полученное затем в эксперименте) большое увеличение ПВЛ до  $\mathcal{L} \sim 10^9 \text{ см}^{-2}$  (см. статьи [249, 250], а также обзор [96] и ссылки в нем). Полноценное численное изучение распространения мощных тепловых импульсов в различных температурных областях и для различных геометрий было выполнено в работе Кондауровой и др. [244].

Приведем несколько результатов по динамике тепловых импульсов, полученных в численных исследованиях. Первый случай касается распространения мощных тепловых импульсов в области температур, где коэффициент нелинейности второго звука положительный  $\alpha_2(T) > 0$  (см. главу 5 в первой части монографии [5]). На рис. 7.3 изображена синхронная эволюция (во времени и пространстве) плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(x, t)$ , возмущения температуры  $T'(x, t)$  и скорости противотока  $w(x, t)$ , полученная в численных вычислениях Fiszdon et al. [251]. Эта картина демонстрирует взаимосвязанные сложные процессы, вызванные тепловым импульсом в одномерном большом канале. Обратите внимание, что поведение поля температуры  $T'(x, t)$  близко к тому, что было получено в аналитических исследованиях, описанных в предыдущем параграфе.

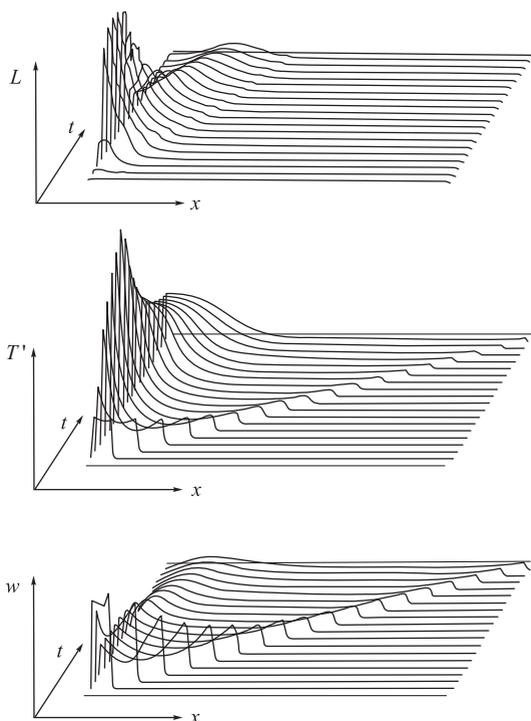


Рис. 7.3. Синхронная эволюция (во времени и пространстве) плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(x, t)$ , возмущения температуры  $T'(x, t)$  и скорости противотока  $w(x, t)$ , полученная в численных вычислениях Fiszdon et al. [251, 252]

Другой случай касается распространения мощных тепловых импульсов в области отрицательной нелинейности,  $\alpha_2(T) < 0$ . Соответствующее исследование было выполнено в численных работах Кондауровой и др. [244]. Что касается экспериментов, то нам известна только одна работа Goldner et al. [248], проведенная вблизи  $T_\lambda$ , где  $\alpha_2(T)$  принимает отрицательное значение. В этих экспериментах запускались мощные импульсы второго звука, на заднем фронте которых образовывался ударный фронт. Как можно видеть (см. рис.7.4 ) экспериментальные зависимости температуры от времени суще-

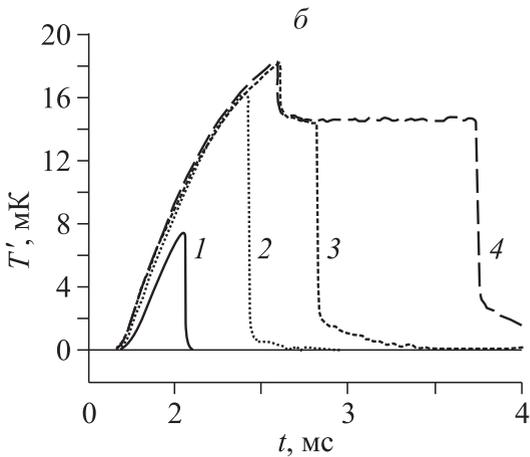
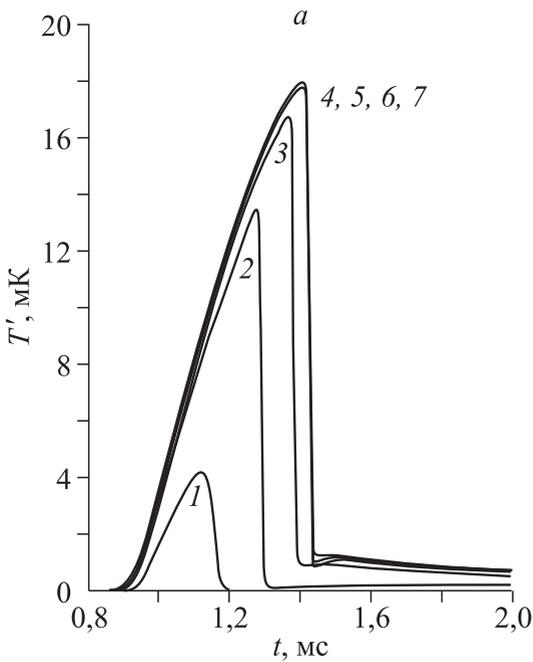


Рис. 7.4. Численные (а) и экспериментальные [248] (б) результаты; температура ванны  $T = 2,05$  К. Форма импульса, выделявшегося на нагревателе, представляла собой половину синусоиды частотой 1387 Гц. Максимумы тепловых потоков  $Q$ , мВт/см<sup>2</sup>: 0,81 (1); 4,01 (2); 8,12 (3); 15,6 (4); 20 (5); 25 (6); 30 (7)

ственно отличаются от ранее полученных в области положительной нелинейности. Известно, что область вблизи  $T_\lambda$  обладает характерными особенностями, поэтому непонятно, с чем связано такое поведение импульсов — близостью к  $T_\lambda$  или со сверхтекучей турбулентностью.

С целью разрешения этих вопросов Кондауровой и др. [244] была численно исследована задача при условиях, соответствующих условиям проведения эксперимента [248]. С одного торца длинного канала, заполненного невозмущенным гелием, подается тепловой импульс, форма которого представляет собой половину синусоиды. Используемые коэффициенты в первых двух членах правой части уравнения Вайнена (3.8) были получены прямой экстраполяцией температурной зависимости коэффициента Холла — Вайнена  $B$  в область  $T_\lambda$ , согласно соотношениям, предложенным *Barenghi et al.* [55].

Как видно из рис. 7.4, обрыв импульсов, соответствующий различным входящим амплитудам  $Q$ , происходит при близких временах. Это можно объяснить следующим образом. В рассматриваемой области температур передняя часть импульсов разной амплитуды почти одинакова, поэтому развитие вихревого клубка происходит практически при одних и тех же условиях. Согласно уравнению Вайнена вначале плотность вихревого клубка нарастает медленно, а затем наблюдается стремительный рост. Следовательно, примерно за одно и то же время в импульсах разной амплитуды клубок успевает вырасти до значения, которое и приводит к срыву температурного роста. В экспериментах [248] также наблюдается обрыв роста температуры для импульсов разной амплитуды примерно при одних и тех же временах. Но дальнейшая зависимость температуры от времени отличается от расчетной. Как уже говорилось выше, форма импульсов связана с коэффициентами в уравнении Вайнена, которые в области  $T_\lambda$  точно не определены.

Полученные расчетные кривые только качественно описывают экспериментальные данные. Однако это дает основание сделать заключение, что такое необычное поведение импульсов обусловлено сверхтекучей турбулентностью и уравнение Вай-

нена применимо в этой области, хотя экстраполяция коэффициентов в область  $T_\lambda$  носит лишь качественный характер.

### 7.3. Передача тепла и кипение He II

Как обсуждалось ранее в первой части книги [5], очень важный пример прикладных задач теории сверхтекучести связан с использованием сверхтекучего гелия для охлаждения различных криогенных устройств, например, сверхпроводящих магнитов высокой мощности или электронного оборудования в космических исследованиях.

В большой серии экспериментальных исследований тепловых импульсов наблюдалось и изучалось кипение He II. Соответствующие вопросы рассматривались, например, в работах Van-Sciver [253], Цоя и Луцета [238], Микляева и др. [254], Сидыганова и др. [255], Ruppert et al. [256], Данильченко, Порошина и Сарабея [235], Крюкова и др. [257, 258]. Эти эксперименты также косвенно указывали на возникновение вихревой структуры, радикально меняющей гидродинамические свойства сверхтекучего гелия.

Наличие вихревого клубка ключевым образом влияет на теплообмен и кипение в He II. Действительно, согласно модели двухжидкостной гидродинамики Ландау даже для очень мощных тепловых импульсов порядка  $100 \text{ Вт/см}^2$  возмущения температуры не превышают значение  $\delta T \sim 0.05 - 0.1 \text{ K}$  (см. Халатников [208] и Паттерман [209], а также первую часть книги [5]). Этого возмущения температуры может быть даже недостаточно для того, чтобы достичь кривую фазового равновесия “жидкость — пар” в  $p - T$  координатах, в то время как требуется значительное перегревание для вскипания He II с помощью импульсного нагрева (см. [259, 260]). Поэтому соответствующие (теоретические) исследования должны быть основаны на теории гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Эти проблемы широко обсуждались в книге Ван Скивер [253] и в ранних обзорах автора [96, 261] (см. также [89]).

Для иллюстрации сказанного, опишем несколько важных результатов по передаче тепла и кипению He II, тесно связанных с теорией ГСТ. В предыдущем подразделе было показано, что в нестационарном нагреве появляется сильный рост температуры, возникающий вследствие образования вихревого клубка. Максимум амплитуды температуры возникает вблизи нагревателя, что делает возможным перегрев и кипение He II. Соответственно интенсивности нагрева (далее индексы “small” и “strong”), наблюдались две различные экспериментальные зависимости времени вскипания  $t_B$  как функции (ступенчатообразной) тепловой нагрузки  $\dot{Q}$ :

$$\begin{aligned} t_B &= B_{small} \dot{Q}^{-4}, \\ t_B &= B_{strong} \dot{Q}^{-2}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Эти зависимости наблюдались во многих работах (см. ссылки в статьях [253, 96, 261]). Приведенные результаты экспериментов по нестационарному кипению He II показаны на рис. 7.5. Различие в зависимостях для времени вскипания  $t_B$  (формула (7.12)) для слабой и сильной тепловых нагрузок обсуждалось в статье автора и Цоя [261] на основе теории гидродинамики сверхтекучей турбулентности. С этой точки зрения верхняя кривая (‘VS’) соответствует случаям полностью развитого вихревого клубка, когда ПВЛ  $\mathcal{L}(x, t)$  принимает свое равновесное значение  $\mathcal{L}_\infty = \gamma^2 v_{ns}^2$ . Для нижней кривой (‘TL’) вихревой клубок не является развитым, не хватает времени, чтобы достичь равновесного значения. Линия Вайнена (‘V’) соответствующая времени развития вихревого клубка (см. (3.14)) также показана на рис. 7.5. Рост температуры для развитых и неразвитых вихревых клубков подчиняется различным зависимостям от времени (см., например, [96]), откуда появляется разница в зависимостях для времени закипания (7.12).

Другой важный пример, касающийся теплообмена в развитом вихревом клубке, связан с так называемым уравнением Дреснера [263], который использовал специальный метод для изучения динамики тепловых потоков в сверхтекучем тур-

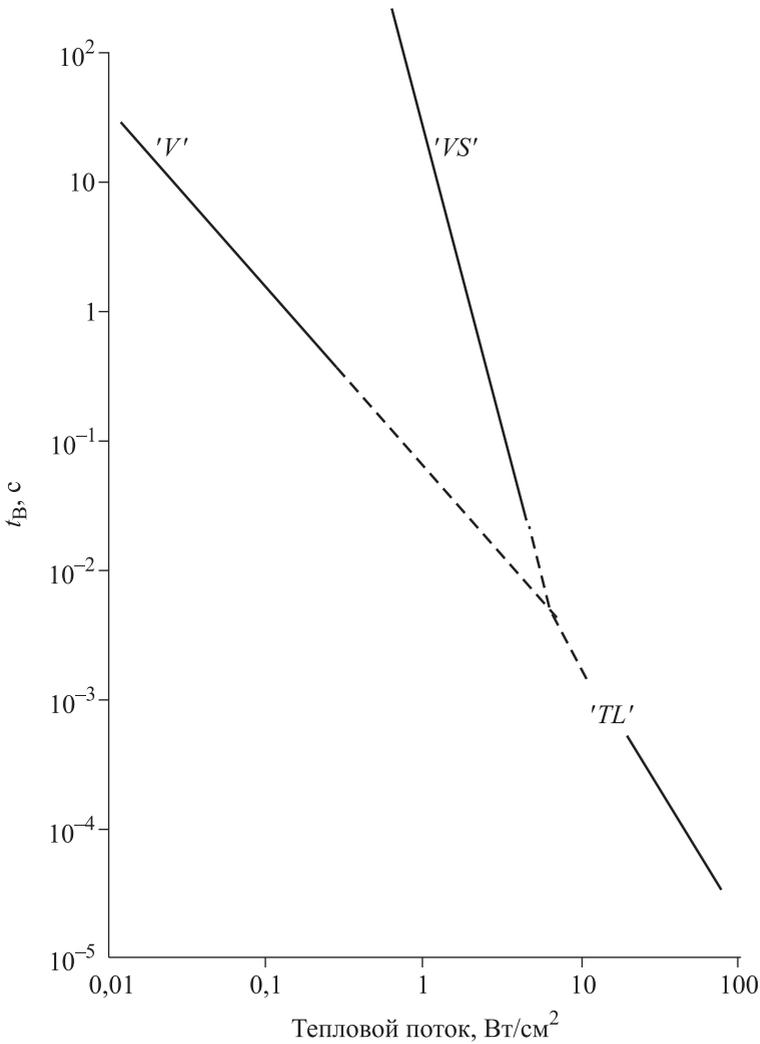


Рис. 7.5. Время вскипания  $T_B$ , в зависимости от приложенного теплового потока (из статьи автора [261]). Кривая 'VS', полученная в опытах *vin Sever* [262, 253], соответствует первой зависимости в формуле 7.12. Кривая 'TL' взята из экспериментов Цоя [238], соответствует нижней зависимости в этой формуле. Кривая 'V' соответствует времени развития развития вихревого клубка (см. формулу 3.14)

булентном He II. Он предложил интерпретировать закон Гортера — Меллинка  $\nabla T \propto \dot{Q}^3$  (см. уравнение (3.181) в первой части книги ([5])) таким же образом, как закон Фурье в задачах теплообмена, т. е. переписать его в следующей форме:  $\dot{Q} \propto (\nabla T)^{-2/3}(\nabla T)$ . Но в этом случае коэффициент теплопроводности следует рассматривать как функцию от градиента температуры  $\nabla T$ . Закон сохранения энергии в данном случае приводит к следующему нелинейному уравнению теплопередачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla \cdot (\nabla T)^{1/3}, \quad (7.13)$$

где константа  $\lambda$  связана с соотношением Гортера — Меллинка.

Подход Дреснера, однако, не является самосогласованным с точки зрения полного набора уравнения ГСТ. Действительно, соотношение Гортера — Меллинка соответствует равновесному стационарному состоянию и его прямое использование для нестационарного случая не является корректным.

Динамика поля температуры при приложении ступенчато-образной по времени тепловой нагрузки  $\dot{Q}$  может быть получена из ГСТ с использованием асимптотических методов теории возмущений ( см. Немировский и Пономаренко [264]). Авторы показали, что уравнение Дреснера (7.13) является только асимптотическим пределом (по времени) полного решения задачи в рамках теории гидродинамики сверхтекучей турбулентности. В общем случае, например, в течение короткого времени динамика температурного поля подчиняется скорее гиперболическим акустическим законам (второй звук), чем параболическому уравнению Дреснера (7.13). Однако с течением времени гиперболический закон эволюции поля температуры постепенно переходит в закон, который может быть описан уравнением Дреснера (7.13). Очевидно, что если длительность импульсов меньше времени этого переходного процесса, то теория Дреснера некорректна.

В настоящее время теоретически и численно исследуются более сложные случаи задач теплообмена в He II на базе гидродинамики сверхтекучей турбулентности. В качестве приме-

ров укажем такие проблемы, как эволюция поля температур в цилиндрических и сферических геометриях [265] или полностью 3D задача нестационарного теплообмена в турбулентном сверхтекучем гелии [266].

#### 7.4. Генерирующий член или остаточные вихри?

В этом пункте мы хотели бы кратко прокомментировать один из сакраментальных вопросов теории квантованных вихрей, а именно: что является механизмом, с помощью которого квантованные вихри могут быть созданы в He II (см. подраздел 3.4).

В настоящее время существуют различные теории, которые можно разделить на две группы. Первая группа предлагает различные механизмы первичной генерации вихрей. К ним относятся, например, квантовое туннелирование вихрей из стенок канала, термоактивационное зарождение вихревых колец, возникновение вихрей в пограничном слое в уравнении Гросса — Питаевского для бозе-энштейновского конденсата (см. главу 9 в первой части книги [5]).

Другая группа теорий основана на идее о том, что в гелии постоянно существует некоторый фон зародышевых вихрей с начальной плотностью  $\mathcal{L}_{back}$ , который первоначально появился во время фазового перехода на основании знаменитого механизма Kibble — Zurek (см. [16]).

Конечно, гидродинамика сверхтекучий турбулентности, будучи макроскопической феноменологической теорией, вообще говоря, не в состоянии решать тонкие вопросы первоначально вихребразования. Однако, как выяснилось, данный подход, по крайней мере, позволяет сделать выбор между двумя описанными группами гипотез.

С позиции феноменологической теории, механизмы первой группы могут быть учтены путем введения иницилирующего члена в уравнение Вайнена (3.8). В свою очередь, другая группа должна привести к некоторому начальному значению ПВЛ  $\mathcal{L}(x, t = 0) = \mathcal{L}_{back}$  в том же уравнении. В результате проведен-

ных исследований выяснилось, что лучшее согласие между экспериментальными данными о распространении интенсивных тепловых импульсов и результатами численного решения ГСТ было получено в предположении о существовании начального уровня ПВЛ  $\mathcal{L}_{back}$ , в то время как введение иницилирующего термина привело к неудовлетворительной корреляции с экспериментальными наблюдениями [244, 245]. Получено, что численные и экспериментальные данные согласуются тогда, когда в расчетах используется фоновое значение ПВЛ  $\mathcal{L}_{back}$  порядка  $100 - 1000 \text{ 1/см}^2$ . Сравнение проводилось с экспериментами Фишдона и др. ([240]), в которых подробно исследовалась эволюция тепловых импульсов в различных условиях. Следовательно, наиболее реальным является наличие в объеме жидкости фоновой турбулентности с фоновой плотностью  $\mathcal{L}_{back}$ .

Таким образом, можно предположить, что полученный результат является подтверждением теории остаточных вихрей. Этот пример показал, что эксперимент на основе феноменологической теории позволяет сделать важный вывод о тонких микроскопических процессах динамики квантовых вихрей.

## 7.5. Аномальный распад вихревого клубка

В подразделе 3.4 мы уже упоминали о проблеме медленного распада сверхтекучей турбулентности после выключения тепловой нагрузки. Такой же результат был получен позднее Шварцем и Розеном [267]. Они назвали эту проблему аномальным распадом вихревого клубка. Главной особенностью было то, что временное поведение плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  отличалось от предсказаний теории Вайнена. Первый этап ослабления плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$ , который происходит в соответствии с уравнением Вайнена (3.8), сменяется стадией более медленного распада.

Вообще говоря, распад вихревого клубка является очень серьезной проблемой, которая активно обсуждается. Мы вернемся к этому вопросу позже (см. главу 8), здесь представляется необходимым обсудить проблему аномального распада вихре-

вого клубка с позиции гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Действительно, поскольку все гидродинамические переменные взаимосвязаны, это означает, в частности, что после выключения нагревателя поле скоростей не обращается в нуль мгновенно. Но это, в свою очередь, подразумевает, что генерирующий (первый) член в уравнении Вайнена (3.8) не равен нулю (хотя он уменьшается во времени), поэтому полное затухание вихревого клубка должно происходить медленнее.

Эта схема была реализована в работе Кондауровой и др. (см. в [268, 96]), в которой численно исследованы уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности после выключения нагревателя. Авторы продемонстрировали, что скорость распада плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  действительно изменилась. Изначально быстрый распад сменился медленной фазой. Такое поведение, однако, имеет монотонный характер без какого-либо резкого изгиба (см., например, рис. 40 в обзоре автора [96]). Таким образом, доказано, что аномальный распад вихревого клубка обязан, в частности, присутствию остаточной скорости противотока в объеме жидкости.

Несколько иная процедура была выполнена Шварцем и др. [116, 267], которые также предположили, что наблюдаемый эффект обусловлен исчезновением скорости противотока  $v_{ns}$ . Они, однако, предполагали, что остаточная величина  $v_{ns}$  не исчезает благодаря сдвиговой вязкости нормальной компоненты (комментарии к их методу изложены в работах [96] и [145]). Разработав (качественно) модель для сдвигового течения нормальной компоненты и используя подгоночные параметры, авторы получили хорошее согласие со своими экспериментальными данными.

Olszok et al. [269] наблюдали также два режима затухания в диапазоне температур 1.5 — 2 К и высказали гипотезу, что медленный спад объясняется турбулентным движением нормальной компоненты.

Из последних работ, посвященных этой теме, мы хотели бы отметить работу Sciacca et al. [145], в которой авторы выполнили детальное изучение распада турбулентности в противото-

ке He II после выключения теплового потока. Авторы изучали действие различных факторов, в том числе обратное влияние вихрей на характеристики течения (хотя и без обращения к уравнениям гидродинамики сверхтекучей турбулентности).

### 7.6. Эффект “сухого” трения. Справедливость и интерпретация уравнения Вайнена

Как обсуждалось ранее, сила, действующая на сверхтекучую компоненту, содержит, кроме варажения Гортера — Меллинка  $KLv_{ns}$ , также дополнительный член  $\varepsilon_V \alpha_V (v_{ns}/|v_{ns}|)L^{3/2}$ , который называется “сухим” трением (см. уравнение (6.11)). Мы отметили также, что в зависимости от интерпретации физических процессов, приводящих к уравнению Вайнена (3.8), этот член может быть как отрицательным (в случае модели Фейнмана — Вайнена), так и положительным (в модели Шварца). Конкретный вид данного слагаемого напрямую связан с особой структурой генерирующего члена в уравнении Вайнена (3.8). Поэтому изучение эффектов, связанных с этим дополнительным слагаемым, может служить источником важной информации о макроскопической динамике квантовой турбулентности, а также о микроскопических процессах, описывающих стохастическое поведение вихревого клубка.

Stamm et al. ([212]) исследовали эту проблему путем зондирования вторым звуком неравновесного вихревого клубка, с очень большой плотностью вихревых линий  $\mathcal{L}_0$  и с малой скоростью противотока  $v_{ns}$ . Как видно из формулы (6.11), такие условия являются наиболее удобными для исследования сухого трения.

Для того чтобы описать эволюцию второго звука тестового импульса, пересекающего неравновесный ВК, с учетом сухого трения, рассмотрим следующее модельное уравнение:

$$\frac{\partial v_{ns}}{\partial t} \Big|_{t=x/u_2} = -A_1 v_{ns} \mathcal{L}_0 \mp A_2 \mathcal{L}_0^{3/2}, \quad (7.14)$$

где  $A_1 = K\rho/2\rho_s\rho_n$  и  $A_2 = \varepsilon_V\alpha_V/2\rho_s$ . Верхний знак “минус” соответствует модели Фейнмана — Вайнена, а нижний положительный знак — модели Шварца (гл. V). Эта упрощенная модель описывает эволюцию линейного (прямоугольного, с начальной амплитудой  $v_{ns}(0)$ ) тестового импульса вдоль характеристики  $x - u_2t$ , пересекающего неравновесный вихревой клубок с постоянной плотностью вихревых линий  $\mathcal{L}_0$ . Такое упрощение может незначительно изменить точные количественные результаты, но взамен оно позволяет четко видеть ожидаемый эффект. Из уравнения (7.14) следует, что импульс второго звука с начальной интенсивностью  $v_{ns}(0)$  достигает некоторой точки  $x$  со следующей амплитудой:

$$v_{ns}(x) = v_{ns}(0) \exp(-A_1\mathcal{L}_0x/u_2) \pm \pm (A_2/A_1)\mathcal{L}_0^{1/2} [\exp(-A_1\mathcal{L}_0x/u_2) - 1]. \quad (7.15)$$

Следовательно, в  $v_{ns}(x)$ ,  $v_{ns}(0)$  плоскости величина  $v_n(x)$  имеет вид прямой линии с наклоном  $\exp(-A_1\mathcal{L}_0x/u_2)$ . В зависимости от  $\pm$  знака эти линии будут пересекать ось  $v_{ns}(x)$  в точках  $\pm v_{cr}(0)$ , которые задаются условиями

$$v_{nscr}(0) = \pm(A_2/A_1)\mathcal{L}_0^{1/2} \{\exp(-A_1\mathcal{L}_0x/u_2) - 1\}. \quad (7.16)$$

Значение  $v_{cr}(0)$  будем называть порогом. Знак порога является положительным в модели Шварца и отрицательным в модели Фейнмана — Вайнена.

Эксперименты проводились путем генерации теплового импульса на внутренней стенке круглого кольца. Такая конфигурация (конвергентные тепловые импульсы), как обсуждалось выше, дает возможность генерировать очень высокую ПВЛ  $\mathcal{L}_0$ , вплоть до  $10^9 \text{ см}^{-2}$  внутри кольца. Предварительные расчеты показали, что за счет отражения в центре кольца имеется короткий промежуток времени, когда  $v_{ns}$  близка к нулю. Следовательно, существуют благоприятные условия, когда преобладает эффект сухого трения. Тестовый импульс распространялся параллельно оси кольца. Амплитуда наблюдаемого сигнала в зависимости от амплитуды входного сигнала показана на

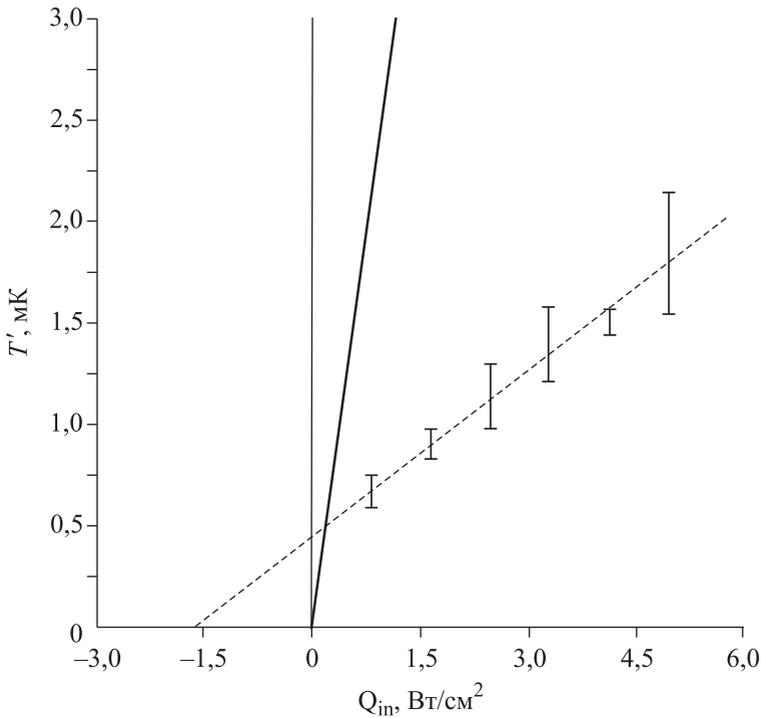


Рис. 7.6. Полученная амплитуда температуры  $T'$  тестового сигнала, как функция амплитуды входного сигнала (Stamm et al. [212], рис. 3). Сплошная линия представляет собой амплитуду тестового импульса в невозмущенном гелии

рис. 7.6, где можно отметить наличие положительного порога. ПВЛ  $\mathcal{L}_0$ , соответствующая наклону этих линий, составляет около  $\mathcal{L}_0 \approx 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2}$ . Из формулы (7.16) следует, что при  $T = 1,4 \text{ К}$ , значение порога составляет порядка  $2 \text{ Вт/см}^2$ , что довольно хорошо согласуется с измеренным значением.

Анализ “сухого” эффекта трения и полученные результаты позволили авторам сделать несколько выводов. Во-первых, экспериментально подтверждено существование порога, как показано на рис. 7.6. Этот факт также доказывает справедливость

уравнения Вайнена (3.8) для эволюции плотности вихревых линий.

Во-вторых, положительное значение наблюдаемого порога соответствует отрицательному значению дополнительного члена в уравнении (7.14). Из этого следует, что  $He_{II}$  в присутствии вихревого клубка является активной средой, которая перекачивает энергию вихревого клубка в энергию звуковых волн. Этот эффект соответствует модели Шварца макроскопической динамики вихревого клубка. Специальная геометрия экспериментальной установки позволила авторам сделать еще один дополнительный вывод. Наблюдаемый эффект связан с анизотропией вихревого клубка, который в присутствии противотока поляризован в направлении потока. Но контрольный импульс распространялся в поперечном направлении. Для устранения этого противоречия авторы предположили, что после выключения основного потока вихревой клубок теряет свою анизотропию и становится изотропным. Но изотропный вихревой клубок является неустойчивым (см. пункт VI.A обзора автора [96]). Из-за этой неустойчивости тестовый импульс, пересекающий вихревой клубок, приводит к его поляризации — на этот раз в направлении тестового импульса. И этот поляризованный клубок передает энергию к тестовому импульсу.

Подводя итоги данной главы, мы хотели бы подчеркнуть, что в присутствии вихрей (а на самом деле, принимая во внимание малость критических скоростей, почти всегда) классическая модель двухжидкостная квантовых жидкостей должна быть заменена уравнениями гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Это касается как прикладных задач, так и чисто фундаментальных вопросов. Приведенные здесь примеры подтверждают эту точку зрения.

## 8. Приложения гауссовой модели

В этой главе мы рассмотрим несколько прикладных вопросов, связанных с гауссовой моделью вихревых клубков, изложенной в разделе 5.2. Мы выделили эти специальные вопросы из общих теоретических результатов, описанных в предыдущих разделах, так как они имеют отдельное прикладное значение. В частности, мы рассмотрим важный для неоднородных течений вопрос динамики импульса Лэмба. Также будут освещены важные для квазиклассической турбулентности вопросы энергетического спектра и проблемы распада вихревого клубка при нулевой температуре. Как и ранее, мы сосредоточимся на теоретических и численных вопросах.

### 8.1. Гидродинамический импульс вихревого клубка

#### 8.1.1. Статические свойства

В качестве иллюстрации к разработанной гауссовой модели мы обсудим гидродинамический импульс (или импульс Лэмба) вихревого клубка  $\mathbf{P}_V$ , который определяется соотношением (2.58):

$$\mathbf{P}_V = \left\langle \frac{\rho_s \kappa}{2} \sum_j \int \mathbf{s}_j(\xi_j) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j \right\rangle. \quad (8.1)$$

Среднее  $\langle \mathbf{s}_j(\xi_j) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j) \rangle$  немедленно вычисляется с помощью характеристического функционала (5.4) (см. подробности в статье автора [109]):

$$\mathbf{P}_V = - \left[ \frac{\rho \kappa I_l \alpha_v}{\rho_n c_2^2 \beta_v} \right] \rho_s \mathbf{v}_s. \quad (8.2)$$

Здесь  $\alpha_v$  и  $\beta_v$  — коэффициенты уравнения Вайнена (3.8). Величины  $I_l$  и  $c_2^2$  — структурные параметры, определены в подразделе 2.3.1. Отметим, что коэффициент в формуле (8.2) не содержит подгоночных параметров, но только характеристики, известные из феноменологической теории (см. [61]). Соотношение (8.2) показывает, что вихревой клубок индуцирует

сверхтекучий поток, направленный против внешнего сверхтекучего движения. Этого следовало ожидать, так как существует некоторая предпочтительная поляризация вихревых петель, направленная вдоль относительной скорости  $\mathbf{v}_{ns}$ . В экспериментах этот дополнительный сверхтекучий поток должен проявлять себя как подавление сверхтекучей плотности  $\Delta\rho_s$ , которое является коэффициентом перед  $\mathbf{v}_s$  в общем выражении для импульса  $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s$ . Этот эффект является 3D-аналогом известного эффекта Костерлица — Таулеса (см., например, [193]), за исключением того, что распределение вихревых линий не рассчитывается из теоретических соображений, но приводится с апелляцией к экспериментальным данным.

Так как плотность сверхтекучей компоненты  $\rho_s$  входит в выражение для скорости второго звука, кажется привлекательной идея обнаружить описанный эффект с помощью зондирования вихревого клубка поперечным вторым звуком. Для этого мы должны, во-первых, найти поперечное изменение переменной  $\rho_s$  и, во-вторых, распространить теорию на нестационарный случай. Поперечное изменение  $\Delta\rho_s^\perp = (\delta\mathbf{P}_V/\delta\mathbf{v}_s^\perp)_{transv}$  вычислено в статье [109], оно составляет половину от величины, заданной уравнением (8.2).

Далее, общая теория утверждает, что если приложить внешнее гармоническое звуковое поле (второй звук), то подавление сверхтекучей плотности становится (комплексной) функцией частоты  $\omega$  следующего вида:

$$\Delta\rho_s^\perp(\omega) = \left( \frac{\delta\mathbf{P}_V^\perp}{\delta\mathbf{v}_s^\perp} \right)_{transv} \frac{1}{1 + i\omega\tau_J}. \quad (8.3)$$

Величина  $\tau_J$  — время релаксации сверхтекучего тока  $J_V$ , которое должно быть найдено из динамического рассмотрения (см. следующий параграф). Чтобы найти окончательный эффект, мы, во-первых, должны выразить величину  $d\mathbf{P}_V/dt$  с помощью уравнения движения элементов вихревой линии (2.10) и, во-вторых, вычислить различные средние, которые появляются в правой части уравнения (подробности см. в [109]). Выполнение всех описанных процедур приводит к результату,

согласно которому относительное изменение скорости второго звука  $\Delta c_2/c_2$  задается соотношением

$$\frac{\Delta c_2}{c_2} = -f(T) \frac{v_{ns}^4}{\omega^2}. \quad (8.4)$$

Здесь функция  $f(T)$  состоит из структурных параметров вихревого клубка (см. [61] и подраздел 2.3.1)

$$f(T) = \frac{4\rho\kappa I_l^2 \alpha^2 (1 - I_{\parallel})^2}{\rho_n c_2^4 \beta^3}. \quad (8.5)$$

Уменьшение второй скорости звука в противотоке He II действительно наблюдалось (см., например, Vidal et al. [270]). Сравним наш результат (8.4) с экспериментом [270]. Используя данные о структуре параметров, можно получить, например, что для температуры 1,44 К значение функции  $f(T)$  составляет около  $620 \text{ с}^2/\text{см}^4$ . Принимая частоту  $\omega = 4,3 \text{ рад/с}$ ,  $v_{ns} = 2 \text{ см/с}$ , используемые в работе в [270], получим  $\Delta c_2/c_2 \approx 4 \times 10^{-4}$ , что очень близко к наблюдаемому значению.

### 8.1.2. Динамика импульса Лэмба

Скорость изменения импульса Лэмба можно вычислить путем прямого дифференцирования величины (8.1), при условии, что позиции элементов линий  $\mathbf{s}_j(\xi_j)$  зависят от времени  $t$ , т. е.  $\mathbf{s}_j(\xi_j) \rightarrow \mathbf{s}_j(\xi_j, t)$ . Тогда, интегрируя по частям и используя условие замкнутости вихревых линий, получим

$$\frac{d\mathbf{P}_V}{dt} = \rho_s \kappa \sum_j \int \langle \dot{\mathbf{s}}_j(\xi_j, t) \times \mathbf{s}'_j(\xi_j) \rangle d\xi_j. \quad (8.6)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение (на основе гауссовой модели) по конфигурации вихревых петель. Используя уравнение движения вихревой линии (2.10), приходим к результату

$$\frac{d\mathbf{P}_V}{dt} = -\rho_s \kappa \sum_j \int \langle \mathbf{s}'_j(\xi_j) (\mathbf{v}_s + \dot{\mathbf{s}}_i + \alpha \mathbf{s}'_j \cdot (\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i)) \rangle d\xi_j. \quad (8.7)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{s}}_i$  — скорость элементов линии, индуцированная всей конфигурацией вихревых нитей и выраженная законом Био — Савара (2.2). Отметим, что первые два слагаемых в скобке в правой части выражения (8.7) соответствуют вихревой силе  $\omega \times \mathbf{v}$  (см., например, книгу Саффмана [43]). Третий член, специфичный для Не II, обусловлен взаимодействием между квантованными вихрями и нормальной компонентой.

Вычислим вклад от различных эффектов, выраженных различными слагаемыми в правой части уравнения (8.7). Мы примем обычное в теории сверхтекучей турбулентности предположение, что внешняя сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}_s$  равномерна и постоянна. Поэтому вклад в интеграл от первого члена в правой части (8.7) должен быть равен нулю, так как  $\int \mathbf{s}'_j(\xi_j) d\xi_j = 0$  из-за замкнутости петель.

Покажем теперь, что вклад в вихревую силу из-за самоиндуцированной скорости  $\dot{\mathbf{s}}_i$  также обращается в нуль. Рассмотрим скорость изменения импульса Лэмба  $\mathbf{P}_{12}$  системы из двух петель, связанную с действием взаимной индуцированной скорости

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{12}}{dt} = & -\frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \int \mathbf{s}'_1(\xi_1) d\xi_1 \int \left( \nabla_{\mathbf{s}_1} \frac{\mathbf{s}'_2(\xi_2)}{|\mathbf{s}_1(\xi_1) - \mathbf{s}_2(\xi_2)|} \right) d\xi_2 - \\ & - \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \int \mathbf{s}'_2(\xi_2) d\xi_2 \int \left( \nabla_{\mathbf{s}_2} \frac{\mathbf{s}'_1(\xi_1)}{|\mathbf{s}_1(\xi_1) - \mathbf{s}_2(\xi_2)|} \right) d\xi_1. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь операторы  $\nabla$  действуют на переменные, указанные нижними индексами. Используя, далее, соотношение 2.66, перепишем соотношение (8.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{12}}{dt} = & \frac{\rho_s \kappa^2}{(2\pi)^3} \int \int \int d\xi_1 d\xi_2 \frac{d^3\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \exp [i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{s}'_1(\xi_1) - \mathbf{s}'_2(\xi_2))] \times \\ & \times [\mathbf{s}'_1(\xi_1) \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{s}'_2(\xi_2)) - \mathbf{s}'_2(\xi_2) \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{s}'_1(\xi_1))]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

После раскрытия векторного произведения можно заметить, что подынтегральное выражение в (8.9) включает в себя комбинацию

$$\begin{aligned} & [\mathbf{s}'_1(\xi_1) (i\mathbf{k}\mathbf{s}'_2(\xi_2)) - \mathbf{s}'_2(\xi_2) (i\mathbf{k}\mathbf{s}'_1(\xi_1))] \times \\ & \times \exp [i\mathbf{k} (\mathbf{s}'_1(\xi_1) - \mathbf{s}'_2(\xi_2))]. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в уравнении (8.10) является полной производной (по отношению к  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , соответственно), поэтому интегрирование вдоль каждой из замкнутых петель дает нуль.

Перед тем как двигаться дальше, мы должны обсудить еще один ингредиент динамики вихревой линии, а именно процессы реконнекции. Хотя в классической гидродинамике (см. [271]) имеются как численные, так и аналитические доказательства того, что процессы реконнекции не изменяют импульс Лэмба системы, мы провели собственное численное исследование, которое показывает, что импульс Лэмба действительно сохраняется при пересоединении линий.

Остальная часть правой части уравнения (8.7) представляет собой не что иное, как взаимную силу трения  $\mathbf{F}_{sn}$ , оказываемую нормальной компонентой на вихревой клубок. Таким образом, мы приходим к следующему результату:

$$\frac{d\mathbf{P}_V}{dt} = \mathbf{F}_{sn}, \quad (8.11)$$

Результат (8.11) выражает очевидный факт, что скорость изменения импульса Лэмба равна приложенной внешней силе. Поскольку в противотоке Не II, вызванном тепловой нагрузкой, сила взаимного трения  $\mathbf{F}_{sn}$  является постоянной величиной, то, как следует из уравнения (8.11), импульс Лэмба  $|\mathbf{P}_V|$  растет до бесконечности. Но, с другой стороны, в стационарном случае величина  $\mathbf{P}_V$  должна быть постоянной, и возникает вопрос, что уравновешивает действие силы трения  $\mathbf{F}_{sn}$  для поддержания стационарной ситуации?

### 8.1.3. Несохранение импульса Лэмба

Чтобы понять, что происходит с импульсом Лэмба, поучительно проследить за поведением одиночного вихревого кольца в противотоке Не II. Если кольцо поляризовано вдоль скорости противотока, т. е. вектор  $\mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{s}''(\xi)$  направлен вдоль

$\mathbf{v}_{ns}$ , и  $\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i < 0$  (т. е. кольцо “обгоняет” нормальную компоненту), то кольцо будет расширяться, достигая боковой стенки канала. Импульс Лэмба кольца пропорционален квадрату радиуса, следовательно, процесс расширения кольца сопровождается увеличением величины  $\mathbf{P}_V$ . Таким образом, существует постоянное движение элементов вихревой линии в поперечном (по отношению к противотоку) направлении. Так как вихревой клубок в целом имеет ненулевую поляризацию вдоль  $\mathbf{v}_{ns}$ , равную  $\langle \mathbf{s}'_j(\xi_j) \times \mathbf{s}''_j(\xi_j) \rangle = I_l \mathcal{L}_v^{1/2} \mathbf{e}$ , ( $\mathbf{e}$  - единичный вектор в  $\mathbf{v}_{ns}$  - направлении), существует доминирующий поперечный поток вихревых линий в направлении боковых стенок. Вихревые линии, достигшие стенок, аннигилируют на границах. Вместе с вихревыми нитями исчезает импульс Лэмба, связанный с этими конкретными линиями. Процесс аннигиляции на границе очень сложный, и к тому же в реальном вихревом клубке петли не могут двигаться независимо друг от друга. Они сливаются с другими петлями или, наоборот, распадаются на более мелкие. Тем не менее, главная особенность, а именно наличие поперечного движения линий и аннигиляция на стенках, остается в силе. Соответственно, имеется постоянный поток импульса Лэмба,  $\mathbf{P}_V$ , величины  $\mathbf{P}_V$  в поперечном направлении. Резюмируя, можно утверждать, что реализуется неравновесное стационарное состояние с поперечным потоком величины плотности вихревых линий в пространстве (обозначается далее как  $\mathbf{j}_\perp$ ), при этом между ними имеет место следующее соотношение:

$$\rho_s \kappa \mathbf{j}_\perp = \frac{d\mathbf{P}_V}{dt}.$$

Следующий вывод из приведенного выше анализа касается уравнения Вайнена (3.8) для скорости изменения  $d\mathcal{L}_v/dt$  плотности вихревых линий. Обычно только два вклада учитываются в динамике величины  $d\mathcal{L}_v/dt$ , а именно, рост величины  $\mathcal{L}_v$  из-за взаимного трения и ее убывание из-за каскадного дробления вихревых петель (см. подраздел 3.4 или, например, [2, 96, 61]). Но приведенный выше анализ утверждает, что существует поток плотности вихревых линий по направлению к

боковым стенкам (обозначается далее как  $\mathbf{P}_{l\perp}$ ). Соответствующий вклад может быть найден из соотношения

$$\int_V \frac{d\mathcal{L}_v}{dt} d^3\mathbf{r} = - \int_S \mathbf{j}_{l\perp} d^2\mathbf{r}, \quad (8.12)$$

где объемные и поверхностные интегралы берутся по всему каналу. Предположив далее, что распределение линии внутри объема однородно, и применив формулу (8.11) и выражение для силы  $\mathbf{F}_{sn}$  (см., например, статью Шварца [61]), получаем, что дополнительная скорость изменения плотности вихревых линий  $\mathcal{L}_v$  вследствие потока к стенкам равна

$$\frac{d\mathcal{L}_v}{dt} = -\alpha(I_{\parallel} - c_L I_l) |\mathbf{v}_{ns}| \frac{\mathcal{L}_v}{d_{eff}}. \quad (8.13)$$

Здесь  $I_{\parallel}$ ,  $c_L$ ,  $I_l$  — структурные параметры вихревого клубка, а  $d_{eff}$  является эффективным размером поперечного сечения канала. Отметим, что необходимость дополнительного члена, подобного правой части соотношения (8.13), в уравнении Вайнена (3.8) обсуждалась самим Вайненом [205]. Он мотивировал введение дополнительного слагаемого необходимостью скорректировать свои экспериментальные данные.

Предложенное рассмотрение позволяет сделать еще один вывод о макроскопической динамике вихревого клубка. Переписывая соотношение (8.11) в стандартной форме уравнения релаксации

$$\frac{d\mathbf{P}_V}{dt} = \frac{\delta\mathbf{F}_{sn}/\delta\mathbf{v}_{ns}}{\delta\mathbf{P}_V/\delta\mathbf{v}_{ns}} \mathbf{P}_V, \quad (8.14)$$

можно рассматривать дробь в правой части (8.14) как оценку для обратного времени релаксации  $1/\tau_j$  вихревого клубка. Выполняя соответствующие алгебраические преобразования, получим

$$\frac{1}{\tau_j} \approx \frac{8\alpha(1 - I_{xx})}{\beta} \mathbf{v}_{ns}^2. \quad (8.15)$$

Таким образом, время релаксации импульса Лэмба составляет величину того же порядка, как и для динамики плотности вихревых линий (см., например, [96]). Но это означает, что

макроскопическое описание вихревого клубка не может быть ограничено только уравнением Вайнена, но должно включать в себя также уравнение для импульса Лэмба (см. дискуссию в главе 6).

## 8.2. Динамика неоднородной квантовой турбулентности

### 8.2.1. Диффузия вихревого клубка

Методы, разработанные в гауссовой модели, позволяют изучить проблему динамики неоднородного вихревого клубка. Одна из первых попыток описать такую динамику была предпринята в работах van Beelen [272] и Geurst [213], где в уравнение Вайнена (3.8) был добавлен диффузионный член  $D_v \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  (см. подробности в обзоре автора [96]). Авторы не смогли из феноменологических соображений определить значение коэффициента диффузии  $D_v$ . В ряде работ Jou et al. (см., например, [216, 273] и ссылки в них) из принципов неравновесной термодинамики были описаны процесс диффузии плотности вихрей линий  $\mathcal{L}(r, t)$  и определен коэффициент диффузии  $D_v$ . Эти работы были основаны на чисто феноменологическом подходе без какого-либо рассмотрения динамики вихревых нитей. В работе [274] пространственная диффузия неоднородного вихревого клубка была изучена в численном моделировании. Анализируя свои результаты, авторы заключили, что коэффициент диффузии приблизительно равен  $0, 1\kappa$ . Varenghi и Samuels [275] численно изучили вылетание (они назвали этот процесс “испарение”) вихревых петель из неоднородного вихревого клубка. Однако, так как авторы изучали разреженный клубок с низкой плотностью вихревых линий  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ , они наблюдали “баллистический” режим, а не чистой диффузии [275].

Количественная теория диффузии, описывающая эволюцию неоднородного вихревого клубка, была разработана автором. Подробности можно найти в статье автора [276]. Исследование основано на методах гауссовой модели, обсужденной в разделе 5.2. Изложим кратко суть подхода.

Вихревые петли, входящие в состав вихревого клубка, могут двигаться как единое целое с дрейфовой скоростью  $V_l$ , зависящей от их структуры и длины. При этом возникают потоки энергии, импульса, длины линий и т.д., выполняемые движущимися вихревыми петлями. В случае неоднородного вихревого клубка появляется поток  $\mathbf{J}$  плотности вихрей линий  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  за счет градиента концентрации вихревых линий. Ситуация здесь точно такая же, как и в классической кинетической теории с той лишь разницей, что “носители” — не точечные частицы, но протяженные объекты (вихревые петли), которые сами обладают бесконечным числом степеней свободы с очень сложной динамикой. В духе стратегии гауссовой модели можно выполнить исследование, основываясь на предположении, что вихревые петли имеют броуновскую структуру с обобщенным распределением Винера (см. раздел 5.2). Для того, чтобы развить теорию процессов переноса, выполняемых вихревыми петлями (в духе классической кинетической теории), необходимо вычислить скорость дрейфа  $V_l$  и свободный путь  $\lambda(l)$  для петли размера  $l$ . Ссылаясь на статью [276], выпишем здесь следующий результат. Скорость дрейфа  $V_l$  для петли размера  $l$  имеет вид

$$V_l = C_v \beta / \sqrt{l \xi_0}. \quad (8.16)$$

Коэффициент  $C_v$  — численный множитель порядка единицы. Свободный путь  $\lambda(l)$  для петли длины  $l$  равен

$$\lambda(l) = 1/2 l b_m \mathcal{L}. \quad (8.17)$$

Здесь  $b_m$  — числовой коэффициент, приблизительно равный  $b_m \approx 0,2$  (см. формулы (5.16), (5.15)). Видно, что величина свободного пробега  $\lambda(l)$  очень мала, т.е. только очень маленькие петли дают существенный вклад в процессы переноса. Например, петли, размер которых порядка межвихревого пространства  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ , могут пролететь в среднем около  $(2 - 3) \times \delta$  расстояний. Тем не менее, когда вихревой клубок становится достаточно разреженным, с низкой плотностью вихревых линий  $\mathcal{L}(r, t)$ , большие петли могут пролететь расстояние, сравнимое с размером системы.

Зная усредненную скорость  $V_l(l)$  петель и длину свободного пробега  $\lambda(l)$  (обе величины  $l$ -зависимые), можно вычислить пространственный поток плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ , выполняемый петлями. Процедура очень близка к реализуемой в классической кинетической теории с той разницей, что носители имеют различные размеры, это требует дополнительного интегрирования по длинам петель. Рассмотрим элемент небольшой площадки, помещенный в некоторой точке  $x$  и ориентированный перпендикулярно оси  $x$  (см. рис. 3 статьи [276]). Компонента  $x$ -величины  $\mathbf{P}$ -потока длины нитей, выполняемого петлями размеров  $l$ , расположенными в  $\theta, \varphi$ -направлении (с левой и правой сторон, соответственно) и удаленными от элемента площади на расстоянии  $R$ , можно записать в виде

$$d\mathbf{J}_{\mp}(\theta, \varphi, l, R) = ln(l, R, \theta, \varphi)(V_l \cos \theta)P(R). \quad (8.18)$$

В соотношении (8.18) комбинация  $(V_l \cos \theta)$  — это просто  $x$  составляющая скорости дрейфа петель, коэффициент  $P(R)$  вводится для учета ослабления потока из-за столкновений. В формуле (8.18) принято, что плотность петель  $n(l)$  и, соответственно, плотность вихревых линий  $\mathcal{L}$  являются функциями пространственной переменной (в пространственных сферических координатах  $n = n(l, R, \theta, \varphi)$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(l, R, \theta, \varphi)$ ). В духе классической кинетической теории мы предполагаем, что устанавливается локальное равновесие. Выполнив все предписанные вычисления (см. подробности в статье [276]), найдем, что “чистый” поток  $\mathbf{J}$  плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  пропорционален  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$ , т. е.  $\mathbf{J} = D_v \nabla \mathcal{L}$ , и, соответственно, пространственно-временная эволюция величины  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению диффузионного типа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = D_v \nabla^2 \mathcal{L}. \quad (8.19)$$

Наш подход является достаточно грубым, чтобы претендовать на хорошее количественное описание. Тем не менее, если принять данные гауссовой модели, описанной в разделе 5.2 (см. также [276, 138]), можно сделать вывод о том, что

$D_v \approx 2,2\kappa$ . Далее мы рассмотрим несколько примеров приложения уравнения (8.19)).

### 8.3. Распространение турбулентных фронтов

Еще одним применением гауссовой модели и связанного с ней уравнения диффузии (8.19) является проблема распространения турбулентной сверхтекучей области (см. статью автора [277]).

В ранние годы изучения квантовых вихрей и сверхтекучей турбулентности было выполнено несколько экспериментальных работ, посвященных переходным процессам при ступенчатом включении небольших (но закритических) тепловых потоков. К этим работам относятся статьи Пешкова и Ткаченко [278], Bhagat et al. [279, 213, 272], а также работа Ван Скайвера [253]. Распространение решетки Ткаченко в сверхтекучей жидкости (см. раздел 1.2) в виде турбулентного фронта во вращающемся  $^3\text{He-B}$  наблюдали Ельцов и др. [280, 281].

Ключевое предположение о том, что распространение фронта происходит в виде диффузии, с источником вихрей за фронтом (подобно процессу горения) было выдвинуто в работе автора [277]. В одномерном случае (когда фронт распространяется вдоль оси  $x$ ) уравнение для плотности вихревых линий имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}(t, x) V_L}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \mathcal{L}(t, x)}{\partial x^2} + F(\mathcal{L}(t, x)). \quad (8.20)$$

В случае квантовой турбулентности в противотоке сверхтекучей жидкости роль источникового члена  $F(\mathcal{L}(t, x))$  играет правая часть уравнения Вайнена (3.8)

$$F_{Vi}(\mathcal{L}) = \alpha_{Vi} |\mathbf{v}_{ns}| \mathcal{L}^{3/2} - \beta_{Vi} \mathcal{L}^2. \quad (8.21)$$

По сути дела, уравнение (8.20) представляет собой уравнение Вайнена (8.21) с учетом дрейфовой скорости  $V_L$  вихревого клубка (см. дискуссию в главе 6) и диффузионного члена (см. предыдущий пункт).

Анализ [277], выполненный в духе теории горения (см., например, [282]), показывает что турбулентный домен распространяется в виде фронта и вычисления приводят к следующей формуле для скорости распространения фронта  $V_{fr}$ :

$$V_{fr} = 0.8\sqrt{D/\tau_V}. \quad (8.22)$$

Здесь  $D$  — коэффициент диффузии и  $\tau_V$  является временем релаксации вихревого клубка. Для турбулентности, развиваемой в противотоке He II, коэффициент диффузии составляет около  $D_v \approx 2,2\kappa$  (см. уравнение (8.19)), и время релаксации  $\tau_V$  следует из уравнения Вайнена (8.21):

$$\tau^{-1}(\mathcal{L}) = \beta_V \mathcal{L}_{eq}. \quad (8.23)$$

Результат (8.22) прекрасно согласуется с классическим экспериментом Пешкова — Ткаченко [278], которые изучали кинетику образования сверхтекучей турбулентности в длинных капиллярах под действием тепловых потоков порядка  $1 \text{ Вт/см}^2$ . Они сообщили о скорости фронта  $V_{exp} \approx 0,27 \text{ см/с}$ , тогда как уравнение (8.22) дает  $V_{theor} \approx 0,23 \text{ см/с}$ .

## 8.4. Распад квантовой турбулентности при нулевой температуре

### 8.4.1. Затухание плотности вихрей и квазиклассическое поведение квантовой турбулентности

Распад квантовой турбулентности при нулевой температуре является одним из загадочных и увлекательных явлений динамики квантованных вихрей. Действительно, в этом случае взаимное трение отсутствует, и нет никакого очевидного механизма диссипации вихревого клубка. Тем не менее авторы экспериментальных работ (см., например, статьи [283, 97, 284, 285]) и численного моделирования (см., например, [274, 286]) сообщают об уменьшении плотности вихревых линий  $\mathcal{L}(t)$  при очень низкой температуре.

Теория низкотемпературного распада вихревого клубка тесно связана с гипотетической связью между классической (колмогоровской) и квантовой турбулентностью (см. главу 3). Действительно, одним из основных аргументов, поддерживающих идею колмогоровской турбулентности в квантовых жидкостях, является тот факт, что вихревой клубок затухает при нулевой температуре, когда взаимное трение отсутствует. На самом деле, конечно, имеются физические механизмы диссипации, например, такие как лавинообразное дробление вихревых петель (см. раздел 5.3), нелинейный каскад волн Кельвина (см. раздел 4.3), акустическое излучение, потеря энергии во время реконнекции и т.д. Соответствующие вопросы были подробно обсуждены в недавних обзорах [89, 121, 287]. Примечательно, однако, что все перечисленные механизмы реализуются лишь на очень малых масштабах. Таким образом, естественно предположить, что существует каскадный поток энергии в область малых масштабов, точно так же, как и в классической турбулентности Колмогорова.

Указанная идея послужила основанием для цикла исследований, в которых упомянутые экспериментальные работы по распаду вихревого клубка были интерпретированы на основе распада классической турбулентности. Так, в работах Skrbek et al. [288] был разработан подход, основанный на затухании энергии в классической турбулентности. Авторы связали ослабление турбулентной энергии с изменением плотности вихревой линии  $\mathcal{L}(t)$  и предсказали асимптотическую временную зависимость этого изменения,  $\mathcal{L}(t) \propto t^{-3/2}$ .

Одной из ключевых и широко цитируемых экспериментальных работ, в которой обнаружена такая зависимость, является исследование, проведенное в группе Голова [285]. В этой работе наблюдался распад вихревого клубка в He II в замкнутом кубе с твердыми стенками. Результаты собраны на верхнем графике (рис. 8.1) где изображено временное поведение средней плотности вихревой линии  $\mathcal{L}_{av}(t)$ .

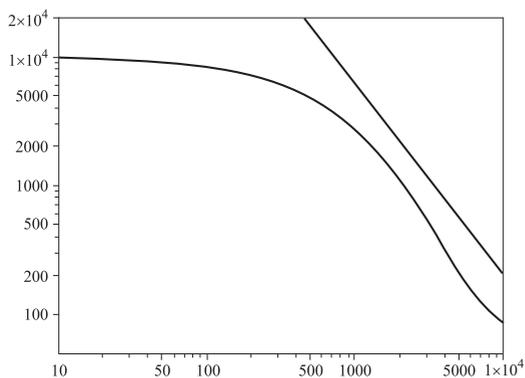
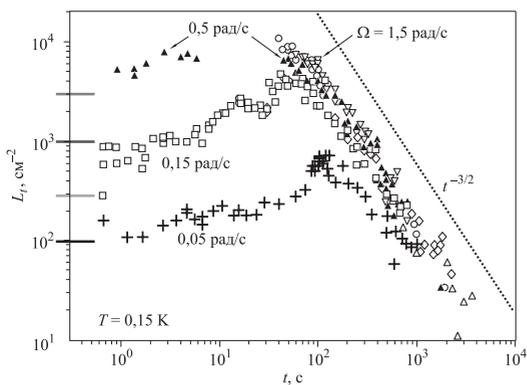


Рис. 8.1. Сравнение экспериментальных данных по распаду сверхтекучей турбулентности, полученных в [285] (вверху) и наш теоретический результат (внизу). Мы рассчитали временную эволюцию усредненной плотности вихревых линий (для начального условия  $\mathcal{L} = 10^4 \text{1/см}^2$ ) в результате диффузионного процесса, описанного в данной главе

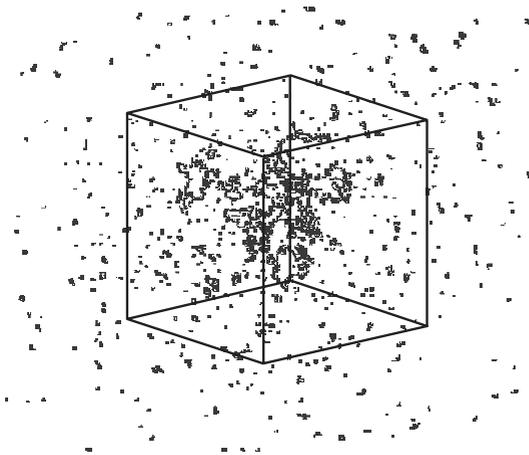
### 8.4.2. Диффузионное затухание квантовой турбулентности

В данном подразделе мы рассматриваем альтернативный механизм распада вихревого клубка, который не связан с диссипацией на малых масштабах. Этим механизмом является диффузионное расплывание вихревого клубка и вылетание

вихревых петель из объема, занятого квантовой турбулентностью.

Мы рассчитали распад вихревого клубка на основе уравнения диффузии (8.19). Полностью трехмерная задача была решена численно (см. подробности в статье автора [276]), результат, показанный на нижнем изображении (рис. 8.1). Видно, что распад вихревого клубка, за счет диффузии, описывает количественно и качественно особенности, наблюдаемые в эксперименте. Прежде всего, качественное поведение линий согласуется с диффузионным характером затухания. В частности, в начале процесса имеется плато, которое переходит в быстрый распад клубка. Полный распад сверхтекучей турбулентности происходит за время, которое находится в очень хорошем согласии с полученным в эксперименте [285]. Так же правильно отражена зависимость от объема системы. Наклон кривой в интервале наиболее интенсивного снижения показывает зависимость, близкую к наблюдаемой  $\sim t^{-3/2}$ , что также характерно для диффузии. Выполненные расчеты и сравнение с упомянутыми экспериментами позволяют сделать вывод о том, что механизм диффузии может правильно описать ослабление плотности вихревых линий.

Прямое численное моделирование эволюции неоднородного вихревого клубка при нулевой температуре, первоначально сосредоточенного в ограниченной области, было выполнено в работе [286]. Исследование проведено на основе уравнения (2.10) как с использованием локального индукционного приближения (2.5), так и на основе закона Био — Савара (2.2). Цель данного исследования заключалась в выяснении роли различных факторов, вызывающих уменьшение длины вихревых линий, возникающих при численном моделировании. Важно подчеркнуть, что передача энергии с помощью каскада нелинейных волн Кельвина (и излучения звука) не рассматривалась. Одной из причин этого является то, что пространственное разрешение вдоль линий не позволило обнаружить генерацию высоких гармоник, тем более получить гармоники, которые излучают звук.



*Рис. 8.2.* Пример эволюции клубка, первоначально сосредоточенного в кубической области с прозрачными стенками. Отчетливо видно множество мелких петель, которые вылетают из фиксированного домена

Кроме того, использование метода предполагает, что жидкость несжимаема.

Численное моделирование было выполнено для кубической области с прозрачными стенками, внедренной в неограниченное пространство, и для куба с твердыми гладкими стенками. Расчеты показали, что в случае неограниченного пространства распад квантовой турбулентности вызван вылетанием ("испарением") вихревых петель из первоначального объема. Результат численного моделирования показан на рис. 8.2, отчетливо видно, как вихревые петли вылетают из объема и плотность вихревых линий уменьшается внутри основного куба. Авторы тщательно контролировали все механизмы, приводящие к потере длины, например, изменение длины вследствие процессов реконнекции, удаление очень маленьких петель с размерами ниже численного разрешения, изменение длины из-за вставки и удаления точек (для обеспечения устойчивости алгоритма) и т. д. Результаты этого мониторинга позволили сделать однозначный вывод о том, что главный механизм уменьшения дли-

ны вихря внутри исходного объема связан с вылетающими вихревыми петлями.

Также было выполнено сравнение результатов численного моделирования с теорией диффузии вихревого клубка, описанной выше. Получено, что эволюция длины в исходной области удовлетворительно описывается уравнением диффузии (8.19).

Хорошее согласие между экспериментальными данными, численным моделированием и теоретическим рассмотрением позволяет сделать вывод, что процесс диффузии играет доминирующую роль в свободном распаде вихревого клубка в отсутствие нормальной компоненты.

## **8.5. Энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцируемого вихревыми нитями. Фрактальная вихревая нить**

### **8.5.1. Энергетический спектр и характеристический функционал**

Другим сильным аргументом, поддерживающим идею квазиклассического поведения квантовой турбулентности, является зависимость спектров энергии  $E(k)$  от волнового вектора  $k$ , полученных при численном моделировании и в экспериментах. Имеется значительное число работ, которые демонстрируют зависимость функции  $E(k)$ , близкую к колмогоровскому спектру:  $E(k) \propto k^{-5/3}$ . Эти работы основаны как на методе вихревых нитей [289, 290, 291, 292], так и на уравнении Гросса — Питаевского [293, 294, 295]. Наличие подобных спектров, несомненно, демонстрирует связь динамики хаотичных вихревых нитей с классической турбулентностью и свидетельствует о неоднородном распределении энергии в пространстве волновых чисел  $k$ . Однако, несмотря на огромную важность этого результата и на многочисленные обсуждения, вопрос о том, каким образом генерируется колмогоровский спектр, остается открытым. Поэтому представляется привлекательным найти механизм появления спектра типа колмогоровского, основываясь непосредственно на конфигурации квантовых вихревых нитей. Далее

мы рассмотрим два примера таких конфигураций — это фрактальную вихревую нить и реконнектирующие вихревые линии.

Мы начнем с первого примера и исследуем фрактальную вихревую нить, возникающую в гауссовой модели квантовой турбулентности (см. раздел 5.2). Детали излагаемых результатов могут быть найдены в статьях автора и др. [103, 296, 297].

Стартовой позицией являются формулы (2.67) и (2.69), поскольку они предлагают простой способ вычисления энергетического спектра  $E(\mathbf{k})$  трехмерного поля скорости, индуцированного вихревым клубком. Формула (2.81) дает возможность вычислить эту величину на основании характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$ . Как обсуждалась в разделе 5.2, характеристический функционал  $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$  имеет гауссову форму

$$\begin{aligned} W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\}) &= \\ &= \exp \left( - \int_0^L \int_0^L \mathbf{P}^\alpha(\xi') N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') \mathbf{P}^\beta(\xi'') d\xi' d\xi'' \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Здесь  $N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'')$  играет роль матрицы корреляций между компонентами касательных векторов  $\mathbf{s}'^\alpha(\xi')$  и  $\mathbf{s}''^\beta(\xi'')$  (см. подраздел 2.3.2). Выражение  $\mathbf{P}^\alpha(\xi)$  в характеристическом функционале  $W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi)\})$  определяется посредством  $\theta$ -функций —  $\mathbf{P}^\alpha(\xi) = \mathbf{k}^\alpha \Theta(\xi - \xi_1) \Theta(\xi_2 - \xi)$  (см. соотношения 2.82)). Применяя этот вид характеристического функционала (2.81) к формуле для спектра энергии  $E(\mathbf{k})$ , можно прийти к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\rho_s \kappa^2}{2} \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}}{k^2} (2N^{\mu\nu}(\xi_1 - \xi_2) - \\ &\quad - 2 \int_0^L N^{\alpha\nu}(\xi_1 - \xi') \mathbf{P}^\nu(\xi') d\xi' \times \end{aligned}$$

$$\times 2 \int_0^L N^{\alpha\mu} (\xi_2 - \xi'') \mathbf{P}^\mu(\xi'') d\xi'' W(\{\mathbf{P}(\xi)\}). \quad (8.25)$$

В формуле (8.25) в отличие от (2.81) вычисление проводится для единственной петли  $i = j$ . Будем считать систему сферически симметричной в  $\mathbf{k}$ -пространстве, т. е.  $d^3\mathbf{k}/k^2 = 4\pi dk$  и  $N^{\alpha\beta}(\xi' - \xi'') = \delta_{\alpha\beta}N(\xi' - \xi'')$ , и выполним суммирование по пространственным индексам. Используя далее выражение (8.24) для характеристического функционала  $W(\{\mathbf{P}^\alpha(\xi)\})$  и (2.82) для  $\mathbf{P}(\xi)$ , получим следующее выражение для энергии  $E$ :

$$E = 4\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \int dk (3N(\xi_1 - \xi_2) - 2(k \int_0^{\xi_2 - \xi_1} N(x) dx)^2) \times \\ \times \exp\left(-3k^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi''\right). \quad (8.26)$$

Упростим этот интеграл, повернув систему координат следующим образом:  $V = \xi' + \xi''$ ,  $U = \xi' - \xi''$ .  $U$  изменяется в пределах от 0 до  $L$ . Модуль якобиана преобразования равен  $J = \frac{\delta(\xi', \xi'')}{\delta(U, V)} = \frac{1}{2}$ . В результате выражение для энергии в новых координатах примет вид

$$E = 8\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L dU \int dk (L - U) \left[ 3N(U) - 2(k \int_0^U N(x) dx)^2 \right] \times \\ \times \exp\left(-6k^2 \int_0^U (U - x)N(x) dx\right). \quad (8.27)$$

Соотношение (8.27) является ключевым для определения спектральной плотности трехмерного поля скорости. Очевидно, что спектр  $E(k)$  является подынтегральным выражением

по отношению к интегрированию по волновому вектору  $k$ . Чтобы использовать формулу (8.27), необходимо определить вид функции  $N(x)$ . Этому посвящен следующий параграф.

### 8.5.2. Модели вихревой нити

Рассмотрим выражение для корреляционной функции (см. 2.80)

$$\langle \mathbf{s}'(\xi') \mathbf{s}'(\xi'') \rangle = \frac{\delta^2 W}{i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi') i \delta \mathbf{P}^\alpha(\xi'')} \Big|_{\text{all } \mathbf{P}=0} = N(\xi' - \xi''). \quad (8.28)$$

Проинтегрируем это соотношение по переменным  $\xi', \xi''$  в интервале от 0 до  $L$ . После интегрирования левая часть уравнения принимает вид

$$(\mathbf{s}(L) - \mathbf{s}(0))(\mathbf{s}(L) - \mathbf{s}(0)) = \langle D^2 \rangle, \quad (8.29)$$

здесь  $\langle D^2 \rangle$  — средний квадрат расстояния между точками 0,  $L$ . В этом разделе мы временно отказываемся от условия замкнутости вихревой петли. В противном случае левая часть равенства (8.29) должна обращаться в нуль. Правая часть приводит к интегралу с верхними пределами, равными  $L$ , и мы имеем

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi''. \quad (8.30)$$

Таким образом, мы можем вычислить зависимость между средним  $3D$  расстоянием между точками и линейным размером объекта. Из полученного выражения можно вычислить основную характеристику фрактального объекта — его размерность. Определим фрактальные размерности (размерности по Хаусдорфу) некоторых наиболее важных моделей вихревых нитей, для этого вычислим интегралы при различных корреляционных функциях  $N(\xi' - \xi'')$ .

Пусть корреляционная функция имеет степенной вид, т. е.  $N(\xi' - \xi'') = c(\xi' - \xi'')^\lambda$ , где  $c$  (здесь и далее) — некоторая константа подходящей размерности. Имеем следующий результат

интегрирования:  $\langle D^2 \rangle \sim L^{\lambda+2}$ , т. е. трехмерный средний размер области, занимаемый вихревой петлей, связан с ее длиной следующим образом:

$$L \sim \langle D \rangle^{H_d}. \quad (8.31)$$

Таким образом, вихревая нить является фрактальным объектом с размерностью Хаусдорфа  $H_d$ , равной

$$H_d = \frac{2}{\lambda + 2}. \quad (8.32)$$

Для гладкой линии  $\lambda = 0$  и, соответственно,  $H_d = 1$ . Другой важной моделью является модель нити с корреляционной функцией  $N(\xi' - \xi'')$  вида  $N(\xi' - \xi'') = c\delta(\xi' - \xi'')$ . Изложенные выше соображения приводят к результату  $L \sim D^2$ , что соответствует классической броуновской линии (величина при этом соответствует элементарному шагу). Таким образом, дельта-коррелированная функция  $N(\xi' - \xi'')$  приводит к “чистому” случайному блужданию. Это ясно также из того, что в этом случае реализуется классическое распределение Винера (см. раздел 5.2). Заметим, что формально  $\lambda = -1$ . С физической точки зрения интересен случай случайного блуждания, которое не может иметь самопересечений. Эта ситуация в теории полимеров известна как модель Флори (см., например, [105]). В его модели  $\lambda = -4/5$ , тогда мы получаем, что  $H_d = 5/3$ .

Вихревые петли в сверхтекучем He II, также обладают гауссовой статистикой, однако для них корреляционная функция не имеет степенного вида (см. [102]). На расстояниях порядка  $\xi' - \xi''$  (вдоль кривой) нить является гладкой, но на больших расстояниях она обладает свойствами, схожими со случайным блужданием с “характерным масштабом”  $\xi_0$  — средним радиусом кривизны элементов нити. Наилучшим образом такое поведение может быть аппроксимировано функцией

$$N(\xi' - \xi'') = \frac{\pi/\xi_0}{1 + ((\xi' - \xi'')/\xi_0)^2}, \quad (8.33)$$

которая является “размазанной” (на ширину  $\xi_0$ ) дельта-функцией. Рассматриваемая корреляционная функция соответствует случаю “реальной” нити или нити, гладкой на малых

расстояниях  $\xi' - \xi'' \ll \xi_0$  и обладающей фрактальными свойствами броуновской нити на больших расстояниях  $\xi' - \xi'' \gg \xi_0$ .

Кроме корреляционных свойств нитей необходимо также учесть, что вихревые петли являются замкнутыми линиями. Условие замыкания имеют следующий вид:

$$\langle D^2 \rangle = \int_0^L \int_0^L N(\xi' - \xi'') d\xi' d\xi'' = 0. \quad (8.34)$$

Другими словами, расстояние между “начальной” и “конечной” точками вихря равно нулю. Это накладывает дополнительные условия на корреляционную функцию, а именно, зануление при интегрировании по своим аргументам по всей длине нити и симметрия относительно границ интегрирования (точек 0 и  $L$ ). Например, для чисто броуновской нити корреляционная функция  $N(x) = c\delta(x)$  должна заменяться функцией  $N(x) = c(\delta(x) - 1/L)$ . Аналогичная процедура применяется для других случаев. Если не выполнить эту процедуру, возникает неверный ответ при малых волновых числах. При этом для упрощения вычислений в экспоненте выражения (8.27) можно, не опасаясь противоречий, не выполнять указанную процедуру.

### 8.5.3. Определение энергетического спектра

**Броуновская линия** Рассмотрим случай чисто случайного блуждания (броуновская линия), тогда корреляционная функция имеет вид  $N(x) = c\delta(x)$ . Для нахождения энергетического спектра необходимо взять интеграл по  $U$  в уравнении (8.27), но сначала вычислим интеграл в экспоненте этого выражения: он равен

$$-6k^2 \int_0^U (U-x)c\delta(x)dx = -3k^2cU. \quad (8.35)$$

При этом энергетический спектр равен

$$\begin{aligned}
E(k) &= \\
&= 8\pi\rho_s\kappa^2 \int_0^L (L-U)(3c(\delta(U) - 1/L) - \frac{k^2c^2}{2})e^{-3k^2cU} dU. \quad (8.36)
\end{aligned}$$

Данный интеграл легко вычисляется в аналитических функциях, ответ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
E(k) &= 8\pi\rho_s\kappa^2 \times \\
&\times \frac{6 - 2\exp(-3ck^2L)(3 + ck^2L) + ck^2L(-16 + 21ck^2L)}{18k^4L}. \quad (8.37)
\end{aligned}$$

Рассмотрим различные случаи больших и малых  $k$  по отношению к величине  $1/\sqrt{cL}$ . Величина  $\sqrt{cL}$  совпадает с линейным размером трехмерной области, где локализована вихревая петля. Из выражения (8.37) следует, что  $E(k)$  при  $k \ll 1/\sqrt{cL}$  ведет себя, примерно как  $E(k) \approx 8\pi\rho_s\kappa^2c^2k^2L^2$ , т. е. спектральная плотность возрастает пропорционально  $k^2$ , это означает, что  $dE/d^3\mathbf{k}$  постоянно.

Зачастую  $k^2$  упоминается как доказательство термодинамически равновесного состояния. Мы хотели бы подчеркнуть, однако, что это распределение энергии не имеет ничего общего с законом равномерного распределения. Оно, скорее, является следствием того факта, что ограниченный вихревой домен индуцирует вдали от него поле скорости, изменяющееся как  $1/r^3$ . Это, в свою очередь, генерирует спектр  $E(k) \propto k^2$ . Данный факт был установлен для классической турбулентности (см., например, [119]). Для квантовой турбулентности этот результат был обоснован в статье Stalp et al. [288]. При  $k \gg \sqrt{cL}$ , функция  $E(k)$  является постоянной величиной, примерно равной  $9.33\pi\rho_s\kappa^2cL$ .

Энергетический спектр  $E(k)$  для броуновской линии длиной  $L = 100$  и элементарным шагом, равным  $c = 1$  (все единицы являются произвольными), полученный в численных вычислениях формулы (8.27), представлен на рис. 8.3 ( $a$  — нижняя кривая). Видно, что при малых  $k \ll 1/\sqrt{cL} = 100^{-1/2}$  спектр ведет себя как  $E(k) \sim k^2$ . При  $k \gg \sqrt{cL} = 100^{-1/2}$

спектр не зависит от  $k$ , как и предсказано в аналитических вычислениях.

**Степенные корреляции** Перейдем к рассмотрению спектральной плотности для корреляционной функции степенного вида  $N(x) = cx^\lambda$ . Интеграл в экспоненте выражения (8.27) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} -6k^2c \int_0^U (U-x)x^\lambda dx &= -6k^2c \left( \frac{U^{\lambda+2}}{\lambda+1} - \frac{U^{\lambda+2}}{\lambda+2} \right) = \\ &= -\frac{6k^2cU^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Далее следует сделать замену  $\frac{6k^2cU^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} = t$ . Обозначая  $\gamma = \left( \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{6c} \right)$ , получим

$$U = \left( \frac{\gamma t}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}}, \quad dU = \left( \frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{1}{\lambda+2}} \frac{t^{-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}}}{\lambda+2} dt,$$

и энергетический спектр примет вид

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{8\pi\rho_s k^2}{\lambda+2} \times \\ &\times \int_0^{k^2 L^{\lambda+2}/\gamma} \left( L \left( \frac{\gamma}{k^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} t^{-\frac{1}{\lambda+2}} - \frac{\gamma}{k^2} \right) \left( 3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda+1)^2} \right) e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (8.39)$$

В связи с невозможностью вычислить интеграл во всем интервале волновых чисел получим оценки интеграла (8.39) при больших и малых  $k$ . Для размерности Хаусдорфа из интервала  $[1; 3]$  при больших  $k$  первый член из первой скобки подынтегрального выражения (8.39) больше второго. Тогда при  $k \gg 1$

комбинация  $k^2 L^{\lambda+2}/\gamma \rightarrow \infty$ , а (8.39) переходит в

$$E(k) \sim \frac{8\pi\rho_s\kappa^2}{\lambda+2} L \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{\lambda+2}} \left(3 - \frac{2c\gamma t}{(\lambda+1)^2}\right) e^{-t} dt, \quad (8.40)$$

интегрирование по  $t$  даст некоторую константу, не зависящую от  $k$ , из этого следует, что

$$E(k) \sim k^{-2\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} = k^{H_d-2}. \quad (8.41)$$

Такой результат из совершенно других предположений ранее обсуждался в теории классической турбулентности (см. книгу Фриша [118], параграф 8.9.2).

При малых волновых числах нам, как и в случае случайного блуждания, необходимо учесть условие замкнутости вихревой нити. Степенная корреляционная функция в этом случае равна  $N(x) = c(x^\lambda - \frac{2L^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)})$ . Как и в случае случайного блуждания, условие замкнутости вихревой нити приводит к обнулению интеграла по  $U$  от первого члена второй скобки. Таким образом:

$$E(k) \sim 8\pi\rho_s\kappa^2 k^2 \times \int_0^L (U-L) \left( \int_0^U c \left( x^\lambda - \frac{2L^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \right) dx \right)^2 dU. \quad (8.42)$$

Здесь подынтегральное выражение не зависит от  $k$ , поэтому интегрирование даст некоторую величину, не зависящую от волнового числа. Поэтому, при малых  $k$ , спектр ведет себя  $E(k) \sim k^2$ , т. е. как и в случае случайного блуждания.

На рис. 8.3,а представлены результаты численного интегрирования (8.27) для линий длины  $L = 100$  различной фрактальной размерности. Верхняя кривая соответствует гладкой нити  $\lambda = 0$ , в области  $k \sim 100^{-1}$  происходит изменение зависимости от  $E(k) \sim k^2$ , при малых  $k$  и  $E(k) \sim k^{-1}$  при больших  $k \gg 100^{-1}$ . Для линии Флори без самопересечений наблюдается сходное поведение:  $E(k) \sim k^2$  при  $k < 100^{-3/5}$  и  $E(k) \sim k^{-1/3}$

при увеличении  $k$ ; отметим, что для этой модели  $H_d = 5/3$  и энергетический спектр действительно пропорционален  $k^{H_d-2}$ .

**”Реальная” нить** ”Реальная” вихревая нить является полужрактальным объектом, т.е. является гладкой линией на масштабах  $\xi' - \xi'' \ll \xi_0$  и имеет структуру случайного блуждания при  $\xi' - \xi'' \gg \xi_0$ . Корреляционная функция (для незамкнутой нити) задается выражением (8.33). К сожалению, соответствующее выражение для спектральной плотности в этом случае необычайно громоздкое, чтобы выполнить аналитический анализ. Понятно, однако, что область волновых чисел  $k$  в этом случае может быть разбита на три части. Первая — это область  $k \ll \frac{1}{\sqrt{L\xi_0}}$ , т.е. волновые числа меньше обратного размера области, где локализована вихревая петля. Такие волновые числа описывают “дальнее” течение, и по аналогии с предыдущими случаями здесь справедлив закон равномерного распределения энергии, т.е.  $E(k) \sim k^2$ . Область  $\frac{1}{\sqrt{L\xi_0}} \ll k \ll 1/\xi_0$  соответствует масштабам бóльшим, чем элементарный шаг  $\xi_0$  но меньшим, чем размер системы. Понятно, что энергетический спектр не зависит от  $k$ , как это должно быть для броуновской линии. При дальнейшем увеличении  $k$  мы приближаемся к масштабам, меньшим элементарного шага  $\xi_0$ , где фрактальность отсутствует и  $E(k) \sim k^{-1}$ , как и должно быть для гладкой нити.

Результаты численного нахождения энергетического спектра “реальной” вихревой нити подтверждают предыдущие утверждения (см. рис 8.3,б) т.е. для нити с параметрами  $L = 100$  и  $\xi_0 = 0,01$  — верхняя кривая и для нити с  $L = 100$  и  $\xi_0 = 1$  — нижняя кривая. Можно видеть, как  $E(k)$  изменяет свой характер в точках  $k = \frac{1}{\sqrt{L\xi_0}} = 1$  и  $k = 1/\xi_0 = 100$  для верхней кривой и, соответственно, в точках  $k = \frac{1}{\sqrt{L\xi_0}} \sim 0,03$  и  $k = 1/\xi_0 = 0,1$  для нижней.

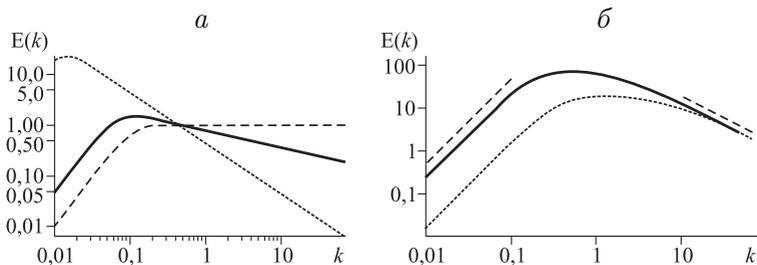


Рис. 8.3. Изображение (в логарифмической шкале) (а) трех спектральных плотностей  $E(k)$  для чисто фрактальных вихревых нитей с различной размерностью Хаусдорфа и (б) спектр энергии “полуфрактальной” вихревой нити в сверхтекучем гелии (см. пояснения в тексте)

Резюмируя результаты данного раздела, можно подчеркнуть, что энергетический спектр  $E(k)$  трехмерного случайного поля скорости, индуцируемого фрактальной вихревой нитью с размерностью Хаусдорфа  $H_d$  имеет степенной вид  $E(k) \sim k^{H_d-2}$  для больших  $k$ , и  $E(k) \sim k^2$  для малых  $k$ . Таким образом, можно сделать определенный вывод, что гауссовы линии размерности Хаусдорфа из интервала  $[1; 3]$  не могут создавать течение, обладающее колмогоровским спектром  $E \sim k^{-\frac{5}{3}}$ . Причина этого, по-видимому, заключается в том, что в реальном турбулентном потоке вихревые структуры (петли) сильно поляризованы вследствие взаимодействия, в то время как мы вычисляли спектр для одиночных свободных петель.

## 8.6. Энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцируемого вихревыми нитями. Реконnectирующие вихревые нити

### 8.6.1. Роль сингулярных решений в формировании спектров турбулентности

В настоящем подразделе мы вычисляем энергетический спектр и энергию трехмерного поля скорости, индуцируемого реконnectирующими вихревыми нитями. Мотивация этой дея-

тельности связана с важной и интенсивно обсуждаемой сейчас темой, касающейся роли гидродинамического коллапса (или спонтанно развивающихся сингулярных решений) в формировании спектров турбулентности (см., например, [298, 299, 300] и ссылки в них). Приведем наиболее яркие примеры такого типа спектров. Один из них — это спектр Филлипса для ветровых волн на поверхности океана, созданных клинообразными волнами — так называемыми каспами. Другой пример — это спектр Кадомцева — Петвиашвили для акустической турбулентности, создаваемой ударными волнами [298, 299]. Как волны Филлипса, так и ударные волны-разрывы являются сингулярными структурами. Появление таких особенностей — когерентный процесс, соответственно, сингулярные объекты являются когерентными структурами. Таким образом, мы приходим к очень важной проблеме сосуществования турбулентности (хаотической части) и когерентных структур (см., например, [299]).

В классической гидродинамике известен сценарий коллапса, основанный на так называемом разрушении вихря. Сутью этого сценария является формирование особенности завихренности поля  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  в трехмерных уравнениях Эйлера для несжимаемой жидкости. Это явление было проанализировано в ряде работ Кузнецова с соавторами (см., например, [298, 301] и ссылки в них) в рамках интегрируемой несжимаемой гидродинамической модели с гамильтонианом  $\int |\omega| d\mathbf{r}$ . Схематично процесс может быть представлен следующим образом. В некоторой точке  $\mathbf{a}_0$  (точка касания) возможно образование сингулярности поля завихренности. Изучая уравнения Эйлера в терминах завихренности  $\omega$ , Кузнецов пришел к выводу, что в непосредственной близости от точки касания  $\mathbf{a}_0$  максимальное значение завихренности  $\omega_{\max}$  развивается взрывным образом, достигая бесконечных значений за конечный интервал времени. Пространственная зависимость поля завихренности в поперечном направлении  $\rho_{\perp}$  к вихревой пучку имеет вид  $\omega \propto 1/\rho_{\perp}^{2/3}$ , что эквивалентно колмогоровскому спектру.

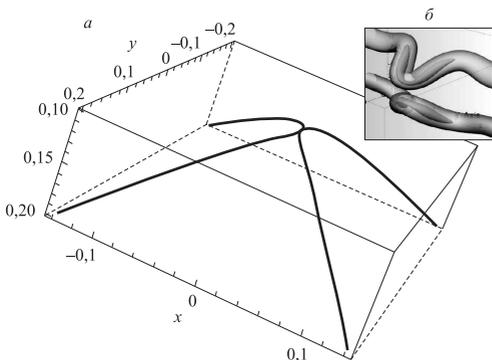
В квантовых жидкостях завихренность в значительной степени локализована, т. е. сосредоточена в очень тонких вихревых трубках или вихревых нитях, поэтому описанный выше сценарий не может быть реализован. В этом случае, однако, особенность может возникать из-за столкновения взаимодействующих вихревых нитей. Результатом такого столкновения является возникновение очень острого излома (кинка), причем энергия взаимодействия между близко расположенными элементами может существенно превышать собственную энергию этих элементов.

В этой главе мы представим метод расчета энергетического спектра с помощью формулы (2.67) и (2.69). Этот метод позволяет записать энергию потока в терминах объединения различных петель  $\{\mathbf{s}(\xi)\} = \bigcup \mathbf{s}_i(\xi)$  где  $\mathbf{s}_i(\xi)$  —  $i$ -вихревая нить. Поэтому, выбирая аналитическое соотношение для формы реконnectирующих, вихревых линий, можно выполнить аналитическое вычисление энергетических спектров  $E(k)$ . Для анизотропных ситуаций формула (2.69) понимается как угловое среднее.

### 8.6.2. Форма кривых реконnectирующих вихревых линий

Несмотря на огромное количество работ, посвященных динамике коллапсирующих линий как в классических, так и квантовых жидкостях (см., например, статьи [72, 302, 78] и ссылки в них), точное решение уравнения для формы кривых  $\mathbf{s}(\xi)$  еще не получено. Основные результаты получены с помощью различных подходов, объединяющих аналитические и численные методы. К ним можно отнести метод вихревых нитей, а также трехмерные исследования уравнения Навье — Стокса или нелинейного уравнения Шредингера для вихрей в конденсате Бозе — Эйнштейна.

Сценарий выполнения реколлекции вихревыми нитями описан в разделе 2.2. Было показано, что за конечное время вихревые линии коллапсируют. Форма вихревых нитей перед реконnectией асимптотически описывается двумя гиперболическими кривыми, лежащими на противоположных сторонах пи-



*Рис. 8.4.* Касающиеся квазигиперболы, описывающие коллапсирующие линии, (см. формулу (8.43)) полученные в [302]. На вставке в качестве иллюстрации показаны кинки на коллапсирующих антипараллельных вихревых трубках, полученные в численном моделировании [303]

рамиды (см., например, [71, 76]). Немного другой сценарий без пирамидальной структуры наблюдался в работе [304]. В недавнем исследовании Воуе [302] показано, что кривые не являются точными гиперболами, а представляют собой так называемые квазигиперболы, имеющие вид

$$h(\xi) = \sqrt{a^2 \xi^2 / (a^2 + \xi^2) + a^2 + \xi^2}.$$

Эти кривые не лежат в плоскости сторон пирамиды, а находятся на искривленных поверхностях, согнутых внутрь. В момент непосредственно перед коллапсом, когда вихревые ядра почти соприкасаются друг с другом, появляется очень острый излом. Эти кривые могут быть записаны в параметрической форме (ср. с формулой (16) в работе [302]):

$$\mathbf{s}_{1,2}(\xi) = [\pm (h(\xi) - c), \pm \xi, (h(h(\xi) - b))]. \quad (8.43)$$

Описанная конфигурация показана на рис. 8.4. Знаки выбраны таким образом, что  $\mathbf{s}'_1(0) \cdot \mathbf{s}'_2(0) = -1$ , т. е. вихри антипараллельны. Величина  $a$  является мерой порядка размера кинков, как показано на вставке на рис. 8.4, она может

быть ассоциирована с характерным межвихревым расстоянием  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$ . Величина  $b$  ответственна за искривление поверхностей, на которых лежат квазигиперболы. Величина  $c$  отвечает за близость нитей. Величины  $b$  и  $c$  меньше, чем межвихревое расстояние  $\delta$ . Описанная картина согласуется с результатами многочисленных работ, исследующих процессы реконнекции вихревых линий (см., например, [300, 303] и ссылки в них), типичное изображение, полученное в [303], показано на вставке рис. 8.4.

### 8.6.3. Аналитическое вычисление спектра

Из-за быстро осциллирующей функции прямое численное вычисление интеграла (2.69) затруднено. Кроме того, численные результаты оставляют невыясненными основные закономерности, дающие вклад в энергетический спектр. Поэтому мы намерены выполнить аналитическое исследование, по крайней мере, насколько это возможно. Интеграл (2.69) может быть приближенно оценен при больших волновых векторах  $k$  с использованием метода асимптотического разложения (см., в частности, книгу [305]). Когда  $k$  велико, функция  $\sin(k|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|)$  быстро осциллирует. Поэтому основной вклад в интеграл происходит от точек минимального значения фазовой функции  $D(\xi_1, \xi_2) = |\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|$ , которая описывает расстояния между различными точками обеих кривых. Этот вывод усиливается тем фактом, что расстояние  $|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)|$  входит в знаменатель в подынтегральном выражении (2.69). Таким образом, поведение фазовой функции  $D(\xi_1, \xi_2)$  для вихревой конфигурации, описываемой уравнением (8.43) вблизи минимума, имеет решающее значение для величины интеграла и его зависимости от  $k$ .

Исследуем функцию  $D(\xi_1, \xi_2)$  непосредственно перед коллапсом, когда  $c \approx a$ . Удобно ввести переменные  $\rho = \xi_1 - \xi_2$  и  $R = (\xi_1 + \xi_2)/2$  и представить двойной интеграл  $\int_C \int_C d\xi_1 d\xi_2$  в виде кратного интеграла  $\int dR \int d\rho$  в области, ограниченной линиями  $\rho = 2R$  и  $\rho = -2R$ . Верхний предел для  $R$  не является существенным, так как основной вклад в интеграл окрестности

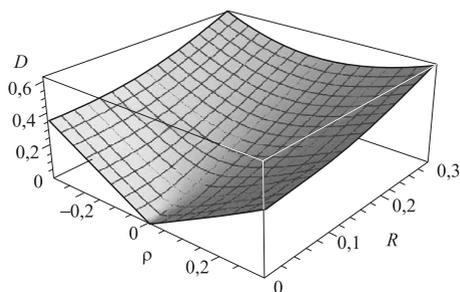


Рис. 8.5. Величина  $D(\rho, R)$  — фазовая функция в координатах  $\rho, R$

точки  $R = 0$ . Рассмотрим поведение функции  $D(\rho, R)$ , изображенное на рис. 8.5.

В начале координат  $\rho = 0, R = 0$  функция  $D(\rho, R) = 0$ . Важной особенностью функции  $D(\rho, R)$  является ее поведение вблизи точек  $\rho = 0$  (для разных  $R$ ), которые являются медианной частью домена и возникают от эквидистантных ( $\xi_1 = \xi_2$ ) точек, касающихся вихревых нитей. При фиксированной переменной  $R$  (перпендикулярно к медиане) функция  $D(\rho, R)$  аппроксимируется сначала отрезком параболы  $\propto \rho^2$ , а затем переходит в линейную функцию  $\propto |\rho|$  для  $\rho \gtrsim a$  с одним и тем же наклоном для всех  $R$ . Таким образом, все точки медианы являются точками локального минимума, и производная  $\partial D / \partial \rho|_{\rho=0} = 0$  для всех  $R$ .

Другая важная особенность фазовой функции  $D(\rho, R)$  — ее зависимость от переменной  $R$  вдоль медианы  $\rho = 0$ . Функция  $D(0, R)$  ведет себя сначала как  $\propto R^2$ , затем (при  $R \sim a$  (область кроссовера)) переходит в линейную функцию  $\propto R^1$ . Таким образом, мы имеем сложный случай, когда точка  $(R = 0, \rho = 0)$  является одновременно и угловой граничной точкой области, ограниченной кривыми  $\rho = 2R$  и  $\rho = -2R$ , и стационарной точкой (точкой минимума), в которой  $\nabla D(\rho, R) = 0$ .

Для того чтобы двигаться дальше, перейдем к полярным координатам  $R, \theta$ . Проинтегрировав по угловой переменной  $\theta$ , получаем асимптотическое разложение спектра по степеням

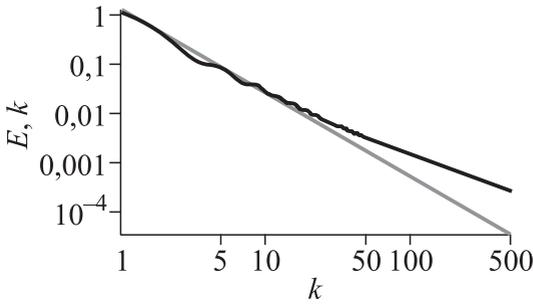


Рис. 8.6. Спектр  $E(k)$ , полученный на основе описанной процедуры и формулы (8.44). Прямая линия имеет наклон  $-5/3$

$1/k$ . Ведущий член имеет вид

$$E(k) = \rho_s \kappa^2 \int_0^{\infty} dR \sqrt{\frac{\pi}{k \partial^2 D / \partial \rho^2 |_{\rho=0}}} \frac{\sin(kD(\rho, R))}{kD(\rho, R)} \Big|_{\rho=0}. \quad (8.44)$$

Мы приняли здесь, что интегрирование по  $\theta$  идентично интегрированию по  $d\rho$ , именно  $d\rho = R d\theta$ , и медианная кривая  $\rho = 0$  является линией, где функция  $D(\rho, R = \text{const})$  имеет локальный минимум  $\partial D / \partial \rho |_{\rho=0} = 0$ . Поэтому интегрирование по  $\theta$  может быть осуществлено с использованием метода стационарной фазы, что дает (8.44). При вычислении интеграла в окрестности стационарной точки мы пренебрегли медленно меняющейся функцией  $\mathbf{s}'(\xi_1) \cdot \mathbf{s}'(\xi_2)$ , положив ее равной  $-1$  (напомним, что линии антипараллельны). Таким образом, мы свели всю проблему к оценке одномерного интеграла (8.44).

На рис. 8.6 мы представляем спектр  $E(k)$ , рассчитанный на основе формулы (8.44). Мы рассчитали энергию взаимодействия между приближающимися частями различных линий. Были выбраны следующие параметры:  $a = 0,1, b = 0,09, c = 0,1$  (случай  $a \approx c$  соответствует почти соприкасающимся кривым). Интегрирование по  $\xi_1, \xi_2$  была выполнено от нуля до 1. Верхний предел 1 соответствует размеру кинка, что по порядку величины соответствует межвихревому пространству  $\delta$  (см. вставку на рис. 8.4). Очень важным фактом является то,

что в интервале волновых чисел от  $1 \div 50$  наклон  $E(k)$  близок к  $-5/3$ . Заметим, что волновые числа  $k$  соответствуют кроссоверу  $k \sim 2\pi/a \sim 50$ .

Чтобы понять появление зависимости  $k^{-5/3}$ , мы обращаемся к так называемой лемме Эрдели [306], в которой говорится, что интеграл  $\int_0 x^{\beta-1} f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx$  с достаточно гладкой функцией  $f(x)$  имеет разложение в асимптотический ряд как  $\sum_m a_m \lambda^{-\frac{m+\beta}{\alpha}}$  с главным членом  $\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ . В частности, это означает, что если бы мы выбрали для коллапсирующих нитей не квадратичные квазигиперболы (8.43), а степенные функции порядка  $3/2$ , то  $s_{1,2}(\xi) = (\xi, \pm \xi^{3/2}, 0)$  и реализовали бы процедуру, описанную выше, то получили бы спектр  $E(k) \propto k^{-5/3}$  во всем диапазоне волновых чисел. Возвращаясь к решению (8.43) и рис. (8.5), мы видим, что  $D(0, R)$  не является “чистой” параболой степени  $3/2$ , а представляет собой более сложную функцию, которая ведет себя вначале как  $\propto R^2$ , а затем переходит в  $\propto R^1$  в области кроссовера  $\sim a$ , покрывая от 1 до 1,5 декад вблизи  $a$ . Поэтому в области кроссовера, где величина  $D(0, R)$  изменяется по закону, близкому к  $R^{3/2}$ , следует ожидать, что  $E(k)$  близка к зависимости  $\propto k^{-5/3}$  для волновых чисел  $k$  порядка  $2\pi/a$ , что на самом деле и происходит. Область кроссовера соответствует масштабу, где ветви гиперболы имеют тенденцию становиться прямыми линиями. Как обсуждалось, этот масштаб порядка размера кинка на кривых и, соответственно, порядка межвихревого расстояния  $\delta = \mathcal{L}^{-1/2}$  (см. вставку на рис. 8.4).

Резюмируя, можно утверждать, что вихревые кинки, образуемые ближайшими элементами вихревых нитей перед реконнекцией, могут создавать поле скорости со спектральными характеристиками, близкими к спектральным характеристикам классической изотропной турбулентности.

Возвращаясь к целям, сформулированным во введении к этой главе, мы можем предположить, что спектр  $E(k)$  близок к колмогоровской зависимости  $\propto k^{-5/3}$ , которая ранее наблюдалась при численном моделировании динамики квантованных вихревых нитей [289, 292]. Интервал значений волновых чисел,

где выполняется закон  $E(k) \approx k^{-5/3}$ , регулируется размером кинка  $\sim a$  и, соответственно, межвихревым расстоянием  $\delta$ . В реальности этот спектр охватывает максимум  $1 \div 1,5$  декады вблизи значения  $k \approx 2\pi/\delta$ . Следует подчеркнуть, что в ключевых численных работах [289, 292] диапазоны для волнового числа также порядка одной декады около значения  $k \approx 2\pi/\delta$ . К сожалению, из-за отсутствия точного аналитического решения для конфигурации  $\{\mathbf{s}(\xi)\}$  реконnectирующих вихревых нитей величина  $E(k)$  является приблизительной и зависит от асимптотического решения (8.43). С другой стороны (как видно из предложенного аналитического рассмотрения), спектр зависит от нескольких особенностей коллапсирующих линий, таких как порядок касания и величина кроссовера для функции  $D(\rho, R = \text{const})$  от квадратичной параболы к прямой линии. Точная форма кинка, однако, может повлиять в основном в области больших волновых чисел. Что касается малых чисел волны  $k$  (много меньше, чем  $2\pi/\delta$ ), спектр  $E(k)$  должен быть вычислен путем интегрирования базовой формулы (2.69) по всей конфигурации вихревых нитей ( $|\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2)| \gg \delta$ ). Это требует знания всей структуры клубка, что пока является неразрешимой сверхзадачей.

## Список литературы

1. *Tilley D. R., Tilley J.* Superfluidity and superconductivity. CRC Press, 1990.
2. *Donnelly R.* Quantized Vortices in Helium II. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991.
3. *Паттерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости / пер. с англ. М.: Мир, 1978.
4. *Sonin E. B.* Dynamics of quantised vortices in superfluids. Cambridge University Press, 2016.
5. *Немировский С. К.* Гидродинамика квантовых жидкостей. Волны, вихри, турбулентность. Ч. 1: Безвихревое движение, нелинейная акустика / под ред. П.А. Куйбина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.
6. *Gorter C. J., Mellink J. H.* On the irreversible processes in liquid helium II // *Physica*. 1949. V. 15, N 3-4. P. 285–304.
7. *Tough J.* Progress in Low Temperature Physics. Amsterdam: North-Holland, 1982. V. 8 / ed. by D.F. Brewer.
8. *Osborne D. V.* The rotation of liquid helium ii // Proceedings of the Physical Society. Section A. 1950. V. 63, N 8. P. 909.
9. *Andronikashvili E., Mamaladze Y.* Quantization of macroscopic motions and hydrodynamics of rotating helium II // *Review of Modern Physics*. 1966. V. 38. P. 567.
10. *Landau L. D.* // *J. Phys.* 1941. V. 5. P. 71.
11. *Ландау Л. Д.* Собрание трудов. М.: Наука, 1969.
12. *Onsager L.* Statistical hydrodynamics // *Il Nuovo Cimento* (1943–1954). 1949. V. 6. P. 279–287.
13. *Feynman R. P.* Progress in Low Temperature Physics. Amsterdam: North-Holland, 1955. V. 1 / ed. by C. J. Gorter. P. 17.

14. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.
15. *Landau L. D., Lifshitz E.* Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1958. V. 3: Quantum Mechanics.
16. *Zurek W. H.* Cosmological experiments in condensed matter systems // Phys. Reports. 1996. V. 276, N 4. P. 177–221.
17. *Pitaevskii L. P.* Phenomenological theory of superfluidity near the lambda point // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1958. V. 35. P. 1271.
18. *Gross E. P.* Hydrodynamics of a superfluid condensate // J. of Mathem. Phys.. 1963. V. 4, N 2. P. 195–207.
19. *Pitaevskii L. P., Stringari S.* Bose-einstein condensation. N 116. Oxford University Press, 2003.
20. *Koplik J., Levine H.* Vortex reconnection in superfluid helium // Phys. Rev. Lett. 1993. Aug. V. 71, N 9. P. 1375–1378.
21. *Vinen W.* The detection of single quanta of circulation in liquid helium ii // Proceedings of the Royal Society of London. A: Mathem., Phys. and Engineering Sciences / The Royal Society. 1961. V. 260. P. 218–236.
22. *Milne-Thomson L.* Theoretical Hydrodynamics. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1968.
23. *Whitmore S. C., Zimmermann W.* Observation of quantized circulation in superfluid helium // Phys. Rev. 1968. Feb. V. 166. P. 181–196.
24. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1947.
25. *Alekseenko S. V., Kuibin P. A., Okulov V. L.* Theory of Concentrated Vortices. Springer, 2007.

26. *Rayfield G. W., Reif F.* Quantized vortex rings in superfluid helium // *Phys. Rev.* 1964. Nov. V. 136. P. A1194–A1208.
27. *Landau L., Lifshitz E., Pitaevskij L.* Statistical Physics: Part 2: Theory of Condensed State. Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics. Oxford, 1980.
28. *Landau L., Lifshitz E.* V. 5. Statistical physics part 1. Third edition. Oxford: Pergamon Press, 1980. 562 p.
29. *Packard R. E., Sanders Jr. T.* Detection of single quantized vortex lines in rotating He II // *Phys. Rev. Lett.* 1969. V. 22, N 16. P. 823.
30. *Tkachenko V. K.* On Vortex Lattices // *Soviet J. of Exp. and Theor. Phys.* 1966. Jun. V. 22. P. 1282.
31. *Yarmchuk E. J., Gordon M. J. V., Packard R. E.* Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium // *Phys. Rev. Lett.* 1979. Jul. V. 43. P. 214–217.
32. *Bewley G., Lathrop D., Sreenivasan K.* Superfluid helium — visualization of quantized vortices // *Nature.* 2006. V. 441. P. 558.
33. Emergence of turbulence in an oscillating bose-einstein condensate / E. A. L. Henn, J. A. Seman, G. Roati et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Jul. V. 103. P. 045301.
34. Electric properties of metallic nanowires obtained in quantum vortices of superfluid helium / E. B. Gordon, A. V. Karabulin, V. I. Matyushenko et al. // *Low Temp. Phys.* 2010. V. 36. P. 590–595.
35. Production of ultrathin nanowires from refractory metals (nb, re, w, mo) by laser ablation in superfluid helium / E. B. Gordon, A. V. Karabulin, V. I. Matyushenko et al. // *Laser Phys. Lett.* 2015. V. 12, N 9. P. 096002.

36. *Berloff N. G., Svistunov B. V.* Scenario of strongly nonequibrated bose-einstein condensation // *Phys. Rev. A.* 2002. Jul. V. 66, N 1. P. 013603.
37. *Frisch T., Pomeau Y., Rica S.* Transition to dissipation in a model of superflow // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 69, N 11. P. 1644–1647.
38. *Glaberson W. I., Strayer D. M., Donnelly R. J.* Model for the core of a quantized vortex line in helium II // *Phys. Rev. Lett.* 1968. Dec. V. 21. P. 1740–1744.
39. *Hills R. N., Roberts P. H.* Healing and relaxation in flows of helium II–I : Generalization of landau’s equations // *Intern. J. of Engineering Sci.* 1977. V. 15, N 5. P. 305–316.
40. *Hills R. N., Roberts P. H.* // *J. Phys. C.* 1978. V. 11. P. 1485.
41. *Hills R. N., Roberts P. H.* Healing and relaxation in flows of helium II. part II. First, second, and fourth sound // *J. of Low Temp. Phys.* 1978. V. 30. P. 709–727.
42. *Гинзбург В. Л., Собянин А.* Сверхтекучесть гелия II вблизи  $\lambda$ -точки // *Успехи физических наук.* 1976. Т. 120, № 10. С. 153–216.
43. *Saffman P.* *Vortex Dynamics.* Cambridge University Press, 1992.
44. *Sethian J. A.* *Vortex Methods and Vortex Motion* / ed. by K. E. Gustafson, J. A. Sethian. SIAM, Philadelphia, PA, 1991. P. 59.
45. *Kivotides D., Leonard A.* Computational model of vortex reconnection // *EPL (Europhys. Lett.).* 2003. V. 63, N 3. P. 354.
46. *Kivotides D., Leonard A.* Geometrical physics of the many vortex filament problem // *EPL (Europhys. Lett.).* 2004. V. 66, N 1. P. 69.

47. *Kivotides D., Wilkin S.* Elementary vortex processes in B thermal superfluid turbulence // J. of Low Temp. Phys. 2009. V. 156. P. 163–181.
48. *Agishtein M. E., Migdal A. A.* Computer simulation of three-dimensional vortex dynamics // Mod. Phys. Lett. A. 1986. V. 1. P. 221.
49. *Migdal A.* Vihrevoe uravnenie fokkera-plancka // Voprosi Kibernetiki. 1986. P. 122.
50. *Hama F. R.* Progressive deformation of a perturbed line vortex filament // Phys. Fluids. 1963. V. 6, N 4. P. 526–534.
51. *Ricca R. L.* The contributions of da rios and levi-civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics // Fluid Dynamics Research. 1996. V. 18, N 5. P. 245–268.
52. *Rios L. D.* On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1906. V. 22. P. 117–135.
53. *Schwarz K. W.* Three-dimensional vortex dynamics in superfluid *he4*: Line-line and line-boundary interactions // Phys. Rev. B. 1985. May. V. 31, N 9. P. 5782–5804.
54. *Swanson C., Donnelly R.* Vortex dynamics and scaling in turbulent counterflowing helium II // J. Low Temp. Phys. 1985. V. 61. P. 363.
55. *Barenghi C., Donnelly R., Vinen W.* Friction on quantized vortices in helium II a review // J. of Low Temp. Phys. 1983. V. 52. P. 189–247.
56. *Sonin E. B.* Low-frequency oscillations of vortices in rotating he II // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1983. V. 37. P. 82.
57. Calculation of frequency- and velocity-dependent mutual friction parameters in helium II / C. E. Swanson,

- W. T. Wagner, R. J. Donnelly, C. F. Barenghi // J. Low Temp. Phys. 1987. V. 66. P. 263.
58. *Mehl J. B.* New effects in the interaction of second sound with superfluid vortex lines // Phys. Rev. A. 1974. Aug. V. 10, N 2. P. 601–609.
59. *Hall H. E., Vinen W. F.* The rotation of liquid helium II. II. The theory of mutual friction in uniformly rotating helium II // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 238. P. 215.
60. *Hall H. E., Vinen W. F.* // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 238. P. 204.
61. *Schwarz K. W.* Three-dimensional vortex dynamics in superfluid he 4: Homogeneous superfluid turbulence // Phys. Rev. B. 1988. Aug. V. 38, N 4. P. 2398–2417.
62. *Zaremba E., Nikuni T., Griffin A.* Dynamics of trapped bose gases at finite temperatures // J. of Low Temp. Phys. 1999. V. 116. P. 277–345.
63. *Proukakis N. P., Jackson B.* Finite temperature models of bose-einstein condensation // J. Phys. B. 2008. V. 41. P. 203002.
64. Finite-temperature vortex dynamics in bose-einstein condensates / B. Jackson, N. P. Proukakis, C. F. Barenghi, E. Zaremba // Phys. Rev. A. 2009. May. V. 79. P. 053615.
65. *Pismen L. M.* Vortices in Nonlinear Fields. Clarendon, Oxford, 1999.
66. *Fetter A. L.* Quantum theory of superfluid vortices. i. liquid helium II // Phys. Rev. 1967. Oct. V. 162. P. 143–153.
67. *Nemirovskii S. K.* Thermodynamic equilibrium in the system of chaotic quantized vortices in a weakly imperfect bose gas // Theor. and Mathem. Phys. 2004. V. 141. P. 1452–1460.

68. An intrinsic velocity-independent criterion for superfluid turbulence / T. Finne, Araki, R. Blaauwgeers et al. // Nature. 2003. V. 424. P. 1022.
69. *Barenghi C. F.* Quantum Fluids and Vortices. School of Mathematics and Statistics Newcastle University, 2009.
70. *Tsubota M., Maekawa S.* Reconnection of quantized vortices in superfluid  $4\text{He}$  // J. Phys. Soc. Jpn. 1992. V. 61. P. 2007.
71. *De Waele A. T. A. M., Aarts R. G. K. M.* Route to vortex reconnection // Phys. Rev. Lett. 1994. Jan. V. 72, N 4. P. 482–485.
72. *Siggia E. D.* Collapse and amplification of a vortex filament // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 794.
73. *Pumir A., Siggia E. D.* Vortex dynamics and the existence of solutions to the navier–stokes equations // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1606.
74. Characterization of reconnecting vortices in superfluid helium / G.P. Bewley, M.S. Paoletti, K.R. Sreenivasan, D.P. Lathrop // PNAS. 2008. V. 105. P. 13707.
75. *Paoletti M., Fisher M. E., Lathrop D.* Reconnection dynamics for quantized vortices // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2010. V. 239, N 14. P. 1367–1377.
76. *Tebbs R., Youd A., Barenghi C.* The approach to vortex reconnection // J. of Low Temp. Phys. 2011. V. 162. P. 314–321.
77. Quantum vortex reconnections / S. Zuccher, M. Caldari, A. W. Baggaley, C. F. Barenghi // ArXiv e-prints. 2012. Jun. P. 1206, 2498.
78. *Andryushchenko V. A., Kondaurova L. P., Nemirovskii S. K.* Dynamics of quantized vortices before reconnection // J. of Low Temp. Phys. 2016. V. 185, N 5. P. 377–383.

79. *Melander M. V., Hussain F.* Cross-linking of two antiparallel vortex tubes // *Phys. Fluids*. 1989. V. A 1. P. 633.
80. *Kida S., Takaoka M., Hussain F.* Collision of two vortex rings // *J. of Fluid Mechanics*. 1991. V. 230. P. 583–646.
81. *Kida S., Takaoka M.* Vortex reconnection // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1994. V. 26, N 1. P. 169–177.
82. *Boratav O., Pelz R., Zabusky N.* Reconnection in orthogonally interacting vortex tubes: Direct numerical simulations and quantifications // *Phys. Fluids A*. 1992. V. 4. P. 581.
83. *Sciver S. W. V., Barenghi C. F.* Chapter 5 visualisation of quantum turbulence // *Progress in Low Temp. Phys.: Quantum Turbulence* / ed. by M. Tsubota, W.P. Halperin. Elsevier, 2009. V. 16: Of Progress in Low Temp. Phys. P. 247–303.
84. *Nakajima K., Sawada Y., Onodera Y.* Stability condition and dynamic behavior for one- and two-dimensional solitary waves—stability and interaction of two vortex lines in superfluid helium // *Phys. Rev. B*. 1978. Jan. V. 17, N 1. P. 170–178.
85. Sound emission due to superfluid vortex reconnections / M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Feb. V. 86, N 8. P. 1410–1413.
86. *Ogawa S., Tsubota M., Hattori Y.* Study of reconnection and acoustic emission of quantized vortices in superfluid by the numerical analysis of the gross–pitaevskii equation // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2002. V. 71. P. 813–821.
87. *Nazarenko S., West R.* Analytical solution for nonlinear schredinger vortex reconnection // *J. of Low Temp. Phys.* 2003. V. 132. P. 1–10.

88. *Buttke T. F.* A numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation // J. of Comput. Phys. 1988. V. 76, N 2. P. 301–326.
89. *Nemirovskii S. K.* Quantum turbulence: Theoretical and numerical problems // Phys. Reports. 2013. V. 524, N 3. P. 85–202.
90. *Vinen W.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. III. theory of the mutual friction // Proc. R. Soc. Lond. A. 1957. V. 242. P. 493–515.
91. *Vinen W. F.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. I. Experiments on steady heat currents // Proc. R. Soc. London A. 1957. V. 240. P. 114.
92. *Vinen W. F.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. II. Experiments on transient effects // Proc. R. Soc. Lond. A. 1957. V. 240. P. 128.
93. *Wang R. T., Swanson C. E., Donnelly R. J.* Anisotropy and drift of a vortex tangle in helium II // Phys. Rev. B. 1987. Oct. V. 36, N 10. P. 5240–5244.
94. *Yamada K., Kashiwamura S., Miyake K.* Stochastic theory of vortex tangle in superfluid turbulence // Physica B: Condensed Matter. 1989. V. 154, N 3. P. 318–326.
95. *Hall H.* The rotation of liquid helium II // Advances in Phys. 1960. V. 9, N 33. P. 89–146.
96. *Nemirovskii S. K., Fiszdon W.* Chaotic quantized vortices and hydrodynamic processes in superfluid helium // Rev. Mod. Phys. 1995. Jan. V. 67, N 1. P. 37–84.
97. *Tsubota M., Araki T., Nemirovskii S. K.* Dynamics of vortex tangle without mutual friction in superfluid  $4\text{He}$  // Phys. Rev. B. 2000. Nov. V. 62, N 17. P. 11751–11762.

98. Structure of a quantum vortex tangle in  $^4\text{He}$  counterflow turbulence / L. Kondaurova, V. L'vov, A. Pomyalov, I. Procaccia // Phys. Rev. B. 2014. Jan. V. 89. P. 014502.
99. Geometry and topology of superfluid turbulence / D. R. Poole, H. Scofield, C. F. Barenghi, D. C. Samuels // J. of Low Temp. Phys. 2003. V. 132. P. 97–117.
100. *Barenghi C. F., Ricca R. L., Samuels D. C.* How tangled is a tangle? // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2001. V. 157, N 3. P. 197–206.
101. *Kleinert H.* Gauge Fields in Condensed Matter Physics. Singapore: World Scientific, 1991.
102. *Nemirovskii S. K.* Gaussian model of vortex tangle in He II // Phys. Rev. B. 1998. Mar. V. 57, N 10. P. 5972–5986.
103. *Nemirovskii S. K., Tsubota M., Araki T.* Energy spectrum of the random velocity field induced by a gaussian vortex tangle in He II // J. of Low Temp. Phys. 2002. V. 126. P. 1535–1540.
104. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 9, N 1–2. P. 189–208.
105. *Doi M., Edwards S.* The Theory of Polymer Dynamics. Oxford: Clarendon Press, 1986.
106. *Kivotides D., Barenghi C. F., Samuels D. C.* Fractal dimension of superfluid turbulence // Phys. Rev. Lett. 2001. Sep. V. 87, N 15. P. 155301.
107. *Baggaley A. W., Barenghi C. F.* Spectrum of turbulent kelvin-waves cascade in superfluid helium // Phys. Rev. B. 2011. Apr. V. 83, N 13. P. 134509.
108. *Batchelor G.* An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1967.

109. *Nemirovskii S. K.* Superfluid mass current induced by chaotic vortex lines in turbulent He II // *Phys. Rev. B.* 1998. Mar. V. 57, N 10. P. 5987–5994.
110. *Nemirovskii S. K., Tsubota M.* On the lamb impulse dynamics in superfluid turbulent He II // *J. of Low Temp. Phys.* 1998. V. 113. P. 591–596.
111. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. Современные физико-технические проблемы. М.: Наука, 1976. 280 с.
112. *Kondaurova L., Nemirovskii S. K.* Full biot-savart numerical simulation of vortices in He II // *J. of Low Temp. Phys.* 2005. V. 138. P. 555–560.
113. *Nemirovskii S., Lebedev V.* The hydrodynamic of superfluid turbulence // *Sov. Phys. JETP.* 1983. V. 57. P. 1009.
114. *Rasetti M., Regge T.* Vortices in He II, current algebras and quantum knots // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 1975. V. 80, N 3. P. 217–233.
115. *Schwarz K. W.* Turbulence in superfluid helium: Steady homogeneous counterflow // *Phys. Rev. B.* 1978. Jul. V. 18, N 1. P. 245–262.
116. *Schwarz K. W., Rozen J. R.* Transient behavior of superfluid turbulence in a large channel // *Phys. Rev. B.* 1991. Oct. V. 44, N 14. P. 7563–7577.
117. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon Press, 2002.
118. *Frisch U.* Turbulence. Cambridge University Press, 1995.
119. *Monin A., Yaglom A.* Statistical Fluid Dynamics. Cambridge, MA, 1975. V. II

120. *Vinen W.* Quantum turbulence: Achievements and challenges // J. of Low Temp. Phys. 2010. V. 161. P. 419–444.
121. *Skrbek L., Sreenivasan K. R.* Developed quantum turbulence and its decay // Phys. Fluids. 2012. V. 24, N 1. P. 011301.
122. *Copeland E. J., Kibble T. W. B., Steer D. A.* Evolution of a network of cosmic string loops // Phys. Rev. D. 1998. Jul. V. 58, N 4. P. 043508.
123. *Magueijo J., Sandvik H., Steer D. A.* Statistical physics of cosmological networks of string loops // Phys. Rev. D. 1999. Oct. V. 60, N 10. P. 103514.
124. *Kleinert H.* Gauge Fields in Condensed Matter Physics. Singapore: World Scientific, 1990.
125. *Nabarro F.* Theory of Crystal Dislocations. Oxford: Clarendon Press, 1967.
126. *Cosmology in the laboratory: Defect dynamics in liquid crystals / Isaac Chuang, Ruth Durrer, Neil Turok, Bernard Yurke // Sci.* 1991. V. 251, N 4999. P. 1336–1342.
127. *Fractality of light’s darkness / K. O’Holleran, M. R. Dennis, F. Flossmann, M. J. Padgett // Phys. Rev. Lett.* 2008. Feb. V. 100, N 5. P. 053902.
128. *Davidson M.* The quark-gluon plasma and the stochastic interpretation of quantum mechanics // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2010. V. 42, N 3. P. 317–322.
129. *Melatos A., Peralta C.* Superfluid turbulence and pulsar glitch statistics // The Astrophysical J. Lett. 2007. V. 662, N 2. P. L99.

130. *Vincent A., Meneguzzi M.* The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. // J. of Fluid Mechanics. 1991. V. 225. P. 1–20.
131. *Wiegand F. W.* Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Sciences. Singapore: World Scientific, 1986.
132. *Bennett D. P., Bouchet F. m. c. R.* Cosmic-string evolution // Phys. Rev. Lett. 1989. Dec. V. 63. P. 2776–2779.
133. The plasticity of icosahedral quasicrystals / M. Feuerbacher, C. Metzmacher, M. Wollgarten et al. // Materials Sci. and Engineering: A. 1997. V. 233, N 1–2. P. 103–110.
134. *Hasimoto H.* A soliton on a vortex filament // J. of Fluid Mechanics. 1972. V. 51, N 03. P. 477–485.
135. *Shen M. M., Nicholson D. R.* Stochasticity in numerical solutions of the nonlinear schrodinger equation // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 3150.
136. *Lebowitz J. L., Rose H. A., Speer E. R.* Statistical mechanics of the nonlinear schrodinger equation // J. of Statistical Phys. 1988. V. 50. P. 657–687.
137. Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear schrodinger equation / S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, V. E. Zakharov // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1992. V. 57, N 1–2. P. 96–160.
138. *Nemirovskii S. K.* Kinetics of a network of vortex loops in He II and a theory of superfluid turbulence // Phys. Rev. B. 2008. Jun. V. 77, N 21. P. 214509.
139. *Barenghi C. F., Samuels D. C.* Scaling laws of vortex reconnections // J. of Low Temp. Phys. 2004. V. 136. P. 281–293.

140. *Nemirovskii S. K.* Evolution of a network of vortex loops in he-ii: Exact solution of the rate equation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Jan. V. 96, N 1. P. 015301.
141. *Embacher F.* Cosmic string evolution by exact methods (i). model for loop production in flat space // *Nucl. Phys. B.* 1992. V. 387, N 1. P. 129–162.
142. *Malygin G. A.* Dislocations as linear topological defects // *Phys. of the Solid State.* 2001. V. 43. P. 854.
143. *Schwarz K. W.* Phase slip and turbulence in superfluid  $^4\text{He}$ : A vortex mill that works // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Mar. V. 64, N 10. P. 1130–1133.
144. *Landau L., Lifshitz E.* *Fluid Mechanics.* 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1987. V. 6. P. 562 p.
145. Saturation of decaying counterflow turbulence in helium II / M. Sciacca, Yu. A. Sergeev, C. F. Barenghi, L. Skrbek // *Phys. Rev. B.* 2010. Oct. V. 82, N 13. P. 134531.
146. *Schakel A. M. J.* Entangled vortices: Onsager’s geometrical picture of superfluid phase transitions // *J. of Low Temp. Phys.* 2002. V. 129. P. 323–361.
147. *Chorin A. J.* A vortex model with superfluid and turbulent percolation // *J. of Statistical Phys.* 1992. V. 69. P. 67–78.
148. *Chorin A.* *Vorticity and turbulence.* Applied mathematical sciences. Springer – Verlag, 1994.
149. *Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* *Physical Kinetics.* Oxford: Pergamon Press, 1981.
150. Vortex ring formation in a superfluid // *Sov. Phys. JETP.* 1965. V. 21. P. 467–471.
151. *Antunes N. D., Bettencourt L. M., Hindmarsh M.* Thermodynamics of cosmic string densities in u (1) scalar field theory // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80, N 5. P. 908.

152. *Onsager L.* Statistical hydrodynamics // Nuovo Cimento suppl. 1949. V. 6. P. 249–250.
153. *Novikov E. A.* Dynamics and statistics of a system of vortices // Sov. Phys. JETP. 1975. May. V. 68. P. 1868–1882.
154. *Lundgren T., Pointin Y.* Statistical mechanics of two-dimensional vortices // J. of statistical physics. 1977. V. 17, N 5. P. 323–355.
155. *Mccomb W.* The Physics of Fluid Turbulence. Oxford, 1991.
156. The statistical mechanics of interacting strings / E. Copeland, D. Haws, S. Holbraad, R. Rivers // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1991. V. 179, N 3. P. 507–530.
157. *Edwards S. F., Warner M.* Dislocation theory of crystal melting and of glasses // Philos. Mag. A. 1979. V. 40. P. 257.
158. *Thomson W.* Vibrations of a columnar vortex // Philos. Mag. 1880. V. 10. P. 155.
159. *Lipniacki T.* Evolution of the line-length density and anisotropy of quantum tangle in 4He // Phys. Rev. B. 2001. Nov. V. 64. P. 214516.
160. *Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
161. *Kozik E., Svistunov B.* Kelvin-wave cascade and decay of superfluid turbulence // Phys. Rev. Lett. 2004. Jan. V. 92, N 3. P. 035301.
162. *Kozik E., Svistunov B.* Scale-separation scheme for simulating superfluid turbulence: Kelvin-wave cascade // Phys. Rev. Lett. 2005. Jan. V. 94, N 2. P. 025301.

163. *Kozik E., Svistunov B.* Theory of decay of superfluid turbulence in B low-temperature limit // J. of Low Temp. Phys. 2009. V. 156. P. 215–267.
164. *Kozik E., Svistunov B.* Geometric symmetries in superfluid vortex dynamics // Phys. Rev. B. 2010. Oct. V. 82, N 14. P. 140510.
165. *L'vov V., Nazarenko S., Rudenko O.* Gradual eddy-wave crossover in superfluid turbulence // J. Low Temp. Phys. 2008. V. 153. P. 140.
166. Interaction of kelvin waves and nonlocality of energy transfer in superfluids / J. Laurie, V. S. L'vov, S. Nazarenko, O. Rudenko // Phys. Rev. B. 2010. Mar. V. 81, N 10. P. 104526.
167. Exact solution for the energy spectrum of kelvin-wave turbulence in superfluids / Laurent Boué, Ratul Dasgupta, Jason Laurie et al. // Phys. Rev. B. 2011. Aug. V. 84. P. 064516.
168. *Lebedev V., L'vov V.* Symmetries and interaction coefficients of kelvin-waves // J. of Low Temp. Phys. 2010. V. 161. P. 548–554.
169. *Sonin E. B.* Vortex oscillations and hydrodynamics of rotating superfluids // Rev. Mod. Phys. 1987. Jan. V. 59, N 1. P. 87.
170. *Svistunov B. V.* Superfluid turbulence in the low-temperature limit // Phys. Rev. B. 1995. Aug. V. 52, N 5. P. 3647–3653.
171. *L'vov V., Nazarenko S.* Spectrum of kelvin-wave turbulence in superfluids // JETP Lett. 2010. V. 91. P. 428–434.
172. *Nemirovskii S. K., Pakleza J., Poppe W.* Notes et Documents LIMSI. Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Scis de l'Ingenieur) 1991. N 91-14.

173. *Nemirovskii S., Pakleza J., Poppe W.* // Rus. J. Eng. Thermophysics. 1993. V. 3. P. 369.
174. *Nemirovskii S., Baltsevich A. J.* Stochastic dynamics of a vortex loop. large-scale stirring force. Springer, 2001.
175. *Wyld H. W.* Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid // Annals of Phys. 1961. V. 14. P. 143–165.
176. *Zakharov V., L'vov V.* Statistical description of nonlinear wave fields // Radiophysics and Quantum Electronics. 1975. V. 18, N 10. P. 1084–1097.
177. *Львов В.* Лекции по волновой и гидродинамической турбулентности. Новосибирск: НГУ, 1978.
178. *Kraichnan R. H.* Relation of fourth-order to second-order moments in stationary isotropic turbulence // Phys. Rev. 1957. Sep. V. 107. P. 1485–1490.
179. *Kraichnan R. H.* Irreversible statistical mechanics of incompressible hydromagnetic turbulence // Phys. Rev. 1958. Mar. V. 109. P. 1407–1422.
180. *McComb W. D.* The Physics of Fluid Turbulence. Oxford, 1991.
181. *Ablowitz M. J., Ohta Y., Trubatch A. D.* On integrability and chaos in discrete systems // Chaos, Solitons & Fractals. 2000. V. 11, N 1–3. P. 159–169.
182. *Kuksin S. B., Piatnitski A. L.* Khasminskii–whitham averaging for randomly perturbed kdv equation // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. 2008. V. 89, N 4. P. 400–428.
183. *Sonin E. B.* Symmetry of kelvin-wave dynamics and the kelvin-wave cascade in the  $t = 0$  superfluid turbulence // Phys. Rev. B. 2012. Mar. V. 85. P. 104516.

184. *Kuznetsov E. A., L'vov V. S.* On the kolmogorov turbulent spectrum in the direct interaction model // *Phys. Lett. A.* 1977. V. 64, N 2. P. 157–158.
185. *Aksman M. J., Novikov E. A., Orszag S. A.* Vorton method in three-dimensional hydrodynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 54. P. 2410–2413.
186. *Chefranov S.* The dynamics of point vortex dipoles and spontaneous singularities in three-dimensional turbulent flows // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1987. V. 93. P. 151–158.
187. *Grigor'ev Yu. N., Levinskii V., Nartov V.* Variational models of ordered vorticity in turbulent flows in the approximation of the Euler and Navier-Stokes equations // *Mechanics of Nonuniform and Turbulent Flows* / ed. by V. V. Struminskii. 1989. P. 121–127.
188. *Kuzmin G. A.* Ideal incompressible hydrodynamics in terms of the vortex momentum density // *Phys. Lett.* 1983. V. 96A. P. 88.
189. *Buttke T. F., Chorin A. J.* Turbulence calculations in magnetization variables // *Applied Numerical Mathematics.* 1993. V. 12, N 1–3. P. 47–54.
190. *Williams G. A.* Vortex-loop phase transitions in liquid helium, cosmic strings, and high-*tc* superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Feb. V. 82, N 6. P. 1201–1204.
191. *Chu H.-C., Williams G.* Nonequilibrium vortex dynamics in superfluid phase transitions and superfluid turbulence // *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence* / ed. by C. Barenghi, R. Donnelly, W. Vinen. Berlin; Heidelberg: Springer, 2001. V. 571. P. 226–232.
192. *Williams G. A.* Geometry of fluctuating vortex loops at superfluid phase transitions // *Physica B: Condensed Matter.*

2003. V. 329–333, Part 1, N 0. P. 206–207. (Proc. of the 23rd Intern. Conference on Low Temperature Physics).
193. *Kosterlitz J. M., Thouless D.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // J. of Phys. C: Solid State Phys. 1973. V. 6, N 7. P. 1181.
194. *Popov V.* Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Phys. Reidel; Dordrecht, 1983.
195. *Vinen W. F.* Classical character of turbulence in a quantum liquid // Phys. Rev. B. 2000. Jan. V. 61, N 2. P. 1410–1420.
196. *Volovik G.* Classical and quantum regimes of superfluid turbulence // J. of Experimental and Theoretical Phys. Lett. 2003. V. 78, N 9. P. 533–537.
197. *Skrbek L.* A flow phase diagram for helium superfluids // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 2004. V. 80. P. 541.
198. *Jou D., Mongiòvi M. S.* Description and evolution of anisotropy in superfluid vortex tangles with counterflow and rotation // Phys. Rev. B. 2006. Aug. V. 74. P. 054509.
199. *Jou D., Sciacca M., Mongiòvi M. S.* Vortex dynamics in rotating counterflow and plane couette and poiseuille turbulence in superfluid helium // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 024524.
200. Vortex length, vortex energy and fractal dimension of superfluid turbulence at very low temperature / D. Jou, M. S. Mongiòvi, M. Sciacca, C. F. Barenghi // J. of Phys. A: Mathem. and Theoretical. 2010. V. 43, N 20. P. 205501.
201. *Bellomo N., Bianca C., Mongiòvi M.* On the modeling of nonlinear interactions in large complex systems // Applied Mathematics Lett. 2010. V. 23, N 11. P. 1372–1377.

202. *Nemirovskii S.* Reconnections of vortex loops in turbulent superfluid helium: Rates of the breakdown and fusion processes // J. of Low Temp. Phys. 2006. V. 142. P. 769–786.
203. *Kuzmin P. A.* // JETP. 2006. V. 84. P. 238.
204. *Rivers R. J.* Zurek-kibble causality bounds in time-dependent ginzburg-landau theory and quantum field theory // J. of Low Temp. Phys. 2001. V. 124. P. 41–83.
205. *Vinen W.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. III. theory of the mutual friction // Proc. R. Soc. Lond. V. Ser. A 242. 1957. P. 493.
206. *Vinen W. F.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. IV. Critical heat currents in wide channels // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1958. V. 243. P. no. 1234 400–413.
207. *Aarts R. G. K. M., de Waele A. T. A. M.* Numerical investigation of the flow properties of He II // Phys. Rev. B. 1994. Oct. V. 50, N 14. P. 10069–10079.
208. *Khalatnikov I. M.* An Introduction to the Theory of Superfluidity. Benjamin; New York; Amsterdam, 1965.
209. *Putterman S.* Superfluid Hydrodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1974.
210. *Ashton R. A., Northby J. A.* Vortex velocity in turbulent He II counterflow // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35, N 25. P. 1714–1717.
211. *Bekarevich I. L., Khalatnikov I. M.* // Sov. Phys. JETP. 1961. V. 13. P. 643.
212. *Nemirovskii S. K., Stamm G., Fiszdon W.* Macroscopic dynamics of the vortex tangle in He II // Phys. Rev. B. 1993. Sept. V. 48, N 10. P. 7338–7347.

213. *Geurst J.* Hydrodynamic theory of superfluid turbulence in He II and schwarz's vortex modelling // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1992. V. 183, N 3. P. 279–303.
214. *Henderson K. L., Barenghi C. F.* The anomalous motion of superfluid helium in a rotating cavity // *J. of Fluid Mechanics*. 2000. V. 406. P. 199–219.
215. *Holm D. D.* Introduction to hvbk dynamics // *Quantized Vortex Dynamics*. Springer, 2001.
216. *Jou D., Mongioli M., Sciacca M.* Hydrodynamics equations of anisotropic, polarized and inhomogeneous superfluid vortex tangles // *Physica D*. 2011. V. 240. P. 249–258.
217. *Vinen W. F., Donnelly R. J.* Quantum turbulence // *Phys. Today*. 2007. V. 60. P. 43.
218. *Henderson K. L., Barenghi C., Chris A. J.* // *J. of Fluid Mechanics*. 1995. V. 283. P. 329–340.
219. *Samuels D. C.* Response of superfluid vortex filaments to concentrated normal-fluid vorticity // *Phys. Rev. B*. 1993. Jan. V. 47, N 2. P. 1107–1110.
220. Superfluid vortex lines in a model of turbulent flow / C.F. Barenghi, D. C. Samuels, G. H. Bauer, R. J. Donnelly // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. P. 2631.
221. *Barenghi C. F., Samuels D. C.* Self-consistent decay of superfluid turbulence // *Phys. Rev. B*. 1999. Jul. V. 60, N 2. P. 1252–1260.
222. *Kivotides D., Barenghi C. F., Sergeev Y. A.* Measurement of the normal-fluid velocity in superfluids // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Nov. V. 95, N 21. P. 215302.

223. *Kivotides D.* Coherent structure formation in turbulent thermal superfluids // *Phys. Rev. Lett.* 2006. May. V. 96, N 17. P. 175301.
224. *Morris K., Koplik J., Rouson D. W. I.* Vortex locking in direct numerical simulations of quantum turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Jul. V. 101. P. 015301.
225. *Kursa M., Bajer K., Lipniacki T.* Cascade of vortex loops initiated by a single reconnection of quantum vortices // *Phys. Rev. B.* 2011. Jan. V. 83. P. 014515.
226. *Kerr R. M.* Vortex stretching as a mechanism for quantum kinetic energy decay // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Jun. V. 106. P. 224501.
227. *Kuznetsov A. B.* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1991. V. 100. P. 1186.
228. *Fiszdon W., Nemirovskii S., Schwerdtner M.* Interaction of second sound acoustic waves with a counterflow-induced turbulent field // *Physica B: Condensed Matter.* 1991. V. 168, N 2. P. 93–103.
229. *Khalatnikov I.* An Introduction to the Theory of Superfluidity. Cambridge: Perseus Publishing, 2000. 206 p.
230. *Халатников И.* Разрывы и звук большой амплитуды в гелии II // *ЖЭТФ.* 1952. Т. 23, № 3. С. 253–264.
231. *Mezhov-Deglin L. P., Iznankin A. Y., Mineev V. P.* Observation of second-sound-rarefaction shock waves in superfluid helium // *JETP Lett.* 1980. V. 32. P. 199.
232. *Iznankin A. Y., Mezhov-Deglin L.* Shock waves in liquid helium // *JETP Lett.* 1983.
233. *Turner T. N.* Using second-sound shock waves to probe the intrinsic critical velocity of liquid helium II // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. P. 3227.

234. *Pomerantz M.* Propagation of “cool” pulses in liquid He II // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26, N 7. 362 p.
235. *Danilchenko B., Lutset M., Poroshin V.* Limit of transient heat absorption by superfluid helium for very large heat pulses // Cryogenics. 1989. V. 29, N 4. P. 444–447.
236. *Torczynski J. R.* Converging second sound shock waves in superfluid helium // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 1138.
237. *Torczynski J. R.* On the interaction of second sound shock waves and vorticity in superfluid helium // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 2636.
238. *Tsoi A. N., Lutset M. O.* // Inzh. Fiz. Zh. 1986. V. 51. P. 5.
239. *Nemirovskii S. K., Tsoi A. N.* Generation of vortices in He II by a powerful thermal pulse // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1982. V. 35. P. 229.
240. Temperature overshoot due to quantum turbulence during the evolution of moderate heat pulses in He II / W. Fiszdon, M. V. Schwerdtner, G. Stamm, W. Poppe // J. of Fluid Mechanics. 1990. V. 212. P. 663–684.
241. Critical currents and flux creep in melt processed high *tc* oxide superconductors / M. Murakami, S. Gotoh, N. Koshizuka et al. // Cryogenics. 1990. V. 30, N 5. P. 390–396.
242. *Murakami M., Iwashita K.* Numerical computation of a thermal shock wave in He II // Computers & Fluids. 1991. V. 19, N 3–4. P. 443–451.
243. *Poppe W., Stamm G., Pakleza J.* Numerical and experimental studies on converging second-sound waves in a half-pipe // Physica B: Condensed Matter. 1992. V. 176, N 4. P. 247–253.

244. *Kondaurova L. P., Nemirovskii S. K., Nedoboiko M. V.* Interaction of intense heat pulses and vortices in He II // J. of Low Temp. Phys. 2000. V. 119. P. 329–335.
245. *Kondaurova L., Andryuschenko V., Nemirovskii S.* Numerical simulations of superfluid turbulence under periodic conditions // J. of Low Temp. Phys. 2008. V. 150. P. 415–419.
246. *Nemirovskii S. K.* Propagation of heat pulses generating quantized vortices in He II // Sov. Phys. JETP. 1986. V. 64. P. 803.
247. *Nemirovskii S. K., Schmidt D. W.* Report No. 8. Max-Planck-Institut für Stromungsforschung, Goettingen Stromungsforschung. Goettingen, 1990.
248. *Goldner L. S., Mulders N., Ahlers G.* Second sound very near  $t\lambda$  // J. of low Temp. Phys. 1993. V. 93, N 1–2. P. 131–182.
249. *Fiszdon W., Olszok T., Stamm G. et al.* // Acta Mech. [Suppl.]. 1994. V. 4. P. 313.
250. *Kondaurova L., Nemirovsky S.* Numerical simulation of evolution of intensive waves of the second sound in superfluid helium turbulent flow // Thermophysics and Aeromechanics. 2008. V. 15. P. 223–231.
251. *Fiszdon W., Schwerdtner M.* Influence of quantum turbulence on the evolution of moderate plane second sound heat pulses in helium II // J. Low Temp. Phys. 1989. V. 75. P. 253.
252. *Stamm G., Fiszdon W.* Investigation of the superfluid vorticity field produced behind an imploding second-sound shock wave // Physica B. 1992. V. 179. P. 191–196.
253. *Sciver S. W. V.* Helium cryogenics. Plenum Press, 1986.
254. *Miklayev V. M., Sergeev I. A., Filippov Y. P.* The peculiarities of transient heat transfer in superfluid helium.

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia. Preprint NP8-87-33 1987. (in Russian).

255. *Sydyganov V. U., Kluchnikov I. A.* // Theses of the Fifth All Union School of Young Scientists and Specialists “Modern Problems of Thermophysics”. Novosibirsk, 1988, v. 1, p. 71.
256. *Ruppert U., Yang W. Z., Luders K.* Heat transfer investigations of superconductors in pressurized He II // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1987. V. 26. Suppl. P. 26–33.
257. *Крюков А.* Элементы физической кинетики. М.: Изд-во МЭИ, 1995.
258. *Крюков А.* Элементы гидродинамики и теплопереноса в гелии II. М.: Изд-во МЭИ, 2004.
259. *Kraft G.* // *J. Low Temp. Phys.* 1978. V. 31. P. 441.
260. *Rybarczyk L. J., Tough J. T.* Superheating in He II and the extension of the lambda line // *J. of Low Temp. Phys.* 1981. V. 43. P. 197–202.
261. *Nemirovskii S., Tsoi A.* Transient thermal and hydrodynamic processes in superfluid helium // *Cryogenics.* 1989. V. 29, N 10. P. 985–994.
262. *Sciver S. V.* Transient heat transport in He II // *Cryogenics.* 1979. V. 19, N 7. P. 385–392.
263. *Dresner L.* // *Adv. Cryog. Eng.* 1982. V. 27. P. 411.
264. *Nemirovskii S. K., Ponomarenko S. A.* Multi-scale perturbation analysis in hydrodynamics of the superfluid turbulence: Derivation of the dresner equation // *Cryogenics.* 2005. V. 45, N 6. P. 408–414.
265. *Kondaurova L., Nemirovskii S.* Unsteady heat transfer in He II in cylindrical and spherical geometries // *J. of Low Temp. Phys.* 2008. V. 150. P. 200–205.

266. *Zhang P., Murakami M., Wang R. Z.* Study of the transient thermal wave heat transfer in a channel immersed in a bath of superfluid helium // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49, N 7–8. P. 1384–1394.
267. *Schwarz K. W., Rozen J. R.* Anomalous decay of turbulence in superfluid  $^4\text{He}$  // Phys. Rev. Lett. 1991. Apr. V. 66, N 14. P. 1898–1901.
268. *Nemirovskii S., Kondaurova L., Nedoboiko M.* Hydrodynamic aspects in the problems of theory of superfluid turbulence // Cryogenics. 1994. V. 34, Suppl. 1. P. 309–311. (Fifteenth Intern. Cryogenic Engineering Conference).
269. First international workshop on quantum vorticity and turbulence in He II flows / T. Olszok, W. Fiszdon, G. Stamm et al. / ed. by G. Stamm and W. Fiszdon. Max-Planck-Institut für Stromungsforschung, Goettingen, Report No. 2, 64, 1994.
270. *Vidal F., Lhuillier D.* Second-sound velocity in rotating superfluid helium // Phys. Rev. B. 1976. Jan. V. 13, N 1. P. 148–168.
271. *Hussain A. K. M. F.* Coherent structures and turbulence // J. of Fluid Mechanics. 1986. V. 173. P. 303–356.
272. *Van Beelen H., Van Joolingen W., Yamada K.* On a balance equation for superfluid vorticity in capillary flow of helium II // Physica B: Condensed Matter. 1988. V. 153, N 1–3. P. 248–253.
273. *Mongioli M. S., Jou D., Sciacca M.* Energy and temperature of superfluid turbulent vortex tangles // Phys. Rev. B. 2007. Jun. V. 75. P. 214514.
274. *Tsubota M., Araki T., Vinen W. F.* Diffusion of an inhomogeneous vortex tangle // Physica B: Condensed Matter. 2003. V. 329-333. Part 1. P. 224–225.

275. *Barenghi C. F., Samuels D. C.* Evaporation of a packet of quantized vorticity // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Sep. V. 89, N 15. P. 155302.
276. *Nemirovskii S. K.* Diffusion of inhomogeneous vortex tangle and decay of superfluid turbulence // *Phys. Rev. B.* 2010. Feb. V. 81, N 6. P. 064512.
277. *Nemirovskii S.* Propagation of a turbulent fronts in quantum fluids // *J. of Low Temp. Phys.* 2011. V. 162. P. 347–353.
278. *Peshkov V. P., Tkachenko V. K.* Kinetics of destruction of superfluidity in helium // *Sov. Phys. JETP.* 1961. V. 14. P. 1019.
279. *Bhagat S. M., Critchlow P. R., Mendelssohn K.* Onset and growth of vorticity in liquid helium II // *Cryogenics.* 1964. V. 4. P. 166.
280. Chapter 2 turbulent dynamics in rotating helium superfluids / V.B. Eltsov, R. de Graaf, R. Hanninen et al. // *Progress in Low Temp. Phys.: Quantum Turbulence.* Elsevier, 2009. V. 16: Of Progress in Low Temp. Phys. P. 45–146.
281. Superfluid vortex front at  $t=0$ : Decoupling from the reference frame / J. J. Hosio, V. B. Eltsov, R. de Graaf et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Sept. V. 107. P. 135302.
282. *Frank-Kamenetskii D. A.* Diffusion and heat exchange in chemical kinetics. Princeton, N.J. : Princeton Univ. Press, 1955.
283. *Davis S. I., Hendry P. C., McClintock P. V. E.* Decay of quantized vorticity in superfluid  $^4\text{He}$  at mk temperatures // *Physica B: Condensed Matter.* 2000. V. 280, N 1–4. P. 43–44.

284. Decay of pure quantum turbulence in superfluid he3-b / D. I. Bradley, D. O. Clubb, S. N. Fisher et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Jan. V. 96, N 3. P. 035301.
285. Dissipation of quantum turbulence in the zero temperature limit / P. M. Walmsley, A. I. Golov, H. E. Hall et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Dec. V. 99, N 26. P. 265302.
286. *Kondaurova L., Nemirovskii S. K.* Numerical study of decay of vortex tangles in superfluid helium at zero temperature // *Phys. Rev. B.* 2012. Oct. V. 86. P. 134506.
287. *Barenghi C. F.* Is the reynolds number infinite in superfluid turbulence? // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2008. V. 237, N 14–17. P. 2195–2202. Euler Equations: 250 Years on Proceedings of an International Conference.
288. *Stalp S. R., Skrbek L., Donnelly R. J.* Decay of grid turbulence in a finite channel // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Jun. V. 82, N 24. P. 4831–4834.
289. *Araki T., Tsubota M., Nemirovskii S. K.* Energy spectrum of superfluid turbulence with no normal-fluid component // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Sept. V. 89, N 14. P. 145301.
290. Velocity spectra of superfluid turbulence / D. Kivotides, C. J. Vassilicos, D. C. Samuels, C. F. Barenghi // *EPL (Europhys. Lett.)*. 2002. V. 57, N 6. P. 845.
291. *Kivotides D., Vassilicos J. C., Samuels D. C., Barenghi C. F.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. P. 3080.
292. *Baggaley A. W.* The importance of vortex bundles in quantum turbulence at absolute zero // *Phys. of Fluids.* 2012. V. 24, N 5. P. 055109.
293. *Nore C., Abid M., Brachet M. E.* Kolmogorov turbulence in low-temperature superflows // *Phys. Rev. Lett.* 1997. May. V. 78, N 20. P. 3896–3899.

294. *Kobayashi M., Tsubota M.* Kolmogorov spectrum of superfluid turbulence: Numerical analysis of the gross-pitaevskii equation with a small-scale dissipation // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Feb. V. 94, N 6. P. 065302.
295. Energy spectra of quantum turbulence: Large-scale simulation and modeling / Narimasa Sasa, Takuma Kano, Masahiko Machida et al. // *Phys. Rev. B.* 2011. Aug. V. 84. P. 054525.
296. *Nemirovskii S. K., Andryushchenko V. A.* Energy spectrum of the velocity field induced by a fractal vortex line in superfluid helium // *J. of Low Temp. Phys.* 2008. V. 34, N 4. P. 293–297.
297. *Nemirovskii S.* Energy spectrum of the 3d velocity field, induced by vortex tangle // *J. of Low Temp. Phys.* 2013. V. 171, N 5–6. P. 504–510.
298. *Kuznetsov E., Ruban V.* Collapse of vortex lines in hydrodynamics // *J. of Exper. and Theor. Phys.* 2000. V. 91, N 4. P. 775–785.
299. *Kuznetsov E.* Collapse and kolmogorov spectra // *Proceedings of scientific school “Nonlinear waves-2012”* / eds. A. G. Litvak and V. I. Nekorkin, Institute for Applied Physics, Nizhnii Novgorod, 2013. V. 26.
300. *Kerr R. M.* Swirling, turbulent vortex rings formed from a chain reaction of reconnection events // *Phys. of Fluids.* 2013. V. 25, N 6. P. 065101.
301. *Agafontsev D., Kuznetsov E., Mailybaev A.* Development of high vorticity structures in incompressible 3d euler equations // arXiv preprint arXiv:1502.01562. 2015.
302. Analytic solution of the approach of quantum vortices towards reconnection / L. Boué, D. Khomenko, V. L’vov,

- I. Procaccia // Phys. Rev. Lett. 2013. Oct. V. 111. P. 145302.
303. *Bustamante M. D., Kerr R. M.* 3d euler about a 2d symmetry plane // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. V. 237, N 14BT17. P. 1912–1920.
304. *Hänninen R.* Dissipation enhancement from a single vortex reconnection in superfluid helium // Phys. Rev. B. 2013. Aug. V. 88. P. 054511.
305. *Fedoryuk M. V.* Method of Saddle Points. Moscow: Nauka, 1977.
306. *Erdelyi A.* Asymptotic representations of fourier integrals and the method of stationary phase // J. of the Society for Industrial and Appl. Mathem. 1955. V. 3, N 1. P. 17–27.

**Nemirovskii S. K.. HYDRODYNAMICS OF QUANTUM FLUIDS. WAVES, VORTICES, TURBULENCE. PART II. Quantum vortices, superfluid turbulence**

The book is the second part of the monograph devoted to various aspects of hydrodynamics of quantum liquids. In this part, we present the theory of quantum vortices, a unique phenomenon, originating from the quantum-mechanical nature of quantum liquids. We present the concept of quantum vortices and expose a number of classical results, both theoretical and an experimental. The structure and dynamics of quantum vortices are described. Many issues, such as interaction with the normal component, the structure of the vortex core, reconnection events, etc are considered. Most of the book is devoted to popular theory of quantum turbulence, associated with the chaotic dynamics of quantum vortices. The monograph is intended for physicists and engineers directly involved in the study and the technical application of quantum fluids, as well as for professionals in other fields who wish to become acquainted with these interesting phenomena. It is also intended for undergraduate and graduate students specializing in the field of low temperature physics and fluid dynamics of complex systems

Fig. 47. Bibliography 306 references.

*It is approved for publication by the Academic Council of the S.S. Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*

# Content

<b>Preambula</b> .....	<b>8</b>
<b>1. Quantum eddies. Historical review.</b> .....	<b>11</b>
1.1. The vortices of Onsager-Feynman.....	11
1.2. Early experiments.....	20
<b>2. Vortex lines in quantum liquids; dynamics and structure</b> .....	<b>33</b>
2.1. Vortex dynamics: Equations of motion.....	35
2.1.1. The motion of lines in quantum liquids .....	35
2.1.2. The motion of the lines in the Bose-Einstein condensate. ....	44
2.2. Vortex dynamics: Reconnection of lines.....	53
2.2.1. Stage 1. Collision of filaments.....	53
2.2.2. Stage 2. Dynamics inside the core of the vortex filaments. ....	57
2.3. Vortex tangle characteristics.....	61
2.3.1. Geometric properties.....	62
2.3.2. Dynamic characteristics.....	69
<b>3. Superfluid turbulence.</b> .....	<b>81</b>
3.1. Introduction and review.....	81
3.2. Vortex dynamics and quantum turbulence .....	91
3.3. Feynman scenario.....	96
3.4. Vinen phenomenological theory .....	99
<b>4. Analytical studies 1: dynamics of line ignoring recombination</b> .....	<b>108</b>
4.1. The kinetic equation for the length distribution in space of curvature.....	109
4.2. Langevin formulation of the problem.....	117
4.2.1. Functional formalism.....	117
4.2.2. The Thermodynamic equilibrium in the system of chaotic quantized vortices.....	120
4.2.3. The Thermodynamic equilibrium of the vortex lines in the counterflowing He II. ....	125

4.3. Chaotic small perturbations on vortex lines. Nonlinear waves of Kelvin. ....	130
4.4. Chaotic dynamics of the vortex loop. Direct interaction approximation .....	135
<b>5. Analytical studies 2: Kinetics of rings and loops . .</b>	<b>147</b>
5.1. Models of interacting ideal (or weakly nonideal) vortex rings. ....	147
5.2. The Gaussian model.....	149
5.2.1. Generalized Wiener distribution.....	149
5.2.2. The characteristic functional $W(\{\mathbf{P}(\xi, t)\})$ .....	155
5.3. Kinetics of a network of Gaussian vortex loops. ....	157
5.3.1. Kinetic equation.....	157
5.3.2. The calculation of the coefficients $A(l_1, l_2, l)$ and $B(l, l_1, l_2)$ .....	159
5.3.3. Exact solution of the kinetic equation .....	164
5.4. The kinetics of loops and the theory of quantum turbulence .....	170
5.4.1. The properties of the vortex coil at zero temperature.....	170
5.4.2. The “pure” $P_{net}$ flux and the vortex density of the line.....	173
5.4.3. Full intensity of reconnection. ....	174
5.4.4. The Vinen equation. ....	175
<b>6. Hydrodynamics of superfluid turbulence .....</b>	<b>181</b>
6.1. Formulation of the problem .....	181
6.2. Disordered vortex tangle. ....	182
6.3. The vortex bundle case.....	192
<b>7. Applications of hydrodynamics of superfluid turbulence .....</b>	<b>197</b>
7.1. The interaction between the second sound and the counterflow .....	198
7.2. The propagation of intense heat pulses, generating vortices and interacting with them .....	200
7.2.1. Generation of vortices in intense thermal pulses.....	200
7.2.2. Equations of the evolution of powerful	

thermal pulses.....	203
7.2.3. Evolution of intense heat pulses. Analytical study.....	204
7.2.4. Evolution of intense heat pulses. Numerical studies.....	207
7.3. Heat transfer and boiling He II.....	213
7.4. Generating term or residual vortices? .....	217
7.5. Anomal decay of the vortex tangle.....	218
7.6. The effect of “dry” friction. Validity and interpretation of the Vinen equation.....	220
<b>8. Applications of the Gaussian model.....</b>	<b>224</b>
8.1. Hydrodynamic impulse of the vortex tangle .....	224
8.1.1. Static properties.....	224
8.1.2. Dynamics of Lamb Impulse.....	226
8.1.3. Non-conservation of Lamb Impulse.....	228
8.2. Dynamics of inhomogeneous quantum turbulence. ...	231
8.2.1. Diffusion of the vortex tangle.....	231
8.3. Propagation of turbulent fronts.....	234
8.4. The decay of quantum turbulence at zero temperature	235
8.4.1. The attenuation of the vortex line density and the quasiclassic quantum behavior of quantum turbulence .....	235
8.4.2. Diffusion decay of quantum turbulence .....	237
8.5. The energy spectrum of the three-dimensional velocity field, induced by vortex filaments. Fractal vortex filament.	240
8.5.1. Energy spectrum and characteristic functional. .	240
8.5.2. Models of the vortex filament.....	243
8.5.3. Determination of the energy spectrum.....	245
8.6. The energy spectrum of the three-dimensional velocity field, induced by reconnecting vortex filaments. ...	250
8.6.1. The role of singular solutions in the formation of spectra of turbulence.....	250
8.6.2. Form of the curves of reconnecting vortex lines.	252
8.6.3. Analytical calculation of the spectrum.....	254
<b>Bibliography .....</b>	<b>259</b>

Научное издание

Немировский Сергей Карпович

Гидродинамика квантовых жидкостей.  
Волны, вихри, турбулентность

Часть 2. Квантовые вихри, сверхтекучая  
турбулентность

Редактор *В. И. Смирнова*

Оператор электронной верстки *О. Г. Заварзина*

Подписано в печать 28.10.2016. Формат 60×90 1/16.  
Усл. печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 15,0. Тираж 300 экз. Заказ  
№ 285.

Издательство СО РАН 630090, Новосибирск, Морской  
просп., 2; E-mail: [psb@sibran.ru](mailto:psb@sibran.ru); тел. (383) 330-80-50

Отпечатано в Издательстве СО РАН

Интернет-магазин Издательства СО РАН

<http://www.sibran.ru>