

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Описание квантового электронного транспорта
с помощью матриц рассеяния

Г.Б. Лесовик, И.А. Садовский

Подробно рассматривается применение матриц рассеяния в теории квантового электронного транспорта в мезо- и нанопроводниках. Описываемый подход альтернативен более привычному подходу с использованием кинетического уравнения или функций Грина и для когерентных проводников часто более эффективен (особенно для доказательства общих соотношений) и почти всегда более нагляден. Приведено описание как средних по времени величин (типа вольт-амперных характеристик проводников), так и флуктуаций тока во времени — шума, а также полной статистики переноса заряда за конечное время. Кроме нормальных проводников рассмотрены контакты со сверхпроводниками, а также джозефсоновские контакты.

PACS numbers: 72.10. – d, 73.23. – b, 73.50.Td, 74.25.F – , 74.45. + c, 74.78.Na

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201110b.1041

Содержание

1. Введение (1042).

2. Описание транспорта с помощью матрицы рассеяния: формула Ландауэра (1042).

2.1. Кондактанс в одномерном контакте. 2.2. Два резервуара. 2.3. Ландауэровское падение напряжения. 2.4. Контактное сопротивление.

3. Волноводы: многоканальный случай (1047).

3.1. Квантованные моды. 3.2. Задача рассеяния в волноводе. 3.3. Волновод с адиабатически медленно изменяющимся сечением.

4. Квантовые контакты (1049).

4.1. Ток через квантовый точечный контакт. 4.2. Квантование кондактанса. 4.3. Размытие ступеней кондактанса вследствие туннелирования через эффективный потенциал.

5. Электронный волновод в магнитном поле (1051).

5.1. Эффект Зеемана в квантовом точечном контакте. 5.2. Краевые состояния в магнитном поле.

6. Эффект Ааронова – Бом (1054).

7. Двойной барьер: интерферометр Фабри – Перо (1054).

7.1. Двойной δ -барьер. 7.2. Транспортные свойства контактов с резонансным потенциалом.

8. Кондактанс в грязных проводниках (1058).

8.1. Мезоскопические флуктуации кондактанса. 8.2. Функция распределения Дорохова.

9. Термоэлектрические эффекты (1060).

9.1. Термоток и термоэдс. 9.2. Поток тепла: закон Видемана – Франца. 9.3. Нарушение закона Видемана – Франца.

10. Метод вторичного квантования и матрицы рассеяния (1062).

10.1. Средний ток. 10.2. Подход Ландауэра с точки зрения кельдышевских функций Грина. 10.3. Описание шума.

11. Статистика переноса заряда (1066).

11.1. Рассмотрение статистики на примере одного электрона. 11.2. Рассмотрение статистики для двух электронов. 11.3. Статистика для N частиц. 11.4. Инвариантность детерминанта Слэтера к линейным преобразованиям. 11.5. Описание статистики при постоянном напряжении. 11.6. Полное статистическое описание переноса заряда в квантовых проводниках с известной статистикой прозрачностей. 11.7. Описание статистики переноса в графене. 11.8. Описание статистики переноса при наличии взаимодействия.

12. Уравнения Боголюбова – де Жена (1076).

13. Электронный транспорт в контактах нормальных металлов со сверхпроводниками (NS) (1078).

13.1. Связь тока с напряжением и спектральный кондактанс. 13.2. Кондактанс в андреевском приближении. 13.3. Линейный кондактанс: частные случаи. 13.4. Кондактанс NINIS-контакта.

14. Электронный транспорт в SNS-контактах (1084).

14.1. Энергетические уровни и ток в SXS-контакте. 14.2. SNS-контакт: сужение в двумерном электронном газе. 14.3. SINIS-контакт: андреевская квантовая точка. 14.4. SGS-контакт и уравнения Дирака – Боголюбова – де Жена.

15. Дробовой шум в NS-системах при конечном напряжении (1090).

15.1. Шум в NINS-контакте. 15.2. Шум в NININS-контакте.

16. Заключение (1093).

17. Приложение: свойства матриц рассеяния (1093).

П1. Свойства состояний рассеяния. П2. Унитарность матрицы рассеяния. П3. Симметрия гамильтониана по отношению к обращению времени.

Список литературы (1094).

Г.Б. Лесовик. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семенова 1-А, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (495) 137-32-44. Факс (495) 938-20-77
E-mail: lesovik@landau.ac.ru
И.А. Садовский. Rutgers University, 136 Frelinghuysen Rd, Piscataway, NJ, 08854, USA
E-mail: ivan.sadovsky@gmail.com

Статья поступила 12 декабря 2010 г.

1. Введение

За последние 30 лет исследование электрических проводников прошло путь от изучения макроскопических образцов, в которых квантовость проявляет себя в основном на уровне формирования зонной структуры, до изучения мезоскопических¹ образцов, с масштабами большими атомных, но меньшими характерного масштаба длины, на котором уже проявляются квантовые корреляции, и в конце концов объектов нанofизики с ещё меньшими масштабами, вплоть до атомных (квантовые контакты и квантовые точки, молекулярные и атомные контакты, углеродные нанотрубки, графен).

Электронный транспорт в проводниках, размеры которых сопоставимы с длинами неупругого рассеяния, такими как длина энергетической релаксации или длина сдвига фазы, или даже с фермиевскими длинами волн, обладает рядом особенностей, главная из которых состоит в существенной нелокальности транспорта. В случае таких проводников практически бессмысленно говорить о величинах типа локальной проводимости и задача ставится именно о транспорте — переносе электронов из пункта А (левый резервуар) в пункт Б (правый резервуар). В этом случае перенос электронов через проводник является чисто квантово-механическим процессом и для электронного квантового транспорта как нельзя лучше подходит описание, хорошо знакомое из теории рассеяния частиц и атомов: есть заданное состояние (в нашем случае — электронов), есть рассеиватель и есть конечное состояние (резервуар, в который электрон прибыл). Переход из одного состояния в другое описывается матрицей рассеяния.

Подход, опирающийся на матрицу рассеяния, в последнее время широко и успешно применяется для описания квантового транспорта. Отличие данного подхода от более традиционных, например с использованием кинетического уравнения, формулы Кубо, функций Грина, диаграммной техники и т.д., состоит главным образом в следующем. Полная проводимость системы (или полный ток), как оказывается, может быть выражена через квантово-механическую прозрачность проводника (в общем случае — через матрицу рассеяния) и числа заполнения точных электронных состояний рассеяния, которые определяются параметрами в берегах (резервуарах).

На первый взгляд, такой способ описания транспорта всего лишь переносит проблему вычисления локальной или нелокальной проводимости на вычисление прозрачности, а эта задача ничуть не менее сложна. Однако это не совсем так. Во-первых, во многих случаях с простой геометрией образца и простым потенциалом рассеяния прозрачности можно вычислить аналитически, что проще и нагляднее, чем, скажем, вычисление функции Грина. Во-вторых, часто удаётся сделать разумное предположение о матрице рассеяния и получить удовлетворительное описание эксперимента. Для неупорядоченных (грязных) проводников со сложным потенциалом рассеяния вероятности прохождения могут быть эффективно описаны статистически, например с помощью методов, развитых для случайных матриц.

Кроме того, в результате развития мезоскопиики и нанofизики появились новые задачи, которые ранее либо не привлекали особого внимания, либо представлялись нереалистичными для изучавшихся систем. Одной из таких задач является описание не только среднего тока, но и его флуктуаций и в целом статистики переноса заряда в квантовых мезо- и нанопроводниках. Как оказалось, именно эти задачи можно эффективно решать методом матриц рассеяния. При этом существенно то, что даже если матрица рассеяния неизвестна, т.е. не вычислена для конкретного потенциала рассеяния, формально удаётся описать всю статистику переноса заряда за большие времена, так же как и средний ток. Таким образом, если известна прозрачность, то известен не только кондактанс G — величина, обратная сопротивлению, $G = 1/R$, но и спектральная плотность флуктуаций тока $S(\omega)$ на малых частотах, функция распределения заряда $P(Q)$, перенесённого за некоторое фиксированное время и т.д. Для некоторых ситуаций удаётся вывести общие соотношения, типа флуктуационно-диссипационной теоремы, связывающие, например, средний ток и неравновесные флуктуации. В традиционном подходе потребовалось бы каждый раз вновь вычислять S , P и другие величины, отличные от среднего тока.

2. Описание транспорта с помощью матрицы рассеяния: формула Ландауэра

Матрица рассеяния, переводящая состояния свободных частиц, налетающих на область взаимодействия друг с другом или с препятствием, в состояния разлетающихся после взаимодействия частиц, играет огромную роль в квантовой физике. Эта матрица, введённая изначально Борном [1], а затем Уилером [2] и независимо Гейзенбергом [3, 4] для описания рассеяния частиц и атомов, начиная с конца XX в. активно используется в теории электронного транспорта в квантовых проводниках.

Самый известный результат теории квантового транспорта, полученный с помощью матрицы рассеяния, — это знаменитая формула Ландауэра², которую иногда называют формулой Ландауэра–Бюттикера. Фактически формула в том виде, в котором она обычно используется, впервые появилась в работах [6–8]. Оказывается, что кондактанс квазиодномерного (одноканального) проводника даётся известным из квантового эффекта Холла [9] квантом кондактанса $G_0 = 2e^2/h$ (где e — заряд электрона, h — постоянная Планка; множитель 2 возникает из-за спинового вырождения), умноженным на прозрачность T канала проводимости, а при наличии более чем одного канала в формуле для кондактанса

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n,m} T_{nm} \quad (1)$$

появляется сумма вероятностей прохождения T_{nm} из одной моды (канала) в другую (см. подробные пояснения в разделе 3).

В последующих работах подход Ландауэра был лучше осознан (например, Имри [10] указал на роль падения напряжения на входе в проводник) и распространён на более сложные системы со многими резервуа-

¹ То есть промежуточным по свойствам между микроскопическими и макроскопическими. *Мезоскопия* в переводе с греческого означает *междускопия* или *среднескопия*.

² Названная так потому, что именно Ландауэр первым [5] стал применять матрицы рассеяния для описания задач о транспорте.

рами, на режим квантового эффекта Холла [11–14], гибридные сверхпроводящие системы [15–20], а также использован для описания флуктуаций тока во времени [21–24]. На данный момент методика стала очень ясной и функциональной. В целом этот подход применим для описания когерентных мезоскопических проводников, в которых характерный размер области падения напряжения L много меньше всех неупругих длин.

2.1. Кондактанс в одномерном контакте

Для описания квазиодномерного проводника рассмотрим сначала чисто одномерную задачу³ для системы, в которой слева и справа, далеко от расположенного в центре препятствия, находятся электронные резервуары, испускающие электроны по направлению к этому препятствию.

Предположим, что левый электронный резервуар испускает в направлении препятствия электроны (забудем пока о спине) с энергиями вплоть до величины μ (экспериментально это может соответствовать наличию тянущего напряжения $V = \mu/e$). Проводник когерентен, и состояния являются состояниями рассеяния Липпмана – Швингера.

Для таких состояний, принадлежащих непрерывному спектру, возникает проблема подсчёта их числа. Часто для непрерывного спектра используется приём "нормировки на ящик", т.е. накладывание периодических граничных условий и замыкание проводника в кольцо длиной L , для того чтобы сделать спектр дискретным и впоследствии перейти к пределу $L \rightarrow \infty$. Такую процедуру, однако, сложно проделать строго для состояний рассеяния, и здесь мы подойдём к вопросу иначе, а именно сформируем нормируемые волновые пакеты из состояний непрерывного спектра.

Разбив интервал энергии $[0, \mu]$ на N сегментов размером $\Delta = \mu/N$, сформируем волновые пакеты

$$\Psi_n(x, t) = c_n \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} dE \Psi_{L,E}(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right), \quad (2)$$

где $n = 1, \dots, N$; $\Psi_{L,E}(x)$ — состояния рассеяния (левые) Липпмана – Швингера с энергией E , имеющие асимптоты вида

$$\Psi_{L,E}(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + r(E) \exp(-ikx), & x \rightarrow -\infty, \\ t(E) \exp(ikx), & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Нормировочная константа может быть вычислена с помощью соотношения

$$\int dx \Psi_{L,E'}^*(x) \Psi_{L,E}(x) = 2\pi\delta(k' - k), \quad (4)$$

где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

Вычисляя интеграл $\int dx |\Psi_n(x, t)|^2$ и приравнявая его единице для правильной нормировки волновых пакетов, получаем

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{hv_n\Delta}}, \quad (5)$$

³ Именно эту задачу изначально рассматривал Ландауэр в работе [5]. Для её решения использовался впечатляюще малый набор знаний: сведения о постановке и решении задач рассеяния в одномерном случае в квантовой механике и базовые понятия о вырожденном электронном газе на уровне курса общей физики.

где $v_n = \sqrt{2n\Delta/m}$ — скорость n -го пакета; мы предположили, что Δ мало.

Волновые пакеты, заданные выражениями (2), являются локализованными в окрестности $x = 0$ в момент времени $t = 0$ и имеют характерный размер hv_n/Δ . Эти пакеты движутся со скоростью v_n . При $\Delta \rightarrow 0$ (т.е. при $N \rightarrow \infty$) волновые пакеты становятся шире, приближаясь по форме к состояниям рассеяния (3).

Вычислим теперь ток I , переносимый данным ортонормированным набором волновых пакетов. Для них ток аддитивен (поскольку, согласно принципу Паули, в каждом состоянии может находиться только один электрон), и мы можем сначала вычислить вклад I_n в ток от каждого n -го пакета, а затем просуммировать вклады. Для состояний рассеяния (как и для любых стационарных состояний) ток не зависит от точки, в которой мы его вычисляем, так что в пределе $\Delta \rightarrow 0$ вклад в ток от каждого пакета при $t = 0$,

$$I_n = -i \frac{e\hbar}{2m} [\Psi_n^*(x) \Psi_n'(x) - \Psi_n'^*(x) \Psi_n(x)], \quad (6)$$

может быть вычислен, например, справа от барьера, где вид волновой функции известен: $\Psi_L(x) \sim t(E) \exp(ikx)$, и мы получаем

$$I_n = c_n^2 \Delta^2 ev_n T(n\Delta) = \frac{e}{h} \Delta T(n\Delta), \quad (7)$$

где $T(E) = |t(E)|^2$ — прозрачность при энергии E . Суммируя вклады от всех пакетов, находим

$$I = \sum_{n=1}^N I_n = \frac{e}{h} \Delta \sum_{n=1}^N T(n\Delta) \xrightarrow{(\Delta \rightarrow 0)} \frac{e}{h} \int_0^\mu dE T(E), \quad (8)$$

где в пределе $\Delta \rightarrow 0$ сумма по n превращается в обычный (риманов) интеграл. Кондактанс, определяемый как отношение тока I к напряжению $V = \mu/e$, выражается в виде

$$G = \frac{I}{V} = \frac{e^2}{h} \int_0^\mu \frac{dE}{\mu} T(E). \quad (9)$$

Формула (9) является простым вариантом формулы Ландауэра для кондактанса [7, 25].

Поскольку волновые функции непрерывного спектра невозможно нормировать обычным образом, как состояния дискретного, при построении многочастичного состояния из произвольных состояний непрерывного спектра заранее не вполне ясно, какой ток несёт каждое состояние. Этот вопрос может быть решён разбиением на волновые пакеты и переходом к пределу так, как мы это сделали выше. Такая процедура в явном виде может понадобиться для анализа сложных задач, например для описания полной статистики переноса, как это сделано в работе [26]. Для вычисления тока можно воспользоваться правилом (которое также может быть выведено указанным способом), позволяющим просуммировать вклады в ток от состояний непрерывного спектра: если $\psi_\xi(x)$ удовлетворяют нормировке, обобщающей (4),

$$\int dx \psi_\xi^*(x) \psi_{\xi'}(x) = c(\xi) \delta(\xi - \xi'), \quad (10)$$

то ожидаемое среднее от оператора тока даётся соотношением

$$I = \int \frac{d\xi}{c(\xi)} n(\xi) I_\xi, \quad (11)$$

где I_ξ — ток от частицы в состоянии $\psi_\xi(x)$, $n(\xi)$ — число заполнения, равное 1, если состояние с индексом ξ присутствует в многочастичной волновой функции (детерминанте Слэтера), и 0 в противном случае (при конечных температурах $\Theta > 0$ число $n(\xi)$ может принимать значения между 0 и 1). Для обсуждаемого случая $\xi = k$, $I_k = -e\hbar k T(E)/m$, $c(k) = 2\pi$ и

$$n(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < \mu, \\ 0 & \text{при } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > \mu. \end{cases}$$

Подставляя эти результаты в (11), получаем

$$I = \frac{e\hbar}{m} \int_0^{k(\mu)} \frac{dk}{2\pi} k T(E) = \frac{e}{h} \int_0^\mu dE T(E), \quad (12)$$

что соответствует (8). На последнем шаге вычислений мы перешли от интегрирования по волновому вектору k к интегрированию по энергии E , используя одномерную плотность состояний

$$v(E) = \frac{dk}{dE} = \frac{m}{\hbar^2 k}, \quad (13)$$

благодаря чему множитель k в подынтегральном выражении в (12) сокращается и в результате каждый интервал энергии (при отсутствии рассеяния) несёт одинаковый ток:

$$i_0 = \frac{\delta I}{\delta E} = \frac{e}{h}, \quad (14)$$

что является характерной чертой одномерного баллистического транспорта.

2.2. Два резервуара

В разделе 2.1 мы обсудили случай, в котором бесспиновые электроны испускались одним резервуаром, теперь перейдём к более реалистичному случаю, в котором электроны со спином 1/2 испускаются обоими резервуарами. Пусть левый резервуар, имеющий электрохимический потенциал⁴ μ_L , поставляет "левые" состояния рассеяния $\Psi_L(x)$, а правый, обладающий электрохимическим потенциалом μ_R , — "правые" состояния $\Psi_R(x)$ (рис. 1). Тогда полный ток определяется вкладами от обоих резервуаров:

$$I_L = \frac{2e}{h} \int_0^{\mu_L} dE T(E), \quad (15)$$

$$I_R = -\frac{2e}{h} \int_0^{\mu_R} dE T(E), \quad (16)$$

⁴ Напомним, что максимальная полная энергия одного электрона (при нулевой температуре), складывающаяся из кинетической энергии (Ферми) и потенциальной энергии (заряда в электростатическом потенциале), как раз и представляет собой электрохимический потенциал.

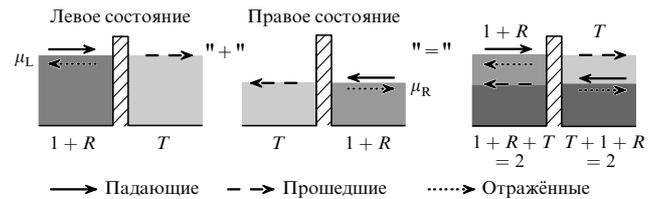


Рис. 1. Плотность заряда (показана градиацией цвета), обусловленная левыми и правыми состояниями рассеяния (мы опускаем здесь детали фриделевских осцилляций и усредняем по нескольким длинам волн). Суммарные плотности от состояний, находящихся ниже по энергии, чем μ_R , равны (обозначены тёмно-серым цветом). Для состояний с энергиями между μ_R и μ_L заряд больше слева от рассеивателя (при $T \neq 1$).

где множитель 2 возникает из-за вырожденности по спину, а ток I_R , определяемый правыми состояниями, приобретает, в отличие от I_L , знак минус, поскольку волновой вектор и скорости у $\Psi_R(x)$ противоположны таковым у $\Psi_L(x)$. Здесь мы воспользовались важным свойством матрицы рассеяния, следующим из её унитарности и симметрии по отношению к обращению времени: вероятности прохождения для взаимобратных процессов равны⁵. В данном случае вероятность прохождения слева направо, $T = |t|^2$, равна вероятности прохождения справа налево, $T = T' = |t'|^2$. В полном токе

$$I = I_L + I_R = \frac{2e}{h} \int_{\mu_R}^{\mu_L} dE T(E) \quad (17)$$

вклады от энергетических интервалов, заполненных как слева, так и справа, сокращаются, и только состояния, заполненные лишь с одной стороны, дают вклад в полный ток.

2.3. Ландауэровское падение напряжения

После рассмотрения тока, обусловленного разностью электрохимических потенциалов, обсудим вопрос о падении напряжения на рассеивателе. Для начала рассмотрим, какая плотность электронов создаётся в неравновесном состоянии; предположим, что $\mu_L > \mu_R$ (рис. 2). Левый резервуар поставляет состояния вида (3), а правый, соответственно — $\Psi_{R,E}$. Полная плотность справа от рассеивателя

$$\begin{aligned} \rho_R &= 2 \int_0^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} |\Psi_{L,E}(x)|^2 + 2 \int_0^{k(\mu_R)} \frac{dk}{2\pi} |\Psi_{R,E}(x)|^2 \approx \\ &\approx 2 \int_0^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} T(E) + 2 \int_0^{k(\mu_R)} \frac{dk}{2\pi} [1 + R(E)] \end{aligned} \quad (18)$$

определяется суммой вкладов от левых и правых состояний (множитель 2 обусловлен спиновым вырождением). (Мы не рассматриваем здесь детали фриделевских осцилляций с периодом $\pi/[k(\mu)]$ (см. далее) и усредняем по нескольким длинам волн $\propto \hbar/\sqrt{2m\mu}$.) Вычисления плотности слева дают

$$\rho_L \approx 2 \int_0^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} [1 + R(E)] + 2 \int_0^{k(\mu_R)} \frac{dk}{2\pi} T(E). \quad (19)$$

⁵ В одномерном случае равенство вероятностей прохождения следует из унитарности даже в отсутствие обратимости по времени.

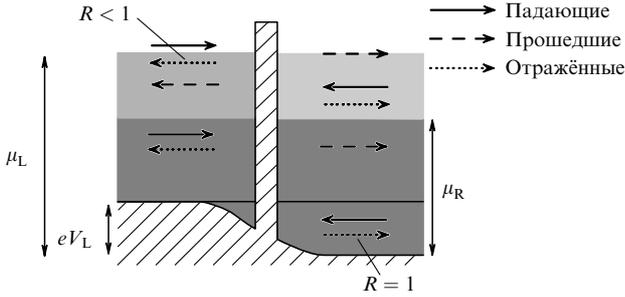


Рис. 2. Возникновение падения напряжения Ландауэра V_L на барьере. Из-за искривления дна зоны проводимости, вызванного падением напряжения, состояния, испущенные из правого резервуара с энергиями между 0 и eV_L , полностью отражаются. Здесь $eV_L > 0$, что соответствует отрицательному напряжению и электрическому току, но положительному (слева направо) току частиц. Такая разница в знаках вызвана тем, что заряд электрона принято считать отрицательным.

В неравновесной ситуации, $\mu_L \neq \mu_R$, и при неидеальной прозрачности, $T \neq 1$, плотность справа от рассеивателя не совпадает с плотностью слева от него (см. рис. 1).

Разность плотностей выражается как

$$\rho_L - \rho_R = 4 \int_{k(\mu_R)}^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} R(E), \quad (20)$$

где мы использовали соотношение $R(E) + T(E) = 1$. При условии соблюдения электронейтральности квантового проводника эта разность плотностей должна быть компенсирована падением напряжения на рассеивателе, которое искривляет дно зоны проводимости. Величина этого падения напряжения V_L (ландауэровского) в стационарном случае может быть получена из условия электронейтральности, которое, как предполагается, имеет место в равновесной ситуации, в частности плотность должна быть одинаковой по обе стороны от барьера (см. рис. 2).

При наличии падения напряжения V_L левые состояния при энергии E (отсчитанной от дна зоны проводимости в правом резервуаре) имеют вид

$$\Psi_{L,E}(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + r(E) \exp(-ikx), & x \rightarrow -\infty, \\ \sqrt{\frac{k}{\tilde{k}}} t(E) \exp(i\tilde{k}x), & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (21)$$

где $k(E) = \sqrt{2m(E - eV_L)}/\hbar$ и $\tilde{k}(E) = \sqrt{2mE}/\hbar$ — волновые векторы соответственно в левой и правой асимптотических областях. Аналогично, правые состояния рассеяния выражаются как

$$\Psi_{R,E}(x) = \begin{cases} \exp(-i\tilde{k}x) + r'(E) \exp(i\tilde{k}x), & x \rightarrow \infty, \\ \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}} t'(E) \exp(-ikx), & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (22)$$

Множитель $\sqrt{k/\tilde{k}}$ возникает как следствие унитарности матрицы рассеяния. Заметим также, что задача рассеяния должна решаться с учётом искривления дна зоны проводимости, обусловленного ландауэровским напряжением V_L ; например из-за появления этого напряжения правые состояния рассеяния с энергиями $E < eV_L$ полностью отражаются назад и $R(E) = 1$. Усреднённая плотность слева, обусловленная левыми состояниями рассея-

ния, даётся выражением

$$\rho_{LL} = 2 \int_0^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} [1 + R(E)], \quad (23)$$

здесь множитель 2 появляется вследствие спинового вырождения. Плотность слева, обусловленная правыми состояниями, приобретает вид

$$\rho_{LR} = 2 \int_{\tilde{k}(eV_L)}^{\tilde{k}(\mu_R)} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} \frac{\tilde{k}}{k} T(E). \quad (24)$$

Аналогично, вычисляя плотность справа, находим

$$\rho_{RL} = 2 \int_0^{k(\mu_L)} \frac{dk}{2\pi} \frac{k}{\tilde{k}} T(E), \quad (25)$$

$$\rho_{RR} = 2 \int_{\tilde{k}(eV_L)}^{\tilde{k}(\mu_R)} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} [1 + R(E)] + 2 \int_0^{\tilde{k}(eV_L)} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} (1 + 1), \quad (26)$$

где последнее слагаемое возникает из-за полностью отражённых правых состояний со дна зоны проводимости.

Для удобства дальнейших вычислений перейдём к интегралам по энергии. Для ρ_{LL} мы получим ($dk = (m/\hbar^2 k) dE$):

$$\rho_{LL} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{eV_L}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{1 + R(E)}{\sqrt{E - eV_L}}. \quad (27)$$

Аналогично, при $d\tilde{k} = (m/\hbar^2 \tilde{k}) dE$ имеем

$$\rho_{LR} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{eV_L}^{\mu_R} \frac{dE}{2\pi} \frac{T(E)}{\sqrt{E - eV_L}}. \quad (28)$$

Вычисления для ρ_{RL} и ρ_{RR} дают:

$$\rho_{RL} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{eV_L}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{T(E)}{\sqrt{E}}, \quad (29)$$

$$\rho_{RR} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{eV_L}^{\mu_R} \frac{dE}{2\pi} \frac{1 + R(E)}{\sqrt{E}} + \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{eV_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{E}}. \quad (30)$$

Суммируя плотности слева, $\rho_L = \rho_{LL} + \rho_{LR}$, и используя соотношение $T(E) + R(E) = 1$, получаем

$$\rho_L = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{eV_L}^{\mu_R} \frac{dE}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{E - eV_L}} + \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mu_R}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{1 + R(E)}{\sqrt{E - eV_L}}, \quad (31)$$

в то время как полная плотность справа определяется выражением

$$\rho_R = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\mu_R} \frac{dE}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{E}} + \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mu_R}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{T(E)}{\sqrt{E}}. \quad (32)$$

Предполагая наличие электронейтральности, мы должны приравнять плотности⁶:

⁶ Дополнительное требование равенства плотностей равновесным значениям даст в нелинейном случае величину сдвига "пьедестала" барьера относительно электрохимических потенциалов в берегах.

$$\int_{\mu_R}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{1 + R(E)}{\sqrt{E - eV_L}} = \int_{\mu_R + eV_L}^{\mu_R} \frac{dE}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{E}} + \int_{\mu_R}^{\mu_L} \frac{dE}{2\pi} \frac{T(E)}{\sqrt{E}}. \quad (33)$$

Уравнение (33) даёт возможность вычислить напряжение V_L при произвольных зависимости прозрачности от энергии и разности электрохимических потенциалов.

Рассмотрим простой линейный случай и найдём V_L при малой разности $\Delta\mu \equiv \mu_L - \mu_R \ll \mu_R$; при таких условиях падение напряжения также мало, $|eV_L| \ll \mu_L$. Предположим, что $T(E)$ — константа в интервале $[\mu_R, \mu_L]$. Тогда, делая в (33) замену $\sqrt{E - eV_L} \rightarrow \sqrt{E}$ и вынося T и R из-под знака интеграла, получаем выражение для напряжения Ландауэра

$$eV_L = \Delta\mu R. \quad (34)$$

Напряжение V_L равняется нулю для идеально прозрачного проводника и достигает максимума, $eV_L = \Delta\mu$, когда все электроны отражаются. Ток выражается как (см. формулу (17))

$$I = \frac{2e}{h} T \Delta\mu, \quad (35)$$

откуда следует соотношение для сопротивления Ландауэра

$$R_L = \frac{V_L}{I} = \frac{h}{2e^2} \frac{R}{T}. \quad (36)$$

Отсутствие падения напряжения в идеальном проводнике долгое время являлось предметом оживлённых дискуссий. В результате стало понятно, что даже в этом случае происходит падение напряжения, но не в самом проводе, а на сочленениях с резервуарами (см. обсуждение в разделе 2.4).

2.4. Контактное сопротивление

Если в формуле (35) мы приравняем $\Delta\mu$ величине, заданной тянущим напряжением eV , то для кондактанса $G = I/V$ получим выражение⁷

$$G = \frac{2e^2}{h} T. \quad (37)$$

Сопротивление (36) отличается от обратной к G величины в "формуле Ландауэра" (37). Можно считать, что (37) — это кондактанс, измеренный двухконтактным способом, в то время как (36) — это сопротивление, измеренное в четырёхконтактной схеме⁸. Сопротивление Ландауэра учитывает только падение напряжения непосредственно на барьере⁹. Однако в одномерном проводнике падение напряжения возникает также на контактах с берегами, что и является причиной расхождения между двумя формулами Ландауэра. Если вычесть

V_L из тянущего напряжения $\Delta\mu = eV$, то получим падение напряжения V_A на входах в проводник:

$$V_A = \Delta\mu - eV_L = \Delta\mu T.$$

Полное падение напряжения можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} V &= V_A + V_{LD} = IR_L + IR_A = \\ &= I \frac{h}{2e^2} \frac{1 - T}{T} + I \frac{h}{2e^2} = I \frac{h}{2e^2 T} = \frac{I}{G}. \end{aligned}$$

В симметричном случае падение напряжения распределяется поровну между контактами. Падение напряжения $V_A/2$ на каждой границе (контакте) соответствует сопротивлению

$$R_S = \frac{h}{4e^2}, \quad (38)$$

которое является квантовым аналогом известного контактного сопротивления Шарвина [28]. Можно считать, что такое сопротивление обусловлено отражением старших мод на входе в провод (см. раздел 4).

На рисунке 3 приведён пример баллистического проводника ($T = 1$). Прикладывая напряжение, мы получаем ненулевой ток $I = 2e^2/hV$, хотя в самом одномерном проводнике падения напряжения не происходит из-за отсутствия отражения назад. Распределение падения напряжения поровну между контактами подробно изучено теоретически [29, 30] и проверено экспериментально [31, 32]. В целом описываемая ситуация, с точки зрения классической локальной проводимости, весьма необычна — электрическое поле внутри провода отсутствует (рис. 4), хотя полный ток отличен от нуля.

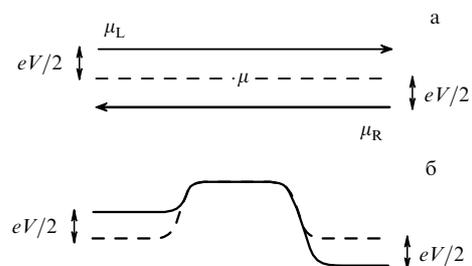


Рис. 3. (а) Отсутствие падения напряжения в идеальном проводнике. (б) Исходный одномерный электростатический потенциал (штриховая кривая) и его модификация тянущим напряжением (сплошная кривая).

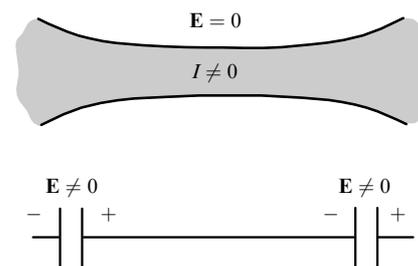


Рис. 4. В баллистическом одноканальном проводнике напряжение падает на входе и выходе.

⁷ Далее в формулах мы не будем в явном виде указывать зависимость прозрачности и элементов матрицы рассеяния от энергии, за исключением случаев, в которых эта зависимость является предметом рассмотрения.

⁸ Заметим, что и в этом случае, как показано в работе [27], реально измеряемое сопротивление является плохо определённым и зависит от деталей эксперимента.

⁹ Далее мы рассмотрим случай, в котором такие напряжения можно суммировать обычным образом, как в омическом проводнике.

Необычно также то, что джоулево тепло вследствие медленной энергетической релаксации диссипирует далеко в резервуарах, в то время как электромагнитная энергия, с точки зрения классической электродинамики, поступает в электронную систему на гораздо меньших масштабах, в областях падения напряжения — в контактах и на барьере.

В завершение отметим, что осциллирующая часть электронной плотности (так же как и её плавно изменяющаяся часть при конечном напряжении), которую мы выше не рассматривали, может приводить к дополнительному рассеянию электронов. Осцилляции плотности (осцилляции Фриделя) не полностью экранируются и порождают пространственно зависимый электростатический потенциал. Осциллирующая часть потенциала особенно важна ввиду того, что период осцилляций равен π/k_F и рассеяние на нём назад (на $2k_F$ в импульсном пространстве) будет сильным [33]. Поэтому вероятность прохождения $T(E)$, учитывающая весь потенциал рассеяния, может сильно отличаться от затравочной (определённой на локальном рассеивателе), и, кроме того, эта вероятность в принципе зависит от напряжения V . Если предположить, что амплитуда отражения не зависит от энергии, то для осциллирующей части плотности в равновесии можно получить

$$\delta n(x) = \frac{1}{|x|} \{ \text{Im}(r) [\cos(2k_F x) - 1] + \text{Re}(r) \sin(2k_F |x|) \}.$$

Случай независимого от энергии r реалистичен, например, при почти полном отражении ($r \approx -1$), но и для произвольного рассеивателя также возникают аналогичные осциллирующие зависимости.

Подчёркнём ещё раз отличие излагаемого подхода от более традиционных: вместо вычисления нелокального ядра проводимости $\sigma(r, r')$ для использования в формуле

$$j_x(r) = \int \sigma(r, r')_{\alpha\beta} E_\beta(r') dr' \quad (39)$$

вычисляется полная проводимость (кондактанс), определяющая полный ток в зависимости от напряжения, $I = GV$. Удобство такого подхода очевидно: вместо самосогласованного вычисления поля E для использования в формуле (39) нужно знать лишь полное падение напряжения V . Кондактанс при этом удаётся выразить через вероятность прохождения через проводник. (В нелинейном случае для точного решения задачи рассеяния должен быть также известен электростатический потенциал внутри проводника.)

Для решения более широкого класса задач рассмотрим в разделе 3 в качестве волновода для электронов многоканальный проводник.

3. Волноводы: многоканальный случай

Будем описывать квантовый проводник как проволоку, плавно соединяющуюся с резервуарами. Рассмотрим более формально геометрию, подходящую для описания такой системы.

Квазиодномерная система сформирована как сужение с бесконечно высокими стенками (или с нарастающим на бесконечности потенциалом) в поперечных направлениях (y, z) , так что транспорт возможен только

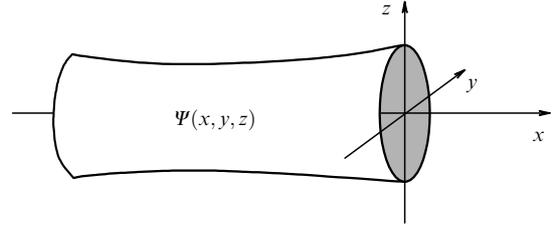


Рис. 5. Волновод, вытянутый вдоль оси x , с адиабатически медленно изменяющимся сечением.

вдоль оси x (рис. 5). Вдоль оси x могут распространяться плоские волны, принадлежащие различным модам или, как принято говорить в мезоскопической физике, каналам, которые имеют пространственную структуру связанных состояний в поперечных направлениях. Волновод может пропускать много мод. При низких температурах и узком волноводе только самая младшая мода оказывается существенной и транспорт становится эффективно одномерным (такую ситуацию мы фактически обсуждали в разделе 2). В общем случае число проводящих мод (каналов), участвующих в транспорте, конечно.

3.1. Квантовые моды

Напомним, как в простом случае при наличии трансляционной инвариантности (вдоль оси x) возникают моды вследствие квантования поперечного движения. Мы должны решить уравнение Шрёдингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x, y, z) \right] \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z), \quad (40)$$

где (пока) потенциал $V(x, y, z) = V(y, z)$ и граничные условия не зависят от x . В этом случае мы можем искать решение уравнения (40) в виде $\Psi(x, y, z) = \chi(y, z) \exp(ikx)$. При подстановке функции такого вида в (40) переменные разделяются и мы получаем уравнение для собственных значений

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_y^2 + \partial_z^2) + V(y, z) \right] \chi_n(y, z) = E_n \chi_n(y, z), \quad (41)$$

где n — индекс моды (канала), $\chi_n(y, z)$ — соответствующая волновая функция, E_n — энергия квантования в поперечном направлении. Функции $\chi_n(y, z)$ образуют полный,

$$\sum_n \chi_n(y, z) \chi_n^*(y', z') = \delta(y - y') \delta(z - z'), \quad (42)$$

и ортонормированный,

$$\int dy dz \chi_m^*(y, z) \chi_n(y, z) = \delta_{mn}, \quad (43)$$

набор. Общее решение уравнения (40) может быть разложено по этому набору:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_n c_n \chi_n(y, z) \exp(ik_n x), \quad (44)$$

где $k_n = \sqrt{2m(E - E_n)}/\hbar$ — волновой вектор в n -й моде (канале), c_n — константы. Моды с энергией $E < E_n$ являются затухающими, спадая как $\exp(-\kappa_n x)$, где $\kappa_n = \sqrt{2m(E_n - E)}/\hbar$.

3.2. Задача рассеяния в волноводе

Рассмотрим систему, которая при $x \rightarrow \pm\infty$ является трансляционно-инвариантным волноводом. Асимптотические решения даются выражением (44). Если имеется дополнительный потенциал или изменение граничных условий в окрестности некоторого конечного $x \approx x_s$, то мы можем сформулировать задачу рассеяния. Пусть падающая (слева или справа) волна имеет вид

$$\Psi^{\text{in}}(x, y, z) = \chi_n(y, z) \exp(-ik_n|x|). \quad (45)$$

Рассеянные волны могут быть записаны как

$$\Psi^{\text{out}}(x, y, z) = \sum_m S_{mn} \sqrt{\frac{k_n}{k_m}} \chi_m(y, z) \exp(ik_m|x|), \quad (46)$$

где сумма по m каналам берётся как для прошедших ($S_{mn} = t_{mn}$), так и отражённых ($S_{mn} = r_{mn}$) состояний. Дополнительный множитель $\sqrt{k_n/k_m}$ вводится для сохранения унитарности матрицы рассеяния S_{mn} , так что каждое из асимптотических состояний $\chi_n(y, z) \exp(ik_n x)/\sqrt{k_n}$ несёт единичный ток.

Вычислим электрический ток в волноводе справа от рассеивающего потенциала. Пусть μ_1 и μ_2 — электрохимические потенциалы резервуаров, а функции распределения электронов в них имеют вид

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu_\alpha)/\Theta_\alpha] + 1}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (47)$$

где Θ_α — температура резервуара в энергетических единицах. Будем считать здесь температуры Θ_1 и Θ_2 равными. Электроны с энергией E , исходящие из n -го канала левого резервуара ($\alpha = 1$), вносят слева от рассеивающего потенциала вклад в ток в единичном интервале энергии (как и в рассмотренных в разделе 2 чисто одномерных задачах), пропорциональный $f_1(E)(2e/h)$, а справа после рассеяния в канал с номером m дают вклад в ток, пропорциональный $f_1(E)(2e/h)T_{nm}$. Электроны, вылетающие справа из канала с номером n , обеспечивают в канале n начальный ток противоположного знака, $-f_2(E)(2e/h)$, а после рассеяния назад, кроме того, дают вклад $(2e/h)f_2(E) \sum_m R_{nm}$. В результате после суммирования по каналам ток выражается в виде

$$I = \frac{2e}{h} \sum_{n,m} \int_0^\infty dE [f_1(E)T_{nm} - f_2(E)(\delta_{nm} - R_{nm})], \quad (48)$$

где $\delta = 1$ при $n = m$ и $\delta = 0$ при $n \neq m$. Аналогичным образом можно сформулировать задачу рассеяния в многоконтактном случае, заменяя (или добавляя) номера мод (каналов) индексами резервуаров (рис. 6). Учтём теперь унитарность матрицы рассеяния и упростим выражение для тока:

$$I = \frac{2e}{h} \sum_{n,m} \int_0^\infty dE T_{nm} [f_1(E) - f_2(E)]. \quad (49)$$

Сумму по прозрачностям в (49) иногда удобно записать в виде следа по матрице амплитуд рассеяния, тогда для контактанса получим

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr} \{tt^\dagger\}. \quad (50)$$

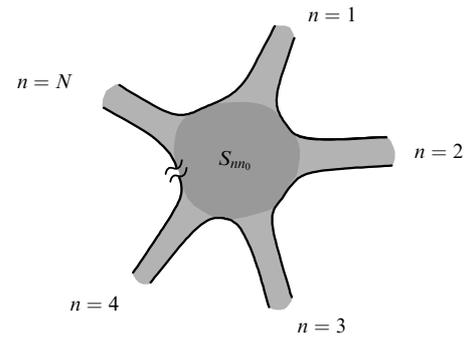


Рис. 6. Многоконтактный проводник.

В дальнейшем рассмотрении, где в выражениях не только для тока, но и для шума и более сложных величин будут возникать произведения матриц амплитуд прохождения и отражения вида tt^\dagger и $1 - rr^\dagger$, очень важно, что вследствие унитарности S такие эрмитовы матрицы имеют один и тот же набор собственных значений, T_1, T_2, \dots, T_N , а для произведения матриц вида $tt^\dagger tt^\dagger$ — соответственно $T_1^2, T_2^2, \dots, T_N^2$ и т.д. Каждое из этих собственных значений прозрачности является действительным числом, лежащим в интервале $[0, 1]$ (см. работы [23, 34, 35]). В свою очередь такая диагонализация в задаче означает наличие собственных мод (каналов), являющихся суперпозицией состояний типа (44), которые уже не смешиваются после рассеяния. Для контактанса в диагональном представлении получим

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr} \{tt^\dagger\} = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n. \quad (51)$$

3.3. Волновод с адиабатически медленно изменяющимся сечением

В общем случае граничные условия и потенциал в (40) неоднородны. Тем не менее частота изменения достаточно медленны и малы на масштабе длин волн. Тогда можно воспользоваться адиабатическим приближением: мы выделим быстрое движение поперёк волновода и медленное вдоль него. Для быстрого движения уравнение для собственных значений принимает вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_y^2 + \partial_z^2) + V(x, y, z) \right] \chi_n(x, y, z) = E_n(x) \chi_n(x, y, z) \quad (52)$$

для каждого поперечного сечения (см. рис. 5); при этом энергия поперечного квантования $E_n(x)$ становится слегка зависящей от x . Предполагая адиабатичность, сделаем подстановку

$$\Psi(x, y, z) = \chi_n(x, y, z) \phi_n(x), \quad (53)$$

где $\phi_n(x)$ — решение уравнения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E_n(x) \right) \phi_n(x) = E \phi_n(x) \quad (54)$$

для движения вдоль провода. Заметим, что энергия поперечного квантования $E_n(x)$ служит эффективным потенциалом $U(x)$ для медленного движения вдоль x . Выражение (53) является приближённым решением урав-

нения Шрёдингера при пренебрежении смешиванием мод. Условия справедливости приближения:

$$\left| \frac{\partial_x \chi_n(x, y, z)}{\chi_n(x, y, z)} \right| \ll \left| \frac{\partial_x \phi_n(x)}{\phi_n(x)} \right| = |k(x)|, \quad (55)$$

$$\left| \frac{\partial_x^2 \chi_n(x, y, z)}{\chi_n(x, y, z)} \right| \ll \left| \frac{\partial_x^2 \phi_n(x)}{\phi_n(x)} \right| \approx |k^2(x)|. \quad (56)$$

Рассмотрим теперь важный пример реального волновода — микросужение (квантовый точечный контакт) в двумерном электронном газе.

4. Квантовые контакты

4.1. Ток через квантовый точечный контакт

Рассмотрим контакт двух проводников. Если ширина контакта W настолько мала, что на ней укладывается не более нескольких длин волн электронов λ_F , то такой контакт принято называть квантовым точечным контактом (КТК). В эксперименте точечный контакт реализуется следующим образом [36, 37]: два массивных электрода соединяют слоем двумерного электронного газа (2DEG — 2-Dimensional Electron Gas), сформированного в области полупроводникового гетероперехода (рис. 7). Затем сверху к слою 2DEG подводят две пластины затвора¹⁰. Подавая на затвор потенциал V_g , можно "выдавливает" электроны из областей вблизи затвора, делая их недоступными для электронов и тем самым формируя сужение в 2DEG (это и есть точечный контакт). Чем выше подаваемое на затвор напряжение, тем больше запрещённая для электронов область и сильнее сужение.

Итак, рассмотрим систему с соединяющимися резервуарами N_1 и N_2 (рис. 8).

Будем считать, что система двумерна, это соответствует стандартной экспериментальной ситуации¹¹, представленной на рис. 7. Выберем направление осей x, y , как показано на рис. 8. Двумерный электронный газ, лежащий в плоскости x, y , дополнительно ограничен в направлении y посредством поданных на затворы

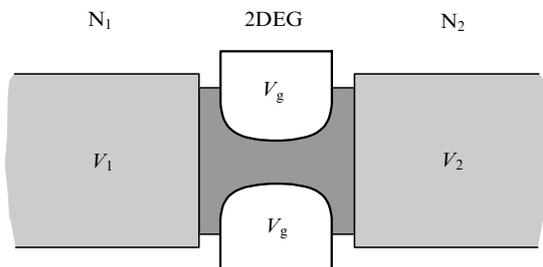


Рис. 7. Схема экспериментальной реализации точечного контакта. Два массивных электрода соединены слоем двумерного электронного газа, сформированного в полупроводниковой гетероструктуре. Сужение образуется с помощью напряжения V_g , подаваемого на затворы.

¹⁰ Это так называемая *split gate technique* — техника, разработанная авторами работ [37, 38].

¹¹ Точнее говоря, размерное квантование вдоль оси z настолько сильно, что при всех стандартных экспериментальных условиях всегда заполнена только самая нижняя мода.

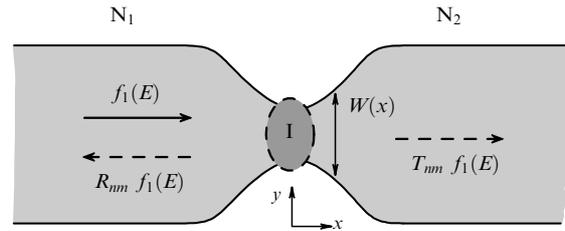


Рис. 8. Точечный контакт, имеющий форму сужения. Ширина сужения описывается функцией $W(x)$ с минимальным значением W_0 . Внутри сужения может находиться некоторый рассеиватель I (например, примеси).

напряжений. Смоделируем вид стенок граничным условием $\Psi[x, \pm W(x)/2] = 0$, так что движение оказывается возможным только в полосе шириной $W(x)$ в направлении оси x . Предполагая изменение $W(x)$ медленным и считая, что длина свободного пробега в 2DEG много больше всех характерных размеров контакта, для поперечных мод получаем

$$\chi_n(x, y) = \sqrt{\frac{2}{W(x)}} \sin\left(n\pi \frac{y + W(x)/2}{W(x)}\right). \quad (57)$$

Волновая функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет уравнению (54), описывающему движение в эффективном потенциале $U(x) = E_n(x) = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2mW^2(x))$, $n \geq 1$. Условия применимости (55) и (56) теперь сводятся к $W'(x)/W(x) \ll k(x)$ и $W''(x)/W(x) \ll k^2(x)$. Обозначим минимальное значение $W(x)$ как W_0 . Тогда эффективный потенциал (зависящий от поперечного квантового числа n) в получившемся уравнении Шрёдингера имеет вид потенциального барьера высотой

$$E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mW_0^2}, \quad (58)$$

убывающей до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$ (рис. 9).

Для волновой функции с номером моды n поперечное движение электрона задано условием того, чтобы на ширине контакта укладывалось целое число длин полу-волн $\lambda_F/2$. Поэтому для электронов, пролетающих через контакт, на ширине контакта укладывается либо одна полуволна, либо две, либо три и т.д. Для этих мод (волновода) используется термин "канал". Например,

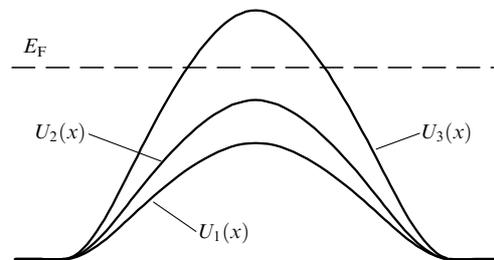


Рис. 9. Пример эффективного потенциала $U_n(x)$, возникающего в результате влияния стенок контакта. При каждом n потенциал имеет максимальное значение E_n , определяемое самой малой шириной. Ток обеспечивается электронами с энергией, близкой к энергии Ферми E_F . Изображение на рисунке соответствует двум открытым каналам (каналы 1 и 2, так как только для них выполняется соотношение $E_F > E_n$).

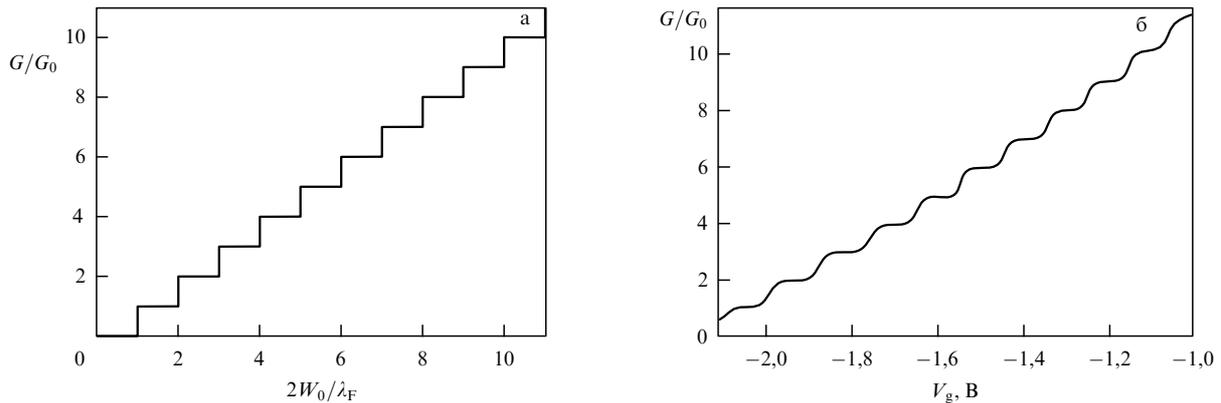


Рис. 10. (а) Квантование кондактанса точечного контакта при изменении ширины сужения W_0 с помощью напряжения на затворе (см. рис. 7). (б) Экспериментальные зависимости кондактанса сужения как функции напряжения на затворе V_g . С хорошей степенью точности можно считать, что W_0 — линейная функция V_g . График взят из первой экспериментальной работы [36]. Практически одновременно аналогичные результаты были представлены в [37].

принято говорить, что электрон в состоянии с волновой функцией χ_n находится в n -м канале¹².

Ввиду медленности изменения $W(x)$ уравнение (54) можно решить, используя квазиклассическое приближение. В главном приближении через сужение проникают только электроны с энергиями $E > E_n$. В общем случае нужно учитывать дополнительное рассеяние электронов в сужении, например, на потенциале примесей. Такой рассеиватель схематично изображён штриховым контуром на рис. 8.

4.2. Квантование кондактанса

Рассмотрим теперь линейный кондактанс $G = dI/dV$ при $V \rightarrow 0$. Предположим, что рассеяние на примесях в сужении отсутствует и каналы не перемещиваются. Тогда формула (51) определяет кондактанс непосредственно через прозрачности T_n в каждом канале:

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n(E_F). \quad (59)$$

Величина $G_0 = 2e^2/h$, которую, напомним, принято называть квантом кондактанса (или квантовым кондактансом), — это естественная единица измерения кондактанса в мезоскопических системах. В нулевом квазиклассическом приближении, описанном в разделе 2, для "открытых" каналов $T_{nm} = \delta_{nm}$, отсюда

$$G = NG_0, \quad N = \sum_n \theta(E_F - E_n), \quad (60)$$

где N — число открытых каналов, θ — функция Хевисайда.

Рассмотрим, как будет изменяться G , если мы будем изменять ширину сужения W_0 , прикладывая напряжение к затвору (см. рис. 9). Если $W_0 \rightarrow 0$, то мы получаем $E_F < E_1$, поэтому $N = 0$ и электроны не могут пройти через сужение. Качественно этот эффект хорошо понятен: находясь в узком сужении, электрон должен (в силу принципа неопределённости Гейзенберга) иметь большую энергию квантования, и если эта энергия превышает заданную, то пребывание электрона в данной

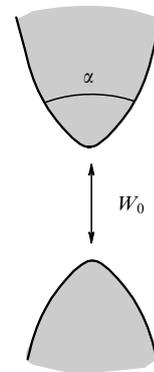


Рис. 11. Квантование наблюдается для углов $\alpha \gg 1/\pi^2$.

области классически запрещено. Если $E_1 < E_F < E_2$, то открыт один канал и $G = G_0$. Если $E_2 < E_F < E_3$, то открыты два канала, поэтому $G = 2G_0$ и т.д. Таким образом, кондактанс сужения квантуется в единицах G_0 (рис. 10), вполне аналогично тому, как это происходит в целочисленном квантовом эффекте Холла (ЦКЭХ)¹³. Аналогия становится ещё более прямой при наличии зеемановского расщепления (см. раздел 5.1), когда ступени расщепляются и кондактанс квантуется в единицах $G_0/2$, как и в ЦКЭХ.

На экспериментальном графике, приведённом на рис. 10б, высота ступенек подчиняется правилу квантования с хорошей точностью, в то время как их края размыты. Это может быть связано с различными причинами, такими как конечная температура, конечная вероятность подбарьерного прохождения и надбарьерного отражения и др. (см. раздел 4.3). Интересно, что в эксперименте сужение было довольно малым (рис. 11), в связи с чем можно было предполагать, что квантование

¹² Следует терминологически различать "каналы" (channels) и "подводы" (leads) в многоконтактных системах.

¹³ Для волновода с двумерным эффективным сечением картина квантования может быть гораздо сложнее, поскольку она зависит от структуры уровней в двумерном "ящике", образованном поперечным сечением. Когда имеется определённая пространственная симметрия и двумерная задача является интегрируемой (например, если сечение провода близко к кругу), уровни группируются и при изменении параметров может "включаться" почти одновременно сразу несколько каналов [39].

не будет таким выраженным. Эта загадка была разрешена в работе [40], почти сразу после опубликования результатов эксперимента. Как оказалось, условие квантования остаётся в силе до тех пор, пока угол α больше $1/\pi^2$, а не единицы, как можно было ожидать (условие применимости адиабатического приближения оказалось более строгим). Таким образом, в задаче есть специфический численный малый параметр $1/\pi^2$. Рассмотрим эту ситуацию подробнее, следуя [40].

4.3. Размытие ступеней кондактанса вследствие туннелирования через эффективный потенциал

Для более детального анализа примем в качестве модели для формы квантового точечного контакта (см. рис. 8, 11) зависимость

$$W(x) = \frac{W_0}{L} \sqrt{x^2 + L^2}, \quad (61)$$

где W_0 и L — ширина и длина сужения соответственно. Угол, под которым открываются стенки контакта, $\alpha = 2 \arctan(W_0/2L)$. В этом случае эффективный потенциал

$$U_n(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2 L^2 n^2}{2mW_0^2(x^2 + L^2)} \approx U_n(0) - \frac{m}{2} \Omega_n^2 x^2 \quad (62)$$

приблизительно квадратичен вблизи вершины барьера ($x = 0$) с коэффициентами разложения

$$U_n(0) = E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mW^2}, \quad \Omega_n = \frac{\hbar \pi n}{mWL}.$$

Задача о туннелировании через опрокинутый квадратичный потенциал может быть решена точно. Вероятность прохождения через (62) даётся формулой Кембла [41, 42],

$$T_n(E) = \frac{1}{\exp[2\pi(E_n - E)/(\hbar\Omega_n)] + 1}, \quad (63)$$

в виде размытой ступеньки, возрастающей от 0 при $E < E_n$ до 1 при $E > U_n(0)$, а кроссовер (переход) происходит на масштабе $\hbar\Omega_n/(2\pi)$. Для того чтобы можно было наблюдать ступени в кондактансе как функции W_0 , ширина ступени $\hbar\Omega_n/(2\pi)$ должна быть много меньше расстояния между ступенями: $U_{n+1}(0) - U_n(0) \approx \hbar^2 \pi^2 n/mW_0^2$, т.е.

$$\frac{L}{W} \gg \frac{1}{2\pi^2} \approx 0,051. \quad (64)$$

Поэтому даже для относительно короткого точечного контакта наблюдается хорошее квантование [36, 37]. Также существенно, что область потенциала, ответственная за рассеяние, достаточно мала, поэтому квадратичное приближение (62) оказывается оправданным и формула Кембла хорошо описывает поведение прозрачности в диапазоне от малых, $T \ll 1$, до больших, $T \approx 1$, прозрачностей. Неквадратичность потенциала рассеяния будет сказываться только при описании очень слабых отражений или прохождений.

Сделаем замечание о возможном смешивании каналов. В области сужения условие отсутствия смешивания каналов выполняется хорошо. Вдали от сужения, в берегах, ситуация для первых каналов противоположна: там движение вдоль оси x быстрое, а поперечное движение медленное и расстояния между уровнями поперечного квантования малы. Поэтому даже плавные

неоднородности приводят к перемешиванию мод. Если происходит смешивание проходящих мод, то это практически никак не влияет на картину квантования, в частности транспорт остаётся безотражательным на плато. Дело в том, что здесь как раз важны собственные моды, диагонализующие матрицу амплитуд прохождения. Собственные моды в области сужения выглядят как обычные поперечные моды, уже рассмотренные нами, в то время как в берегах они могут представлять собой сложную смесь проходящих мод. Но если происходит смешивание проходящих мод с отражёнными, то тогда, разумеется, величина кондактанса на плато может измениться и, более того, вся картина квантования может оказаться размытой.

Интересно, что при выбранных граничных условиях (непроницаемые стенки) переменные в уравнении Шрёдингера разделяются, если форма стенок описывается кривой второго порядка — параболой или гиперболой [43]. В этом случае отсутствие перемешивания каналов — точный факт, а не результат приближения. Кроме того, переменные разделяются в седловом потенциале [44], что тоже используется для моделирования квантовых точечных контактов [45]. Такая форма стенок также интересна тем, что позволяет решить задачу и в магнитном поле.

Квантование кондактанса наблюдается не только в КТК в 2ДЕГ, но и в контактах углеродных нанотрубок с металлами [46–48], в атомных контактах [49–52], а также оно было предсказано [53] и недавно наблюдалось для графена [54].

Природа квантования в этих системах, по сути, схожа с таковой в КТК, однако есть и различия: например, число каналов связано не только с видом орбитальных поперечных мод (в случае атомных контактов они обусловлены электронными волновыми функциями контактирующих атомов), но и с физическим количеством слоёв в нанотрубках или атомов в сужении. Адиабатичность сопряжения "узкого горла" с берегами также обусловлена не плавностью раскрытия проводящей области, как в КТК, а слабым туннелированием из квазидвумерного проводника в массивные берега на большой эффективной площади соприкосновения.

5. Электронный волновод в магнитном поле

Конечное магнитное поле в электронном волноводе, в частности КТК, приводит к двум эффектам. Во-первых, возникает зеэмановское расщепление. Во-вторых, в двух- и трёхмерных случаях возникают орбитальные эффекты, которые отсутствуют в одномерных системах, где векторный потенциал приводит просто к набору фазы и не влияет на наблюдаемые величины. В этом случае вид волновых функций поперечных мод (каналов) существенно изменяется, и именно эти изменения мы рассмотрим в разделах 5.1, 5.2.

5.1. Эффект Зеэмана в квантовом точечном контакте

Квантовый точечный контакт в двумерном газе, находящемся в плоскости xu , в магнитном поле, вектор которого лежит в той же плоскости (рис. 12а), описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U(x, y) + \mu_B \mathbf{B} \sigma, \quad (65)$$

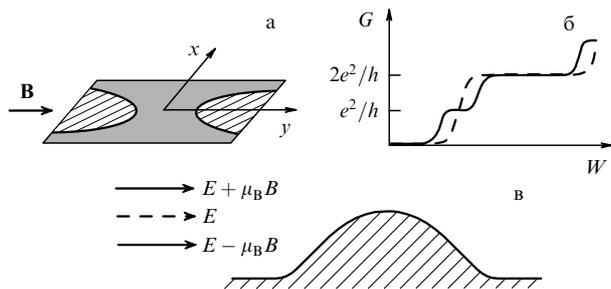


Рис. 12. (а) Квантовый точечный контакт в магнитном поле, коллинеарном плоскости двумерного газа. (б) Сплошная линия показывает ступеньки кондактанса в магнитном поле, штриховая — в отсутствие поля. (в) Каждое состояние рассеяния при энергии E расщепляется на два с энергиями $E \pm \mu_B B$.

где e — заряд электрона, μ_B — магнетон Бора, σ — матрицы Паули,

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_y. \quad (66)$$

Заметим, что магнитное поле в плоскости (66) не влияет на орбитальное движение частиц и мы можем привести гамильтониан (65) к виду

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \mu_B B\sigma_y, \quad (67)$$

т.е. представить \hat{H} как сумму гамильтониана без магнитного поля $\hat{H}_0 = p^2/2m + U(x, y)$ и зеемановского слагаемого. Каждому состоянию рассеяния или связанному состоянию гамильтониана \hat{H}_0 при энергии E соответствуют два решения с кинетическими энергиями $E \pm \mu_B B$ (см. рис. 12). При возрастании ширины сужения W спиновое вырождение снимается и кондактанс системы увеличивается ступенями по e^2/h (рис. 12б). Такое расщепление наблюдалось уже в пионерской работе [37], а впоследствии было подробно изучено в [55, 56]. Теоретически данный эффект рассмотрен в работе [57].

Заметим, что в режиме плато после нечётных ступеней через контакт течёт спин-поляризованный ток.

5.2. Краевые состояния в магнитном поле

Если магнитное поле \mathbf{V} перпендикулярно плоскости, изображённой на рис. 13а, то кроме зеемановского эффекта возникают орбитальные эффекты. Для простоты в этом разделе отвлечёмся от эффекта Зеемана и рассмотрим только орбитальные эффекты. Будем описывать их гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U(y), \quad (68)$$

где потенциал $U(y)$ не зависит от координаты x вдоль провода. Мы по-прежнему предполагаем, что магнитное поле однородно, но на этот раз оно перпендикулярно плоскости, в которой находится 2DEG,

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_z. \quad (69)$$

Такому магнитному полю соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A} = -By\mathbf{e}_x, \quad (70)$$

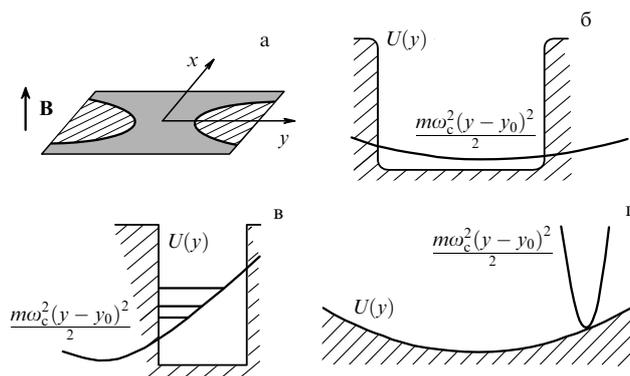


Рис. 13. (а) КТК в магнитном поле, перпендикулярном образцу. (б) Слабое магнитное поле в потенциальном ящике. (в) Краевые состояния в сильном магнитном поле при крутой стенке $U(y)$. (г) Краевые состояния в сильном магнитном поле при плавном потенциале $U(y)$.

который зависит только от y (калибровка Ландау). Гамильтониан (68) принимает вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{eB}{c} y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + U(y). \quad (71)$$

Переменные в уравнении Шрёдингера с гамильтонианом (71) могут быть разделены подстановкой

$$\Psi(x, y) = \exp(ikx)\chi(y). \quad (72)$$

Здесь поперечные моды $\chi(y)$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\chi_n''(y) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_n(k) - U(y) - \frac{m\omega_c^2}{2} (y - y_0)^2 \right] \chi_n(y) = 0, \quad (73)$$

где $\omega_c = |e|B/mc$ — циклотронная частота, $y_0 = \ell_B^2 k$, $\ell_B = \sqrt{c\hbar}/|e|B$ — магнитная длина. Решая уравнение (73), мы можем получить дисперсию $E_n(k)$ и волновую функцию при наличии магнитного поля. В отсутствие дополнительного потенциала, $U(y) = 0$, уравнение (73) сводится к уравнению для гармонического осциллятора. Решение даётся уровнями Ландау

$$E_n(k) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (74)$$

которые образуют плоскую зону без дисперсии [42].

В случае *слабого магнитного поля* в КТК можно рассмотреть квадратичный потенциал, происходящий от V , как возмущение (рис. 13б). Уровни энергии тогда принимают вид

$$E_n(k) = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \langle \chi_n^{(0)} | V(y) | \chi_n^{(0)} \rangle, \quad (75)$$

где E_n — энергия поперечного квантования в состоянии $\chi_n^{(0)}(y)$ (в отсутствие магнитного поля),

$$V(y) = \frac{m\omega_c^2}{2} (y^2 - 2y_0 y). \quad (76)$$

Усреднение по волновым функциям (57) даёт

$$\langle \chi_n^{(0)} | V(y) | \chi_n^{(0)} \rangle = \frac{m\omega_c^2 W^2(x)}{24} \left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} \right). \quad (77)$$

Такая добавка к энергии поперечного квантования сдвигает ступеньки и увеличивает ширину плато [57]. Ещё более существенный эффект состоит в сужении ширины ступенек из-за уменьшения кривизны эффективного потенциала рассеяния $\tilde{\Omega}_n^2 = \Omega_n^2 - \Omega_H^2$, где

$$\Omega_H^2 = \frac{\omega_c^2 W^2(0)}{12L^2} \left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right). \quad (78)$$

Оба эффекта приводят к улучшению квантования. Однако есть ещё один вклад того же порядка по магнитному полю, который может приводить к уширению ступеней, как сообщалось в работе [57]. Учёт изменения кинетической энергии во втором порядке теории возмущений (с линейным по магнитному полю слагаемым в (71)) усложняет картину — для первой ступени он всегда обеспечивает дальнейшее улучшение квантования, тогда как для следующих ступеней (из-за возможной смены знака во втором порядке теории возмущений) эффект может быть противоположным.

В то же время в работе [45] эффект магнитного поля состоял только в улучшении квантования. Такая разница может быть результатом рассмотрения различных моделей КТК и различного выбора параметров (хотя интуитивно улучшение квантования в магнитном поле представляется наиболее естественным результатом).

В случае *сильного магнитного поля и крутой стенки* поперечные моды могут существенно видоизмениться для больших k и B . Такая ситуация для магнитного поля в потенциальном ящике показана на рис. 13в, где парабола квадратичного потенциала сильно смещена относительно центра. Сформированные на границах состояния, называемые краевыми, играют ключевую роль в транспорте в режиме ЦКЭХ, когда магнитное поле настолько сильно, что даже в широком контакте вклад в транспорт вносит только несколько мод, собственно и являющихся краевыми состояниями.

Для краевых состояний в сильном магнитном поле при плавном потенциале, $U''(y_0)/m \ll \omega_c$, волновая функция краевого состояния не деформируется, $U(y)$ может быть заменён потенциалом $U(y_0)$, а уровни энергии имеют вид

$$E_n(k) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + U(y_0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (79)$$

Точное решение может быть получено для параболических стенок, $U(y) = m\omega_0^2 y^2/2$, при которых уравнение принимает вид

$$\chi_n''(y) + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E_n(k) - \frac{m}{2} [\omega_0^2 y^2 + \omega_c^2 (y - y_0)^2] \right\} \chi_n(y) = 0. \quad (80)$$

Вводя новые переменные

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_c^2 + \omega_0^2, \quad \tilde{y}_0 = y_0 \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega_0^2},$$

$$\tilde{E}_n(k) = E_n(k) - \frac{m\omega_c^2\omega_0^2}{2(\omega_c^2 + \omega_0^2)} y_0^2,$$

(80) можно свести к уравнению гармонического осциллятора

$$\chi_n''(y) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\tilde{E}_n(k) - \frac{m\tilde{\omega}^2 (y - \tilde{y}_0)^2}{2} \right] \chi_n(y) = 0 \quad (81)$$

со спектром

$$\tilde{E}_n(k) = \hbar\tilde{\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (82)$$

Возвращаясь к обычным переменным, получим

$$E_n(k) = \hbar\sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{m\omega_c^2\omega_0^2}{2(\omega_c^2 + \omega_0^2)} y_0^2, \quad (83)$$

где зависимость от k входит через $y_0 = \ell_B^2 k$. В уравнении (81) \tilde{y}_0 указывает на положение краевого состояния. Зафиксируем энергию E и выразим \tilde{y}_n через E и n :

$$\tilde{y}_0^2 = \frac{2\omega_c^2}{m\omega_0^2(\omega_c^2 + \omega_0^2)} \left[E - \hbar\sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right], \quad (84)$$

откуда видно, что чем больше энергия E , тем ближе краевое состояние к границе образца. В режиме ЦКЭХ весь избыточный неравновесный ток переносится именно этими состояниями. Связано это как раз с тем, что энергия краевых состояний выше, чем объёмных, в результате чего в типичном случае именно краевые состояния первыми касаются поверхности (уровня) Ферми и дают вклад в транспорт. Причём важно, что, как и в случае одномерного движения без магнитного поля, каждый канал (в пределе сильного поля — каждый уровень Ландау) несёт одинаковый ток, $i_0 = e/h$, в расчёте на интервал энергии (для одного направления спина) (см. формулу (14)). Это происходит благодаря тому, что ток при наличии магнитного поля можно по-прежнему выразить через скорость, которая сокращается со скоростью от плотности состояний, так же как и в нормальном случае.

Анализируя поведение поперечных мод, которые превращаются по мере увеличения магнитного поля в краевые состояния, можно убедиться в том, что в определённом смысле и квантование кондактанса в КТК, и квантование в ЦКЭХ имеют одну и ту же природу, а именно: включение новых мод при изменении параметров (ширины или магнитного поля) при переходе с плато на плато через ступеньки. Что касается безотражательности транспорта на плато, то в случае КТК она обусловлена безотражательностью движения в квазиклассическом потенциале, а в случае ЦКЭХ — похожим явлением — подавленностью рассеяния с края на край, поскольку краевые состояния с противоположными импульсами прижаты к противоположным стенкам.

В чистых проводниках представленная выше картина ясна и она не вызывает особых сомнений. В грязных проводниках картина является гораздо более сложной и обычно описывается с помощью совершенно других подходов. Однако между этими картинками можно провести аналогию, к которой мы вернёмся в разделе 8 при рассмотрении функции распределения для прозрачных в грязных проводниках.

Квантовый эффект Холла — сложное и многообразное явление, заслуживающее отдельного обсуждения, которое выходит за рамки нашего обзора. Здесь мы только хотели показать, что простой анализ краевых состояний в духе подхода Ландауэра уже может дать полезную информацию. Более подробный анализ с помощью матриц рассеяния был проведён в работе [14] (вслед за работами [58, 59], в которых природа ЦКЭХ

рассматривалась с привлечением краевых состояний). Довольно подробное обсуждение краевых состояний в теоретическом и в экспериментальном аспектах дано в обзоре [60].

6. Эффект Ааронова – Бома

Рассмотрим один из самых интересных эффектов, в котором проявляется нелокальность квантовой механики, — эффект Ааронова – Бома [61], наблюдавшийся в мезоскопических квантовых проводниках [62]. Пусть квантовый проводник (рис. 14) с одним открытым каналом (одна распространяющаяся мода) соединён в точке 1 с одномодовым кольцом, а в точке 2 соединён с другим квантовым одномодовым проводником. Рассмотрим вероятность прохождения частицы из одного проводника в другой через кольцо, учитывая, что кольцо находится в магнитном поле (например, в слабом однородном магнитном поле \mathbf{B} , перпендикулярном его плоскости).

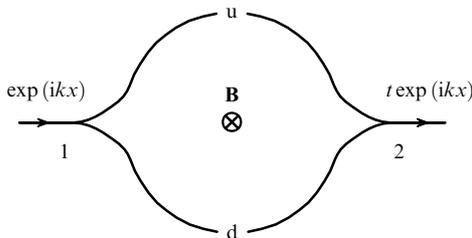


Рис. 14. Эффект Ааронова – Бома. Квантовый проводник с одним открытым каналом (одна распространяющаяся мода) соединяется в точке 1 с одномодовым кольцом. В точке 2 кольцо соединяется с другим квантовым одномодовым проводником.

Будем вычислять амплитуду рассеяния в духе фейнмановского подхода. Тогда, чтобы найти полную амплитуду рассеяния, необходимо просуммировать амплитуды прохождения частицы из одного проводника в другой через кольцо по всем возможным путям. Самый короткий путь — прохождение частицы из левого проводника в правый через верхнюю или нижнюю часть кольца. Для простоты будем считать, что кольцо и контакты симметричны, так что при $\mathbf{B} = 0$ амплитуды прохождения частицы по этим путям $t_{12}^{u(d)}$ одинаковы и равны t_{12} . Если магнитное поле \mathbf{B} отлично от нуля, то, проходя по верхней и нижней частям кольца, частица приобретает различные фазы:

$$t_{12}^{(u)} = t_{12} \exp(i\chi_1), \quad t_{12}^{(d)} = t_{12} \exp(i\chi_2), \quad (85)$$

$$\chi_1 = \frac{e}{c\hbar} \int_u \mathbf{A} \, d\mathbf{l}, \quad \chi_2 = \frac{e}{c\hbar} \int_d \mathbf{A} \, d\mathbf{l}, \quad (86)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал; интеграл берётся по траектории частицы между точками 1 и 2. Разность этих фаз можно выразить через отношение потока магнитного поля через кольцо $\Phi = \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l}$ к кванту магнитного потока $\Phi_0 = hc/e$,

$$\chi = \chi_1 - \chi_2 = \frac{e}{c\hbar} \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (87)$$

Тогда полные амплитуды и вероятность прохождения соответственно выражаются в виде

$$\tilde{t} = t_{12} \exp\left[\frac{i(\chi_1 + \chi_2)}{2}\right] \left[\exp\left(\frac{i\chi}{2}\right) + \exp\left(-\frac{i\chi}{2}\right) \right], \quad (88)$$

$$\tilde{t}' = t_{12} \exp\left[-\frac{i(\chi_1 + \chi_2)}{2}\right] \left[\exp\left(\frac{i\chi}{2}\right) + \exp\left(-\frac{i\chi}{2}\right) \right], \quad (89)$$

$$T = |\tilde{t}|^2 = 2T_{12} + 2T_{12} \cos \chi. \quad (90)$$

Обратим внимание на то, что амплитуда рассеяния слева направо \tilde{t}' , которая может быть найдена с помощью правила (359) (см. приложение П3) из выражения для \tilde{t} , в общем случае не равна \tilde{t} , в отличие от таковой в рассмотренных в разделах 2–4 задачах с симметричной ($t = t'$) матрицей рассеяния; здесь эта симметрия нарушается (однако вероятности прохождения по-прежнему равны, поскольку задача рассеяния является эффективно одномерной (см. сноску 5 в разделе 2.2)).

Периодическая зависимость вероятности прохождения T от потока магнитного поля и представляет собой эффект Ааронова – Бома. Когда система, показанная на рис. 14, справа и слева присоединена к электронным резервуарам, кондактанс такого контакта, согласно формуле Ландауэра, $G = G_0 T$. Если бы движение частицы по кольцу было некогерентным, то мы получили бы $T = 2T_{12}$. Благодаря интерференции $T = 0$, когда $\chi = \pi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Обращение прозрачности в нуль является индикатором наличия так называемого резонанса Фано [63], который возникает при гибридизации непрерывного и дискретного спектров¹⁴. В случае $\chi = 2\pi n$ кондактанс в два раза больше, чем в некогерентном случае.

Следует отметить, что в уравнении (88) мы учли далеко не все вклады в амплитуду рассеяния и ограничиваться только двумя амплитудами, вообще говоря, некорректно. Частица может протуннелировать в точке 1 в кольцо из левого проводника, обойти несколько раз вокруг кольца и только после этого пройти в правый проводник. Одна из возможностей (реализованная в реальных экспериментах) избежать многократных отражений, характерных для интерферометра типа Фабри – Перо, состоит в использовании интерферометра типа Маха – Цендера, в котором интерferируют только две амплитуды¹⁵ (рис. 15). При этом, вообще говоря, требуется изготовить безотражательный рассеиватель ("делитель потока"). Такая задача трудновыполнима, но в условиях квантового эффекта Холла осуществима (см., например, работу [64]).

7. Двойной барьер: интерферометр Фабри – Перо

Как упоминалось во введении, часто в мезо- и нано-квазиодномерных проводниках рассеяние на реальном потенциале можно моделировать рассеянием на потенциалах, для которых задача решается точно. Один такой

¹⁴ В обычных чисто одномерных задачах рассеяния на конечных потенциалах прозрачность никогда не обращается в нуль.

¹⁵ Поскольку геометрия такого интерферометра не одномерна (имеется четыре контакта), вероятности прохождения, вообще говоря, уже не будут симметричными по индексам контактов при ненулевом магнитном потоке.

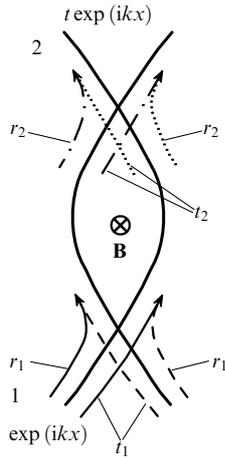


Рис. 15. Безотражательное рассеяние на "четырёххвостнике".

пример мы рассмотрели в разделе 4.3, где использовалась формула Кембла для рассеяния на квадратичном потенциале. Другим, быть может наиболее часто употребляемым, примером является использование дельта-функции Дирака $\delta(x)$. Потенциал может быть описан как $U(x) = \alpha\delta(x)$, если область его действия меньше, чем длина волны λ рассеивающейся частицы. В случае металлов такое описание обычно справедливо для границ между различными материалами. Однако в квазиодномерных проводниках, где эффективная длина волны может существенно превышать 1 нм, граница применимости такого описания расширяется и даже для точечных квантовых контактов иногда можно использовать данное приближение.

Амплитуды рассеяния в таком потенциале даются известными выражениями:

$$t = t' = \frac{1}{1 + iZ}, \tag{91}$$

$$r = r' = \frac{iZ}{1 + iZ}, \tag{92}$$

где

$$Z = \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}. \tag{93}$$

7.1. Двойной δ -барьер

Другим чрезвычайно важным случаем, к которому мы несколько раз обратимся в дальнейшем, является рассеяние на двойном барьере. Двойной барьер предста-

вляет собой структуру с двумя рассеивателями, соединёнными последовательно. Такой рассеиватель может успешно моделировать транспорт через квантовую точку, сформированную, например, в углеродной нанотрубке. При условии когерентности транспорта из-за многократных рассеяний возникает интерференция и появляются резонансы в амплитуде прохождения и прозрачности двойного барьера. Как правило, каждый из барьеров можно описать δ -функцией. Амплитуды прохождения и отражения данной структуры могут быть вычислены стандартным способом — "сшиванием" волновых функций по разные стороны от рассеивателей. Однако мы приведём более наглядный, основанный на аналогии с оптическим интерферометром Фабри–Перо способ вычисления, также дающий точный результат. Метод состоит в суммировании всех возможных квазиклассических траекторий с последовательными отражениями, по которым может пройти частица (формальное обоснование метода можно получить интегрированием по фейнмановским траекториям). Кроме того, этот метод позволяет учесть флуктуации фазы, набираемой при движении между барьерами.

Пусть левый рассеиватель имеет амплитуды прохождения и отражения t_1 и r_1 , а правый — t_2 и r_2 ; расстояние между барьерами L . Все возможные пути частицы показаны на рис. 16. Амплитуда прохождения даётся суммой ряда

$$t = t_2 t_1 + t_2 [r_1' r_2 \exp(2ikL)] t_1 + t_2 [r_1' r_2 \exp(2ikL)]^2 t_1 + \dots, \tag{94}$$

где первое слагаемое соответствует траектории, проходящей через два барьера без отражения, второе — траектории с двумя отражениями, формирующими одну петлю и т.д. Суммируя ряд (геометрическую прогрессию), получаем

$$t = t' = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1' r_2 \exp(2ikL)}. \tag{95}$$

Напомним, что $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$ и $t' = t$, если гамильтониан системы инвариантен к обращению времени (в общем случае $r \neq r'$ при отсутствии пространственной симметрии).

Аналогично мы можем просуммировать траектории для амплитуды отражения назад:

$$r = r_1 + t_1 r_2 \exp(2ikL) t_1 + t_1 [r_2 \exp(2ikL) r_1] r_2 \exp(2ikL) t_1 + \dots, \tag{96}$$

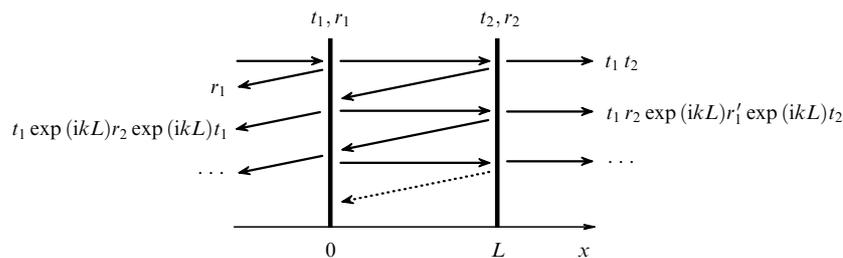


Рис. 16. Двойной барьер (два рассеивающих потенциала, расположенных последовательно) можно рассматривать как аналог известного в оптике интерферометра Фабри–Перо.

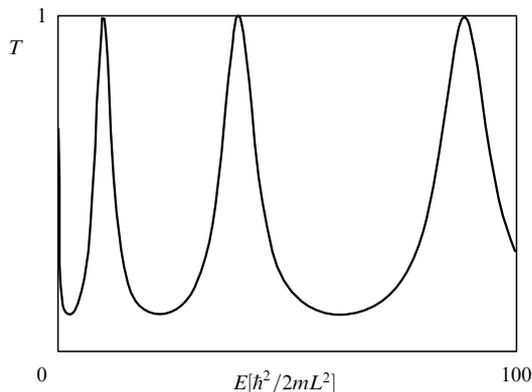


Рис. 17. Вероятность прохождения T как функция энергии; $T_1 = T_2 = 0,5$ и $\chi^r = 0$. (Из работы [65].)

что даёт

$$r = r_1 + \frac{t_1 t_1 r_2 \exp(i2kL)}{1 - r_1 r_2 \exp(2ikL)} = \frac{r_1 + r_2 \exp(2ikL)(t_1 t_1 - r_1^2)}{1 - r_1 r_2 \exp(2ikL)}. \quad (97)$$

Прозрачность всей системы

$$T \equiv |t|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \theta}, \quad (98)$$

где $\theta = 2kL + 2\chi^r$, $T_i = |t_i|^2$, $R_i = |r_i|^2$ — вероятности прохождения и отражения для барьеров, $\chi^r = (\chi_1^r + \chi_2^r)/2$ (например, $\chi_1^r \equiv \arg r_1^r$). Соотношение (98) проиллюстрировано на рис. 17. Полная прозрачность $T(E)$ достигает максимума при $\theta = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots$, что соответствует волновым векторам $k_n = (\pi n - \chi^r)/L$ с энергиями

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2} (\pi n - \chi^r)^2. \quad (99)$$

Максимальное значение $T(E)$,

$$T_{\max} = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}, \quad (100)$$

равно единице¹⁶ при $T_1 = T_2$ и $4T_1 T_2 / (T_1 + T_2)^2$ при $T_i \ll 1$, $i = 1, 2$.

Полученная вероятность прохождения отражает важное свойство: для симметричного барьера с $|t_1| = |t_2|$ резонансы идеальны, $|t| = 1$. Таким образом, двухбарьерная структура в резонанс становится идеально прозрачной (если отвлечься от набора фазы) даже при очень сильном рассеянии на каждом из барьеров. Этот эффект, который возникает вследствие интерференции, является индикатором полной когерентности движения частицы. Если когерентность отсутствует, то вероятность прохождения определяется произведением вероятностей, $T \approx T_1 T_2$, которое может быть много меньше единицы. Измерение T используется для экспериментальной проверки степени когерентности. Заметим, что если $T < 1$, то выяснить указанным способом, когерентна система или

¹⁶ Мы предполагаем, что T_1, T_2 и χ^r практически не зависят от энергии на масштабах порядка расстояния между резонансами.

нет, невозможно. Однако случай $T = 1$ однозначно указывает на полную когерентность.

Вне резонанса (в области деструктивной интерференции)

$$T = T_{\min} = \frac{T_1 T_2}{(1 + \sqrt{R_1 R_2})^2}. \quad (101)$$

При $T_1, T_2 \ll 1$ получаем $T \approx T_1 T_2 / 4$. Эффект деструктивной интерференции оказывается сильнее эффекта сдвига фазы, который мы подробнее обсудим ниже.

Определим расстояние между резонансами ("спейсинг") как

$$\Delta_n = \frac{|E_{n+1} - E_{n-1}|}{2} = 2\pi \frac{\hbar^2 |\pi n - \chi^r|}{2mL^2} = \frac{\pi \hbar v_n}{L} = \pi \hbar v_n, \quad (102)$$

где $v_n = (dE/\hbar dk)|_{E=E_n}$ — скорость электрона, движущегося между потенциальными стенками двухбарьерного потенциала. Заметим, что резонансные энергии не эквидистантны и определение $\Delta_n = |\partial E_n / \partial n|$ даёт тот же результат. Величина

$$v_n = \frac{v_n}{L} \quad (103)$$

имеет размерность частоты; её физический смысл — число попыток электрона в единицу времени выйти из ловушки между потенциальными барьерами.

Проанализируем теперь выражение (98) вблизи резонансной энергии E_n (99). Для этого разложим косинус в знаменателе в правой части (98) до второго порядка по отклонению энергии от резонансной $\delta E_n = E - E_n$:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dE_n} \right)^2 (\delta E_n)^2, \quad (104)$$

$$\frac{d\theta}{dE_n} = \frac{d\theta}{dE} \Big|_{E=E_n} = \frac{1}{\hbar v_n}.$$

Подставляя это выражение в (98), найдём, что вблизи n -го резонанса вероятность прохождения может быть аппроксимирована функцией Лоренца (что соответствует приближению Брейта – Вигнера [42]):

$$T(E \sim E_n) \approx T_{\text{BW}} = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + (\delta E_n)^2} T_{\max}. \quad (105)$$

Здесь мы определили полуширину резонанса как

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \frac{dE}{d\theta} \Big|_{E=E_n} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\hbar v_n (1 - \sqrt{R_1 R_2})}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (106)$$

Можно аппроксимировать T функциями Лоренца при всех энергиях:

$$T(E) \approx \sum_n T_{\text{BW}}(\delta E_n). \quad (107)$$

Относительная погрешность аппроксимации (107) не превышает нескольких процентов, даже если $T_1, T_2 \lesssim 0,5$. Например, если мы добавим на рис. 17 график аппроксимации (107) с теми же параметрами, которые определяют график T , приведённый на этом же рисунке, то оба графика совпадут настолько хорошо, что визуально разница будет незаметна [65].

Для выраженного резонанса, $T_1, T_2 \ll 1$, часто используются более простые выражения, имеющие более

наглядный вид. Введём парциальные ширины резонансов

$$\Gamma_n^{(i)} = \frac{d\theta}{dE_n} T_i = \hbar v_n T_i, \quad i = 1, 2. \quad (108)$$

Отношение $\Gamma_n^{(i)}/\hbar$ имеет смысл числа успешных попыток частицы выйти в течение единицы времени из ловушки между стенками двухбарьерного потенциала. Разлагая правую часть (105) по малым вероятностям прохождения через потенциальные стенки, найдём, что вблизи резонанса

$$T(E) \approx \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} A_n(E - E_n), \quad (109)$$

$$A_n(\epsilon) = \frac{\Gamma_n}{\epsilon^2 + (\Gamma_n/2)^2}, \quad (110)$$

где $\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}$ — полная ширина резонанса, A — функция Лоренца. Тогда $\gamma_n = \hbar v_n(T_1 + T_2)/4 = \Gamma_n/4$. Как видим, резонансы становятся тем резче, чем меньше T_1 и T_2 .

Обсудим теперь эффекты сбоя фазы, о которых упоминалось выше. Перепишем формулу (94), добавив в каждое слагаемое фазовые множители со случайными фазами α_i , $i = 1, 2, \dots$,

$$t = t_2 t_1 \exp(i\alpha_1) + t_2 [r'_1 r_2 \exp(2ikL)] t_1 \exp(i\alpha_2) + t_2 [r'_1 r_2 \exp(2ikL)]^2 t_1 \exp(i\alpha_3) + \dots \quad (111)$$

Физически эти фазы могут появиться из-за флуктуаций во времени электростатического потенциала в квантовой точке (т.е. в области между барьерами), что следует учесть при многократных отражениях внутри резонансного потенциала, которые описываются¹⁷ слагаемыми суммы (94).

Найдём теперь вероятность прохождения, усреднив её по реализациям фаз α_i , считая, что α_i — независимые случайные величины с дисперсией, много большей 2π . Такая модель соответствует предположению о том, что длина сбоя фазы меньше расстояния между барьерами. Тогда

$$\langle T \rangle_\alpha = |t_2 t_1|^2 + |t_2 [r'_1 r_2 \exp(2ikL)] t_1|^2 + |t_2 [r'_1 r_2 \exp(2ikL)]^2 t_1|^2 + \dots = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}. \quad (112)$$

Некогерентное туннелирование, описываемое уравнением (112), интересно сравнить с тем, которое в англоязычной литературе принято называть "sequential tunneling" (последовательное туннелирование) (см. [72, 73]). Последовательное туннелирование обычно относят к ситуации, при которой в квантовой точке устанавливается квазиравновесное распределение. При этом полное сопротивление равно сумме полных сопротивлений двух барьеров,

$$R_s = \frac{\hbar}{2e^2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (113)$$

В то же время для некогерентного туннелирования (т.е. для усреднённой по фазам прозрачности, рассмотренной выше) сопротивление

$$R = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{T_1 + T_2 - T_1 T_2}{T_1 T_2} = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - \frac{\hbar}{2e^2} \quad (114)$$

меньше R_s на величину контактного сопротивления, сформированного внутренними модами области между барьерами.

Возникает интересный вопрос: когда справедливо простое суммирование ландауэровских сопротивлений? Например, если считать, что внутри точки происходит релаксация по импульсам с одним направлением движения, так что для каждого направления возникают независимые поверхности (точки) Ферми, то дополнительного падения напряжения не происходит и суммировать ландауэровские напряжения можно (считая, что дельта-функция обеспечивает рассеяние, независимое от энергии). Заметим, что рассуждения о том, как суммируются сопротивления Ландауэра при усреднении по амплитудам рассеяния в различных вариантах, были использованы при рассмотрении скейлинговой теории локализации в хорошо известных работах [6, 25]¹⁸.

Если $T_1, T_2 \ll 1$, то

$$\langle T \rangle_\alpha \approx \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \quad (115)$$

Обратим внимание на то, что эффект деструктивной интерференции (см. уравнение (101)) значительно сильнее подавляет T , чем фазовая некогерентность: в первом случае $T \propto T_1 T_2/4$, а во втором — $T \propto T_1/2$ при $T_1 \sim T_2 \ll 1$.

7.2. Транспортные свойства контактов с резонансным потенциалом

Рассмотрим квантовый контакт между двумя электронными резервуарами, в котором рассеивателем служит резонансный потенциал, аналогичный рассмотренному в разделе 7 (см. рис. 16). Для простоты будем считать, что открыт только один канал, так что уравнение (48) сводится к следующему:

$$I = \frac{2e}{h} \int_0^\infty dE [f_1(E) - f_2(E)] T(E). \quad (116)$$

Будем также полагать, что $T_1, T_2 \ll 1$, поэтому приближение Брейта–Вигнера в виде (109) применимо. Тогда

$$T(E) \approx \sum_n \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} A_n(E - E_n), \quad (117)$$

$$A_n(\epsilon) = \frac{\Gamma_n}{\epsilon^2 + (\Gamma_n/2)^2}, \quad (118)$$

¹⁷ Электронный транспорт при наличии зависящих от времени полей может быть также описан с помощью матриц рассеяния; этому посвящено заметное количество работ (см., например, [66–71]). Мы не затрагиваем эту тему ввиду ограниченности объёма обзора.

¹⁸ Более аккуратно вопрос о прозрачности проводника при большом количестве рассеивателей со случайными параметрами рассмотрен в работе [34], где для описания эффекта добавления дополнительного рассеивателя использовалась трансфер-матрица. Суммарная прозрачность, как оказалось, ведёт себя подобно частице, случайным образом диффундирующей в пространстве параметров.

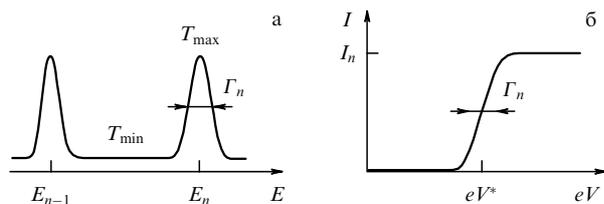


Рис. 18. (а) Прозрачность T как функция энергии. (б) Ток как функция тянущего напряжения V . В симметричном случае каждый резонанс даёт приращение тока на величину $I_n = (2e/h)\pi\Gamma_n$.

где $\Gamma_n^{(i)}$ — парциальные ширины резонансов ($i = 1, 2$), $\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}$ — полная ширина резонанса (рис. 18а). Подставив (117) в выражение (116), найдём (при температуре $\Theta = 0$)

$$I = \frac{2e}{h} \sum_n \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} \int_{E_1^\perp}^V dE A_n(E - E_n), \quad (119)$$

где мы ввели верхний индекс \perp у энергии поперечного квантования в сужении E_1^\perp , чтобы отличить её от резонансной энергии потенциала рассеяния.

Пусть в интервале $E_n \in [E_1^\perp, V]$ находится несколько резонансов вероятности прохождения. Тогда, согласно (119), вклад каждого из них в ток равен

$$I_n = \frac{4e}{h} \pi \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} \quad (120)$$

(мы учли, что $\int_{-\infty}^{\infty} A_n(E) dE = 2\pi$). Для симметричного случая получаем особенно простое выражение:

$$I_n = \frac{2e}{h} \pi \Gamma_n. \quad (121)$$

Вольт-амперная характеристика при этом имеет характерный ступенчатый вид (рис. 18б).

8. Кондактанс в грязных проводниках

Рассмотрим теперь многоканальный грязный проводник, в котором электроны диффундируют от одного берега к другому (рис. 19). Некоторые важные характеристики такого образца при низких температурах, когда можно пренебречь всеми неупругими процессами, как оказывается, удивительным образом напоминают таковые в рассмотренных в разделах 4 и 7 примерах квантового точечного контакта и двухбарьерной системы.

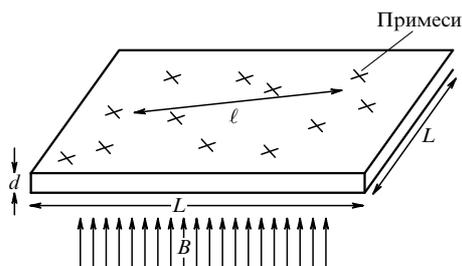


Рис. 19. Двумерный грязный проводник. Крестиками обозначены положения примесей, которые флуктуируют от образца к образцу, l — длина свободного пробега. Перпендикулярно образцу может быть приложено магнитное поле.

8.1. Мезоскопические флуктуации кондактанса

Впервые вопрос о сильных флуктуациях сопротивления таких мезоскопических проводников был рассмотрен в работах Азбеля [74] (именно начиная с этих работ для подобных систем стал использоваться термин "мезоскопические").

Начало количественного изучения мезоскопических квантовых эффектов в транспорте можно отсчитывать от теоретических работ Альтшулера [75] и Ли, Стоуна [76], в которых были предсказаны большие флуктуации кондактанса G в двумерной грязной плёнке даже для большого (но всё ещё когерентного) образца. Стандартной величиной для характеристики флуктуаций кондактанса от образца к образцу является среднее квадратичное отклонение

$$\langle \delta G^2 \rangle_{\text{im}} = \langle (G - \langle G \rangle_{\text{im}})^2 \rangle_{\text{im}}, \quad (122)$$

где индекс im означает усреднение по всем возможным вариантам расположения примесей, а средний кондактанс

$$\langle G \rangle_{\text{im}} = \frac{dL\sigma}{L}, \quad (123)$$

где σ — удельная проводимость. Авторы работ [75, 76] обнаружили, что стандартное отклонение

$$\delta G = \sqrt{\langle \delta G^2 \rangle_{\text{im}}} \approx G_0 \quad (124)$$

является универсальным (т.е. не зависит от деталей беспорядка) и приблизительно равняется кванту кондактанса $G_0 = e^2/h$. Относительные флуктуации

$$\frac{\delta G}{\langle G \rangle_{\text{im}}} \approx \frac{e^2}{h} \frac{1}{d\sigma} \quad (125)$$

не зависят от размера образца L . Это удивительный результат, поскольку обычно предполагалось, что на больших масштабах проводимость даже квантовых проводников является самоусредняющейся величиной и её относительные флуктуации уменьшаются с увеличением размера образца. Тем не менее в когерентном квантовом проводнике это не так. Кроме того, Ли и Стоун [76], а также Альтшулер и Хмельницкий [77] описали мезоскопические флуктуации как функцию приложенного магнитного поля и других параметров. Следующий аргумент¹⁹ помогает качественно понять причину флуктуаций кондактанса при изменении магнитного поля: кондактанс пропорционален вероятности $P_{a \rightarrow b}$ для электрона, стартовавшего с одной стороны проводника, достичь его противоположной стороны. В духе формулировки через интеграл по траекториям вероятность может быть представлена как квадрат суммы амплитуд по всем возможным траекториям:

$$P_{a \rightarrow b} = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2. \quad (126)$$

Здесь для простоты мы рассмотрели только две квазиклассические траектории с амплитудами A_1, A_2 (рис. 20). Для средней вероятности $\langle P_{a \rightarrow b} \rangle_{\text{im}}$ перекрёстные слагаемые $A_1 A_2^*$ и $A_1^* A_2$ исчезают благодаря

¹⁹ Аргумент высказан Д.Е. Хмельницким.

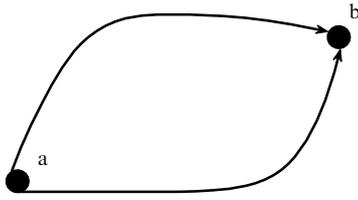


Рис. 20. Интерференция между двумя траекториями, дающими вклад в кондактанс. Магнитное поле наводит фазу Ааронова–Бома, изменяющую относительную фазу между траекториями. Чувствительность к магнитному полю (т.е. величина изменения поля, приводящего к изменению кондактанса на величину порядка G_0) задаётся условием набора кванта магнитного потока $\Phi_0 = hc/e$ на площадь образца L^2 .

усреднению по случайной фазе (исключение составляют вклады от траекторий или сегментов траекторий, повторяющих движение навстречу и дающих вклад в слаболокализационные поправки, которые здесь мы не обсуждаем); две вероятности просто складываются, $\langle P_{a \rightarrow b} \rangle_{\text{im}} = |A_1|^2 + |A_2|^2 = P_1 + P_2$, и интерференционные члены исчезают. При вычислении второго момента,

$$\begin{aligned} \langle P_{a \rightarrow b}^2 \rangle_{\text{im}} &\propto (P_1 + P_2)^2 + 2|A_1|^2|A_2|^2 = \\ &= \langle P_{a \rightarrow b} \rangle_{\text{im}}^2 + 2P_1P_2, \end{aligned} \quad (127)$$

слагаемые с $A_1A_2^*$ и $A_1^*A_2$ также исчезают после усреднения. Но дополнительные слагаемые $2|A_1|^2|A_2|^2$ остаются после усреднения конечными. Среднеквадратичное отклонение выражается в виде

$$\delta P_{a \rightarrow b} = \sqrt{\langle (P_{a \rightarrow b} - \langle P_{a \rightarrow b} \rangle_{\text{im}})^2 \rangle_{\text{im}}} = \sqrt{2P_1P_2}. \quad (128)$$

Если теперь мы приложим слабое магнитное поле, то относительные фазы между всеми траекториями изменятся и соответственно изменится кондактанс. Таким образом, кондактанс флуктуирует при изменении магнитного поля, так же как и при изменении реализации случайного потенциала. Детальные вычисления показывают, что величина флуктуаций порядка $G_0 = 2e^2/h$ (рис. 21). Аналогичные флуктуации кондактанса также возникают как функции энергии Ферми (химического потенциала). Характерный масштаб по энергии, на котором происходят флуктуации, определяется величиной, обратной времени диффузии через образец. Это соответствует тому, что на типичной траектории за время диффузии набирается фаза $\delta kL \sim \pi$. Такие флук-



Рис. 21. Флуктуации кондактанса при изменении магнитного поля.

туации возникают при изменении напряжения (рис. 22) [78], а также в термоэлектрических явлениях (см. раздел 9). Экспериментально флуктуации кондактанса наблюдались в работах [79, 80] (см. также результаты более позднего эксперимента и ссылки в статье [81]).

Заметим, что ещё в пионерских работах Азбеля [74] высказывались мысли о неких резонансах в прозрачности грязных образцов.

8.2. Функция распределения Дорохова

Рассмотрим вопрос о флуктуациях с точки зрения матриц рассеяния. Кондактанс, записанный с помощью "собственных" каналов, для которых матрица прозрачностей диагонализуется, имеет вид

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n. \quad (129)$$

Для проводника с N_{ch} каналами представим (129) как

$$G = N_{\text{ch}} \frac{2e^2}{h} \langle T \rangle, \quad (130)$$

где $\langle T \rangle$ — усреднённая по всем каналам прозрачность. Сравнивая теперь (130) с обычным выражением

$$G = \frac{S}{L} \sigma, \quad (131)$$

где σ — проводимость, вычисленная по формуле Кубо [82, 83] при нулевой частоте, $\sigma = e^2 v D$, v — плотность состояний на поверхности Ферми, $D = v_F \ell / 3$ — коэффициент диффузии, получаем

$$G = \frac{2e^2}{h} \frac{S k_F^2}{\pi^2} \frac{\pi \ell}{3L}. \quad (132)$$

Заметим, что число каналов в проводе может быть оценено в квазиклассическом приближении как $N_{\text{ch}} =$

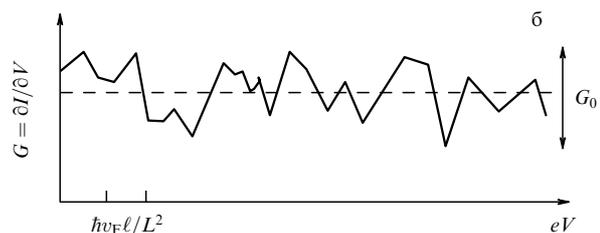
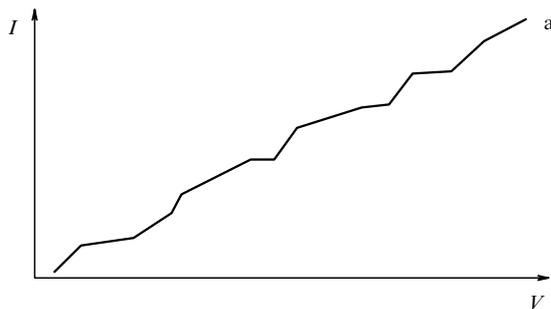


Рис. 22. Флуктуации кондактанса при изменении напряжения.

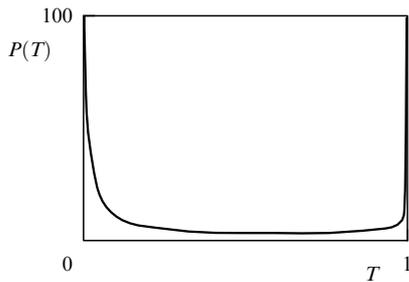


Рис. 23. Функция распределения Дорохова $P(T)$, которая является бимодальной, так что наиболее вероятные значения T — это 0 или 1.

$= Sk_F^2/\pi^2$ (т.е. один канал на площадь $\pi^2/k_F^2 = (\lambda_F/2)^2$). Сопоставляя выражения (130) и (132), получаем среднюю прозрачность

$$\langle T \rangle = \frac{\pi\ell}{3L}, \quad (133)$$

которая, будучи пропорциональной ℓ/L , стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$. Означает ли это, что типичная прозрачность приблизительно равна ℓ/L ? Оказывается, нет. Удивительное свойство транспорта в диффузных проводниках состоит в том, что для "собственных" каналов, для которых задача диагональна (нет перепутывания каналов), прозрачность будет или очень мала, или близка к единице. В действительности большинство каналов практически закрыто и $T \approx 0$. И только $n = N_{\text{ch}} \ell/L$ каналов почти полностью открыто с $T \approx 1$, и именно они обеспечивают всю проводимость. Функция распределения для T , впервые вычисленная Дороховым (рис. 23), имеет вид [34, 84]

$$P(T) \propto \frac{1}{T\sqrt{1-T}}. \quad (134)$$

Это общий результат для квазиодномерного проводника (толстой проволоки) с полной длиной $L \ll L_{\text{loc}}$, где длину локализации L_{loc} можно оценить как $L_{\text{loc}} \approx N_{\text{ch}}\ell$, т.е. при этом кондактанс становится сравнимым с квантовой величиной $G_0 = e^2/h$. С учётом нормировки, заданной средним кондактансом,

$$P(T) = \frac{\pi\ell}{6L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}}, \quad (135)$$

получим

$$G = \frac{2e^2}{h} N_{\text{ch}} \int dT P(T) T = \frac{2e^2}{h} \frac{Sk_F^2}{\pi^2} \frac{\pi\ell}{3L}. \quad (136)$$

Таким образом, ситуация напоминает случай точечного контакта с $n = N_{\text{ch}} \ell/L$ открытыми каналами, с тем отличием, что для различных реализаций случайного потенциала, а также для различных энергий и значений магнитного потока через образец собственными являются различные комбинации обычных "волноводных" мод. Именно переключение между проводящими и непроводящими каналами обеспечивает мезоскопические флуктуации кондактанса [75] $\delta G \approx e^2/h$. Доказать, что функция распределения прозрачностей нетриви-

альна, можно, рассматривая шумы, величина которых определяется суммой $\sum_n T_n(1-T_n)$. Вследствие такой нелинейности по T результат [85]

$$\left\langle \sum_n T_n(1-T_n) \right\rangle = N_{\text{ch}} \int dT P(T) T(1-T) = \frac{1}{3} \left\langle \sum_n T_n \right\rangle \quad (137)$$

может служить дополнительным источником информации о свойствах $P(T)$ (см. раздел 10.3).

Как упоминалось в разделе 5.2, квантование кондактанса в КТК и ЦКЭХ в баллистическом случае имеет весьма схожую природу — относительно резкое включение новых мод при изменении внешних параметров. В грязных проводниках ситуация в ЦКЭХ оказывается гораздо сложнее и она обычно описывается с помощью совершенно других подходов, в частности с помощью полевых моделей [86]. Интересно, что в работе [87] доказана эквивалентность описания квазиодномерного (многоканального) проводника с помощью сигма-модели [88, 89] и подхода, использованного Дороховым (в том числе при наличии слабого магнитного поля). Повидимому, описанная выше аналогия между грязным проводником и КТК справедлива и при наличии сильного магнитного поля, и можно считать, что и в грязных проводниках ЦКЭХ обеспечивается наличием собственных каналов с большой прозрачностью (число открытых каналов для ЦКЭХ, очевидно, определяется уже не отношением длины пробега к длине провода, а числом заполненных уровней Ландау (см. работу [90])). Качественно поведение краевых состояний при наличии примесей обсуждалось в работе [14].

9. Термоэлектрические эффекты

Покажем, как, используя матрицы рассеяния, можно описывать термоэлектрические эффекты. До сих пор мы рассматривали только ситуацию при нулевой температуре. При конечных температурах числа заполнения $f(E)$ даются распределением Ферми (47). Тривиальный эффект от наличия ненулевой температуры приводит, например, к размытию ступенек кондактанса $G(W)$ или появлению особенностей $I(V)$ в окрестности резонансов.

9.1. Термоток и термоэдс

С целью изучения нетривиальных термоэлектрических эффектов рассмотрим случай, в котором температуры Θ_L и Θ_R в резервуарах различны и их разность $\delta\Theta = \Theta_L - \Theta_R$ конечна. В этом случае возникает термоток (т.е. ток, вызванный разностью температур при постоян-

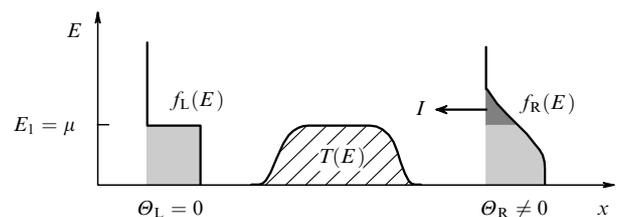


Рис. 24. Возникновение термотока. Только электроны с энергиями $E > \mu$ могут преодолеть барьер справа, создавая термоток.

ном электрохимическом потенциале) (рис. 24), величина которого в одномерном случае

$$I(V) = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE [f_L(E) - f_R(E)] T(E). \quad (138)$$

Из общей формулы (138) следует, что при независимой от энергии прозрачности, $\partial_E T(E) = 0$, ток течь не будет.

Для иллюстрации рассмотрим сначала простой пример, в котором прозрачность зависит от энергии, а именно квантовый точечный контакт с идеальным квантованием:

$$T(E) = \begin{cases} 0, & E < E_1, \\ 1, & E > E_1, \end{cases} \quad (139)$$

где электрохимические потенциалы резервуаров равняются энергии квантования в первом канале, $\mu = E_1$, так что μ — это пороговая энергия для открытия первого канала. Предположим, что температура в левом резервуаре равна нулю, $\Theta_L = 0$, и частицы слева не могут преодолеть контакт, а электроны с энергией $E > \mu$ из правого резервуара могут пройти над барьером, что приводит к появлению тока

$$\begin{aligned} I &= \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE [n_L(E) - n_R(E)] T(E) = \\ &= -\frac{2e}{h} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{1}{\exp(\varepsilon/\Theta_R) + 1}, \end{aligned} \quad (140)$$

где $\varepsilon = E - \mu$. Интегрируя по ε , мы получаем²⁰ [91]

$$I = \frac{2e}{h} (\log 2) \delta\Theta. \quad (141)$$

Если цепь, в которую включён наш квантовый проводник, разомкнута, то для компенсации вызванного разностью температур термотока должно возникнуть напряжение V (термоэдс). С учётом разности температур $\delta\Theta$ общее выражение для тока (138) принимает вид

$$\begin{aligned} I(\delta\Theta, V) &= \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left\{ \frac{1}{\exp[(E - \mu - eV)/(\Theta + \delta\Theta)] + 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\exp[(E - \mu)/\Theta] + 1} \right\} T(E). \end{aligned} \quad (142)$$

Если разность температур $\delta\Theta$ мала и $T(E)$ относительно слабо зависит от энергии E , то фермиевская функция распределения может быть разложена в окрестности μ и условие отсутствия тока $I(\delta\Theta, V) = 0$ даёт

$$\begin{aligned} \frac{2e}{h} \delta\Theta \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\partial f(E)}{\partial E} \frac{E - \mu}{\Theta} \left[T(\mu) + (E - \mu) \frac{\partial T(\mu)}{\partial E} \right] + \\ + \frac{2e^2}{h} V \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\partial f(E)}{\partial E} T(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Из уравнения (143) получаем формулу Катлера–Мотта для термоэлектрического коэффициента $\alpha = V/\delta\Theta$:

$$\alpha = -\frac{\Theta}{e} \frac{\partial \log T(\mu)}{\partial E} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \frac{\partial n}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{\pi^2}{3} \frac{\Theta}{e} \frac{\partial \log T(\mu)}{\partial E}, \quad (144)$$

где введено обозначение²¹ $\zeta = (E - \mu)/\Theta$.

Обобщение для многоканального случая тривиально — вместо прозрачности появляется сумма по прозраčnostям. Для грязного образца

$$\alpha \approx \frac{\Theta}{e} \frac{e^2}{h} G^{-1} \frac{hL^2}{D}. \quad (145)$$

В явном виде большой коэффициент термоэдс для мезоскопических проводников предсказан в работе [92]. Нелинейный случай, для описания которого первой производной прозрачности по энергии недостаточно (при этом формула Катлера–Мотта становится несправедливой), рассмотрен в работе [93].

9.2. Поток тепла: закон Видемана–Франца

При ненулевой разности температур, $\delta\Theta \neq 0$, электрический ток появляется только при наличии зависимости T от энергии в окрестности μ . Но поток тепла существует и при постоянной прозрачности:

$$I_Q = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE [f_L(E) - f_R(E)] T(E)(E - \mu), \quad (146)$$

здесь множитель $2/h$ даёт количество электронов, переносимых в единицу времени на единицу энергии, а подынтегральный сомножитель $E - \mu$ определяет, сколько энергии (способной диссипировать) переносит каждый электрон. При $\alpha = 0$ ($\partial_E T(\mu) = 0$) поток тепла

$$I_Q = \frac{G}{e^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE [f_L(E) - f_R(E)](E - \mu), \quad (147)$$

где G — электрический кондактанс, $G = (2e^2/h)T$.

Считая, что величина $\delta\Theta$ мала, и разлагая разность $f_L(E) - f_R(E)$, находим

$$I_Q = \delta\Theta \frac{G}{e^2} \Theta \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \frac{\partial n}{\partial \zeta} d\zeta, \quad (148)$$

где $\zeta = (E - \mu)/\Theta$. Интегрируя, получаем закон Видемана–Франца [94, 95], справедливый и в обычных (не мезоскопических) проводниках,

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{1}{e}\right)^2 G \Theta \quad (149)$$

для теплопроводности $\kappa = I_Q/\delta\Theta$.

9.3. Нарушение закона Видемана–Франца

Прозрачность в мезо- и нанопроводниках, в отличие от таковой в обычных проводниках, в окрестности электрохимического потенциала μ может сильно зависеть от

²⁰ Используем

$$\int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\exp \zeta + 1} = \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda + 1)} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + 1} \right) d\lambda = \log \frac{\lambda}{\lambda + 1} \Big|_1^{\infty} = \log 2.$$

²¹ Использовано соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \frac{\partial n}{\partial \zeta} d\zeta = -\frac{\pi^2}{3}.$$

энергии, и в этом случае возникает термоэдс

$$V = \alpha \delta\Theta, \quad (150)$$

которая также даёт вклад в поток тепла, и тогда закон Видемана – Франца (149) может нарушаться. Подставляя (150) в формулу для потока тепла (146), находим

$$I_Q = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left\{ \frac{1}{\exp[(E - \mu + e\alpha \delta\Theta)/(\Theta + \delta\Theta)] + 1} - \frac{1}{\exp[(E - \mu)/\Theta] + 1} \right\} T(E)(E - \mu). \quad (151)$$

Разлагая (151), как обычно, по $\delta\Theta$, получаем

$$I_Q = \frac{2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left[e\alpha \frac{\partial T(\mu)}{\partial E} - \frac{T(\mu)}{\Theta} \right] (E - \mu)^2 \frac{\partial n(E)}{\partial E} \delta\Theta. \quad (152)$$

После интегрирования имеем

$$I_Q = G\Theta \left[-\alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{1}{e} \right)^2 \right] \delta\Theta. \quad (153)$$

Таким образом, закон Видемана – Франца справедлив, только если $\alpha \ll (\pi/\sqrt{3})(1/e)$. Обратим внимание на то, что в принципе возможна ситуация, в которой $\alpha > (\pi/\sqrt{3})(1/e)$, но и тогда, как показывает более тщательное рассмотрение, α остаётся положительной.

Возможность нарушения закона Видемана – Франца в мезоскопических образцах впервые была отмечена Андерсоном и Энквистом [96], что явилось важным шагом в понимании особенностей квантовых низкоразмерных проводников, отличающих их от обычных металлов.

10. Метод вторичного квантования и матрицы рассеяния

Выше обсуждался средний ток в когерентных проводниках. Использованный метод вычисления тока, состоящий в том, что мы просто суммировали вклады в ток от различных интервалов энергии, не поддается прямому обобщению для описания флуктуаций тока во времени. Для таких вычислений удобно использовать метод вторичного квантования (для подхода в духе Ландауэра впервые это было сделано в работе [21])²².

В этом разделе мы изложим данный метод, выведем более строго формулу Ландауэра и рассмотрим шумы. Средний ток и шум будут найдены посредством усреднения операторов тока (в представлении вторичного квантования) по неравновесной матрице плотности системы, учитывающей разницу в распределении чисел заполнения в электронных резервуарах.

Во вторичном квантовании состояние одного электрона описывается не волновой функцией $\varphi_k(x)$, а оператором рождения \hat{c}_k^\dagger , действующим на вакуум $|0\rangle$. Оператор плотности тока

$$\hat{j} = \frac{ie\hbar}{2m} [(\nabla\hat{\Psi}^\dagger)\hat{\Psi} - \hat{\Psi}^\dagger\nabla\hat{\Psi}] \quad (154)$$

определяется через $\hat{\Psi}$ -операторы,

$$\hat{\Psi}(x, \mathbf{r}_\perp) = \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^N \hat{c}_{\alpha,k} \varphi_{\alpha,k}(x, \mathbf{r}_\perp), \quad (155)$$

где \mathbf{r}_\perp — вектор в поперечном сечении проводника. Одночастичные волновые функции $\varphi_{\alpha,k}$ (здесь k — волновой вектор на бесконечности, а индекс α обозначает набор дискретных квантовых чисел, например спин и номер канала или резервуара), используемые во вторичном квантовании, образуют полный ортонормированный набор,

$$\int dx d\mathbf{r}_\perp \varphi_{\alpha',k'}^*(\mathbf{r}) \varphi_{\alpha,k}(\mathbf{r}) = 2\pi \delta_{\alpha\alpha'} \delta(k' - k), \quad (156)$$

и удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}\varphi_{\alpha,k} = E_\alpha(k)\varphi_{\alpha,k}, \quad (157)$$

из которого также определяется закон дисперсии $E_\alpha(k)$. Условие нормировки для операторов уничтожения $\hat{c}_{\alpha,k}$ и рождения $\hat{c}_{\alpha',k'}^\dagger$ имеет вид

$$\{\hat{c}_{\alpha',k'}^\dagger, \hat{c}_{\alpha,k}\} = \hat{c}_{\alpha',k'}^\dagger \hat{c}_{\alpha,k} + \hat{c}_{\alpha,k} \hat{c}_{\alpha',k'}^\dagger = 2\pi \delta_{\alpha'\alpha} \delta(k' - k). \quad (158)$$

Полный оператор тока представляет собой интеграл по поперечному сечению от плотности тока \hat{j} :

$$\hat{I} = \int d\mathbf{r}_\perp \hat{j}(x, \mathbf{r}_\perp). \quad (159)$$

Мы будем определять $\hat{\Psi}$ -операторы через состояния рассеяния Липпмана – Швингера, которые формируют полный ортонормированный набор собственных состояний гамильтониана \hat{H} (указания на доказательство этого факта см. в приложении П1). Обратим внимание на то, что нормировки в (156) и (158) должны быть согласованы; для удобства можно переопределить нормировку; например, для того чтобы получить δ -функцию по энергии в правой части (156), нужно соответственно переопределить (158), так чтобы та же δ -функция стояла в правой части. Далее мы именно так и поступим²³.

Сосредоточимся на задаче о двух электронных резервуарах, соединённых через сужение с одним открытым каналом. Если частица с энергией E падает на рассеиватель со стороны левого (правого) резервуара, то будем обозначать соответствующее состояние как $\psi_{E,1}(x)$ ($\psi_{E,2}(x)$). Таким образом, квантовые числа, характеризующие одночастичное состояние, — это энергия E и номер резервуара, из которого вылетела частица (ради простоты мы не будем указывать спиновый индекс). $\hat{\Psi}$ -оператор выражается в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x) &= \int dE \{ \psi_{E,1}(x) \hat{a}_{E,1} + \psi_{E,2}(x) \hat{a}_{E,2} \} = \\ &= \int dE \sum_{\alpha=1,2} \psi_{E,\alpha}(x) \hat{a}_{E,\alpha}, \end{aligned} \quad (160)$$

²² Альтернативой может служить либо развитый Ландауэром и Мартином [23, 97–99] метод волновых пакетов, также не являющийся строгим, либо строгое описание на языке волновых функций [26, 100], которое позволяет описать всю статистику переноса, но оказывается слишком громоздким, скажем, для вычисления шума.

²³ Такая нормировка удобна, например, в случае, когда состояния рассеяния нужно определить в области с плавным квазиклассическим потенциалом.

где $\hat{a}_{E,\alpha}$ — операторы уничтожения электрона в состоянии с квантовыми числами $\{E, \alpha\}$ ($\alpha = 1, 2$). Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{\hat{a}_{E,\alpha}, \hat{a}_{E',\alpha'}^\dagger\} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta(E - E'), \quad \{\hat{a}_{E,\alpha}, \hat{a}_{E',\beta}\} = 0, \quad (161)$$

$$\{\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(x')\} = \delta(x - x'). \quad (162)$$

Итак, в левой асимптотической области

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow -\infty) = \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \times \\ \times \left\{ \left[\exp(ik_1 x) + r_E \exp(-ik_1 x) \right] \hat{a}_{E,1} + t_E \exp(-ik_1 x) \hat{a}_{E,2} \right\}. \quad (163)$$

Аналогично можно получить выражение для $\hat{\Psi}$ в правой асимптотической области:

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow +\infty) = \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \times \\ \times \left\{ \hat{a}_{E,1} t_E \exp(ikx) + \hat{a}_{E,2} [r_E \exp(ikx) + \exp(-ikx)] \right\}. \quad (164)$$

Теперь, используя (163) и (164), можно найти оператор тока в асимптотической области. Например, справа от рассеивателя

$$\hat{I}(x) = e \int dE' dE \frac{i}{2\pi m \sqrt{v_1 v_2}} \times \\ \times \left\{ \hat{a}_{E',1} \hat{a}_{E,1} (-ik' - ik) t_{E'}^* t_E \exp[i(k - k')x] + \right. \\ + \hat{a}_{E',1} \hat{a}_{E,2} \left[(-ik') t_{E'}^* \exp(-ik'x) \times \right. \\ \times (\exp(-ikx) + r_E \exp(ikx)) - \\ \left. - t_{E'}^* \exp(-ik'x) (-ik \exp(-ikx) + ik r_E \exp(ikx)) \right] + \\ + \hat{a}_{E',2} \hat{a}_{E,1} \left[(ik' \exp(ik'x) - ik' r_{E'}^* \exp(-ik'x)) t_E \exp(ikx) - \right. \\ \left. - (\exp(ik'x) + r_{E'}^* \exp(-ik'x)) ik t_E \exp(ikx) \right] + \\ + \hat{a}_{E',2} \hat{a}_{E,2} \left[(ik' \exp(ik'x) - ik' r_{E'}^* \exp(-ik'x)) \times \right. \\ \times (\exp(-ikx) + r_E \exp(ikx)) - \\ \left. - (\exp(ik'x) + r_{E'}^* \exp(-ik'x)) \times \right. \\ \left. \times (-ik \exp(-ikx) + ik r_E \exp(ikx)) \right] \left. \right\}. \quad (165)$$

Для чистого состояния многочастичной квантовой системы, которое во вторичном квантовании описывается выражением типа $|\psi\rangle = \hat{a}_{E_1}^\dagger \hat{a}_{E_2}^\dagger \dots |0\rangle$ (где $|0\rangle$ — вакуумное состояние), средний ток определяется как

$$I = \langle \psi | \hat{I} | \psi \rangle. \quad (166)$$

Если состояние описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$ (является некогерентной суперпозицией чистых состояний), то среднее значение тока выражается в виде

$$I = \sum_{\{\psi\}, \{\psi'\}} \langle \psi' | \hat{\rho} | \psi \rangle \langle \psi | \hat{I} | \psi' \rangle \equiv \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{I} \}, \quad (167)$$

где оператор тока умножается на матрицу плотности и от этого произведения берётся след. Для равновесной

системы с гамильтонианом \hat{H} , конечной температурой Θ и электрохимическим потенциалом μ матрица плотности даётся выражением²⁴

$$\hat{\rho} = \exp \left(-\frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{\Theta} \right). \quad (168)$$

Принятое ранее предположение Ландауэра о том, что в неравновесном случае резервуары полностью независимы, означает, что матрица плотности всей системы равна произведению матриц плотности левого и правого резервуаров, $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$. Матрица плотности резервуара α имеет вид

$$\hat{\rho}_\alpha = \exp \left(-\sum_E \hat{a}_{E,\alpha}^\dagger \hat{a}_{E,\alpha} \frac{E - \mu_\alpha}{\Theta_\alpha} \right). \quad (169)$$

Тогда матрица плотности всей системы выражается как

$$\hat{\rho} = \exp \left(-\sum_E \left\{ \hat{a}_{E,1}^\dagger \hat{a}_{E,1} \frac{E - \mu_1}{\Theta_1} - \hat{a}_{E,2}^\dagger \hat{a}_{E,2} \frac{E - \mu_2}{\Theta_2} \right\} \right). \quad (170)$$

Используя такую матрицу плотности, можно найти все средние:

$$\langle \hat{a}_{E,\alpha\sigma}^\dagger \hat{a}_{E',\alpha'\sigma'} \rangle = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\sigma\sigma'} f_{\alpha\sigma}(E) \quad (171)$$

(для примера мы здесь указали спиновый индекс σ в явном виде).

Почти все вычисления, так или иначе представленные в настоящем обзоре, по сути, довольно просты. Один из существенных источников этой простоты — это именно соотношение (171), из которого следует, что не равны нулю только средние, диагональные по состояниям рассеяния, в базисе которых у нас записан оператор тока.

В глубине резервуаров²⁵ функция распределения электронов $f_\alpha(E)$ даётся распределением Ферми (47). При этом в общем случае температуры и электрохимические потенциалы в резервуарах различны.

Заметим также, что фактическое тянущее напряжение V (задающее $\Delta\mu$ в контакте) может не совпадать с напряжением V_0 (электродвижущей силой) далеко в берегах, так что часть напряжения $V_0 - V$ будет падать в подводящих к квантовому контакту проводах. Это обстоятельство, однако, учитывается, например, экспериментально довольно рутинным образом. Кроме того, может оказаться, что резервуар, вместо того чтобы "безотражательно" поглощать электроны, будет частично отражать их. Такое отражение тоже, в принципе, можно учесть в качестве поправки к матрице плотности, так что появятся ненулевые средние типа $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle$. В любом случае следует подчеркнуть, что приближения, приводя-

²⁴ В данном случае мы используем стандартное для теории "усреднение по ансамблю". Однако экспериментально усреднение происходит по времени. Уверенность в том, что оба эти способа усреднения дают одинаковый результат, составляет предмет эргодической гипотезы. Таким образом, мы вычисляем одну величину, а измеряется другая. Однако эргодическая гипотеза даёт основания полагать, что они должны совпасть. Для некоторых конкретных систем эргодическая гипотеза может быть доказана.

²⁵ На расстояниях от контакта, значительно больших характерной длины энергетической релаксации электронов l_E , связанной с неупругими столкновениями электронов с фононами или электрон-электронными столкновениями.

щие к формулам, используемым в этом разделе (и ранее), судя по результатам многих экспериментов, выполняются весьма удовлетворительно. По-видимому, это и является главной причиной того, что взаимодействие с резервуаром, возможная роль отражения, величины поправок и т.д. теоретически изучены пока недостаточно.

10.1. Средний ток

Используя формулы (165), (167) и (170), получаем выражение для среднего тока²⁶, совпадающее в одномерном случае с выражением (49),

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{2e}{h} \int dE T(E) \{f_1(E) - f_2(E)\}. \quad (172)$$

В общем случае при наличии многих каналов и резервуаров

$$I_\beta = \frac{2e}{h} \sum_\alpha \sum_{j,l} \int dE [f_\beta(E) - f_\alpha(E)] T_{\beta\alpha,ij}(E), \quad (173)$$

где α, β — номера резервуаров, j, l — номера каналов.

Если $\mu_1 = E_F + eV$ и $\mu_2 = E_F$, а $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$, то при $V \rightarrow 0$ кондактанс в одномерном случае имеет вид

$$G = \frac{2e^2}{h} \int T(E) \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE. \quad (174)$$

10.2. Подход Ландауэра с точки зрения келдышевских функций Грина

В своё время было приложено много усилий для строгого вывода формулы Ландауэра более традиционными методами, в частности на основе формулы Кубо [101]. Мы покажем, не вдаваясь в очевидные детали, как формула Ландауэра может быть получена с помощью более формального (или, точнее говоря, лучше формализованного) подхода, использованного в статье Келдыша [102] при построении диаграммной техники для неравновесных ситуаций. Келдышевская функция Грина

$$iG^{-+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \} = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle \quad (175)$$

является аналогом функции распределения $f(q, p, t)$ в кинетическом уравнении. При решении кинетического уравнения, как правило, задаются граничные условия в берегах, так чтобы функция распределения совпадала с локальной равновесной. Для келдышевской функции граничные условия на бесконечности, т.е. в резервуарах (см., например, [78]):

$$G^{-+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in L(R)} = G_{\text{eq}}^{-+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (176)$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in L(R)$ обозначает, что \mathbf{r} и \mathbf{r}' принадлежат или левому, или правому резервуару, но всегда одному и тому же. Ток выражается через келдышевскую функцию Грина как

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right] G^{-+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}. \quad (177)$$

²⁶ Важно, что отвечающие за смешивание резервуаров члены в формуле (165), которые содержат операторы рождения и уничтожения с разными индексами α , обнуляются в силу (171).

Рассмотрим квазиодномерный квантовый точечный контакт с несколькими открытыми каналами. Далеко в резервуарах большинство электронов принадлежит закрытым каналам, которые не проходят через контакт, и лишь малая часть электронов поступает из противоположного резервуара. Поэтому, поскольку отношение открытых и закрытых каналов в резервуаре мало,

$$\delta f \sim \frac{N_{\text{wire}}}{N_{\text{reservoir}}}, \quad (178)$$

функция распределения в резервуарах может рассматриваться как равновесная с заданными μ_α и температурой, граничные условия для функции Келдыша, вычисленной с матрицей плотности (170), выполняются и, следовательно, весь вывод формулы Ландауэра подтверждается.

Опишем ещё раз качественно картину транспорта. Потоки частиц, испускаемых и левым, и правым резервуарами, имеют функции распределения, характеризующиеся своими температурами и электрохимическими потенциалами. В области контакта частицы испытывают только упругое рассеяние и функция распределения является сильно неравновесной. Помимо состояний, относящихся к проводящим каналам в контакте, в обоих резервуарах существует большое число других, не связанных посредством контакта, состояний, которые не дают вклада в ток, однако играют главную роль в формировании функций распределения (далеко в берегах), оказывающихся близкими к равновесным с большой точностью.

10.3. Описание шума

Рассмотрим флуктуации тока во времени. Для описания флуктуаций тока (шума) нам потребуется оператор тока в гейзенберговском представлении, который зависит от времени. Для гамильтониана системы H_0 , независящего от времени, этот оператор записывается так:

$$\hat{I}(x, \tau) = \exp\left(\frac{i\hat{H}_0\tau}{\hbar}\right) \hat{I}(x) \exp\left(-\frac{i\hat{H}_0\tau}{\hbar}\right), \quad (179)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}(x, \tau) = e \int dE' dE \frac{i \exp[-i(E-E')\tau/\hbar]}{2\pi m \sqrt{v_1 v_2'}} \times \\ \times \left\{ \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} (-ik' - ik) t_{E',E}^* \exp[i(k-k')x] + \right. \\ \left. + \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,2} [(-ik') t_{E',E}^* \exp(-ik'x) \times \right. \\ \left. \times (\exp(-ikx) + r_E \exp(ikx)) - \right. \\ \left. - t_{E',E}^* \exp(-ik'x) (-ik \exp(-ikx) + ik r_E \exp(ikx))] + \right. \\ \left. + \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,1} [(ik' \exp(ik'x) - \right. \\ \left. - ik' r_{E'}^* \exp(-ik'x)) t_E \exp(ikx) - \right. \\ \left. - (\exp(ik'x) + r_{E'}^* \exp(-ik'x)) ik t_E \exp(ikx)] + \right. \\ \left. + \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,2} [(ik' \exp(ik'x) - ik' r_{E'}^* \exp(-ik'x)) \times \right. \\ \left. \times (\exp(-ikx) + r_E \exp(ikx)) - \right. \\ \left. - (\exp(ik'x) + r_{E'}^* \exp(-ik'x)) \times \right. \\ \left. \times (-ik \exp(-ikx) + ik r_E \exp(ikx))] \right\}. \quad (180) \end{aligned}$$

Для описания флуктуаций используется среднее $\langle \Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau') \rangle$, где оператор $\Delta \hat{I} = \hat{I} - \langle \hat{I} \rangle$ определяет отклонение от среднего тока. Для этой величины используется термин *неприводимый коррелятор*, который обозначается как $\langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle$, при этом

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle &\equiv \\ &\equiv \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle - \langle \hat{I}(x, \tau) \rangle \langle \hat{I}(x', \tau') \rangle = \\ &= \langle \Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau') \rangle. \end{aligned} \quad (181)$$

Операторы тока в разные моменты времени не коммутируют, поэтому оператор $\Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau')$ не эрмитов и величина (181) в типичном случае является комплексной. Это означает, что экспериментально такая величина непосредственно не измерима. В учебнике Ландау и Лифшица [103] в качестве измеримой величины изучается симметризованный коррелятор

$$\frac{1}{2} \left(\langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle + \langle \langle \hat{I}(x', \tau') \hat{I}(x, \tau) \rangle \rangle \right). \quad (182)$$

Другой стандартной величиной для характеристики шума является фурье-образ от корреляторов токов — *спектральная плотность шума*. Для этой величины в [103] предлагается брать фурье-образ от симметризованного коррелятора (182). Однако, как показывает анализ процесса измерения, в типичном случае измеримой величиной является фурье-образ от несимметризованного коррелятора²⁷ [104–106],

$$S(\omega) = \int dt \exp(i\omega t) \langle \langle \hat{I}(x, 0) \hat{I}(x, t) \rangle \rangle. \quad (183)$$

Этот факт был подтверждён в экспериментах последних лет [107] (см. также предыдущие эксперименты [108–110], в которых измерялся только избыточный шум, что не позволяло строго отличить симметризованный коррелятор от несимметризованного [111]).

В формуле (183) мы воспользовались тем, что в отсутствие зависимости от времени внешних полей корреляционная функция должна зависеть только от разности времён. Поэтому фурье-преобразование по двум временам имеет вид

$$\langle \langle \hat{I}(x, \omega) \hat{I}(x, \omega') \rangle \rangle = S(\omega) 2\pi \delta(\omega + \omega'). \quad (184)$$

Наиболее часто изучаемой величиной является спектральная плотность шума на нулевой частоте $S(0)$:

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{2e^2}{h} \int_0^{+\infty} dE \left\{ f_1(E) [1 - f_1(E)] T^2(E) + \right. \\ &+ f_2(E) [1 - f_2(E)] T^2(E) + T(E) [1 - T(E)] \times \\ &\times \left. [f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))] \right\}. \end{aligned} \quad (185)$$

Эта величина не зависит от координат (что является общим свойством, вытекающим из стационарности случайного процесса переноса заряда).

Формула (185) впервые была получена одним из авторов настоящего обзора в [21]. Её обобщение для многоканального случая [22] выглядит удивительно

простым в представлении собственных каналов [23], для которых прозрачность диагоналізується,

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{2e^2}{h} \sum_n \int_0^{+\infty} dE \left\{ f_1(E) (1 - f_1(E)) T_n^2(E) + \right. \\ &+ f_2(E) (1 - f_2(E)) T_n^2(E) + T_n(E) (1 - T_n(E)) \times \\ &\times \left. [f_1(E) (1 - f_2(E)) + f_2(E) (1 - f_1(E))] \right\}, \end{aligned} \quad (186)$$

и совпадает по форме с выражением для КТК, в котором каналы не перемешиваются [21].

Рассмотрим, чему равна величина $S(0)$ в предельном случае, когда резервуары находятся в равновесии друг с другом ($f_1 = f_2 = f$). Тогда имеет место соотношение $f(1 - f) = -\Theta \partial_E f$ и мы получаем

$$S(0) = \frac{4e^2 \Theta}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) T(E) = 2\Theta G. \quad (187)$$

Это равновесный шум (шум Джонсона–Найквиста), который возникает вследствие *температурных* флуктуаций чисел заполнения электронов в резервуарах.

Рассмотрим теперь шум в предельном (квантовом) случае, когда температуры резервуаров равны нулю. Тогда $f_x(E) = \theta(E - \mu_x)$ и

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{2e^2}{h} \int dE [1 - T(E)] T(E) [f_2(E) - f_1(E)] \approx \\ &\approx \frac{2e^3 |V|}{h} (1 - T) T = e \langle \hat{I} \rangle (1 - T), \end{aligned} \quad (188)$$

где мы положили $\mu_1 = \mu + eV$, $\mu_2 = \mu$.

Приближённое равенство в (188) справедливо, если вероятность прохождения $T(E)$ слабо зависит от энергии. В этом варианте формула (188) (формула Хлуса–Лесовика) была получена в работе [112]²⁸, а затем независимо в работе [21] как частный случай общего выражения (185).

Из формулы (188) следует, что величина квантового дробового шума определяется рассеянием на потенциальном барьере. Если рассеивателя нет, $T = 1$, то нет и шума. Шум также исчезает, если $T = 0$, поскольку тогда перенос электронов вообще отсутствует. В промежуточной ситуации волновые пакеты, описывающие электроны, при туннелировании через барьер расщепляются на прошедшую и отражённую части. В процессе измерения электроны могут быть зарегистрированы как в левом резервуаре ("электрон отразился"), так и в правом ("электрон прошёл"), причём абсолютно непредсказуемым, случайным, образом. Эта принципиальная квантово-механическая непредсказуемость и является главной причиной квантового дробового шума. Важно, что в квантовом случае электроны, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака, вылетают из резервуара почти упорядоченным образом и именно поэтому в отсутствие неопределённости, вызванной наличием рассеяния на барьере ($T = 1$), низкочастотный дробовой шум оказывается подавленным. Формула (188) была подтверждена в блестящих экспериментах двух групп [113, 114], которые изучали шум в КТК. На плато, где $T_n = 1$ или $T_n = 0$ для всех каналов, шум был подавлен, а области ступеней

²⁷ Который, в отличие от несимметризованного коррелятора токов на различных временах, всегда является действительной величиной.

²⁸ Извлечение формулы (188) из работы [112] требует определённой внимательности.

— конечен, в соответствии с (188), и имел правильную функциональную зависимость от прозрачности.

Выражения, полученные для шума через прозрачности, делают теорию в некотором смысле замкнутой. Описывая кондактанс для КТК, мы сравнивали результаты теории, основанные на вычислениях T , с экспериментальными данными. Но, имея теоретические результаты и для среднего тока, и для шума, можно не вычислять, а экспериментально определить прозрачность T из измерений тока и затем уже сопоставить эти измерения с независимыми экспериментальными данными по шуму.

Для грязного образца измерение шума позволяет доказать, что функция распределения прозрачностей (функция Дорохова) действительно нетривиальна и наивные оценки для прозрачностей, которые мы обсуждали в разделе 8.2, неверны. Если все прозрачности малы, то из общей формулы следует

$$S(0) \approx e\langle \hat{I} \rangle \quad (189)$$

и фактор Фано F , определяемый как отношение $F = S(0)/eI$, равен единице, $F = 1$, как для классического дробового шума (см. конец этого раздела). Если усреднить сумму $\sum_n T_n(1 - T_n)$, входящую в выражение для шума с функцией распределения Дорохова, то можно получить [85] $\langle \sum_n T_n(1 - T_n) \rangle = (1/3)\langle \sum_n T_n \rangle$ и фактор Фано $F = 1/3$. Эксперименты [115, 116] подтвердили такие вычисления.

При учёте зависимости прозрачности от энергии возникают дополнительные интересные эффекты. Для идеального резонанса при напряжении, большем ширины резонанса, т.е. в режиме плато на вольт-амперной характеристике (рис. 18б), фактор Фано F получается равным $1/2$. Такой результат можно считать следствием нетривиальности функции распределения для прозрачности как функции энергии (см. также раздел 15.2, в котором рассматривается шум в гибридном INIS-контакте). Отметим также, что при определённой энергетической зависимости прозрачности шум может начать уменьшаться при ненулевом напряжении, иначе говоря, "избыточный шум" может стать отрицательной величиной [117].

Наконец, как видно из формулы (188), в выражение для шума входит заряд электрона, поэтому дискретность заряда, переносимого квантовыми частицами, также существенно проявляется в дробовом шуме. Это обстоятельство первым заметил Шотки в 1918 г., и вывел знаменитую формулу для классического дробового шума

$$S(0) = e\langle I \rangle \quad (190)$$

в предположении, что случайный процесс переноса электронов является пуассоновским (т.е. все электроны вылетают независимо друг от друга) с вероятностями вылета m электронов $P_m = (\bar{N}^m/m!) \exp(-\bar{N})$, где $\bar{N} = It/e$. Для такого процесса среднее квадратичное отклонение для перенесённого заряда $\langle (\delta Q)^2 \rangle = e^2 \langle (\delta N)^2 \rangle = e^2 \langle N \rangle$. Используя соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (\delta Q(t))^2 \rangle}{t} = S(0), \quad (191)$$

Шотки получил формулу (190).

Отношение величины шума к среднему току $S(0)/I$ используется для экспериментального определения заряда элементарного носителя тока, который не всегда является изолированным электроном. Важные эксперименты по измерению дробного заряда в дробном эффекте Холла были проведены двумя группами [118–121]. Более полная библиография по тематике шумов содержится в обзорах [122, 123].

11. Статистика переноса заряда

Типичные величины, изучавшиеся до недавнего времени в квантовом транспорте, — это средний по времени ток и шум, т.е. парный коррелятор токов. Однако, как известно из теории случайных процессов, для полной характеристики случайного процесса следует, вообще говоря, изучить и корреляторы тока более высоких порядков, и функцию распределения для перенесённого заряда (что требует знания корреляторов тока всех порядков на низких частотах). Такое знание позволяет извлечь максимально полную информацию о системе с учётом недетерминированности процесса. Один из источников недетерминированности, как указывалось в разделе 10.3, связан с принципиальной недетерминированностью квантовой механики, другой — с неточностью знания о состоянии резервуаров. Итак, помимо среднего тока $\langle I \rangle$, перенесённого заряда $\langle Q(t) \rangle = \langle I \rangle t$ или среднее квадратичного отклонения $\langle (\delta Q)^2 \rangle$ (и соответственно шума $S(0)$), представляет интерес изучить и более высокие моменты,

$$\langle Q^n \rangle = \int_0^t dt_1 \dots dt_n \langle I(t_1) \dots I(t_n) \rangle, \quad (192)$$

и характеристическую функцию, как это впервые было сделано в работах [24, 124]. Характеристическая функция для функции распределения перенесённого заряда (мы определим её для безразмерного числа перенесённых частиц Q/e)

$$\chi(\lambda) = \sum_n \frac{\langle (Q/e)^n \rangle}{n!} (i\lambda)^n = \left\langle \exp \frac{i\lambda Q}{e} \right\rangle \quad (193)$$

содержит информацию о всех моментах, так как является производящей функцией, и все моменты определяются её дифференцированием:

$$\left\langle \left(\frac{Q}{e} \right)^n \right\rangle = \frac{d^n}{d(i\lambda)^n} \chi(\lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (194)$$

Для характеристики случайного процесса удобнее использовать вместо моментов кумулянты, определённые как

$$\left\langle\left\langle \left(\frac{Q}{e} \right)^n \right\rangle\right\rangle = \frac{d^n}{d(i\lambda)^n} \log \chi(\lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (195)$$

Кумулянты имеют следующие важные свойства: 1) при сдвиге случайной переменной на c при $n > 1$ остаются неизменными, $\langle\langle (Q+c)^n \rangle\rangle = \langle\langle Q^n \rangle\rangle$; 2) однородны по степеням n , $\langle\langle (cQ)^n \rangle\rangle = c^n \langle\langle Q^n \rangle\rangle$; 3) аддитивны, $\langle\langle (Q+\bar{Q})^n \rangle\rangle = \langle\langle Q^n \rangle\rangle + \langle\langle \bar{Q}^n \rangle\rangle$, если Q и \bar{Q} — независимые переменные. Из последнего свойства можно вывести, что $\langle\langle Q^n \rangle\rangle \propto t$ для больших времён t , превышающих корреля-

ляционные времена в системе. Аргумент таков: для больших времён весь процесс может быть разделён на независимые подпроцессы, дающие вклад в суммарный результат. Поскольку число подпроцессов возрастает линейно с увеличением t , так же ведёт себя и полный кумулянт.

Зная все кумулянты, можно, например, описать сдвиг частоты джозефсоновской генерации [125], точно описать эффект воздействия шума в проводе на близлежащие квантовые системы (например, кубиты) без предположения о гауссовости шума, которое обычно используется [126–128]. Кроме того, появляется возможность точно описать свойства КТК в качестве детектора, связанного с квантовым битом [129]. Тройной коррелятор может указывать на асимметрию в двухуровневой системе, влияющую на электроны проводимости [125, 126], и на наличие других эффектов²⁹.

Теперь определим число n перенесённых за время t электронов, связанных с зарядом как $Q = en$. Случайный процесс определён вероятностями P_n того, что точно n частиц будет перенесено за время t , т.е.

$$\chi(\lambda) = \left\langle \exp \frac{i\lambda Q}{e} \right\rangle = \sum_n P_n \exp(i\lambda n). \quad (196)$$

Заметим, что из предположения, что n — целое, следует периодичность $\chi(\lambda)$ с периодом 2π .

Вероятности P_n могут быть получены из характеристической функции с помощью преобразования Фурье:

$$P_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp(-i\lambda n) \chi(\lambda). \quad (197)$$

В квантовом случае связь между корреляторами токов и наблюдаемыми типа моментов (192) и кумулянтов заряда не так проста, как в классическом случае. Оказывается, что разные определения приводят к разным результатам и для того чтобы получить недвусмысленные результаты, следует описать не только проводник, но и детектор и схему измерения. При вычислении характеристической функции, определённой по аналогии с классическим выражением как $\chi(\lambda) = \langle \exp[i\lambda \int_0^t \hat{I}(t') dt'] \rangle$, возникает проблема упорядочения операторов тока во времени. Если следовать приведённому определению буквально, то в выражениях для моментов и кумулянтов операторы тока должны быть симметризованными. Именно такое определение было использовано в первой работе [124] о полной статистике переноса для электронов в 1992 г. Для одноканального проводника с прозрачностью T при конечном напряжении V и нулевой температуре был получен следующий результат:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \left\langle \exp \left[i\lambda \int_0^t dt' \frac{\hat{I}(t')}{e} \right] \right\rangle = \\ &= \left[\cos(\lambda\sqrt{T}) + i\sqrt{T} \sin(\lambda\sqrt{T}) \right]^N \end{aligned} \quad (198)$$

(здесь "число попыток" $N = 2eVt/h \gg 1$), который периодичен с периодом $2\pi/\sqrt{T}$, что может быть интерпретировано следующим образом: имеется функция распределе-

ния для дробного заряда $e^* = e\sqrt{T}$, который неким способом возникает в системе, но не проявляет себя ни в среднем токе, ни в шуме. Хотя результат (198) является формально правильным и вытекает из определения характеристической функции, дальнейший анализ показал, что во всех рассмотренных схемах измерения такая функция распределения напрямую не реализуется.

Решение вопроса о том, как именно следует определять в квантовом случае характеристическую функцию, потребовало анализа измерительной схемы, и в работах [69, 130] был предложен аналог классического гальванометра, измеряющего заряд, — квантовый гальванометр — расположенный возле провода спин $1/2$, прецессирующий в магнитном поле, наведённом током. Угол прецессии позволяет измерять протекший заряд $Q = \int_0^t I(t') dt'$. Взаимодействие между спином и электроном в проводе описывалось гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int dx \hat{I}(x) A(x), \quad (199)$$

где $A(x)$ — компонента векторного потенциала, наведённого спином $1/2$ в квантовом проводнике (вдоль провода). В общем случае такое взаимодействие является дальнедействующим, но для упрощения вычислений его можно заменить локальным, представив $A(x)$ в виде³⁰

$$A(x) = A_0 \delta(x - x_0) \sigma_z, \quad (200)$$

где σ_z — матрица Паули, x_0 — положение спина-измерителя, а A_0 задаёт силу взаимодействия с электронами в проводе. Соответственно гамильтониан взаимодействия принимает вид $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_{\text{int},+} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \hat{H}_{\text{int},-} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$, где

$$\hat{H}_{\text{int},\pm} = \mp \lambda \frac{\hbar I(x_0)}{2e}, \quad (201)$$

$\lambda = 2eA_0/\hbar c$, $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ — спиновые состояния.

Пусть задано начальное положение спинового измерителя, описываемое матрицей плотности $\hat{\rho}^s(0)$ в момент $t = 0$. Статистика переноса будет "переписана" в угол вращения спина за время t , который можно извлечь из недиагональных элементов матрицы плотности спина. Эволюция во времени недиагональных элементов матрицы плотности спина (при условии, что она в момент $t = 0$ независима от матрицы плотности электронной системы $\hat{\rho}^e(0)$) даётся выражением

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\uparrow\downarrow}^s(t) &= \text{Tr}_e \left\{ \exp \left(-\frac{i(\hat{H}_e + \hat{H}_{\text{int},+})t}{\hbar} \right) \hat{\rho}_e(0) \times \right. \\ &\times \left. \exp \left(\frac{i(\hat{H}_e + \hat{H}_{\text{int},-})t}{\hbar} \right) \right\} \hat{\rho}_{\uparrow\downarrow}^s(0) = \\ &= \text{Tr}_e \left\{ \mathcal{T} \left[\exp \left(i\lambda \int_0^t dt' \frac{I(x_0, t')}{2e} \right) \right] \hat{\rho}_e(0) \times \right. \\ &\times \left. \tilde{\mathcal{T}} \left[\exp \left(i\lambda \int_0^t dt' \frac{I(x_0, t')}{2e} \right) \right] \right\} \hat{\rho}_{\uparrow\downarrow}^s(0), \end{aligned} \quad (202)$$

²⁹ Мы здесь не приводим списка всех возможных эффектов, в которых проявляется негауссовость флуктуаций, так как это не является темой настоящего обзора.

³⁰ Строго говоря, такой вид потенциала может порождать определённые сложности, связанные с тем, что в гамильтониане взаимодействия необходимо учитывать не только линейные, но и квадратичные по полю $A(x)$ слагаемые. Это приводит к особенностям в описании статистики с помощью многочастичной теории возмущений, которые мы в данном обзоре не рассматриваем.

где след (Tr_e) взят по электронным степеням свободы, \hat{H}_e — гамильтониан электронной подсистемы. В выражении, стоящем после второго знака равенства в (202), сделан переход к представлению взаимодействия, в котором оператор свободной эволюции \hat{H}_e задаёт зависимость от времени оператора тока $I(x_0, t)$, а \mathcal{T} и $\tilde{\mathcal{T}}$ обозначают упорядочение и антиупорядочение по времени соответственно³¹. Определяя $\chi(\lambda)$ как³² $\hat{\rho}_{\uparrow\downarrow}^s(t)/\hat{\rho}_{\uparrow\downarrow}^s(0)$, получаем для характеристической функции статистики переноса

$$\chi(\lambda) = \left\langle \tilde{\mathcal{T}} \left(\exp \left[i\lambda \int_0^t \frac{dt' \hat{I}(t')}{2e} \right] \right) \mathcal{T} \left(\exp \left[i\lambda \int_0^t \frac{dt' I(t')}{2e} \right] \right) \right\rangle. \quad (203)$$

Как видим, разница между данным определением и (198) заключается в наличии упорядочения операторов тока во времени.

Определённая как (203) характеристическая функция для статистики переноса при нулевой температуре и конечном напряжении имеет вид [24]

$$\chi(\lambda) = [1 - T + T \exp(i\lambda)]^N \quad (204)$$

и как функция λ обладает периодом 2π , из чего следует квантование заряда в единицах e . Однако, несмотря на то что для данного конкретного случая характеристическая функция, определённая через спин-измеритель $1/2$, оказалась 2π -периодичной, нет оснований считать такой результат общим при произвольных \hat{H}_e и $\hat{\rho}_e(0)$. Более того, в работе [132] в явном виде приведён пример, в котором начальное состояние является суперпозицией левых и правых состояний рассеяния и характеристическая функция имеет период 4π (что означает квантование заряда в единицах $e/2$). Тем не менее, хотя выбранное определение (203) и не всегда даёт целочисленное квантование заряда, величина $\chi(\lambda)$ является измеримой и, в частности, описывает декогеренцию кубита (спина), связанного с квантовым проводом. Действительно, поскольку, согласно принятому определению, $\chi(\lambda)$ — это недиагональный (нормированный) элемент матрицы плотности спина, то абсолютное значение $|\chi(\lambda)|$ задаёт степень декогеренции. Из соотношения (204) получаем

$$|\chi(\lambda)| = |1 - T + T \exp(i\lambda)|^N = \left[1 - 4T(1 - T) \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right]^{N/2}. \quad (205)$$

Поскольку величина λ определяется интенсивностью взаимодействия, то скорость декогеренции будет монотонной функцией связи проводника и спина-измерителя. В реальной ситуации роль спина может играть кубит, фазовый или зарядовый (см. обсуждение в [133]).

Шеланков и Раммер [132] предложили альтернативное определение $\chi(\lambda)$, которое всегда даёт период 2π и при котором вероятности P_n всегда положительны. Определение Шеланкова – Раммера соответствует подходу, в

котором P_n измеряется непосредственно, как предложено Музыкантским и Адамовым [134]; такое же определение использовано в работах [100, 135] (см. также обсуждение в [131]). Выполняя измерение, соответствующее оператору $\mathcal{Q} = \int_{x_0}^{\infty} dx |x\rangle\langle x|$, который определяет заряд справа от детектора при $t = 0$, и сравнивая результат измерения с зарядом при t , мы можем получить число электронов, прошедших за время t . Такая постановка задачи приводит к характеристической функции

$$\chi(\lambda) = \left\langle \exp \left(\frac{i\lambda U^\dagger \mathcal{Q} U}{e} \right) \exp \left(-\frac{i\lambda \mathcal{Q}}{e} \right) \right\rangle, \quad (206)$$

где $U = \exp(-i\hat{H}_e t)$ — унитарный оператор эволюции; угловые скобки обозначают среднее по собственному состоянию оператора \mathcal{Q} , в котором частицы изначально находятся определённо или слева, или справа от рассеивателя (при таком определении удаётся, в частности, избежать состояний, приводящих к 4π -периодичности).

11.1. Рассмотрение статистики на примере одного электрона

Для того чтобы лучше понять, как описывается статистика транспорта с помощью представленного (или, скорее, обозначенного) выше формализма, основанного на использовании спина-измерителя, рассмотрим простую задачу об одном электроном. Пусть волновой пакет с волновой функцией в k -пространстве $f(k)$, сосредоточенной около некоторого $k_0 > 0$,

$$\Psi_{\text{in}}(x, t) \equiv \Psi_f(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k) \exp[i(kx - \omega_k t)], \quad (207)$$

находящийся слева при $t \rightarrow -\infty$, движется вправо и налетает на рассеиватель, который имеет амплитуду прохождения t_k и амплитуду отражения r_k . Функция $f(k)$ нормирована условием $\int (dk/2\pi) |f(k)|^2 = 1$; $\omega_k = \hbar k^2/2m$. Спин-измеритель мы расположим вблизи рассеивателя. Тогда прошедшая часть волнового пакета приобретёт дополнительную фазу в результате взаимодействия со спином: для магнитного взаимодействия дополнительная фаза в точке x имеет вид $\delta\phi_A(x) = 2\pi \int_{-\infty}^x dx' A_x(x')/\Phi_0$ и не зависит от k ; при $x \rightarrow \infty$ получаем полную фазу: $\lambda/2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx A_x(x)/\Phi_0$. Заметим, что ϕ_A имеет разные знаки для частиц, движущихся в противоположных направлениях ($k \rightarrow -k$). Рассеянные волны, которые имеют вид (при $t \rightarrow \infty$)

$$\Psi_{\text{out}}^{\pm}(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k) \exp(-i\omega_k t) [r_k \exp(-ikx) \Theta(-x) + \exp\left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) t_k \exp(ikx) \Theta(x)], \quad (208)$$

приобретают дополнительную фазу, в зависимости от состояния $|\pm\rangle$ спина (или в реальной ситуации — кубита). Характеристическая функция для статистики переноса выражается как

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, t) &= \int dx \Psi_{\text{out}}^{-*}(x, t) \Psi_{\text{out}}^{+}(x, t) = \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} [R_k + \exp(i\lambda) T_k] |f(k)|^2 = \\ &= \langle R \rangle_f + \exp(i\lambda) \langle T \rangle_f, \end{aligned} \quad (209)$$

³¹ Если спин-измеритель находится около рассеивателя, то требуется более сложное упорядочение по времени, так называемое T^* -упорядочение Мэтью (см. [131]).

³² При протекании возле спина-измерителя классического тока эта величина является экспонентой от протекшего заряда (в единицах заряда e), $\exp(i\lambda N)$.

где $R_k = |r_k|^2$ и $T_k = |t_k|^2$. Мы пренебрегли недиагональным членом $\int dk f^*(-k)f(k)$, который в типичном случае экспоненциально мал. Фурье-преобразование характеристической функции даёт вероятности $P_0 = \langle R \rangle_f$ и $P_1 = \langle T \rangle_f$, совпадающие, как и ожидалось, с вероятностями отражения и прохождения частиц. Мы убедились на этом простом примере, что определение (со спином-измерителем) работает адекватно. Конечно, в данном простом случае такой способ не имеет никаких преимуществ перед стандартным вычислением вероятностей — преимущества проявляются лишь при большом или бесконечном числе частиц.

11.2. Рассмотрение статистики для двух электронов

Используя формализм волновых пакетов, вычислим, следуя [136], характеристическую функцию для статистики переноса двух частиц — наиболее простой случай, в котором уже проявляется фермиевская статистика частиц. Падающие частицы описываются волновыми пакетами

$$\psi_{\text{in},m}(x;t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} f_m(k) \exp[ik(x - v_F t)], \quad (210)$$

с волновыми функциями в импульсном пространстве $f_1(k)$ и $f_2(k)$ и условием нормировки $\int (dk/2\pi) |f_m(k)|^2 = 1$. Поскольку в конце концов мы будем рассматривать электроны при низких температурах в окрестности энергии Ферми, удобно линейаризовать спектр $\epsilon = v_F |k|$, где v_F — скорость Ферми, $\hbar k$ — импульс, $\hbar \epsilon$ — энергия. После прохождения через рассеиватель волновой пакет (210) расщепляется на отражённый и прошедший:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{out},m}^\sigma(x,t) = & \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} f_m(k) \exp(-ikv_F t) \times \\ & \times \left[r_k \exp(-ikx) \Theta(x_s - x) + \right. \\ & \left. + \exp\left(\frac{i\sigma\lambda}{2}\right) t_k \exp(ikx) \Theta(x - x_s) \right], \quad (211) \end{aligned}$$

где мы ввели фазу $\exp(i\sigma\lambda/2)$ в прошедшей части пакета; знак $\sigma = \pm 1$ соответствует состояниям спина, как и в разделе 11.1. Соответствующим образом симметризованная (антисимметризованная) двухчастичная волновая функция имеет вид

$$\Psi_{\alpha,\pm}(x_1, x_2; t) \propto \psi_{\alpha,1}(x_1; t) \psi_{\alpha,2}(x_2; t) \pm (x_1 \leftrightarrow x_2),$$

$$\alpha = \text{in, out};$$

здесь мы будем использовать знак \pm для различения триплетного и синглетного состояний двух электронов. Характеристическая функция выражается как $\chi_\pm(\lambda) = \int dx_1 dx_2 \Psi_{\text{out},\pm}^{-1*} \Psi_{\text{out},\pm}^{+1}$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \chi_\pm(\lambda) = & \\ = & \frac{[1 + (\exp(i\lambda) - 1)\langle 1|T|1\rangle][1 + (\exp(i\lambda) - 1)\langle 2|T|2\rangle]}{1 \pm |S|^2} \pm \\ \pm & \frac{[S + (\exp(i\lambda) - 1)\langle 1|T|2\rangle][S^* + (\exp(i\lambda) - 1)\langle 2|T|1\rangle]}{1 \pm |S|^2} \quad (212) \end{aligned}$$

с матричным элементом

$$\langle n|T|m\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} f_n^*(k) T_k f_m(k),$$

где $T_k = |t_k|^2$; интеграл перекрытия

$$S = \int \frac{dk}{2\pi} f_1^*(k) f_2(k).$$

Вероятность прохождения n частиц даётся фурье-образом характеристической функции

$$P_n = \int \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda) \exp(-i\lambda n).$$

При независимой от энергии амплитуде $t_k \equiv t$ знаменатель в (212) сокращается с множителем в числителе, зависящим от знака обменного слагаемого, в результате статистика переноса не зависит от обменной симметрии двухчастичной волновой функции. Это свойство характерно для одномерного случая — в многоканальном случае такого сокращения, вообще говоря, не происходит и интерференционное (обменное) слагаемое не равняется нулю, даже если амплитуда прохождения не зависит от энергии.

В случае зависящей от энергии амплитуды прохождения обменные слагаемые приводят к существенным эффектам в статистике переноса. Для простоты рассмотрим два пакета с одинаковой формой, но разделённых расстоянием δx . Фурье-компоненты пакетов удовлетворяют соотношению $f_2(k) = f_1(k) \exp(-ik\delta x)$, поэтому

$$\langle 1|T|1\rangle = \langle 2|T|2\rangle \equiv \langle T\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} T_k |f_1(k)|^2.$$

Интеграл перекрытия $S = \int dk/(2\pi) |f_1(k)|^2 \exp(ik\delta x)$ является фурье-образом функции распределения пакетов в импульсном пространстве. Вероятности прохождения $P_{n,\pm}$, которые выражаются в виде

$$\begin{aligned} P_{0,\pm} = & \frac{(1 - \langle T\rangle)^2 \pm |S - \langle 1|T|2\rangle|^2}{1 \pm |S|^2}, \\ P_{1,\pm} = & 2 \frac{\langle T\rangle(1 - \langle T\rangle) \pm [\text{Re}(\langle 1|T|2\rangle S^*) - |\langle 1|T|2\rangle|^2]}{1 \pm |S|^2}, \\ P_{2,\pm} = & \frac{\langle T\rangle^2 \pm |\langle 1|T|2\rangle|^2}{1 \pm |S|^2} \quad (213) \end{aligned}$$

($\sum_n P_{n,\pm} = 1$), зависят от обменной симметрии при условии $\langle 1|T|2\rangle \neq S\langle T\rangle$. Вероятности (213) легко превращаются в кумулянты прошедшего заряда $Q = \int dt I(t)$. Для двух частиц, падающих на рассеиватель, первые два кумулянта имеют вид

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_\pm = & P_{1,\pm} + 2P_{2,\pm}, \\ \langle \langle n^2 \rangle \rangle_\pm = & P_{1,\pm}(1 - P_{1,\pm}) + 4P_{2,\pm}P_{0,\pm} \quad (214) \end{aligned}$$

($n = Q/e$), и они оба зависят от обменной симметрии. Как ни странно, эффект, обусловленный обменной симметрией, в среднем заряде $\langle Q \rangle$ был обнаружен [136] существенно позднее, чем в шуме и флуктуациях заряда $\langle \langle Q^2 \rangle \rangle$ [137–139].

Для количественного анализа эффекта нужно задать формой волнового пакета f_1 и видом зависимости от импульса T_k . Мы не будем использовать стандартное приближение гауссова волнового пакета, а рассмотрим ниже более реалистичный пример.

В последние годы научились посылать в квантовых проводниках изолированные электроны [140, 141] по запросу. При этом электроны движутся невысоко над поверхностью Ферми. В противном случае транспорт становится некогерентным вследствие испускания электронами фононов и фотонов (плазмонов). Наличие ферми-моря блокирует эти неупругие процессы, длина когерентности может достигать нескольких микрометров и превышать размеры проводника, например квантового точечного контакта.

Один из способов создать строго одночастичное возбуждение над поверхностью Ферми — приложить импульс напряжения [69] лоренцевой формы³³ [142], $V_{t_1}(t) = -(2v_F \xi \Phi_0 / c) / [v_F^2(t - t_1)^2 + \xi^2]$, где мы выразили длительность импульса ξ / v_F через параметр длины ξ ; $\Phi_0 = hc/e$. Такой импульс напряжения порождает волновой пакет с амплитудой

$$f_1(k) = \sqrt{4\pi\xi} \exp[-\xi(k - k_F) - ikx_1] \Theta(k - k_F) \quad (215)$$

($x_1 = v_F t_1$) и лоренцевой формой в обычном пространстве,

$$|\psi_1|^2 = \frac{\xi/\pi}{(x - x_1 - v_F t)^2 + \xi^2}. \quad (216)$$

Для волновых пакетов, разделённых расстоянием δx , получим интеграл перекрытия

$$S = \frac{\exp(-ik_F \delta x)}{1 + i\delta x / 2\xi}.$$

Рассмотрим теперь рассеиватели двух типов:

1) с резонансом в прозрачности, которую мы запишем в виде

$$T_k^{\text{res}} = \frac{\alpha}{1 + \beta^2(k - k_F - k_0)^2},$$

где $\alpha \leq 1$ — амплитуда резонанса, $k_0 > 0$ — его положение относительно фермиевского волнового вектора k_F . Ширина резонанса β^{-1} должна быть много меньше ширины волнового пакета ξ^{-1} в k -пространстве, $\beta^{-1} \ll \xi^{-1}$. Прозрачность $\langle T^{\text{res}} \rangle$ для одного пакета с амплитудой $f_1(k)$ принимает при $\beta^{-1} \ll k_0$ вид

$$\langle T^{\text{res}} \rangle \approx \frac{2\pi\alpha\xi}{\beta} \exp(-2\xi k_0),$$

т.е. резонанса, удалённого от уровня Ферми. Хотя малый параметр $k_0\xi$ обеспечивает большой полный сигнал, он приводит к подавлению обменных эффектов, поскольку прозрачность уже максимальна, поэтому далее мы будем рассматривать промежуточные и большие величины $k_0\xi$;

2) с резкой ступенькой ($\beta^{-1} \ll \xi^{-1}$) прозрачности, например в КТК. В этом случае мы используем уже рассмотренную нами формулу Кембла, которую теперь удобно представить в виде

$$T_k^{\text{QPC}} = \frac{\alpha}{1 + \exp[-\beta(k - k_F - k_0)]}.$$

Средняя прозрачность здесь $\langle T^{\text{QPC}} \rangle \approx \alpha \exp(-2\xi k_0)$; заметим, что в этом случае малый множитель ξ/β отсутствует.

Для выраженного (узкого) резонанса обменное слагаемое принимает простой вид:

$$\langle 1 | T^{\text{res}} | 2 \rangle \approx \exp[-i(k_F + k_0)\delta x] \langle T^{\text{res}} \rangle,$$

и его произведение с интегралом перекрытия S^* представляет собой величину $\propto \exp(-ik_0\delta x)$, независимую от k_F . Среднее число частиц осциллирует как функция расстояния δx ,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{\pm}^{\text{res}} = 2\langle T^{\text{res}} \rangle & \left\{ 1 + \left(\frac{\delta x}{2\xi} \right)^2 \pm \right. \\ & \left. \pm \left[\cos(k_0\delta x) + \frac{\delta x}{2\xi} \sin(k_0\delta x) \right] \right\} \left[1 + \left(\frac{\delta x}{2\xi} \right)^2 \pm 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (217)$$

Для волновых пакетов с большой задержкой, $\delta x \gg \xi$, обменное слагаемое затухает как $(\delta x)^{-2}$, а число прошедших частиц $\langle n \rangle^{\text{res}} = 2\langle T^{\text{res}} \rangle$, вне зависимости от знака обменного слагаемого. С другой стороны, для сильно перекрывающихся волновых пакетов, $\delta x \rightarrow 0$, воспроизводится результат для независимых частиц в случае синглета $\langle n \rangle_{+}^{\text{res}} = 2\langle T^{\text{res}} \rangle$. В асимметричном случае (триплет) число частиц

$$\langle n \rangle_{-}^{\text{res}} = 2\langle T^{\text{res}} \rangle (1 - 2\xi k_0 + 2\xi^2 k_0^2) \quad (218)$$

уменьшается для узких волновых пакетов с $\xi k_0 < 1$ и увеличивается для пакетов с $\xi k_0 > 1$. Уменьшение может достигать³⁴ 50% при $\xi k_0 = 1/2$, а увеличение (относительное) при $\xi k_0 > 1$ не лимитировано. Заметим, что это увеличение происходит из-за того, что $P_{1,-}$ и $P_{2,-}$ почти обнуляются.

В случае квантового точечного контакта результат аналогичен: недиагональные матричные элементы принимают вид

$$\langle 1 | T^{\text{QPC}} | 2 \rangle \approx \exp(-ik_0\delta x) S \langle T^{\text{QPC}} \rangle$$

и интерференционное слагаемое в P_2 обнуляется. Прошедшее число частиц

$$\langle n \rangle_{\pm}^{\text{QPC}} = 2\langle T^{\text{QPC}} \rangle \frac{1 + (\delta x / 2\xi)^2 \pm \cos(k_0\delta x)}{1 + (\delta x / 2\xi)^2 \pm 1} \quad (219)$$

осциллирует с амплитудой $k_0\delta x$. Различные пределы, обсуждавшиеся выше, также воспроизводятся, за исключением случая антисимметричного обмена и сильно перекрывающихся пакетов (см. (218)), в котором среднее число прошедших частиц

$$\langle n \rangle_{-}^{\text{QPC}} = 2\langle T^{\text{QPC}} \rangle (1 + 2\xi^2 k_0^2). \quad (220)$$

³³ Импульс произвольной формы, вообще говоря, возбуждает бесконечное число электронно-дырочных пар, т.е. возникает явление, вполне аналогичное так называемой катастрофе Андерсона (см. обсуждение в работе [69]).

³⁴ Экспоненциальное уменьшение $\propto \exp(-2k_0\xi)$ в $\langle T^{\text{res}} \rangle$ гарантирует, что $\langle -Q/e \rangle^{\text{res}} \ll 2$ для $\xi k_0 > 1$.

Уравнения (218) и (220) содержат наиболее удивительные результаты: при большом параметре ξk_0 среднее число частиц может увеличиться очень сильно по сравнению с таковым в случае двух независимых пакетов. Заметим, что эти результаты верны в режиме, в котором все характерные длины меньше длины сбоя фазы L_φ . Наконец, приведём выражение для характеристической функции в случае статистики переноса двух частиц:

$$\chi_{\pm}^{\text{res}} = 1 + \langle n \rangle_{\pm}^{\text{res}} [\exp(i\lambda) - 1] + \langle T^{\text{res}} \rangle^2 \frac{(1 \pm 1) [(\delta x / 2\xi)^2 + 1]}{(\delta x / 2\xi)^2 + 1 \pm 1} [\exp(i\lambda) - 1]^2, \quad (221)$$

$$\chi_{\pm}^{\text{QPC}} = 1 + \langle n \rangle_{\pm}^{\text{QPC}} [\exp(i\lambda) - 1] + \langle T^{\text{QPC}} \rangle^2 [\exp(i\lambda) - 1]^2. \quad (222)$$

Возрастание $\langle n \rangle_-$ полностью обусловлено увеличением P_1 . Два фактора обуславливают этот эффект — принцип Паули и зависимость прозрачности от энергии. Вследствие зависимости прозрачности от энергии происходит уширение волнового пакета, что в совокупности с принципом Паули вызывает уменьшение P_0 и P_2 и, следовательно, увеличение P_1 . Тем не менее возможны ситуации, в которых и P_2 возрастает.

Например, большая вероятность $P_{2,-}$ (см. (212)) получается для волновых пакетов со сдвинутыми в k -пространстве амплитудами, $f_2(k) = f_1(k + \delta k)$, и большим интегралом перекрытия S при условии, что амплитуда прохождения подавлена при k , принадлежащих области перекрытия. Большое увеличение вероятности прохождения двух электронов P_2 наблюдалось также в работе [143].

Отметим, что обменные эффекты в статистике переноса при постоянных напряжениях рассмотрены в статье [24], где, в частности, обсуждается простой пример с "тройником-вилкой" — системой в форме буквы Y, содержащей три канала, и найдена характеристическая функция (парные корреляторы в такой геометрии изучены в работах [23, 137]).

11.3. Статистика для N частиц

Следуя [136], распространим предыдущий анализ на случай N частиц с волновой (падающей) функцией $\Psi(\mathbf{k})$, заданной в импульсном пространстве; вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ определяет N импульсов частиц. Рассмотрим независимые частицы без взаимодействия, рассеивающиеся на барьере. Рассеянная волновая функция в асимптотической области (при $t \rightarrow \infty$) принимает вид

$$\psi_{\text{out}}^{\pm}(\mathbf{x}; t) = \left\{ \prod_{m=1}^N \int \frac{dk_m}{2\pi} \left[r_{k_m} \exp[-ik_m(x_m + v_F t)] \Theta(-x_m) + t_{k_m} \exp[ik_m(x_m - v_F t)] \exp\left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \Theta(x_m) \right] \right\} \Psi(\mathbf{k}), \quad (223)$$

т.е. эволюция всей волновой функции сводится к индивидуальным эволюциям одночастичных волновых функций, и мы получаем произведение асимптотических состояний (208). Характеристическая функция $\chi_N(\lambda) = \int d\mathbf{x} \psi_{\text{out}}^{-*}(\mathbf{x}; t) \psi_{\text{out}}^{+}(\mathbf{x}; t)$ выражается в виде

$$\chi_N(\lambda) = \left\{ \prod_{m=1}^N \int \frac{dk_m}{2\pi} [1 - T_{k_m} + T_{k_m} \exp(i\lambda)] \right\} |\Psi(\mathbf{k})|^2. \quad (224)$$

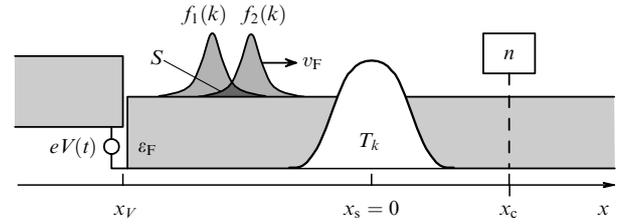


Рис. 25. Квантовый провод с центром рассеяния в x_s , обеспечивающим зависящую от импульса прозрачность T_k . Зависящий от времени потенциал $eV(t)$, приложенный в точке x_V (слева от рассеивателя) порождает падающие волновые пакеты f_1, f_2 с перекрытием $S = \langle f_2 | f_1 \rangle$. Детектор, расположенный в точке x_c (справа от рассеивателя), измеряет статистику числа частиц n , прошедших направо. Мы рассматривали падающие пакеты с $k > 0$ вне ферми-моря. В результате ферми-море остаётся невозмущённым в асимптотическом режиме. На конечных временах наличие ферми-моря порождает дополнительный шум, который мы не рассматривали.

До сих пор мы не задавали точную форму падающей волновой функции. Если мы ограничимся детерминантом Слэтера, составленным из ортонормированных одночастичных функций ϕ_m ,

$$\Psi(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \phi_m(k_n), \quad (225)$$

то выражение (224) может быть представлено в виде детерминанта,

$$\chi_N(\lambda) = \det \int \frac{dk}{2\pi} \phi_m^*(k) [1 - T_k + T_k \exp(i\lambda)] \phi_n(k) = \det \langle \phi_m | 1 - T + T \exp(i\lambda) | \phi_n \rangle, \quad (226)$$

содержащего одночастичные матричные элементы $\langle \phi_m | \mathcal{O} | \phi_n \rangle$ оператора $\mathcal{O} = 1 - T + T \exp(i\lambda)$.

Неортогональный базис. Для описания реальных ситуаций обычно используют заполнение ортогональных состояний в детерминанте Слэтера, как это было сделано выше. Но, например, в случае, представленном на рис. 25, электроны заполняют состояния f_1 и f_2 с конечным перекрытием, т.е. не ортогональные. Однако N -частичный детерминант Слэтера может быть составлен и из неортогональных состояний $|f_m\rangle$, если они линейно независимы, т.е. $\det \langle f_m | f_n \rangle \neq 0$. Правильно антисимметризованная и нормированная волновая функция (225) приобретает вид

$$\Psi^f(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \det \langle f_m | f_n \rangle}} \det f_m(k_n). \quad (227)$$

Подставляя это выражение в (224) и повторяя вычисления, ведущие к (226), получаем характеристическую функцию в виде отношения детерминантов двух матриц размером $N \times N$

$$\chi_N(\lambda) = \frac{\det \langle f_m | 1 - T + T \exp(i\lambda) | f_n \rangle}{\det \langle f_m | f_n \rangle} = \frac{\det (S^f - T^f + T^f \exp(i\lambda))}{\det S^f}, \quad (228)$$

где матрицы S^f и T^f определяются выражениями

$$S_{mm}^f = \langle f_m | f_n \rangle, \quad T_{mm}^f = \langle f_m | T | f_n \rangle. \quad (229)$$

11.4. Инвариантность детерминанта Слэтера к линейным преобразованиям

Как оказывается, выражение (228) для характеристической функции может быть сильно упрощено и представлено в виде, описывающем обобщённое биномиальное распределение [26, 144, 145]. Существенным моментом для такого представления характеристической функции является тот факт, что гильбертово пространство H_N размерностью N , натянутое на набор одночастичных состояний с волновыми функциями $f_n(k)$, определяет единственную правильно антисимметризованную волновую функцию (незапутанного состояния) или, иначе говоря, существует всего один детерминант Слэтера (с точностью до фазы) для N частиц (с состояниями из H_N). Таким образом, антисимметризованное N -частичное (незапутанное) состояние определяется гильбертовым пространством H_N , т.е. совокупностью состояний в наборе, и оно не зависит от конкретного выбора ортонормированного базиса [146].

Для пояснения рассмотрим простой пример: двухчастичный детерминант Слэтера в записи вторичного квантования $|\Psi\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ с вакуумным состоянием $|0\rangle$ и фермионными операторами $a_{1,2}$. Определяя новые операторы $a_\pm = (a_1 \pm a_2)/\sqrt{2}$, мы видим, что двухчастичное состояние

$$a_+^\dagger a_+^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1^\dagger - a_2^\dagger)|0\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = |\Psi\rangle \quad (230)$$

остаётся неизменным.

Рассмотрим теперь N -частичный детерминант Слэтера в виде (227). При переходе от базисных состояний $f_m(k)$ к новым состояниям $g_m(k)$ с помощью комплексного линейного преобразования

$$g_m(k) = \sum_n A_{mn} f_n(k), \quad \det A \neq 0 \quad (231)$$

антисимметричная комбинация

$$\det g_m(k_n) = (\det A) \det f_m(k_n) \quad (232)$$

остаётся инвариантной с точностью до множителя $\det A$; здесь мы учли, что детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов. Кроме того, нормированные N -частичные детерминантные состояния Ψ^f и Ψ^g удовлетворяют соотношению

$$\Psi^g(k_1, \dots, k_N) = \text{sign}(\det A) \Psi^f(k_1, \dots, k_N), \quad (233)$$

где $\text{sign } x = x/|x|$. Единственный эффект от использования нового базиса состоит в появлении общего множителя $\text{sign}(\det A)$, который не входит в выражение для характеристической функции (224). Таким образом, полная статистика переноса в базисах f и g оказывается одной и той же.

Диагонализация. Инвариантность детерминанта может быть использована для упрощения описания статистики переноса. Кроме того, даже не уточняя вид рассеивателя, можно качественно понять характер статистики. В частности, можно утверждать, что для состояния типа слэтеровского детерминанта вид статистики всегда сводится к обобщённому биномиальному (что верно для единственного (двухконтактного) провода, но для многоконтактных проводников это, вообще говоря, несправедливо [147]).

Рассмотрим сначала, как инвариантность детерминанта (232) проявляется себя в (228). Заметим, что любая одночастичная матрица B в виде (229) преобразуется посредством A как

$$B^g = A^\dagger B^f A, \quad B = S, T. \quad (234)$$

Поскольку $\det(AB) = \det A \det B$, мы получим, что χ_N инвариантна при замене базиса,

$$\chi_N = \frac{\det X^f}{\det S^f} = \frac{|\det A|^2 \det X^f}{|\det A|^2 \det S^f} = \frac{\det X^g}{\det S^g}, \quad (235)$$

где $X^f \equiv S^f - T^f + T^f \exp(i\lambda)$. Эта инвариантность может быть использована при переходе к новому ортогональному набору $g_m(k)$ с матрицей перекрытий $S_{mm}^g = \delta_{mm}$ и матрицей прозрачностей, принимающей диагональный вид $T_{mm}^g = \tau_m \delta_{mm}$. Возможность одновременной диагонализации матриц T_{mm}^g и S_{mm}^g вытекает из закона преобразования (234), характерного для билинейных форм (в противоположность линейному преобразованию L , которое действует как $L^g = A^{-1}L^f A$), при учёте положительной определённости S_{mm}^g . Соответствующий базис g_m и собственные значения τ_m матрицы T_{mm}^g находятся из обобщённой задачи для собственных значений

$$(T^f - \tau_m S^f) a_m = 0 \quad (236)$$

с нормировкой³⁵ $a_m^\dagger S^f a_m = 1$. Собственные векторы a_m составляют столбцы матрицы преобразования $A = (a_1, \dots, a_N)$. Собственные значения определяются корнями характеристического полинома $\det(T^f - \tau S^f) = 0$. Теперь выражение для χ_N (228), записанное в базисе $g_m(k)$, принимает вид обобщённой биномиальной функции

$$\chi_N(\lambda) = \prod_{m=1}^N [1 - \tau_m + \tau_m \exp(i\lambda)], \quad (237)$$

где детерминант вычислен в явном виде и результат зависит только от собственных значений τ_m .

Обобщённая задача для собственных значений может быть сведена к обычной переходом к ортонормированному базису $\phi_m(k)$ с $S^\phi = \mathbb{1}_N$, которая может быть получена с помощью процедуры диагонализации Грама – Шмидта в предположении, что $\phi_m(k) = \sum_n [(S^f)^{-1/2}]_{nm} f_n(k)$.

Из вышеприведённого рассмотрения мы видим, что задача для собственных значений (236) не зависит от базиса, а собственные значения и векторы задаются оператором прозрачности T , действующим в гильбертовом пространстве H_N со скалярным произведением $\langle f|g\rangle$. На языке квадратичных форм сделанные утверждения означают, что можно найти собственные значения и векторы, используя положительно определённую квадратичную форму $T(g) = \langle g|T|g\rangle$ и $S(g) = \langle g|g\rangle$, $g \in H_N$. Представляя билинейную форму $T(g)$ с $S(g) = 1$ как полярный график с радиусом $T(g)$, где g определяет

³⁵ Это утверждение используется, например, в преобразовании Боголюбова, где квадратичный гамильтониан диагонализуются при условии сохранения вида коммутационных соотношений (см. раздел 12).

направление в H_N , мы получим эллипсоид в N -мерном пространстве. Длина главных осей этого эллипсоида даётся собственными значениями, а соответствующие направления — это собственные векторы нашей задачи (236) [148]. Собственные значения τ_m ограничены интервалом $[0, 1]$ и $0 \leq T(g) \leq S(g)$ в силу унитарности. Использование такого описания полезно при анализе общих свойств обобщённой биномиальной функции распределения [136].

11.5. Описание статистики при постоянном напряжении

Измерять характеристики рассеяния отдельных электронов в мезо- и нанопроводниках, подобно тому, как это делается, например, для частиц на ускорителях, затруднительно³⁶. Гораздо более простыми для экспериментального изучения являются средний ток или корреляторы токов, измеренные при постоянном напряжении (в этом случае в транспорт вовлечено большое количество электронов). В то же время для теории переноса частиц именно этот случай оказывается гораздо более сложным, чем рассмотренные в разделе 11.3 случаи хорошо фиксированного числа частиц, описываемые волновыми пакетами известной формы. Проблема заключается в том, что фермиевский резервуар испускает неизвестное заранее число частиц — можно считать, что это число испытывает квантовые флуктуации. Однако оказывается, что эти флуктуации достаточно малы и статистика переноса (при нулевой температуре) почти биномиальна, как и в случае заданного числа частиц, рассмотренном в разделе 11.3. Поскольку парный коррелятор при постоянном напряжении в квантовом случае в точности совпадает с парным коррелятором для процесса Бернулли, гипотеза о том, что и функция распределения для числа прошедших электронов является биномиальной, возникла вскоре после получения результата для шума в работе [21].

Однако подтвердить эту гипотезу оказалось непросто [24, 69]. Мы не будем приводить строгого вывода биномиальной статистики, хотя почти все необходимые для этого вывода элементы уже представлены выше, а лишь кратко обозначим соответствующие этапы вывода в духе работы [26], которой мы следовали ранее (и далее приведём результаты). В отличие от используемых в разделе 11.3 локализованных пакетов с N частицами, которые по прошествии большого времени все рассеиваются на барьере, для описания постоянного напряжения потребуются пакеты вида (2), которые за время наблюдения сдвигаются на расстояние, много меньшее их ширины. Для получения характеристической функции по-прежнему нужно найти матрицы (229). Получающийся в результате детерминант от матрицы тёмплевского типа можно вычислить, воспользовавшись теоремой Сёго (Szego) [26], или, как это сделано в работе [100], с помощью соотношения $\log[\det(1+M)] = \text{Tr}[\log(1+M)]$.

Приведём результат, который был получен в [24, 69] с использованием представления во вторичном квантовании (а также других элементов, применявшихся и в более поздних вариантах вывода). Вычисление при $t_0 \Theta \gg \hbar$,

$t_0 eV \gg \hbar$ даёт для характеристической функции

$$\log \chi(\lambda) = \frac{2t_0}{h} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dE \log \left\{ 1 + T_n(E) [\exp(i\lambda) - 1] \times \right. \\ \left. \times f_L(1 - f_R) + T_n(E) [\exp(-i\lambda) - 1] f_R(1 - f_L) \right\}. \quad (238)$$

Для функций распределения

$$f_{L,R} = \frac{1}{\exp[(E \pm eV/2)/\Theta] + 1}$$

при независимой от энергии прозрачности интеграл в (238) равен $-\Theta \log x_1 \log x_2$, где $x_{1,2}^2 - ux_{1,2} + w = 0$, $w = \exp(eV/\Theta)$, $u = G(\lambda) \exp(eV/\Theta) + G(-\lambda)$, $G(\lambda) = 1 + T[\exp(i\lambda) - 1]$. В предельном случае $\Theta \ll eV$ результат упрощается и для статистики дробового шума мы получаем

$$\chi(\lambda) = \left\{ 1 + T[\exp(i\lambda) - 1] \right\}^{2eVt_0/h}. \quad (239)$$

Для того чтобы найти вероятность P_m переноса m электронов, нужно сделать фурье-преобразование $\chi(\lambda)$, и мы получим биномиальное распределение $P_{mN} = p^m q^{N-m} C_N^m$, $p = T$, $q = 1 - T$, $N = 2eVt_0/h$.

В двух предельных случаях, $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 1$, биномиальное распределение сводится к пуассоновскому. Первый случай соответствует классическому дробовому шуму, а второй — транспорту в почти безотражательной системе. Причём во втором случае пуассоновским является распределение числа не прошедших, а отражённых частиц.

То, что при $\Theta = 0$ и $eV \neq 0$ распределение оказывается близким к биномиальному распределению Бернулли с вероятностями "успеха" $p = T$ и "неуспеха" $q = 1 - T$ и числом событий $N = 2eVt_0/h$, линейно возрастающим во времени, является следствием почти регулярной последовательности "попыток туннелирования", происходящих с частотой $\nu_0 = eV/h$. Во время как результат для вероятностей исходов туннелирования вполне интуитивно ясен, малость флуктуаций числа попыток в течение времени измерения является несколько неожиданной, указывая на существование в системе почти периодического процесса с частотой, слабо флуктуирующей³⁷ около $\omega_0 = eV/\hbar$.

Ясно, что регулярность попыток туннелирования так или иначе обусловлена принципом Паули. Однако буквальная интерпретация процесса переноса электронов в духе рассмотрения, проведённого в разделе 11.3, когда один раз в интервал времени $\tau_V = h/eV$ на барьер налетает частица, вызывает сложности. Волновые пакеты таких частиц должны иметь размер в k -пространстве порядка $\delta k = eV/\hbar v_F$, откуда, как мы видели, следует, что вероятность успешного туннелирования представляет собой среднее по интервалу энергий $\delta E \approx eV$ от прозрачности. Такая картина не соответствует формуле (238), в которой характеристическая функция является произведением компонент при каждой энергии и процессы переноса заряда при различных

³⁶ Как упоминалось в разделе 11.2, только в последние годы для квантовых проводников удалось разработать методики, позволяющие посылать изолированные электроны [140, 141] в заданные моменты времени ("по запросу").

³⁷ Такие флуктуации связаны с логарифмическими по времени флуктуациями числа попыток протуннелировать (см. подробное обсуждение в работе [24], а также о логарифмических поправках к кумулянтам в [26, 100]).

энергиях независимы³⁸. Характерная частота $\omega_0 = eV/\hbar$, задаваемая напряжением, может непосредственно проявиться только на коротких временах, если изучать, например, соответствующие флуктуации заряда. Укажем на полезное для этого случая общее соотношение:

$$\frac{d^2 \langle \langle Q_{x_0}^2(t) \rangle \rangle}{dt^2} = \langle \langle j_{x_0}(t) j_{x_0}(0) \rangle \rangle + \langle \langle j_{x_0}(0) j_{x_0}(t) \rangle \rangle, \quad (240)$$

где x_0 — координата измерителя. Для избыточного коррелятора тока (при разности координат токов $\Delta x \ll v_F/\omega_0$ и прозрачности, независимой от энергии) [68]

$$\langle \langle j(0) j(t) \rangle \rangle = \frac{2e^2}{\pi^2} T(1-T) \frac{\sin^2(\omega_0 t/2)}{t^2}. \quad (241)$$

Именно на коротких временах возникает интерференция между различными поверхностями Ферми, приводящая к осциллирующей зависимости тока и перенесённого заряда. Аналогичные осцилляции имеют место и в более старших корреляторах. Тройной коррелятор, неупорядоченный по времени, вычислен в работе [149] (этот результат использован в [131]). Тройной коррелятор имеет более сложную структуру зависимости от координат из-за специфической интерференции в области рассеивателя. Приведём результаты для двух различных случаев. В первом случае, когда ток измеряется далеко от области рассеяния, $|x_i| \gg v_F \tau_V$, $|t_i - t_j| \sim \tau_V$, при совпадающих координатах и нулевой температуре коррелятор имеет вид

$$\langle \langle \hat{I}(t_1, x) \hat{I}(t_2, x) \hat{I}(t_3, x) \rangle \rangle = -\frac{e^3}{4\pi^3} T(1-T)(1-2T) \times \frac{\sin \omega_0(t_1 - t_2) + \sin \omega_0(t_3 - t_1) + \sin \omega_0(t_2 - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)}. \quad (242)$$

Второй случай возможен вблизи области рассеяния. Так, формально точно в точке рассеяния $x = 0$ при нулевой температуре коррелятор имеет иную зависимость от прозрачностей, чем при измерении вдали от области рассеяния,

$$\langle \langle \hat{I}(t_1, x) \hat{I}(t_2, x) \hat{I}(t_3, x) \rangle \rangle_{x=0} = \frac{e^3}{2\pi^3} T^2(1-T) \times \frac{\sin \omega_0(t_1 - t_2) + \sin \omega_0(t_3 - t_1) + \sin \omega_0(t_2 - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)}. \quad (243)$$

Заметим, что функциональная зависимость этого коррелятора от прозрачности $T^2(1-T)$ совпадает с таковой у тройного кумулянта заряда, определённого из формулы (198). Схема мысленного эксперимента, в котором мог бы быть измерен симметризованный тройной коррелятор, рассмотрена в [150].

Статистика переноса на коротких временах пока мало изучена, хотя она не менее интересна, чем статистика на больших временах. Нам известны только две работы, в которых был затронут вопрос о статистике на коротких временах [26, 100].

Для длинновременной статистики измерены корреляторы заряда третьего порядка [151, 152], в работе [153] проведены измерения (тройных корреляторов тока) с помощью регистрации изменения в динамике джозефсоновского контакта, ранее также были экспериментально определены корреляторы напряжения [154].

Вместе с тем более сложные эксперименты по измерению полной статистики или характеристической функции проведены пока только в случае некогерентного транспорта, при этом удавалось буквально поштучно подсчитывать электроны [155]. Заметим, однако, что ситуация не выглядит безнадёжной и имеющиеся сегодня в лабораториях кубиты могут использоваться в качестве спина-измерителя. Например, зарядовые кубиты, основанные на двухъямных потенциалах с одним электроном [156], вполне позволяют измерять статистику на относительно коротких временах, которые могут быть всё же больше, чем \hbar/Θ , \hbar/eV , или сравнимы с таковыми.

Как мы обсуждали выше, наличие провода возле кубита приводит к декогеренции кубита. Интересно, что, поскольку характеристическая функция периодична по λ , декогеренция тоже должна быть периодичной или по крайней мере немонотонной по константе связи. Из формулы (205) мы можем, в частности, извлечь время сбоя фазы кубита,

$$\tau^{-1} = \left| \frac{eV}{h} \log \left[1 - 4T(1-T) \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right] \right|. \quad (244)$$

Как мы видим, особенно велик эффект сбоя фазы при $T = 1/2$, когда шум максимален. Тогда

$$\tau^{-1} = \left| \frac{eV}{h} \log \left[\cos^2 \frac{\lambda}{2} \right] \right| \quad (245)$$

и сбоя фазы, если $\lambda = 2n\pi$, вообще отсутствует, а при $\lambda = (2n+1)\pi$ время формально устремляется к нулю. В этом случае более корректным будет вернуться к приведённым выше определениям характеристической функции, из которых следует, что фаза спина (кубита) поворачивается при пролёте одного электрона ровно на π , что и можно считать полным сбоем фазы, поскольку получившееся состояние спина (кубита) ортогонально исходному. При этом возникает максимальная запутанность состояний кубита и пролетающего электрона (если состояние последнего характеризовать всего одной дискретной переменной, принимающей значения "прошёл" или "отразился") (см. работу [157]).

Появление при $T = 1/2$ особенностей в характеристической функции на формальном уровне отмечено в работе [158] и интерпретировано как "фазовый переход" между термодинамическими фазами во временном пространстве. Выше мы описали физическую природу этого явления.

11.6. Полное статистическое описание переноса заряда в квантовых проводниках с известной статистикой прозрачностей

Как мы установили в разделе 11.5, если вероятность прохождения электронов через квантовый проводник известна, то статистика переноса заряда за большие времена может быть описана полностью. В свою очередь прозрачность, которую можно рассматривать как

³⁸ Отметим, что на самом деле такая факторизация верна только для интервалов энергии, заданных обратным временем наблюдения, $\delta E = \hbar/t$, и соответственно формула Левитова – Лесовика (238) верна, только если прозрачности на таких масштабах не зависят от энергии.

случайную величину (имея в виду нерегулярную зависимость от параметров потенциала рассеяния), для некоторых проводников также может быть описана своей функцией распределения. Поэтому можно поставить вопрос о "полной" функции распределения для заряда, учитывающей как динамические флуктуации, так и флуктуации прозрачностей от образца к образцу.

Начнём с простого примера: баллистического проводника с полостью, для которого функция распределения прозрачностей в квазиодномерном случае тривиальна [159]. При наличии слабого магнитного поля, но такого, что более одного кванта потока проходит через двумерную несимметричную полость, соединённую двумя одноканальными подводами с резервуарами, вероятность прохождения T через эту систему оказывается равномерно распределённой на отрезке $[0, 1]$, т.е.

$$P(T) = 1. \quad (246)$$

Нахождение вероятности того, что за время t перенесён заряд en , при неизвестной заранее прозрачности, для которой, однако, известна функция распределения $P_T(T)$, сводится к интегрированию функции распределения заряда $P_Q(Q)$ по прозрачностям с весом $P_T(T)$:

$$\langle P(Q) \rangle = \int_0^1 dT P_T(T) P(Q). \quad (247)$$

Аналогично усредняется и характеристическая функция.

Характеристическая функция биномиального распределения, усреднённая с (246), имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \chi_b(\lambda) \rangle &= \int_0^1 dT \left[1 + T(\exp(i\lambda) - 1) \right]^N = \\ &= \frac{\exp[i\lambda(N+1)] - 1}{(\exp(i\lambda) - 1)(N+1)}. \end{aligned} \quad (248)$$

При целом N характеристическая функция (248) легко интегрируется и для функции распределения получаем любопытный результат:

$$P(k) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+N} \delta(k+n), \quad (249)$$

который означает, что перенос любого числа электронов, начиная от нуля и кончая максимальным значением $N = 2eVt/h$, равновероятен. Такое явление обусловлено, в частности, ограниченностью биномиальной функции распределения.

Более важный случай — это грязный проводник, рассмотренный в разделе 8.2, для которого распределение прозрачностей даётся функцией Дорохова. Второй кумулянт вычислен в работе [85], а результаты для характеристической функции, позволяющей вычислить все моменты, получены в [160].

Для грязного проводника, в котором прозрачности описываются функцией распределения Дорохова, шум втрое меньше пуассоновского, или в терминах фактора Фано $F = 1/3$, как показано в [85]. Это является следствием бимодальности функции распределения прозрачностей. Относительно просто получить интегрированием и более высокие моменты (кумулянты), более того, можно получить производящую функцию для всех

кумулянтов, т.е. среднее от логарифма характеристической функции, как это сделано в [160],

$$\overline{\log \chi(\lambda)} = \frac{GVt}{e} \operatorname{arsinh}^2 \sqrt{\exp(i\lambda) - 1}. \quad (250)$$

В статье [160] также приведены в явном виде десять первых кумулянтов; мы приведём их до четвёртого:

$$\overline{\langle \langle N(t) \rangle \rangle} = N_0, \quad (251)$$

$$\overline{\langle \langle N^2(t) \rangle \rangle} = \frac{N_0}{3}, \quad (252)$$

$$\overline{\langle \langle N^3(t) \rangle \rangle} = \frac{N_0}{15}, \quad (253)$$

$$\overline{\langle \langle N^4(t) \rangle \rangle} = -\frac{N_0}{105} \dots \quad (254)$$

Первый кумулянт даёт просто средний перенесённый заряд, второй — уже известный нам результат для шума, который задаёт дисперсию, третий характеризует несимметричность функции распределения (относительно вершины), четвёртый — "негладкость" функции распределения (её отличие от гауссовой). Для старших кумулянтов

$$\begin{aligned} \overline{\langle \langle N^k(t) \rangle \rangle} &\sim \\ &\sim \frac{N_0}{(2\pi)^{k-1}} \frac{(k-1)!}{\sqrt{k}} \begin{cases} (-1)^{(k+2)/2} & \text{для чётных } k, \\ (-1)^{(k+1)/2} & \text{для нечётных } k. \end{cases} \end{aligned} \quad (255)$$

Для сравнения: в случае пуассоновского распределения $\langle \langle N^k(t) \rangle \rangle = N_0^k$ при $k > 0$, а для гауссовой функции распределения, как известно, все кумулянты старше второго равны нулю.

11.7. Описание статистики переноса в графене

Удивительно, что точно такое же, как и для грязного проводника, распределение прозрачностей имеет место для *чистого* графена (в случае большого числа проводящих каналов и нулевого уровня допирования). Такое свойство "псевдодиффузности" транспорта подтверждено экспериментально [161] измерением шума, для которого фактор Фано оказался равным $1/3$, как и предсказывалось [162]. Причиной рассеяния в чистом графене является рассеяние на границах, при этом в отсутствие допирования весь транспорт обеспечивается затухающими модами, которыми мы всюду выше пренебрегали. Различие между свойствами рассеяния для уравнений Дирака и Шрёдингера мы здесь рассматривать не будем, но в разделе 14 вернёмся к этому вопросу. Подход Ландауэра для описания транспорта в графене использован в работе [163].

11.8. Описание статистики переноса при наличии взаимодействия

Задачу о статистике рассеяния для двух электронов, как оказывается, можно решить и при наличии межэлектронного взаимодействия в случае, когда оно сосредоточено в области квантовой точки. Матрица рассеяния при этом может быть найдена или точно [164], или с помощью теории возмущений [165]. Это позволяет детально описать результат рассеяния двух частиц, в частности возникающую запутанность [164], а также транспорт в двух проводниках, косвенно взаимодействующих через квантовые точки [165]. Примечательно, что в задаче при

постоянном напряжении взаимодействие (в пределе малого напряжения) не меняет функционального вида характеристической функции (238), хотя прозрачности оказываются сложным образом перенормированными [166]. (Заметим, однако, что на данный момент не вполне ясно, насколько такой результат универсален.)

Описание с помощью матриц рассеяния удаётся распространить и на случай взаимодействия электронов с другими степенями свободы. Оказывается, что при построении теории излучения фотонов (или других электромагнитных мод, например плазмонов) когерентными проводниками удаётся выразить величины типа интенсивности излучения фотонов [104] или корреляторов числа фотонов в разных точках [167, 168] через матрицы рассеяния в проводнике. Технически эта возможность возникает благодаря тому, что длины волн испускаемых фотонов много больше характерной длины рассеивателя. В этих условиях гамильтониан взаимодействия

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}), \quad (256)$$

содержащий интегралы по координатам точных волновых функций (состояний рассеяния), сводится к интегралам от коэффициентов матрицы рассеяния и операторов вторичного квантования. При промежуточных вычислениях все величины для корреляторов фотонов сводятся к свёрткам от корреляторов токов на низких частотах, независимых от координат и выражающихся через матрицы рассеяния. Такой же приём (его можно назвать теорией возмущений по взаимодействию на основе точных волновых функций рассеяния) может применяться для описания электрон-фононного взаимодействия, если характерные длины волн фононов много больше характерной длины рассеивателя.

Важный случай, в котором взаимодействие удаётся описать с помощью матриц рассеяния, — это контакт сверхпроводника с нормальным квантовым проводником или джозефсоновский контакт двух сверхпроводников через нормальную прослойку, которая может быть и барьером, и двухбарьерной системой, и грязным (когерентным) проводником, и графеновой плёнкой. В разделах 13 и 14 мы подробно рассмотрим эти случаи.

12. Уравнения Боголюбова – де Жена

Перейдём к описанию квантового транспорта в сверхпроводящих системах. В этом разделе приводится описание сверхпроводящей (в общем случае пространственно неоднородной) системы с помощью преобразований Боголюбова [169–171].

Начнём с рассмотрения многочастичного эффективно-го гамильтониана Бардина – Купера – Шриффера (БКШ)

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{x} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{x} [\Delta(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) + \text{h.c.}], \quad (257)$$

где интегралы берутся по всему объёму системы, $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Первый член в правой части (257) — кинетический, в него входит оператор $\hat{\mathbf{P}}^2/2m$, определяющий квадратичную дисперсию системы; здесь $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla - (e/c)\mathbf{A}$. Суммирование проводится по спинам $\sigma = \uparrow, \downarrow$; $\bar{\mu}(\mathbf{x}) = \mu - eV(\mathbf{x})$ — химический потенциал (в сверхпро-

воднике или нормальном проводнике), μ — по-прежнему электрохимический потенциал (который мы считаем константой, определённой в сверхпроводнике)³⁹. Второй член в правой части (257), отвечающий за сверхпроводимость, соответствует наличию в сверхпроводнике комплексного параметра порядка; $\Delta(\mathbf{x}) \equiv |\Delta(\mathbf{x})|$ — величина сверхпроводящей щели. В общем случае сверхпроводящий параметр $\Delta(\mathbf{x})$, который находится усреднением по фоновым степеням свободы, отвечающим за сверхпроводимость, зависит от состояния системы электронов. Далее мы будем использовать приближение самосогласованного поля.

Произведём замену волновых функций линейной комбинацией новых волновых функций, $u_v(\mathbf{x})$ и $v_v(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) &= \sum_v \{ u_v(\mathbf{x}) \hat{a}_{v,\sigma} + \text{sign } \sigma v_v^*(\mathbf{x}) \hat{a}_{v,-\sigma}^{\dagger} \}, \\ \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) &= \sum_v \{ u_v^*(\mathbf{x}) \hat{a}_{v,\sigma}^{\dagger} + \text{sign } \sigma v_v(\mathbf{x}) \hat{a}_{v,-\sigma} \}. \end{aligned} \quad (258)$$

Суммирование по состояниям v означает суммирование по дискретному спектру и интегрирование по непрерывному. Такая замена в гамильтониане называется преобразованием Боголюбова.

Операторы свободных электронов удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям для ферми-частиц:

$$[\hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}), \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{x}')] = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (259)$$

$$[\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}), \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{x}')] = 0. \quad (260)$$

Потребуем, чтобы новые операторы также удовлетворяли коммутационным соотношениям для ферми-частиц, что отражает канонический характер преобразования (258) [171],

$$[\hat{a}_{v,\sigma}^{\dagger}, \hat{a}_{v',\sigma'}] = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{v,v'}, \quad (261)$$

$$[\hat{a}_{v,\sigma}, \hat{a}_{v',\sigma'}] = 0. \quad (262)$$

При этом $\langle \hat{a}_{v,\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{v',\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{v,v'} f(\varepsilon_v)$, где $f(\varepsilon)$ — как и ранее, функция распределения Ферми. Можно показать, что из условий (259)–(262) следуют соотношения, накладывающие условия на коэффициенты $u(\mathbf{x})$ и $v(\mathbf{x})$ в (258):

$$\sum_v \{ u_v^*(\mathbf{x}) u_v(\mathbf{x}') + v_v(\mathbf{x}) v_v^*(\mathbf{x}') \} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (263)$$

$$\sum_v \{ u_v^*(\mathbf{x}) v_v(\mathbf{x}') - v_v(\mathbf{x}) u_v^*(\mathbf{x}') \} = 0, \quad (264)$$

$$\int d\mathbf{x} [u_v(\mathbf{x}) u_v^*(\mathbf{x}) + v_v(\mathbf{x}) v_v^*(\mathbf{x})] = \delta_{v,v'}, \quad (265)$$

$$\int d\mathbf{x} [u_v(\mathbf{x}) v_v(\mathbf{x}) - v_v(\mathbf{x}) u_v(\mathbf{x})] = 0. \quad (266)$$

Преобразования (258) диагонализуют гамильтониан (257), приводя его к виду

$$\hat{H} = U_0 + \sum_{\sigma,v} \varepsilon_v \hat{a}_{v,\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{v,\sigma}, \quad (267)$$

³⁹ В то время как в разделах 2–11 существенными для нас величинами являлись электрохимические потенциалы μ и их разность, определяющая степень неравновесности системы, здесь в рассмотрение дополнительно вводится химический потенциал $\bar{\mu}$, связанный с локальной плотностью заряда, участвующего в формировании сверхпроводимости.

при условии, что коэффициенты $u_v(\mathbf{x})$ и $v_v(\mathbf{x})$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] u_v(\mathbf{x}) - \Delta(\mathbf{x})v_v(\mathbf{x}) &= \varepsilon_v u_v(\mathbf{x}), \\ \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}_c^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] v_v(\mathbf{x}) + \Delta^*(\mathbf{x})u_v(\mathbf{x}) &= -\varepsilon_v v_v(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (268)$$

где $\hat{\mathbf{P}}_c = \hat{\mathbf{P}}|_{e \rightarrow -e}$. Энергия U_0 играет роль энергии основного состояния системы,

$$\begin{aligned} U_0 = \int d\mathbf{x} \sum_v \left\{ v_v(\mathbf{x}) \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] v_v^*(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + u_v^*(\mathbf{x}) \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] u_v(\mathbf{x}) \right\} - \sum_v \varepsilon_v. \end{aligned} \quad (269)$$

Уравнения (268), которые называются уравнениями Боголюбова – де Жена (БдЖ), могут быть интерпретированы как волновое уравнение для двухкомпонентной волновой функции

$$\hat{\Psi}_v(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_v(\mathbf{x}) \\ v_v(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

квазичастицы с дисперсией ε_v . Первую компоненту, $u_v(\mathbf{x})$, можно рассматривать как электроноподобную часть волновой функции, а вторую, $v_v(\mathbf{x})$, — как дырочноподобную. Данная интерпретация может быть полезной при рассмотрении таких процессов, как андреевское отражение [172–174].

В западной литературе чаще используется запись уравнений (268) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_0(\mathbf{x}) & \Delta(\mathbf{x}) \\ \Delta^*(\mathbf{x}) & -\hat{H}_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \hat{\Psi}_v(\mathbf{x}) = \varepsilon_v \hat{\Psi}_v(\mathbf{x}), \quad (270)$$

где $\hat{H}_0(\mathbf{x}) = -\hbar^2 \partial_x^2 / 2m - \bar{\mu}(\mathbf{x})$ — гамильтониан системы в нормальном состоянии с химическим потенциалом $\bar{\mu}(\mathbf{x})$.

Уравнения БдЖ инвариантны относительно преобразований $\varepsilon_v \rightarrow -\varepsilon_v$, $u_v \rightarrow -v_v^*$, $v_v \rightarrow u_v^*$, вследствие чего набор решений уравнений (268) является переполненным. Проще всего это пояснить на примере, когда сверхпроводящий параметр равен нулю. В этом случае понятно, что одно и то же исходное электронное состояние в терминах боголюбовских квазичастиц может быть описано либо рождением электроноподобного состояния, либо уничтожением дырочноподобного состояния с противоположной энергией. На практике обычно выбирают один из двух следующих вариантов: 1) $\varepsilon > 0$, при этом проводится суммирование по спинам (причём учитываются и электроноподобные, и дырочноподобные состояния), что является удобным, например, для описания джозефсоновских контактов и наиболее естественным для описания возбуждений над ферми-морем; 2) $\varepsilon \in \mathbb{R}$, при этом учитываются только электроноподобные состояния, что может быть удобным для описания контактов нормального проводника со сверхпроводником. Заметим, что в принципе возможны и другие варианты. Эти подходы эквивалентны и выбираются из соображений целесообразности.

Сверхпроводящий параметр $\Delta(\mathbf{x})$ в общем случае не является свободным, а зависит от состояния системы электронов, а значит и от решений уравнений БдЖ. Таким образом, для разрешения уравнений БдЖ должен быть известен параметр $\Delta(\mathbf{x})$, но эти же уравнения и

определяют $\Delta(\mathbf{x})$. Соответствующее самосогласованное решение можно получить, например, итерационным способом, выбирая в качестве начального приближения некоторую затравочную функцию $\Delta_0(\mathbf{x})$. Приведём без вывода выражение для сверхпроводящей щели⁴⁰ через u_v , v_v и ε_v :

$$\Delta(\mathbf{x}) = -|g| \sum_v u_v(\mathbf{x}) v_v^*(\mathbf{x}) \tanh \frac{\varepsilon_v}{2\Theta}, \quad (271)$$

где Θ — температура системы, $|g|$ — константа электрон-фононного взаимодействия, $g < 0$. Также без вывода приведём выражение для термодинамического потенциала системы:

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{|g|} \int d\mathbf{x} |\Delta(\mathbf{x})|^2 - 2\Theta \sum_v \log \left(2 \cosh \frac{\varepsilon_v}{2\Theta} \right) + \\ + \int d\mathbf{x} \sum_v \left\{ v_v(\mathbf{x}) \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] v_v^*(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + u_v^*(\mathbf{x}) \left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right] u_v(\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (272)$$

Иногда сверхпроводящую щель можно задать "вручную" и решить задачу с достаточной точностью без самосогласования⁴¹ (иными словами, выбрать очень хорошую затравочную функцию $\Delta_0(\mathbf{x})$), например, в случае нормального контакта (островка) малого размера, присоединённого к массивному сверхпроводнику (или сверхпроводникам) посредством туннельных переходов. Такой островок формирует небольшое количество состояний, которые не могут существенно повлиять на сверхпроводимость в массивных берегах с огромным количеством состояний. То же самое имеет место для контакта нормального (массивного) проводника и сверхпроводника через квазиодномерный проводник. Обратим внимание на то, что эта ситуация вполне аналогична ситуации, обсуждавшейся в разделе 2 при рассмотрении задачи о двух нормальных массивных проводниках, соединённых квазиодномерным проводом, в которой функция распределения (матрица плотности) в резервуаре также пренебрежимо мало изменялась из-за наличия другого резервуара.

Оператор плотности тока выражается в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \frac{ie\hbar}{2m} \sum_{\sigma} \left\{ [\nabla \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x})] \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) - \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \nabla \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) \right\} - \\ - \frac{e^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \sum_{\sigma} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (273)$$

Перепишем (273) через коэффициенты $u_v(\mathbf{x})$ и $v_v(\mathbf{x})$ в преобразовании Боголюбова и усредним по матрице плотности системы,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{ie\hbar}{m} \sum_v \left\{ [v_v^*(\mathbf{x}) \nabla v_v(\mathbf{x}) - v_v(\mathbf{x}) \nabla v_v^*(\mathbf{x})] \times \right. \\ \left. \times [1 - f(\varepsilon_v)] - [u_v^*(\mathbf{x}) \nabla u_v(\mathbf{x}) - u_v(\mathbf{x}) \nabla u_v^*(\mathbf{x})] f(\varepsilon_v) \right\} - \\ - \frac{2e^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \sum_v \left\{ |v_v(\mathbf{x})|^2 (1 - f(\varepsilon_v)) + |u_v(\mathbf{x})|^2 f(\varepsilon_v) \right\}. \end{aligned} \quad (274)$$

⁴⁰ Детальный вывод см., например, в [171].

⁴¹ Мы будем рассматривать именно такие случаи.

13. Электронный транспорт в контактах нормальных металлов со сверхпроводниками (NS)

При низких температурах в достаточно чистых структурах время сбоя фазы электронов может превышать время пролёта через нормальную часть системы нормальный металл–сверхпроводник и волновые функции могут считаться когерентными не только в сверхпроводнике, но и вне его. В этом случае подход с использованием матриц рассеяния оказывается очень удобным.

В стандартной теории эффекта близости влияние сверхпроводника на нормальный металл может быть описано как проникновение конденсатной волновой функции из сверхпроводника в нормальный металл на глубину когерентности. Это явление может быть также рассмотрено как появление когерентной связи между электронами и дырками в нормальном металле, что обусловлено андреевским отражением [172] на границе NS-контакта и может быть описано уравнениями БДЖ (268). Андреевское отражение обуславливает превращение квазичастичного тока в сверхпроводящий на границе NS-контакта [172, 175]⁴².

Подход на основе матрицы рассеяния использует представление о боголюбовских квазичастицах, волновые функции которых содержат как электронную, так и дырочную компоненты [25, 180, 181]. Боголюбовские свободные квазичастицы здесь играют ту же роль, что и свободные электроны в теории для нормальных проводников, и все аспекты теории, развитые для нормальных проводников, могут быть распространены на гибридные системы. Кроме того, есть и другие эффекты, например эффект Джозефсона, который также можно успешно описать с помощью матрицы рассеяния.

Нормальное рассеяние вблизи NS-контакта, в частности качество границы, определяет величину эффекта близости и, естественно, влияет на вид вольт-амперной характеристики (ВАХ). В NIS-контактах, отличающихся от NS-контактов наличием нормального рассеивателя I, который отражает электроны в электроны, а дырки в дырки, ВАХ изучалась ещё в работе [175] (см. там же ссылки на более ранние работы), где рассматривался нелинейный транспорт на основе уравнения БДЖ в квазиодномерной модели при наличии одного барьера на границе.

Описание с использованием матриц рассеяния позволяет учесть произвольный рассеиватель для системы, включающей в себя сверхпроводник. Данное описание первыми использовали Такане и Эбисава [15, 16] и Ламберт [17, 18], а Бинаккер [180] вывел формулу для линейного кондактанса NS-контакта через матрицу рассеяния в нормальном металле⁴³. В отличие от техник с

использованием функций Грина [183–186], которые применялись, в частности, для описания экспериментов [187, 188], подход с использованием матрицы рассеяния не позволяет учесть все неупругие процессы. Однако этот подход обладает большей наглядностью для простых потенциалов рассеяния, а для сложных позволяет представить результат в общем виде.

Следуя работе [189], мы рассмотрим проводимость NXS-контакта, в котором область X представляет собой рассеиватель в нормальной части, при произвольных температурах и напряжениях. Мы выведем также общие соотношения, рассмотрим в качестве примера грязные контакты и подробно проанализируем системы с одним и двумя рассеивателями в области X.

13.1. Связь тока с напряжением и спектральный кондактанс

Рассмотрим квазиодномерный многоканальный NXS-контакт (рис. 26). Структура матрицы рассеяния квазичастиц для него существенно сложнее, чем для нормального контакта NXN. Здесь кроме обычного рассеяния, происходящего в нормальной части, имеет место андреевское рассеяние на NS-границе, где предполагается скачок щели от нуля до объёмной величины, а электроны могут отражаться в дырки и наоборот. Для того чтобы лучше понять структуру процессов рассеяния, мы сначала по отдельности опишем матрицы рассеяния в обеих частях контакта, а затем рассмотрим полную матрицу.

Когерентное рассеяние в нормальной части описывается матрицей рассеяния размером $4N \times 4N$ (в баллистических сегментах мы пренебрежём затухающими модами)

$$S_N = \begin{bmatrix} r_{11}(\varepsilon) & 0 & t_{12}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & r_{11}^*(-\varepsilon) & 0 & t_{12}^*(-\varepsilon) \\ t_{21}(\varepsilon) & 0 & r_{22}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & t_{21}^*(-\varepsilon) & 0 & r_{22}^*(-\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (275)$$

Матрица S_N связывает N входящих электронных (дырочных) каналов I_i^e (I_i^h), $i = 1, 2$, с каждой стороны с выходящими каналами при той же энергии O_i^e (O_i^h) (рис. 26)⁴⁴,

$$\begin{bmatrix} O_1^e \\ O_1^h \\ O_2^e \\ O_2^h \end{bmatrix} = S_N \begin{bmatrix} I_1^e \\ I_1^h \\ I_2^e \\ I_2^h \end{bmatrix}. \quad (276)$$

Здесь $r_{ii}(\varepsilon)$ и $t_{ij}(\varepsilon)$ — матрицы амплитуд прохождения и отражения в электронных каналах размером $N \times N$. Количество каналов N определяется числом поперечных мод; изменением числа мод с изменением напряжения

⁴² В последние годы появилась ещё одна точка зрения: эффект близости состоит в том, что в нормальный проводник влетают куперовские пары электронов. Волновые функции электронов в этих парах сложным образом перепутаны между собой. Запутанность имеется как по спиновым переменным (аналогично запутанности в боровском синглете), так и по орбитальным (аналогично запутанности Эйнштейна – Подольского – Розена). Запутанность попадающих в нормальный проводник куперовских пар исследовалась в работах [176–179].

⁴³ Напомним также о работе Андерсона [182], в которой для формального доказательства независимости критической температуры от слабого беспорядка (теорема Андерсона) использовалось описание с помощью точных волновых функций.

⁴⁴ Здесь и далее нам удобнее отсчитывать все энергии в аргументах функций от положения электрохимического потенциала в массивном сверхпроводнике μ , например под $t_{12}^*(-\varepsilon)$ понимается $t_{12}^*(\mu - \varepsilon)$. Комплексно-сопряжённые амплитуды для дырок появляются из-за того, что направление движения дырок противоположно волновому вектору. Соответствующие амплитуды получаются из электронных посредством комплексного сопряжения, что и приводит к появлению величин $t^*(-\varepsilon)$, а не $t(-\varepsilon)$.

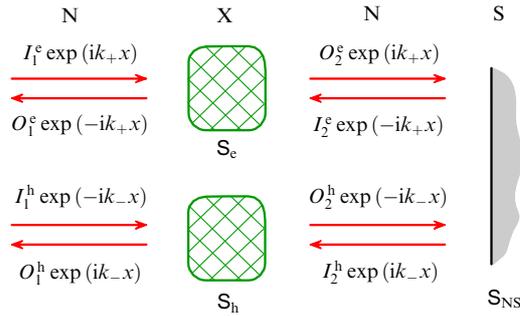


Рис. 26. Схема NS-контакта. Левый нормальный резервуар имеет электрохимический потенциал $\mu + eV$, а правый, сверхпроводящий, — μ ; X — произвольный нормальный рассеиватель, k_+ и k_- — волновые векторы электрона и дырки соответственно.

мы пренебрежём⁴⁵. Матрицу (275) можно записать также в блочном виде,

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \hat{r}_{11}(\varepsilon) & \hat{t}_{12}(\varepsilon) \\ \hat{t}_{21}(\varepsilon) & \hat{r}_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (277)$$

где \hat{r}_{ii} и \hat{t}_{ij} — расширенные матрицы размером $2N \times 2N$, включающие в себя комплексно-сопряжённые амплитуды для дырок. Следуя обычному соглашению, мы включаем в матрицу рассеяния распространение частиц в баллистическом сегменте между рассеивателем X и NS-границей (см. рис. 26).

Часто матрицу рассеяния удобно представить в электронно-дырочной параметризации,

$$\bar{\mathbf{S}}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_h \end{bmatrix}, \quad (278)$$

где подматрицы \mathbf{S}_e и \mathbf{S}_h описывают рассеяние соответственно электронов с энергией ε и дырок с энергией $-\varepsilon$. Эти подматрицы составляются из соответствующих компонент матрицы (275), при этом состояния из (276) несколько модифицируются:

$$\begin{bmatrix} O_1^e \\ O_2^e \\ O_1^h \\ O_2^h \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}}_N \begin{bmatrix} I_1^e \\ I_2^e \\ I_1^h \\ I_2^h \end{bmatrix}. \quad (279)$$

Рассеяние, описываемое подматрицами \mathbf{S}_e и \mathbf{S}_h , схематически изображено на рис. 26.

Матрицу рассеяния на NS-границе можно определить в общем виде как

$$\mathbf{S}_{NS} = \begin{bmatrix} r_{ee}(\varepsilon) & r_{eh}(\varepsilon) & t'_{ee}(\varepsilon) & t'_{eh}(\varepsilon) \\ r_{he}(\varepsilon) & r_{hh}(\varepsilon) & t'_{he}(\varepsilon) & t'_{hh}(\varepsilon) \\ t_{ee}(\varepsilon) & t_{eh}(\varepsilon) & r'_{ee}(\varepsilon) & r'_{eh}(\varepsilon) \\ t_{he}(\varepsilon) & t_{hh}(\varepsilon) & r'_{he}(\varepsilon) & r'_{hh}(\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (280)$$

⁴⁵ В принципе, матрица рассеяния может зависеть от приложенного напряжения. Например, таким образом можно учесть изменение состояний рассеяния в случае зависящей от напряжения формы барьера Шотки.

Матрица \mathbf{S}_{NS} связывает волновые функции в нормальной части и сверхпроводнике⁴⁶,

$$\begin{bmatrix} I_2^e \\ I_2^h \\ O_S^e \\ O_S^h \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{NS} \begin{bmatrix} O_2^e \\ O_2^h \\ I_S^e \\ I_S^h \end{bmatrix}. \quad (281)$$

Входящие и выходящие каналы помечены в соответствии с рис. 26. В блочном виде эту матрицу можно записать как

$$\mathbf{S}_{NS} = \begin{bmatrix} \hat{r}'_{NS}(\varepsilon) & \hat{t}'_{NS}(\varepsilon) \\ \hat{t}_{NS}(\varepsilon) & \hat{r}_{NS}(\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (282)$$

Здесь r, r', t и t' — матрицы размером $N \times N$, описывающие отражение и прохождение для нормированных на единичный поток состояний в нормальных и сверхпроводящих сегментах, — сгруппированы в матрицы \hat{r}'_{NS} , \hat{t}'_{NS} , \hat{t}_{NS} и \hat{r}_{NS} размером $2N \times 2N$.

При вычислении тока мы будем рассматривать матрицу (275) в общем виде, при необходимости уточняя её для конкретных моделей. Матрицу (280) мы определим явно с помощью уравнений БдЖ (268). Пока обе матрицы будем считать произвольными. Полный результат для всех видов рассеяния может быть описан матрицей \mathbf{S}_{NXS} типа (280), которая также унитарна. Мы ограничимся её подматрицей размером $2N \times 2N$

$$\mathbf{R}_{NXS} = \begin{bmatrix} R_{ee} & R_{eh} \\ R_{he} & R_{hh} \end{bmatrix}, \quad (283)$$

описывающей отражение в нормальную область,

$$\begin{bmatrix} O_1^e \\ O_1^h \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{NXS} \begin{bmatrix} I_1^e \\ I_1^h \end{bmatrix}. \quad (284)$$

Здесь R_{ee} , R_{eh} , R_{he} и R_{hh} — матрицы отражения размером $N \times N$. Ниже матрица $\mathbf{R}_{NXS} = \mathbf{R}_{NXS}(\varepsilon, V)$ будет вычислена для заданных матриц рассеяния (275) и (280).

Выведем теперь формулу для тока, используя полную матрицу рассеяния (280). Вклад в ток от состояния, поступающего из нормального проводника, с заданной энергией ε имеет вид

$$I_n(\varepsilon, V) = \frac{e\hbar k_n}{m} \left\{ 1 - \sum_m |R_{ee,mm}(\varepsilon, V)|^2 + \sum_m |R_{he,mm}(\varepsilon, V)|^2 \right\}. \quad (285)$$

Этот вклад зависит от напряжения, поскольку изменение электростатического потенциала приводит к изменению состояний рассеяния. Однако деформация состояний рассеяния вследствие приложенного напряжения сама по себе не приводит к появлению отличного от нуля полного тока⁴⁷.

⁴⁶ На рисунке 26 состояния в сверхпроводнике не указаны, поскольку в дальнейшем нам будут важны в основном амплитуды отражения для состояний, поступающих в сверхпроводник из нормальной части.

⁴⁷ Это может быть показано посредством использования полной матрицы рассеяния, учитывающей андреевское отражение.

Важно, что приложенное напряжение создаёт разность электрохимических потенциалов в нормальной части и сверхпроводнике — именно это и вызывает появление конечного суммарного тока

$$I = - \int d\varepsilon \frac{G_s(\varepsilon, V)}{e} [f(\varepsilon) - f(\varepsilon - eV)], \quad (286)$$

где спектральный кондактанс

$$G_s(\varepsilon, V) = \frac{2e^2}{h} \text{Tr} \left\{ 1 - R_{ee}^\dagger(\varepsilon, V) R_{ee}(\varepsilon, V) + R_{he}^\dagger(\varepsilon, V) R_{he}(\varepsilon, V) \right\} \quad (287)$$

описывает вклад в ток от входящих состояний с энергией ε при заданном напряжении V (энергия отсчитывается от электрохимического потенциала в сверхпроводнике). Множитель 2 в правой части (287) учитывает спиновое вырождение.

Формулы (286) и (287) определяют дифференциальную проводимость

$$\left. \frac{dI}{dV} \right|_V = - \int d\varepsilon f'(\varepsilon - eV) G_s(\varepsilon, V) - \int d\varepsilon \frac{1}{e} \frac{\partial G_s(\varepsilon, V)}{\partial V} [f(\varepsilon) - f(\varepsilon - eV)]. \quad (288)$$

При нулевой температуре (288) удобно представить в виде ряда:

$$\left. \frac{dI}{dV} \right|_V = G_s(eV, 0) + 2V \left. \frac{\partial G_s(\varepsilon, V)}{\partial V} \right|_{\varepsilon=eV, V=0} + \dots \quad (289)$$

Формула (289), в отличие от определения дифференциального кондактанса $dI/dV = G_s(eV, 0)$ [175], учитывает изменение прозрачности.

Для завершения общего вывода матрицу R_{NXS} (283) надо выразить через матрицы рассеяния (275) и (280):

$$R_{NXS}(\varepsilon, V) = \hat{r}_{11}(\varepsilon) + \hat{t}_{12}(\varepsilon) [1 - \hat{r}_{NS}(\varepsilon) \hat{r}_{22}(\varepsilon)]^{-1} \hat{r}_{NS}(\varepsilon) \hat{t}_{21}(\varepsilon). \quad (290)$$

Простейший процесс, дающий вклад в сопротивление, помимо прямого рассеяния в нормальной части, — это прохождение нормальной части (\hat{t}_{21}), отражение на NS-границе (\hat{r}_{NS}) и прохождение обратно через нормальный сегмент (\hat{t}_{12}). Все дальнейшие процессы могут быть представлены как многократное отражение от нормального рассеивателя и NS-границы. Выражения (286), (287) и (290) определяют общий вид ВАХ без каких-либо предположений о характере рассеяния; например, на NS-границе форма $\Delta(x)$ может быть произвольной.

Далее мы вычислим спектральный кондактанс (287), используя андреевское приближение и считая $\Delta(x)$ ступенчатой функцией.

Обсудим кратко симметрию ВАХ по отношению к замене знака V . Будем иметь в виду, что при $|eV| < \Delta$ входящие квазичастицы не могут проникнуть в массивный сверхпроводник. Поток вероятностей в состояниях $|\varepsilon| < \Delta$ целиком отражается, поэтому полная матрица рассеяния $R_{NXS}(\varepsilon, V)$, определяемая уравнением (283), унитарна. Из унитарности следуют соотношения $R_{ee}^\dagger R_{ee} + R_{he}^\dagger R_{he} = 1$ и $R_{ee} R_{ee}^\dagger + R_{eh} R_{eh}^\dagger = 1$. Симметрия решений уравнений БДЖ электронного и дырочного типа гарантирует, что $R_{eh}(\varepsilon, V) = -R_{he}^*(-\varepsilon, V)$. Таким образом, проводимость при $|eV| < \Delta$ может быть запи-

сана как

$$\begin{aligned} G_s(\varepsilon, V) &= \frac{4e^2}{h} \text{Tr} \left\{ R_{he}^\dagger(\varepsilon, V) R_{he}(\varepsilon, V) \right\} = \\ &= \frac{4e^2}{h} \text{Tr} \left\{ R_{eh}^\dagger(\varepsilon, V) R_{eh}(\varepsilon, V) \right\} = \\ &= \frac{4e^2}{h} \text{Tr} \left\{ R_{he}^\dagger(-\varepsilon, V) R_{he}(-\varepsilon, V) \right\} = G_s(-\varepsilon, V). \end{aligned} \quad (291)$$

Однако данная симметрия ещё не приводит к симметрии ВАХ по отношению к замене знака тянущего напряжения [190]. Такая симметрия ВАХ означала бы выполнение условия $G_s(\varepsilon, V) = G_s(-\varepsilon, -V)$, что требует независимости $G_s(\varepsilon, V)$ от напряжения. В этом случае мы бы получили, что $G_s(\varepsilon)|_{\varepsilon=eV} = dI/dV|_V$, и, следовательно, дифференциальная проводимость оказывалась бы симметричной по напряжению.

В действительности, однако, в экспериментах в SNS-контактах [191, 192] была обнаружена асимметрия ВАХ при $|eV| < \Delta$, что можно объяснить в контексте предыдущего обсуждения, приняв во внимание зависимость барьера Шотки (на SN-границах) от напряжения. Степень асимметричности определяется величиной порядка eV/μ или eV/U , где U характеризует высоту потенциала рассеяния. Учёт зависимости G_s от напряжения в явном виде требует вычисления матрицы рассеяния S_N с учётом приложенного электростатического потенциала. В принципе эта задача требует самосогласованного решения задачи рассеяния и уравнения Пуассона [193]. Во многих практически интересных случаях можно ограничиться приближённым учётом зависимости матрицы рассеяния от напряжения.

13.2. Кондактанс в андреевском приближении

Будем использовать выражение (287) и вычислим его при граничных условиях для чистой NS-границы в андреевском приближении. Стационарные состояния в баллистическом сегменте — это решения уравнений БДЖ [170, 171], составленные из плоских волн. Будем полагать, что $\Delta(x) = \Delta \exp(i\varphi)$ при $x > 0$ и $\Delta(x) = 0$ при $x < 0$, что означает пренебрежение подавлением щели в сверхпроводнике в области контакта.

NS-граница связывает дырки и электроны из одного пространственного канала с амплитудой отражения, зависящей от энергии возбуждения и эффективного химического потенциала. Эффективный химический потенциал при учёте поперечного квантования выражается в виде $\bar{\mu}_n = \bar{\mu} - \hbar^2 \mathbf{k}_{\perp, n}^2 / 2m$. В пределе $\varepsilon, \Delta \ll \bar{\mu}_n$ уравнения БДЖ посредством линеаризации закона дисперсии $k_n^{(0)} = \sqrt{2m\bar{\mu}_n}/\hbar$ сводятся к линейным.

Матрица рассеяния на идеальной NS-границе имеет вид (рис. 27)

$$\hat{r}_{NS} = \begin{bmatrix} 0 & r_{eh} \\ r_{he} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\varphi)\Delta(\varepsilon) \\ \exp(-i\varphi)\Delta(\varepsilon) & 0 \end{bmatrix}, \quad (292)$$

где $\Delta(\varepsilon)$ определяется как

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\Delta} \sim \frac{\Delta}{2|\varepsilon|}, & |\varepsilon| > \Delta, \\ \frac{\varepsilon - i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}}{\Delta} = \exp\left(-i \arccos \frac{\varepsilon}{\Delta}\right), & |\varepsilon| < \Delta. \end{cases} \quad (293)$$

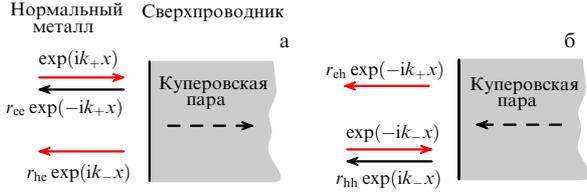


Рис. 27. Рассеяние на NS-границе. (а) Рассеяние электрона в дырку. (б) Рассеяние дырки в электрон. Светлыми (красными) — в цвете на www.ufn.ru) стрелками указаны ненулевые амплитуды в случае идеальной NS-границы.

Полные матрицы отражения R_{ee} и R_{he} (размером $N \times N$) могут быть определены из уравнения (290). Используя (287), получаем формулу для спектрального кондактанса при всех энергиях

$$G_s(\varepsilon, V) = \frac{2e^2}{h} (1 + |A(\varepsilon)|^2) \times \text{Tr} \left\{ t_{21}^\dagger(\varepsilon) \left[1 - [A^*(\varepsilon)]^2 r_{22}^\top(-\varepsilon) r_{22}^\dagger(\varepsilon) \right]^{-1} \times \left[1 - |A(\varepsilon)|^2 r_{22}^\top(-\varepsilon) r_{22}^*(-\varepsilon) \right] \times \left[1 - A^2(\varepsilon) r_{22}(\varepsilon) r_{22}^*(-\varepsilon) \right]^{-1} t_{21}(\varepsilon) \right\}. \quad (294)$$

Здесь индекс \top обозначает операцию транспонирования.

Уравнения (286) и (294) задают ВАХ в андреевском приближении. Спектральный кондактанс зависит от матрицы рассеяния электронов при энергиях $\pm\varepsilon$, что является указанием на наличие андреевского отражения. Зависимость кондактанса (294) от фаз амплитуд прохождения и отражения оказывается исключительно важной для определения резонансных пиков в кондактансе. Элементарными процессами, которые вносят вклады в эти фазы, являются прохождение электронов и дырок между NS-границей и нормальным рассеивателем.

Если каналы не смешиваются и матрицы t_{ij} и r_{ij} диагональны, то кондактанс сводится к квазиодномерному:

$$G_s(\varepsilon, V) = \sum_{n=1}^N G_n(\varepsilon, V), \quad (295)$$

где

$$G_n(\varepsilon, V) = \frac{2e^2}{h} [1 + |A(\varepsilon)|^2] T_n(\varepsilon, V) \times [1 - |A(\varepsilon)|^2 R_n(-\varepsilon, V)] \left\{ 1 + |A(\varepsilon)|^4 R_n(\varepsilon, V) \times R_n(-\varepsilon, V) - 2 \text{Re} [A^2(\varepsilon) r_n(\varepsilon, V) r_n^*(-\varepsilon, V)] \right\}^{-1}, \quad (296)$$

$r_n \equiv (r_{22})_{nn}$ — амплитуды нормального отражения со стороны сверхпроводника, $R_n = |r_n|^2$ и $T_n = 1 - R_n$ — вероятности отражения и прохождения в n -м канале. Последнее слагаемое в выражении в фигурных скобках в правой части (296) описывает важный процесс рассеяния, который включает в себя прохождение сектора между сверхпроводником и нормальным рассеивателем дважды: один раз — электроном и один раз — дыркой.

Для больших энергий, $|\varepsilon| \gg \Delta$ (при этом $|\varepsilon| \ll \mu$), андреевское отражение является сильно подавленным и убывает как $A(\varepsilon) \sim \Delta/2|\varepsilon| \rightarrow 0$. Спектральный кондактанс (294) при этом стремится к нормальному пределу

(обычной формуле Ландауэра),

$$G_s(\varepsilon, V) = \frac{2e^2}{h} \text{Tr} \{ t_{21}^\dagger(\varepsilon, V) t_{21}(\varepsilon, V) \}. \quad (297)$$

Заметим, что кондактанс (297) может не обладать симметрией по отношению к замене знака напряжения.

При напряжениях, меньших щели, $|\varepsilon| < \Delta$, отражения электрона в дырку и дырки в электрон происходят с вероятностью единица, $|A(\varepsilon)| = 1$, и тогда формула (296) принимает вид [189]

$$G_n(\varepsilon, V) = \frac{4e^2}{h} T_n(\varepsilon, V) T_n(-\varepsilon, V) \left\{ 1 + R_n(\varepsilon, V) \times R_n(-\varepsilon, V) - 2 \text{Re} [A^2(\varepsilon) r_n(\varepsilon, V) r_n^*(-\varepsilon, V)] \right\}^{-1}. \quad (298)$$

Амплитуды отражения и прохождения при энергиях $\pm\varepsilon$ входят в (298) симметрично, что обуславливает симметрию ВАХ (при пренебрежении зависимостью потенциала рассеяния от напряжения).

Напротив, при напряжениях, больших щели, спектральный кондактанс (295), вообще говоря, становится несимметричным. Важное отличие кондактанса NS-контакта (298) от нормального кондактанса (297) — это зависимость (298) от фаз амплитуд рассеяния в нормальной части.

В пределе линейного отклика ($\varepsilon, eV \rightarrow 0$), который может быть получен подстановкой в формулу (298) $A^2(0) = 1$, кондактанс принимает замечательно простой вид [180]:

$$G(0) = \frac{4e^2}{h} \sum_n \frac{T_n^2(0)}{[2 - T_n(0)]^2}. \quad (299)$$

Последняя формула верна и для смешивающихся каналов: в этом случае $T_n(0)$ представляют собой собственные значения прозрачностей (см. (51)).

13.3. Линейный кондактанс: частные случаи

Проанализируем формулу (299) в предельных случаях. Наиболее известный предел — это предел слабого туннелирования при $T \ll 1$, в котором

$$G(0) = \frac{e^2}{h} \sum_n T_n^2(0). \quad (300)$$

В этом случае подщелевая проводимость сильно подавлена и наблюдаемый ток появляется либо при большом напряжении, как в экспериментах А. Живера (I. Giaever) [194–196], либо при конечной температуре и напряжениях, сравнимых со щелью. До недавнего времени только такие NS-контакты и были доступны экспериментаторам.

В противоположном пределе, когда NS-граница идеальна, получаем

$$G(0) = \sum_n \frac{4e^2}{h}. \quad (301)$$

Как видим, в последнем случае проводимость, приходящаяся на канал, вдвое больше нормальной. Иногда такой результат интерпретируется следующим образом: вследствие спаривания электронов в куперовские пары мы теряем множитель 2 в выражении для кондактанса из-за спинового вырождения, но приобретаем

множитель 4, поскольку заряд элементарного носителя становится вдвое больше. Такая интерпретация имеет право на существование, но здесь ситуация скорее следующая: спиновое вырождение никуда не исчезает (что видно, например, из анализа инъекций единичных электронов из нормальной области в сверхпроводник), при этом для каждого электрона с любым направлением спина найдётся пара в сверхпроводнике (или, иначе говоря, отразится дырка). Но отличие от нормального контакта заключается в том, что из сверхпроводника не будут вылетать электроны с энергиями в интервале от $\mu - |eV|$ до μ . Это можно объяснить тем, что электроны, вылетевшие из нормального резервуара из-под поверхности Ферми, спариваются с электронами над поверхностью Ферми и поглощаются сверхпроводником, вследствие чего возникает нескомпенсированный ток в энергетическом интервале $2|eV|$, что и приводит к вдвое большему суммарному току.

Наконец, рассмотрим контакт грязного нормального проводника со сверхпроводником. В этом случае нам известна функция распределения прозрачностей [34, 84] и, как и для других величин, мы можем получить среднее значение кондактанса NS-контакта. По случайному совпадению кондактанс, если прозрачность нормальной части может быть описана функцией распределения Дорохова, оказывается равным нормальному [197]:

$$G_{\text{NS}} = \frac{4e^2}{h} \sum_n \left\langle \frac{T_n^2(0)}{[2 - T_n(0)]^2} \right\rangle = G_{\text{N}} = \frac{2e^2}{h} \left\langle \sum_n T_n \right\rangle. \quad (302)$$

Этот результат получен с помощью функций Грина ещё в работе [198].

13.4. Кондактанс NINIS-контакта

В 1990-х годах было проведено несколько очень интересных экспериментов [187, 188, 199], в которых исследовалась зависимость кондактанса NS-контактов от температуры и напряжения, а также магнитных потоков. Интересно, что отношение сил рассеяния непосредственно на границе контакта и в нормальной части является определяющим для формы ВАХ. Это отношение определяет, появляется ли пик в проводимости при нулевом напряжении или при малых, но конечных напряжениях [186, 200, 201]. Такие пики, называемые соответственно нулевой аномалией и аномалией при конечном напряжении, исследовались в ряде любопытных экспериментов [191, 192, 202–205].

Мы рассмотрим модельный NINIS-контакт, анализ которого полезен для понимания аномалий ВАХ в грязных NS-контактах. Кроме того, эта система представляет интерес как пример с достаточно сложным рассеянием в нормальной части и может служить моделью для изучения взаимодействия размытых нормальных уровней в $I_1\text{NI}_2$ -интерферометре и андреевских уровней в INS-интерферометре типа Фабри–Перо. Мы опишем механизмы, вызывающие появление нулевых и конечных аномалий по напряжению [189] при вполне определённых условиях, налагаемых на силу рассеяния на барьерах, что позволяет качественно понять причину возникновения указанных аномалий.

Сначала мы обсудим структуру кондактанса в одноканальном $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{S}$ -контакте, а затем представим численные результаты для многоканального случая, в котором резонансная структура не исчезает при усредне-

нии по каналам, в отличие от таковой в INI-контактах [189].

Как и ранее, будем считать, что каналы⁴⁸ разделяются и можно использовать результат (295) для кондактанса G_s , который зависит от фаз χ_{\pm}^r , амплитуд отражения $r(\pm\varepsilon)$, а также от комплексной амплитуды $A(\varepsilon)$ андреевского отражения. Мы используем обозначения $r(\pm\varepsilon) = \sqrt{R_{\pm}} \exp(i\chi_{\pm}^r)$ для амплитуды отражения, где фазовые факторы χ_{\pm}^r определяются барьерами I_1 и I_2 и прохождением между ними (для простоты зависимость рассеяния от напряжения не учитывается).

Представим амплитуды андреевского отражения как $A(\varepsilon) = |A| \exp[-i\vartheta(\varepsilon)]$ с фазой $\vartheta(\varepsilon) = \arccos(\varepsilon/\Delta)$ при $\varepsilon < \Delta$ и $\vartheta(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > \Delta$.

Выражение для кондактанса сводится к

$$G_s(\varepsilon) = \frac{2e^2}{h} (1 + |A|^2) T_+ (1 - |A|^2 R_-) \left\{ 1 + |A|^4 R_+ R_- - 2|A|^2 \sqrt{R_+ R_-} \cos[\chi_+^r - \chi_-^r - 2\vartheta(\varepsilon)] \right\}^{-1}. \quad (303)$$

Из (303) следует, что кондактанс всегда меньше или равен $4e^2/h$. Отметим, что при $\varepsilon > \Delta$ андреевское отражение подавлено, $|A| < 1$. При $\varepsilon < \Delta$ фаза $\vartheta(\varepsilon)$ является определяющей для резонансов. Максимального значения $4e^2/h$, которое вдвое больше нормального, кондактанс (303) достигает, когда вероятности отражения R_+ и R_- равны, а фазы χ_{\pm}^r удовлетворяют условию резонанса

$$\cos[\chi_+^r - \chi_-^r - 2\vartheta(\varepsilon)] = 1. \quad (304)$$

Аналогичное условие известно для нормальной двухбарьерной системы $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{N}$, в которой вероятность прохождения $T = 1$ и максимальный кондактанс $2e^2/h$ могут быть достигнуты, если вероятности отражения от барьеров при резонансной энергии равны.

Используя формулу для кондактанса (303), рассмотрим одноканальный NINS-контакт, который состоит из баллистического NS-контакта, содержащего один барьер на расстоянии d от идеальной NS-границы. В пределе высокого барьера R_+ и R_- примерно равны. Амплитуды отражения $r(\pm\varepsilon)$, описывающие распространение электронов и дырок, имеют почти постоянные модули, а фазы $\chi_{\pm}^r = \pi + 2k_{\pm}d$. Подставляя волновое число $k_{\pm} = mv_{\text{F}} \pm \varepsilon/v_{\text{F}}$ (где v_{F} — скорость Ферми в канале) в (304), получим положения андреевских резонансов

$$\varepsilon_n = \frac{v_{\text{F}}}{2d} \left(n\pi + \arccos \frac{\varepsilon_n}{\Delta} \right). \quad (305)$$

Формула (305) предсказывает резонансы в кондактансе с типичной шириной, пропорциональной прозрачности T барьера (аналогичные резонансы Роуэлла–Макмиллана с шириной порядка $T/A(\varepsilon)$ находятся при напряжениях, больших щели, при $\varepsilon_n = n\pi v_{\text{F}}/2d$). Фаза $\vartheta(\varepsilon)$, которая изменяется от $\pi/2$ до 0 при изменении ε от 0 до Δ , гарантирует существование по крайней мере одного андреевского резонанса при произвольно малом d . В пределе $d \rightarrow 0$ положение резонанса совмещается с щелевым напряжением, что совпадает с результатом для NIS-контакта в работе [175]. Таким образом, пик, появление которого авторы [175] связывали с особенностью в плотности состояний вблизи щели, в рассматриваемой картине может быть интерпретирован как

⁴⁸ Рассматривая один канал, будем опускать индекс n .

андреевский резонанс, сдвинувшийся к щели при $d \rightarrow 0$.

Введём теперь дополнительный барьер прямо на NS-границе и проанализируем получившийся двухбарьерный $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{S}$ -контакт, по-прежнему используя формулу (303).

Согласно принятым определениям, χ_{\pm}^r представляют собой фазы отражения электрона, налетающего на двухбарьерный потенциал со стороны сверхпроводника. Соответствующие амплитуды отражения даются выражением

$$r(\pm\varepsilon) = r_2 + \frac{t_2^2 r_1 \exp(2ik_{\pm}d)}{1 - r_1 r_2 \exp(2ik_{\pm}d)}, \quad (306)$$

где r_i и t_i — амплитуды левого ($i = 1$) и правого ($i = 2$) (на NS-границе) барьеров (см. также формулу (97)). Фазы этих амплитуд отражения играют главную роль в определении структуры кондактанса, так как они контролируют существование резонансов согласно (304). Зафиксируем барьер I_1 и будем постепенно увеличивать I_2 , удерживая соотношение $R_1 > R_2$. В этом случае INI -интерферометр порождает заметные андреевские резонансы. При $r_1 \gg r_2$ фазы χ_{\pm}^r амплитуд отражения $r(\pm\varepsilon) \approx t_2^2 r_1 \exp(2ik_{\pm}d)$ линейно зависят от энергии и изменяются на 2π на масштабе $h v_F / d$, что приводит к эквидистантным резонансам, в соответствии с (305).

По известной фазовой функции $\chi^r(\varepsilon)$ можно найти положения резонансов: они определяются энергиями $\pm\varepsilon$, при которых разность фаз $\delta\chi^r(\varepsilon) = \chi_+^r - \chi_-^r = \pi + 2n\pi$. Двойной период $\delta\chi^r(\varepsilon)$, по отношению к периоду $\chi_{\pm}^r(\varepsilon)$, учитывает спаривание резонансов.

Когда силы барьеров уравниваются, $R_1 \approx R_2$, вследствие большого градиента фазы вблизи нормального резонанса с энергией ε , андреевские резонансы пинингуются нормальными и располагаются соответственно при энергиях $+\varepsilon$ или $-\varepsilon$. Исключение из этого правила появляется, когда нормальный резонанс приходится на уровень электрохимического потенциала, тогда андреевские резонансы отстоят от электрохимического потенциала на конечную величину.

При дальнейшем увеличении силы второго барьера, $R_2 > R_1$, андреевские резонансы становятся слабее и в конце концов исчезают. Хотя нормальные резонансы в таком режиме по-прежнему присутствуют в нормальном INI -интерферометре, в кондактансе проявляются лишь слабые андреевские резонансы. Фазовая функция становится почти константой при $R_2 \gg R_1$ (см. (306)), и условие для фаз резонанса (304) не может быть выполнено.

Теперь сравним транспорт в двухбарьерных системах $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{S}$ и в $\text{NI}_2\text{NI}_1\text{S}$, т.е. в системах с обратной последовательностью барьеров I_1 и I_2 . Заметим, что прозрачность $T(\varepsilon)$ в обоих случаях одинакова. Таким образом, в отличие от нелинейного кондактанса NINIS -контакта, нелинейный кондактанс нормального NININ -контакта (297), как и линейный кондактанс сверхпроводящего NINIS -контакта (299), не зависит от последовательности барьеров I_1 и I_2 . Предположим, что $R_1 \gg R_2$. При прямой ($\text{NI}_1\text{NI}_2\text{S}$) последовательности барьеров имеем сильную зависимость фазы от энергии $\chi^r(\varepsilon)$, что приводит к резонансам андреевского типа при конечном напряжении. Электроны, входящие в INI -интерферометр с нормальной стороны, имеют достаточно времени для того, чтобы сформировать андреевские резонансы и вылететь, как правило, в сверхпроводник. При обратной последовательности барьеров ($\text{NI}_2\text{NI}_1\text{S}$) барьер I_1 на NS-

границе становится главным. Слабая энергетическая зависимость фазы $\chi^r(\varepsilon)$ рассеяния не позволяет сформироваться резким резонансам. Это отражает тот факт, что электроны, входящие в INI , выходят через I_2 в нормальную часть, не сформировав андреевских резонансов.

Обратимся теперь к численному анализу многоканального NINIS -контакта с помощью формулы (295). Эта формула позволяет выйти за пределы линейного отклика, изученного в работе [206], и перейти к рассмотрению конечных напряжений и температур. Рассмотрим $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{S}$ -контакт с двумя δ -барьерами с вероятностями рассеяния R_i от 0,2 до 1 ($i = 1, 2$). Будем изменять относительные силы барьеров, для того чтобы охватить интервал между двумя пределами, $R_1 > R_2$ и $R_1 < R_2$, которые обсуждались в разделе 13.4. Расстояние L между барьерами было выбрано порядка длины когерентности в сверхпроводнике, $L \approx \xi = v_F \hbar / \Delta$, так что в первом канале (с максимальной продольной скоростью) может сформироваться один или несколько андреевских резонансов. Число резонансов возрастает с увеличением угла падения (отсчитываемого от нормали к NS-поверхности) или, что то же самое, с увеличением номера канала. Величина поперечного сечения контакта была выбрана равной $(100/k_F)^2$, а отношение щели к химическому потенциалу составляло $\Delta/\bar{\mu} = 0,002$.

Каждый канал даёт типичную структуру спаренных андреевских резонансов, которые обсуждались в начале этого раздела. Их положение и ширина зависят от отношения сил барьеров I_1 и I_2 и продольной кинетической энергии в каждом канале. Примечательно, что полный кондактанс, полученный суммированием по каналам, по-прежнему имеет структуру, происходящую от андреевских резонансов. Напротив, полный кондактанс соответствующего нормального $\text{NI}_1\text{NI}_2\text{N}$ -контакта оказывается почти константой, т.е. нормальные резонансы усредняются практически полностью.

Численное изучение трёхмерных NINS -контактов показывает, что положение и число резонансов в полном кондактансе совпадают с таковыми в первом канале⁴⁹ [207]. В NINIS -контакте такой прямой зависимости обнаружено не было.

Сосредоточимся на формуле для проводимости (298), верной при напряжениях, меньших щели, и на свойствах VAX вблизи нуля напряжения. При $R_1 > R_2$ знаменатель в (298) быстро изменяется вследствие сильной зависимости от энергии фазы $r_n(\varepsilon)$, которая ответственна за появление пика в VAX при отличном от нуля напряжении. Структура VAX после суммирования показана на рис. 28, 29 (сплошные кривые). Отталкивание андреевских уровней от нуля энергии даёт минимум dI/dV при нулевом напряжении. При $R_1 < R_2$ фаза амплитуд отражения $r_n(\varepsilon)$ почти не зависит от энергии и структуру кондактанса определяет числитель в формуле (298). Разложение произведения $T_n(\varepsilon) T_n(-\varepsilon) = T_n^2 - w_n^2 \varepsilon^2$ вблизи нуля энергии указывает на наличие максимума в нуле (нулевая аномалия)⁵⁰.

⁴⁹ Это происходит из-за уменьшения прозрачности с увеличением угла падения и неравномерного распределения угла падения по каналам [207].

⁵⁰ Знаменатель не может повлиять на это свойство, до тех пор пока полная прозрачность двухбарьерной системы не слишком велика, $T_n < 0,55$.

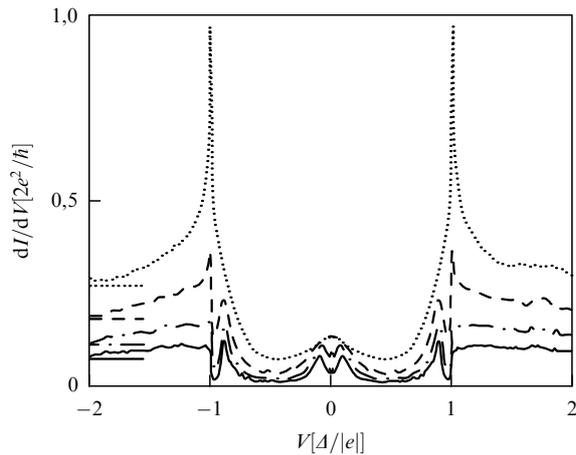


Рис. 28. Дифференциальный кондактанс (средний на канал) в многоканальном NINIS-контакте шириной $d = 2v_F/\Delta = 2\pi\xi$ в зависимости от приложенного напряжения при температуре $\Theta = 0$. Кривые (сверху вниз) соответствуют значениям вероятности отражения от первого барьера $R_1 = 0,2, 0,5, 0,7$ и $0,8$ при постоянной вероятности отражения от второго барьера $R_2 = 0,5$. Соответствующие кондактансы в нормальном состоянии, отмеченные горизонтальными отрезками в левой части рисунка, практически не зависят от напряжения в указанных пределах. С увеличением силы первого барьера I_1 проявляется аномалия при нулевом напряжении, так как при $R_1 > R_2$ формируется новый андреевский резонанс. (Рисунок из работы [189].)

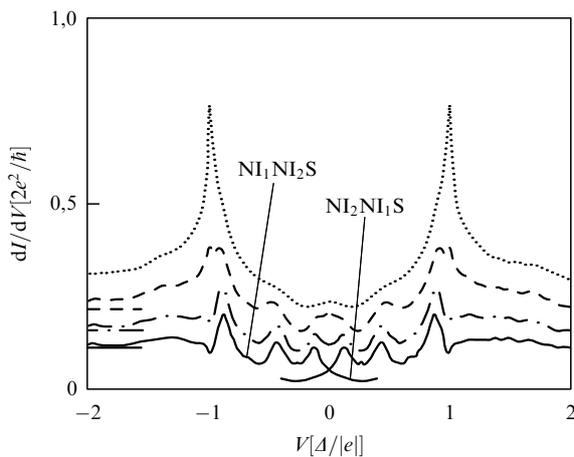


Рис. 29. Дифференциальный кондактанс (средний на канал) в многоканальном NINIS-контакте шириной $d = 4v_F/\Delta = 4\pi\xi$ в зависимости от приложенного напряжения при температуре $\Theta = 0$. Кривые (сверху вниз) соответствуют вероятностям отражения от первого барьера $R_1 = 0,04, 0,2, 0,4$ и $0,54$ при постоянной вероятности отражения от второго барьера $R_2 = 0,2$. Соответствующие кондактансы в нормальном состоянии отмечены горизонтальными отрезками у левой оси. С увеличением силы первого барьера нулевая аномалия превращается в аномалию при конечном напряжении и появляется несколько андреевских резонансов. В случае $R_1 = 0,54, R_2 = 0,2$ мы дополнительно поменяли местами рассеиватели I_1 и I_2 в INI-части ($R_1 = 0,2$ и $R_2 = 0,54$) (нижняя короткая кривая); при этом проводимость при нулевом напряжении остаётся прежней, однако локальный минимум превращается в локальный максимум. (Рисунок из работы [189].)

Аномалия при нулевом напряжении проявляется, как показано на рис. 28, 29 (штриховые кривые). Эти рисунки иллюстрируют кроссовер от нулевой к конечной аномалии для двух разных расстояний между барьерами d по мере увеличения силы барьера I_1 при постоянной силе барьера I_2 . Если d больше длины когерентности в

сверхпроводнике, то появляется несколько резонансов (см. рис. 29). При обратной последовательности барьеров локальный минимум кондактанса при нулевом напряжении превращается в локальный максимум, но значение кондактанса в нуле не изменяется. Это показано на рис. 29 двумя сплошными кривыми около нуля напряжения: верхняя кривая соответствует прямой последовательности барьеров (NI_1NI_2S), а короткая нижняя — обратной (NI_2NI_1S). Для того чтобы понять, чем определяется ширина пиков и положение конечной аномалии, сопоставим их с энергией Таулеса. Энергию Таулеса E_{Th} [208, 209] в неупорядоченной системе можно определить как произведение безразмерного кондактанса g и расстояния между уровнями (в "мысленно закрытой системе") δE , $E_{Th} = g\delta E$. В системе с малопрозрачными барьерами имеется хорошее соответствие между этой энергией, шириной и положением конечной аномалии. Ширина пика при нуле совпадает с характерной энергией корреляции в корреляторе кондактансов $\langle G(E + \varepsilon)G(E) \rangle_E$, так же как и с энергией Таулеса⁵¹. В этом случае функция распределения для прозрачностей двухбарьерной системы является бимодальной и сильно напоминает таковую для грязной системы [206]. Однако при приближении полной прозрачности к единице ширина резонансов уже не совпадает с энергией E_{Th} . В этом пределе двухбарьерная система плохо моделирует бимодальное распределение для грязной системы и энергия Таулеса уже не является характерной для задачи. При конечных температурах аномалия при конечных напряжениях размывается в суммарную нулевую аномалию.

Поведение нулевой и конечной аномалий в неупорядоченных NS-контактах изучалось во многих экспериментах [191, 202–205]. Теоретическое рассмотрение грязных NS-систем показало, что эти особенности определяются соотношением сил рассеяния на NS-границе и в нормальной части [186, 200, 201, 210]. При малом беспорядке появляется нулевая аномалия, а при сильном беспорядке — пик при конечном напряжении [201] порядка энергии Таулеса E_{Th} в нормальной части, что было подтверждено экспериментально [192]. Такое поведение аномалии аналогично описанному в этом разделе поведению в баллистическом двухбарьерном NINIS-контакте [189]. Таким образом, рассмотренная "баллистическая" модель для грязного NS-контакта предполагает интерпретацию пика при конечном напряжении как суперпозицию размытых андреевских уровней, возникающих между сверхпроводником и достаточно сильно отражающей нормальной частью.

14. Электронный транспорт в SNS-контактах

В этом разделе рассмотрим бездиссипативный транспорт в контактах сверхпроводник–нормальный металл–сверхпроводник (SNS) — эффект Джозефсона [211]. В последнее время подобные контакты стало возможным реализовать на мезо- и наноразмерах, например: на основе двумерного электронного газа в гетероструктурах [36, 37, 212–215]; с помощью электронного туннельного микроскопа [216] и литографии [217, 218]; на основе атомных контактов [219–221], углеродных нанотрубок [222–225], единичных молекул [226, 227]

⁵¹ Угловые скобки $\langle \cdot \rangle_E$ обозначают усреднение по энергиям.

и графена [228–230]. Представляется чрезвычайно интересной возможность использования таких контактов в приложениях [231].

Особенности этих систем проявляются в основном в режиме, в котором проводимость обеспечивается несколькими проводящими каналами (или даже одним). При изменении числа проводящих каналов можно наблюдать квантование сверхпроводящего критического тока [20, 213, 220, 232–235] и заряда [236–238]. Ток квантуется в единицах $e\Delta/\hbar$ [232, 233, 239], а заряд — в единицах $2e$ [236]. Как правило, управляющим параметром в экспериментах служит потенциал затвора: в двумерном газе с его помощью изменяют эффективный химический потенциал; в структурах с резонансом, варьируя потенциал затвора, можно сдвигать положения резонансов относительно электрохимического потенциала, тем самым открывая и закрывая проводящие каналы. Интересные явления также происходят в промежуточном состоянии, когда канал открыт лишь частично. В этом случае ток и заряд сильно зависят от фазы и находятся в промежуточном относительно своих квантованных значений состоянии.

Кроме того, интерес к подобным структурам связан с возможностью их практического применения в сверхпроводящих квантовых интерферометрах (сквидах) [240–244], в которых джозефсоновские контакты, вставленные в сверхпроводящее кольцо, являются чувствительными элементами, преобразующими магнитный поток в ток. Сквиды изготавливаются на основе хорошо изученных многоканальных макроскопических джозефсоновских контактов [245, 246]. Изучение наноразмерных джозефсоновских контактов может помочь уменьшить размеры и увеличить чувствительность подобных устройств. Возможны и другие их применения, такие, например, как джозефсоновский транзистор [235, 247–251].

Далее мы рассмотрим SXS-контакт с произвольной структурой несверхпроводящей части X и выведем уравнение для энергетических уровней (несущих почти весь сверхток), выраженных через её матрицу рассеяния, и проанализируем это уравнение для наиболее интересных случаев.

14.1. Энергетические уровни и ток в SXS-контакте

Решим задачу о двух сверхпроводниках, находящихся на расстоянии L друг от друга (рис. 30). Между NS-интерфейсами установлен нормальный рассеиватель X с матрицей рассеяния S_N , в общем случае определяемой формулой (277). Так как мы собираемся искать условия квантования, то будем рассматривать только один проводящий канал⁵². Запишем матрицу рассеяния S_N в удобном для нас виде:

$$S_N = \begin{bmatrix} \sqrt{R_+} \exp(i\chi_+^t) & 0 & \sqrt{T_+} \exp(i\chi_+^t) & 0 \\ 0 & \sqrt{R_-} \exp(i\chi_-^t) & 0 & \sqrt{T_-} \exp(i\chi_-^t) \\ \sqrt{T_+} \exp(i\chi_+^r) & 0 & \sqrt{R_+} \exp(i\chi_+^r) & 0 \\ 0 & \sqrt{T_-} \exp(i\chi_-^r) & 0 & \sqrt{R_-} \exp(i\chi_-^r) \end{bmatrix}, \quad (307)$$

⁵² Полагая, что нормальный металл присоединён к сверхпроводнику адиабатически, можно считать, что поперечные моды хорошо определены, и решать одномерные уравнения БдЖ для каждого канала.

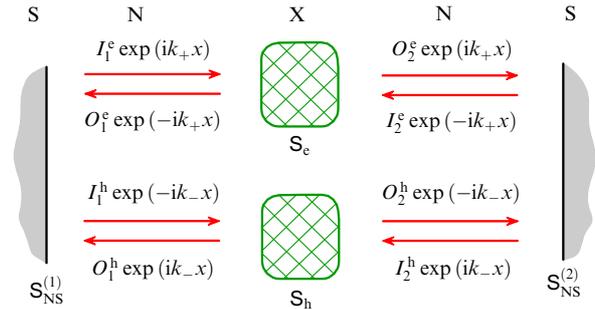


Рис. 30. Состояния боголобовских квазичастиц в SXS-контакте. Для вычислений используется модельная система SNXNS с последующим устремлением длины областей \tilde{N} к нулю. На NS-границах происходит андреевское отражение, которое описывается матрицами рассеяния $S_{NS}^{(1)}$ на левой границе и $S_{NS}^{(2)}$ — на правой. Нормальная часть X характеризуется матрицей рассеяния S_N , которая для наглядности представлена разделённой на две части — электронную S_e и дырочную S_h .

где T и R — вероятности прохождения и отражения рассеивателя X, χ^t и χ^r — соответствующие набираемые фазы. Индексы \pm соответствуют энергиям $\pm\varepsilon$. Для удобства расчётов будем полагать, что между нормальным рассеивателем и NS-границами имеются области нормального металла с бесконечно малой длиной.

Теперь определим аналогичные (282) матрицы, описывающие рассеяние на левой и правой NS-границах в андреевском приближении. На левой и правой NS-границах формула (292) приобретает соответственно вид

$$\hat{r}_{NS}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{ch}^{(1)} \\ r_{he}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\varphi_1) \\ \exp(-i\varphi_1) & 0 \end{bmatrix} A(\varepsilon), \quad (308)$$

$$\hat{r}_{NS}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{ch}^{(2)} \\ r_{he}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\varphi_2) \\ \exp(-i\varphi_2) & 0 \end{bmatrix} A(\varepsilon). \quad (309)$$

Подщелевые состояния, $|\varepsilon| < \Delta$, имеют дискретный спектр, а надщелевые, $|\varepsilon| > \Delta$, — непрерывный. Сосредоточимся на первом случае и выпишем условие квантования для дискретных андреевских уровней

$$\det [1 - S_e \hat{r}_{ch}^{(1)} S_h \hat{r}_{he}^{(2)}] = 0, \quad (310)$$

где снова использована электронно-дырочная параметризация (278), (279). Процессы, описываемые данным уравнением, представлены на рис. 30. Как упоминалось в разделе 12, при решении такого рода задач удобно выбирать $\varepsilon > 0$, учитывая при этом и электроноподобные, и дырочноподобные состояния. Как и прежде, для подбарьерного рассеяния $A(\varepsilon) = \exp[-i\vartheta(\varepsilon)]$, $\vartheta(\varepsilon) = \arccos(\varepsilon/\Delta)$.

Подставляя выражения (307)–(309) в уравнение (310), получим условие квантования

$$\cos(S_+ - S_- - 2\vartheta) = \sqrt{R_+ R_-} \cos \beta + \sqrt{T_+ T_-} \cos \varphi, \quad (311)$$

которое определяет спектр возбуждений ε_v гамильтониана (267) в SXS-системе. Здесь $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность между сверхпроводящими фазами правого и левого сверхпроводников, $S_{\pm} = \chi_{\pm}^t + k_{\pm}L$ — набег фаз электронов и дырок в нормальной области, где $k_{\pm} = \sqrt{2m(\bar{\mu} \pm \varepsilon)}/\hbar$ — соответствующие волновые векторы.

Для симметричных барьеров фаза $\beta = (\chi_+^l - \chi_+^r) - (\chi_-^l - \chi_-^r)$, которая кратна π , порождает плавную функцию $\sqrt{R_+ R_-} \cos \beta$, изменяющую свой знак на каждом резонансе [234, 235]⁵³.

Полный ток в основном состоянии равен $(2e/\hbar)\partial_\varphi U_0$. Энергия основного состояния системы U_0 даётся выражением (269). Обратим внимание на то, что последний член в правой части (269) представляет собой сумму всех энергий возбуждений, взятых с обратным знаком. Замечательным является тот факт, что только этот член зависит от разности сверхпроводящих фаз φ , что позволяет вычислить джозефсоновский ток основного состояния, если известен спектр возбуждений ε_v . Учитывая эту особенность зависимости энергии основного состояния U_0 от фазы, получаем, что джозефсоновский ток равен $I = \sum_v I_v$, где I_v находятся дифференцированием энергии ε_v по сверхпроводящей фазе с обратным знаком, $I_v = -(2e/\hbar)\partial_\varphi \varepsilon_v$.

Полный бездиссипативный ток, протекающий через SXS-контакт, состоит из двух частей, одна из которых обусловлена дискретным набором энергетических уровней под щелью, а другая — непрерывным спектром над щелью. Мы будем рассматривать вклад только от "дискретной" составляющей, так как она доминирует в типичном случае [234, 253]. Проводя неявное дифференцирование в формуле (311), получим

$$I_v = -\frac{2e}{T_v} \sqrt{T_+ T_-} \sin \varphi, \quad (312)$$

где множитель 2 отвечает за двойное вырождение по спину, $T_v = \sin(\delta S - 2\vartheta) \hbar \partial_\varepsilon [\delta S - 2\vartheta] + \hbar \partial_\varepsilon [\sqrt{T_+ T_-} \cos \varphi + \sqrt{R_+ R_-} \cos \beta]$ имеет размерность времени и представляет собой обобщённое время пролёта квазичастицы нормальной части контакта; $\delta S \equiv S_+ - S_-$.

Формулы (311) и (312) верны для любой матрицы рассеяния. Далее мы применим их для описания конкретных систем.

14.2. SNS-контакт:

сужение в двумерном электронном газе

Сначала рассмотрим многоканальный SNS-контакт с идеальными NS-границами. Самый простой (и самый известный) случай — это короткий SNS-контакт без внутренних рассеивателей. В этом случае, подставляя $T_+ = T_- = 1$, $R_+ = R_- = 0$ и $\delta S = 1$ в (311), получим энергию $\varepsilon = \Delta \cos(\varphi/2)$. Если прозрачность T нормальной части отлична от единицы, но при этом слабо зависит от энергии в интервале $[\bar{\mu} - \Delta, \bar{\mu} + \Delta]$, то электронная и дырочная прозрачности совпадают, $T_+ = T_- = T$, и формула (311) даёт один уровень на канал [20]:

$$\varepsilon_n = \Delta \sqrt{1 - T_n \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad (313)$$

где T_n — прозрачность n -го канала.

Например, для прямоугольного барьера длиной L , задающего эффективный химический потенциал $\bar{\mu}_{x,n}$ (с химическим потенциалом $\bar{\mu}$ на бесконечности), прозрач-

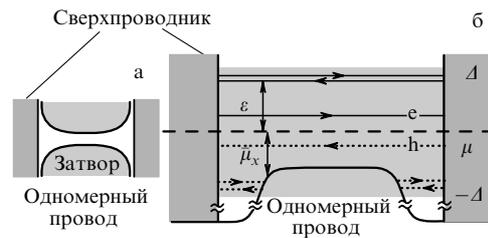


Рис. 31. SNS-контакт. (а) Адиабатическое сужение в нормальном металле между двумя сверхпроводниками. (б) Соответствующий одномерный гладкий эффективный потенциал. (Рисунок из работы [235].)

ность выражается в виде

$$T_n = \frac{4\bar{\mu}_{x,n}}{4\bar{\mu}_{x,n} + (\bar{\mu} - \bar{\mu}_{x,n})^2 \sin^2 \left[\sqrt{2m\bar{\mu}_{x,n}/\hbar^2} L \right]}, \quad (314)$$

где n — номер поперечной моды. Далее мы будем опускать индекс n , чтобы не загромождать формулы.

Рассмотрим SNS-контакт на основе квантового точечного контакта в двумерном электронном газе (рис. 31а). Одномерный контакт формируется двумя затворами, определяющими электронную плотность двумерного электронного газа. На рисунке 31б представлен эффективный одномерный химический потенциал $\bar{\mu}_x$, соответствующий некоторому каналу n . При увеличении "вершины" $\bar{\mu}_x(0)$ этого потенциала канал n постепенно перекрывается: сначала для дырок, а затем для электронов.

Формула (314), которая описывает потенциал с изломами, редко реализуется на практике. Систему, схематически изображённую на рис. 31а, можно описать параболическим потенциалом $\bar{\mu}_x(x) = \bar{\mu}_x(0) + m\Omega^2 x^2/2$, где величина $\hbar\Omega = (4/\pi)\sqrt{\varepsilon_L[\bar{\mu} - \bar{\mu}_x(0)]}$ описывает "кривизну" потенциала при $x = 0$; $\varepsilon_L = \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2$ — энергия квантования на длине контакта. Величина параметра Ω подобрана так, чтобы выполнялось соотношение $\bar{\mu}_x(\pm L/2) = \bar{\mu}$. В этом случае прозрачность T описывается формулой Кембла (63) и зависит только от эффективного химического потенциала в вершине и его кривизны:

$$T = \frac{1}{1 + \exp(-2\pi\bar{\mu}_x(0)/\hbar\Omega)}. \quad (315)$$

В типичном случае в разложении потенциала вблизи максимума можно ограничиться квадратичным членом, поскольку при изменении прозрачности, согласно формуле Кембла, в диапазоне от малых ($T \ll 1$) до больших ($T \approx 1$) прозрачностей рассеяние определяется потенциалом в достаточно малой (по координате) окрестности максимума (вершины) потенциала (см. раздел 4.3).

Для канала с произвольной длиной следует вычислить безразмерные действия S_{\pm} , входящие в условие квантования (311). Для параболического барьера действие может быть вычислено в явном виде [234]:

$$\frac{S(E)}{\hbar} = \frac{2E}{\hbar\Omega} \left\{ \kappa^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa^2}} + \log \left[|\kappa| \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\kappa^2}} \right) \right] \right\}, \quad (316)$$

⁵³ В несколько упрощённом виде уравнение (311) было получено в работе [252].

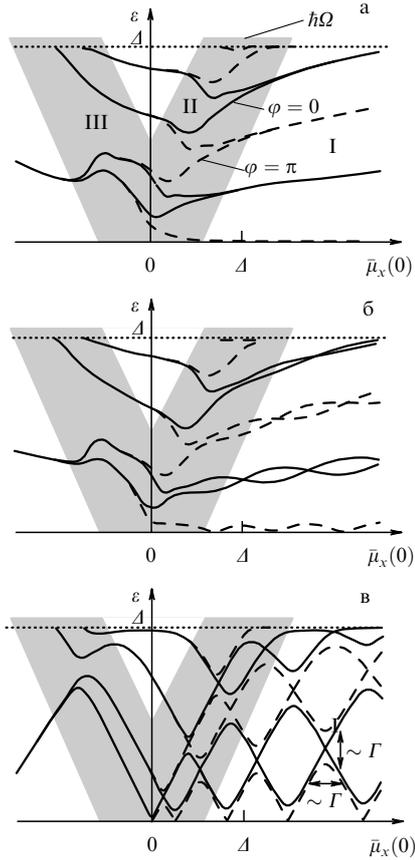


Рис. 32. Подщелевой спектр для параболического потенциала в нормальной части и рассеивателей с силой Z на NS-границах. (а) Идеальные NS-границы ($Z = 0$). (б) Слабое рассеяние ($Z = 0, 1$) приводит к появлению невыраженных резонансов и расщеплению андреевского спектра. (в) При сильном рассеянии ($Z = 1$) формируется андреевская квантовая точка. В областях I и II спектр зависит от разности сверхпроводящих фаз φ (сплошные кривые соответствуют фазе $\varphi = 0$, а штриховые — $\varphi = \pi$). (Рисунок из работы [235].)

где

$$\kappa^2 = Q \frac{\hbar\Omega}{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2 \Omega^2}{16E\varepsilon_L}. \quad (317)$$

При этом $S_{\pm} = S(E = \bar{\mu}_x(0) \pm \varepsilon)$, а безразмерный параметр $Q \equiv (\pi/4)^2 \hbar\Omega/\varepsilon_L$, как правило, много больше единицы, $Q \gg 1$. Заметим также, что дополнительное изменение действия $S(E)$ на π при прохождении энергии E через нуль на интервале $\hbar\Omega$ не может быть получено в рамках квазиклассической модели.

На рисунке 32а показаны результаты численного решения уравнения квантования (311) для описанной модели. При большом положительном химическом потенциале, $\bar{\mu}_x(0) > \varepsilon + \hbar\Omega$ (область I), система может быть описана с помощью формул (313) и (315). При уменьшении $\bar{\mu}_x$ (область II) остаются только электронные уровни, что изображено рис. 31б; при этом энергетические уровни расщепляются даже при $\varphi = 0$. В области III перекрывается канал, созданный электроноподобным уровнем. В областях с $\bar{\mu}_x(0) < -\varepsilon - \hbar\Omega$ энергетические уровни перестают зависеть от фазы и, следовательно, представляют собой закрытые каналы. Более подробно поведение системы описано в работе [235].

В квазиклассической области I каждый андреевский уровень создаёт бездиссипативный ток с амплитудой $2|e|/[\tau_+ + \tau_- + 2\hbar/\sqrt{A^2 - \varepsilon^2}]$, где $\tau_{\pm} = \hbar \partial_{\varepsilon} S_{\pm}$ — времена пролёта электроно- и дырочноподобными квазичастицами нормальной части. Для параболического потенциала $\tau(E) = \Omega^{-1} 2 \log[|\kappa|(1 + \sqrt{1 + \kappa^{-2}})]$. При малых энергиях времена пролёта возрастают логарифмически, $\tau(E) \approx \Omega^{-1} \log(4Q\hbar\Omega/E)$, в интервале $\hbar\Omega < E < Q\hbar\Omega$ и насыщаются при $\tau_0 \approx \Omega^{-1} \log(4Q)$ и энергиях $E < \hbar\Omega$, при которых систему уже нельзя рассматривать в квазиклассическом приближении.

Выясним, как ток зависит от разницы между фазами сверхпроводящих берегов. При $\varphi = 0$ имеет место двукратное вырождение и уровни в паре дают вклады в ток, равные по модулю, но противоположные по знаку, следовательно, при $\varphi = 0$ дискретный спектр не даёт вклада в ток. При увеличении φ вырождение снимается, и каждая расщеплённая пара вносит вклад в бездиссипативный ток, монотонно возрастающий с увеличением φ и достигающий максимума при $\varphi = \pi - 0$. Это означает, что в точке $\varphi = \pi - 0$ ток принимает критическое значение⁵⁴. При $\varphi = \pi - 0$ все уровни, кроме самого нижнего, снова становятся вырожденными, причём ни одна из вырожденных пар уровней не даёт вклада в ток.

В конце концов мы получаем простую формулу для критического тока $I_c \equiv \max_{\varphi}\{I\}$ в квазиклассической области I:

$$I_c = \frac{|e|}{\tau_0 + \hbar/A}, \quad (318)$$

где τ_0 — вычисленное для параболического потенциала время пролёта, которое является константой при открываемом канале, $\tau_0 = \Omega^{-1} \log 4Q$, затухает как $\tau_0 = \Omega^{-1} \log 4Q\hbar\Omega/\bar{\mu}_x(0)$ при $\bar{\mu}_x(0) > \hbar\Omega$ и становится равным времени свободного пролёта, $\tau_0 = L/v_{F,x}$, при $\bar{\mu}_x(0) > Q\hbar\Omega$. В последнем случае для канала, открытого при больших энергиях, получаем известную формулу для критического тока: $I_c = |e|v_F/(L + \pi\xi_0)$. Критический ток увеличивается на I_c с появлением каждого нового открытого канала (рис. 33).

Основные качественные черты квантования критического тока, предсказанные в теории, были экспериментально подтверждены в работе [213].

14.3. SINIS-контакт: андреевская квантовая точка

В разделе 14.2 мы рассматривали квантовое сужение, считая, что на NS-границах происходит только андреевское отражение ($Z = 0$). Теперь перейдём к случаю, в котором на границах имеются рассеиватели с $Z > 0$. Из рисунка 32б, на котором показан промежуточный случай

⁵⁴ Доказать, что вклад непрерывного спектра в критический ток несуществен, довольно сложно. Одновременно дискретный и непрерывный спектры можно учесть с помощью теоремы Крейна, как это сделано в работах [254, 255]. В то же время при $\varphi = \pi$ относительно легко показать, что вклад от непрерывного спектра исчезает [234]. Однако отсюда не следует, что критический ток через контакт, определяемый как дискретным, так и непрерывным спектрами, в данном случае обусловлен только дискретным спектром при $\varphi = \pi - 0$. Для доказательства последнего утверждения необходимо показать, что сумма дискретного и непрерывного спектров достигает максимума при $\varphi = \pi - 0$. Например, это можно сделать для длины контакта L и химического потенциала посередине контакта $\bar{\mu}_x(0)$, отстоящих от точки $(\sqrt{\xi_0}/k_F, A)$ в координатах $(L, \bar{\mu}_x(0))$ [234].

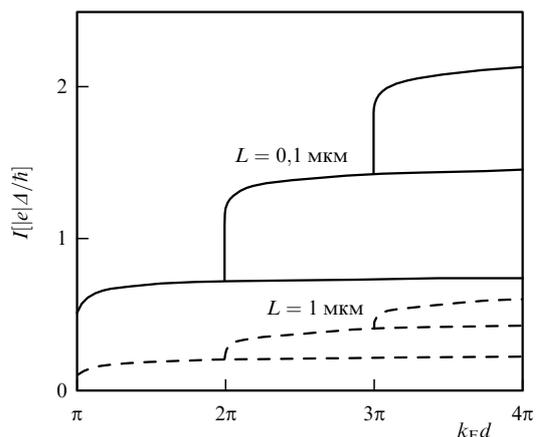


Рис. 33. Квантование сверхпроводящего тока. С увеличением ширины d нормального канала возрастание сверхпроводящего тока происходит квантами величины $|e|(\tau_0 + \hbar/\Delta)$. (Рисунок из работы [234].)

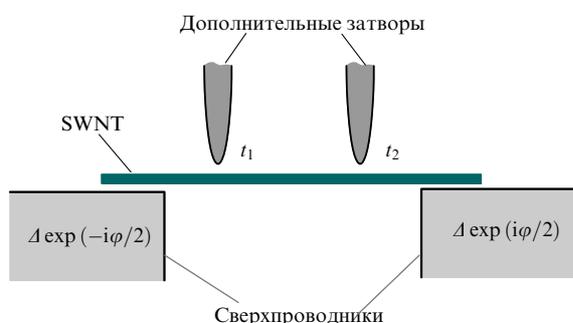


Рис. 34. Схема экспериментальной реализации андреевской квантовой точки на основе одностенной нанотрубки (single walled nanotube, SWNT). Два дополнительных затвора формируют электронную плотность в определённых областях и создают эффективные барьеры с амплитудами прохождения t_1 и t_2 .

с $Z = 0,1$, видно, что появляются осцилляции с периодом Δ и амплитудой $\delta\epsilon$, обусловленные слабыми резонансами двойного барьера. На рисунке 32в показан случай сильных нормальных резонансов, $Z = 1$ (соответствующая система на основе углеродной нанотрубки изображена на рис. 34). Видна чёткая резонансная структура андреевских уровней, которая определяется резонансной структурой нормальной части. Важным параметром является ширина резонанса Γ , даваемая формулой (106). Для анализа мы ограничимся случаем $\bar{\mu}_x(0) \gg Q\hbar\Omega$. Кривизна потенциала Ω при этом перестаёт играть какую-либо роль, и потенциал лишь сдвигает положение нормальных резонансов.

Используя формулу (311), можно определить спектр возбуждений в джозефсоновском контакте с любой структурой нормальной части. Выведем условие квантования в случае двойного барьера и $\Omega = 0$. Подставляя в (311) коэффициенты прохождения (98) и фазы из (97), получим

$$(R_1 + R_2) \cos\left(2\pi \frac{\epsilon}{\delta}\right) - 4\sqrt{R_1 R_2} \cos\left(2\pi \frac{\epsilon_D}{\delta}\right) \sin^2 \vartheta + T_1 T_2 \cos \varphi = \cos\left(2\vartheta - 2\pi \frac{\epsilon}{\delta}\right) + R_1 R_2 \cos\left(2\vartheta + 2\pi \frac{\epsilon}{\delta}\right). \quad (319)$$

Здесь выбран некоторый резонанс с номером n и энергией E_n , номер которого для краткости опущен. Энергия $\epsilon_D = E_n - \bar{\mu}(0)$ (где $\bar{\mu}(0) = \mu - eV_g$) определяет положение резонанса $E_n = \epsilon_L [n - (\chi_1^r + \chi_2^r)/2\pi]^2$ относительно химического потенциала в нормальной части, который в свою очередь регулируется потенциалом внешнего затвора V_g . Здесь мы считаем, что расстояние до соседних резонансов $\delta \equiv (E_{n+1} - E_{n-1})/2$ много больше сверхпроводящей щели Δ .

Энергетические состояния в зависимости от эффективного химического потенциала $\bar{\mu}_x(0)$ изображены на рис. 32. Параметр Z (см. формулы (91)–(93)) задаёт "силу" нормальных рассеивателей. Для симметричного контакта $T_1 = T_2 = 1/(1 + Z^2)$, $R_1 = R_2 = Z^2/(1 + Z^2)$. При $Z = 0$ формула (319) описывает SNS-контакт, при $Z = 0,1$ — контакт со слабыми рассеивателями на NS-границах, а при $Z = 1$ — контакт с довольно сильными рассеивателями на NS-границах.

Из рисунка 32 видно, что при увеличении силы рассеивателей, как и следовало ожидать, появляется резонансная структура. Наиболее интересен случай сильной зависимости энергии от фазы, который имеет место, когда некоторый нормальный резонанс проходит через химический потенциал. Оказывается, что в окрестности этой точки формулу (319) можно упростить и получить аналитическую формулу для андреевского уровня [237, 249, 256]

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_D^2 + \tilde{\Gamma}^2}, \quad (320)$$

где

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + A^2}, \quad A = \frac{|T_1 - T_2|}{2\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (321)$$

$\Gamma = (T_1 + T_2)\delta/4\pi$ — полуширина нормального резонанса. Формула (320) справедлива тогда, когда резонанс E_n подходит к химическому потенциалу $\bar{\mu}$ на расстояние порядка полуширины нормального резонанса, $|\epsilon_D| \lesssim \Gamma$, а сама полуширина много меньше сверхпроводящей щели, $\Gamma \ll \Delta$ (рис. 32в). При этом ток через андреевскую квантовую точку выражается как

$$I = \frac{2e}{\hbar} \frac{\Gamma^2 \sin \varphi}{4\sqrt{\epsilon_D^2 + \tilde{\Gamma}^2}}. \quad (322)$$

Критический ток имеет вид

$$I_c = \frac{|e|\Gamma}{\hbar} \left\{ \sqrt{1 + A^2 + \frac{\epsilon_D^2}{\Gamma^2}} - \sqrt{A^2 + \frac{\epsilon_D^2}{\Gamma^2}} \right\}. \quad (323)$$

14.4. SGS-контакт

и уравнения Дирака – Боголюбова – де Жена

Этот раздел посвящён джозефсоновскому току в контакте сверхпроводник–графен–сверхпроводник (SGS) (рис. 35а). Несколько лет назад была разработана методика получения монослоя графита (графена) [257]. Позднее был измерен ток через джозефсоновский контакт на основе графена [228]. Далее мы опишем электронный транспорт и вычислим критический ток в системе SGS.

Графен описывается релятивистским волновым уравнением Дирака. При этом низкоэнергетические квази-частицы имеют линейную дисперсию $\epsilon = kv$ и нулевую

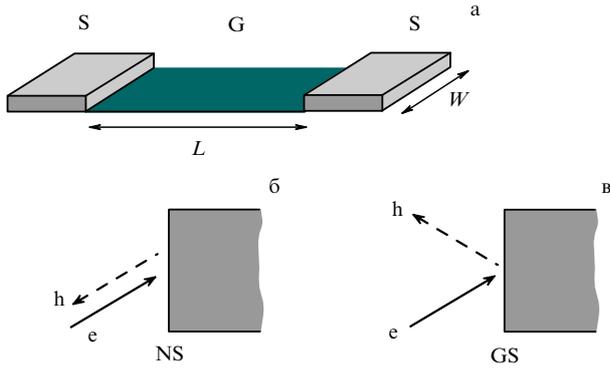


Рис. 35. (а) SGS-контакт: лист графена G длиной L и шириной W , подсоединённый к двум сверхпроводникам S. (б) Обычное андреевское отражение электрона в дырку на идеальной NS-границе в андреевском приближении. Дырка повторяет траекторию электрона в обратном направлении. (в) Зеркальное отражение на идеальной GS-границе, которое происходит с изменением нормальной компоненты скорости.

массу, а скорость v не зависит от энергии и является константой. Это приводит к ряду интересных физических явлений, таких как туннелирование Клейна [258–260].

Расчёты для SGS-контакта во многом аналогичны расчётам для SNS-контакта, однако в уравнения Боголюбова–де Жена (270) теперь следует подставить [261–263] дираковский гамильтониан

$$\hat{H}_0 = -i\hbar v(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y), \quad (324)$$

описывающий графен в отсутствие сверхпроводников. Полученная система четырёх дифференциальных уравнений первого порядка называется уравнениями Дирака–Боголюбова–де Жена (ДБДЖ).

Коэффициенты $u = [u_1, u_2]^T$ и $v = [v_1, v_2]^T$, как и ранее, описывают электронные и дырочные части волновой функции, но теперь каждый из них состоит из двух компонент, u и v , которые имеют противоположные спиновые и долинные индексы, относящиеся к двум подрешёткам в шестиугольной решётке графена. Решая уравнения ДБДЖ на идеальных GS-границах, мы получим коэффициенты матрицы рассеяния, отвечающие за отражение со стороны графена. Для левой и правой границ соответственно

$$\hat{r}_{\text{GS}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{\text{eh}}^{(1)} \\ r_{\text{he}}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\varphi_1 - i\vartheta \hat{\sigma}_x) \\ \exp(-i\varphi_1 + i\vartheta \hat{\sigma}_x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (325)$$

$$\hat{r}_{\text{GS}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{\text{eh}}^{(2)} \\ r_{\text{he}}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(i\varphi_2 + i\vartheta \hat{\sigma}_x) \\ \exp(-i\varphi_2 - i\vartheta \hat{\sigma}_x) & 0 \end{bmatrix}. \quad (326)$$

Аналогично матрице в формуле (284), матрицы отражения (325), (326) связывают налетающие на GS-границу и отражённые волновые функции. Однако из-за наличия долин размер матриц удваивается, по сравнению с размером аналогичной матрицы для NS-границы. Формулы (325) и (326) описывают подщелевое рассеяние; в них, как и ранее, $\vartheta = \arccos(\varepsilon/\Delta)$.

Заметим, что андреевское отражение на идеальной NS-границе превращает электрон в дырку (или дырку в электрон) с противоположным вектором скорости. Это означает, что отражённая дырка (электрон) проходит по

той же траектории, что и налетающий электрон (дырка), но в противоположном направлении [172, 173, 240] (рис. 35б). При отражении на идеальной GS-границе изменяется только нормальная компонента скорости, т.е. происходит зеркальное отражение [261] (рис. 35в), которое в англоязычной литературе называется specular Andreev reflection, в отличие от давно известного обычного андреевского отражения на NS-границе (retro Andreev reflection)⁵⁵.

Будем считать лист графена идеально прямоугольным и используем граничное условие для поперечного квантования [162]

$$k_{y,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{W}, \quad (327)$$

где $k_{y,n}$ — поперечная компонента волнового вектора в n -м канале. Эффективный химический потенциал $\bar{\mu}_{x,n}$ в n -м канале определяется соотношением $\bar{\mu}_{x,n}^2 = \bar{\mu}^2 - (\hbar v k_{y,n})^2$, где $\bar{\mu}$ — химический потенциал, измеренный относительно точки Дирака, т.е. уровень допирования графена. Частица с энергией ε будет иметь волновой вектор $k = (\bar{\mu} + \varepsilon)/\hbar v$ и соответствующую продольную компоненту $k_{x,n} = (k^2 - k_{y,n}^2)^{1/2}$. Решая уравнение Дирака ($\Delta = 0$) для прямоугольного потенциала длиной L (так что в области потенциала волновой вектор равен $k_{x,n}$, а вне его — k), получим матрицы рассеяния, описывающие этот потенциал,

$$S_e = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{t}_{ee} \\ \tilde{t}_{ee} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_h = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{t}_{hh} \\ \tilde{t}_{hh} & 0 \end{bmatrix}, \quad (328)$$

где

$$\tilde{t} = \begin{bmatrix} \cos(k_x L) + \frac{k_y}{k_x} \sin(k_x L) & \frac{ik}{k_x} \sin(k_x L) \\ \frac{ik}{k_x} \sin(k_x L) & \cos(k_x L) - \frac{k_y}{k_x} \sin(k_x L) \end{bmatrix}. \quad (329)$$

Электронам и дыркам соответствуют разные знаки энергии, $\tilde{t}_{ee} = \tilde{t}(\varepsilon)$, $\tilde{t}_{hh} = \tilde{t}(-\varepsilon)$. В общем виде условие квантования для SGS-контакта выражается как

$$\det \left[1 - \tilde{t}_{ee} \hat{r}_{\text{eh}}^{(1)} \tilde{t}_{hh} \hat{r}_{\text{he}}^{(2)} \right] = 0. \quad (330)$$

Подставляя (325), (326) и (329) в уравнение (330), можно получить условие квантования, определяющее уровни энергии в рассматриваемой системе [262, 263].

В случае короткого контакта ($L \ll \Delta, \xi$) энергетические уровни описываются простым выражением:

$$\varepsilon_n = \Delta \sqrt{1 - T_n \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad (331)$$

которое полностью совпадает с формулой (313) для короткого SNS-контакта, с разницей лишь в определении прозрачности,

$$T_n = \frac{k_{x,n}^2}{k_{x,n}^2 \cos^2(k_{x,n} L) + (\bar{\mu}/\hbar v)^2 \sin^2(k_{x,n} L)}. \quad (332)$$

⁵⁵ Сформулированные утверждения справедливы для андреевского приближения на NS-границе и малого уровня допирования графена на GS-границе соответственно.

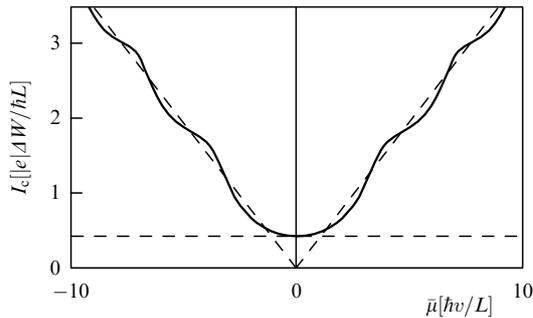


Рис. 36. Критический ток I_c в SGS-контакте как функция уровня допирования графена $\bar{\mu}$. (Рисунок из работы [262].)

Как видно, прозрачности в данном случае существенно отличаются от таковых для квадратичной дисперсии (314).

Каждый канал даёт вклад в ток, который находится дифференцированием (331) по φ . Полный ток имеет вид

$$I = \frac{e\Delta}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n \sin \varphi}{\sqrt{1 - T_n \sin^2(\varphi/2)}}. \quad (333)$$

Заметим, что, в отличие от суммирования в случае SNS-контакта, в (333) суммирование проводится до бесконечности по открытым (действительные $k_{x,n}$) и по затухающим (мнимые $k_{x,n}$) каналам. В случае $L \ll W$, ξ суммирование можно заменить интегрированием.

Численные результаты для критического тока представлены на рис. 36. Их главной особенностью является то, что при нулевом уровне допирования ($\bar{\mu} = 0$) критический ток не обращается в нуль, что подтверждается экспериментально [228]. При $\bar{\mu} = 0$ полный ток определяется первым неисчезающим членом в разложении тока (333) по малому параметру $|\bar{\mu}| \ll \hbar v/L$ [262]:

$$I = \frac{e\Delta}{\hbar} \frac{2W}{\pi L} \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{artanh} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad (334)$$

при этом критический ток (показанный горизонтальной штриховой прямой на рис. 36) выражается в виде

$$I_c = 1,33 \frac{e\Delta}{\hbar} \frac{W}{\pi L}. \quad (335)$$

Вдали от дираковской точки ($\bar{\mu} \gg \hbar v/L$) критический ток пропорционален уровню допирования (см. наклонные штриховые асимптоты на рис. 36):

$$I_c = 1,22 \frac{|e|\Delta|}{\hbar} \frac{|\bar{\mu}|W}{\pi \hbar v}. \quad (336)$$

Случай при ненулевой температуре рассмотрен в работах [264, 265].

15. Дробовой шум в NS-системах при конечном напряжении

В этом разделе мы приведём общие формулы для дифференциального дробового шума в неидеальном NS-контакте, выраженные через матрицу рассеяния нормальной части. Как упоминалось в разделе 10, дробовой шум является следствием дискретности переносимого частицей заряда, а также вероятностного характера рассеяния. В неидеальных NS-контактах дробовой шум порождается как нормальными процессами

рассеяния, так и неидеальным андреевским отражением [112, 266–268]. Последний процесс для транспорта при низких напряжениях (который обусловлен только переносом пар электронов) можно представить в виде туннелирования куперовских пар как единого целого, происходящего аналогично туннелированию обычных частиц. Андреевское отражение приводит к флуктуациям с амплитудой, пропорциональной двойному заряду электрона, при этом в SNS-контактах с приложенным напряжением амплитуда флуктуаций может возрасти до величины, пропорциональной большему числу квантов заряда [269, 270].

Итак, рассмотрим NXS-контакт. Как и прежде, X обозначает область с произвольной нормальной матрицей рассеяния. На низких частотах спектр мощности флуктуаций тока определяется неприводимым коррелятором ток–ток (183) при $\omega \rightarrow 0$. При этом зависящий от времени оператор тока определяется как

$$\hat{I}(\tau) = \exp [i(\hat{H} - \mu\hat{N})\tau] \hat{I} \exp [-i(\hat{H} - \mu\hat{N})\tau], \quad (337)$$

где \hat{N} — оператор числа частиц. От использовавшейся ранее формулы (179) формула (337) отличается тем, что в ней гамильтониан для определения эволюции во времени заменён эффективным гамильтонианом, который может быть диагонализирован в приближении среднего поля с помощью преобразования Боголюбова. В данном подходе не учитываются флуктуации параметра порядка в сверхпроводящей области и считается, что боголюбовские квазичастицы когерентно распространяются через всю систему, не меняя своей энергии.

Зависящий от времени оператор тока (337) может быть выражен через решения уравнений БДЖ (268) и боголюбовские операторы рождения и уничтожения,

$$\hat{I}(t) = -\frac{ie}{m} \sum_{v',v} \int dy dz (u_v^* \hat{\partial}_x u_v \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_v - v_{v'}^* \hat{\partial}_x v_{v'} \hat{a}_v \hat{a}_v^\dagger) \exp [i(\varepsilon_{v'} - \varepsilon_v)t], \quad (338)$$

где введён новый оператор: $u \hat{\partial}_x v \equiv u \partial_x v - v \partial_x u$. Как и ранее, будем учитывать только состояния с положительной энергией, $\varepsilon_v > 0$, опуская индекс n , нумерующий каналы, там, где он не важен. Для простоты будем вычислять выражение (338) в нормальной области.

При напряжениях, меньших сверхпроводящей щели ($|eV| < \Delta$), квазичастицы могут появляться только из нормального резервуара, волновые функции по-прежнему зависят только от частот матрицы рассеяния, отвечающих за отражение: r_{ee} , r_{he} , r_{eh} и r_{hh} . Каждая из этих матриц размером $N \times N$ описывает NXS-контакт целиком.

Мощность шума определяется переходами (за счёт оператора \hat{I}) между состояниями

$$|s\rangle = |f_{\beta,v,n} = 1, f_{\beta',v',m} = 0\rangle, \\ |i\rangle = |f_{\beta,v,n} = 0, f_{\beta',v',m} = 1\rangle,$$

различающимися только заполнением двух одночастичных состояний с энергетическими индексами v и v' в n -м и m -м каналах соответственно. Индексы β и β' обозначают электронные (e) или дырочные (h) состояния. Например, переход между налетающим электроном ($\beta = e$) из n -го канала и налетающей дыркой ($\beta = h$) из m -го канала происходит из-за наличия ненулевого матричного элемента, описывающего взаимодействие

между отражёнными электронами (а также дырками), $\langle s|\hat{I}|i\rangle \propto f_e(1-f_h)(r_{ch}^\dagger r_{ee} - r_{hh}^\dagger r_{he})_{mn}$. Здесь числа заполнения f_β для электронов и дырок даются распределением Ферми $f_{e/h} = f(\varepsilon \mp eV)$; напряжение будем измерять относительно электростатического потенциала в сверхпроводнике. Суммирование по каналам даёт вклад в флуктуации,

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} |\langle s|I|i\rangle|^2 \propto f_e(1-f_h) \times \\ & \times \text{Tr} \{ (r_{ee}^\dagger r_{eh} - r_{he}^\dagger r_{hh})(r_{ch}^\dagger r_{ee} - r_{hh}^\dagger r_{he}) \} = \\ & = f_e(1-f_h) \text{Tr} \{ r_{he}^\dagger r_{he} (1 - r_{he}^\dagger r_{he}) \}. \end{aligned}$$

Рассматривая аналогичные процессы, можно получить выражение для низкочастотной спектральной мощности [19, 271], справедливое при $\Theta \ll |eV| < A$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4e^2}{h} \int_0^A d\varepsilon \left\{ [f_e(1-f_h) + f_h(1-f_e)] \times \right. \\ & \times \text{Tr} [r_{he}^\dagger r_{he} (1 - r_{he}^\dagger r_{he})] + \\ & \left. + [f_e(1-f_e) + f_h(1-f_h)] \text{Tr} [(r_{he}^\dagger r_{he})^2] \right\}. \end{aligned} \quad (339)$$

Первое слагаемое в правой части (339) описывает переходы между состояниями, дающими вклады в ток с противоположными знаками, а второе — переходы, которые дают вклады с одинаковыми знаками. При нулевой температуре второе слагаемое исчезает и дробовой шум определяется первым слагаемым. При ненулевой температуре оба слагаемых дают вклад, в частности, в шум Джонсона–Найквиста [272, 273] за счёт тепловых флуктуаций.

Как и при вычислении кондактанса NXS-контакта, выразим матрицу рассеяния $r_{he}(\varepsilon)$ через матрицу рассеяния нормальной части X и амплитуду андреевского отражения. Подставляя полученное выражение в (339), получим общее выражение для дробового шума в многоканальном NXS-контакте. Мы ограничимся случаем, в котором контакт имеет постоянную площадь поперечного сечения. Дифференциальный кондактанс $G_n(\varepsilon) = (4e^2/h)[r_{he}^\dagger r_{he}]_{mm}$ тогда определяется выражением (298). При нулевой температуре спектральная мощность дробового шума принимает вид

$$S = \frac{1}{|e|} \int_0^{|eV|} d\varepsilon \sum_n \zeta_n(\varepsilon),$$

где ζ_n — дифференциальный дробовой шум в n -м канале,

$$\begin{aligned} \zeta_n(\varepsilon) &= \frac{2|e|^3}{h} 4[r_{he}^\dagger r_{he} (1 - r_{he}^\dagger r_{he})]_{mm} = \\ &= \frac{2|e|^3}{h} 4T_n(\varepsilon) T_n(-\varepsilon) \left\{ R_n(\varepsilon) + R_n(-\varepsilon) - \right. \\ & \left. - 2 \text{Re} [A^2(\varepsilon) r_n(\varepsilon) r_n^*(-\varepsilon)] \right\} \left\{ T_n(\varepsilon) T_n(-\varepsilon) + R_n(\varepsilon) + \right. \\ & \left. + R_n(-\varepsilon) - 2 \text{Re} [A^2(\varepsilon) r_n(\varepsilon) r_n^*(-\varepsilon)] \right\}^{-2}. \end{aligned} \quad (340)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ ($A \rightarrow -i$) зависимость от фаз, набираемых квазичастицами между рассеивателем X и NS-границей, исчезает и для линейного отклика [274] мы получаем

$$\zeta_n(0) = \frac{2|e|^3}{h} \frac{16 T_n^2(0) [1 - T_n(0)]}{[2 - T_n(0)]^4}. \quad (341)$$

Теперь, в очередной раз используя функцию распределения Дорохова, можно найти полный шум в грязном контакте [197]:

$$S = \frac{2}{3} |e|I. \quad (342)$$

Как видим, фактор Фано $F = 2/3$ оказывается вдвое большим, чем фактор Фано для шума в нормальном грязном проводнике (см. раздел 10.3), что, конечно, является указанием на наличие заряда $2e$ в системе. Такой эффект наблюдался в экспериментах [275, 276].

15.1. Шум в NINS-контакте

Рассмотрим сильный рассеиватель I ($T \ll 1$), не имеющий внутренней резонансной структуры и находящийся на расстоянии d от NS-границы⁵⁶, X = NIN. В этом случае абсолютное значение амплитуды отражения $r(\varepsilon) = \sqrt{R} \exp(i\chi^r(\varepsilon))$ слабо зависит от энергии и вся зависимость от энергии даётся фазой $\chi^r(\varepsilon) \approx 2(k + \varepsilon/v)d + \chi_0$, которая набирается между рассеивателем I и NS-границей; k и v — волновой вектор и скорость в квазиодномерном канале. Дифференциальный дробовой шум (340) в n -м канале, который принимает вид

$$\zeta_n(\varepsilon) = \frac{2|e|^3}{h} \frac{4T^2 2R [1 - \cos \alpha_n(\varepsilon)]}{\{T^2 + 2R [1 - \cos \alpha_n(\varepsilon)]\}^2}, \quad (343)$$

зависит только от разности фаз $\alpha_n(\varepsilon) = \chi_n^r(\varepsilon) - \chi_n^r(-\varepsilon) - 2\vartheta(\varepsilon)$. Резонансная структура ζ_n отражается и в дифференциальном кондактансе (298):

$$G_n(\varepsilon) = \frac{4e^2}{h} \frac{T^2}{T^2 + 2R [1 - \cos \alpha_n(\varepsilon)]}. \quad (344)$$

На рисунке 37а, б приведены зависимости кондактанса и спектрального шума от разности фаз α_n . Минимальное значение знаменателя в (343) и (344), которого он достигает при $\varepsilon_{v,n} = v_n/2d [n\pi + \arccos(\varepsilon_{v,n}/A)]$, соответствует резонансам на рисунке. Дифференциальный дробовой шум ζ_n (343) обращается в нуль на этих резонансах и достигает максимума при $\cos \alpha_n = (2R - T^2)/2R$, когда энергии всё ещё близки к резонансным.

Замечателен тот факт, что такая нетривиальная структура сохраняется даже в многоканальном случае⁵⁷, что отображено на рис. 37г, д. В данной ситуации это можно объяснить тем, что уровни "прилипают" к электрохимическому потенциалу (сверхпроводника). Из сравнения рис. 37б и д видно, что резкий двойной пик в шуме (рис. 37б) исчезает в многоканальном случае (рис. 37д), а шум S принимает максимальное значение (вместо минимального) в резонансе, повторяя при этом соответствующую кривую кондактанса (рис. 37г).

При больших напряжениях, $|eV| \gg v_F/d$, шум и кондактанс можно оценить, усреднив фазу α_n в уравнениях (343) и (344),

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \zeta(\alpha) = \frac{2|e|^3}{h} T, \quad \bar{G} = \frac{2e^2}{h} T. \quad (345)$$

⁵⁶ Такая модель описывает, например, тонкую NS-плёнку и поднесённую к ней металлическую иглу — в такой системе наблюдались резонансы Роуэлла–Макмиллана [277].

⁵⁷ Например, резонансная структура нормального двойного барьера не сохраняется в многоканальном случае.

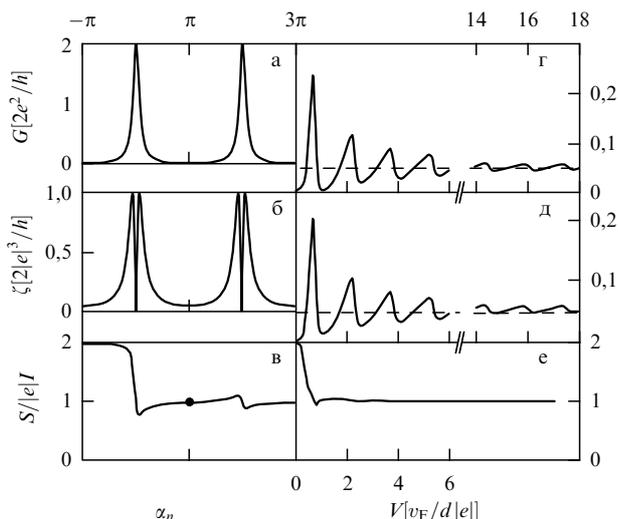


Рис. 37. Кондактанс при нулевой температуре (а, г), дробовой шум (б, д) и спектральная мощность шума (в, е) для NINS-контакта (сплошные кривые) с $\int dx V(x) = 3\hbar v_F$, средней прозрачностью $T = 0,05$, $E_F = 500\Delta$, $d = 20v_F/\Delta$, $v_F/d \ll \Delta \ll E_F$. Графики на рис. а – в определяются уравнениями (343) и (344) для одного канала, на рис. г–е — уравнениями (298) и (340), усреднёнными по 8×10^4 каналам. Кондактанс (г) и шум (д) асимптотически приближаются к соответствующим значениям (штриховые прямые) в NIN-контакте. Отношение $S/|e|I$, показанное на рис. в, е, приближается к классическому значению $S/|e|I = 1$ при больших напряжениях. (Рисунок из работы [278].)

Сумма по каналам заменена в (345) интегралом, $(1/N) \sum_n \rightarrow (1/2\pi) \int_0^{2\pi} d\alpha$. Это означает, что и шум, и кондактанс достигают своих нормальных значений (в соответствующем NIN-контакте) при напряжениях $v_F/d \ll |eV| \ll \Delta$.

Теперь рассмотрим фактор Фано $F = S/|e|I$, где $S = \int_0^{|eV|} d\varepsilon \zeta(\varepsilon)$, $I = \int_0^{|eV|} d\varepsilon G(\varepsilon)$. При малых напряжениях $F = 2$, что отражает тот факт, что носителями заряда являются куперовские пары. При больших напряжениях ($v_F/d \ll |eV| \ll \Delta$) фактор Фано уменьшается до нормального значения $F = 1$. Такое уменьшение F , которое происходит сразу же после первого андреевского резонанса (как видно из рис. 37в,е) связано с подавлением шума при больших вероятностях андреевского отражения в области резонанса. Схожее поведение шума наблюдалось в работе [120].

15.2. Шум в NININS-контакте

Как упоминалось в разделе 13, NININS-контакт может быть интерпретирован как качественная модель неупорядоченного проводника [34, 206].

Резонансная структура, возникающая в INI-рассеивателе, приводит к бимодальному распределению прозрачности T . Для симметричного INI-рассеивателя ($T_1 = T_2 \ll 1$) распределение даётся выражением [274]

$$\rho(T) = \frac{1}{\pi} \frac{T_1}{2} \frac{1}{\sqrt{T^3(1-T)}}, \quad T \in \left[\frac{T_1^2}{\pi^2}, 1 \right]. \quad (346)$$

Формула (346) имеет аналог в случае неупорядоченного проводника [34, 206]. В NININ-контакте структура $\rho(T)$ не влияет на макроскопические транспортные свойства. Дифференциальный дробовой шум и линейный кондактанс, которые могут быть вычислены для бимодального

распределения прозрачностей (346),

$$\zeta = \frac{2|e|^3}{h} \int dT \rho(T) T(1-T) = \frac{2|e|^3}{h} \frac{T_1}{4}, \quad (347)$$

$$G = \frac{2e^2}{h} \int dT \rho(T) T = \frac{2e^2}{h} \frac{T_1}{2}, \quad (348)$$

описывают когерентный транспорт [279]. В некогерентном случае сопротивление представляет собой сумму двух определяемых барьерами I сопротивлений, соединённых последовательно. В этом случае $\zeta/|e|G = 1/2$ как следствие сохранения заряда [85]. В когерентном случае для NINIS-контакта мы можем найти линейный отклик, используя формулы (298), (340) и (346):

$$\zeta(0) = \frac{2|e|^3}{h} \int dT \rho(T) \frac{16T^2(1-T)}{(2-T)^4} = \frac{2|e|^3}{h} \frac{T_1}{2} \frac{3}{4\sqrt{2}}, \quad (349)$$

$$G(0) = \frac{2e^2}{h} \int dT \rho(T) \frac{2T^2}{(2-T)^2} = \frac{2e^2}{h} \frac{T_1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (350)$$

Отношение спектральной плотности шума к кондактансу в этом случае [274] $\zeta(0)/|e|G(0) = 3/4$. Сравнение значений отношения шума к кондактансу в когерентном случае для $X = I$ или $X = IN$ и для контакта с $X = D$ (где D — диффузный проводник) дано в таблице. Для единичного барьера распределение прозрачностей имеет пик при $T \ll 1$. Отношения $\zeta_N/|e|G_N = 1$ в NIN-контакте и $\zeta_S/|e|G_S = 2$ в NIS-контакте характеризуют носитель как единичный электрон или куперовскую пару. При наличии беспорядка сверхпроводимость в NDS-контакте даёт шум в два раза больший, чем определяемый нормальным NDN-контактом. Однако для двойного барьера шум в NINIS-контакте по сравнению с таковым в NININ-контакте увеличивается в 3/2 раза (см. таблицу). Следовательно, можно сделать вывод о том, что удвоение шума не представляет собой универсального явления и может зависеть от особенностей функции распределения прозрачностей. Это связано с тем фактом, что шум обусловлен каналами со средними прозрачностями $0 \lesssim T \lesssim 1$, а ток — открытыми каналами с $T \rightarrow 1$.

При конечных напряжениях дифференциальный шум определяется уравнением (340) с амплитудами отражения двойного барьера INI (306). Для симметричного барьера, $T_1 = T_2 = 0,05$, этот шум изображён на рис. 38. При напряжениях порядка андреевского уровня, $|eV| \sim v_F/d$, резонансная структура не зависит от количества каналов, а резонансные пики отражаются одинаково и в шуме, и в кондактансе. При больших напряжениях, $|eV| \gg v_F/d$, резонансы исчезают вследствие расфазировки электро-

Таблица. Отношение спектральной плотности шума к кондактансу $\zeta/|e|G$ для NXN- и NXS-контактов. Результаты справедливы [85, 112, 274, 279] при малой прозрачности, $T \ll 1$, и большом числе каналов, $N \rightarrow \infty$

	Одинарный барьер*	Двойной барьер**	Беспорядок***
NXN $\zeta_N/ e G_N$	1	1/2	1/3
NXS $\zeta_S/ e G_S$	2	3/4	2/3

* Единичный барьер, не имеющий внутренней структуры, $X = I$.
 ** Симметричный когерентный двойной барьер, $X = INI$.
 *** $X = D$.

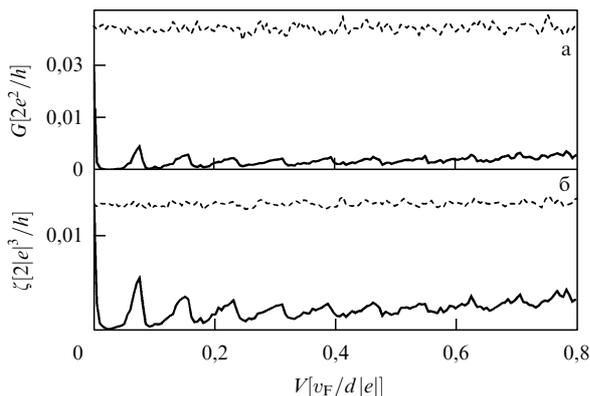


Рис. 38. Дифференциальный кондактанс (а) и дробовой шум (б) в NINIS-контакте с большим числом каналов (8×10^4). Прозрачности рассеивателей одинаковы, $T_1 = T_2 \approx 0,05$, расстояние между рассеивателями $d = 20v_F/\Delta$, $\int dx V(x) = 3\hbar v_F$. Усреднённый дробовой шум на один канал (340) имеет локальные максимумы при резонансах кондактанса (сплошные кривые). Кондактанс и дробовой шум для соответствующей несверхпроводящей NININ-структуры изображены штриховыми кривыми. (Рисунок из работы [278].)

нов и дырок; при этом разница между NIN- и NIS-контактами также исчезает.

16. Заключение

Мы затронули практически все основные аспекты использования матрицы рассеяния в описании электронного транспорта, хотя о многоканальных случаях, статистике прозрачностей для грязных проводников, целочисленном квантовом эффекте Холла и некоторых других темах было сказано очень мало или лишь упомянуто, как, например, о задачах с переменными полями, что вызвано главным образом неизбежными ограничениями объёма обзора. Несмотря на то что изложение основ данного метода можно найти в книгах (см., например, [72, 73], а также учебное пособие [65]), ряд моментов упомянут лишь в статьях, а некоторые не изложены вовсе. Настоящий обзор, как мы надеемся, хотя бы частично компенсирует такую неполноту, особенно ощущаемую в русскоязычной литературе. В заключение заметим, что возможности подхода, инициированного в 1957 г. Ландауэром [5], далеко не исчерпаны, в особенности это касается описания систем со взаимодействием, а для решения задач о транспорте электронов без взаимодействия этот подход уже является признанным удобным инструментом.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-02-00744-а (Г.Б.Л.) и NSF ECS-0608842, ARO W911NF-09-1-0395, DARPA HR0011-09-1-0009 (И.А.С.). Авторы благодарны М.В. Сулову, И.С. Бурмистрову, Л.И. Глазману, В.И. Фалько и Л.Е. Федичкину за чтение рукописи и полезные замечания.

Авторы также выражают признательность своим соавторам Д.Е. Хмельницкому, Л.Б. Иоффе, Л.С. Левитову, В.И. Фалько, К. Пресилле, Т. Мартину, Дж. Блаттеру, Ф. Хасслеру, М.В. Сулову, Ж.-М. Графу, Н.М. Щелкачеву и А.В. Лебедеву, работа и обсуждения с которыми (так же как и обсуждения с коллегами А.И. Ларкиным, Б.Л. Альтшулером, Д.А. Ивановым, К.А. Матвеевым, Р. Ландауэром, В.В. Рязановым, К. Глаттли, М. Санкером, В. Буше и М. Резниковым) помогли понять многие аспекты квантового электронного транспорта. Частично обзор основан на курсе лекций, прочитанных Г.Б.Л. в 2008 г. в Федеральной

технической высшей школе (ETH) в Цюрихе, и конспектах лекций, подготовленных при существенном участии И.А.С. и Ф. Хасслера. План лекций, предложенный Дж. Блаттером, также оказал влияние на структуру настоящего обзора.

17. Приложение: свойства матриц рассеяния

П1. Свойства состояний рассеяния

Основные свойства состояний рассеяния как для чисто одномерного, так и для многоканального и многоконтактного случаев доказываются теми же методами, что и в трёхмерном случае, который обычно и рассматривается в учебниках. Но ортонормированность и полноту набора состояний рассеяния можно также увидеть из следующих (не совсем строгих) рассуждений: будем порождать состояния рассеяния из плоских волн, скажем, в момент $t = t_{in}$ (набор волновых функций в этот момент $\psi_k(x, t_{in}) = \exp(ikx)$), адиабатически медленно увеличивая потенциал рассеяния (локализованный в некоторой области) до заданного значения. Тогда и ортонормированность, и полнота набора $\{\psi_k(x, t)\}$ в последующие моменты времени автоматически следуют из унитарности эволюции волновых пакетов, поскольку исходный набор плоских волн обладал этими свойствами (для плоских волн это можно доказать непосредственным вычислением в явном виде). Поскольку при $t \rightarrow \infty$ состояния $\psi_k(x, t)$ превращаются в состояния рассеяния Липпмана–Швингера (именно это утверждение нуждается в более строгом доказательстве), то мы получили для них ортонормированность и полноту.

Остаётся указать на то, что данные свойства можно использовать только в той области волновых пакетов, которая уже испытала рассеяние на потенциале, близком с нужной точностью к заданному, т.е. $|x| \ll v_k \tau$, где τ — время, прошедшее с того момента, в который потенциал оказался близким с нужной точностью к заданному⁵⁸. Из этих рассуждений также следует, что вид нормировки (например, на δ -функцию от энергии) состояний рассеяния может быть определён из вида их асимптотик — плотность потока в падающей волне может быть поставлена в соответствие плоской волне, для которой нормировка легко вычисляется.

П2. Унитарность матрицы рассеяния

Матрица рассеяния S параметризуется следующим образом:

$$S = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}. \quad (351)$$

Матрица рассеяния унитарна,

$$SS^\dagger = 1, \quad (352)$$

из этого следует, что амплитуды t , t' , r и r' не являются независимыми величинами:

$$r^\dagger r + t'^\dagger t' = t^\dagger t + r'^\dagger r' = 1, \quad (353)$$

$$tr^\dagger + r't'^\dagger = 0. \quad (354)$$

⁵⁸ Возможное появление связанных состояний требует некоторой модификации наших аргументов, но мы не будем на этом останавливаться, поскольку такие состояния редко дают вклад в изучаемые транспортные явления.

Таким образом, например, если t , t' и r известны, то из (354) можно найти

$$r' = -tr^\dagger[t'^\dagger]^{-1}. \quad (355)$$

Символ эрмитова сопряжения \dagger поставлен здесь вместо символа комплексного сопряжения $*$, чтобы подчеркнуть, что в многоканальном случае амплитуды рассеяния могут быть матрицами⁵⁹. Для одномерного пространственно симметричного случая (при наличии обратимости по времени) из (354) следует

$$tr^* = \pm i\sqrt{TR}. \quad (356)$$

В случае рассеяния на дельта-функции знак плюс в (356) соответствует притягивающему потенциалу, в котором имеется связанное состояние, а знак минус — отталкивающему, в котором имеется только непрерывный спектр (см. (91)). В случае рассеяния на двойном барьере знак меняется при прохождении резонанса (идеального). Такое поведение фазы сказывается на общей картине интерференции в INIS-структуре (см. раздел 13.4).

ПЗ. Симметрия гамильтониана

по отношению к обращению времени

Когда гамильтониан системы инвариантен к преобразованию симметрии, то эта инвариантность определённым образом распространяется на матрицу рассеяния. Если гамильтониан инвариантен к обращению времени, то матрица рассеяния удовлетворяет соотношению

$$S = S^\top. \quad (357)$$

Из (357) следует, что $t = t'$. Можно также найти, используя соотношения (353), (354), что $|r| = |r'|$ и имеется обычная связь между вероятностями отражения $R = |r|^2 = |r'|^2$ и прохождения $T = |t|^2 = |t'|^2$:

$$R + T = 1. \quad (358)$$

Если мы учтём магнитное поле, то, поскольку при обращении времени направление магнитного поля **B** сменяется противоположным [72, 280],

$$S_{-B} = S_B^\top. \quad (359)$$

Для амплитуды прохождения через рассеиватель, внутри которого на орбитальное (одномерное) движение частиц нетривиально действует магнитное поле, имеем $t_B = t_{-B}$.

Список литературы

- Born M Z. *Phys.* **37** 863 (1926)
- Wheeler J A *Phys. Rev.* **52** 1107 (1937)
- Heisenberg W Z. *Phys.* **120** 513 (1943)
- Heisenberg W Z. *Phys.* **120** 673 (1943)
- Landauer R *IBM J. Res. Dev.* **1** 223 (1957)
- Anderson P W et al. *Phys. Rev. B* **22** 3519 (1980)
- Fisher D S, Lee P A *Phys. Rev. B* **23** 6851 (1981)
- Economou E N, Soukoulis C M *Phys. Rev. Lett.* **46** 618 (1981)
- v. Klitzing K, Dorda G, Pepper M *Phys. Rev. Lett.* **45** 494 (1980)
- Imry Y, in *Directions in Condensed Matter Physics* (Eds G Grinstein, G Mazenko) (Singapore: World Scientific, 1986) p. 101
- Büttiker M *Phys. Rev. Lett.* **57** 1761 (1986)
- Büttiker M *IBM J. Res. Dev.* **32** 63 (1988)
- Büttiker M *IBM J. Res. Dev.* **32** 317 (1988)
- Büttiker M *Phys. Rev. B* **38** 9375 (1988)
- Takane Y, Ebisawa H *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** 1685 (1992)
- Takane Y, Ebisawa H *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** 2858 (1992)
- Lambert C J *J. Phys. Condens. Matter* **3** 6579 (1991)
- Lambert C J, Hui V C, Robinson S J *J. Phys. Condens. Matter* **5** 4187 (1993)
- Anantram M P, Datta S *Phys. Rev. B* **53** 16390 (1996)
- Beenakker C W J *Phys. Rev. Lett.* **67** 3836 (1991); "Erratum" *Phys. Rev. Lett.* **68** 1442 (1992)
- Лесовик Г Б *Письма в ЖЭТФ* **49** 513 (1989) [Lesovik G B *JETP Lett.* **49** 592 (1989)]
- Büttiker M *Phys. Rev. Lett.* **65** 2901 (1990)
- Martin Th, Landauer R *Phys. Rev. B* **45** 1742 (1992)
- Левитов Л С, Лесовик Г Б *Письма в ЖЭТФ* **58** 225 (1993) [Levitov L S, Lesovik G B *JETP Lett.* **58** 230 (1993)]
- Landauer R *Philos. Mag.* **21** 863 (1970)
- Hassler F et al. *Phys. Rev. B* **78** 165330 (2008)
- Сухоруков Е В, Левинсон И Б *ЖЭТФ* **97** 1384 (1990) [Sukhorukov E V, Levinson I B *Sov. Phys. JETP* **70** 782 (1990)]
- Шарвин Ю В *ЖЭТФ* **48** 984 (1965) [Sharvin Yu V *Sov. Phys. JETP* **21** 655 (1965)]
- Глазман Л И, Хаецкий А В *Письма в ЖЭТФ* **48** 546 (1988) [Glazman L I, Khaetskii A V *JETP Lett.* **48** 591 (1988)]
- Glazman L I, Khaetskii A V *Europhys. Lett.* **9** 263 (1989)
- Patel N K et al. *J. Phys. Condens. Matter* **2** 7247 (1990)
- Patel N K et al. *Phys. Rev. B* **44** 13549 (1991)
- Matveev K A, Glazman L I *Phys. Rev. Lett.* **70** 990 (1993)
- Дорохов О Н *Письма в ЖЭТФ* **36** 259 (1982) [Dorokhov O N *JETP Lett.* **36** 318 (1982)]
- Mello P A, Pereyra P, Kumar N *Ann. Physics* **181** 290 (1988)
- van Wees B J et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 848 (1988)
- Wharam D A et al. *J. Phys. C* **21** L209 (1988)
- Thornton T J et al. *Phys. Rev. Lett.* **56** 1198 (1986)
- Fal'ko V I, Lesovik G B, in *Coulomb and Interference Effects in Small Electronic Structures: XIVth Moriond Workshop, Switzerland, January 22–29, 1994* (Eds D C Glatelli, M Sanquer, J Trän Thanh Vân) (Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres, 1994) p. 389
- Глазман Л И и др. *Письма в ЖЭТФ* **48** 218 (1988) [Glazman L I et al. *JETP Lett.* **48** 238 (1988)]
- Kemble E C *Phys. Rev.* **48** 549 (1935)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2004) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
- Kawabata A *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** 372 (1989)
- Fertig H A, Halperin B I *Phys. Rev. B* **36** 7969 (1987)
- Büttiker M *Phys. Rev. B* **41** 7906 (1990)
- Frank S et al. *Science* **280** 1744 (1998)
- Poncharal Ph et al. *Eur. Phys. J. D* **9** 77 (1999)
- Martel R et al. *Appl. Phys. Lett.* **73** 2447 (1998)
- Olesen L et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 2251 (1994)
- Krans J M et al. *Nature* **375** 767 (1995)
- Scheer E et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 3535 (1997)
- Rodrigues V, Fuhrer T, Ugarte D *Phys. Rev. Lett.* **85** 4124 (2000)
- Peres N M R, Castro Neto A H, Guinea F *Phys. Rev. B* **73** 195411 (2006); "Erratum" *Phys. Rev. B* **73** 239902(E) (2006)
- Tombros N et al. *Nature Phys.* **7** 697 (2011)
- Patel N K et al. *Phys. Rev. B* **44** 10973 (1991)
- Thomas K J et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 135 (1996)
- Glazman L I, Khaetskii A V *J. Phys. Condens. Matter* **1** 5005 (1989)
- Laughlin R B *Phys. Rev. B* **23** 5632 (1981)
- Halperin B I *Phys. Rev. B* **25** 2185 (1982)
- Девятков Э В *УФН* **177** 207 (2007) [Devyatov E V *Phys. Usp.* **50** 197 (2007)]
- Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
- Yacoby A et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 4047 (1995)
- Fano U *Phys. Rev.* **124** 1866 (1961)
- Ji Y et al. *Nature* **422** 415 (2003)
- Шелкачев Н М, Лесовик Г Б *Одномерное рассеяние в квантовой механике и его приложения* (М.: МФТИ, 2011)
- Moskalets M, Büttiker M *Phys. Rev. B* **66** 205320 (2002)
- Moskalets M, Büttiker M *Phys. Rev. B* **70** 245305 (2004)
- Lesovik G B, Levitov L S *Phys. Rev. Lett.* **72** 538 (1994)
- Levitov L S, Lee H, Lesovik G B *J. Math. Phys.* **37** 4845 (1996)
- Иванов Д А, Левитов Л С *Письма в ЖЭТФ* **58** 450 (1993) [Ivanov D A, Levitov L S *JETP Lett.* **58** 461 (1993)]
- Ivanov D A, Lee H W, Levitov L S *Phys. Rev. B* **56** 6839 (1997)
- Datta S *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
- Демиховский В Я, Вугальтер Г А *Физика квантовых низкоразмерных структур* (М.: Логос, 2000)

⁵⁹ Кроме того, амплитуды рассеяния не всегда описываются квадратными матрицами. Например, слева и справа от барьера может быть разное число каналов. Амплитуды рассеяния, вообще говоря, являются матрицами и в спиновом пространстве. Эти матрицы становятся диагональными при наличии рассеяния с переворотом спина, что может быть обусловлено спин-орбитальным взаимодействием в барьере или воздействием в барьере на спин электрона неоднородного обменного поля (обусловленного ферромагнитными барьерами).

74. Azbel M Ya, in *Localization, Interaction, and Transport Phenomena: Proc. of the Intern. Conf., August 23–28, 1984, Braunschweig, Germany* (Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 61, Eds B Kramer, G Bergmann, Y Bruynseraede) (Berlin: Springer-Verlag, 1985) p. 162
75. Альтшулер Б Л *Письма в ЖЭТФ* **41** 530 (1985) [Al'tshuler B L *JETP Lett.* **41** 648 (1985)]
76. Lee P A, Stone A D *Phys. Rev. Lett.* **55** 1622 (1985)
77. Альтшулер Б Л, Хмельницкий Д Е *Письма в ЖЭТФ* **42** 291 (1985) [Al'tshuler B L, Khmel'nitskii D E *JETP Lett.* **42** 359 (1985)]
78. Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **91** 1815 (1986) [Larkin A I, Khmel'nitskii D E *Sov. Phys. JETP* **64** 1075 (1986)]
79. Петрашов В Т, Рейндеро П, Спрингфорд М *Письма в ЖЭТФ* **45** 565 (1987) [Petrashov V T, Reinders P, Springford M *JETP Lett.* **45** 720 (1987)]
80. Washburn S *IBM J. Res. Dev.* **32** 335 (1988)
81. Ghosh A, Raychaudhuri A K *Phys. Rev. Lett.* **84** 4681 (2000)
82. Kubo R J. *Phys. Soc. Jpn.* **12** 570 (1957)
83. Greenwood D A *Proc. Phys. Soc. London* **71** 585 (1958)
84. Dorokhov O N *Solid State Commun.* **51** 381 (1984)
85. Beenakker C W J, Büttiker M *Phys. Rev. B* **46** 1889 (1992)
86. Prange R E, Girvin S M (Eds) *The Quantum Hall Effect* (New York: Springer-Verlag, 1987) [Прендж Р, Гирвин С (Ред.) *Квантовый эффект Холла* (М.: Мир, 1989)]
87. Brouwer P W, Frahm K *Phys. Rev. B* **53** 1490 (1996)
88. Ефетов К Б, Ларкин А И *ЖЭТФ* **85** 764 (1983) [Efetov K B, Larkin A I *Sov. Phys. JETP* **58** 444 (1983)]
89. Efetov K B *Adv. Phys.* **32** 53 (1983)
90. Pruisken A M M, Skorić B, Baranov M A *Phys. Rev. B* **60** 16838 (1999)
91. Lesovick G B *Mod. Phys. Lett.* **B 3** 611 (1989)
92. Анисович А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **45** 237 (1987) [Anisovich A V et al. *JETP Lett.* **45** 295 (1987)]
93. Лесовик Г Б, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **94** (5) 164 (1988) [Lesovik G B, Khmel'nitskii D E *Sov. Phys. JETP* **67** 957 (1988)]
94. Franz R, Wiedemann G *Ann. Physik* **165** 497 (1853)
95. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2007) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (New York: Pergamon Press, 1981)]
96. Engquist H-L, Anderson P W *Phys. Rev. B* **24** 1151 (1981)
97. Landauer R *Physica D* **38** 226 (1989)
98. Landauer R, Martin Th *Physica B* **175** 167 (1991)
99. Landauer R, Martin Th *Physica B* **182** 288 (1992)
100. Schönhammer K *Phys. Rev. B* **75** 205329 (2007)
101. Stone A D, Szafer A *IBM J. Res. Dev.* **32** 384 (1988)
102. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964) [Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1018 (1965)]
103. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Физматлит, 2010) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
104. Lesovik G B, Loosen R *Письма в ЖЭТФ* **65** 280 (1997) [*JETP Lett.* **65** 295 (1997)]
105. Gavish U, Levinson Y, Imry Y *Phys. Rev. B* **62** R10637 (2000)
106. Aguado R, Kouwenhoven L P *Phys. Rev. Lett.* **84** 1986 (2000)
107. Basset J, Bouchiat H, Deblock R *Phys. Rev. Lett.* **105** 166801 (2010)
108. Onac E et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 176601 (2006)
109. Gustavsson S et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 206804 (2007)
110. Deblock R et al. *Science* **301** 203 (2003)
111. Gavish U et al., cond-mat/0211646
112. Хлус В А *ЖЭТФ* **93** 2179 (1987) [Khilus V A *Sov. Phys. JETP* **66** 1243 (1987)]
113. Reznikov M et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3340 (1995)
114. Kumar A et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 2778 (1996)
115. Steinbach A, Martinis J, Devoret M H *Bull. Am. Phys. Soc.* **40** 400 (1995)
116. Liefrink F et al. *Phys. Rev. B* **49** 14066 (1994)
117. Lesovik G B, Loosen R Z. *Phys. B* **91** 531 (1993)
118. Saminadayar L et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2526 (1997)
119. de-Picciotto R et al. *Nature* **389** 162 (1997)
120. Lefloch F et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 067002 (2003)
121. Reznikov M et al. *Nature* **399** 238 (1999)
122. Blanter Ya M, Büttiker M *Phys. Rep.* **336** 1 (2000)
123. Martin T, in *Nanophysics: Coherence and Transport: Lecture Notes of the Les Houches Summer School 2004, Session LXXXI* (Eds H Bouchiat et al.) (Amsterdam: Elsevier, 2005) p. 283
124. Левитов Л С, Лесовик Г Б *Письма в ЖЭТФ* **55** 534 (1992) [Levitov L S, Lesovik G B *JETP Lett.* **55** 555 (1992)]
125. Лесовик Г Б *Письма в ЖЭТФ* **60** 806 (1994) [Lesovik G B *JETP Lett.* **60** 820 (1994)]
126. Falci G, Paladino E, Fazio R, in *Quantum Phenomena in Mesoscopic Systems: Proc. of the Intern. School of Physics "Enrico Fermi", 2002, Varenna, Italy, Course 151* (Eds B Altshuler, A Tagliacozzo, V Tognetti) (Amsterdam: IOS Press, 2003)
127. Galperin Y M et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 097009 (2006)
128. Neder I et al. *Nature Phys.* **3** 534 (2007)
129. Averin D V, Sukhorukov E V *Phys. Rev. Lett.* **95** 126803 (2005)
130. Levitov L S, Lesovik G B, cond-mat/9401004
131. Bachmann S, Graf G M, Lesovik G B *J. Stat. Phys.* **138** 333 (2010)
132. Shelankov A, Rammer J *Europhys. Lett.* **63** 485 (2003)
133. Lesovik G B, Hassler F, Blatter G *Phys. Rev. Lett.* **96** 106801 (2006)
134. Muzykantskii B A, Adamov Y *Phys. Rev. B* **68** 155304 (2003)
135. Avron J E et al. *Commun. Math. Phys.* **280** 807 (2008)
136. Hassler F, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. Lett.* **99** 076804 (2007)
137. Büttiker M *Phys. Rev. B* **46** 12485 (1992)
138. Лесовик Г Б, Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук (Черноголовка: Ин-т физики твердого тела РАН, 1997)
139. Burkard G, Loss D, Sukhorukov E V *Phys. Rev. B* **61** R16303 (2000)
140. Fève G et al. *Science* **316** 1169 (2007)
141. Mahé A et al. *Phys. Rev. B* **82** 201309(R) (2010)
142. Keeling J, Klich I, Levitov L S *Phys. Rev. Lett.* **97** 116403 (2006)
143. Лебедев М В, Щекин А А, Мисочко О В *Квантовая электроника* **38** 710 (2008) [Lebedev M V, Shchekin A A, Misochko O V *Quantum Electron.* **38** 710 (2008)]
144. Abanov A G, Ivanov D A *Phys. Rev. Lett.* **100** 086602 (2008)
145. Abanov A G, Ivanov D A *Phys. Rev. B* **79** 205315 (2009)
146. Roothaan C C J *Rev. Mod. Phys.* **23** 69 (1951)
147. Kambly D, Ivanov D A *Phys. Rev. B* **80** 193306 (2009)
148. Courant R, Hilbert D *Methoden der mathematischen Physik* 4th ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1993) [*Methods of Mathematical Physics* (New York: Interscience Publ., 1989)]
149. Баяндин К В, Лебедев А В, Лесовик Г Б, направлено в *Письма в ЖЭТФ*
150. Баяндин К В, Лебедев А В, Лесовик Г Б *ЖЭТФ* **133** 140 (2008) [Bayandin K V, Lebedev A V, Lesovik G B *JETP* **106** 117 (2008)]
151. Bomze Yu et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 176601 (2005)
152. Gershon G et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 016803 (2008)
153. Timofeev A V et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 207001 (2007)
154. Reulet B et al., in *Perspectives of Mesoscopic Physics: Dedicated to Yoseph Imry's 70th Birthday* (Eds A Aharony, O Entin-Wohlman) (Singapore: World Scientific, 2010) p. 211
155. Gustavsson S et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 076605 (2006)
156. Petersson K D et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 246804 (2010)
157. Lesovik G B, Suslov M V, Blatter G *Phys. Rev. A* **82** 012316 (2010)
158. Ivanov D A, Abanov A G *Europhys. Lett.* **92** 37008 (2010)
159. Jalabert R A, Pichard J-L, Beenakker C W J *Europhys. Lett.* **27** 255 (1994)
160. Lee H, Levitov L S, Yakovetz A Yu *Phys. Rev. B* **51** 4079 (1995)
161. Danneau R et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 196802 (2008)
162. Tworzydło J et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 246802 (2006)
163. Katsnelson M I *Eur. Phys. J. B* **51** 157 (2006)
164. Lebedev A V, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. Lett.* **100** 226805 (2008)
165. Goorden M C, Büttiker M *Phys. Rev. Lett.* **99** 146801 (2007)
166. Gogolin A O et al. *Ann. Physik* **16** 678 (2007)
167. Beenakker C W J, Schomerus H *Phys. Rev. Lett.* **86** 700 (2001)
168. Lebedev A V, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. B* **81** 155421 (2010)
169. de Gennes P G *Rev. Mod. Phys.* **36** 225 (1964)
170. de Gennes P G *Superconductivity of Metals and Alloys* (New York: W. A. Benjamin, 1966) [Де Жен П *Сверхпроводимость металлов и сплавов* (М.: Мир, 1968)]
171. Свидзинский А В *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости* (М.: Наука, 1982)
172. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **46** 1823 (1964) [Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **19** 1228 (1964)]
173. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **47** 2222 (1964) [Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **20** 1490 (1965)]
174. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **49** 655 (1965) [Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **22** 455 (1966)]
175. Blonder G E, Tinkham M, Klapwijk T M *Phys. Rev. B* **25** 4515 (1982)
176. Lesovik G B, Martin T, Blatter G *Eur. Phys. J. B* **24** 287 (2001)
177. Recher P, Sukhorukov E V, Loss D *Phys. Rev. B* **63** 165314 (2001)
178. Chtchelkatchev N M et al. *Phys. Rev. B* **66** 161320(R) (2002)
179. Bayandin K V, Lesovik G B, Martin T *Phys. Rev. B* **74** 085326 (2006)
180. Beenakker C W J *Phys. Rev. B* **46** 12841 (1992)
181. Büttiker M et al. *Phys. Rev. B* **31** 6207 (1985)
182. Anderson P W *J. Phys. Chem. Solids* **11** 26 (1959)
183. Nazarov Yu V, Stooft T H *Phys. Rev. Lett.* **76** 823 (1996)
184. Stooft T H, Nazarov Yu V *Phys. Rev. B* **53** 14496 (1996)
185. Hekking F W J, Nazarov Yu V *Phys. Rev. B* **49** 6847 (1994)
186. Volkov A F, Zaitsev A V, Klapwijk T M *Physica C* **210** 21 (1993)
187. Petrashov V T et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 5268 (1995)
188. Courtois H et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 130 (1996)
189. Lesovik G B, Fauchère A L, Blatter G *Phys. Rev. B* **55** 3146 (1997)
190. Leadbeater M, Lambert C J *J. Phys. Condens. Matter* **8** L345 (1996)

191. Magnée P H C et al. *Phys. Rev. B* **50** 4594 (1994)
 192. Poirier W, Mailly D, Sanquer M, unpublished
 193. Christen T, Büttiker M *Europhys. Lett.* **35** 523 (1996)
 194. Giaever I *Phys. Rev. Lett.* **5** 147 (1960)
 195. Giaever I, Hart H R (Jr.), Megerle K *Phys. Rev.* **126** 941 (1962)
 196. Giaever I *Rev. Mod. Phys.* **46** 245 (1974)
 197. Beenakker C W J *Rev. Mod. Phys.* **69** 731 (1997)
 198. Artemenko S N, Volkov A F, Zaitsev A V *Solid State Commun.* **30** 771 (1979)
 199. Pothier H et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 2488 (1994)
 200. Marmorkos I K, Beenakker C W J, Jalabert R A *Phys. Rev. B* **48** 2811 (1993)
 201. Yip S *Phys. Rev. B* **52** 15504 (1995)
 202. Kastalsky A et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 3026 (1991)
 203. Nguyen C, Kroemer H, Hu E L *Phys. Rev. Lett.* **69** 2847 (1992)
 204. Nitta J, Akazaki T, Takayanagi H *Phys. Rev. B* **49** 3659 (1994)
 205. Bakker S J M et al. *Phys. Rev. B* **49** 13275 (1994)
 206. Melson J A, Beenakker C W J *Physica B* **203** 219 (1994)
 207. Chaudhuri S, Bagwell P F *Phys. Rev. B* **51** 16936 (1995)
 208. Edwards J T, Thouless D J *J. Phys. C* **5** 807 (1972)
 209. Altland A, Gefen Y, Montambaux G *Phys. Rev. Lett.* **76** 1130 (1996)
 210. van Wees B J et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 510 (1992)
 211. Josephson B D *Phys. Lett.* **1** 251 (1962)
 212. van Wees B J, Lenssen K-M H, Harmans C J P M *Phys. Rev. B* **44** 470 (1991)
 213. Takayanagi H, Akazaki T, Nitta J *Phys. Rev. Lett.* **75** 3533 (1995)
 214. Akazaki T et al. *Appl. Phys. Lett.* **68** 418 (1996)
 215. Schäpers Th et al. *Appl. Phys. Lett.* **73** 2348 (1998)
 216. Sutton A P *Curr. Opin. Solid State Mater. Sci.* **1** 827 (1996)
 217. Morpurgo A F, Klapwijk T M, van Wees B J *Appl. Phys. Lett.* **72** 966 (1998)
 218. Baselmans J J A et al. *Nature* **397** 43 (1999)
 219. Krans J M et al. *Phys. Rev. B* **48** 14721 (1993)
 220. Muller C J, van Ruitenbeek J M, de Jongh L J *Phys. Rev. Lett.* **69** 140 (1992)
 221. Scheer E et al. *Nature* **394** 154 (1998)
 222. Kasumov A Yu et al. *Science* **284** 1508 (1999)
 223. Jarillo-Herrero P, van Dam J A, Kouwenhoven L P *Nature* **439** 953 (2006)
 224. Cleuziou J-P et al. *Nature Nanotech.* **1** 53 (2006)
 225. Eichler A et al. *Phys. Rev. B* **79** 161407(R) (2009)
 226. Roch N et al. *Nature* **453** 633 (2008)
 227. Winkelmann C B et al. *Nature Phys.* **5** 876 (2009)
 228. Heersche H B et al. *Nature* **446** 56 (2007)
 229. Du X, Skachko I, Andrei E Y *Phys. Rev. B* **77** 184507 (2008)
 230. Ojeda-Aristizabal C et al. *Phys. Rev. B* **79** 165436 (2009)
 231. Ohta H, Ishii C (Eds) *Physics and Applications of Mesoscopic Josephson Junctions* (Tokyo: The Physical Society of Japan, 1999)
 232. Furusaki A, Takayanagi H, Tsukada M *Phys. Rev. Lett.* **67** 132 (1991)
 233. Furusaki A, Takayanagi H, Tsukada M *Phys. Rev. B* **45** 10563 (1992)
 234. Chtchelkatchev N M, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. B* **62** 3559 (2000)
 235. Kuhn D D et al. *Phys. Rev. B* **63** 054520 (2001)
 236. Sadovskyy I A, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. B* **75** 195334 (2007)
 237. Sadovskyy I A, Lesovik G B, Blatter G *Письма в ЖЭТФ* **86** 239 (2007) [*JETP Lett.* **86** 210 (2007)]
 238. Sadovskyy I A et al. *Phys. Rev. B* **82** 235310 (2010)
 239. Beenakker C W J, van Houten H *Phys. Rev. Lett.* **66** 3056 (1991)
 240. Шмидт В В *Введение в физику сверхпроводников* (М.: МЦНМО, 2000) [Schmidt V V *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications* (Berlin: Springer, 1997)]
 241. Clarke J, in *Superconductor Applications: SQUIDS and Machines* (Eds B V Schwartz, S Foner) (New York: Plenum Press, 1977) p. 67
 242. Clarke J, Braginski A I (Eds) *The SQUID Handbook* Vol. 1 *Fundamentals and Technology of SQUIDS and SQUID Systems* (Berlin: Wiley-VCH, 2004)
 243. Clarke J, Braginski A I (Eds) *The SQUID Handbook* Vol. 2 *Applications of SQUIDS and SQUID Systems* (Berlin: Wiley-VCH, 2004)
 244. Kleiner R et al. *Proc. IEEE* **92** 1534 (2004)
 245. Кулик И О *ЖЭТФ* **57** 1745 (1969) [Kulik I O *Sov. Phys. JETP* **30** 944 (1970)]
 246. Ishii C *Prog. Theor. Phys.* **44** 1525 (1970)
 247. van Houten H *Appl. Phys. Lett.* **58** 1326 (1991)
 248. Chrestin A, Matsuyama T, Merkt U *Phys. Rev. B* **49** 498 (1994)
 249. Wendin G, Shumeiko V S *Superlat. Microstruct.* **20** 569 (1996)
 250. Wendin G et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **38** 354 (1999)
 251. Wendin G, Shumeiko V S, Samuelsson P *Superlat. Microstruct.* **25** 983 (1999)
 252. Wendin G, Shumeiko V S *Phys. Rev. B* **53** R6006 (1996)
 253. Шелкачев Н М, Дисс. ... к-та физ.-мат. наук (М.: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 2002)
 254. Krichevsky A et al. *Phys. Rev. B* **61** 3723 (2000)
 255. Akkermans E et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 76 (1991)
 256. Beenakker C W J, van Houten H, in *Single-Electron Tunneling and Mesoscopic Devices: Proc. of the 4th Intern. Conf., SQUID'91, Berlin, Germany, June 18–21, 1991* (Eds H Koch, H Lübbig) (Berlin: Springer, 1992) p. 175
 257. Novoselov K S et al. *Science* **306** 666 (2004)
 258. Katsnelson M I, Novoselov K S, Geim A K *Nature Phys.* **2** 620 (2006)
 259. Cheianov V V, Fal'ko V I *Phys. Rev. B* **74** 041403(R) (2006)
 260. Beenakker C W J *Rev. Mod. Phys.* **80** 1337 (2008)
 261. Beenakker C W J *Phys. Rev. Lett.* **97** 067007 (2006)
 262. Titov M, Beenakker C W J *Phys. Rev. B* **74** 041401(R) (2006)
 263. Cuevas J C, Yeyati A L *Phys. Rev. B* **74** 180501(R) (2006)
 264. González J, Peretto E J. *Phys. Condens. Matter* **20** 145218 (2008)
 265. Hagymási I, Kormányos A, Cserti J *Phys. Rev. B* **82** 134516 (2010)
 266. Muzykantskii B A, Khmel'nitskii D E *Phys. Rev. B* **50** 3982 (1994)
 267. de Jong M J M, Beenakker C W J *Phys. Rev. B* **49** 16070 (1994)
 268. Hessling J P et al. *Europhys. Lett.* **34** 49 (1996)
 269. Averin D, Imam H T *Phys. Rev. Lett.* **76** 3814 (1996)
 270. Dieleman P et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 3486 (1997)
 271. Martin T *Phys. Lett. A* **220** 137 (1996)
 272. Johnson M B *Phys. Rev.* **29** 367 (1927)
 273. Nyquist H *Phys. Rev.* **32** 110 (1928)
 274. de Jong M J M, Beenakker C W J, in *Mesoscopic Electron Transport* (Eds L L Sohn, L P Kouwenhoven, G Schön) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997) p. 225
 275. Jehl X et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 1660 (1999)
 276. Jehl X et al. *Nature* **405** 50 (2000)
 277. Rowell J M, McMillan W L *Phys. Rev. Lett.* **16** 453 (1966)
 278. Fauchère A L, Lesovik G B, Blatter G *Phys. Rev. B* **58** 11177 (1998)
 279. Chen L Y, Ting C S *Phys. Rev. B* **43** 4534 (1991)
 280. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 2006) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]

Scattering matrix approach to the description of quantum electron transport

G.B. Lesovik

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Semenova 1-A, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
 Tel. (7-495) 137-3244. Fax (7-495) 938-2077. E-mail: lesovik@landau.ac.ru

I.A. Sadovskyy

Rutgers University, 136 Frelinghuysen Rd, Piscataway, NJ, 08854, USA. E-mail: ivan.sadovskyy@gmail.com

In the review we consider the scattering matrix approach in application to quantum electron transport in meso- and nanoconductors. This approach is an alternative to the more conventional kinetic equation and Green function approaches and often more efficient for coherent conductors (especially when proving general relations) and more transparent most of the time. We provide the description of both the time averaged quantities (like, e.g., current-voltage characteristics) and current fluctuations in time — noise, as well as full counting statistics of charge transport at finite time. In addition to normal conductors we consider contacts with superconductors and Josephson junctions.

PACS numbers: **72.10. - d**, **73.23. - b**, 73.50.Td, 74.25.F-, **74.45. + c**, 74.78.Na

Bibliography — 280 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (10) 1041 – 1096 (2011)

DOI: 10.3367/UFN.0181.201110b.1041

Received 12 December 2010

Physics – Uspekhi **54** (10) (2011)