

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА РАН

А. А. ЗАГИТОВА, Л. В. КУЛИК

**ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ЗОНДИРОВАНИЯ ОБЪЕМНЫХ
СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОГО
ЭФФЕКТА ХОЛЛА**



Москва
ФИЗМАТКНИГА
2020

ББК 22.31
3141
УДК 538.9 : 537.6

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского научного фонда. Грант № 18-12-00246.*

ЗАГИТОВА А. А., КУЛИК Л. В. Оптические методы зондирования объемных состояний квантового эффекта Холла. — М.: Физматкнига, 2020. — 120 с. — ISBN 978-5-89155-339-2.

Монография посвящена исследованию объемных квантово-холловских состояний оригинальными оптическими методиками, разработанными российскими учеными. Обсуждаются экспериментальные результаты, полученные с помощью неупругого рассеяния света, резонансного и фотоиндуцированного резонансного отражения, оптического детектирования микроволнового поглощения и времяразрешенного керровского вращения. Методом неупругого рассеяния света измерена величина обменного взаимодействия в холловском ферромагнетике с одним заполненным спиновым подуровнем Ландау. С помощью методики времяразрешенного керровского вращения исследована спиновая жесткость холловского ферромагнетика. Получены фундаментальные результаты о термодинамике холловского ферромагнетика и квантовых фазовых превращениях в холловском ферромагнетике с зарядовыми дефектами. Доказывается, что основным состоянием холловского ферромагнетика с зарядовыми дефектами является спин-текстурная жидкость. В спектре резонансного отражения света от двумерной электронной системы при факторе заполнения $\nu = 1/3$ обнаружена линия отражения от спиновых возбуждений лафлиновской жидкости. Обсуждается циклотронный резонанс композитных фермионов при других дробных значениях фактора заполнения. Перед каждым разделом, посвященным оригинальным экспериментальным данным, дается развернутое теоретическое введение в физику исследуемых состояний квантового эффекта Холла.

Авторы выражают благодарность Александру Васильевичу Горбунову и Елене Николаевне Морозовой за внимательное прочтение текста, исправление обнаруженных ошибок и неточностей, помощь в оформлении книги.

ISBN 978-5-89155-339-2



© Загитова А. А., Кулик Л. В., 2020
© ИФТТ РАН, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1	
2D ЭЛЕКТРОН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	9
1.1. Уровни Ландау.....	9
1.2. Полуклассическая интерпретация вырожденности уровней Ландау	11
1.3. Нулевой уровень Ландау	13
ГЛАВА 2	
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА	16
2.1. Понятие несжимаемости и ЦКЭХ.....	16
ГЛАВА 3	
ХОЛЛОВСКИЕ ФЕРРОМАГНЕТИКИ	20
3.1. Обменное взаимодействие.....	23
3.2. Спиновые волны	23
3.3. Эффективное действие	27
3.4. Экспериментальные исследования объемных состояний холловского ферромагнетика при $\nu = 1$	32
3.5. Исследование спиновой жесткости холловского ферромагнетика методом времязрешенного эффекта Керра.....	41
3.6. Скирмионы.....	48
3.7. Исследование холловского ферромагнетика с зарядовыми дефектами методом неупругого рассеяния света	53
ГЛАВА 4	
ДРОБНЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА	63
4.1. Роль кулоновского взаимодействия.....	63
4.2. Волновая функция Лафлина	64
4.3. Псевдопотенциалы Холдейна.....	66
4.4. Квазичастицы с дробным зарядом.....	68
4.5. Дробная статистика.....	72
4.6. Обобщения волновой функции Лафлина.....	77
4.7. Экспериментальные методы исследования объемных состояний ДКЭХ.....	84
4.8. Циклотронное спин-флип возбуждение в ДЭС при $\nu = 1/3$	86
4.9. Резонансное отражение света от лафлиновской жидкости при $\nu = 1/3$	91
4.10. Циклотронный резонанс композитных фермионов. Дисперсия возбуждений дробных квантово-холловских состояний	94
4.11. Локальная несжимаемость квантово-холловских состояний при $\nu = 3/2$	101

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное обнаружение целочисленного и дробного квантовых эффектов Холла сыграло огромную роль в развитии современной физики конденсированного состояния. Несмотря на относительно небольшую историю, эти открытия были отмечены Нобелевскими премиями по физике. В 1985 г. премия была присуждена Клаусу фон Клитцингу за открытие целочисленного квантового эффекта Холла (ЦКЭХ), а в 1988 г. премию вручили Х. Штермеру, Д. Цуи и Р. Лафлину за открытие и феноменологическое объяснение дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ).

В 1980 г. Клаус фон Клитцинг проводил серию экспериментов по исследованию эффекта Холла в двумерной электронной системе (ДЭС) кремниевого полевого МОП-транзистора при температуре жидкого гелия в сильном магнитном поле (~ 10 Тл) [1]. Вместо ожидаемой линейной зависимости холловского сопротивления R_H от магнитного поля он обнаружил ступенчатую функцию с широкими плато и резкими скачками между ними (рис. 1). Оказалось, что сопротивление R_H на плато принимает квантованные значения и определяется выражением $R_H = h/(ie^2)$, где i — целое число,

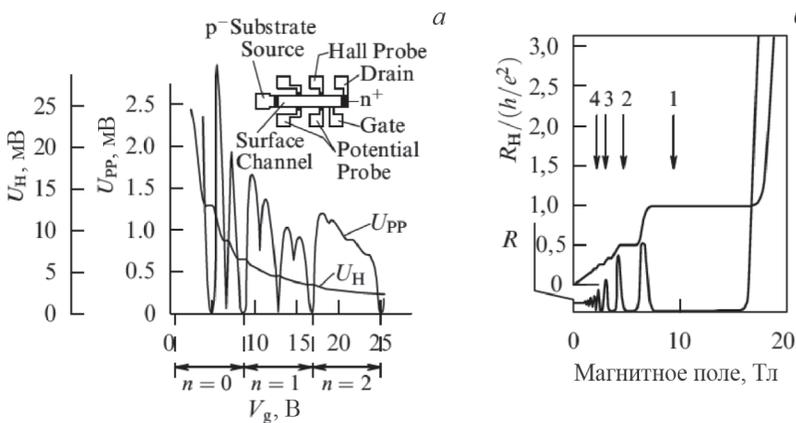


Рис. 1. Зависимости холловского напряжения U_H и продольного напряжения U_{PP} от напряжения на затворе V_g , полученные Клаусом фон Клитцингом в 1980 г. на двумерной электронной системе кремниевого МОП-транзистора (а). Аналогичные данные, полученные на гетероструктуре GaAs/AlGaAs (б). Вместо классической линейной магнитополевой зависимости холловского сопротивления наблюдаются широкие плато холловского сопротивления R_H и глубокие минимумы продольного сопротивления R

e — заряд электрона, h — постоянная Планка, причем продольное сопротивление R на плато имеет минимумы. Неожиданным было то, что такие параметры системы, как размеры образца, степень несовершенства структуры и тип материала, в котором находится двумерный электронный газ, не влияют на точность квантования ($R_H \simeq 25,812\dots$ кОм при $i = 1$). Поэтому, помимо большой фундаментальной значимости, наблюдение ЦКЭХ имело важное прикладное значение, открыв возможность создания международного эталона сопротивления h/e^2 и более точного измерения постоянной тонкой структуры.

Первоначально для объяснения ЦКЭХ в 1981 г. Р. Лафлин выдвинул идею о том, что точное квантование холловской проводимости связано с калибровочной инвариантностью и наличием края подвижности (делокализованных состояний) на уровне Ландау [2, 3]. То есть явление ЦКЭХ легко понять, рассматривая движение невзаимодействующих электронов в присутствии сильного магнитного поля и учитывая локализацию электронов в поле случайного потенциала. Согласно другому подходу, квантованную проводимость можно рассматривать как топологический инвариант [4, 5]. Эта идея привела к современному описанию топологических изоляторов и сверхпроводников [6].

Еще более неожиданным для мирового научного сообщества было открытие дробного квантового эффекта Холла. В 1982 г. Д. Цуи, Х. Штермер и А. Госсард изучали квантовый эффект Холла при более низкой температуре, чем температура жидкого ^4He , ожидая обнаружить экспериментально вигнеровскую кристаллизацию [7]. Вместо этого они наблюдали новое плато в холловском сопротивлении, соответствующее фактору заполнения $\nu = 1/3$ [8]. В дальнейшем было обнаружено квантование сопротивления и при других дробных значениях ν . Внешне ДКЭХ ничем не отличается от ЦКЭХ: также наблюдается квантование холловского сопротивления, а продольное сопротивление на плато имеет минимумы (рис. 2). Казалось бы, единственное различие между двумя эффектами заключается в дробных значениях холловского сопротивления. Однако природа дробного квантового эффекта Холла совершенно иная, чем у ЦКЭХ. Для описания ДКЭХ необходимо учитывать многочастичное электрон-электронное взаимодействие в двумерной системе. Именно взаимодействие между электронами приводит к высококоррелированному квантовому состоянию, в котором могут происходить удивительные вещи: например, считается, что в дробных состояниях могут возникать квазичастицы с дробным электрическим зарядом. Причем дробным становится не только заряд квазичастиц, но и их статистика. Как известно, элект-

трон является фермионом, и распределение электронов определяется статистикой Ферми–Дирака. Когда электрон «расщепляется», то же самое происходит и с его фермионной природой. Отдельные составляющие больше не являются ни фермионами, ни бозонами.

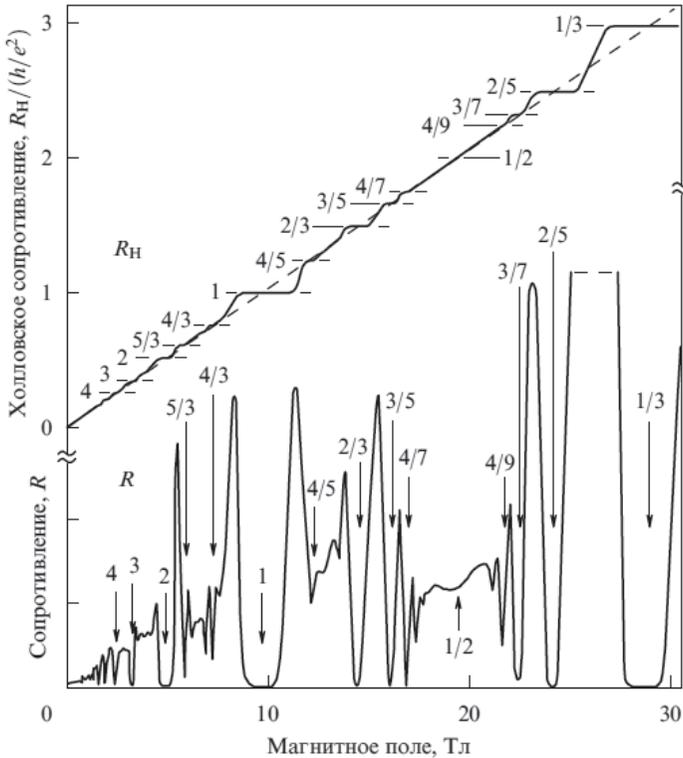


Рис. 2. Зависимость компонент тензора сопротивления от магнитного поля, измеренная на модулированных двумерных гетероструктурах GaAs/AlGaAs с высокой подвижностью. Наблюдается множество состояний с дробным фактором заполнения. Штриховой линией показана классическая магнитополевая зависимость холловского сопротивления

Вместо этого они представляют собой новые сущности, известные как энионы с дробной статистикой. В более сложных дробных состояниях даже это описание не является корректным: результирующие объекты оказываются неабелевыми энионами и являются физической реализацией квантовой сцепленности [9].

ДКЭХ как многочастичный эффект представляет собой одну из самых сложных теоретических задач. Проблема заключается

в том, что основное состояние системы в режиме ДКЭХ не может быть получено по теории возмущений как малая поправка к основному состоянию не взаимодействующей системы. На данный момент существует обширная научная литература, посвященная теоретическим и экспериментальным (преимущественно транспортным) исследованиям ДКЭХ. Почти все эти исследования в качестве основного объекта сосредотачиваются на краевых состояниях в режиме ДКЭХ и на возможном соответствии свойств состояний на краю и внутри, так сказать, в «объеме» двумерного объекта. До известной степени этот подход себя исчерпал, и в научном сообществе не ожидается каких-либо новых прорывных результатов от исследования транспортных характеристик двумерных систем в режиме ДКЭХ. Именно по этой причине интерес к ДКЭХ, несмотря на отсутствие микроскопической теории этого удивительного явления, начал угасать. Учитывая эти факты, в данной книге мы сосредоточимся на новых экспериментальных результатах, адресующихся непосредственно не к краевым, а к объемным электронным состояниям.

Естественно, такой подход не предполагает транспортных исследований двумерной системы, а на первый план выходят оптические методики зондирования объемных состояний. Мы также дадим краткое введение в физику ДКЭХ, по крайней мере на том теоретическом уровне, который признан большинством исследователей, специализирующихся в этой области знаний. Более того, есть основания утверждать, что существующее подразделение состояний ЦКЭХ и ДКЭХ не совсем корректно. Дело в том, что ЦКЭХ принято рассматривать как существенно одночастичный эффект, а ДКЭХ — как существенно многочастичный. Параметром, разделяющим два эффекта, является отношение кулоновской энергии, приходящейся на один электрон, к одночастичной энергетической щели на уровне Ферми. В случае ЦКЭХ считается, что этот параметр много меньше единицы (отношение кулоновской энергии к циклотронной). В случае ДКЭХ одночастичная щель равна нулю тождественно, поэтому этот параметр стремится к бесконечности. Однако существуют состояния КЭХ, которые иногда относят к ЦКЭХ, а иногда к ДКЭХ. Это холловские ферромагнетики (нечетные состояния ЦКЭХ), в которых отношение кулоновской энергии к одночастичной энергетической щели достигает хоть и большого (много больше единицы), но всегда конечного значения из-за наличия зеemanовской энергии для электронов проводимости. На самом деле физика холловских ферромагнетиков имеет ряд существенных особенностей, которые позволяют классифицировать эти состояния как принципиально отличные от

ЦКЭХ и ДКЭХ. Этой точки зрения будем придерживаться на протяжении всей книги.

Теоретическое понимание дробного квантового эффекта Холла развивалось по нескольким направлениям. Первый подход начинается с основополагающей работы Р. Лафлина и основан на анализе хорошо подобранных пробных волновых функций [10]. Эта теория предсказывает состояния с $\nu = 1/m$, где m — нечетное целое число. Однако вскоре экспериментально были обнаружены состояния, которые не вписывались в это ограничение [11]. Для их объяснения была предложена иерархическая схема, в которой квазичастицы из основного состояния с $\nu = 1/m$ конденсируются в дочернее состояние лафлиновского типа [12–15]. Таким образом, холловские состояния могут быть построены для любого фактора заполнения с нечетным знаменателем. Квазичастицы в этих состояниях подчиняются абелевой дробной статистике. Позднее Д. Джейн заметил, что наиболее часто экспериментально наблюдаемые состояния имеют фактор заполнения $\nu = q/(2qp + 1)$, и предложил концепцию композитных фермионов [16–19]. Согласно ей, электроны в сильном магнитном поле можно аппроксимировать системой композитных фермионов, находящихся в более слабом внешнем магнитном поле и заполняющих целое число $\nu' = p$ уровней Ландау новых квазичастиц с ферми-статистикой [20, 21]. Композитные фермионы представляются как частицы, состоящие из электрона и $2p$ квантов магнитного потока, которые заполняют q «эффективных» уровней Ландау. Было показано, что приближение композитных частиц качественно и полуколичественно верно для нулевого уровня Ландау [22]. Еще одной теорией, использующей подбор волновых функций, является конформная теория поля (СФТ). Она позволила построить неабелевы квантовые холловские состояния [23, 24] и неабелевы спин-синглетные состояния [25]. Также существует альтернативный подход к построению теории ДКЭХ, который заключается в разработке эффективных теорий поля [20, 26–28]. Мы начнем рассмотрение двумерной многоэлектронной задачи с классического решения уравнения Шредингера для одного электрона в магнитном поле и будем продвигаться от одночастичной задачи к ДКЭХ посредством последовательного рассмотрения более простых проблем, связанных с ЦКЭХ и холловскими ферромагнетиками.

2D ЭЛЕКТРОН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1.1. Уровни Ландау

Гамильтониан свободного электрона в присутствии магнитного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m^*}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Для начала заметим, что компоненты π_x и π_y оператора канонического импульса удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\pi_x, \pi_y] = \frac{-i\hbar^2}{l^2}, \quad (1.2)$$

где $l = \sqrt{\hbar/eB}$ — магнитная длина. Используя коммутационное соотношение, так же, как это делается в задаче об одномерном гармоническом осцилляторе, определим лестничные операторы

$$\begin{aligned} a^\dagger &\equiv \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x + i\pi_y) \\ a &\equiv \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x - i\pi_y), \end{aligned} \quad (1.3)$$

так что $[a, a^\dagger] = 1$. Выразив теперь π_x и π_y через лестничные операторы a^\dagger и a , получим гамильтониан в виде

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.4)$$

Как и в случае одномерного гармонического осциллятора, оператор $a^\dagger a$ имеет смысл оператора числа частиц, так что $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$. Действие оператора a^\dagger на собственные состояния гамильтониана увеличивает квантовое число n на единицу, т. е.

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.5)$$

Аналогично

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.6)$$

так что для основного состояния с $n=0$ выполняется $a|0\rangle=0$. Отсюда можно получить соотношение для любого возбужденного состояния системы

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (1.7)$$

Дискретные значения энергии, отвечающие движению частицы в плоскости в однородном магнитном поле B , задаются выражением

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.8)$$

и называются уровнями Ландау. Данные энергетические уровни вырождены. Это можно понять из следующих соображений. Гамильтониан частицы является функцией, которая зависит от пары x и p_x и пары y и p_y канонически сопряженных операторов. С другой стороны, гамильтониан, выраженный через операторы π_x и π_y или a^\dagger и a , зависит лишь от одной пары канонически сопряженных операторов. Поэтому, чтобы полностью описать квантовые состояния системы, необходимо определить еще одну пару канонически сопряженных операторов, которые коммутировали бы с гамильтонианом и, соответственно, снимали вырождение уровней Ландау.

Аналогично тому, как был введен оператор обобщенного импульса частицы в магнитном поле $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, определим

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} \equiv \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

который назовем оператором «псевдоимпульса». Заметим, что оператор $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$, в отличие от $\boldsymbol{\pi}$, зависит от выбора калибровки. Коммутатор $[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y]$ компонент оператора «псевдоимпульса» оказывается калибровочным инвариантом:

$$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = i\frac{\hbar^2}{l_B^2}. \quad (1.10)$$

При этом для коммутаторов других компонент мы получаем выражения

$$\begin{aligned} [\pi_x, \tilde{\pi}_x] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x}, & [\pi_y, \tilde{\pi}_y] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial y}, \\ [\pi_x, \tilde{\pi}_y] &= [\pi_y, \tilde{\pi}_x] = ie\hbar \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Это означает, что нельзя одновременно привести к диагональному виду матрицы операторов $\tilde{\pi}$ и H . К счастью, при выборе симметричной калибровки векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{B}{2} (-y, x, 0) \quad (1.12)$$

все коммутаторы $[\pi_i, \tilde{\pi}_j]$ обнуляются.

Далее можно ввести вторую пару лестничных операторов

$$b = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\tilde{\pi}_x + i\tilde{\pi}_y), \quad b^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\tilde{\pi}_x - i\tilde{\pi}_y), \quad (1.13)$$

так что их коммутатор $[b, b^\dagger] = 1$. Причем в симметричной калибровке данные операторы коммутируют с операторами a и a^\dagger , $[b, a^\dagger] = 0$, и, следовательно, с гамильтонианом, $[b^\dagger, H] = 1$. Тогда собственные значения оператора $b^\dagger b$ удовлетворяют выражению

$$b^\dagger b |m\rangle = m |m\rangle, \quad (1.14)$$

где m — целое число, определяющее кратность вырождения уровней Ландау. Определим основное состояние системы $|0, 0\rangle$ таким образом, что $a|0, 0\rangle = b|0, 0\rangle = 0$. Тогда все возбужденные состояния $|n, m\rangle$ получаются последовательным действием повышающих операторов a^\dagger и b^\dagger на основное состояние:

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle. \quad (1.15)$$

Энергии этих состояний, $H|n, m\rangle = (n + 1/2)|n, m\rangle$, задаются квантовым числом n , а квантовое число m определяет кратность вырождения уровней Ландау.

1.2. Полуклассическая интерпретация вырожденности уровней Ландау

Рассмотрим уравнение движения двумерного электрона в магнитном поле под действием силы Лоренца:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -eB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = eB\dot{x}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\pi_x}{m} = -\omega_c(y - Y), \\ \dot{y} = \frac{\pi_y}{m} = \omega_c(x - X) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Y - \frac{\pi_x}{eB}, \\ x = X + \frac{\pi_y}{eB}, \end{cases} \quad (1.17)$$

где $\omega_c = eB/m$ — циклотронная частота вращения. Обозначим вектором $\mathbf{R} = (X, Y)$ комплексную постоянную интегрирования.

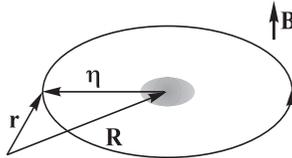


Рис. 1.1. Классическое циклотронное движение электрона в магнитном поле. \mathbf{R} — радиус-вектор центра циклотронной орбиты, $\boldsymbol{\eta}$ — вектор радиуса орбиты

С точки зрения физики он задает радиус-вектор центра циклотронной орбиты (рис. 1.1). Далее, используя симметричную калибровку векторного потенциала

$$e\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{eB}{2}(-y, x) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}), \quad (1.18)$$

выразим координаты частицы через $\boldsymbol{\pi}$ и $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tilde{\pi}_x}{eB} - \frac{\pi_x}{eB}, \\ x &= -\frac{\tilde{\pi}_y}{eB} + \frac{\pi_y}{eB}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Сравнивая (1.17) и (1.19), находим

$$X = -\frac{\tilde{\pi}_y}{eB}, \quad Y = \frac{\tilde{\pi}_x}{eB}. \quad (1.20)$$

Это означает, что в симметричной калибровке компоненты «псевдоимпульса» имеют смысл координат центра циклотронной орбиты. Соответствующие операторы, как было показано ранее, коммутируют с гамильтонианом, а также $[X, Y] = i\ell_B^2$. Отсюда получаем соотношение неопределенности $\Delta X \Delta Y = 2\pi\ell_B^2$ (выделено серым цветом на рис. 1.1). Можно посчитать число возможных состояний, приходящихся на площадь S , как

$$\frac{S}{\Delta X \Delta Y} = \frac{S}{2\pi\ell_B^2} = n_B S = N_B, \quad (1.21)$$

где $n_B = 1/(2\pi l_B^2) = eB/h$. Итак, приходим к выводу, что число состояний на каждом уровне Ландау равняется числу квантов магнитного потока N_B , пронизывающих образец площадью S . В следующем параграфе мы получим этот результат более строго, рассмотрим волновые функции электрона на уровне Ландау.

Аналогично тому, как был введен оператор координаты центра циклотронной орбиты, определим оператор радиуса циклотронной орбиты $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$ и, пользуясь (1.17), выразим его через оператор обобщенного импульса $\boldsymbol{\pi}$:

$$\eta_x = \frac{\pi_y}{eB}, \quad \eta_y = -\frac{\pi_x}{eB}. \quad (1.22)$$

Заметим, что коммутатор $[\eta_x, \eta_y] = [\pi_x, \pi_y]/(eB)^2 = -i\hbar^2 = -[X, Y]$.

До сих пор мы обсуждали систему из одной частицы. Пусть теперь система состоит из N_{el} электронов при нулевой температуре, так что уровни Ландау заполняются согласно принципу Паули. Тогда удобно ввести безразмерную величину

$$\nu = \frac{N_{el}}{N_B} = \frac{n_{el}}{n_B} = \frac{\hbar n_{el}}{eB}, \quad (1.23)$$

которая называется фактором заполнения. Целая часть ν определяет число полностью заполненных уровней Ландау. Обратим внимание, что фактор заполнения можно варьировать, изменяя либо число частиц в системе, либо величину магнитного поля. При фиксированном количестве электронов уменьшение магнитного поля соответствует увеличению фактора заполнения.

1.3. Нулевой уровень Ландау

В данном параграфе мы рассмотрим нижний уровень Ландау с $n = 0$. Понижающий оператор выражается как

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} (\pi_x - i\pi_y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} (p_x - ip_y + e(A_x - iA_y)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{eB}{2} (-y - ix) \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Положение частицы на плоскости удобно описывать с помощью комплексных чисел, поэтому введем

$$z \equiv x - iy, \quad \bar{z} \equiv x + iy. \quad (1.25)$$

Правила дифференцирования определим следующим образом:

$$\partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.26)$$

Тогда лестничные операторы примут вид

$$\begin{aligned} a &= -i\sqrt{2} \left(l_B \bar{\partial} + \frac{z}{4l_B} \right), \\ a^\dagger &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Учитывая, что $a|n=0, m\rangle = 0$, получаем выражение для волновых функций нижнего уровня Ландау:

$$\Psi_{n=0}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-|z|^2/(4l_B^2)}, \quad (1.28)$$

где $f(z)$ — произвольная голоморфная функция, т. е. $\bar{\partial}f(z) = 0$, $|z|^2 = z\bar{z}$. Лестничные операторы b и b^\dagger также можно выразить через комплексные координаты:

$$\begin{aligned} b &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right), \\ b^\dagger &= -i\sqrt{2} \left(l_B \bar{\partial} - \frac{z}{4l_B} \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Учитывая, что $b|n, m=0\rangle = 0$, получаем следующий вид волновых функций с $m=0$:

$$\Psi'_{m=0}(z, \bar{z}) = g(\bar{z}) e^{-|z|^2/(4l_B^2)}, \quad (1.30)$$

где $g(\bar{z})$ — антиголоморфная функция, т. е. $\partial g(\bar{z}) = 0$. Отсюда делаем вывод, что предэкспоненциальный множитель в волновой функции $\Psi_{n=0, m=0}(z, \bar{z})$ должен быть постоянной, определенной нормировкой:

$$\Psi_{n=0, m=0}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} e^{-|z|^2/(4l_B^2)}. \quad (1.31)$$

Используя (1.15), получим волновые функции для нижнего уровня Ландау с произвольным m :

$$\begin{aligned} \Psi_{n=0, m=0}(z, \bar{z}) &= \frac{i^m \sqrt{2^m}}{\sqrt{2\pi l_B^2} m!} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right)^m e^{-|z|^2/(4l_B^2)} = \\ &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi l_B^2} m!} \left(\frac{z}{\sqrt{2} l_B} \right)^m e^{-|z|^2/(4l_B^2)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Выражения для волновых функций на остальных уровнях Ландау имеют более сложный вид и описываются с помощью полиномов Лагерра $L_n^k(x)$.

Теперь сосчитаем число электронов на каждом уровне Ландау. Для этого вначале вычислим среднее значение оператора координаты центра циклотронной орбиты в состояниях $|n=0, m\rangle$. Используя соотношения (1.13) и (1.20), выразим компоненты оператора координаты центра циклотронной орбиты через лестничные операторы b и b^\dagger :

$$X = \frac{l_B}{i\sqrt{2}}(b^\dagger - b), \quad Y = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^\dagger + b). \quad (1.33)$$

Учитывая правила действия лестничных операторов на состояния $|n, m\rangle$:

$$b^\dagger |n, m\rangle = \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle, \quad b |n, m\rangle = \sqrt{m} |n, m-1\rangle, \quad (1.34)$$

получим, что $\langle \mathbf{R} \rangle \equiv \langle n=0, m | \mathbf{R} | n=0, m \rangle = 0$. С другой стороны,

$$\langle |\mathbf{R}| \rangle = \langle \sqrt{X^2 + Y^2} \rangle = l_B \langle \sqrt{2b^\dagger b + 1} \rangle = l_B \sqrt{2m+1}. \quad (1.35)$$

Пусть образец имеет форму диска с радиусом R_{\max} . Состояние с максимальным квантовым числом m (назовем его M) имеет радиус $l_B \sqrt{2M+1} = R_{\max}$. Тогда площадь образца $S = \pi l_B^2 (2M+1)$, и число состояний, приходящееся на эту площадь, в термодинамическом пределе $M \gg 1$

$$\frac{S}{2\pi l_B^2} = n_B S = N_B,$$

что согласуется с полученным ранее результатом (1.21), основанным на соотношении неопределенностей. То есть на уровне Ландау на каждое одночастичное состояние приходится один квант магнитного потока, пронизывающий область, занимаемую электронами. С ростом магнитного поля растет и расстояние между уровнями Ландау, и емкость уровней Ландау. В поле 10 Тл кратность вырождения уровня Ландау равна $2,4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Именно макроскопическое вырождение уровня Ландау создает возможность для уникальных физических явлений в пределе сильного магнитного поля.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

2.1. Понятие несжимаемости и ЦКЭХ

Начнем рассмотрение квантового эффекта Холла с интуитивно более понятного целочисленного случая. Мы увидим, что для КЭХ важно наличие щели подвижности над основным состоянием. Другими словами, система должна быть несжимаемой. Что означает, что система несжимаема? Коэффициент сжимаемости для двумерной системы при нулевой температуре определяется выражением

$$\kappa \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}. \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\kappa} = -V \frac{\partial P}{\partial V} = V \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}. \quad (2.2)$$

Учитывая, что $E = N\varepsilon(n)$, где $n = N/S$ — число частиц на единицу площади S , и химический потенциал $\mu = \partial E / \partial N = d(n\varepsilon(n))/dn$, получим

$$\frac{1}{\kappa} = n^2 \frac{d\mu}{dn}. \quad (2.3)$$

На рис. 2.1 показана зависимость химического потенциала двумерного газа невзаимодействующих бесспиновых электронов от поверхностной плотности электронов при нулевой температуре и фиксированном значении магнитного поля. При нулевой температуре химический потенциал определяет изменение энергии основного состояния при добавлении одной частицы в систему. Следовательно, в случае системы свободных электронов в магнитном поле, когда уровень Ландау полностью заполняется (ν — целое число), μ скачкообразно меняется на величину $\hbar\omega_c$. Когда химический потенциал находится в таком зазоре, $\kappa = 0$, и система несжимаема.

Представим теперь, что химический потенциал лежит в щели подвижности, и пусть по какой-то причине система позволяет нам

менять магнитное поле B при фиксированном μ таким образом, что отношение B/n остается постоянным. Поскольку $\sigma_{x,y} \propto n/B$, это означает, что в конечном интервале магнитного поля B будет наблюдаться плато с постоянной $\sigma_{x,y}$.

Существование плато объясняется неидеальностью двумерной системы из-за наличия неоднородностей, например примесей. Если

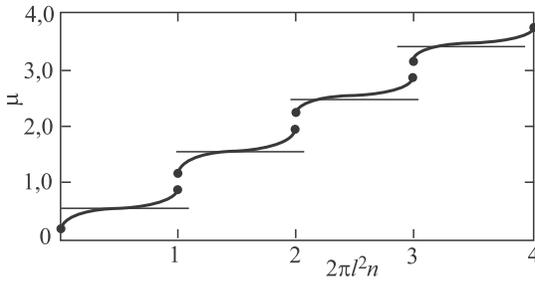


Рис. 2.1. Зависимость химического потенциала двумерного газа невзаимодействующих электронов (в единицах $\hbar\omega_c$) от поверхностной плотности электронов при нулевой температуре и фиксированном значении магнитного поля (из работы [29])

в идеальном двумерном газе в магнитном поле плотность состояний представляет собой набор дельта-пиков и каждый уровень N -кратно вырожден, то беспорядок снимает вырождение и вызывает уширение уровней Ландау в энергетические зоны. Электроны находятся в некотором случайном потенциале V ($V \ll \hbar\omega_c$), так что в одних местах двумерного слоя потенциальная энергия электрона становится больше, а в других — меньше. Движение электрона при наличии такого «рельефа» можно рассматривать как циклотронное вращение электрона и одновременное движение координаты ведущего центра циклотронной орбиты по эквипотенциальной линии (рис. 2.2а). Движение по замкнутым

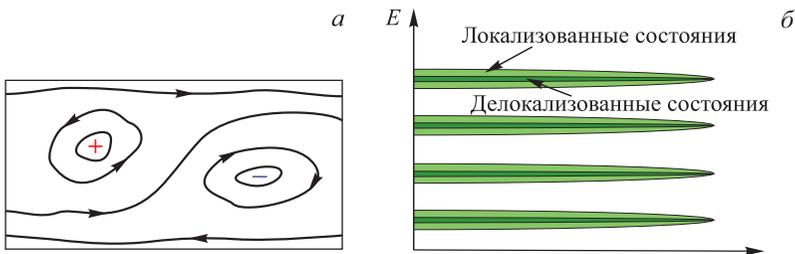


Рис. 2.2. Локализация состояний (а); плотность состояний при наличии беспорядка (б)

эквивалентными линиям соответствует локализованным состояниям, которые не участвуют в переносе заряда через систему. Они находятся на хвостах уширенных уровней Ландау (рис. 2.2б). Наоборот, состояния, которые находятся в середине уровня Ландау, являются подвижными. Итак, благодаря случайному потенциалу возникают дополнительные возможности для заполнения состояний после того, как основная часть уровня Ландау была заполнена. Но так как локализованные состояния не вносят вклад в ток, наблюдаются плато сопротивления Холла в некотором интервале магнитного поля.

Все состояния на границах образца являются подвижными, и через систему может протекать бездиссипативный краевой ток.

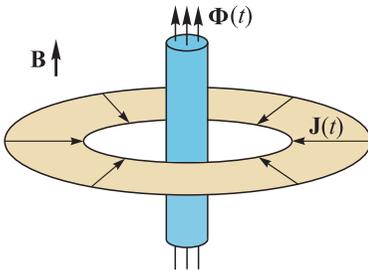


Рис. 2.3. Схематичное объяснение квантования холловской проводимости в диске Корбино согласно работе Р. Лафлина [2]. При введении дополнительного магнитного потока $\Phi(t)$ возникает ЭДС индукции, и, соответственно, радиальный ток $\mathbf{J}(t)$

Причем краевые состояния являются хиральными, т.е. на одной стороне образца частицы движутся в одном направлении, а на другой стороне — в противоположном. Они обладают интересными физическими свойствами, особенно в режиме ДКЭХ [3, 30–32].

Теперь зададимся вопросом, почему холловская проводимость квантуется с такой хорошей точностью. Впервые ответ на этот вопрос предложил Р. Лафлин, основываясь на калибровочной инвариантности, из которой следует, что добавление кванта магнитного потока не изменяет энергетический спектр носителей, а приводит лишь к возбуждению исходной системы [2]. Понятно,

что квантование холловской проводимости не должно зависеть от геометрии образца. Поэтому рассмотрим двумерную электронную систему в виде диска Корбино, как показано на рис. 2.3. Помимо магнитного поля \mathbf{B} , которое пронизывает весь образец, пропустим дополнительный магнитный поток Φ через центр кольца. Введение дополнительного потока Φ — это локальная калибровка, которая влияет на квантовые состояния электронов.

Будем постепенно увеличивать величину магнитного потока Φ от нуля до $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ за время $t \gg 1/\omega_c$. При этом возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\Phi_0}{t}. \quad (2.4)$$

Пусть за это время с внутреннего радиуса кольца к внешнему переносится n электронов, тогда радиальный ток равен $I_r = -ne/t$. Отсюда получаем выражение для холловского сопротивления:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathcal{E}}{I_r} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{n}. \quad (2.5)$$

В конце этой главы отметим, что при объяснении ЦКЭХ не было необходимости принимать во внимание взаимодействие между электронами. Достаточно было рассмотреть движение одного электрона в магнитном поле и учесть влияние случайного потенциала, вызванного наличием беспорядка в системе. Далее мы рассмотрим квантово-холловский ферромагнетик при $\nu = 1$ и состояния с дробными факторами заполнения, для понимания которых невозможно обойтись без учета электрон-электронного взаимодействия.

ХОЛЛОВСКИЕ ФЕРРОМАГНЕТИКИ

В двумерной электронной системе в режиме КЭХ при факторе заполнения $\nu = 1$ и других нечетных целочисленных значениях электронного фактора заполнения наблюдается магнитный порядок. Система становится необычным, так называемым, «странствующим» ферромагнетиком. Учет спина двумерных электронов приводит, во-первых, к удвоению числа состояний на каждом уровне Ландау, а во-вторых, к зеемановскому расщеплению уровней $E_z = g^* \mu_B H$ (g^* — эффективный g -фактор, μ_B — магнетон Бора). Для свободного электрона $g = 2$ и энергия зеемановского расщепления совпадает с циклотронной энергией $\hbar\omega_c$, как показано на рис. 3.1а. Поэтому, если пренебречь электрон-электронным

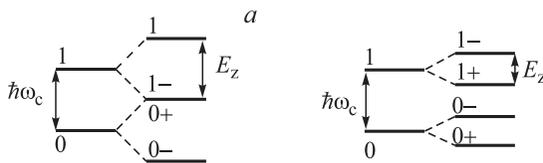


Рис. 3.1. Уровни Ландау свободного электрона (плюс (минус) соответствует спин вверх (вниз)). Так как g -фактор равен 2, величина зеемановского расщепления в точности равна расстоянию между уровнями Ландау $\hbar\omega_c$ (а). Уровни энергии электрона в GaAs. Эффективная масса электрона мала и $g \approx -0,4$, поэтому вырождение частично снимается (б)

взаимодействием, при низких температурах и факторах заполнения $\nu < 1$ система должна была бы находиться в полностью спин-поляризованном состоянии (т.е. ферромагнитном). Однако оказывается, что в GaAs-гетероструктурах это предположение ошибочно по двум причинам. Первая причина заключается в том, что эффективная масса электрона в зоне проводимости GaAs $m^* = 0,068$, за счет чего циклотронное расщепление увеличивается в $m/m^* \sim 14$ раз. Во-вторых, из-за спин-орбитального взаимодействия g -фактор уменьшается до $-0,44$. Следовательно, энергия зеемановского расщепления оказывается приблизительно в 70 раз меньше циклотронного (рис. 3.1б).

Квантово-холловский ферромагнетик является по сути тестовой системой для исследования влияния кулоновского взаимодействия на спектр спиновых возбуждений, поскольку соответствие между экспериментальными данными и теоретическими расчетами при описании спектра возбужденных состояний оказывается настолько точным, что часто находится в пределах экспериментальной погрешности [33]. Многочастичное кулоновское взаимодействие при этом включается в теорию непосредственно из первых принципов, без использования каких-либо модельных подходов (в отличие от теории обычных «классических» магнетиков). Поэтому, например, исследование неравновесной спиновой системы в квантово-холловском ферромагнетике является наиболее прямым методом оценки влияния многочастичных кулоновских корреляций в ДЭС на спиновую релаксацию.

В теории квантово-холловского ферромагнетика ($\nu = 1$), как и в случае обычного обменного ферромагнетика, описываемого, например, гамильтонианом Гейзенберга, отклонение спиновой системы от равновесия может быть микроскопически представлено как возникновение спиновых возбуждений. Этими возбуждениями могут быть, например, спиновые волны (или блоховские магноны в обменном ферромагнетике [34]), уменьшающие на единицу как полный спин системы S , так и компоненту S_z , направленную вдоль оси намагниченности. В то же время, если волновой вектор спиновой волны строго равен нулю, то такое возбуждение становится качественно иным: оно по-прежнему приводит к изменению на единицу компоненты S_z , но при этом сохраняет полный спин. Подобное свойство является общим для всех типов магнетиков и не зависит от того, каким образом описывается взаимодействие: с помощью полного кулоновского гамильтониана, или модельно — с помощью гамильтониана Гейзенберга. Оператор рождения спиновой волны при $\mathbf{k} \equiv 0$ эквивалентен просто полному оператору $S_- = S_x - iS_y$ [34], а само возбуждение осуществляет переход в собственное состояние системы с прежней орбитальной волновой функцией, но с глобально «отклоненным» от оси намагниченности спином, поскольку теперь $S > S_z$.

В чисто электронной квантово-холловской системе простейшие возбуждения сводятся к электронным магнитоэксцитонам, состоящим из эффективной дырки (вакансии на заполненном уровне Ландау) и электрона, возбужденного на более высокий уровень или на тот же уровень, но с противоположным спином. Этот последний случай как раз и соответствует возбуждению спиновой волны, т. е. при ненулевом волновом векторе он приводит к уменьшению на единицу как полного спина электронной системы, так

и его проекции на направление магнитного поля. Возникновение же спиновой волны со строго нулевым импульсом аналогичным образом изменяет проекцию спина на направление магнитного поля, но сохраняет полный спин электронной системы. Такой «нулевой» спиновый магнитоэкситон соответствует элементарному возбуждению, описываемому глобальное отклонение полного спина электронной системы относительно направления магнитного поля на некоторый угол. При макроскопически большом числе возбужденных «нулевых» спиновых магнитоэкситонов или даже при суперпозиции состояний с разным числом «нулевых» магнитоэкситонов орбитальное состояние квантово-холловской системы не меняется, но макроскопически состояние представляет собой голдстоуновскую моду — отклонение полного спина на некоторый угол от направления \hat{z} [35] («нулевые» спиновые магнитоэкситоны будем в дальнейшем называть голдстоуновскими экситонами). В обоих случаях процесс релаксации спина может быть описан в терминах аннигиляции спиновых магнитоэкситонов. В экспериментах, связанных с созданием неравновесных систем оптическими методами, реализуется ситуация, когда полный спин электронной системы всегда направлен вдоль магнитного поля, но его величина отличается от спина равновесной системы. Число голдстоуновских экситонов тогда, очевидно, пренебрежимо мало по сравнению с общим числом спиновых (фактически, «ненулевых» спин-волновых) магнитоэкситонов в системе. Процесс релаксации или аннигиляции спин-волновых магнитоэкситонов определяется спин-орбитальными взаимодействиями Рашбы и Дрессельхауза. Кроме того, на эти процессы оказывает значительное влияние длинноволновый случайный потенциал, всегда присутствующий в двумерных системах, поэтому следует разделять задачи исследования релаксации локализованных и делокализованных спинов. Теоретические оценки времени релаксации спиновых возбуждений в квантово-холловском ферромагнетике варьируются от сотен наносекунд до десятков микросекунд. Кроме того, до недавнего времени эти оценки заведомо расходились с имевшимися косвенными экспериментальными данными, которые указывали на времена релаксации, не превышающие 10 нс. Столь серьезное различие экспериментальных и теоретических результатов может быть связано, прежде всего, с тем, что прямого измерения времен спиновой релаксации не производилось, а в упомянутых выше экспериментах речь идет о времени сбоя фазы спиновой прецессии, которое может быть значительно короче времени энергетической релаксации.

3.1. Обменное взаимодействие

Как было показано ранее, ЦКЭХ можно объяснить формированием уровней Ландау для свободных электронов в магнитном поле. В холловских ферромагнетиках или нечетных состояниях ЦКЭХ важную роль играет межэлектронное взаимодействие [36]. В дальнейшем рассмотрение нечетных целочисленных состояний ЦКЭХ будет вестись на примере холловского ферромагнетика $\nu = 1$.

В ферромагнитном состоянии при нулевой температуре все спины параллельно направлены и спиновая часть волновой функции симметрична по отношению к перестановкам:

$$\Psi = \Phi(z_1, \dots, z_N) |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle. \quad (3.1)$$

Следовательно, пространственная часть Φ волновой функции должна быть антисимметричной и стремиться к нулю при сближении двух частиц. Для фактора заполнения $\nu = 1$ [37]:

$$\frac{\langle V \rangle}{N} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{e^2}{\epsilon l} \sim 200K. \quad (3.2)$$

Масштаб кулоновской энергии на два порядка больше зеемановского расщепления, и, соответственно, обменное взаимодействие стабилизирует ферромагнитное состояние. Действительно, при $\nu = 1$ и $T = 0$ основное состояние спонтанно полностью поляризовано даже при стремлении зеемановской энергии к нулю. Обычные ферромагнетики, такие как железо, как правило, только частично поляризованы, так как повышение уровня Ферми требует дополнительных затрат кинетической энергии. Напротив, холловский ферромагнетик полностью поляризован, поскольку в нем кинетическая энергия «вымораживается» в дискретные уровни Ландау, и поэтому за возникающую магнитную поляризацию электронного газа не приходится «расплачиваться» кинетической энергией. Основное состояние холловского ферромагнетика описывается детерминантом Слэтера, построенного на одноэлектронных волновых функциях, что в точности соответствует волновой функции Лафлина для дробного состояния $1/m = 1$ с $m = 1$ (именно по этой причине холловский ферромагнетик иногда относят к дробной иерархии ДКЭХ на нулевом уровне Ландау).

3.2. Спиновые волны

Рассмотрим низкоэнергетические возбуждения в магнитоупорядоченных средах — спиновые волны, представляющие собой колебания локальной намагниченности. Согласно модели Гейзенберга

гамильтониан для N локальных магнитных моментов в непроводящем ферромагнетике имеет вид

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j - \Delta \sum_j S_j^z = \\ &= -J \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \right\} - \Delta \sum_j S_j^z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Основным состоянием при $J > 0$ (J — обменный интеграл) является ферромагнитное состояние с полным спином $S = N/2$. Выберем координаты в спиновом пространстве так, чтобы $S_z = N/2$. Поскольку состояние полностью спин-поляризовано, в H нет членов, отвечающих за переворот спина. В отсутствие зеемановского расщепления получаем

$$H | \uparrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow \rangle = -\frac{J}{4} N_b | \uparrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow \rangle, \quad (3.4)$$

где N_b — число соседних связей (здесь $\hbar = 1$). Также существует $2S + 1 = N + 1$ других состояний с таким же полным спином, которые будут вырожденными в отсутствие зеемановского расщепления. Эти состояния получаются последовательными действиями понижающего оператора полного спина:

$$S^- \equiv \sum_{j=1}^N S_j^- \quad (3.5)$$

$$S^- | \uparrow \uparrow \uparrow \dots \rangle = | \downarrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow \rangle + | \uparrow \downarrow \uparrow \dots \uparrow \rangle + | \uparrow \uparrow \downarrow \dots \uparrow \rangle + \dots \quad (3.6)$$

Можно показать, что возбужденные состояния с одним магнетон (квантом спиновой волны) получаются в результате действия оператора

$$S_{\mathbf{q}}^- = \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_j} S_j^-, \quad (3.7)$$

где \mathbf{q} лежит внутри зоны Бриллюэна и является волновым вектором магнетонов. Обозначим эти состояния как

$$\Psi_{\mathbf{q}} = S_{\mathbf{q}}^- \Psi_0, \quad (3.8)$$

где Ψ_0 — основное состояние. Поскольку в этих состояниях имеется один перевернутый спин, то поперечная компонента гейзенберговского взаимодействия отвечает за перемещение перевернутого

спина

$$H\Psi_{\mathbf{q}} = \left(E_0 + \Delta + \frac{Jz}{2}\right)\Psi_{\mathbf{q}} - \frac{J}{2} \sum_{\delta} \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j} S_{j+\delta}^- \Psi_0 \quad (3.9)$$

$$\Psi_{\mathbf{q}} = S_{\mathbf{q}}^- \Psi_0, \quad (3.10)$$

где z — координационное число, δ суммируется по соседним векторам решетки, а энергия магнона равна

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} \equiv \frac{Jz}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{z} \sum_{\delta} e^{-i\mathbf{q}\delta} \right\} + \Delta. \quad (3.11)$$

При малых \mathbf{q} дисперсия магнона квадратична, и в случае двумерной квадратной решетки имеет вид

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} \sim \frac{Ja^2}{4} q^2 + \Delta, \quad (3.12)$$

где a — постоянная решетки. В отличие от ферромагнетика, в случае антиферромагнетика дисперсия спиновых волн оказывается линейной.

Теперь получим дисперсию спиновых волн в холловском ферромагнетике, основное состояние которого задается уравнением (3.1) с

$$\Phi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j) e^{-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2}. \quad (3.13)$$

Для нахождения возбужденных состояний нам нужно найти аналог уравнения (3.8). Преобразование Фурье оператора понижения спина для непрерывной системы имеет вид

$$S_{\mathbf{q}}^- \equiv \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} S_j^-,$$

где \mathbf{r}_j — оператор координаты для j -й частицы. Проекция на нижний уровень Ландау оператора понижения спина (см. Приложение А [37]) имеет вид

$$\bar{S}_q^- = e^{-\frac{1}{4}|q|^2} \sum_{j=1}^N \tau_q(j) S_j^-, \quad (3.14)$$

где q — комплексное число, представляющее безразмерный волновой вектор $\mathbf{q}l$, и $\tau_q(j)$ — оператор магнитной трансляции j -й частицы. Коммутатор этого оператора с гамильтонианом кулоновского взаимодействия равен

$$\begin{aligned} [H, \bar{S}_q^-] &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} v(k) [\bar{\rho}_{-k} \bar{\rho}_k, \bar{S}_q^-] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} v(k) \left\{ \bar{\rho}_{-k} [\bar{\rho}_k, \bar{S}_q^-] + [\bar{\rho}_{-k}, \bar{S}_q^-] \bar{\rho}_k \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Далее подействуем им на полностью поляризованное основное состояние $|\psi\rangle$. В этом состоянии не существует возмущений плотности, следовательно, можно без каких-либо приближений отбросить второе слагаемое выше и заменить первое на

$$[H, \bar{S}_q^-] |\psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} v(k) [\bar{\rho}_{-k} [\bar{\rho}_k, \bar{S}_q^-]] |\psi\rangle. \quad (3.16)$$

В итоге получаем

$$[H, \bar{S}_q^-] |\psi\rangle = \varepsilon_q \bar{S}_q^- |\psi\rangle, \quad (3.17)$$

где

$$\varepsilon_q \equiv 2 \sum_{k \neq 0} e^{-\frac{1}{2}|k|^2} v(k) \sin^2\left(\frac{1}{2}q \wedge k\right). \quad (3.18)$$

Поскольку $|\psi\rangle$ является собственным вектором H , то $\bar{S}_q^- |\psi\rangle$ является точным возбужденным состоянием H с энергией ε_q . При наличии зеемановского расщепления $\varepsilon_q \rightarrow \varepsilon_q + \Delta$.

При малых q дисперсия магнонов квадратична:

$$\varepsilon_q \sim Aq^2, \quad (3.19)$$

где

$$A \equiv \frac{1}{4} \sum_{k \neq 0} e^{-\frac{1}{2}|k|^2} v(k) |k|^2. \quad (3.20)$$

При больших q можно заменить $\sin^2 x$ его средним значением $1/2$ и получить

$$\varepsilon_q \sim \sum_{k \neq 0} v(k) e^{-\frac{1}{2}|k|^2}. \quad (3.21)$$

Таким образом, энергия выходит на постоянное значение при $q \rightarrow \infty$, как показано на рис. 3.2.

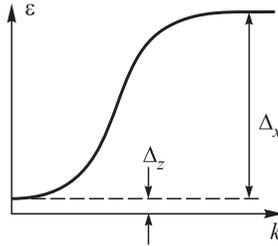


Рис. 3.2. Схематичное изображение дисперсии спиновых волн холловского ферромагнетика (из работы [37]). При малых значениях k имеется зазор, равный зеемановскому расщеплению Δ_z . При больших волновых векторах энергия насыщается в масштабе энергии кулоновского обмена $\Delta_x + \Delta_z \sim 100$ К

3.3. Эффективное действие

Полезно попытаться воспроизвести полученные в предыдущем параграфе микроскопические результаты для дисперсии спиновых волн в рамках теории эффективного поля. Пусть $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ — векторное поле, подчиняющееся условию $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$, которое описывает локальную ориентацию параметра порядка (намагниченность). Поскольку кулоновские силы не зависят от спина, потенциальная энергия зависит не от \mathbf{m} , а только от его производных:

$$U = \frac{1}{2} \rho_s \int d^2 r \partial_\mu m^\nu \partial_\mu m^\nu - \frac{1}{2} n \Delta \int d^2 r m^z, \quad (3.22)$$

где ρ_s — феноменологическая «спиновая жесткость», которая в двумерном случае имеет размерность энергии, а $n \equiv v/(2\pi l^2)$ — плотность частиц. Согласно симметричным соображениям, выражение для энергии (кроме зеемановского члена) должно быть инвариантным относительно вращения \mathbf{m} . Кроме того, в отсутствии беспорядка оно должно быть трансляционно инвариантным. Выражение (3.22) удовлетворяет данным симметричным требованиям. Единственный член с нулевой производной и удовлетворяющий симметрии — это тот, который везде равен единице. Существуют члены с большим количеством производных, но они лишены физического смысла при больших длинах волн (такие члены обсуждаются в работе [38]).

Чтобы понять, каким образом производные по времени входят в эффективное действие, вспомним, что спины подчиняются уравнению прецессии первого порядка (по времени) под влиянием локального обменного поля*).

Рассмотрим в качестве игрушечной модели один спин во внешнем магнитном поле с гамильтонианом

$$H = -\hbar\Delta^\alpha S^\alpha. \quad (3.23)$$

Лагранжиан, описывающий эту игрушечную модель, должен содержать производную по времени первого порядка и поэтому имеет вид

$$\mathcal{L} = \hbar S \{ -\dot{m}^\mu \mathcal{A}[\mathbf{m}] + \Delta^\mu m^\mu + \lambda(m^\mu m^\mu - 1) \}, \quad (3.24)$$

где $S = 1/2$ — спин, λ — множитель Лагранжа. Неизвестный вектор \mathcal{A} можно определить, потребовав, чтобы он соответствовал правильному уравнению прецессионного движения. Уравнение прецессии имеет вид

$$\frac{d}{dt} S^\mu = \frac{i}{\hbar} [H, S^\mu] = -i\Delta^\alpha [S^\alpha, S^\mu] = \varepsilon^{\alpha\mu\beta} \Delta^\alpha S^\beta, \quad (3.25)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{\Delta} \times \mathbf{S}, \quad (3.26)$$

что соответствует прецессии против часовой стрелки вокруг направления магнитного поля.

Можно получить то же уравнение движения из уравнения Эйлера–Лагранжа для лагранжиана в уравнении (3.24)

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{m}^\mu} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta m^\mu} = 0, \quad (3.27)$$

которое можно переписать в виде

$$\Delta^\mu + 2\lambda m^\mu = F^{\mu\nu} \dot{m}^\nu, \quad (3.28)$$

где

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu, \quad (3.29)$$

и ∂_μ означает $\frac{\partial}{\partial m^\mu}$. Так как $F^{\mu\nu}$ антисимметричен, то будем искать решение вида

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\mu\nu} m^\alpha. \quad (3.30)$$

*) То есть кулоновская обменная энергия, которая стремится удерживать спины локально параллельными. В модели Хартри–Фока этот член имеет вид $-\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — самосогласованное поле.

Используя это в уравнении (3.28), получим, что

$$\Delta^\mu + 2\lambda m^\mu = \varepsilon^{\alpha\mu\nu} m^\alpha \dot{m}^\nu. \quad (3.31)$$

Умножая обе части уравнения на $\varepsilon^{\gamma\beta\mu} m^\beta$ и используя равенство

$$\varepsilon^{\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\lambda\eta} = \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\eta} - \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\lambda}, \quad (3.32)$$

получаем

$$-(\Delta \times \mathbf{m})^\gamma = \dot{m}^\gamma - m^\gamma (\dot{m}^\beta m^\beta). \quad (3.33)$$

Последний член справа исчезает. Таким образом, мы находим, что наше предположение в (3.30) действительно позволяет уравнению Эйлера–Лагранжа правильно воспроизвести уравнение (3.26).

Уравнение (3.30) эквивалентно

$$\nabla_m \times \mathcal{A}[\mathbf{m}] = \mathbf{m}, \quad (3.34)$$

что указывает на то, что \mathcal{A} — векторный потенциал единичного магнитного монополя, находящегося в центре единичной сферы, как показано на рис. 3.3.

Из $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{c} \dot{x}^\mu A^\mu$ видно, что лагранжиан для одного спина в уравнении (3.24) эквивалентен лагранжиану безмассового

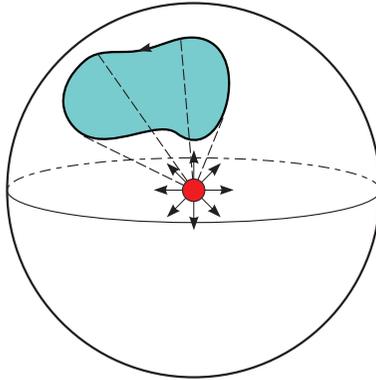


Рис. 3.3. Магнитный монополь в спиновом пространстве. Вектор \mathbf{m} проходит замкнутый путь и набегает фаза Берри, пропорциональная магнитному потоку, проходящему через закрашенную область

объекта с зарядом $-S$ и координатой \mathbf{m} , движущегося по единичной сфере, которая содержит магнитный монополь. Зеemanовский член представляет собой постоянное электрическое поле, действующее на частицу с силой ΔS . Сила Лоренца, обусловленная монополем, заставляет частицу вращаться по сфере на постоянной

«широте». Так как в лагранжиане нет кинетического члена вида $\dot{m}^\alpha \dot{m}^\alpha$, то заряженная частица безмассовая и поэтому находится на нижнем уровне Ландау поля монополя.

Если «заряд» медленно движется по замкнутому пути \mathbf{m} против часовой стрелки в течение промежутка времени $[0, T]$, как показано на рис. 3.3, то квантовая амплитуда

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \mathcal{L}} \quad (3.35)$$

содержит вклад в фазу Берри [39], пропорциональный магнитному потоку, проходящему сквозь область, ограниченную замкнутым путем

$$e^{-iS \int_0^T dt \dot{m}^\nu A^\nu} = e^{-iS \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{m}}. \quad (3.36)$$

Эта фаза чисто геометрическая в том смысле, что она зависит только от геометрии пути, а не от скорости, с которой проходит путь. Используя теорему Стокса и уравнение (3.34), можно записать интеграл по контуру как поверхностный интеграл

$$e^{-iS \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{m}} = e^{-iS \int d\Omega \cdot \nabla \times \mathcal{A}} = e^{-iS\Omega}, \quad (3.37)$$

где $d\Omega = \mathbf{m} d\Omega$ — элемент площади (телесный угол) и Ω — полный телесный угол, образованный контуром, если смотреть из центра монополя. Существует неопределенность относительно того, что считать за внутреннюю, а что за внешнюю область контура. Поскольку полный телесный угол равен 4π , с тем же успехом можно было получить*)

$$e^{+iS(4\pi - \Omega)}. \quad (3.38)$$

Таким образом, фаза неоднозначна, если S не является целым или полуцелым числом. Это является неким «доказательством» того, что величина спина должна быть квантована.

Получив правильный лагранжиан для игрушечной модели, можно обобщить его для задачи со спиновой волной, используя потенциальную энергию в уравнении (3.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\hbar S n \int d^2 r \{ \dot{m}^\mu(\mathbf{r}) \mathcal{A}^\mu[\mathbf{m}] - \Delta m^z(\mathbf{r}) \} - \\ & - \frac{1}{2} \rho_s \int d^2 r \partial_\mu m^\nu \partial_\mu m^\nu + \int d^2 r \lambda(\mathbf{r}) (m^\mu m^\mu - 1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

*) Изменение знака с $+i$ на $-i$ связано с тем, что обход контура меняется от обхода против часовой стрелки на обход по часовой стрелке, если рассматривать область $4\pi - \Omega$ вместо области Ω .

Классическое уравнение движения можно анализировать так же, как и для игрушечной модели, однако здесь необходимо воспользоваться несколько другим подходом. Рассмотрим область с низкой энергией, где все спины ориентированы вдоль оси \hat{z} . Тогда можно считать

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m^x, m^y, \sqrt{1 - m^x m^x - m^y m^y}) \approx \\ &\approx (m^x, m^y, 1 - \frac{1}{2}m^x m^x - \frac{1}{2}m^y m^y). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Выберем «симметричную калибровку»:

$$\mathcal{A} \approx \frac{1}{2}(-m^y, m^x, 0). \quad (3.41)$$

Оставляя только квадратичные члены в лагранжиане, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\hbar S n \int d^2 r \left\{ \frac{1}{2}(\dot{m}^y m^x - \dot{m}^x m^y) - \Delta(1 - \frac{1}{2}m^x m^x - \frac{1}{2}m^y m^y) \right\} - \\ &- \frac{1}{2}\rho_s \int d^2 r (\partial_\mu m^x \partial_\mu m^x + \partial_\mu m^y \partial_\mu m^y). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Далее это можно переписать, определив комплексное поле

$$\psi \equiv m^x + im^y, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -S n \hbar \int d^2 r \left\{ \frac{1}{4} \left[\psi^* \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi - \psi \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^* \right] - \Delta \left(1 - \frac{1}{2} \psi^* \psi \right) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \rho_s \int d^2 r \partial_\mu \psi^* \partial_\mu \psi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Классическое уравнение движения имеет вид уравнения Шредингера

$$+i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\rho_s}{nS} \partial_\mu^2 \psi + \hbar \Delta \psi. \quad (3.45)$$

Его решением являются плоские волны с энергией

$$\varepsilon_k = \hbar \Delta + \frac{\rho_s}{nS} k^2. \quad (3.46)$$

Тогда, пользуясь (3.19), получим

$$\rho_s = \frac{nS}{4} \sum_{k \neq 0} e^{-\frac{1}{2}|k|^2} v(k) |k|^2. \quad (3.47)$$

3.4. Экспериментальные исследования объемных состояний холловского ферромагнетика при $\nu = 1$

После построения микроскопической теории основного состояния холловского ферромагнетика при нулевой температуре и спектра низколежащих возбуждений необходимы экспериментальные подтверждения теоретических расчетов, тем более, что транспортные исследования практически не несут информации о величине многочастичного кулоновского взаимодействия. Естественно поэтому начать обсуждение экспериментальных свойств холловского ферромагнетика с измерения многочастичного обменного взаимодействия в основном состоянии. Это было сделано для холловского ферромагнетика с одним заполненным спиновым подуровнем Ландау $\nu = 1$. Аналогичные измерения могут быть сделаны и для других холловских ферромагнетиков, однако из-за многокомпонентной природы основного состояния интерпретация экспериментальных результатов существенно усложняется. Оказывается, что прямым методом измерения обменного взаимодействия является неупругое рассеяние света (НРС) [40, 41].

Поскольку речь идет о свете, то с большой точностью можно считать, что методом неупругого рассеяния света возбуждаются электронные состояния с практически нулевым обобщенным импульсом. Существуют три основные ветви низколежащих возбуждений в холловском ферромагнетике: 1) спиновый экситон, возбуждение, которое сохраняет орбитальное квантовое число ДЭС и изменяет спиновое квантовое число на единицу; 2) магнитоплазмон (MP), возбуждение, которое изменяет орбитальное квантовое число и сохраняет спиновое квантовое число; 3) циклотронный спин-флип экситон, включающий изменение обоих квантовых чисел. Здесь и далее для удобства изложения циклотронный спин-флип экситон с нулевым обобщенным импульсом будем называть циклотронной спин-флип модой (CSFM). Спиновый экситон с нулевым обобщенным импульсом и магнитоплазмон были тщательно исследованы ранее [42]. Спиновый экситон состоит из возбужденного электрона на верхнем спиновом подуровне Ландау и дырки на нижнем спиновом подуровне Ландау. В длинноволновом пределе ($ql_B \rightarrow 0$) спин-экситоны проявляют коллективный, а в коротковолновом ($ql_B \rightarrow \infty$) — одночастичный характер. При нулевом обобщенном импульсе ($q = 0$) экситон имеет энергию, в точности равную одночастичной зеемановской энергии, тогда как энергия, необходимая для создания хорошо разделенной электрон-дырочной пары ($q \rightarrow \infty$), определяется обменным взаимодействием: $E_{SE}(\infty) = E_Z - \Sigma_0$, где E_Z — зеемановская энергия, $\Sigma_0 < 0$ —

удельная обменная энергия электронов в основном состоянии. Энергию спинового экситона $E_{SE}(\infty)$ можно выразить с помощью обменно-усиленного (эффективного) g -фактора:

$$g_{\text{eff}} = \frac{E_{SE}(\infty)}{\mu_B B} = g_0 + \left| \frac{\Sigma_0}{\mu_B B} \right|. \quad (3.48)$$

В результате транспортных исследований [43–46] был сделан вывод о том, что при $\nu = 1$ активационная щель имеет практически линейную зависимость от магнитного поля, т. е. эффективный g_{eff} является константой, не зависящей от магнитного поля, что, очевидно, противоречит оценкам в рамках приближения Хартри-Фока, согласно которым обменно-усиленное спиновое расщепление должно иметь масштаб энергии кулоновского взаимодействия $E_c \sim \sqrt{B}$ [47, 48]. В итоге полученные экспериментальные результаты, противоречащие теории, стимулировали поиск альтернативных подходов к изучению обменного взаимодействия в квантово-холловских ферромагнетиках и, в конечном счете, привели к проведению серии экспериментов по неупругому рассеянию света на циклотронном спин-флип экситоне [49–53].

Хорошо известно, что однородное электромагнитное излучение, падающее на трансляционно-инвариантную электронную систему, не может возбуждать внутренние степени свободы, которые определяются кулоновским взаимодействием. Поэтому энергия магнитоплазмона с нулевым обобщенным импульсом ($q = 0$) равна энергии одночастичного циклотронного резонанса и не содержит информации о кулоновском взаимодействии (теорема Кона [54]). Аналогично, для системы с вращательной инвариантностью в спиновом пространстве кулоновское взаимодействие не вносит вклад в энергию спинового экситона с нулевым обобщенным импульсом (теорема Лармора [55]). Как оказалось, подобных симметричных ограничений для циклотронного спин-флип экситона нет. Данное возбуждение обладает значительным кулоновским вкладом в энергию даже при $q \rightarrow 0$ [48–50, 56]. Более того, у него слабая дисперсионная зависимость при малых импульсах, и его энергия практически постоянна вплоть до $q \sim 1/l_B$ [49, 56]. Поэтому нарушение трансляционной симметрии на расстояниях, значительно превышающих магнитную длину (например, из-за беспорядка), не влияет на энергию CSFM. Таким образом, изучение CSFM позволяет получить информацию о многочастичном взаимодействии в холловском ферромагнетике.

Обобщим кратко результаты экспериментов. На рис. 3.4а показан типичный спектр неупругого рассеяния света при $\nu = 1$. Он состоит из четырех спектральных особенностей. Две узкие линии

отвечают коллективным возбуждениям: магнитоплазменной моде (MP) с энергией, близкой к циклотронной энергии, и циклотронной спин-флип моде (CSFM) с энергией, равной сумме циклотронной энергии и кулоновского члена $\Delta(q, B)$. Дополнительные,

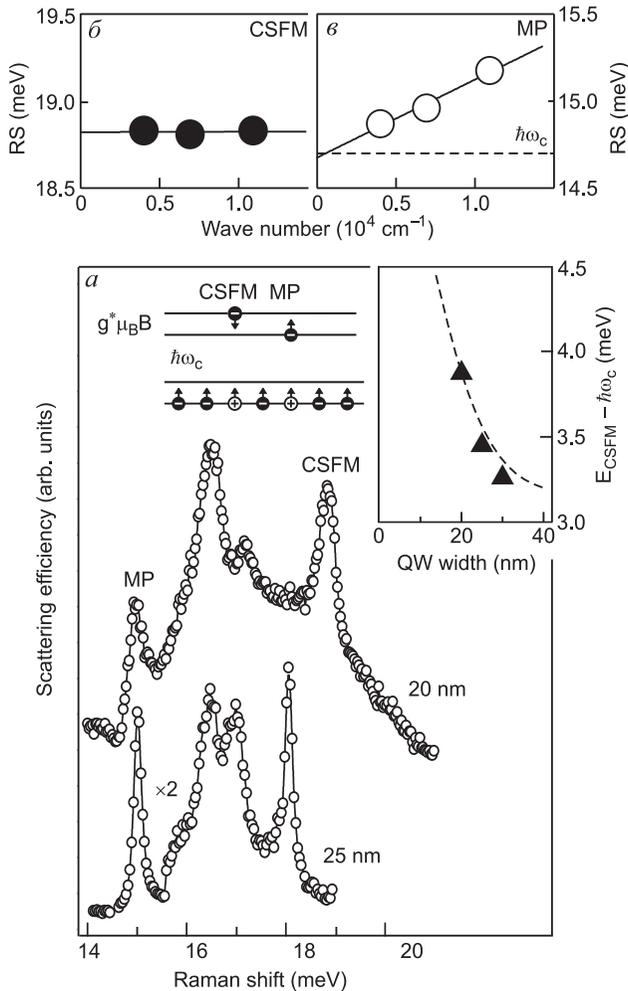


Рис. 3.4. Спектры неупругого рассеяния света при 8,5 Тл ($\nu = 1$) для квантовых ям шириной 20 и 25 нм (а). На вставке приведены экспериментальные значения $\Delta(0, B)$ для трех квантовых ям (сплошные треугольники) и результаты расчета методом Хартри-Фока (штриховая линия). На верхних графиках показана дисперсия рамановского сдвига (RS) в длинноволновом пределе для CSFM (б) и MP (в)

значительно более широкие, спектральные особенности на рис. 3.4а, расположенные между магнитоплазмонной и циклотронной спин-флип модами, обусловлены неупругим рассеянием света на электронных примесных комплексах, и здесь обсуждаться не будут. Энергия МР при $ql_B \rightarrow 0$ может быть получена в приближении RPA [57]:

$$\hbar\omega_{\text{MP}} \approx \sqrt{(\hbar\omega_c)^2 + (\hbar\omega_p)^2}, \quad (3.49)$$

где $\omega_p = (ne^2q/2\epsilon\epsilon_0m_e^*)^{1/2}$ — плазменная, $\omega_c = eB/m^*$ — циклотронная частоты. Энергию циклотронной спин-флип моды можно записать как

$$E_{\text{CSFM}}(q) = \hbar\omega_c + |g_{\text{eff}}\mu_B B| + \Delta(q, B). \quad (3.50)$$

Она состоит из трех вкладов: одночастичной циклотронной энергии, одночастичной зеемановской энергии $g_{\text{eff}}\mu_B B$ ($g_{\text{eff}} = -0,44$) и кулоновского члена $\Delta(q, B)$, равного разнице энергий многочастичного кулоновского взаимодействия между электронами в основном и возбужденном состояниях [49, 56]. Зеемановский член в условиях эксперимента на рис. 3.4 составляет всего 0,16 мэВ, и его вклад в энергию мал по сравнению с остальными членами выражения. Кулоновский член является значительным даже по сравнению с циклотронной энергией (см. вставку к рис. 3.4а), и его можно измерить с высокой точностью.

Как видно из рис. 3.4в, дисперсия МР моды линейна, в то время как энергия CSFM не зависит от волнового вектора. Следовательно, можно заменить $\Delta(q, B)$ в выражении (3.50) на $\Delta(0, B)$. На вставке к рис. 3.4а показано влияние ширины квантовой ямы на энергию CSFM: уменьшение ширины приводит к увеличению $\Delta(0, B)$. Для оценки данного эффекта необходимо фурье-образ кулоновского потенциала $v(q) = e^2/(2\epsilon\epsilon_0q)$ умножить на геометрический форм-фактор, связанный с нелокальностью волновой функции электронов в направлении роста квантовой ямы, содержащей ДЭС: $\bar{v}(q) = v(q)F(q)$. Сам форм-фактор задается выражением

$$F(q) \approx \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' |\psi(z)|^2 |\psi(z')|^2 e^{-q|z-z'|}, \quad (3.51)$$

где $\psi(z)$ — волновая функция в направлении роста структуры. Форм-фактор монотонно уменьшается с q , отражая тот факт, что эффективный кулоновский потенциал $\bar{v}(r) = \int d^2q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \bar{v}(q)/(4\pi^2)$ спадает медленнее, чем $1/r$. Обратим также внимание на то, что

форм-фактор не зависит от магнитного поля. Зависимость $\Delta(0, B)$ от B входит через магнитную длину l_B . В малых магнитных полях, когда $l/l_B \ll 1$ (l — ширина на полувысоте волновой функции), кулоновское взаимодействие эффективно двумерное и имеет корневую зависимость от B . Наоборот, в пределе высоких полей ($l/l_B \gg 1$) энергия взаимодействия имеет логарифмическую зависимость от B (взаимодействие длинных нитей). Согласно экспериментальным данным, представленным на рис. 3.5, действительно

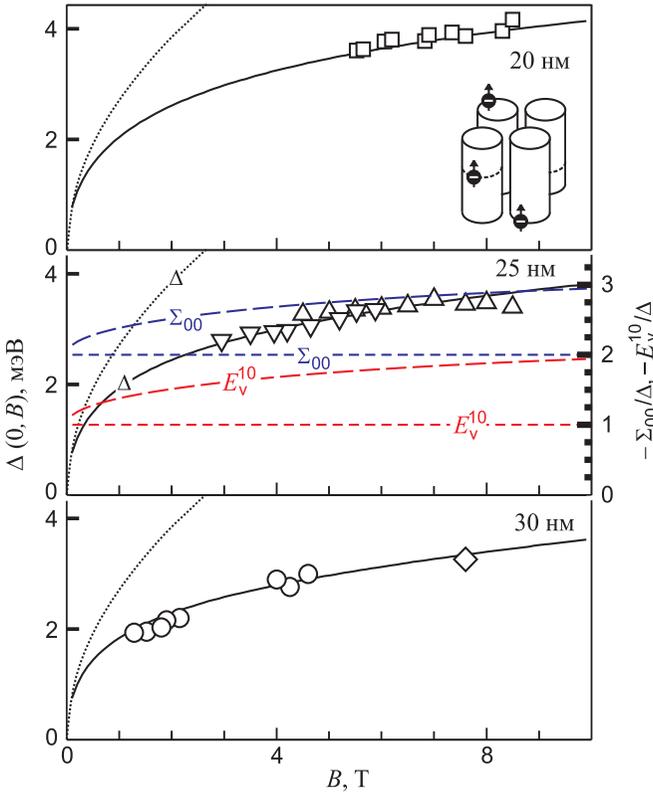


Рис. 3.5. Зависимости $\Delta(0, B)$ от магнитного поля при $\nu = 1$ для квантовых ям с различной шириной. Экспериментальные значения обозначены символами, расчет методом Хартри–Фока с учетом геометрического форм-фактора — сплошной линией, расчет методом Хартри–Фока для идеального двумерного случая — пунктирной линией. На среднем графике также показаны зависимости $-\Sigma_{00}/\Delta(0, B)$ (синие кривые) и $-E_v^{10}/\Delta(0, B)$ (красные кривые) для квантовой ямы шириной 25 нм (длинная штриховая линия) и для идеального двумерного случая (короткая штриховая линия)

но, при высоких магнитных полях $\Delta(0, B)$ растет медленнее, чем \sqrt{B} . Переход между двумя пределами происходит при $l/l_B \sim 2$ и $B \sim 9$ Тл.

Помимо экспериментальной зависимости энергии CSFM от магнитного поля на рис. 3.5 приведены теоретические расчеты, полученные в приближении Хартри–Фока [47, 48] с учетом конечной ширины квантовой ямы. При возбуждении CSFM энергия электронной системы уменьшается на величину обменной энергии взаимодействия между электронами на нулевом уровне Ландау $\Sigma_{00}(B)$:

$$\Sigma_{00}(B) = - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \bar{v}(k) e^{-k^2 l_B^2 / 2}. \quad (3.52)$$

Эта потеря энергии частично компенсируется энергией связи магнитоэкситона, образованного возбужденным электроном на первом уровне Ландау и дыркой на нулевом уровне Ландау:

$$E_v^{10}(0, B) = - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \bar{v}(k) \left[1 - \frac{k^2 l_B^2}{2} \right] e^{-k^2 l_B^2 / 2}. \quad (3.53)$$

Таким образом, эти два члена дают вклад в $\Delta(0, B)$ [49]:

$$\Delta(0, B) = -\Sigma_{00}(B) + E_v^{10}(0, B). \quad (3.54)$$

Экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими расчетами в приближении Хартри–Фока при учете конечной ширины квантовой ямы (сплошные линии на рис. 3.5). Пунктирные линии соответствуют строго двумерному случаю, когда геометрический форм-фактор $F(q)$ равен 1. Хорошее согласие экспериментальных результатов и теоретических расчетов позволяет заключить, что основное состояние холловского ферромагнетика при нулевой температуре корректно описывается микроскопической теорией. На рис. 3.6 экспериментальные значения для g_{eff} сравниваются с теоретическими расчетами, а также со значениями, полученными из магнитотранспортных измерений [43–46]. Видно, что при малых магнитных полях $|g_{\text{eff}}| \sim 60$, что превышает на порядок величины результат транспортных измерений. Такое большое несоответствие между результатами двух экспериментов объясняется различной восприимчивостью двух методов к случайному потенциалу в двумерной системе. Действительно, в транспортных исследованиях измеряется интегральная по всему образцу минимальная энергетическая щель для несвязанных электрона и дырки, которые могут участвовать в транспорте. Эта щель может оказаться существенно меньшей, чем $E_{SE}(\infty)$, особенно, если случайный потенциал нарушает ферромагнитный порядок. Наоборот,

при неупругом рассеянии света сигнал рассеяния от циклотронного спин-флип экситона приходит только от тех областей образца, которые заведомо имеют ферромагнитный порядок. Возбуждения

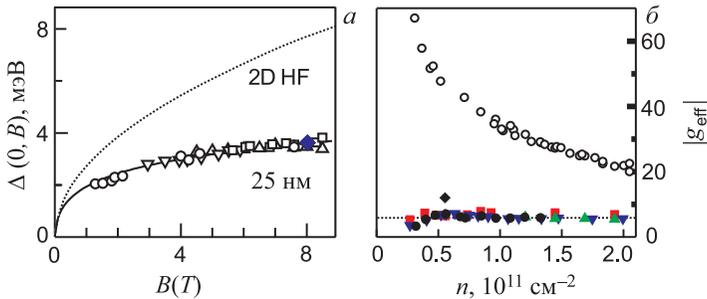


Рис. 3.6. Зависимость $\Delta(0, B)$ от магнитного поля при $\nu = 1$ для квантовой ямы шириной 25 нм (а). Экспериментальные значения обозначены символами, расчет методом Хартри–Фока с учетом геометрического форм-фактора — сплошной линией, расчет методом Хартри–Фока для идеального двумерного случая — пунктирной линией. Также показаны данные из работы [49] (синие ромбы). Зависимость обменно-усиленного g -фактора g_{eff} от концентрации электронов (б). Также приведены экспериментальные результаты из работ [43–46]

этих ферромагнитных упорядоченных областей спектрально отделены от возбуждений в неупорядоченных частях исследуемого образца [41].

Энергия циклотронной спин-флип моды несет информацию об обменном взаимодействии, однако не менее важной экспериментальной характеристикой неупругого рассеяния света на CSFM является интенсивность сигнала рассеяния, которая пропорциональна рассеиваемому объему. Одновременное исследование обеих величин полезно для оценки площади, занимаемой ферромагнитной фазой. Приведенные далее результаты измерений объема холловского ферромагнетика, по сути, напоминают исследования магнонов в центре зоны Бриллюэна в трехмерных ферромагнетиках и антиферромагнетиках с помощью неупругого рассеяния света [58].

Оказывается, что при температурах ниже $T_Z = \mu g B / k_B$ как энергия, так и интенсивность циклотронной спин-флип моды практически не изменяются (рис. 3.7). Отсюда делается вывод о том, что площадь, занимаемая ферромагнитной фазой, сохраняется в этом интервале температур. При температурах выше T_Z интенсивность циклотронной спин-флип моды быстро падает (рис. 3.7). По-видимому, ферромагнитный порядок все еще существует, но

теперь он присутствует только в некоторых областях образца (доменах). Внутри этих доменов энергия CSFM слабо смещена в сторону больших энергий. Этот сдвиг, скорее всего, можно отнести

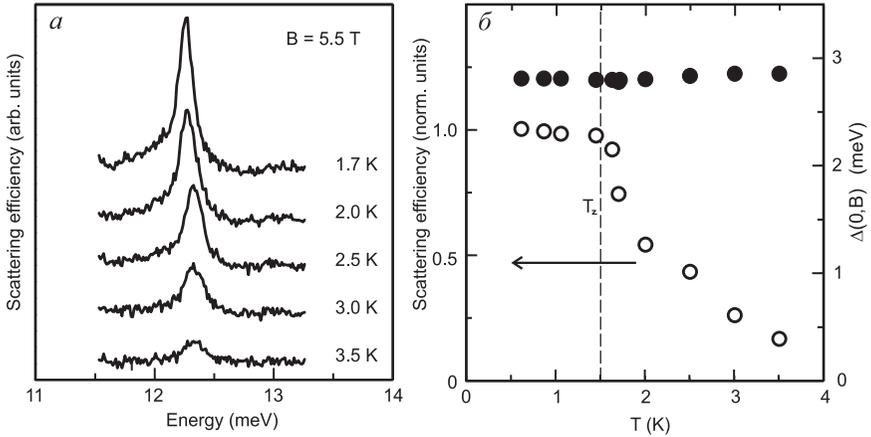


Рис. 3.7. Спектры неупругого рассеяния света для CSFM при $B = 5,5$ Тл и различных температурах (а). Зависимости эффективности рассеяния CSFM (пустые кружки, левая ось) и кулоновского члена $\Delta(0, B)$ (сплошные кружки, правая ось) от температуры (б). Штриховая линия показывает $T_z = \mu g B / k_B$. Объемный g -фактор взят из работы [53]

к пространственному ограничению размеров ферромагнитных доменов. Более низкоэнергетические циклотронные спин-флип экситоны, импульс которых меньше обратного характерного размера домена, больше не могут возбуждаться, что приводит к фиолетовому сдвигу линии неупругого рассеяния света CSFM.

Эффективность рассеяния на CSFM сравнивается с намагниченностью электронной системы, полученной с помощью методик ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [59] и оптического поглощения [60] при аналогичных экспериментальных условиях (рис. 3.8а). Намагниченность несет информацию о средней спиновой поляризации электронной системы. Подобно эффективности рассеяния, намагниченность почти не изменяется ниже T_z . В этом режиме ее поведение определяется спиновыми экситонами и рассчитывается по формуле

$$\frac{M(T)}{M_0} = 1 + C k_B T \ln(1 - e^{\mu g B / k_B T}). \quad (3.55)$$

Здесь M_0 — намагниченность при нулевой температуре, а C — параметр, связанный с массой длинноволновых спиновых эксито-

нов [61, 62]. Уравнение (3.55) справедливо, когда число спиновых экситонов значительно меньше числа квантов магнитного потока на уровне Ландау. В противном случае следует учитывать взаимодействие между спиновыми экситонами [62]. Их взаимодействие

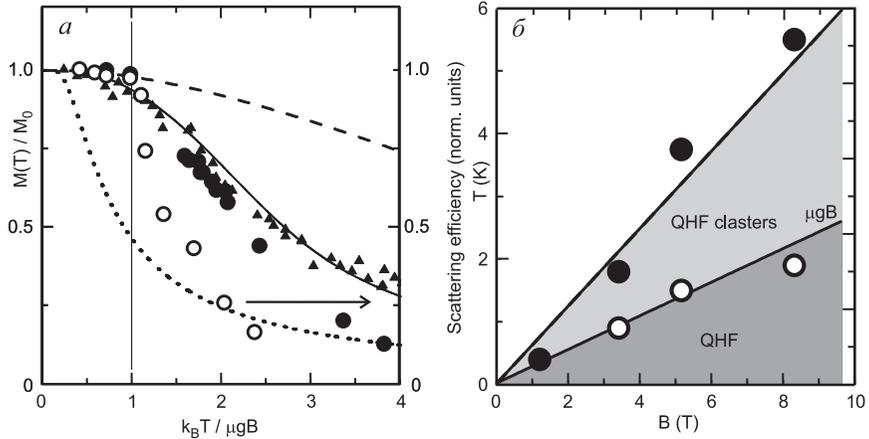


Рис. 3.8. Температурные зависимости эффективности неупругого рассеяния света CSFM (пустые кружки, правая ось) и намагниченности ДЭС (а). Значения намагниченности взяты из исследований с помощью ЯМР (сплошные кружки) [59] и оптического поглощения (треугольники) [60]. Пунктирная линия показывает намагниченность невзаимодействующих электронов, а штриховая — намагниченность, определяемую спиновыми экситонами. Сплошная линия представляет собой расчет по модели Гейзенберга для ферромагнетиков.

Диаграмма устойчивости для квантово-холловского ферромагнетика $\nu = 1$ (б). Области существования макроскопического ферромагнитного порядка и доменов с ферромагнитным порядком отделены сплошными линиями

вызывает сильное отклонение намагниченности от зависимости, описываемой уравнением (3.55). Согласно теории, это отклонение начинает происходить при T_Z [38].

На рис. 3.8а показано, что результаты ЯМР и неупругого рассеяния света в основном совпадают. Выше температуры T_f , которая приблизительно совпадает с T_Z , как сечение рассеяния, так и намагниченность начинают спадать быстрее зависимости, определяемой уравнением (3.55). Более сильное снижение сечения рассеяния по сравнению со средней по образцу намагниченностью можно объяснить флуктуациями параметра порядка, которые становятся столь значительными, что некоторые из этих ферромагнитных доменов сжимаются до размера, для которого импульс CSFM больше не определен. Эти домены не вносят вклад в неупру-

гое рассеяние света от CSFM, но вносят вклад в среднюю намагниченность электронной системы. Введем вторую характеристическую температуру T_d , при которой интенсивность линии неупругого рассеяния света, связанная с циклотронной спин-флип модой, падает на порядок по сравнению с низкотемпературным значением (площадь, занимаемая ферромагнитной фазой, уменьшается на порядок). Выше T_d ферромагнитные домены с четко определенной CSFM практически отсутствуют.

На рис. 3.8б приведены две характерные зависимости температуры T_f и T_d от магнитного поля. Этот график можно рассматривать как диаграмму устойчивости холловского ферромагнетика с $\nu = 1$. Диаграмма показывает, что при температурах ниже зеемановской энергии существует макроскопический ферромагнитный порядок. Ферромагнетик распадается на домены, как только температура электронов превышает T_Z . Этот результат соответствует классическому предсказанию о нестабильности дальнего порядка в двумерии [63, 64].

Результаты, обсуждаемые в данном разделе, показывают, что измерение энергии циклотронной спин-флип моды методом неупругого рассеяния света позволяет избежать влияния случайного потенциала и оценить эффективный g -фактор, а следовательно, и величину обменной энергии в холловском ферромагнетике. Теоретические данные, полученные методом Хартри-Фока с учетом конечной ширины квантовой ямы, достаточно точно описывают энергию CSFM-моды квантово-холловского ферромагнетика с $\nu = 1$. Также экспериментальные результаты указывают на то, что основное состояние не является полностью спин-поляризованным даже в образцах с самой высокой подвижностью. Отсутствие полной спиновой поляризации объясняется наличием макроскопического числа примесных комплексов, которые сосуществуют с ферромагнитной фазой. Термодинамика квантово-холловского ферромагнетика определяется в основном объемной зеемановской энергией. При более высоких температурах ферромагнетик распадается на области с локальным ферромагнитным порядком. Их размер и количество уменьшаются с ростом температуры.

3.5. Исследование спиновой жесткости холловского ферромагнетика методом времяразрешенного эффекта Керра

Помимо исследования обменного взаимодействия в основном состоянии холловского ферромагнетика методом неупругого рассеяния света, оказалось возможным напрямую исследовать спиновую жесткость двумерной электронной системы методом времяразре-

шенного керровского вращения. При этом керровское вращение не позволяет измерить абсолютную величину спиновой жесткости, а лишь позволяет сравнить состояния с различной спиновой жесткостью между собой и сделать заключение о том, насколько спиновая жесткость в данном конкретном состоянии отличается от спиновой жесткости в некотором тестовом состоянии, спиновая жесткость которого известна (или предполагается известной) из других экспериментальных исследований. Обычно за такое калиброванное состояние принимается состояние холловского ферромагнетика при нулевой температуре, обменное взаимодействие и, соответственно, спиновая жесткость которого определяются методом неупругого рассеяния света. Таким образом, с помощью керровского вращения получены фундаментальные результаты о термодинамике холловского ферромагнетика и квантовых фазовых превращениях в холловском ферромагнетике с зарядовыми дефектами. В этой главе основное внимание будет уделено именно термодинамике холловского ферромагнетика, а о холловском ферромагнетике с зарядовыми дефектами речь пойдет в следующих главах.

Кратко обсудим физику эффекта Керра в соответствии с теорией, разработанной в [65]. Прецессия спина описывается уравнением движения $\partial \mathbf{S} / \partial t = -g \mu_B \mathbf{S} \times \mathbf{B}$, а для компонент спина сводится к $\partial S_z / \partial t = 0$ и $\partial \mathbf{S}_\perp / \partial t = -g \mu_B \mathbf{S}_\perp \times \mathbf{B}$. Поперечная компонента $\mathbf{S}_\perp = (S_x, S_y)$ появляется при изменении спиновых квантовых чисел, так что $|\delta S| < |\delta S_z|$. Эти состояния соответствуют оператору $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i \hat{S}_y$, который сохраняет полный спин системы, но изменяет компоненту S_z на единицу: $S_z \rightarrow S_z - 1$. Например, для холловского ферромагнетика с основным состоянием вида $|0\rangle =$

$= \left| \overbrace{\uparrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow}^{\mathcal{N}} \right\rangle$ (\mathcal{N} — число состояний с равными спинами на уровне Ландау), n -кратное действие оператора \hat{S}_- создает стационарное собственное состояние $|n\rangle = (\hat{S}_-)^n |0\rangle$ с той же орбитальной волновой функцией и значением полного спина $S = \mathcal{N}/2$, что и для $|0\rangle$, но $S_z = \mathcal{N}/2 - n$. В этом случае энергия равна $E_0 + E_z n$, где E_0 — энергия основного состояния, а E_z — зеемановская энергия. Более того, любая комбинация таких состояний

$$\sum_n C_n |n\rangle, \quad (3.56)$$

заданная набором коэффициентов $\{C_n\}$, является состоянием с такими же орбитальной волновой функцией и полным спином S , как в основном состоянии. Если число слагаемых в этой сумме больше

единицы, она не соответствует ни одному собственному состоянию гамильтониана, даже если пренебречь взаимодействиями, не сохраняющими спин. В общем, для таких суперпозиций различных собственных состояний не существует направлений вдоль оси z в спиновом пространстве, так чтобы проекция спина S_z была бы собственным значением. Выражение (3.56) хорошо описывает состояние, возникающее в системе под воздействием лазерного импульса, и может рассматриваться как начальное условие для решения нестационарного уравнения Шредингера $i\partial|N, t\rangle/\partial t = \hat{H}|N, t\rangle$. Соответственно, при условии пренебрежения всеми членами гамильтониана, не коммутирующими с операторами \hat{S}_z и $\hat{\mathbf{S}}^2$, получается решение в виде

$$|N, t\rangle = \exp^{-iE_0 t} \sum_{n=0}^N C_n \exp^{-inE_z t} |n\rangle. \quad (3.57)$$

Это выражение дает наиболее общее микроскопическое описание голдстоуновской моды квантово-холлового ферромагнетика. Вычисляя среднее значение оператора $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ в состоянии (3.57), получаем значение поперечного спина в момент времени t

$$\begin{aligned} S_{\perp}(t) &= \langle t, N | \hat{S}_+ | N, t \rangle \\ &= \exp^{-iE_z t} \sum_{n=0}^{N-1} C_n^* C_{n+1} \langle n+1 | n+1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.58)$$

которое соответствует прецессии с зеемановской частотой. Угол наклона относительно оси z определяется как $\theta = \arcsin(|S_{\perp}|/S) \equiv \arcsin(2|S_{\perp}|/\mathcal{N})$, а среднее значение компоненты S_z не зависит от времени и равно

$$\bar{S}_z = \langle t, N | S_z | N, t \rangle = \sum_n |C_n|^2 (\mathcal{N}/2 - n) \langle n | n \rangle. \quad (3.59)$$

Различные микроскопические состояния (3.57) могут формально соответствовать одной и той же голдстоуновской моде. Действительно, одно и то же значение θ может соответствовать различным наборам $\{C_n\}$, поскольку при заданном угле для макроскопически большого числа N существуют только два условия для коэффициентов C_n : (1) $\sum_n C_n^* C_{n+1} \langle n+1 | n+1 \rangle = (\mathcal{N}/2) \sin \theta$ и (2) условие нормировки $\sum_n |C_n|^2 \langle n | n \rangle = 1$.

Отметим, что каждое состояние $|n\rangle$ можно рассматривать как состояние системы с возбужденными n «голдстоуновскими экситонами». Возбуждение голдстоуновского экситона, представляющего результат однократного действия оператора спина \hat{S}_- , происходит с $\delta S_z = -1$, $\delta S = 0$ и не влияет на трансляционную инвариантность системы, т. е. данное возбуждение обладает нулевым двумерным импульсом. Это означает, что длина волны возбуждения значительно больше характерного масштаба пространственных флуктуаций двумерной электронной плотности, связанных с неоднородностью ДЭС. С другой стороны, известно, что в системе также возникают возбуждения магнного типа — электронные спиновые волны с ненулевым двумерным вектором \mathbf{q} , которые соответствуют изменению S_z -компоненты и полного спина на единицу S : $S = \delta S_z = -1$ [47, 48]. Решение нестационарного уравнения Шредингера с учетом пространственных флуктуаций g -фактора показывает, что превращение голдстоуновского экситона в спиновую волну является элементарным процессом, приводящим к диссипации голдстоуновской моды [65]. Ясно, что значение S_z остается неизменным, но общий спин системы уменьшается на единицу ($S \rightarrow S - 1$). Другими словами, это преобразование, в котором вместо $|n\rangle$ состояния появляется состояние с $n - 1$ голдстоуновскими экситонами и одним спин-волновым экситоном с ненулевым импульсом \mathbf{q} . Если $q \rightarrow 0$ ($ql_B \ll 1$), то такое преобразование соответствует элементарной стохастизации, сохраняющей как земановскую энергию (S_z остается неизменной), так и обменную энергию системы. Голдстоуновские экситоны не взаимодействуют друг с другом и спиновыми волнами. В результате процесс перехода голдстоуновского экситона в спиновую волну является одноэкситонным процессом. В $|n\rangle$ состоянии этот процесс не зависит от числа n . Таким образом, каждое слагаемое в (3.57) меняется со временем по одному и тому же закону. При $N \ll \mathcal{N}$ происходит экспоненциальная дефазировка голдстоуновской моды (экспоненциальное затухание поперечной компоненты $|S_\perp|$) и, наконец, переход в состояние, в котором спин системы направлен вдоль магнитного поля. Характерное время дефазировки может быть рассчитано с использованием амплитуды и корреляционной длины пространственных флуктуаций g -фактора и спиновой жесткости [65, 66]. Следует подчеркнуть, что обобщение микроскопической теории эффекта Керра для факторов заполнения, отличных от $\nu = 1$, представляет большую сложность ввиду недостаточного понимания основного состояния ДЭС при $\nu \neq 1$.

Обсудим результаты исследования изменения спиновой жесткости ДЭС при переходе из спин-поляризованного состояния (кван-

тово-холловского ферромагнетика) в спин-деполяризованное состояние [67] с помощью метода времяразрешенного эффекта Керра. В рассматриваемой работе изучалась ДЭС на основе гетероструктуры GaAs/AlGaAs с одиночной квантовой ямой шириной 18 нм ($n_s = 0,6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$). Основные результаты показаны на

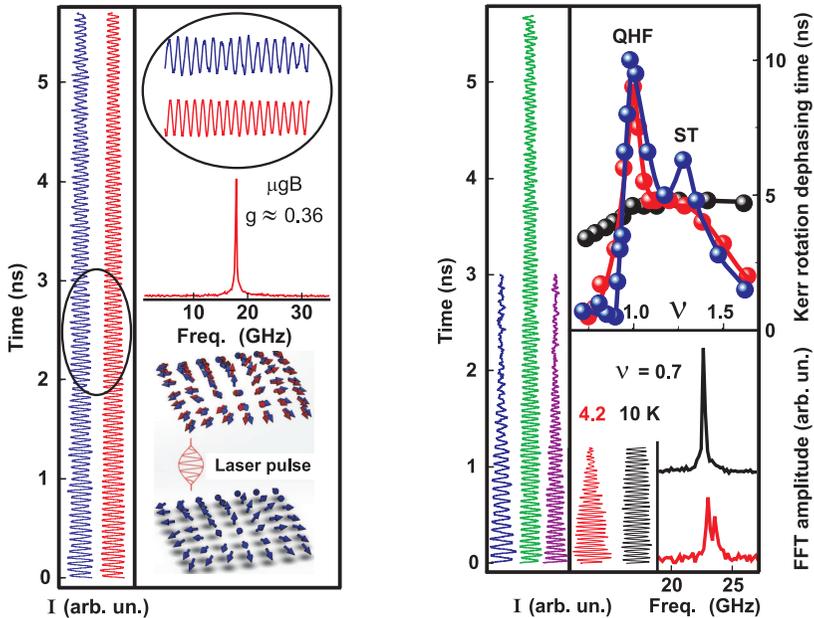


Рис. 3.9. Слева: временная динамика керровского сигнала при $T = 0,6\text{K}$ (синяя кривая) и при $T = 4,2\text{K}$ (красная кривая) ($\nu = 1$). Справа: фурье-преобразование керровского сигнала при $T = 4,2\text{K}$. Снизу: схематичная иллюстрация оптической накачки ДЭС с помощью лазерного импульса (синие и красные стрелки показывают ориентацию спина до и после накачки соответственно)

Рис. 3.10. Слева: временная динамика керровского сигнала при $T = 0,6\text{K}$ (кривая посередине соответствует $\nu = 1$, левая и правая кривые соответствуют $\nu = 0,9$ и $\nu = 1,4$). Справа: время спиновой дефазировки в зависимости от фактора заполнения при температурах $T = 0,6, 4,2$ и 10K . Снизу: временная динамика керровского сигнала и его фурье-преобразование при $T = 4,2\text{K}$ и 10K и $\nu = 0,7$

рис. 3.9 и 3.10. На рис. 3.9 керровский сигнал измеряется при двух разных температурах: одна соответствует почти полностью спин-поляризованному состоянию ($T = 0,6\text{K}$, степень поляризации $M(T)/M_0 \approx 1$), а другая — деполаризованному состоянию ($T = 4,2\text{K}$, $M(T)/M_0 \approx 0,25$). Удивительно, но в этих двух случа-

ях времена дефазировки спиновой прецессии совпадают. То есть спиновая жесткость в обоих случаях практически одинакова. На рис. 3.10 показана зависимость времени дефазировки спиновой прецессии от фактора заполнения вблизи $\nu = 1$. Опять же, керровский сигнал ведет себя очень похоже при двух температурах: $T = 0,6\text{ К}$ и $T = 4,2\text{ К}$.

На первый взгляд, неожиданным является увеличение времени дефазировки спиновой прецессии с ростом температуры выше $T = 5\mu\text{гВ}$ при нецелых факторах заполнения (рис. 3.10, $T = 10\text{ К}$). Это естественное явление, связанное с уменьшением флуктуаций «эффективного» магнитного поля, воспринимаемого электронами. Помимо флуктуаций g -фактора электрона вследствие локальной флуктуации состава барьеров квантовой ямы, а также вследствие флуктуаций ширины самой квантовой ямы, содержащей ДЭС, при низких температурах возникает вклад от пространственных флуктуаций эффективного магнитного поля, связанного с неравновесной поляризацией ядерных спинов [68–70]. Для сравнения измерялись керровские сигналы при 4,2 К и 10 К и факторе заполнения $\nu = 0,7$, где влиянием спиновых корреляций на дефазировку спиновой прецессии можно пренебречь. При более низких температурах флуктуации эффективного магнитного поля не только значительно сокращают время дефазировки спиновой прецессии, но и ведут к возникновению дополнительного пика в фурье-образе керровского сигнала, соответствующего дополнительному эффективно-му магнитному полю около 0,1 Тл (рис. 3.10). Таким образом, пространственные флуктуации эффективного магнитного поля усиливаются с понижением температуры. Это приводит к уменьшению времени дефазировки прецессии спина ДЭС. Напротив, в холловском ферромагнетике флуктуации ядерных спинов не оказывают существенного влияния на прецессию спинов из-за высокой жесткости ДЭС.

Влияние неравновесной подсистемы ядерных спинов на ДЭС при высоких температурах (выше $T = 5\mu\text{гВ}$) может быть усилено быстрым измерением керровского сигнала. Релаксация ядерных спинов до равновесного состояния при гелиевых температурах — это процесс, который длится несколько часов. Следовательно, температурная зависимость времени дефазировки спиновой прецессии может быть измерена за меньшее время, чем необходимо для полной релаксации ядерного спина (рис. 3.11). График зависимости времени дефазировки спиновой прецессии от температуры в холловском ферромагнетике показывает, что при низких температурах ($T \leq 5\mu\text{гВ}$) время дефазировки остается неизменным независимо от состояния ядерных спинов. Однако при высоких температурах

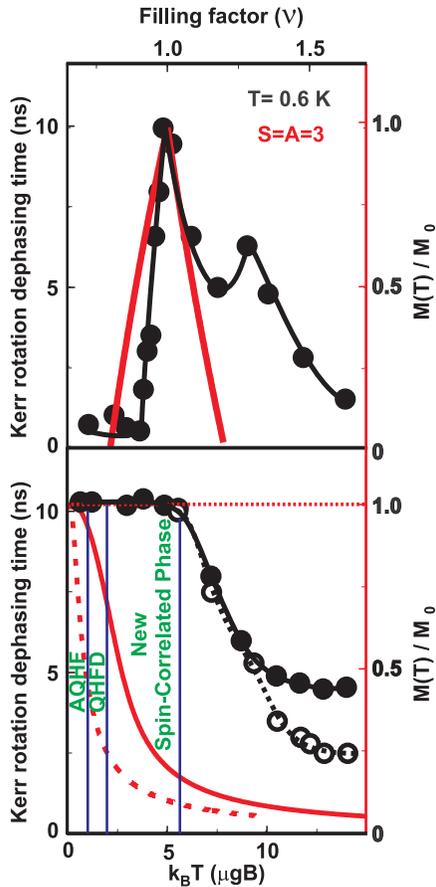


Рис. 3.11. Сверху: время спиновой дефазировки в зависимости от фактора заполнения при $T = 0,6$ K (черные точки, левая ось) и намагниченности ДЭС (красная кривая, правая ось), полученное согласно модели Скирма [59, 71] со спином скирмиона (S) и антискирмиона (A), равными 3 [60]. Снизу: зависимость времени спиновой дефазировки от температуры при $\nu = 1$ (черные точки, левая ось) и от намагниченности ДЭС (красная кривая, правая ось) согласно теоретической [38] и экспериментальным [41, 60] работам. Пустые кружки соответствуют «быстрому» температурному сканированию керровского сигнала. Штриховая линия показывает одночастичную намагниченность. Вертикальные сплошные линии отделяют разные спиновые фазы ДЭС: активированный квантово-холловский ферромагнетик (AQHF), квантово-холловские ферромагнитные домены [41] и новую, сильно коррелированную по спину, и в то же время спин-деполяризованную электронную фазу

время дефазировки сокращается в два раза при кратковременном измерении по сравнению с более длительным сканированием, что подчеркивает важность роли ядерных спинов в дефазировке спиновой прецессии в ДЭС с уменьшенной спиновой жесткостью.

Примечательно то, что спиновая жесткость при факторе заполнения $\nu = 1$ сохраняется при таких высоких температурах, когда ДЭС почти полностью деполаризована (рис. 3.11). Это означает, что во время нагрева, прежде чем квантово-холловский ферромагнетик превратится в парамагнетик, он проходит через дополнительную промежуточную фазу (новую спин-коррелированную фазу), характеризующуюся высокой спиновой жесткостью, почти равной жесткости в холловском ферромагнетике. Та же намагниченность, что и в новой спин-коррелированной фазе, может быть получена при факторе заполнения $\nu = 0,92$ путем включения дырок в квантово-холловский ферромагнетик (рис. 3.11). Таким образом, степень спиновой поляризации ДЭС при $\nu = 0,92$ и $T = 0,6$ К (спин-текстурная жидкость) равна степени спиновой поляризации новой спин-коррелированной фазы при $\nu = 1$ и $T = 6$ К; т. е. эти две фазы экспериментально неразличимы, если полагаться только на степень поляризации ДЭС [60, 72]. Метод времязрешенного эффекта Керра, в отличие от комбинационного рассеяния и электронного спинового резонанса [41], позволяет различать две фазы. Время спиновой дефазировки для коллективной ларморовской прецессии, измеренное в новой спин-коррелированной фазе, оказывается в 5 раз больше, чем то же время, измеренное в спин-текстурной жидкости, что предполагает гораздо более высокую спиновую жесткость новой спин-коррелированной фазы [66]. Данное обстоятельство можно расценивать как указание на то, что новая спин-коррелированная фаза не является спин-текстурной жидкостью, образующейся в ДЭС при низких температурах [73]. Она также не имеет отношения к скирмионам и антискирмионам, поскольку спиновая жесткость в новой фазе значительно превышает спиновую жесткость скирмиона в квантовых ямах GaAs [74].

3.6. Скирмионы

Спиновые волны (магноны) являются нейтральными возбуждениями и состоят из пары «частица-дырка». При больших импульсах частица с перевернутым спином переносится на большое расстояние $\mathbf{q} \times \hat{z}l^2$ от исходного положения, что требует больших энергетических затрат из-за обменного взаимодействия. Возникает вопрос, существуют ли возбуждения с меньшей энергией, чем

магنون. Оказывается, помимо магнетонов существуют возбуждения, представляющие собой топологический дефект в поле электронных спинов [36, 75–81] (рис. 3.12). Они были названы скирмионами по аналогии с объектами в модели Скирма для ядерной физики [82]. Вместо одного перевернутого спина в таком объекте все спины постепенно поворачиваются по мере приближения к центру.

В ядерной физике в модели Скирма предполагается, что вакуум представляет собой «ферромагнетик», описываемый четырехкомпонентным полем Φ^μ , так что $\Phi^\mu\Phi^\mu = 1$. Существует три безмассовых (т. е. с линейной дисперсией) возбуждения в виде спиновых волн, соответствующих трем направлениям колебаний относительно упорядоченного направления. Эти три безмассовые моды представляют собой три (почти) безмассовых пиона π^+ , π^0 , π^- . Нуклоны (протон и нейтрон) представляются спиновыми текстурами скирмионов. Можно показать (для соответствующего вида

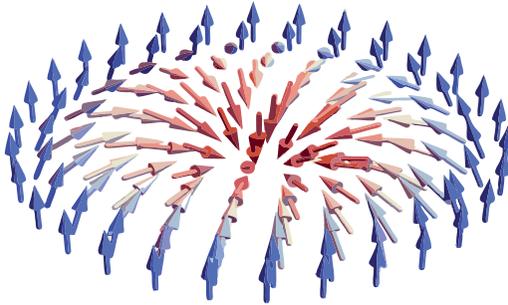


Рис. 3.12. Иллюстрация текстуры скирмиона

действия), что эти объекты являются фермионами, несмотря на то, что они, в некотором смысле, состоят из когерентной суперпозиции бесконечного числа бозонных спиновых волн. Похожая ситуация имеет место в холловских ферромагнетиках. При коэффициенте заполнения ν скирмионы имеют заряд $\pm\nu e$ и дробную статистику. При $\nu = 1$ эти объекты являются фермионами. В отличие от квазичастиц Лафлина, скирмионы являются протяженными объектами и включают в себя много перевернутых и частично перевернутых спинов.

Начнем анализ с понимания того, каким образом спиновые текстуры могут нести заряд. Из принципа Паули ясно, что необходимо перевернуть хотя бы несколько спинов, чтобы локально увеличить плотность заряда в ферромагнетике с $\nu = 1$. Рассмотрим ферромагнетик с локальной ориентацией спина $\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Предположим, что во время движения электрона обменное поле сохраняет ориентацию

спина $\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Если электрон имеет скорость \dot{x}^μ , то скорость изменения локальной ориентации спина равна $\dot{m}^\nu = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} m^\nu$. Изменение ориентации спина ведет к появлению дополнительной фазы Берри. Таким образом, одночастичный лагранжиан содержит дополнительную производную по времени первого порядка в дополнение к той, которая связана с магнитным полем, возникающим вследствие орбитального движения:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{e}{c} \dot{x}^\mu A^\mu + \hbar S \dot{m}^\nu \mathcal{A}^\nu[\mathbf{m}]. \quad (3.60)$$

Здесь A^μ относится к электромагнитному векторному потенциалу, а \mathcal{A}^ν — к векторному потенциалу монополя и подчиняется уравнению (3.34). Также здесь принято, что масса равна нулю, т. е. отброшен член $\frac{1}{2} M \dot{x}^\mu \dot{x}^\mu$. Перепишем уравнение (3.60) в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{e}{c} \dot{x}^\mu (A^\mu + a^\mu), \quad (3.61)$$

где Φ_0 — квант магнитного потока, и

$$a^\mu \equiv -\Phi_0 S \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} m^\nu \right) \mathcal{A}^\nu[\mathbf{m}] \quad (3.62)$$

представляет собой дополнительный векторный потенциал, который порождает фазу Берри. Дополнительный, таким образом введенный, магнитный поток равен

$$\begin{aligned} b &= \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} a^\beta = -\Phi_0 S \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} m^\nu \right) \mathcal{A}^\nu[\mathbf{m}] = \\ &= -\Phi_0 S \varepsilon^{\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} m^\nu \right) \mathcal{A}^\nu[\mathbf{m}] + \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} m^\nu \right) \frac{\partial m^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{A}^\nu}{\partial m^\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Первый член исчезает по симметричным соображениям, и остается

$$b = -\Phi_0 S \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial m^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial m^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{1}{2} F^{\nu\gamma}, \quad (3.64)$$

где $F^{\nu\gamma}$ задается уравнением (3.30), и мы воспользовались тем фактом, что остальные члены являются антисимметричными по замене $\nu \leftrightarrow \gamma$. Пользуясь уравнением (3.30) и приняв $S = \frac{1}{2}$, получаем

$$b = -\Phi_0 \tilde{\rho}, \quad (3.65)$$

где

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{abc} m^a \partial_\alpha m^b \partial_\beta m^c = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{m} \cdot \partial_\alpha \mathbf{m} \times \partial_\beta \mathbf{m} \quad (3.66)$$

называется топологической плотностью, или плотностью Понтрягина.

Теперь представим, что мы адиабатически деформируем равномерно намагниченное состояние спина в некоторое состояние со спиновой текстурой. Из уравнения (3.65) видно, что это аналогично адиабатическому добавлению дополнительного потока $b(\mathbf{r})$. Плотность заряда связана с дополнительным магнитным потоком:

$$\delta\rho = \frac{1}{c} \sigma_{xy} b, \quad (3.67)$$

$$\delta\rho = \nu e \tilde{\rho}. \quad (3.68)$$

Таким образом, получается, что изменения плотности заряда пропорциональны топологической плотности.

Интересно, что спиновые текстуры имеют полный топологический заряд

$$Q_{\text{top}} \equiv \frac{1}{8\pi} \int d^2 r \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{m} \cdot \partial_\alpha \mathbf{m} \times \partial_\beta \mathbf{m}, \quad (3.69)$$

который всегда является целым числом. Поскольку невозможно непрерывным образом преобразовать одно целое число в другое, то Q_{top} является топологическим инвариантом и обладает устойчивостью к плавным непрерывным искажениям поля \mathbf{m} . Например, спиновая волна может пройти через скирмион, и Q_{top} останется неизменным. Таким образом, этот заряженный объект является топологически устойчивым, и число фермионов равно

$$N = \nu Q_{\text{top}}. \quad (3.70)$$

При $\nu = 1$ N является целым числом.

Энергия, необходимая для образования одного скирмиона, задается выражением [36, 83]

$$E_0 = 4\pi\rho_s = \frac{1}{4} \varepsilon_\infty, \quad (3.71)$$

где ε_∞ — предел энергии спиновой волны в уравнении (3.18) при больших q . Возбуждение спиновой волны в виде далеко разнесенной пары «частица-дырка» требует значительно большей затраты

энергии, чем возбуждение скирмионов. Таким образом, возбуждение скирмионов энергетически значительно выгоднее, чем одиночные перевороты спина*). Скирмионы имеют конечную плотность даже в основном состоянии с $\nu \neq 1$. Они также встречаются в обычных двумерных магнитных пленках, но так как не несут заряда (и энергетически невыгодны, так как ρ_s довольно велика), то легко вымораживаются, и их можно не учитывать.

Заряд скирмиона квантуется, а число перевернутых спинов зависит от его площади $\sim \lambda^2$ (здесь λ — характерный размер скирмиона). Если бы энергия не зависела от размеров скирмиона, то число перевернутых спинов могло бы принимать любое значение. При наличии конечной энергии Зеемана в выражении для энергии скирмиона возникает член $\sim \Delta \lambda^2$, наличие которого ведет к уменьшению размера скирмиона. Обменная энергия меняется как $e^2/(\epsilon \lambda)$, и поэтому размер скирмиона выгодно увеличивать. Конкуренция между кулоновской и зеемановской энергиями приводит к появлению не более чем четырех перевернутых спинов в GaAs/AlGaAs квантовых ямах согласно микроскопическим расчетам по модели Хартри–Фока [74, 85].

Экспериментальные свидетельства в пользу существования скирмионов были впервые получены в работе [59] с использованием метода ЯМР с оптической накачкой. Было показано, что при $\nu = 1$ наблюдается пик поляризации, а при отклонении ν от единицы поляризация резко падает, что противоречит модели свободных электронов. В результате сделан вывод о том, что при каждом добавлении или удалении заряда происходит переворот $3,5 \div 4$ спинов. Данный результат количественно хорошо согласуется с расчетами Хартри–Фока для скирмионной модели [74, 85].

Также о наличии скирмионов свидетельствует сильное изменение эффективной зеемановской энергии при изменении магнитного поля из-за большого количества перевернутых спинов. Это наблюдалось в транспортных измерениях [44] и в экспериментах по оптической спектроскопии [72]. Напомним, что спин-орбитальные эффекты в GaAs приводят к тому, что g -фактор электрона равен $-0,4$. Под гидростатическим давлением g можно настроить на нулевое значение, что должно значительно увеличить размер скирмиона. О наблюдении такого эффекта сообщалось в работе [86].

*) Это энергетическое преимущество уменьшается, если учитывать конечную толщину реальных ДЭС. Возбуждение скирмиона в некоторых случаях может оказаться невыгодным на более высоких уровнях Ландау.

3.7. Исследование холловского ферромагнетика с зарядовыми дефектами методом неупругого рассеяния света

Основным состоянием двумерной электронной системы при $\nu = 1$ является квантово-холловский ферромагнетик. Однако внедрение в холловский ферромагнетик даже небольшого количества заряженных дефектов (электронов или дырок) полностью меняет основное состояние ДЭС. Предполагается, что при малых отклонениях фактора заполнения от единичного основное состояние системы содержит конечную плотность вихреподобных спиновых текстур — скирмионов [36]. Характерными параметрами неоднородности спина являются корреляционный радиус скирмиона R и эффективное число перевернутых спинов K ($K \gg 1$). Пространственный размер скирмиона определяется конкуренцией зеемановской и кулоновской энергий.

С одной стороны, значительное число спинов отклоняется от оси магнитного поля, что приводит к кратной потере зеемановской энергии. Однако выигрыш от увеличения обменной энергии между соседними спинами может компенсировать проигрыш в зеемановской энергии. Для экспериментально доступных случаев в ДЭС на базе полупроводниковой системы GaAs/AlGaAs K меняется от 0 до 4. По этой причине была разработана теория квазичастиц со спиновой текстурой (STQ), которые являются квантово-механическим обобщением классических скирмионов на малое число частиц [87].

Первое экспериментальное доказательство в пользу STQ было получено в экспериментах по ядерному магнитному резонансу, где спиновая деполяризация измерялась с помощью найтовского сдвига [59, 71]. Аналогичные результаты были получены из экспериментов по оптическому поглощению [72]. Теоретические вычисления в приближении Хартри–Фока дали хорошее количественное согласие с экспериментом и завершили доказательство того, что именно STQ отвечают за деполяризацию двумерной электронной системы [88]. Также было выдвинуто предположение о том, что взаимодействие между скирмионами может привести к образованию кристалла — периодической решетки из скирмионов и антискирмионов [89]. Формирование скирмионного кристалла нарушает вращательную симметрию отдельного скирмиона вокруг оси магнитного поля. В результате появляется дополнительная голдстоуновская мода, связанная с движением спина в плоскости XY. Новая мода с единичным спином обладает бесщелевым энергетическим спектром и, как предполагалось до недавнего времени, отвечает за быструю релаксацию ядерного спина [90, 91].

Экспериментальные доказательства существования решетки скирмионов были получены в трехмерных ферромагнитных пленках со взаимодействием Дзялошинского–Мория. Образование скирмионного кристалла наблюдалось в ферромагнетике MnSi и других похожих соединениях [92]. Также образование кристаллической решетки наблюдалось в тонкой пленке нецентросимметричного магнитного кристалла $\text{Fe}_{0,5}\text{Co}_{0,5}\text{Si}$ с помощью просвечивающей лоренцовой электронной микроскопии [93]. По этой причине возникло предположение, что скирмионный кристалл является естественной фазой в магнитных пленках без центра инверсии. Заметим, что аналогичных прямых экспериментальных доказательств существования решетки скирмионов в холловском ферромагнетике с заряженными дефектами не представлено. Также не ясно, что происходит с системой скирмионов в ДЭС, когда число перевернутых спинов достигает предела $K = 0$.

Случай $K = 0$ представляет огромное значение как первый шаг к пониманию более сложных случаев $K \geq 1$. Было показано, что в пределе $K = 0$, где STQ не должны формироваться, помимо спиновой волны существует дополнительное спиновое возбуждение [73], что указывает на неколлинеарное упорядочение спинов в основном состоянии ДЭС. Основное экспериментальное обнаружение заключается в наблюдении расщепления спин-экситонной спектральной составляющей на две линии при небольших отличиях фактора заполнения от единицы. Одна линия лежит ниже, а другая — выше зеemanовской энергии (рис. 3.13). Также подобное расщепление обнаружено при факторах заполнения вблизи $\nu = 3$ (рис. 3.14). Интенсивности и энергии обеих линий демонстрируют антипересечение. Энергия одной линии при удалении фактора заполнения от $\nu = 1(3)$ стремится к зеemanовской энергии, а в непосредственной близости от нечетных факторов заполнения приближается к нулю. Другая линия при $\nu = 1(3)$ соответствует спин-экситону с малым импульсом, а при небольших отклонениях от нечетных факторов заполнения ее энергия возрастает. На рис. 3.15 представлен спектр возбуждения холловского ферромагнетика с заряженными дефектами в пределе $K = 0$. Несмотря на теоретический прогноз о том, что в этом случае STQ не должны наблюдаться, спектр возбуждения качественно согласуется со спектром STQ-жидкости, что ставит под сомнение общепринятую теорию, которая предсказывает коллинеарное ферромагнитное упорядочение при $K = 0$ [78].

Для того, чтобы перейти к случаям $K > 0$, где должны формироваться STQ, использовались образцы с более высокой электронной плотностью. При всех изученных K ($K = 1, 2, 3$) наблюдается

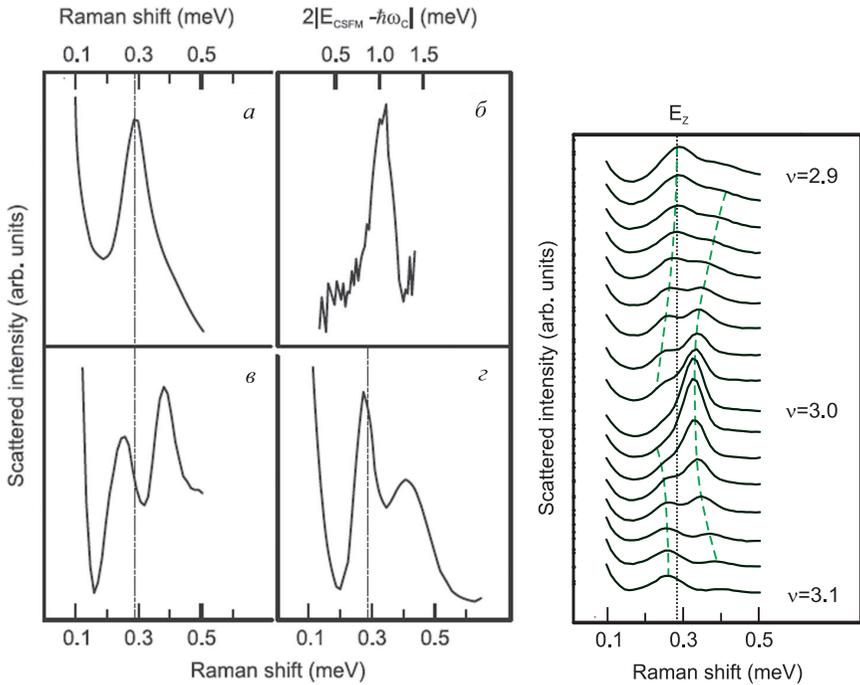


Рис. 3.13. Спектры неупругого рассеяния света для спинового экситона при $\nu = 1,9$ (а); CSFM при $\nu = 1$ (б). Спектры неупругого рассеяния света для двух спин-волновых мод при факторах заполнения выше ($\nu = 1,35$) (в) и ниже ($\nu = 0,75$) (г) $\nu = 1$. Штрих-пунктирная линия обозначает зеемановскую энергию

Рис. 3.14. Спектр неупругого рассеяния света вблизи $\nu = 3$. Пунктирная линия обозначает зеемановскую энергию. Штриховые линии приведены для удобства

линия дополнительного спинового возбуждения (рис. 3.16). Соответствующая линия неупругого рассеяния света имеет конечную энергию даже при $q \rightarrow 0$ [73]. Поэтому можно предположить, что основным состоянием ДЭС в холловском ферромагнетике с заряженными дефектами является STQ-жидкость, а не кристалл, голстоуновская мода которого должна иметь нулевую энергию при $q \rightarrow 0$ [89].

Возможное теоретическое описание дополнительного спинового возбуждения для STQ-жидкости приведено в работе [78]. При $q \rightarrow 0$ существуют две спиновые моды: спиновая волна (спиновой экситон с нулевым импульсом) с энергией, равной зеемановской энергии, и дополнительная коллективная спиновая мода — «циклотронная» STQ-мода. Отметим, что название «циклотронная»

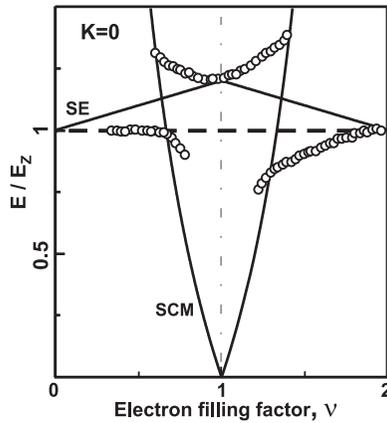


Рис. 3.15. Зависимость энергии линий НРС от фактора заполнения вблизи $\nu = 1$ при $K = 0$ и $q = 1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$. Штриховая линия обозначает зеемановскую энергию. Сплошными линиями показаны теоретические расчеты энергий спин-экситона и «циклотронной» моды STQ [94]

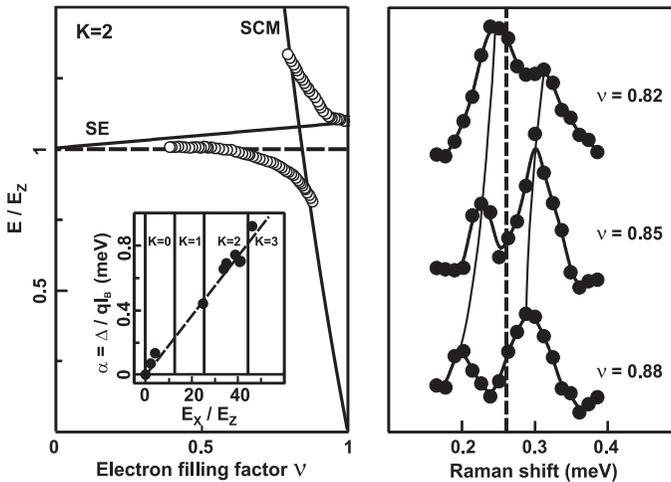


Рис. 3.16. *Справа*: спектры НРС при $K = 2$ и различных факторах заполнения. Штриховой линией обозначена зеемановская энергия. *Слева*: зависимость энергии линий НРС от фактора заполнения при $K = 2$. Штриховой линией обозначена зеемановская энергия. Сплошными линиями показаны теоретические расчеты энергий спин-экситона и «циклотронной» моды STQ. На вставке представлена величина связи спин-экситона и «циклотронной» моды STQ $\alpha = \Delta(q)/ql_B$ в зависимости от обменной энергии ($\Delta(q)$ — минимальная энергетическая щель между двумя модами)

происходит из описания коллективной прецессии спинов в некотором эффективном магнитном поле, создаваемом всеми STQ. Обращаясь вокруг STQ, электронный спин подстраивает свое направление под направление текстуры посредством обменного взаимодействия со спинами текстур. При обходе по замкнутому контуру вокруг системы спиновых текстур возникает топологическая фаза Берри, которая, в свою очередь, определяет величину эффективного магнитного поля, действующего на отдельный спин. В этом поле появляется «циклотронное» квантование, но не для зарядов, а для электронных спинов, и, соответственно, появляется возможность изменять номер «циклотронного уровня», что является ничем иным, как спиновым возбуждением с «циклотронной» частотой. При $\nu = 1$, когда плотность STQ равна нулю, энергия «циклотронной» моды тоже равна нулю. При увеличении плотности текстур (отходе от единичного фактора заполнения) величина эффективного магнитного поля растет. Расстояние между «циклотронными уровнями», связанными с эффективным полем, определяется как $\hbar\omega'_c = E_s 2(1 - \nu)/\nu$ при $\nu \leq 1$, где $E_s = 4\pi\rho_s = \frac{1}{4}E_x$ — энергия образования одного скирмиона, E_x — обменная энергия на нижнем уровне Ландау. В случае бесконечно тонкой ДЭС $E_x = \frac{e^2}{\epsilon l_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а для ДЭС в квантовых ямах GaAs/AlGaAs следует учитывать толщину структуры [40]. Энергия «циклотронной» моды STQ (SCM) в пределе большого количества STQ ($\hbar\omega'_c \gg k_B T$) равна

$$E_{SCM} = \hbar\omega'_c(q) = \hbar(\omega_c^2 + c_1^2 q^2)^{1/2}, \quad (3.72)$$

где $c_1^2 \propto n_s^{1/2} E_s$, и n_s — плотность STQ. При малых q можно пренебречь небольшой дисперсией, т. е. $E_{SCM} \approx \hbar\omega'_c$. Теоретической «циклотронной» моде можно сопоставить экспериментально наблюдаемое новое спиновое возбуждение с энергией ниже земановской щели (рис. 3.16). Таким образом, экспериментально подтверждается предположение о том, что основным состоянием холловского ферромагнетика с заряженными дефектами является STQ-жидкость. Однако не следует забывать, что для правильной теории следует учитывать взаимодействие отдельных STQ со спиновыми экситонами. Важность данного взаимодействия следует из связывания «циклотронных» спиновых мод и спиновых экситонов в условиях резонанса. Это подразумевает физические процессы, включающие поглощение спиновых экситонов и появление «циклотронных» STQ-мод, и наоборот, поглощение «циклотронных» STQ-мод и возникновение спиновых экситонов. Феноменологически вы-

ражения для энергии двух связанных мод имеют вид

$$E_{1,2}(q, \nu) = \frac{1}{2} [E_{SE}(q, \nu) + E_{SCM}(q, \nu)] \pm \sqrt{[E_{SE}(q, \nu) - E_{SCM}(q, \nu)]^2 + |\Delta(q)|^2}, \quad (3.73)$$

и в условиях резонанса $|E_{SE}(q, \nu) - E_{SCM}(q, \nu)| \ll |\Delta(q)|$. Отсюда получаем, что

$$E_{1,2}(q, \nu) = \frac{1}{2} [E_{SE}(q, \nu) + E_{SCM}(q, \nu)] \pm |\Delta(q)|. \quad (3.74)$$

Член $\Delta(q)$ отвечает за взаимодействие между двумя модами. При малых ql_B он пропорционален двумерному обобщенному импульсу [73]. Параметр α описывает силу связи. Экспериментальные значения α в зависимости от обменной энергии и, соответственно, K приведены на вставке к рис. 3.16. Видно, что при увеличении обменной энергии на нулевом уровне Ландау взаимодействие растет.

Спектр STQ-жидкости помогает объяснить эксперименты по релаксации ядерных и электронных спинов в ДЭС на основе GaAs [90, 95]. На рис. 3.17 показано немонотонное поведение спиновой релаксации при факторах заполнения $\nu = 1$ и $\nu = 3$, которое можно объяснить, учитывая «циклотронные» моды STQ. Когда энергия «циклотронной» моды лежит ниже зеemanовской щели, скорость ядерной спиновой релаксации резко возрастает. В этом случае скорость релаксации определяется испусканием ядерной подсистемой «циклотронных» STQ-мод. Как только энергия «циклотронной» моды превышает зеemanовскую щель, скорость релаксации начинает падать. Когда энергия «циклотронной» STQ-моды значительно превышает зеemanовскую щель, скорость релаксации определяется низкоэнергетическими спиновыми экситонами, и зависимость скорости релаксации от плотности STQ становится монотонной. Отметим, что теория скирмионного кристалла, в отличие от теории STQ-жидкости, объясняет только уменьшение времени релаксации ядерного спина, но не дает объяснения немонотонного поведения скорости релаксации в зависимости от плотности STQ [89].

В заключение мы кратко опишем новые физические проблемы, возникающие из представленных экспериментальных результатов. Концепция скирмионного кристалла — это не просто теоретическое изобретение для описания нетривиального поведения спиновой поляризации двумерной электронной системы. Это новое состояние вещества, наблюдаемое экспериментально в трехмерных

хиральных магнетиках. Однако сам факт существования скирмионного кристалла не доказывает его актуальности в применении к двумерным электронным системам. Подобное уже случилось.

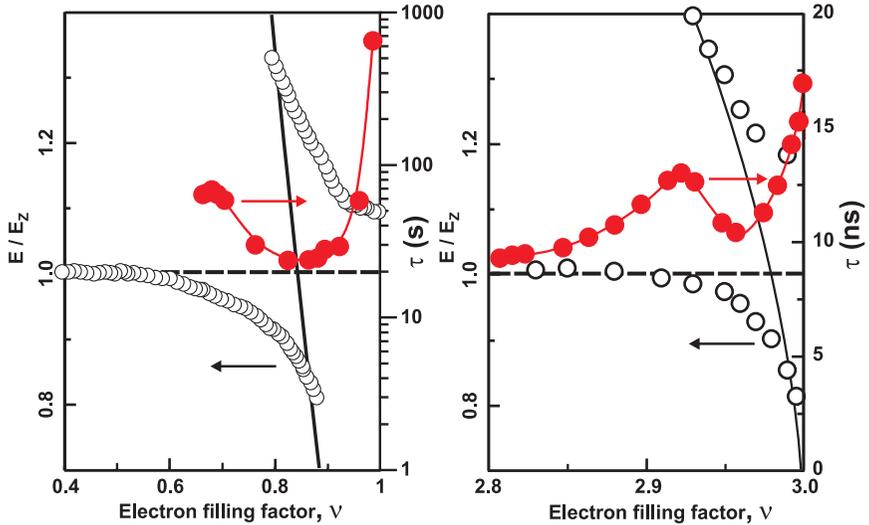


Рис. 3.17. Слева: энергии линий НРС в зависимости от фактора заполнения $\nu \leq 1$ при 6,46Тл и времена релаксации ядерного спина при 7,05 и 9,39Тл из работы [90]. Справа: энергии линий НРС в зависимости от фактора заполнения $\nu \leq 3$ при 1,9Тл и времена релаксации электронного спина при 2,2 и 2,7Тл из работы [95]. Штриховые линии обозначают зеемановскую энергию. Сплошные линии нанесены для удобства

Долгое время в качестве основного состояния ДЭС предлагался вигнеровский кристалл. Однако предпочтительней оказалась волновая функция Лафлина, которая описывает жидкость в качестве основного состояния. Приведенные выше экспериментальные данные показывают, что нечто подобное происходит и со скирмионным кристаллом. Спектр возбуждений имеет ряд новых свойств, не описываемых существующими теориями. Во-первых, эффективное число перевернутых спинов K не является хорошим параметром для описания STQ-жидкости, поскольку существенной разницы в спектре ее возбуждений при последовательном изменении K от 0 до 3 не наблюдается. Данное обстоятельство может указывать на то, что флуктуации K настолько сильны, что не существует определенных границ между соседними состояниями скирмионов с различными K . Во-вторых, спин-текстурная жидкость существует не только при $\nu = 1$, но и при $\nu = 3$, и, скорее всего, даже

при $\nu = 5$, что противоречит теории STQ [95]. В-третьих, явление связывания двух ветвей спиновых возбуждений, «циклотронной» моды и спинового экситона, не предсказывается существующими теориями.

Рассмотрим результаты исследования [96] дефазировки спина в условиях, когда существенную роль в релаксации неравновесных спиновых состояний играют возбуждения (STQ) спинтекстурной жидкости в окрестности факторов заполнения $\nu = 1$ и $\nu = 3$ [73, 97]. Эксперименты проводились на GaAs/AlGaAs гетероструктурах с одиночной квантовой ямой. На рис. 3.18 показан

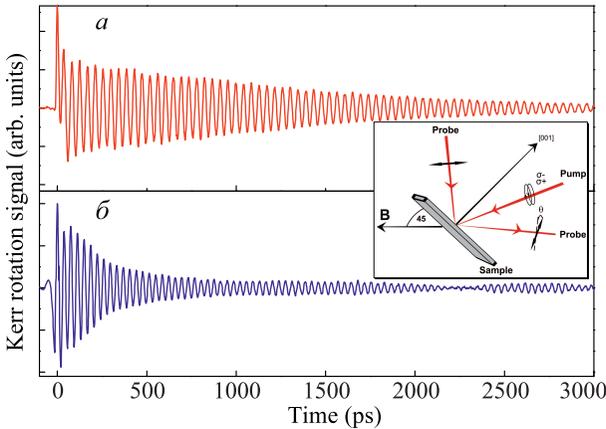


Рис. 3.18. Керровский сигнал вблизи фактора заполнения $\nu = 3$: *a* — при $B = 4,65$ Тл и электронной концентрации $2,4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$; *б* — при $B = 4,5$ Тл и электронной концентрации $0,7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. На вставке показана геометрия эксперимента

керровский сигнал, который соответствует оптическому переходу из валентной зоны на нижний, частично заполненный, спиновый подуровень Ландау вблизи $\nu = 1$ и $\nu = 3$.

Оказывается, что аналогично зависимости времени релаксации ядерных спинов, локализованных в квантовой яме [90], зависимость времени дефазировки спинового экситона $T_{S_2}^e$ является немонотонной функцией фактора заполнения (рис. 3.19). В работе [73] показано, что немонотонную зависимость времени релаксации ядерных спинов от фактора заполнения можно объяснить возникновением нового канала спиновой релаксации. В ДЭС формируются спиновые возбуждения с энергией существенно меньше земановской энергии. Соответственно, уменьшение времени жизни ядерного спина объясняется появлением низкоэнергетического ка-

нала релаксации, связанного с этими возбуждениями [78]. Немонотонность зависимости времени релаксации объясняется тем, что энергия новых спиновых возбуждений может превысить земановскую энергию при определенном факторе заполнения, и выгода для релаксации ядерных спинов от существования данных возбуждений нивелируется. Сами спиновые возбуждения имеют смысл переходов между «эффективными циклотронными уровнями» электронных спинов, обусловленных фазой Берри, которая приобретает во время прецессии электронного спина вокруг спиновых текстур в условиях формирования нового основного состояния ДЭС — спин-текстурной жидкости. Энергия межуровневых переходов будет тем больше, чем больше плотность спиновых текстур. В рамках теоретических оценок работы [78] эта энергия

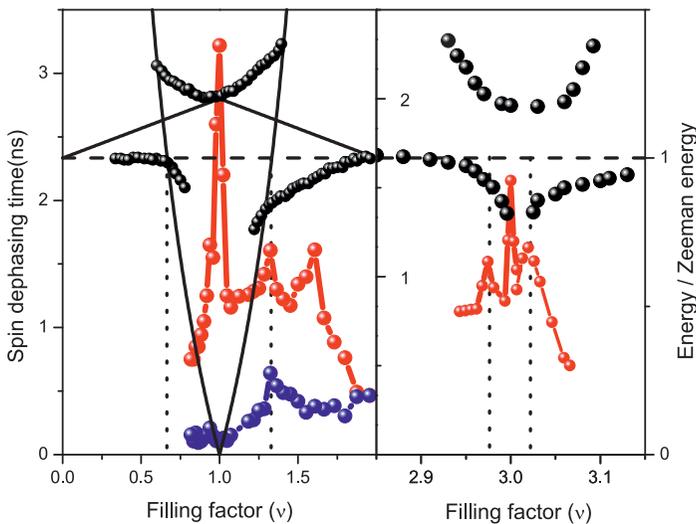


Рис. 3.19. Время затухания керровского сигнала (левая вертикальная ось), зарегистрированного в спектральной позиции, соответствующей нижнему по энергии оптическому переходу (красные точки) и более высокому по энергии оптическому переходу (синие точки) в зависимости от фактора заполнения: *a* — вблизи $\nu = 1$ ($B = 4,5$ Тл, электронная концентрация $2,4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$); *b* — вблизи $\nu = 3$ ($B = 4,65$ Тл, электронная концентрация $0,7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$). Сплошными линиями показаны теоретические зависимости для энергий «циклотронных» возбуждений спин-текстурной жидкости, полученные по формуле (3.75), и энергии спинового экситона, полученные в приближении Хартри–Фока [94]. Штриховой линией показана ларморовская энергия. Пунктирные линии проведены для удобства читателя. Черными точками показаны энергии коллективных спиновых возбуждений (правая вертикальная ось), измеренные в [73]

для электронов на нулевом уровне Ландау пропорциональна плотности спиновых текстур и обменной энергии:

$$\hbar\omega'_c = \frac{1}{2}E_x \frac{(1-\nu)}{\nu}, \quad (3.75)$$

где E_x — обменная энергия [78].

На рис. 3.19 показан результат экспоненциальной аппроксимации экспериментальных кривых амплитуды керровского вращения и определенное из этой аппроксимации время спиновой дефазировки. Максимумы времен соответствуют факторам заполнения $\nu = 1$ и 3. При отдалении от целочисленных факторов заполнения наблюдается уменьшение времени дефазировки и, так же, как для ядерных спинов, последующее возрастание. Увеличение времен наблюдается в окрестности энергетического резонанса спинового экситона и возбуждений спин-текстурной жидкости. Поэтому можно сделать вывод о том, что в механизме дефазировки спинового голдстоуновского экситона вблизи целочисленных факторов заполнения важную роль играют спиновые возбуждения спин-текстурных жидкостей.

ДРОБНЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА**4.1. Роль кулоновского взаимодействия**

Было показано, что ЦКЭХ можно объяснить на основе одночастичного представления ДЭС с учетом случайного потенциала, который ведет к образованию локализованных состояний. При целочисленном факторе заполнения ν добавление дополнительного электрона в систему требует затраты энергии $\hbar\omega_c$. В таком случае говорят, что система становится несжимаемой, т. е. бесконечно малое уменьшение магнитного поля, и, соответственно, увеличение области $2\pi l_B^2$, приходящейся на одно квантовое состояние, не соответствует бесконечно малому изменению энергии системы ввиду наличия щели в энергетическом спектре. С учетом такой картины наблюдение ДКЭХ при факторах заполнения $\nu = 1/3$ с $R_H = h/e^2\nu = 3h/e^2$ [13] (а позднее — и при других значениях ν) стало большой неожиданностью. Действительно, в одночастичном приближении основное состояние системы при $\nu = 1/3$ сильно вырождено, и энергетической щели не существует. Объяснить наличие холловских плато при дробных значениях фактора заполнения можно, если учесть кулоновское взаимодействие между электронами.

Коллективные возбуждения двумерной электронной системы в режиме ЦКЭХ — такие, например, как магнитоплазмоны и магнитоэкситоны, — можно описать с помощью теории возмущений. Однако в случае ДКЭХ основное состояние системы не может быть получено по теории возмущений как малая поправка к основному состоянию невзаимодействующих электронов. Первая попытка описать основное состояние системы с дробным фактором заполнения состояла в том, что при постепенном уменьшении плотности электроны образуют кристаллическую решетку (вигнеровский кристалл) [7, 98]. Однако оказалось, что это состояние сжимаемо, поэтому оно не может претендовать на основное состояние ДЭС в режиме ДКЭХ.

4.2. Волновая функция Лафлина

В 1983 г. Р. Лафлин предложил объяснение ДКЭХ при $\nu = 1/(2s + 1)$ [10]. Согласно его теории, при низкой температуре в сильном магнитном поле электронный газ конденсируется в несжимаемую квантовую жидкость. Р. Лафлин подобрал волновую функцию для описания основного состояния такой системы и предсказал существование возбуждений с дробным зарядом, которые возникают при небольшом отклонении фактора заполнения от $\nu = 1/(2s + 1)$. Существует точка зрения, что экспериментально квазичастицы с дробным зарядом $e^* = e/3$ наблюдались при $\nu = 1/3$ в исследованиях дробового шума в 1997 г. [99, 100]. Однако впоследствии данные экспериментальные результаты были объяснены без привлечения дробного заряда. Предсказание возбуждений с дробным зарядом подтолкнуло исследователей к проведению серии экспериментов [14, 101, 102], которые свидетельствовали в пользу дробной статистики лафлиновских квазичастиц [103].

Прежде чем рассматривать предложенные Лафлином волновые функции основного состояния, вспомним, как выглядит одночастичная волновая функция нижнего уровня Ландау. Как было показано в предыдущей главе, она представляется в виде произведения некой аналитической функции и гауссиана:

$$\Psi \sim z^{m'} e^{-|z|^2/4}, \quad (4.1)$$

где $m' = 0, \dots, N_B - 1$ — целое число, а $z = (x - iy)/l_B$. Эти волновые функции являются собственными для оператора момента импульса:

$$J = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \hbar(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) \Rightarrow J\Psi_m = \hbar m\Psi_m. \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим систему из двух частиц с потенциалом взаимодействия $V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, так что $\hbar\omega_c \gg V$. Волновая функция такой системы должна содержать аналитическую функцию от двух переменных — координат z_1 и z_2 первой и второй частиц соответственно, а также быть суперпозицией волновых функций двух невзаимодействующих электронов:

$$\Psi \sim (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2)/4l_B^2}, \quad (4.3)$$

где M и m — неотрицательные целые числа, так что M определяет момент импульса центра масс, а m — момент импульса относительно центра масс. Волновая функция, предложенная Лафлином,

есть не что иное, как обобщение двухчастичной волновой функции (4.3) на случай N частиц [10]

$$\Psi_m^L(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^N |z_i|^2 / 4l_B^2}. \quad (4.4)$$

Ввиду того, что электроны подчиняются статистике Ферми и волновая функция системы антисимметрична, m может принимать только нечетные значения.

Теперь покажем, что число m полностью определяется фактором заполнения ν . Рассмотрим волновую функцию Лафлина системы из N частиц как функцию от координаты одного выбранного электрона, например, первого с координатой z_1 :

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \sim \prod_{i=2}^N (z_1 - z_i)^m. \quad (4.5)$$

Видно, что z_1 входит в волновую функцию со степенью $m(N-1)$. Это, в свою очередь, говорит о том, что максимальный момент импульса первой частицы равен $m(N-1)$, а максимальный радиус $R \approx \sqrt{2mN}l_B$. Тогда число возможных состояний равно $2\pi m N l_B^2 / 2\pi l_B^2 \approx mN$. Отсюда получаем фактор заполнения

$$\nu = \frac{N}{N_B} = \frac{1}{m} = \frac{1}{2s+1}, \quad (4.6)$$

где s — целое число.

Случай полностью заполненного уровня Ландау. Согласно вышесказанному, случай полностью заполненного уровня Ландау с $\nu = 1$ должен описываться лафлиновской волновой функцией с $m = 1$. Для проверки этого утверждения построим волновую функцию невзаимодействующих электронов с помощью детерминанта Слэтера:

$$\Psi(z_j) = f_N(z_j) e^{-\sum_j |z_j|^2 / 4l_B^2},$$

$$f_N(z_j) = \det \begin{pmatrix} z_1^0 & z_1^1 & \dots & z_1^{N-1} \\ z_2^0 & z_2^1 & \dots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^0 & z_N^1 & \dots & z_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Определитель учитывает все перестановки N частиц по N координатам частиц z_1, \dots, z_N , и может быть переписан с помощью так

называемого определителя Вандермонда:

$$f_N(z_j) = \prod_{i < j} (z_i - z_j). \quad (4.8)$$

Сравнивая с выражением (4.4), видим, что (4.8) соответствует полиномиальной части волновой функции Лафлина при $m = 1$.

Итак, мы получили волновую функцию N частиц из симметричных соображений, однако не показали, что она действительно описывает основное состояние системы в режиме ДКЭХ. Поэтому в следующих параграфах мы обсудим основные физические свойства этого, на данный момент довольно абстрактного, математического объекта. На первом этапе мы рассмотрим некоторые энергетические свойства основного состояния и покажем, что волновая функция Лафлина является точным основным состоянием для определенного класса физических моделей, качественно описывающих кулоновское взаимодействие. Затем мы обсудим квази-частичные возбуждения основного состояния с дробным зарядом.

4.3. Псевдопотенциалы Холдейна

Чтобы описать энергетические свойства волновой функции Лафлина (4.4), рассмотрим снова двухчастичную волновую функцию (4.3). Обратим внимание, что эта волновая функция является точным собственным состоянием для любого центрального потенциала взаимодействия, который зависит только от относительной координаты между парами частиц, как, например, в случае кулоновского взаимодействия, $V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Энергии взаимодействия пар частиц с относительным угловым моментом m задаются значениями

$$v_m \equiv \frac{\langle m, M | V | m, M \rangle}{\langle m, M | m, M \rangle}, \quad (4.9)$$

которые называются псевдопотенциалами Холдейна [12]. Видно, что в случае центрального потенциала взаимодействия они не зависят от общего момента импульса системы M . Также недиагональные элементы $\langle m, M | V | m', M \rangle$ с $m \neq m'$ равны нулю, так как в полярных координатах, $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$\langle m, M | V | m', M \rangle \propto \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho^{m+m'+1} V(\rho) e^{-i(m-m')\varphi} \propto \delta_{m,m'}.$$

Обратим внимание на одну особенность: обычно наличие отталкивающего взаимодействия порождает несвязанные состояния

с непрерывным энергетическим спектром. Однако в данном случае, несмотря на кулоновское отталкивание между электронами, энергетический спектр является дискретным из-за наличия квантующего магнитного поля. Каждое состояние $|m, M\rangle$ описывает связанное состояние двух взаимодействующих частиц. Если пара электронов находится в состоянии с относительным угловым моментом m , то среднее расстояние между ними $r \sim l_B \sqrt{2m}$. Следовательно, псевдопотенциал Холдейна v_m приблизительно равен исходному потенциалу взаимодействия на относительном расстоянии $l_B \sqrt{2m}$:

$$v_m \simeq V(r = l_B \sqrt{2m}), \quad (4.10)$$

и псевдопотенциалы с малыми m соответствуют короткодействующей составляющей реального потенциала взаимодействия.

Псевдопотенциалы Холдейна также позволяют описать состояние системы из N частиц. Действительно, гамильтониан взаимодействия N частиц представляется в виде

$$V = \sum_{i < j} V(|z_i - z_j|) = \sum_{i < j} \sum_{m'=0}^{\infty} v_{m'} P_{m'}(ij), \quad (4.11)$$

где оператор $P_{m'}(ij)$ проецирует пару электронов ij на состояние с относительным угловым моментом m' . Заметим, что из-за наличия множителя $\prod_{k < l} (z_k - z_l)^m$ в волновой функции Лафлина (4.4) ни одна пара частиц не находится в состоянии с относительным угловым моментом $m' < m$. Если выбрать псевдопотенциалы в виде

$$v'_m = \begin{cases} 1 & \text{для } m' < m, \\ 0 & \text{для } m' \geq m, \end{cases} \quad (4.12)$$

получим $\Psi_m^L = 0$, т. е. в модели (4.12) волновая функция Лафлина соответствует состоянию с нулевой энергией. Так как модель описывает отталкивающее взаимодействие, то все возможные состояния должны иметь энергию $E \geq 0$. Отсюда следует, что волновая функция Лафлина точно определяет основное состояние системы с потенциалом взаимодействия вида (4.12). Кроме того, это единственное состояние с нулевой энергией, потому что если считать общее число частиц и квантов магнитного потока постоянным, то любое другое состояние, отличное от того, которое описывается волновой функцией Лафлина, включает пару частиц в состоянии с квантовым числом оператора углового момента, отличным

от m . Если оно меньше, чем m , то на эту пару частиц воздействует соответствующий ненулевой псевдопотенциал с m' так, что энергия уменьшается на $v_{m'}$. Если пара частиц находится в состоянии с $m' > m$, то существует по крайней мере одна другая пара с $m'' < m$ (фактор заполнения фиксирован), которая повышает энергию. Эти рассуждения показывают, что любое возбужденное состояние включает в себя конечную положительную энергию, заданную псевдопотенциалом $v_{m'}$ с $m' < m$, которая играет роль энергетической щели. В этом смысле состояние, описываемое волновой функцией Лафлина, действительно является несжимаемым. Приведенные рассуждения основаны на достаточно искусственной модели взаимодействия (4.12), которая, на первый взгляд, имеет мало общего с реальным потенциалом кулоновского отталкивания. Однако модель часто и достаточно успешно используется в численных расчетах лафлиновских состояний [104, 105].

Отметим также, что, помимо успешной проверки расчетами с точной диагонализацией [104, 105], Р. Лафлин в своей работе [10] показал с помощью вариационного расчета, что квантовая жидкость, описываемая волновой функцией (4.4), действительно имеет более низкую энергию, чем вигнеровский кристалл. Данный результат следует из свойства волновой функции Лафлина, которая при сближении двух частиц i и j изменяется как $|z_i - z_j|^{2m}$, экранировать короткодействующие слагаемые в потенциале взаимодействия. Заметим, что для вигнеровского кристалла из фермионов соответствующая волновая функция N частиц убывает как $|z_i - z_j|^2$ согласно принципу Паули.

4.4. Квазичастицы с дробным зарядом

До этого момента мы обсуждали некоторые основные свойства волновой функции Лафлина. Было показано, что состояние Лафлина при $\nu = 1/m$ нечувствительно к короткодействующим слагаемым в потенциале взаимодействия, которые описываются псевдопотенциалами Холдейна $v_{m'}$ с $m' < m$, тогда как возбужденные состояния должны быть отделены от основного состояния энергетическим зазором, определенным этими короткодействующими псевдопотенциалами. В данном параграфе мы охарактеризуем природу этих возбуждений.

Существуют два вида возбуждений: элементарные возбуждения (квазичастицы и квазидырки), которые можно получить путем добавления или удаления заряда из системы, и коллективные возбуждения при фиксированном заряде системы. Последние

представляют собой возбуждения волн зарядовой плотности, которые состоят из суперпозиции возбуждений «частица–дырка» при фиксированном волновом векторе q и имеют щель в энергетическом спектре при $q = 0$. При конечном волновом векторе в их дисперсии наблюдается так называемый магниторотонный минимум, который предшествует вигнеровской кристаллизации. Более подробное обсуждение коллективных возбуждений приведено в работах [15, 37, 106]. Здесь мы сконцентрируемся на представлении элементарных возбуждений.

4.4.1. Квазидырки. Рассмотрим элементарные возбуждения системы с основным состоянием, описываемым волновой функцией Лафлина. Как обсуждалось ранее, число квантов потока связано с числом нулей в волновой функции Лафлина (4.4). Отсюда для системы из N частиц, содержащей одну квазидырку, и $\nu = 1/m$ (m — нечетное число) выберем волновую функцию в виде

$$\Psi_{\text{qh}}(z_0, \{z_j, \bar{z}_j\}) = \prod_{j=1}^N (z_j - z_0) \Psi_m^L(\{z_j, \bar{z}_j\}), \quad (4.13)$$

где z_0 — координата дырки. Видно, что электронная плотность обращается в нуль в точке z_0 . Теперь покажем, что выбор волновой функции в таком виде добавляет квант магнитного потока в систему. Для этого представим функцию Лафлина в виде

$$\Psi_m^L(\{z_j, \bar{z}_j\}) = \sum_{m_i} \alpha_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N} e^{-\sum_j |z_j|^2/4}, \quad (4.14)$$

где α_{m_1, \dots, m_N} — некоторые коэффициенты. Теперь пусть координата z_0 совпадает с центром образца в форме диска. Тогда волновая функция возбужденного состояния (4.13) примет вид

$$\Psi_{\text{qh}}(z_0, \{z_j, \bar{z}_j\}) = \sum_{m_i} \alpha_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1+1} \dots z_N^{m_N+1} e^{-\sum_j |z_j|^2/4}. \quad (4.15)$$

Заметим, что показатель степени координаты у каждого электрона увеличился на единицу, $m_i \rightarrow m_i + 1$. Поэтому можно представить себе этот процесс как переход каждого электрона из состояния с угловым моментом m в состояние с $m + 1$, при котором состояние с $m = 0$ остается пустым (рис. 4.1). Это возбуждение называется квазидыркой и описывается введенной выше волновой функцией (4.13). При этом площадь, занимаемая электронами, увеличивается на площадь, соответствующую одному кванту

магнитного потока, а полное число электронов в системе остается постоянным. С другой стороны, увеличение магнитного поля означает, что площадь, приходящаяся на один электрон, уменьшается, так что в системе помещается еще одно квантовое состояние, и $M = N_B \rightarrow N_B + 1$. Более того, если представить (4.13) в виде

$$\Psi_{\text{qh}}(z_0 = 0, \{z_j, \bar{z}_j\}) \propto \prod_j^N e^{-i\Theta_j} \cdot \Psi_m^L(\{z_j, \bar{z}_j\}), \quad (4.16)$$

то видно, что квазидырка ассоциируется с вихревым потоком. То есть каждая частица, вращающаяся вокруг $z_0 = 0$, испытывает дополнительное смещение фазы на 2π . Это напоминает вихревые возбуждения в сверхпроводниках второго рода [107].

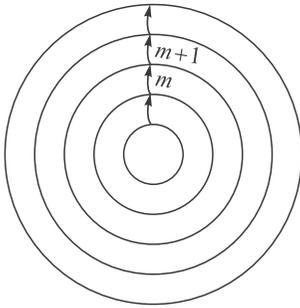


Рис. 4.1. Схематичное изображение перехода электрона из состояния с угловым моментом m в состояние с угловым моментом $m + 1$

Итак, мы показали, как можно создать квазидырку с координатой z_0 путем введения дополнительного кванта магнитного потока ($N_B \rightarrow N_B + 1$), так что это приводит к небольшому уменьшению фактора заполнения. Теперь определим заряд данного элементарного возбуждения. Для этого скомпенсируем лишний квант магнитного потока введением некоторого отрицательного заряда так, чтобы фактор заполнения не изменился при введении квазидырки. Заметим, что изменение числа квантов магнитного потока ΔN_B и число дополнительных электронов ΔN связаны соотношением $m\Delta N = \Delta N_B$. Отсюда видно, что для компенсации одного кванта магнитного потока потребуется m -я часть заряда электрона. То есть квазидырка обладает дробным зарядом $e^* = +e/m$.

4.4.2. Квазичастицы. Помимо квазидырок существуют элементарные возбуждения с дробным зарядом $e^* = -e/m$, которые называются квазичастицами. Волновые функции, описывающие состояния системы с квазичастицами, выглядят несколько сложнее, чем для системы с квазидырками. Действительно, в случае наличия квазидырки в центре образца достаточно было умножить волновую функцию Лафлина на $\prod_j z_j$, увеличив тем самым относительный угловой момент пары электронов. Теперь же нам нужно увеличить плотность электронов, и, соответственно, уменьшить относительный угловой момент. Простое деление на $\prod_j z_j$ приво-

дит к сингулярности. Мы также не можем умножить на $\prod_j \bar{z}_j$, потому что результирующая волновая функция не будет соответствовать нижнему уровню Ландау. Поэтому волновую функцию квазичастичного возбуждения представляют в виде

$$\Psi_{qp}(z_0, \{z_j, \bar{z}_j\}) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{j=1}^N (\bar{z}_j - \bar{z}_0) \Psi_m^L(\{z_j, \bar{z}_j\}), \quad (4.17)$$

где \mathcal{P}_{LLL} — оператор проекции на нижний уровень Ландау. Одним из способов учесть действие этого оператора является замена \bar{z}_j на производные по z_j [108]. Тогда волновая функция квазичастичного возбуждения принимает следующий вид:

$$\Psi_{qp}(z_0, \{z_j, \bar{z}_j\}) = \left[\prod_j^N \left(2 \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_0 \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \right] e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2}. \quad (4.18)$$

4.4.3. Аналогия с плазмой. Некоторые свойства волновых функций Лафлина для несжимаемых основных состояний и для частично заряженных квазичастичных состояний можно рассчитать, используя аналогию с классической двумерной плазмой. Аналогия основана на интерпретации квадрата многоэлектронной волновой функции как функции распределения канонического ансамбля для классической системы взаимодействующих частиц. Возьмем квадрат модуля лафлиновской волновой функции

$$|\Psi_m^L(z_i)|^2 = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2m} e^{-\sum_i |z_i|^2 / 2l_B^2} \quad (4.19)$$

и, используя распределение Больцмана из статистической механики, получим

$$|\Psi_m^L(z_i)|^2 = e^{-\beta U_m(z_i)}, \quad (4.20)$$

где

$$\beta U_m(z_i) = -2m \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \sum_i \frac{|z_i|^2}{2l_B^2}. \quad (4.21)$$

Как известно, в случае нейтральной классической двумерной плазмы взаимодействие задается в виде

$$V(r) = -e^2 \sum_{i < j} \ln r_{ij} + \frac{1}{2} \pi r e^2 \sum_i r_i^2, \quad (4.22)$$

где первое слагаемое описывает кулоновское взаимодействие между двумерными частицами, а второе отражает взаимодействие частиц с компенсирующим положительно заряженным фоном. Если принять $\beta = 2/m$, то

$$U_m(z_i) = -m^2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{m}{2} \sum_i \frac{|z_i|^2}{2l_B^2}. \quad (4.23)$$

Тогда из (4.21) и (4.22) видно, что волновая функция Лафлина описывает классическую плазму из частиц с зарядом $e = m$ и $\rho_m = 1/(2\pi l_B^2 m)$. Плотность частиц ρ_m определяется фактором заполнения $\nu = 1/m$, где m — нечетное целое число. Данная аналогия очень полезна. Она позволяет предполагать, что частицы системы, состояние которой описывается лафлиновскими волновыми функциями, распределяются так, чтобы компенсировать фоновый заряд в каждой точке системы. Численные расчеты показывают, что лафлиновские состояния описывают квантово-холловскую жидкость до $m \approx 70$, а при $m \gtrsim 70$ плазма переходит в твердое состояние (однако при таких больших m лафлиновские волновые функции уже перестают описывать основное состояние системы в режиме ДКЭХ). Благодаря использованию методов решения задач из физики плазмы удалось вычислить с высокой точностью энергии ψ_L , а также парные корреляционные функции [109, 110].

4.5. Дробная статистика

4.5.1. Бозоны, фермионы и энионы. Мы привыкли, что согласно квантовой механике частицы в трехмерном пространстве делятся на два типа: бозоны и фермионы. Однако оказывается, что в двумерной плоскости это не так и существуют частицы, подчиняющиеся дробной статистике. Их называют энионами (anyon) от слова «ану», подразумевая, что их статистика может быть любой. В этой главе мы рассмотрим лишь основные аспекты теории, избегая сложных математических выкладок. Для более подробного изучения данной темы отсылаем читателя к работе [111].

Если взять две одинаковые частицы, описываемые волновой функцией $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, и поменять их местами, то плотность вероятности обнаружения частиц в соответствующих координатах не изменится. То есть $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2$, и после перестановки частиц волновые функции отличаются только фазой

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\alpha} \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (4.24)$$

Теперь поменяем частицы местами еще раз. Такая последовательная перестановка эквивалентна тривиальной перестановке (или вращению), когда обе частицы остаются на своих местах. Поэтому при однократной перестановке волновая функция должна домножаться на число, которое в квадрате дает единицу:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\alpha}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Rightarrow e^{2i\pi\alpha} = 1. \quad (4.25)$$

Отсюда получаются два варианта решения: для бозонов $\alpha = 0$, а для фермионов $\alpha = 1$. Выражаясь математическим языком, на системе из тождественных частиц действует группа перестановок, и бозоны/фермионы реализуют симметричное/антисимметричное представление этой группы.

Однако в этих рассуждениях мы строго не определили, каким образом следует переставлять частицы. Мы сразу предположили,

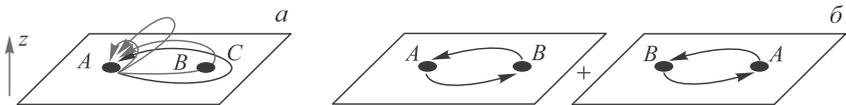


Рис. 4.2. Изображение перестановок частиц в трехмерном пространстве (а) и на плоскости (б)

что тривиальная перестановка эквивалентна двум последовательным перестановкам частиц. То есть наш результат не зависел от того, по какому пути перемещались частицы, чтобы встать на места друг друга. Действительно, в трехмерном пространстве это оказывается верным, так как любой замкнутый путь можно непрерывно стянуть в точку, «не затрагивая» при этом вторую точку (рис. 4.2а). На двумерной же плоскости все происходит наоборот (рис. 4.2б). Сначала заметим, что две последовательные перестановки частиц эквивалентны перемещению одной частицы вокруг неподвижной второй частицы. Тогда перемещения при перестановке делятся на два типа: можно обойти вторую частицу по часовой стрелке и против. Также из-за отсутствия третьей степени свободы замкнутый путь вокруг второй точки больше нельзя стянуть в точку. Получается, что две последовательные перестановки частиц в двумерном пространстве не эквивалентны тривиальной перестановке. В итоге нарушается требование, чтобы квадрат числа, на которое мы умножаем волновую функцию, давал единицу. Это означает, что при перестановке двух тождественных двумерных частиц волновая функция может домножаться на любой фазовый множитель. Для определенности примем, что при перестановке

против часовой стрелки

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\alpha}\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (4.26)$$

а при перемещении по часовой стрелке волновая функция домножится на $e^{-i\pi\alpha}$, где α — статистический угол. Частицы с $\alpha \neq 0, 1$ называются энионами (anyonons) с дробной статистикой. Впервые различие в топологии между трехмерным и двумерным случаями было отмечено в работах [103] и [112, 113], и показано, что оно приводит к совершенно другим свойствам двумерных квантовых систем. Согласно работам Ф. Вильчека обобщение связи спина и статистики частиц выражается в виде возникновения дополнительной фазы в волновой функции после перестановки частиц. Таким образом, спин s соответствует статистике $e^{2\pi is}$.

Пусть имеется частица с зарядом q , которая вращается вокруг соленоида, расположенного вдоль оси z . Если нет тока, протекающего через соленоид, то угловой момент квантуется так, что l_z — целое число. Медленно включим ток, тогда частица почувствует электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -[2\pi(x^2 + y^2)]^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}\dot{\Phi}$ согласно закону Фарадея, где $\dot{\Phi}$ — магнитный поток через соленоид. Отсюда получаем изменение углового момента:

$$\dot{l}_z = [\mathbf{r} \times (q\mathbf{E})]_z = -\frac{q}{2\pi}\dot{\Phi}. \quad (4.27)$$

Изменение углового момента зависит только от конечного магнитного потока, $\Delta l_z = -q\dot{\Phi}/(2\pi)$. Отсюда для углового момента l_z получаем

$$l_z = \text{целое число} - \frac{q\Phi}{2\pi}. \quad (4.28)$$

Аналогичный результат можно получить следующим образом. Несмотря на то, что вне соленоида магнитное поле равно нулю, в квантовой механике частица чувствует векторный потенциал $A_\varphi = \dot{\Phi}/(2\pi r)$, и волновая функция $\psi \propto e^{im\varphi}$, где m — целое число. Для удобства избавимся от векторного потенциала вне соленоида с помощью калибровочного преобразования

$$A'_i = A_i - \partial\Lambda = 0, \quad \Lambda = \frac{\dot{\Phi}\varphi}{2\pi}. \quad (4.29)$$

Функция Λ однако определена неоднозначно и периодична по φ с периодом 2π . Теперь волновая функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера с граничным условием

$$\psi'(\varphi) = e^{iq\dot{\Phi}\varphi/(2\pi)}\psi(\varphi). \quad (4.30)$$

Так как $\psi(\varphi)$ 2π -периодичная функция, используя (4.30), получаем

$$\psi'(\varphi + 2\pi) = e^{iq\Phi} \psi'(\varphi). \quad (4.31)$$

Отсюда следует, что $l_z =$ целое число $+ q\Phi/(2\pi)$. Если l_z — целое число, то фазовый множитель равен единице, и статистика является «обычной» (например, в случае композитной частицы, состоящей из электрона и кванта магнитного потока, статистика будет фермионной). Если l_z — полуцелое, то также сохраняется обычная статистика. При промежуточных же значениях композитные частицы больше не являются бозонами или фермионами, и возникает дробная статистика.

4.5.2. Статистические свойства квазичастиц Лафлина. Теперь мы можем применить приведенные выше общие статистические соображения к случаю квазичастиц Лафлина. Основная идея состоит в том, чтобы описать статистический угол как фазу Ааронова–Бома, возникающую из-за некоторого калибровочного поля \mathbf{A}_M , связанного с магнитным потоком $\mathbf{B}_M S$ ($\mathbf{B}_M = \text{rot } \mathbf{A}_M$) через поверхность S , ограниченную замкнутым контуром l , по которой движется частица. Рассмотрим случай, когда область S заполнена электронами $N_{\text{el}}(S)$, сконденсированными в несжимаемую квантовую жидкость, которая описывается квазичастичными возбуждениями волновой функции Лафлина (4.4) и $N_{\text{qh}}(S)$ дырочными возбуждениями (4.13), так что есть два вклада в поток

$$B_M S = N_{\text{flux}} \frac{\hbar}{e} = (mN_{\text{el}}(S) + N_{\text{qh}}(S)) \frac{\hbar}{e}. \quad (4.32)$$

Соответствующая фаза Ааронова–Бома, которую квазичастица приобретает при обходе области S по пути l , определяется выражением

$$\Gamma_{A-B} = 2\pi \frac{e^*}{\hbar} \oint_l \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2\pi \frac{e^*}{\hbar} \int_S B_M(\mathbf{r}) d^2r, \quad (4.33)$$

где $e^* = e/m$ — заряд квазичастицы. Таким образом, фаза Ааронова–Бома имеет два вклада: Γ_{el} из-за наличия электронов, и Γ_{qh} , обусловленный квазидырками. Из уравнения (4.32) для электронов получаем

$$\Gamma_{\text{el}} = 2\pi \frac{e^*}{e} m N_{\text{el}} = 2\pi N_{\text{el}}. \quad (4.34)$$

Обратим внимание, что этот вклад в фазу Ааронова–Бома не может быть истолкован в терминах статистического угла, поскольку

он не описывает истинный процесс обмена. Участвующие частицы не одного типа — мы выбрали квазичастицу для перемещения по пути, охватывающему электроны. Однако если выбрать для обхода пути l электрон, а не квазичастицу, то

$$\Gamma_{el-el} = 2\pi \frac{e}{e} m N_{el}, \quad (4.35)$$

и статистический угол $\alpha = m N_{el}$. Если в области S находится только один электрон ($N_{el} = 1$), то статистический угол представляет собой просто нечетное целое число m , причем равное 1, как и должно быть для фермионов.

Более интересная ситуация возникает, когда путь охватывает квазидырки Лафлина, и в этом случае фаза Ааронова–Бома

$$\Gamma_{qh} = 2\pi \frac{e^*}{e} N_{qh} = 2\pi \frac{N_{qh}}{m}. \quad (4.36)$$

Если в области S находится только одна квазидырка ($N_{qh} = 1$), то получается довольно необычная ситуация: фаза Ааронова–Бома равна $2\pi/m$, и соответствующий статистический угол принимает дробные значения $\alpha = 1/m$. Это значит, что квазидырки Лафлина действительно являются энионами с дробной статистикой, как упоминалось выше.

4.5.3. Неабелевы энионы. С точки зрения математики дробная статистика отвечает не группе перестановок, а группе кос, для которых важна топология переставления. Одномерное представление группы кос отвечает абелевым энионам. Как было показано ранее, некоторые из них соответствуют лафлиновским состояниям. Но, оказывается, существуют еще более экзотические многомерные представления группы кос. Они называются неабелевыми энионами. Неабелева статистика означает, что если у нас есть несколько тождественных частиц, то перестановки в разных парах не коммутируют друг с другом. Элемент группы кос можно представить, думая о траекториях частиц как о мировых линиях в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени, как показано на рис. 4.3. Направление времени будет отображаться вертикально снизу вверх. Чтобы представить элемент класса, мы рисуем траектории с начальной и конечной точками, упорядоченными во времени. Необходимо различать, когда одна траектория проходит над или под другой, что соответствует обмену по часовой стрелке или против часовой стрелки. Затем умножение двух элементов группы кос представляет собой последовательную реализацию соответствующих траекторий. Как видно из рисунка, порядок умножения

важен, поскольку группа неабелева и умножение не является коммутативным.

С точки зрения теории неабелевы энионы наблюдаются в электронной жидкости в режиме дробного квантового эффекта Холла с фактором заполнения $5/2$. Существуют экспериментальные свидетельства того, что при этом значении фактора заполнения элементарные возбуждения имеют дробный заряд $e/4$ [114,115]. Также

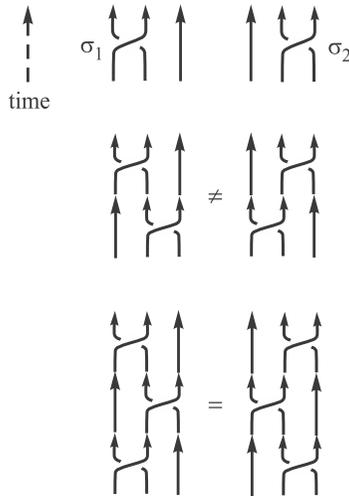


Рис. 4.3. Элементы группы кос

вышла теоретическая статья [116] об экспериментальных возможностях исследования частиц с неабелевой статистикой. Интерес к подобным экспериментам с интерферометрией связан с возможностью создания квантового компьютера, который выполнял бы операции, манипулируя неабелевыми квазичастицами.

4.6. Обобщения волновой функции Лафлина

Волновая функция Лафлина (4.4) успешно описывает ДКЭХ при $\nu = 1/3$ и $1/5$, но она не способна описать все наблюдаемые дробные состояния. Действительно, существуют, например, ДКЭХ-состояния при $\nu = 2/5, 3/7, 4/9, \dots$, соответствующие серии $p/(2p+1)$, а также в более общем случае $p/(2sp+1)$, где s и p — целые числа [8, 11]. Первоначальное объяснение новых состояний было дано с помощью иерархической модели, согласно которой квазичастицы из лафлиновского состояния конденсиру-

ются в другое «дочернее» состояние лафлиновского типа. Данную процедуру можно проделать несколько раз и получить часть наблюдаемых в эксперименте состояний. Но далеко не все наблюдаемые состояния описываются иерархической моделью. Поэтому начала развиваться теория композитных фермионов [16–18], которая стала основной теорией ДКЭХ на нижнем уровне Ландау. Как отмечают некоторые авторы, эти две модели не взаимоисключают, а дополняют друг друга [117, 118].

4.6.1. Иерархическая модель. В первом теоретическом подходе состояния ДКЭХ с $\nu = p/(2sp + 1)$ были интерпретированы в рамках иерархической модели [12, 14], согласно которой квазичастицы лафлиновского «родительского» состояния в результате кулоновского отталкивания конденсируются в «дочернее» состояние лафлиновского типа. Например, состояние $\nu = 2/5$ будет дочерним состоянием, образованным квазичастичными возбуждениями Лафлина из состояния $\nu = 1/3$. Ранее мы получили квазидырочные (квазичастичные) возбуждения, локально добавляя (убирая) квант магнитного потока в систему. Теперь посмотрим, что произойдет, если изменять магнитное поле B равномерно, чтобы система в целом отошла от фактора заполнения $\nu = 1/m$. Для определенности, будем уменьшать магнитное поле, чтобы ν уменьшался.

Мы знаем, что волновая функция Лафлина $\Psi \sim \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m$, где m — нечетное число в случае системы из фермионов, и четное в случае бозонов. Зададимся вопросом о том, как будет выглядеть лафлиновское состояние для энионов с координатами η_i и статистическим параметром α . Оказывается, волновые функции должны иметь вид

$$\Psi \sim \prod_{i < j}^N (\eta_i - \eta_j)^{(2s + \alpha)}, \quad (4.37)$$

где p — положительное целое число, а $\alpha = 1/m$ для квазидырок, и $\alpha = -1/m$ для квазичастиц. Результатом является то, что квазидырки (или квазичастицы) дают вклад в заполнение электронных состояний

$$\nu_{\text{quasi}} = \mp \frac{1}{2pm^2 \pm m}, \quad (4.38)$$

где берется знак $-$ для дырок и знак $+$ для частиц. Прибавляя эту добавку к начальному фактору заполнения $\nu = 1/m$, получаем

$$\nu = \frac{1}{m} \mp \frac{1}{2pm^2 \pm m} = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p}}. \quad (4.39)$$

Рассмотрим несколько простых примеров. Начнем с состояния $\nu = 1/3$. Тогда состояние квазичастиц с $p = 1$ имеет фактор заполнения $\nu = 2/5$, соответствующий одному из наиболее заметных холловских плато (рис. 4.4). Состояние квазидырок с $p = 1$ приводит к $\nu = 2/7$.

Рассуждая таким образом, получаются еще новые состояния, которые, в свою очередь, также могут образовывать квантовые холловские состояния и т. д. Таким образом, для фактора заполнения получается следующее выражение:

$$\nu = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p_1 \pm \frac{1}{2p_2 \pm \dots}}} \quad (4.40)$$

Например, если начать с холловского состояния с $\nu = 1/3$, то получается множество $\nu = 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13$. Эта последовательность холловских плато показана на рис. 4.4.

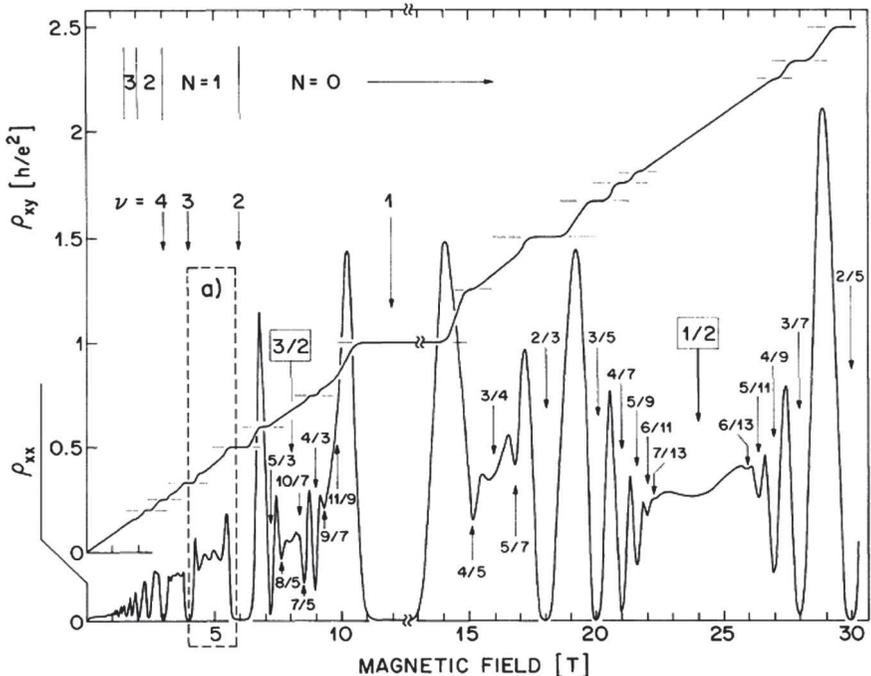


Рис. 4.4. Зависимость компонент тензора сопротивления от магнитного поля (из работы [119])

4.6.2. Композитные фермионы. Альтернативный подход был предложен Д. Джейном в 1989 г. [16, 17]. Суть его концепции заключается в введении композитных фермионов, состоящих из одного электрона и четного числа квантов магнитного потока. При таком рассмотрении система сильно взаимодействующих электронов преобразуется в систему слабо взаимодействующих композитных фермионов в эффективном, более слабом, магнитном поле.

Для начала представим полиномиальную часть волновой функции Лафлина в следующем виде:

$$\Psi_m^L(z_j) = \prod_{k < l} (z_k - z_l)^{2s+1} = \prod_{k < l} (z_k - z_l)^{2s} \prod_{k < l} (z_k - z_l). \quad (4.41)$$

Первый множитель с показателем степени $2s$ будем называть вихревой частью. Каждый электрон «видит» $2s$ вихревых потока другого электрона. Другими словами, волновая функция k -го электрона, который совершает замкнутый путь вокруг другого, l -го электрона, приобретает дополнительную фазу $2s \cdot 2\pi$. То есть вихревая часть в уравнении (4.41) соответствует «захвату» каждым электроном $2s$ квантов магнитного потока.

Теперь интерпретируем вышеуказанную волновую функцию в терминах статистических свойств. В общем случае можно выразить любую волновую функцию нижнего уровня Ландау системы из N -частиц Ψ_{LLL} в виде произведения такого вихревого множителя и некоторой остаточной волновой функции Ψ_{res} :

$$\Psi_{LLL}(z_j) = \prod_{k < l} (z_k - z_l)^{m'} \Psi_{\text{res}}(z_j). \quad (4.42)$$

Исходная волновая функция Ψ_{LLL} является фермионной, т. е. антисимметричной относительно процесса перестановки произвольной пары частиц, а свойства симметрии Ψ_{res} зависят от четности m' . Если m' нечетное число, то Ψ_{res} должна быть симметричной (бозонной) волновой функцией. Если же m' четное, то и исходная Ψ_{LLL} , и остаточная Ψ_{res} волновые функции являются антисимметричными (фермионными). Число m' можно рассматривать как число квантов потока, «прикрепленных» к каждой частице в положении z_j . Таким образом, присоединение потока может быть использовано в двумерной квантовой механике для преобразования фермионов в бозоны и наоборот.

Вернемся к разложению (4.41). Вихревой множитель в волновой функции Лафлина прикрепляет s пар квантов магнитного потока к каждой позиции частицы и не влияет на статистические

свойства волновой функции. Второй множитель

$$\chi_{\nu^*=1}(z_j) = \prod_{k<l} (z_k - z_l) \quad (4.43)$$

является фермионным и напоминает множитель в волновой функции, соответствующей полностью заполненному нижнему уровню Ландау с фактором заполнения $\nu^* = 1$. Истинный фактор заполнения при этом $\nu = 1/(2s + 1)$.

Обобщение, предложенное Д. Джейном, состоит в замене члена $\prod_{k<l} (z_k - z_l)$ определителем Слэтера $\chi_{\nu^*=p}(z_j, \bar{z}_j)$, построенным из волновых функций полностью заполненных p уровней Ландау:

$$\Psi^J(z_j, \bar{z}_j) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s} \chi_{\nu^*=p}(z_j, \bar{z}_j). \quad (4.44)$$

Здесь используется тот же оператор проекции \mathcal{P}_{LLL} на нижний уровень Ландау, что и в случае квазичастичных возбуждений (4.17), потому что, в отличие от случая $\nu^* = 1$, волновая функция $\chi_{\nu^*=p}(z_j, \bar{z}_j)$ имеет зависимость от \bar{z}_j .

Рассмотрим полученную волновую функцию (4.44). Первый множитель $\prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s}$ интерпретируем как связывание с каждым электроном $2s$ квантов магнитного потока. Назовем этот новый тип частиц композитными фермионами. Оставшиеся (свободные) кванты магнитного потока определяют эффективное число состояний на уровнях Ландау для композитных фермионов:

$$N_B \rightarrow N_B^* = N_B - 2sN_{\text{el}},$$

которое соответствует перенормированному магнитному полю

$$B \rightarrow B^* = B - 2s \left(\frac{h}{e} \right) n_{\text{el}}. \quad (4.45)$$

Фактор заполнения для композитных фермионов определяется относительно перенормированного числа квантов потока:

$$\nu^* = \frac{N_{\text{el}}}{N_B^*} \Rightarrow \nu^{*-1} = \nu^{-1} - 2s, \quad (4.46)$$

что приводит к соотношению

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1} \quad (4.47)$$

между фактором заполнения ν^* для композитных фермионов и истинным ν . В случае полностью заполненных уровней Ландау композитных фермионов с $\nu^* = p$, где p — целое число, получаем:

$$\nu = \frac{p}{2sp + 1}. \quad (4.48)$$

Например, при $m = 3$ получаем состояния с $\nu = 1/3, 2/5, 3/7, 4/9, \dots$ (рис. 4.4).

Итак, ДКЭХ может интерпретироваться как ЦКЭХ для композитных фермионов. Основное состояние композитных фермионов определяется волновой функцией (4.44), которая описывает несжимаемую квантовую жидкость так же, как волновая функция Лафлина. Элементарные возбуждения отделены от основного состояния энергетической щелью по аналогии с уровнями Ландау в ЦКЭХ, которая определяется кулоновской энергией взаимодействия. Опять же, эти элементарные возбуждения композитных фермионов локализуются примесями образца, и поэтому получается плато в холловском сопротивлении.

4.6.3. Состояния Мура–Рида. Наблюдение квантовых холловских состояний с четным знаменателем в факторе заполнения [119, 120], а именно с $\nu = 5/2$, было первым признаком того, что не все состояния описываются с помощью иерархической модели (или же теорией композитных фермионов). Поэтому возникла независимая конформная теория поля [23, 121, 122], которая предложила различные волновые функции основного состояния в режиме ДКЭХ.

Первая волновая функция неабелевых возбуждений была предложена Муром и Ридом [23, 123, 124]. Их волновая функция описывает ДКЭХ при факторах заполнения $\nu = 1/m$, где m — четное число. Волновая функция равна волновой функции Лафлина, умноженной на пфаффиан:

$$\Psi_m^{MR} = Pf \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4l_0^2}, \quad (4.49)$$

где пфаффиан равен квадратному корню из антисимметричной матрицы, или по-другому

$$\begin{aligned} Pf(M_{ij}) &= \mathcal{A}(M_{1,2}, \dots, M_{N-1,N}) = \\ &= \frac{1}{2^{N/2} (N/2)!} \sum_{P \in S_N} \text{sign}(P) \prod_{i=1}^{N/2} M_{P(2i-1)P(2i)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где S_N — симметричная группа из N элементов, $\text{sign}(P)$ — знак перестановки P . Пфаффиан — антисимметричная функция, поэтому, чтобы вся волновая функция была антисимметричной, лафлиновский множитель должен быть симметричной функцией. При умножении на пфаффиан степень определенных множителей $z_i - z_j$ понижается. В результате того, что некоторые пары частиц отталкиваются друг от друга меньше, частицы спарены вместе, что напоминает куперовские пары в сверхпроводнике. На фактор заполнения пфаффиан, тем не менее, не оказывает влияния, так как не меняет максимальную степень координаты частицы. Фактор заполнения остается таким же, как и в случае волновой функции Лафлина $\nu = 1/m$. Мур и Рид показали, что возбуждения состояния Мура–Рида являются неабелевыми энионами. Волновая функция Мура–Рида является основным кандидатом для описания ДКЭХ состояния при $\nu = 5/2$ [125], которое можно рассматривать как два полностью заполненных уровня Ландау и половину заполненного уровня Ландау, описываемых состоянием Мура–Рида. Поэтому состояние с $\nu = 5/2$ может быть первой системой, в которой фактически наблюдаются неабелевы частицы. Экспериментальные данные еще не являются достаточно убедительными в отношении наблюдаемой волновой функции, но есть свидетельства того, что неабелевы квазичастицы действительно присутствуют в системе [126].

4.6.4. Выводы. В данном разделе мы рассмотрели один из подходов к изучению ДКЭХ, основанный на построении вариационной волновой функции. Несмотря на то, что ни одна из рассмотренных волновых функций не описывает точное основное состояние систем в режиме ДКЭХ, они дают информацию о некоторых топологических характеристиках определенных фаз материи. Например, это заряд, статистика, свойства краевых состояний, вырождение на топологически нетривиальных многообразиях. Поэтому построение модельных волновых функций было важным шагом в понимании многих топологических фаз.

Следующим шагом в теоретическом исследовании ДКЭХ стало построение теорий эффективного поля. Следует помнить, однако, что эффективные теории поля редко можно получить из микроскопических свойств системы. Даже при небольшой строгости это может быть сделано только для лафлиновских состояний [127] и состояний Д. Джейна [128]. В таком случае построение пробных волновых функций обеспечивает проверку правильности прогнозов, основанных на этих теориях, при условии, что можно определить топологические свойства аналитическими или числен-

ными методами. Явные волновые функции для небольшого числа частиц можно сравнить с волновыми функциями, полученными путем численного моделирования. Часто хорошее согласие (как правило, измеряемое перекрытием волновых функций) принимается в качестве доказательства справедливости модельной волновой функции. Но здесь стоит обратить внимание на то, что любая модельная волновая функция будет иметь нулевое перекрытие с полученной численно в термодинамическом пределе. Более того, для слишком малого числа частиц соответствующее гильбертово пространство может быть не очень большим, и модельная волновая функция может иметь большое перекрытие с численной. Таким образом, вопрос об успешном подборе пробной волновой функции достаточно спорный: нужно изучать перекрытия для небольшого, но не слишком малого числа частиц. Состояние Лафлина часто считается некоторым «золотым стандартом» для оценки перекрытия. Например, для $N = 9$ электронов при $\nu = 1/3$ в сферической геометрии размерность гильбертова пространства равна 84, а квадрат перекрытия пробного состояния с точным кулоновским основным состоянием равен 0,988 [105]. Волновые функции Джейна также дают хорошее согласие. Например, для $\nu = 2/5$ с $N = 10$ электронами на сфере гильбертово пространство имеет размерность 52, а квадрат перекрытия с точным кулоновским основным состоянием равен 0,9956 [129]. Модельная волновая функция, которая дает такое большое перекрытие для сравнительно большого гильбертова пространства, обычно считается достаточно хорошей. Однако такой подход должен использоваться с осторожностью. Например, Gaffnian волновая функция (которая, как оказывается, соответствует бесщелевому состоянию и, следовательно, не является состоянием ДКЭХ), также имеет хорошее перекрытие (0,954). Из-за этой трудности в интерпретации перекрытий появились другие методы определения достоверности волновых функций, например, изучение спектра запутанных состояний [9].

4.7. Экспериментальные методы исследования объемных состояний ДКЭХ

Для экспериментальной проверки свойств лафлиновских несжимаемых жидкостей выполнено большое количество фундаментальных исследований (см., например, обзор [130]). Лафлиновские состояния наблюдаются не только в высокоподвижных GaAs/AlGaAs квантовых ямах и гетеропереходах, но и в сравнительно новых двумерных объектах, таких, как графен [131] и гетеропереходы

на основе оксидов $ZnO/MgZnO$ [132]. Основным методом исследования лафлиновских жидкостей является магнитотранспорт, что связано с рядом симметричных ограничений, фактически запрещающих использование для этих целей других методик. Например, теоремы Кона и Лармора ограничивают применимость таких методов, как циклотронный резонанс (ЦР) и электронный спиновый резонанс (ЭСР). Использование спектроскопии инфракрасного поглощения в комбинации с формированием решетки поверхностных акустических волн (ПАВ) с целью ослабить симметричные ограничения требует существенных методических усилий [133].

Применение оптических методов, таких как фотолюминесценция, поглощение, фотовозбуждение и отражение, также встречается с симметричными ограничениями. Для оптических переходов с нулевыми импульсами передачи существует так называемая скрытая симметрия [134, 135], которая делает оптические спектры нечувствительными к вариациям основного состояния ДЭС в магнитном поле. Основные требования к системе со скрытой симметрией следующие: 1) наличие зарядовой симметрии, при которой потенциалы взаимодействия электронов и дырок равны между собой по величине ($V_{ee} = V_{hh} = -V_{eh}$, где e и h — электроны зоны проводимости и дырки валентной зоны соответственно); 2) нахождение электронной системы в квантовом пределе $\nu \leq 2$; 3) пренебрежение смешиванием уровней Ландау [135].

Первое условие нарушается в широких квантовых ямах с односторонним легированием и в двухслойных системах, когда слой электронов пространственно отделяется от слоя фотовозбужденных дырок и, как следствие, профили огибающих волновых функций электронов и дырок в направлении роста гетероструктур сдвигаются в координатном пространстве друг относительно друга. Для узких квантовых ям $GaAs/AlGaAs$ с ширинами, меньшими 20 нм, профиль огибающих волновых функций носителей в которых задается главным образом не электрическим полем со стороны легирующих примесей, а квантующим потенциалом, условие (1) можно считать выполненным. Менее очевидной является выполнимость условия (1) в плоскости квантовых ям из-за сложной структуры уровней Ландау валентной зоны $GaAs$.

Условие (2) представляет собой формальное утверждение о концентрации носителей, которое практически всегда может быть справедливым. Ситуация же с условием (3) не столь однозначна. Обычно в теоретических моделях, описывающих оптические переходы в ультраквантовом пределе, учитываются энергетические вклады первого порядка малости по отношению кулоновской энергии к циклотронной. Такой подход предполагает, что вышележа-

щие уровни Ландау при расчете энергий оптических переходов не учитываются. Электронные корреляции, связанные с формированием лафлиновских жидкостей в основном состоянии, включаются в рамках однододового приближения, которое также не учитывает вышележащие уровни Ландау, т. е. условие (3) априори считается выполненным [56, 106, 136].

Хотя при теоретических оценках оптических спектров двумерных систем условием (3) обычно пренебрегают, в экспериментально реализуемых системах такое пренебрежение неправомерно. с помощью неупругого рассеяния света были измерены кулоновские поправки второго порядка малости к энергии циклотронных магнитоэкситонов. Оказалось, что эти поправки значительны. Они приводят к расщеплению магнитоэкситонных состояний, энергии которых считались вырожденными [53, 137]. Можно было бы ожидать аналогичных результатов и для оптических переходов из валентной зоны в зону проводимости. Однако наблюдаемые до сих пор особенности в оптических спектрах объяснялись эффектами локализации дырок (нарушением трансляционной инвариантности магнитоэкситонов), оже-процессами, связанными с рождением внутриуровневых магнитоплазмонов и магниторотонов, а также влиянием на спектры барьерных примесей. Теоретическое рассмотрение процессов резонансного отражения с участием делокализованных носителей как в приближении Хартри–Фока, так и в однододовом приближении в полном соответствии с условиями скрытой симметрии дает одинаковый тривиальный результат: энергии оптических переходов из валентной зоны в зону проводимости в случае очень малых импульсов не зависят ни от фактора заполнения электронной системы, ни от электронных корреляций в основном состоянии электронной системы, связанных с формированием лафлиновских жидкостей [56]. В последующих разделах мы рассмотрим, насколько выполняются требования условий скрытой симметрии, и попробуем увидеть аналогии между состояниями ДКЭХ и холловским ферромагнетиком как наиболее близким к лафлиновским жидкостям состоянием материи.

4.8. Циклотронное спин-флип возбуждение в ДЭС при $\nu = 1/3$

В данном разделе рассмотрим исследование ДЭС при факторе заполнения $\nu = 1/3$ методом неупругого рассеяния света [138] и проследим общие черты между квантово-холловским ферромагнетиком при $\nu = 1$ и холловским ферромагнетиком композитных фермионов при $\nu = 1/3$. Считается, что основное состояние ДЭС при

дробном заполнении $\nu = 1/3$ «похоже» на основное состояние при факторе заполнения $\nu = 1$. Намагниченность при $\nu = 1/3$ и $\nu = 1$ ведет себя похожим образом: достигает ярко выраженных максимумов [59, 139], что обычно интерпретируется в пользу образования квантово-холловских ферромагнетиков. Как было показано ранее, одним из способов исследования ферромагнитного порядка в ДЭС является изучение циклотронного спин-флип экситона (CSFE) — длинноволнового возбуждения, одновременно изменяющего орбитальные и спиновые квантовые числа ДЭС. Исследования CSFE с помощью спектроскопии неупругого рассеяния света выявили особенности кулоновского взаимодействия в ДЭС и новые магнитные фазы, а также помогли сделать качественные выводы о термодинамике квантово-холловского ферромагнетика [40, 41]. Однако подобные эксперименты при $\nu = 1/3$ не дали таких же очевидных результатов. Циклотронная спин-флип мода (CSFM или CSFE при $q \rightarrow 0$) была обнаружена, но ее энергия отражала лишь полную электронную плотность в ДЭС, а не изменение намагниченности [50]. С другой стороны, если намагниченность имеет ярко выраженный максимум при $\nu = 1/3$ (что непосредственно следует из экспериментов по ядерному магнитному резонансу), то и энергия CSFE должна служить мерой обменного взаимодействия в основном состоянии ДЭС. Кажущееся противоречие между теоретическими прогнозами и экспериментом разрешается в работе, где сообщается о новой циклотронной спин-флип моде, изменение энергии которой отражает именно намагниченность ДЭС [138]. Кроме того, ее энергия существенно превышает существующие теоретические оценки, основанные на одномодовом приближении (SMA) [56, 106]. Это довольно необычно, поскольку никаких экспериментальных указаний на необоснованность одномодового приближения в применении к ДКЭХ [130] не обнаружено. В работе говорится, что SMA не применимо к описанию сложных возбуждений, таких как CSFM при $\nu = 1/3$, и подчеркивается важность двойного экситонного вклада в структуру CSFE.

Исследования были проведены на GaAs/AlGaAs квантовых ямах с шириной 25 нм и электронными плотностями 1,2 и $2,2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. На рис. 4.5 представлен основной экспериментальный результат. В спектре неупругого рассеяния света наблюдаются две линии с энергией выше циклотронной энергии, соответствующие циклотронным спин-флип модам. Одна из них (A) совпадает с ранее найденной линией [50]. Энергия моды A монотонно возрастает с увеличением фактора заполнения и не проявляет каких-либо особенностей в районе $\nu = 1/3$. Энергия второй линии (B), напротив, демонстрирует немонотонную зависимость

от ν с выраженным максимумом при $\nu = 1/3$. Более того, энергия моды B пропорциональна намагниченности ДЭС, измеренной ранее в аналогичных условиях эксперимента [139]. Данный результат указывает на связь линии B с неупругим рассеянием света на спин-флип моде квантово-холловского ферромагнетика с $\nu = 1/3$.

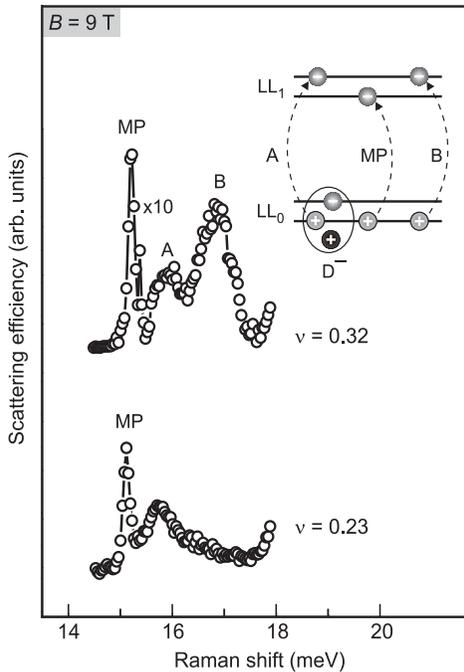


Рис. 4.5. Спектры НРС при $B = 9$ Тл и различных факторах заполнения ($\nu = 0,33$ и $\nu = 0,23$). Линия B соответствует циклотронной спин-флип моде холловского ферромагнетика с $\nu = 1/3$, линия A — возбуждению примесных D -комплексов. Линия MP соответствует магнитоплазменной моде. При отдалении фактора заполнения от $\nu = 1/3$ линия B исчезает. На вставке приведена схема переходов, соответствующих наблюдаемым возбуждениям

Возникает вопрос о том, каким образом в ДЭС могут существовать две циклотронные спин-флип моды с различными свойствами. Некоторые аспекты этого вопроса рассматривались в работах [40, 41], где было показано, что при определенных условиях в ДЭС часть электронов участвует в образовании спин-синглетных примесных комплексов вблизи барьера квантовой ямы. Данные комплексы занимают значительную часть ДЭС даже в высококачественных структурах AlGaAs/GaAs. Отсюда из-за сосуществова-

ния двух электронных подсистем (барьерных комплексов и свободных электронов) появляются две циклотронные спин-флип моды. Линия *A* отвечает спин-флип возбуждениям барьерных комплексов (см. вставку на рис. 4.5), а линия *B* — возбуждениям свободных электронов. Обратим внимание, что две подсистемы на самом деле не являются независимыми: электроны барьерных комплексов взаимодействуют со свободными электронами. То есть они на самом деле являются многочастичными образованиями, которые становятся действительно изолированными только при $\nu < 1/10$ [50]. Далее остановимся подробнее на линии *B* — собственной CSFE моде квантово-холловского ферромагнетика.

Хотя качественно энергия CSFM ведет себя одинаково вблизи $\nu = 1/3$ и $\nu = 1$ (рис. 4.6), при $\nu = 1/3$ она достигает гораздо больших значений, чем предсказывают теоретические расчеты.

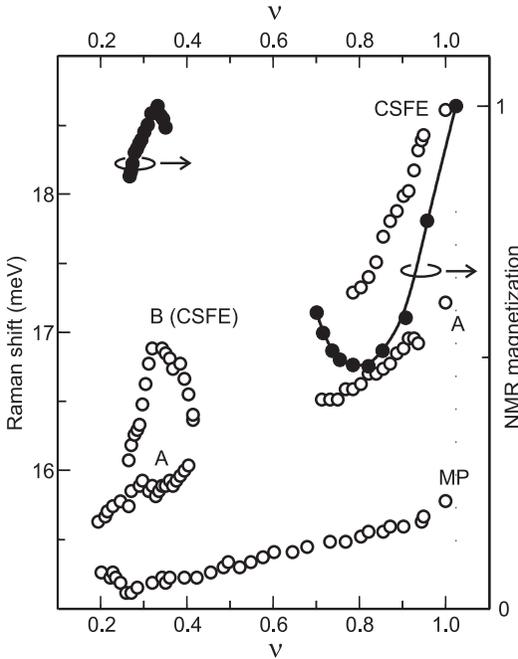


Рис. 4.6. Зависимость энергии линий *A* и *B* от фактора заполнения вблизи $\nu = 1/3$. Также показаны энергии магнитоплазмона (MP) и энергии для соответствующих линий в окрестности фактора заполнения единица (при $\nu < 1$). Сплошные точки показывают нормированную намагниченность, измеренную с помощью ядерного магнитного резонанса в работах [59, 139] при аналогичных экспериментальных условиях

Электронный газ в обоих случаях сильно коррелирован, но система с $\nu = 1/3$ обладает бóльшим числом степеней свободы, чем ферромагнетик с $\nu = 1$. Чтобы понять взаимодействие различных мод, формирующих CSFE в режиме ДКЭХ, экспериментальные значения энергии CSFE сравниваются с расчетными в рамках однододового приближения, а также применяется новый теоретический

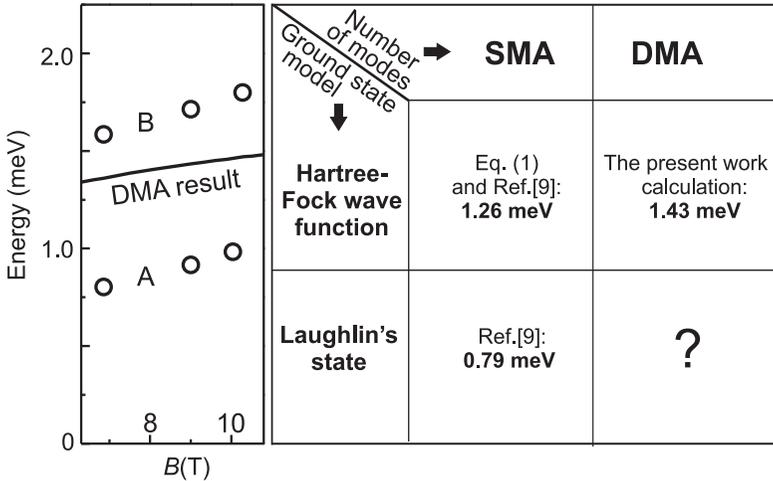


Рис. 4.7. Слева: Магнитолевая зависимость энергии спектральных линий A и B (CSFE). Сплошной линией показаны результаты расчета в двумодовом приближении (DMA). Справа: Сравнение результатов расчетов энергии CSFE при $B = 9$ Тл и $\nu = 1/3$ в различных теоретических приближениях

подход к расчету энергии CSFE. Результаты расчетов представлены в таблице (правая часть рис. 4.7). В однододовом приближении (SMA) [56] расчет по методу Хартри-Фока приводит к значению энергии 1,26 мэВ. Этот результат отличается от экспериментального значения $E_{\text{эксп}} = 1,69$ мэВ (см. рис. 4.6). Второй подход, использующий в качестве основного состояния волновую функцию Лафлина, в однододовом приближении дает значение для энергии CSFE 0,79 мэВ и еще сильнее не согласуется с экспериментом.

Теперь заметим, что даже в ферромагнетике с $\nu = 1$ CSFE не является однододовым (одноэкситонным) возбуждением, а имеет двойную экситонную компоненту, состоящую из спиновой волны (с $\delta S = \delta S_z = -1$ и $\delta n = 0$) и магнитоплазмона (с $\delta S = \delta S_z = 0$ и $\delta n = 1$) [140]. В дробном квантово-холловском ферромагнетике волны зарядовой плотности (возбуждения на уровне Ландау) отделены от основного состояния значительной энергетической ще-

лью [106]. В связи с этим можно использовать модель, в которой волны зарядовой плотности игнорируются, но учитывается двухэкситонная компонента, соответствующая связанной спиновой волне и магнитоплазмону. Данный подход является проекцией теории CSFE в холловском ферромагнетике с $\nu = 1$ [140] на дробный случай. Оказывается, что в двухмодовом приближении (DMA) энергия CSFE равна 1,43 мэВ (рис. 4.7). Таким образом, результат DMA превышает энергию в SMA и лучше описывает экспериментальные данные. Вопрос учета лафлиновских корреляций в двумодовом приближении пока остается открытым. В любом случае, данный анализ показывает важность многоэкситонных поправок при факторе заполнения $\nu = 1/3$.

4.9. Резонансное отражение света от лафлиновской жидкости при $\nu = 1/3$

Вопреки существующим теоретическим представлениям в работе [141], в спектрах отражения ДЭС была выделена линия лафлиновской жидкости. Соответственно, условие 2 для наличия скрытой симметрии автоматически выполняется. Линия наблюдается в симметричной электронной системе (частично выполнено условие 1 для наличия скрытой симметрии) при нулевом импульсе передачи в трансляционно-инвариантной системе (отражение). Новая линия сдвинута в фиолетовую область спектра. Величина сдвига может быть интерпретирована как кулоновская щель, необходимая для создания спинового дефекта в несжимаемой лафлиновской жидкости.

В качестве исследуемого образца, чтобы обеспечить выполнимость условия 1, была выбрана нелегированная высококачественная узкая симметричная квантовая яма шириной 17 нм. При кратковременной засветке надбарьерным возбуждением в яме формировался электронный канал с концентрацией $8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ и подвижностью на уровне $7 \cdot 10^6 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Характерные спектры отражения при двух температурах в области магнитных полей, в которой формируется лафлиновская жидкость, приведены на рис. 4.8. Такой спектр состоит из двух главных линий. Интенсивность одной из них слабо чувствительна к температуре электронной системы. Вторая, более высокоэнергетическая, линия исчезает из спектра уже при температуре 1,6 К. Низкоэнергетическая линия соответствует оптическому переходу на верхний незаполненный спиновый подуровень нулевого уровня Ландау электронов с нулевого уровня Ландау валентной зоны тяжелых дырок.

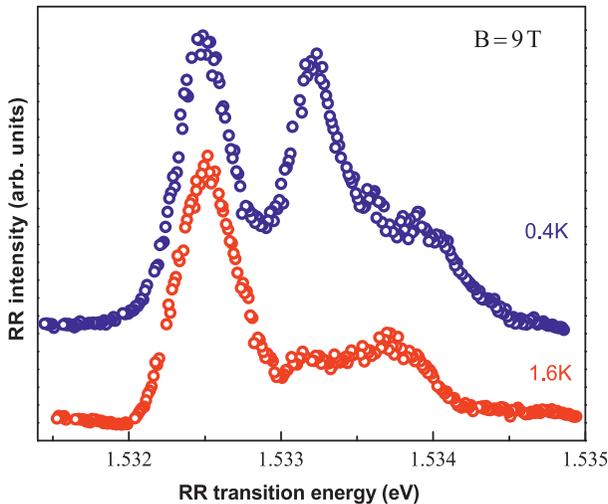


Рис. 4.8. Резонансное отражение, связанное с оптическими переходами с нулевого уровня Ландау зоны тяжелых дырок на верхний спиновый подуровень нулевого уровня Ландау зоны проводимости, в области формирования лафлиновской жидкости при двух различных температурах (0,4 и 1,6 К)

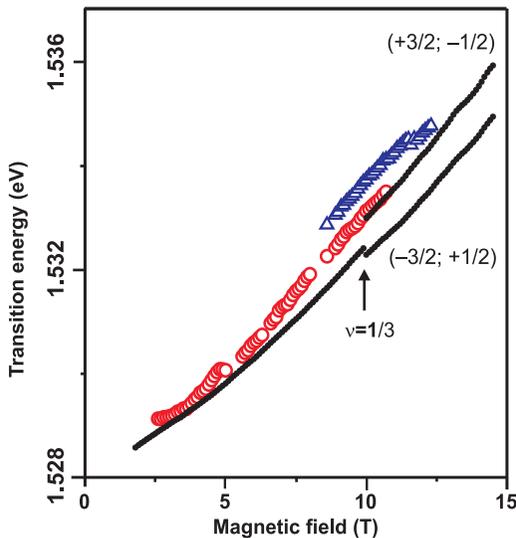


Рис. 4.9. Энергии оптических переходов с нулевого уровня Ландау валентной зоны на верхний спиновый подуровень нулевого уровня Ландау зоны проводимости в зависимости от магнитного поля (открытые кружки и треугольники). Для сравнения приведены энергии линий фотолуминесценции (точки)

Именно эта линия доминирует в спектрах отражения двумерной системы в ультраквантовом пределе $\nu < 1$. Сила осциллятора оптического перехода, соответствующего низкоэнергетической линии, демонстрирует рост с магнитным полем, что связано с увеличением плотности состояний на нулевом уровне Ландау. При этом наблюдаются осцилляции интенсивности на факторе заполнения $\nu = 1$ вследствие перераспределения электронов между двумя спиновыми подуровнями и вследствие перехода основного состояния в изолирующую фазу [142]. В спектре фотолюминесценции (рис. 4.9), напротив, доминируют переходы с нижнего заполненного спинового подуровня электронов. Энергии линий отражения и фотолюминесценции, соответствующие одному и тому же оптическому переходу, почти совпадают (рис. 4.9), что свидетельствует о высоком качестве двумерной системы (малый штарковский сдвиг). Наиболее интересным является поведение высокоэнергетической линии в спектре отражения (см. рис. 4.8). Кроме того, что ее интенсивность чрезвычайно чувствительна к температуре электронной системы (наблюдается ниже температуры разрушения лафлиновской жидкости), в области формирования лафлиновской жидкости ($\nu = 1/3$) происходит перераспределение силы осциллятора оптического перехода между двумя линиями: низко-

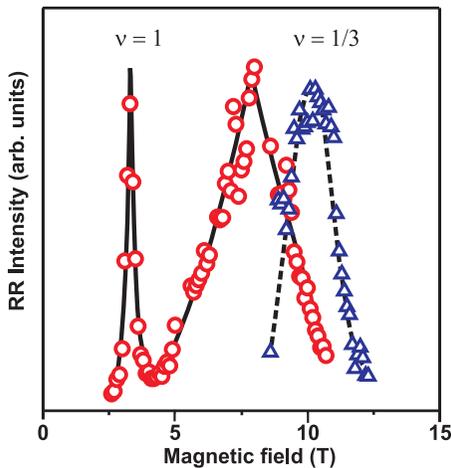


Рис. 4.10. Интенсивность резонансного отражения, связанного с оптическими переходами с нулевого уровня Ландау валентной зоны на верхний спиновый подуровень нулевого уровня Ландау зоны проводимости, в зависимости от магнитного поля. Треугольники (кружки) — интенсивность линии оптического перехода из областей, в которых лафлиновская жидкость формируется (не формируется). Линии проведены для удобства восприятия

энергетической, совпадающей с фотолюминесценцией электронов на верхнем спиновом подуровне Ландау, и высокоэнергетической, смещенной в фиолетовую область спектра на 0,7 мэВ. Максимум интенсивности высокоэнергетической линии и минимум интенсивности низкоэнергетической достигаются при факторе заполнения $\nu = 1/3$ (рис. 4.10). Естественно предположить, что высокоэнергетическая линия связана с формированием лафлиновской жидкости в основном состоянии двумерной электронной системы. Действительно, когда с помощью методики фотообеднения изменялось магнитное поле, при котором достигался фактор заполнения $\nu = 1/3$, максимум интенсивности высокоэнергетической линии сдвигался в магнитном поле, следуя за фактором заполнения $\nu = 1/3$. Таким образом, можно считать доказанным, что в спектре отражения, тестирующем электронные состояния, делокализованные на длине волны света, появляется спектральная особенность, связанная с лафлиновской жидкостью.

Наблюдение в спектре резонансного отражения двумерной электронной системы отдельной линии лафлиновской жидкости, помимо научной составляющей, имеет существенное методическое значение. Появляется непосредственная возможность оптического зондирования несжимаемых жидкостей в трансляционно-симметричной двумерной системе (чего до сих пор не удавалось сделать оптическими методиками и методами циклотронного и спинового резонанса), а также возможность изучения с помощью времяразрешенных оптических методов динамики релаксации спиновых и зарядовых возбуждений в лафлиновских несжимаемых жидкостях аналогично тому, как это было сделано в работе [143].

4.10. Циклотронный резонанс композитных фермионов. Дисперсия возбуждений дробных квантово-холловских состояний

В данном разделе обсуждается циклотронный резонанс композитных фермионов [144]. Получены экспериментальные значения масс композитных фермионов при некоторых дробных значениях фактора заполнения. Также был разработан экспериментальный метод исследования дисперсии возбуждений в дробных квантово-холловских состояниях [133]. Исследование циклотронного резонанса композитных фермионов требует использования более сложных методов, чем те, которые применяются для обнаружения электронного циклотронного резонанса. Согласно теореме Кона [54], однородное излучение в трансляционно-инвариантной системе не

может возбуждать внутренние степени свободы ДЭС, связанные с кулоновскими корреляциями. Поэтому явления, возникающие при электрон-электронном взаимодействии, не будут отображаться в спектре поглощения. Периодическая модуляция плотности, нарушающая трансляционную инвариантность, является одним из способов обойти ограничения теоремы Кона.

В работах [133, 144] была разработана схема оптического детектирования, которая повышает чувствительность регистрирующей аппаратуры к поглощению резонансного микроволнового излучения на два порядка величины по сравнению с традиционными методами. Кроме того, микроволновое излучение, падающее на исследуемый образец, обеспечивало периодическую модуляцию электронной концентрации в ДЭС посредством возбуждения поверхностных акустических волн (ПАВ). Характерным признаком модуляции является появление добавочных особенностей в магнетосопротивлении ДЭС [145]. Результаты приведены на рис. 4.11

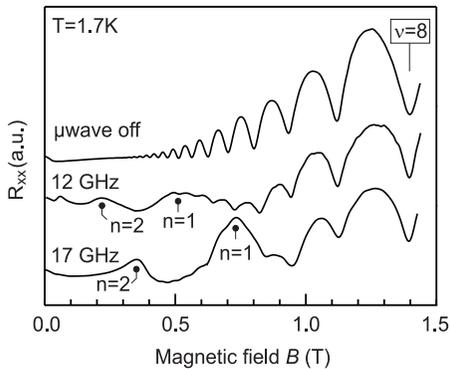


Рис. 4.11. Данные, полученные с помощью магнитотранспортных измерений (геометрия Холла) в отсутствие (верхняя кривая) и при наличии микроволнового излучения мощностью 100 мкВт при 12 ГГц (средняя кривая) и 17 ГГц (нижняя кривая). Помимо осцилляций Шубникова–де Гааза в сопротивлении R_{xx} при наличии СВЧ-излучения возникают дополнительные осцилляции магнетосопротивления. Они обычно наблюдаются в ДЭС с периодической модуляцией плотности

и напоминают данные из работы [146], где модуляция производится с помощью ПАВ-преобразователей. Благодаря пьезоэлектрическим свойствам кристалла $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ излучение частично превращается в ПАВ с противоположным импульсом, так что энергия и импульс сохраняются. При отражении от границ образца образуется стоячая волна с периодичностью, определяемой длиной звуковой волны. Фотовозбуждение создает плохо проводящий

слой в легированной кремнием части барьера AlGaAs, и это может усилить влияние стоячих акустических волн.

На рис. 4.12а представлены зависимости интенсивности микроволнового поглощения от магнитного поля. Помимо магнито-плазменного циклотронного резонанса при малых магнитных полях, вблизи факторов заполнения 1, 1/2 и 1/3, наблюдаются еще несколько пиков. Положение пиков при $\nu = 1$ и $\nu = 1/3$ остается постоянным при изменении частоты микроволнового излучения и соответствует нагреву ДЭС, вызванному нерезонансным поглощением микроволнового излучения. Положения слабых максимумов вблизи $\nu = 1/2$, наоборот, реагируют на изменение частоты, как показано на рис. 4.12б. Они расположены симметрично относительно $\nu = 1/2$, и их расщепление увеличивается с частотой.

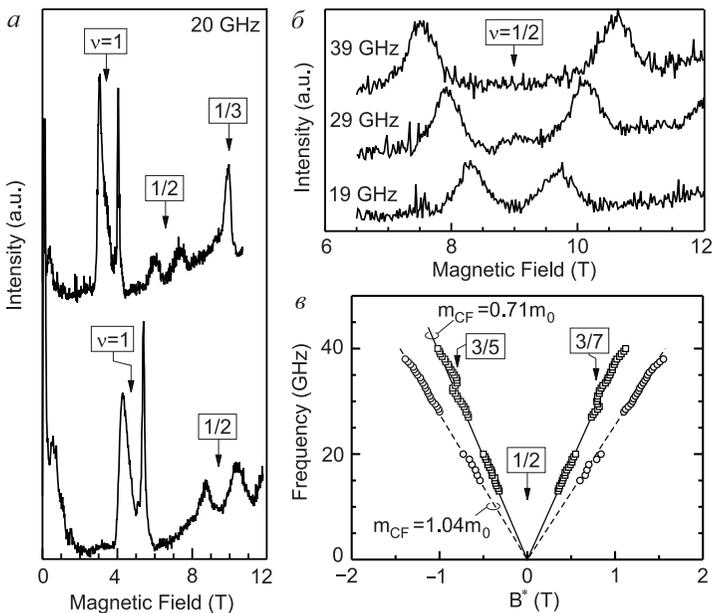


Рис. 4.12. Интенсивность микроволнового поглощения в зависимости от магнитного поля при $T = 0,4$ К при $n_s = 0,81 \cdot 10^{11}$ и $1,15 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ и частоте 20 ГГц (а). Интенсивность микроволнового поглощения в зависимости от магнитного поля вблизи $\nu = 1/2$ при трех различных частотах и $n_s = 1,09 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ (б). Зависимость частоты циклотронной моды композитных фермионов от эффективного магнитного поля $B^* = B - 2n_s\Phi_0$ при $n_s = 1,09 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ (кружки) и $n_s = 0,59 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ (квадраты) (в). Эффективные массы композитных фермионов m_{CF} равны $1,04m_0$ и $0,71m_0$ соответственно

На рис. 4.12*в* показана зависимость частоты резонансного поглощения от магнитного поля при двух различных электронных плотностях. Чтобы подчеркнуть симметричность по магнитному полю, по горизонтальной оси отложено эффективное магнитное поле $B^* = B - 2n_s\Phi_0$ (Φ_0 — квант магнитного потока). Предполагается, что наблюдаемый резонанс является циклотронным резонансом композитных фермионов. Подобные резонансные пики были также обнаружены для композитных фермионов высшего порядка вблизи $\nu = 1/4$.

В отличие от электронного циклотронного резонанса, интенсивность циклотронного резонанса композитных фермионов является нелинейной функцией мощности микроволнового излучения (рис. 4.13*а*). Падение интенсивности при более высокой мощности, вероятно, вызвано разогревом ДЭС. Интенсивность циклотронно-

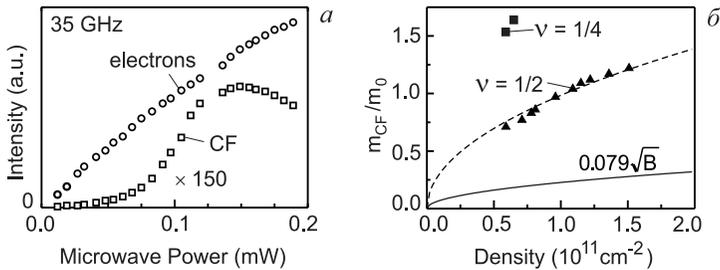


Рис. 4.13. Интенсивность циклотронного резонанса в зависимости от мощности микроволнового излучения (а). Кружками обозначен циклотронный резонанс электронов, квадратами — композитных фермионов. Зависимость эффективной массы композитного фермиона вблизи $\nu = 1/2$ в зависимости от плотности носителей n_s (сплошные треугольники) (б). Штриховая линия иллюстрирует корневую зависимость от n_s . Сплошная кривая — это теоретический расчет согласно работе [147]. Соответствующие значения эффективной массы указаны в виде сплошных квадратов для двух разных плотностей. Также аналогичные резонансные пики были также обнаружены в районе $\nu = 1/4$

го резонанса композитных фермионов уменьшается до нуля при температуре выше 0,7К, тогда как интенсивность электронного сохраняется до $T > 2\text{К}$. По наклону зависимости циклотронной частоты композитных фермионов от эффективного магнитного поля B^* на рис. 4.12*в* можно определить циклотронную массу m_{CF}^{cf} композитного фермиона. Сравнение экспериментально полученных значений массы композитного фермиона и численного расчета ($m_{CF}^{cf} = 0,079\sqrt{B}$ [147]) для идеальной ДЭС представлено на рис. 4.13*б*.

Вдали от фактора заполнения $\nu = 1/2$ зависимость частоты циклотронного резонанса композитных фермионов от магнитного поля отклоняется от линейной (рис. 4.14*a*). Резонансная частота начинает колебаться при увеличении эффективного магнитного поля.

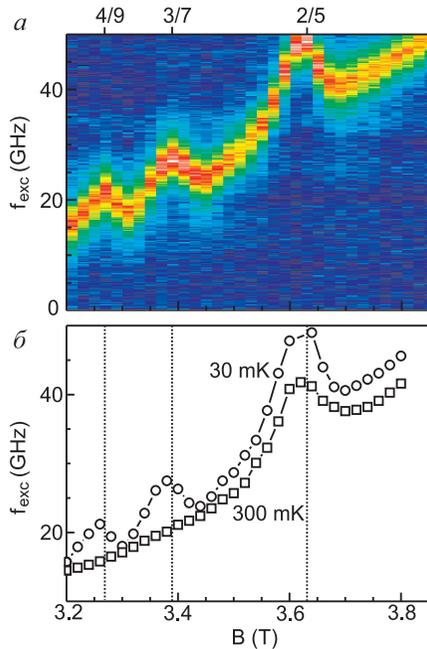


Рис. 4.14. Интенсивность микроволнового поглощения в зависимости от частоты микроволнового излучения и магнитного поля при $k_{\text{SAW}} = 3,9 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ ($f_{\text{SAW}} = 18 \text{ ГГц}$) и плотности $3,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ (а). Максимум поглощения соответствует красному цвету. Зависимость резонансной частоты микроволнового поглощения от магнитного поля при $T = 30$ и 300 мК (б)

Наибольшие отклонения от линейной зависимости происходят при тех значениях магнитного поля, где ожидается ДКЭХ. Дробные холловские состояния при $\nu = 2/5$, $3/7$ и $4/9$ можно интерпретировать как целочисленные холловские состояния композитных фермионов. Резонансная частота определяет энергетическую щель, которая равна энергии, необходимой для создания нейтрального возбуждения «квазичастица–квазидырка» с импульсом k_{SAW} . Подчеркнем, что колебательные особенности в спектрах поглощения, обусловленные конденсацией композитных фермионов в несжимаемые состояния, наблюдаются только при низких температурах. При повышении температуры до 300 мК исчезают особенности при

$\nu = 4/9$ и $\nu = 3/7$, а при $\nu = 2/5$ особенность сильно уменьшается (рис. 4.14б).

На рис. 4.15а приведены зависимости резонансной микроволновой частоты от магнитного поля для двух разных значений k_{SAW} ($2,6 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ и $3,9 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$), электронной плотности

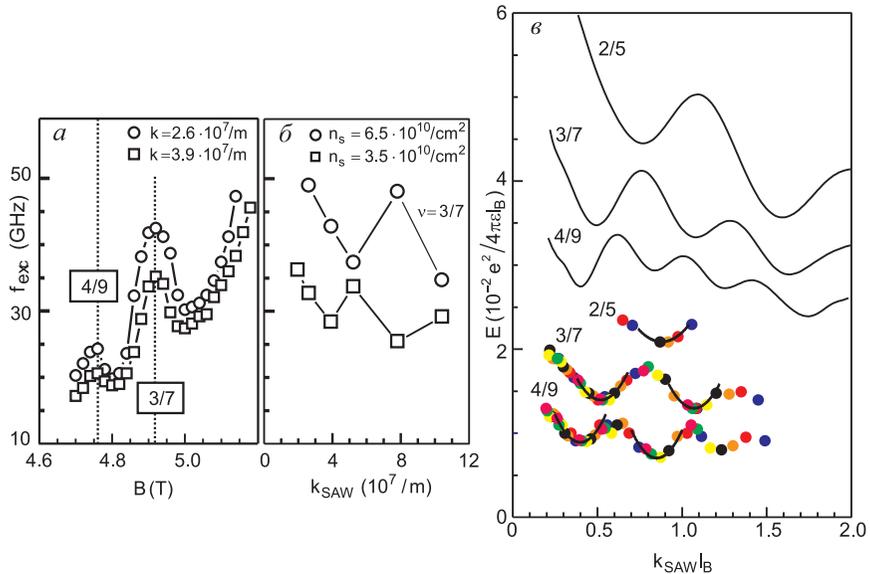


Рис. 4.15. Частота резонансного микроволнового поглощения в зависимости от магнитного поля для двух различных значений импульса $k_{\text{SAW}} = 2,6 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ и $3,9 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, плотности электронов $5,1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ и температуре 30 мК (а). Резонансная частота при $\nu = 3/7$ как функция импульса k_{SAW} для двух разных значений электронной плотности (б). Зависимость нормированной энергии от импульса k_{SAW} при факторах заполнения $2/5$, $3/7$ и $4/9$ (в). Сплошные кривые соответствуют численному моделированию методом Монте-Карло

$5,1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ и $T = 30 \text{ мК}$. Энергетические щели несжимаемых состояний существенно зависят от переданного импульса k_{SAW} .

На рис. 4.15б показана резонансная частота при $\nu = 3/7$ для различных значений k_{SAW} и двух электронных плотностей ($3,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ и $6,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$). Несмотря на ограниченное количество данных, видно, что при $\nu = 3/7$ частота резонанса явно является немонотонной функцией k_{SAW} . Было выдвинуто предположение о том, что наблюдаемые минимумы соответствуют ротонным минимумам в дисперсии квазичастиц. Варьирование электронной плотности влияет на положение этих минимумов. Чтобы постро-

ить кривую с бóльшим количеством данных, тот же эксперимент был повторен при различных плотностях носителей. На рис. 4.15в кружками показаны экспериментально полученные дисперсии для дробных состояний при факторах заполнения $2/5$, $3/7$ и $4/9$ (n_s между $3 \cdot 10^{10}$ и $7 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$). Энергия представлена в единицах энергии кулоновского взаимодействия $E_C = e^2/4\pi\epsilon l_B$. Согласно теории щелевые возбуждения дробных квантово-холловских состояний обладают параболической дисперсией вблизи волнового вектора k_{roton} . Для дробных факторов заполнения вида $p/(2p+1)$ в дисперсии ожидается p минимумов. В экспериментально доступном диапазоне импульсов наблюдается один ротоноподобный минимум для дробного состояния при $\nu = 2/5$, два при $\nu = 3/7$ и три минимума при $\nu = 4/9$. В окрестности каждого минимума дисперсия хорошо описывается параболой

$$\frac{E(k)}{E_C} = \frac{E_{\text{roton}}}{E_C} + \frac{\hbar^2(kl_B - k_{\text{roton}}l_B)^2}{2l_B^2 E_C m_{\text{roton}}},$$

как показано сплошными черными линиями на рис. 4.15в. Здесь E_{roton} определяет энергетическую щель в минимуме, а m_{roton} — масса ротона.

Также на рис. 4.15в представлен результат моделирования методом Монте-Карло с учетом конечной ширины квантовой ямы (30 нм) для электронной плотности $7 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$. Положения ротоновых минимумов хорошо совпадают с экспериментально полученными значениями. Однако экспериментально полученные значения энергий примерно в 2 раза меньше теоретических результатов. Данное расхождение объясняется тем, что в используемой теории не учитывается беспорядок. Сравнение экспериментальных и теоретических масс позволяет предположить, что масштабы беспорядка намного больше магнитной длины. Поскольку магнитная длина составляет порядка 10 нм, в случае подобных высококачественных структур такое вполне возможно. Кроме того, из-за оптического возбуждения во время эксперимента в легированной области гетероструктуры возможно образование проводящего слоя, который будет влиять на величину энергетической щели. Тогда изображения зарядов будут экранировать кулоновское взаимодействие и уменьшать энергетическую щель.

4.11. Локальная несжимаемость квантово-холловских состояний при $\nu = 3/2$

В последнем разделе мы обратимся к совершенно новым экспериментальным находкам, ставящим под сомнение часть существующих феноменологических результатов для ДКЭХ. Необходимо отметить, что с самого момента обнаружения ДКЭХ появились теории, описывающие дробные состояния в терминах нетривиального топологического упорядочения спиновой подсистемы ДЭС (аналогичных скирмионам). Основным объектом формирования ДКЭХ выбирался не заряд электрона, как в лафлиновских жидкостях, где спин не играет существенной роли в формировании ближнего порядка, определяя лишь фермиевскую природу электронной статистики, а его спин [112, 113]. До самого последнего времени аналогичной точки зрения придерживался С. В. Иорданский, один из создателей теории коллективных магнитовозбуждений в ДЭС [148]. Действительно, недавние экспериментальные результаты, о которых речь пойдет в этом разделе, подтверждают нетривиальный топологический спиновый порядок в состоянии композитных фермионов при $\nu = 3/2$. Фактически обнаружено первое состояние ДКЭХ, имеющее спиновую природу. Как следствие, все целочисленные состояния композитных фермионов, окружающие фактор заполнения $3/2$, также связаны со спиновыми упорядочениями. Аналогичных указаний на роль спина в состоянии композитных фермионов вблизи $1/2$ нет, однако существуют косвенные экспериментальные свидетельства того, что и при этом факторе заполнения роль спина весьма существенна.

Интерес к ДКЭХ с четными знаменателями обусловлен их возможным использованием в ряде фундаментальных приложений. Эти приложения основаны на развитии топологических квантовых вычислений, использовании энионов, а также открытии новых конденсированных состояний, не имеющих аналогов в трехмерных системах. с их помощью может быть реализована красивая идея топологического квантового компьютера. Первое дробное холловское состояние такого типа, $\nu = 5/2$, было обнаружено в экспериментах по магнитотранспорту в высокоподвижных двумерных системах на основе GaAs/AlGaAs [115, 119]. Более устойчивое, на первый взгляд, состояние $\nu = 3/2$ в GaAs не наблюдалось до недавнего времени [149, 150]. Состояние $\nu = 3/2$ в гетероструктурах GaAs/AlGaAs было описано как сходное с состоянием $\nu = 1/2$ композитных фермионов, т. е. как частично спинполяризованное состояние композитных фермионов, находящихся в нулевом эффективном магнитном поле [22, 151]. Данное предпо-

ложение было качественно подтверждено в магнитотранспортных исследованиях в режиме ДКЭХ в новых высокоподвижных ДЭС на основе гетероструктур ZnO/MgZnO . Значительно большее зеемановское расщепление в ZnO позволяет создать полностью спин-поляризованное состояние при $\nu = 3/2$ [152].

Заметим, что в отличие от холловских изоляторов транспортные измерения в проводящих состояниях ДКЭХ дают гораздо меньше информации об их объемных свойствах. В связи с этим был разработан ряд оптических методов для исследования объемных состояний ДЭС в режиме ЦКЭХ и ДКЭХ, а именно: резонансное отражение (RR), фотоиндуцированное резонансное отражение (PRR) и фотоиндуцированная фотолюминесценция, которые можно использовать для исследования объемных состояний в холловских изоляторах и в холловских проводниках [153]. Суть этих методов сводится к оптическому формированию неравновесных ансамблей экситонов с $\Delta M = 1$ и $\Delta S_z = 1$. Такие возбуждения не могут релаксировать непосредственно в основное состояние ДЭС с излучением фотонов или фононов, если нижний спиновый подуровень Ландау полностью занят и спин-орбитальное взаимодействие мало, как, например, в зоне проводимости GaAs [154]. Такой процесс релаксации невозможен, например, при целочисленном факторе заполнения $\nu = 2$, что отражает несжимаемость электронной системы в занятом нижнем спиновом подуровне Ландау.

При уменьшении фактора заполнения от $\nu = 2$ ДЭС деполяризуется, и релаксация фотовозбужденных электронов с обоих спиновых подуровней первого уровня Ландау ($M = 1$, $S_z = \pm 1/2$) ускоряется [72]. Тем более удивительным является наблюдаемое увеличение времени релаксации таких возбуждений в состоянии $\nu = 3/2$. Оказывается, что состояние $\nu = 3/2$ в гетероструктурах GaAs/AlGaAs представляет собой гораздо более сложный физический объект, чем предполагалось ранее. Основываясь на экспериментальных результатах, удалось показать, что состояние $\nu = 3/2$ представляет собой упорядоченную спиновую конфигурацию, в которой спин-флип возбуждения с изменением орбитального момента импульса сопровождаются изменением спиновой текстуры в основном состоянии. Модифицированная текстура не позволяет возбужденному электрону релаксировать в основное состояние, даже если средняя спиновая поляризация образца меньше единицы [155], т.е. имеет макроскопически большое количество вакантных мест в основном состоянии ДЭС, подходящих для релаксации возбужденного электрона. Другими словами, наблюдается не несжимаемость всей ДЭС, как в случае системы при $\nu = 2$,

а локальная несжимаемость: невозможность вернуть возбужденный электрон в основное состояние в непосредственной близости от самого возбужденного электрона.

Рассмотрим результаты, полученные на GaAs/AlGaAs квантовой яме шириной 31 нм и с концентрацией электронов $1,8 \div 2,1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. На рис. 4.16 приведены характерные спектры

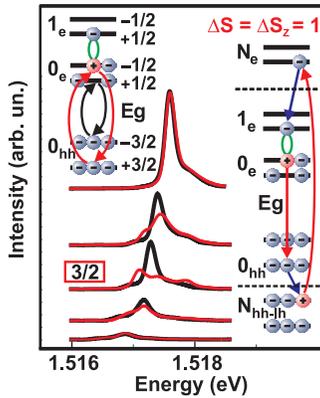


Рис. 4.16. Спектры RR (черная линия) и PRR (красная линия) при различных факторах заполнения вблизи $\nu = 3/2$. На вставке справа представлена схема неравновесных возбуждений со спиновым и орбитальным квантовыми числами 1: 1) оптический переход с уровня Ландау валентной зоны (N_{hh-lh} , где hh и lh обозначают тяжелые и легкие дырки соответственно) на уровень Ландау зоны проводимости; 2) спин-флип релаксация дырки из-за большого спин-орбитального взаимодействия в валентной зоне GaAs на нижний уровень нулевого уровня Ландау тяжелых дырок (0_{hh}); 3) рекомбинация электрона на нулевом уровне Ландау зоны проводимости (0_e) и дырки на нулевом уровне Ландау тяжелых дырок в валентной зоне (0_{hh}) с образованием ферми-дырки на верхнем спиновом подуровне нулевого уровня Ландау зоны проводимости; 4) релаксация возбужденного электрона на нижний спиновый подуровень первого уровня Ландау (спин-орбитальное взаимодействие в зоне проводимости в GaAs слабое); 5) связывание возбужденного электрона и ферми-дырки. На левой вставке показана схема RR и PRR

резонансного отражения и фотоиндуцированного резонансного отражения от состояний нулевого уровня Ландау ДЭС, измеренные в квантово-холловском проводнике в окрестности фактора заполнения $\nu = 3/2$. При факторах заполнения ниже и выше $3/2$ (1,3 и 1,7) сигналы RR и PRR совпадают, что связано с тем, что ДЭС только частично спин-поляризована, и существует макроскопическое число вакантных мест для релаксации возбужденного электрона.

трона на нулевой уровень Ландау без переворота спина с излучением фотона с циклотронной энергией. В этом случае ДЭС переходит в возбужденное спиновое состояние, из которого она так же легко релаксирует в основное состояние с излучением фотона с зеемановской энергией. Эти релаксационные процессы лежат в наносекундном временном диапазоне [143,156], поэтому невозможно накопить сколько-нибудь значительное количество возбуждений с такими короткими временами жизни и плотностями фотовозбуждения, используемыми в эксперименте.

С уменьшением фактора заполнения ДЭС число незанятых мест на нулевом уровне Ландау увеличивается, и, соответственно, растут сигналы RR и PRR. Однако принципиальный интерес представляет не абсолютное значение сигнала отражения, а распределение свободных мест между двумя спиновыми состояниями на нулевом уровне Ландау: $\kappa = (I \downarrow - I \uparrow) / (I \downarrow + I \uparrow)$ (рис. 4.17).

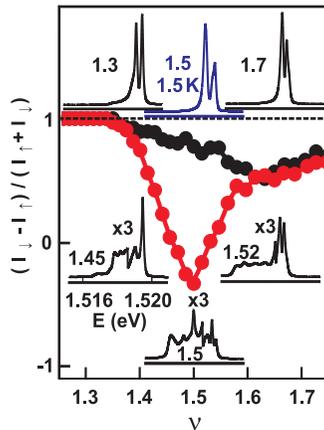


Рис. 4.17. Зависимость $(I \downarrow - I \uparrow) / (I \downarrow + I \uparrow)$, полученная из интегральной интенсивности RR (черные точки) и PRR (красные точки), от фактора заполнения. На вставке показаны спектры фотолюминесценции при температуре 0,45 К (черные линии) и различных факторах заполнения, а также спектр при 1,5 К и $\nu = 3/2$

Согласно сигналу RR, соотношение между пустыми состояниями на верхнем и нижнем спиновых подуровнях Ландау монотонно меняется при изменении фактора заполнения от 1,6 до 1. При факторе заполнения 1 нижний спиновый подуровень Ландау занят, а верхний спиновый подуровень Ландау пуст (холловский ферромагнетик). Следовательно, наблюдаемое в PRR распределение пустых мест между двумя спиновыми подуровнями является естественным.

Удивительно, но сигнал отражения при нерезонансном возбуждении не равен нулю в окрестности фактора заполнения $3/2$ из-за формирования неравновесных спиновых возбуждений (рис. 4.17). Число незанятых состояний на нижнем спиновом уровне Ландау резко возрастает при формировании неравновесного ансамбля спиновых возбуждений. Одновременно время жизни неравновесных спиновых возбуждений достигает значений более 10 мкс, что лишь на порядок меньше времени жизни аналогичных возбуждений в холловском изоляторе при $\nu = 2$ (рис. 4.18). При факторе

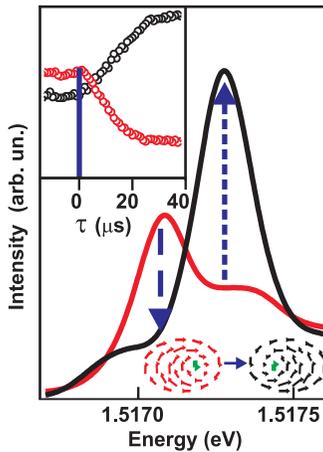


Рис. 4.18. Спектры RR (черная кривая) и PRR (красная кривая) при $\nu = 3/2$. На вставке показана интенсивность PRR в зависимости от времени после выключения фотовозбуждающего лазера. На нижней вставке представлена иллюстрация эволюции спиновой текстуры при изменении спинового и орбитального квантовых чисел системы

заполнения $\nu = 2$ ДЭС находится в несжимаемом целочисленном квантово-холловском состоянии с большой энергетической щелью на уровне Ферми, а состояние $\nu = 3/2$ является холловским проводником с нулевой энергетической щелью на уровне Ферми. Даже в несжимаемом холловском ферромагнитном состоянии при $\nu = 1$ релаксация возбуждений с орбитальным моментом импульса $\Delta M = 1$ и проекцией спина $S_z = 1$ протекает значительно быстрее, чем при $\nu = 3/2$. Это происходит несмотря на то, что число пустых мест на нижнем спиновом подуровне в холловском ферромагнетике намного меньше, чем в состоянии с $\nu = 3/2$.

Можно приблизительно оценить неравновесную плотность возбуждений с $\Delta M = 1$ и $\Delta S_z = 1$ при $\nu = 3/2$, так как известны

зависимости неравновесной плотности и времени релаксации возбуждений от интенсивности фотовозбуждения, полученные из исследований холловского изолятора при $\nu = 2$ [153, 154]. При максимально допустимой интенсивности фотовозбуждения, не вызывающей перегрева электронной системы (100 мкВт/мм^2), эта величина составляет менее 1% от числа квантов магнитного потока на уровне Ландау. Если предположить, что эффективность фотовозбуждения не зависит от фактора заполнения, то плотность возбуждений зависит только от времени жизни. Для фактора заполнения $\nu = 2$ максимум плотности возбуждений составляет 0,1 от числа квантов магнитного потока на уровне Ландау, а время жизни — 100 мкс. При $\nu = 3/2$ время жизни составляет 10 мкс, а плотность неравновесных возбуждений составляет около 0,01 от числа квантов магнитного потока на уровне Ландау.

По грубой оценке, согласно рис. 4.17 на один возбужденный электрон приходится 27 перевернутых спинов в основном состоянии ДЭС; т. е. за образованием одиночного спинового возбуждения с $\Delta M = 1$ и $\Delta S_z = 1$ следует переворот ~ 27 спинов в основном состоянии или наклон много большего числа спинов на некоторый угол. Несмотря на металлическую проводимость ДЭС при $\nu = 3/2$, получается, что электроны объединяются в макроскопические спиновые текстуры (намного больше, чем существующие в окрестности холловского ферромагнетика $\nu = 1$ [36, 74]).

Не менее важным критерием формирования ансамбля неравновесных возбуждений с $\Delta M = 1$ и $\Delta S_z = 1$ является возникновение в спектре фотолюминесценции линий рекомбинации трехчастичных комплексов, состоящих из фотовозбужденной дырки и самого неравновесного возбуждения. В изученном случае холловского изолятора с $\nu = 2$ существует два типа таких комплексов, определяемых спином фотовозбужденной дырки (рис. 4.19) [157]. После рекомбинации фотовозбужденная дырка превращается в вакансию на заполненном уровне Ландау зоны проводимости.

В зависимости от спинов двух ферми-дырок образуются два связанных трехчастичных комплекса, состоящие из неравновесного возбуждения и ферми-дырки. Если спины двух дырок образуют спиновый триплет, то трехчастичный комплекс представляет собой трион. Если же спины двух дырок образуют спиновый синглет, то трехчастичный комплекс представляет собой плазмарон, поскольку возбужденный электрон может рекомбинировать с одной из ферми-дырок, передавая энергию и импульс новой электрон-дырочной паре (плазменное колебание). Плазмарон можно рассматривать как магнитолазмон [47], связанный с дополнительной ферми-дыркой.

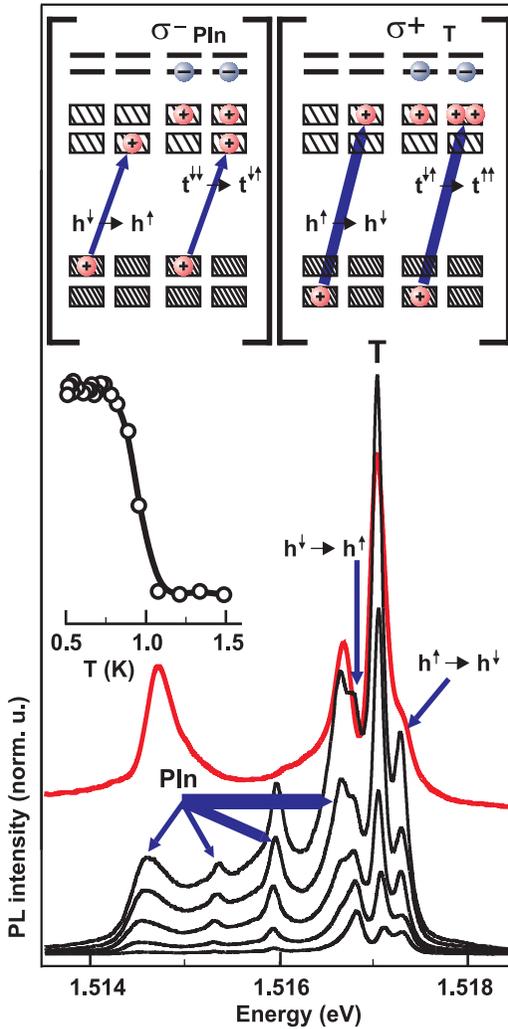


Рис. 4.19. Сверху представлена схема оптических переходов с двумя поляризациями испускаемого света при отсутствии и наличии возбуждения со спиновым и орбитальным квантовыми числами 1. Ниже показаны спектры фотолюминесценции при $\nu = 3/2$ и плотностях фотовозбуждения в 1, 1,5, 3, 6 и 16 раз меньше максимальной — 100 мкВт/мм^2 (черные сплошные кривые). Для сравнения приведен спектр фотолюминесценции при $\nu = 2$ и плотности фотовозбуждения 10 мкВт/мм^2 (красная сплошная кривая). Масштаб энергии одинаков для черных и красной линий. На вставке показано отношение интегральной интенсивности линии плазмарона к интегральному сигналу фотолюминесценции

Интенсивность линии триона учитывает суммарную плотность неравновесных возбуждений с $\Delta M = 1$ и $S_z = 1$. Фотолюминесценция плазмарона содержит информацию как об общем числе возбуждений, так и о спектральной плотности плазмонов, что, в свою очередь, дает распределение плотности неравновесных возбуждений в импульсном пространстве до того момента, когда они свяжутся с ферми-дыркой [157, 158]. При факторе заполнения $3/2$ необходимо учитывать взаимодействие трехчастичных комплексов с окружающей возбуждение спиновой текстурой.

Линии триона и плазмарона наблюдаются в окрестности фактора заполнения $\nu = 3/2$ после образования неравновесных ансамблей возбуждений с орбитальным и спиновым квантовым числом 1 (рис. 4.17). Линия триона при $\nu = 3/2$ аналогична линии при $\nu = 2$. Наоборот, линия плазмарона существенно отличается. В спектре плазмарона присутствуют дополнительные максимумы, которые отсутствуют в спектре плазмарона при $\nu = 2$ [48]. Увеличение плотности мощности фотовозбуждения должно приводить к изменению соотношения между одно- и трехчастичными рекомбинационными каналами. Однако при $\nu = 3/2$ в спектре плазмарона никаких изменений не наблюдается. Это означает, что неравновесные возбуждения между собой не взаимодействуют, а лишние экстремумы связаны с распределением магнитоплазмонов в импульсном пространстве, что радикально отличается от случая $\nu = 2$ [157], где изменение плотности возбуждения сопровождается перераспределением возбуждений в импульсном пространстве. С повышением температуры фотолюминесценция трехчастичных комплексов и сигнал PRR исчезают (рис. 4.17, 4.19). Характерная температура перехода составляет 0,8 К. Это значительно выше температуры образования композитных фермионов, но ровно вдвое меньше зеэмановской щели (1,6 К), что указывает на зеэмановскую активационную природу наблюдаемого явления.

Данные эксперименты качественно подтверждают транспортные измерения пространственно ограниченной ДЭС при $\nu = 3/2$ [150]. Несжимаемость ДЭС, обнаруженная авторами работы [150], может возникать из-за локальной несжимаемости дробного состояния с $\nu = 3/2$ и соизмеримости сужения в ограничивающем потенциале с пространственным размером спиновых текстур. Очевидно, что ток носителей заряда при $\nu = 3/2$ определяется не отдельными электронами, а спиновыми текстурами. Когда размер сужения проводника становится соизмеримым с размером спиновой текстуры, транспорт в объеме ДЭС прекращается, и остается только транспорт по краевым каналам. В результате при $\nu = 3/2$ R_{xy} квантуется. Таким образом, дробное состояние с $\nu = 3/2$ в пространствен-

но ограниченной геометрии является примером локально несжимаемых дробных квантово-холловских состояний, не являющихся ни лафлиновской жидкостью, ни целочисленными состояниями КЭХ композитных фермионов. Важность данного экспериментального наблюдения сложно переоценить. До сих пор микроскопической теории ДКЭХ не создано, а существующие феноменологические теории Лафлина и Джейна не рассматривают возможные спиновые упорядочения в основном состоянии ДЭС. Вполне возможно, что проблема описания ДКЭХ аналогична проблеме описания сверхпроводимости. Последняя была решена только после осознания необходимости куперовского спаривания электронов на уровне Ферми с противоположными спинами с образованием композитного бозона. Более серьезный взгляд на спиновые упорядочения в основном состоянии позволит развить новые теоретические подходы к проблеме ДКЭХ, а возможно, и построить микроскопическую теорию этого фундаментального явления, аналогичную БКШ-теории сверхпроводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.* Physical Review Letters. 1980. V. 45. No. 6. P. 494.
2. *Laughlin R. B.* Quantized Hall conductivity in two dimensions // Physical Review B. V. 23. No. 10. P. 5632. 1981.
3. *Halperin B. I.* Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential // Physical Review B. 1982. V. 25. No. 4. P. 2185.
4. *Thouless D. J., Kohmoto M., Nightingale M. P., den Nijs M.* Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential // Physical review letters. 1982. V. 49. No. 6. P. 405.
5. *Niu Q., Thouless D. J., Wu Y.-S.* Quantized Hall conductance as a topological invariant // Physical Review B. 1985. V. 31. No. 6. P. 3372.
6. *Hasan M. Z., Kane C. L.* Colloquium: topological insulators // Reviews of modern physics. 2010. V. 82. No. 4. P. 3045.
7. On the interaction of electrons in metals. *Wigner E.* // Physical Review. 1934. V. 46. No. 11. P. 1002.
8. *Tsui D. C., Störmer H. L., Hwang J. C. M., Brooks J. S., Naughton M. J.* Observation of a fractional quantum number // Physical Review B. 1983. V. 28. No. 4. P. 2274.
9. *Li H., Haldane F., Duncan M.* Entanglement spectrum as a generalization of entanglement entropy: Identification of topological order in non-abelian fractional quantum hall effect states // Physical review letters. 2008. V. 101. No. 1. P. 010504.
10. *Laughlin R. B.* Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations // Physical Review Letters. 1983. V. 50. No. 18. P. 1395.
11. *Stormer H. L., Chang A., Tsui D. C., Hwang J. C. M., Gossard A. C., Wiegmann W.* Fractional quantization of the Hall effect // Physical review letters. 1983. V. 50. No. 24. P. 1953.
12. *Haldane F., Duncan M.* // Physical Review Letters. Fractional quantization of the Hall effect: a hierarchy of incompressible quantum fluid states. 1983. V. 51. No. 7. P. 605.
13. *Halperin B. I.* Theory of the quantized Hall conductance // Helvetica Physica Acta. 1983. V. 56. No. 1–3. P. 75–102.
14. *Halperin B. I.* Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states // Physical Review Letters. 1984. V. 52. No. 18. P. 1583.
15. *Prange R. E., Girvin S. M.* The Quantum Hall effect. — N. Y.: Springer verlag, 1990.
16. *Jain, Jainendra K.* Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect // Physical review letters. 1989. V. 63. No. 2. P. 199.
17. *Jain J. K.* Theory of the fractional quantum Hall effect // Physical Review B. 1990. V. 41. No. 11. P. 7653.
18. *Jain J. K.* Composite fermions. — Cambridge: Cambridge University Pres, 2007.

19. *Heinonen O.* Composite fermions: a unified view of the quantum Hall regime. — World Scientific, 1998.
20. *Lopez A., Fradkin E.* Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories // Physical Review B. 1991. V. 44. No. 10. P. 5246.
21. *Halperin B. I., Lee P. A., Read N.* Theory of the half-filled Landau level // Physical Review B. 1993. V. 47. No. 12. P. 7312.
22. *Murthy G., Shankar R.* Hamiltonian theories of the fractional quantum Hall effect // Reviews of Modern Physics. 2003. V. 75. No. 4. P. 1101.
23. *Moore G., Read N.* Nonabelions in the fractional quantum Hall effect // Nucl. Phys. B. 1991 V. 360. P. 362.
24. *Read N., Rezayi E.* Beyond paired quantum Hall states: Parafermions and incompressible states in the first excited Landau level // Physical Review B. 1999. V. 59. No. 12. P. 8084.
25. *Ardonne E., Schoutens K.* New class of non-abelian spin-singlet quantum Hall states // Physical review letters. 1999. V. 82. No. 25. P. 5096.
26. *Zhang S. C., Hansson Th. H., Kivelson S.* Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect // Physical review letters. 1989. V. 62. No. 1. P. 82.
27. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // Communications in Mathematical Physics. 1989. V. 121. No. 3. P. 351–399.
28. *Dimofte T.* Perturbative and nonperturbative aspects of complex Chern–Simons theory // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. V. 50. No. 44. P. 443009.
29. *MacDonald A. H.* The Quantum Hall Effects / Quantum Coherence in Mesoscopic Systems. P. 195–217. — Springer, 1991.
30. *MacDonald A. H.* Edge states in the fractional-quantum-Hall-effect regime // Physical review letters. 1990. V. 64. No. 2. P. 220.
31. *Wen X. G.* Electrodynamical properties of gapless edge excitations in the fractional quantum Hall states // Physical review letters. 1990. V. 64. No. 18. P. 2206.
32. *Kane C. L., Fisher M. P. A.* Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas // Physical Review B. 1992. V. 46. No. 23. P. 15233.
33. *Bisti V. E., Van'kov A. B., Zhuravlev A. S., Kulik L. V.* Magnetoexcitons in two-dimensional electronic systems // Physics-Uspexhi. 2015. V. 58. No. 4. P. 315.
34. *Ландау Л. Д., Питаевский Л. П., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 5: Статистическая физика. — М.: Физматлит, 2018.
35. *Dickmann S.* Goldstone-mode relaxation in a quantized hall ferromagnet // Physical review letters. 2004. V. 93. No. 20. P. 206804.
36. *Sondhi Sh. L., Karlhede A., Kivelson S. A., Rezayi E. H.* Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum Hall effect at small Zeeman energies // Physical Review B. 1993. V. 47. No. 24. P. 16419.
37. *Girvin S. M.* The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries. — Springer, 1999.
38. *Read N., Sachdev S.* Continuum quantum ferromagnets at finite temperature and the quantum hall effect // Physical review letters. 1995. V. 75. No. 19. P. 3509.
39. *Berry M. V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1984. V. 392. No. 1802. P. 45–57.

40. *Van'kov A. B., Kulik L. V., Kukushkin I. V., Kirpichev V. E., Dickmann S., Zhilin V. M., Smet J. H., von Klitzing K., Wegscheider W.* Low-magnetic-field divergence of the electronic g factor obtained from the cyclotron spin-flip mode of the $\nu = 1$ quantum Hall ferromagnet // Physical review letters. 2006. V. 97. No. 24. P. 246801.
41. *Zhuravlev A. S., Van'kov A. B., Kulik L. V., Kukushkin I. V., Kirpichev V. E., Smet J. H., Klitzing K. V., Umansky V., Wegscheider W.* Inelastic light scattering study of the $\nu = 1$ quantum Hall ferromagnet // Physical Review B. 2008. V. 77. No. 15. P. 155404.
42. *Ando T., Fowler A. B., Stern F.* Electronic properties of two-dimensional systems // Reviews of Modern Physics. 1982. V. 54. No. 2. P. 437.
43. *Usher A., Nicholas R. J., Harris J. J., Foxon C. T.* Observation of magnetic excitons and spin waves in activation studies of a two-dimensional electron gas // Physical Review B. 1990. V. 41. No. 2. P. 1129.
44. *Schmeller A., Eisenstein J. P., Pfeiffer L. N., West K. W.* Evidence for skyrmions and single spin flips in the integer quantized Hall effect // Physical review letters. 1995. V. 75. No. 23. P. 4290.
45. *Dolgopолоv V. T., Shashkin A. A., Aristov A. V., Schmerek D., Hansen W., Kotthaus J. P., Holland M.* Direct measurements of the spin gap in the two-dimensional electron gas of AlGaAs-GaAs heterojunctions // Physical review letters. 1997. V. 79. No. 4. P. 729.
46. *Khrapai V. S., Shashkin A. A., Shangina E. L., Pellegrini V., Beltram F., Biasiol G., Sorba L.* Spin gap in the two-dimensional electron system of GaAs/Al_xGa_{1-x}As single heterojunctions in weak magnetic fields // Physical Review B. 2005. V. 72. No. 3. P. 035344.
47. *Bychkov Yu. A., Iordanskii S. V., Eliashberg G. M.* Two-dimensional electrons in a strong magnetic field // JETPL. 1981 V. 33. P. 143.
48. *Kallin C., Halperin B. I.* Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas // Physical Review B. 1984. V. 30. No. 10. P. 5655.
49. *Pinczuk A., Dennis B. S., Heiman D., Kallin C., Brey L., Tejedor C., Schmitt-Rink S., Pfeiffer L. N., West K. W.* Spectroscopic measurement of large exchange enhancement of a spin-polarized 2D-electron gas // Physical review letters. 1992. V. 68. No. 24. P. 3623.
50. *Kulik L. V., Kukushkin I. V., Kirpichev V. E., Smet J. H., von Klitzing K., Wegscheider W.* Cyclotron spin-flip excitations in the extreme quantum limit // Physical Review B. 2001. V. 63. No. 20. P. 201402.
51. *Eriksson M. A., Pinczuk A., Dennis B. S., Simon S. H., Pfeiffer L. N., West K. W.* Collective excitations in the dilute 2D-electron system // Physical review letters. 1999. V. 82. No. 10. P. 2163.
52. *Kulik L. V., Kukushkin I. V., Kirpichev V. E., Smet J. H., von Klitzing K., Umansky V., Wegscheider W.* Cyclotron spin-flip excitations in the 2D-electron system // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2002. V. 12. No. 1-4. P. 574-577.
53. *Kulik L. V., Kukushkin I. V., Dickmann S., Kirpichev V. E., Van'kov A. B., Parakhonsky A. L., Smet J. H., von Klitzing K., Wegscheider W.* Cyclotron spin-flip mode as the lowest-energy excitation of unpolarized integer quantum Hall states // Physical Review B. 2005. V. 72. No. 7. P. 073304.
54. *Kohn W.* Cyclotron resonance and de Haas-van Alphen oscillations of an interacting electron gas // Physical Review. 1961. V. 123. No. 4. P. 1242.

55. *Dobers M., Klitzing K. V., Weimann G.* Electron-spin resonance in the two-dimensional electron gas of GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterostructures // Physical review. B, Condensed matter. 1988 V. 38. No. 8. P. 5453–5456.
56. *Longo J.P., Kallin C.* Spin-flip excitations from Landau levels in two dimensions // Physical Review B. 1993. V. 47. No. 8. P. 4429.
57. *Chiu K. W., Quinn J.J.* Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Physical Review B. 1974. V. 9. No. 11. P. 4724.
58. *Fleury P.A., Loudon R.* Scattering of light by one-and two-magnon excitations // Physical Review. 1968. V. 166. No. 2. P. 514.
59. *Barrett S., E., Dabbagh G., Pfeiffer L. N., West K. W., Tycko R.* Optically pumped NMR evidence for finite-size skyrmions in GaAs quantum wells near Landau level filling $\nu = 1$ // Physical review letters. 1995. V. 74. No. 25. P. 5112.
60. *Manfra M.J., Aifer E.H., Goldberg B.B., Broido D.A., Pfeiffer L., West K.* Temperature dependence of the spin polarization of a quantum Hall ferromagnet // Physical Review B. 1996. V. 54. No. 24. P. R17327.
61. *Dikman S.M., Iordanskii S. V.* Spin relaxation under conditions of the quantum Hall effect with odd filling // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 1996. V. 63. No. 1. P. 50–55.
62. *Kasner M., MacDonald A. H.* Thermodynamics of quantum Hall ferromagnets // Physical review letters. 1996. V. 76. No. 17. P. 3204.
63. *Mermin N.D., Wagner H.* Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models // Physical Review Letters. 1966. V. 17. No. 22. P. 1133.
64. *Hohenberg P. C.* Existence of long-range order in one and two dimensions // Physical Review. 1967. V. 158. No. 2. P. 383.
65. *Dickmann S.* Spin-rotation mode in a quantum Hall ferromagnet // Journal of Physics: Condensed Matter. 2019. V. 32. No. 1. P. 015603.
66. *Larionov A. V., Kulik L. V., Dickmann S., Kukushkin I. V.* Goldstone mode stochasticization in a quantum Hall ferromagnet // Physical Review B. 2015. V. 92. No. 16. P. 165417.
67. *Larionov A. V., Stepanets-Khoussein E., Kulik L. V., Umansky V., Kukushkin I. V.* Investigation of spin stiffness in spin-depolarized states of two-dimensional electron systems with time-resolved Kerr rotation // Scientific Reports. 2020. V. 10. No. 1. P. 1–7.
68. *Dobers M., von Klitzing K., Schneider J., Weimann G., Ploog K.* Electrical Detection of Nuclear Magnetic Resonance in GaAs/Al_xGa_{1-x}As Heterostructures // Physical review letters. V. 61. No. 14. P. 1650. 1988.
69. *Berg A., Dobers M., Gerhardt R.R., von Klitzing K.* Magnetoquantum oscillations of the nuclear-spin-lattice relaxation near a two-dimensional electron gas // Physical review letters. 1990. V. 64. No. 21. P. 2563.
70. *Vitkalov S. A., Bowers C.R., Simmons J. A., Reno J. L.* ESR Detection of optical dynamic nuclear polarization in GaAs/Al_xGa_{1-x}As quantum wells at unity filling factor in the quantum Hall effect // Physical Review B. 2000. V. 61. No. 8. P. 5447.
71. *Khandelwal P., Dementyev A. E., Kuzma N.N., Barrett S. E., Pfeiffer L. N., West K. W.* Spectroscopic evidence for the localization of Skyrmions near $\nu = 1$ as $T \rightarrow 0$ // Physical Review Letters. 2001. V. 86. No. 23. P. 5353.

72. *Aifer E., H., Goldberg B.B., Broido D.A.* Evidence of skyrmion excitations about $\nu = 1$ in n -modulation-doped single quantum wells by interband optical transmission // Physical review letters. 1996. V. 76. No. 4. P. 680.
73. *Drozdov I.K., Kulik L.V., Zhuravlev A.S., Kirpichev V.E., Kukushkin I.V., Schmult S., Dietsche W.* Extra spin-wave mode in quantum Hall systems: beyond the skyrmion limit // Physical review letters. 2010. V. 104. No. 13. P. 136804.
74. *Fertig H.A., Brey L., Côté R., MacDonald A.H.* Charged spin-texture excitations and the Hartree-Fock approximation in the quantum Hall effect // Physical Review B. 1994. V. 50. No. 15. P. 11018.
75. *Lee D.H., Kane Ch.L.* Boson-vortex-Skyrmion duality, spin-singlet fractional quantum Hall effect, and spin-1/2 anyon superconductivity // Physical review letters. 1990. V. 64. No. 12. P. 1313.
76. *Moon K., Mori H., Yang K., Girvin S.M., MacDonald A.H., Zheng L., Yoshiooka D., Zhang Sh.-Ch.* Spontaneous interlayer coherence in double-layer quantum Hall systems: Charged vortices and Kosterlitz-Thouless phase transitions // Physical Review B. 1995. V. 51. No. 8. P. 5138.
77. *Green A.G., Kogan I.I., Tselik A.M.* Skyrmion liquid in SU (2)-invariant quantum Hall systems // Physical Review B. 1996. V. 53. No. 11. P. 6981.
78. *Rodriguez J.P.* Skyrmion liquid phase of the quantum ferromagnet in two dimensions // EPL (Europhysics Letters). 1998. V. 42. No. 2. P. 197.
79. *Abolfath M., Ejtehadi M.R.* Field theory of Skyrme lattices in quantum Hall ferromagnets // Physical Review B. 1998. V. 58. No. 16. P. 10665.
80. *Apel W., Bychkov Yu.A.* Hopf Term and the Effective Lagrangian for the Skyrmions in a Two-Dimensional Electron Gas at Small g Factor // Physical review letters. 1997. V. 78. No. 11. P. 2188.
81. *Green A.G., Kogan I.I., Tselik A.M.* Skyrmions in the quantum Hall effect at finite Zeeman coupling // Physical Review B. 1996. V. 54. No. 23. P. 16838.
82. *Skyrme T.H.R.* Particle states of a quantized meson field // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1961. V. 262. No. 1309. P. 237-245.
83. *Rajaraman, R.* Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory. — North-Holland, 1982.
84. *Ho T.-L.* Quantum Hall ferromagnets // Physical review letters. 1994. V. 73. No. 6. P. 874.
85. *Fertig H.A., Brey L., Côté R., MacDonald A.H., Karlhede A., Sondhi S.L.* Hartree-Fock theory of Skyrmions in quantum Hall ferromagnets // Physical Review B. 1997. V. 55. No. 16. P. 10671.
86. *Maude D.K., Potemski M., Portal J.C., Henini M., Eaves L., Hill G., Pate M.A.* Spin excitations of a two-dimensional electron gas in the limit of vanishing Landé g factor // Physical review letters. 1996. V. 77. No. 22. P. 4604.
87. *Abolfath M., Palacios J.J., Fertig H.A., Girvin S.M., MacDonald A.H.* Critical comparison of classical field theory and microscopic wave functions for skyrmions in quantum Hall ferromagnets // Physical Review B. 1997. V. 56. No. 11. P. 6795.
88. *Brey L., Fertig H.A., Côté R., MacDonald A.H.* Skyrme crystal in a two-dimensional electron gas // Physical review letters. 1995. V. 75. No. 13. P. 2562.
89. *Côté R., MacDonald A.H., Brey L., Fertig H.A., Girvin S.M., Stoof H.T.C.* Collective excitations, NMR, and phase transitions in skyrme crystals // Physical review letters. 1997. V. 78. No. 25. P. 4825.

90. *Tycko R., Barrett S. E., Dabbagh G., Pfeiffer L. N., West K. W.* Electronic states in gallium arsenide quantum wells probed by optically pumped NMR // *Science*. 1995. V. 268. No. 5216. P. 1460–1463.
91. *Smet J. H., Deutschmann R. A., Ertl F., Wegscheider W., Abstreiter G., von Klitzing K.* Gate-voltage control of spin interactions between electrons and nuclei in a semiconductor // *Nature*. 2002. V. 415. No. 6869. P. 281–286.
92. *Mühlbauer S., Binz B., Jonietz F., Pfleiderer C., Rosch A., Neubauer A., Georgii R., Böni P.* Skyrmion lattice in a chiral magnet // *Science*. 2009. V. 323. No. 5916. P. 915–919.
93. *Yu X. Z., Onose Y., Kanazawa N., Park J. H., Han J. H., Matsui Y., Nagaosa N., Tokura Y.* Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal // *Nature*. 2010. V. 465. No. 7300. P. 901–904.
94. *Kukushkin I. V., Smet J. H., Abergel D. S. L., Fal'ko V. I., Wegscheider W., von Klitzing K.* Detection of the electron spin resonance of two-dimensional electrons at large wave vectors // *Physical review letters*. 2006. V. 96. No. 12. P. 126807.
95. *Fukuoka D., Oto K., Muro K., Hirayama Y., Kumada N.* Skyrmion effect on the relaxation of spin waves in a quantum Hall ferromagnet // *Physical review letters*. 2010. V. 105. No. 12. P. 126802.
96. *Larionov A. V., Stepanets-Khussein E., Kulik L. V.* Spin dephasing of a two-dimensional electron gas in a GaAs quantum well near odd filling factors // *JETP letters*. 2017. V. 105. No. 4. P. 238–240.
97. *Kulik L. V., Zhuravlev A. S., Kirpichev V. E., Bisti V. E., Kukushkin I. V.* Collective spin precession excitations in a two-dimensional quantum Hall ferromagnet // *Physical Review B*. 2013. V. 87. No. 4. P. 045316.
98. *Fukuyama H., Platzman P. M., Anderson P. W.* Two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // *Physical Review B*. 1979. V. 19. No. 10. P. 5211.
99. *De-Picciotto R., Reznikov M., Heiblum M., Umansky V., Bunin G., Mahalu D.* Direct observation of a fractional charge // *Nature*. 1997. V. 389. No. 6647. P. 162–164.
100. *Saminadayar L., Glattli D. C., Jin Y., Etienne B.* Observation of the $e/3$ fractionally charged Laughlin quasiparticle // *Physical Review Letters*. 1997. V. 79. No. 13. P. 2526.
101. *Arovas D., Schrieffer J. R., Wilczek F.* Fractional statistics and the quantum Hall effect // *Physical review letters*. 1984. V. 53. No. 7. P. 722.
102. *Arovas D. P., Schrieffer R., Wilczek F., Zee A.* Statistical mechanics of anyons // *Nuclear Physics B*. 1985. V. 251. P. 117–126.
103. *Leinaas J. M., Myrheim J.* On the theory of identical particles // *II Nuovo Cimento B* (1971–1996). 1977. V. 37. No. 1. P. 1–23.
104. *Haldane F. D. M., Rezayi E. H.* Finite-size studies of the incompressible state of the fractionally quantized Hall effect and its excitations // *Physical review letters*. 1985. V. 54. No. 3. P. 237.
105. *Fano G., Ortolani F., Colombo E.* Configuration-interaction calculations on the fractional quantum Hall effect // *Physical Review B*. 1986. V. 34. No. 4. P. 2670.
106. *Girvin S. M., MacDonald A. H., Platzman P. M.* Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum Hall effect // *Physical Review B*. 1986. V. 33. No. 4. P. 2481.
107. *Tinkham, M.* Introduction to Superconductivity. — Dover Publications, 2004.
108. *Girvin S. M., Jach T.* Formalism for the quantum Hall effect: Hilbert space of analytic functions // *Physical Review B*. 1984. V. 29. No. 10. P. 5617.

109. *Levesque D., Weis J.J., MacDonald A.H.* Crystallization of the incompressible quantum-fluid state of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // *Physical Review B*. 1984. V. 30. No. 2. P. 1056.
110. *Chakraborty T., Pietiläinen P.* The quantum hall effects: integral and fractional. V. 85. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
111. *Nayak C., Simon S.H., Stern A., Freedman M., Sarma S.D.* Non-Abelian anyons and topological quantum computation // *Reviews of Modern Physics*. 2008. V. 80. No. 3. P. 1083.
112. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Wilczek F.* // *Physical review letters*. 1982. V. 49. No. 14. P. 957.
113. *Wilczek F.* Magnetic flux, angular momentum, and statistics // *Physical Review Letters*. 1982. V. 48. No. 17. P. 1144.
114. *Dolev M., Heiblum M., Umansky V., Stern A., Mahalu D.* Observation of a quarter of an electron charge at the $\nu = 5/2$ quantum Hall state // *Nature*. V. 452. No. 7189. P. 829–834. 2008.
115. *Willett R.L., Pfeiffer L.N., West K.W.* Measurement of filling factor $5/2$ quasi-particle interference with observation of charge $e/4$ and $e/2$ period oscillations // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2009. V. 106. No. 22. P. 8853–8858.
116. *Bishara W., Bonderson P., Nayak C., Shtengel K., Slingerland J.K.* Interferometric signature of non-Abelian anyons // *Physical Review B*. 2009. V. 80. No. 15. P. 155303.
117. *Read N.* Excitation structure of the hierarchy scheme in the fractional quantum Hall effect // *Physical review letters*. V. 65. No. 12. P. 1502. 1990.
118. Structure of the microscopic theory of the hierarchical fractional quantum Hall effect. *Blok B., Wen X.G.* // *Physical Review B*. V. 43. No. 10. P. 8337. 1991.
119. *Willett R., Eisenstein J.P., Störmer H.L., Tsui D.C., Gossard A.C., English J.H.* Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect // *Physical review letters*. 1987. V. 59. No. 15. P. 1776.
120. *Pan W., Xia J.S., Shvarts V., Adams D.E., Stormer H.L., Tsui D.C., Pfeiffer L.N., Baldwin K.W., West K.W.* Exact quantization of the even-denominator fractional quantum Hall state at $\nu = 5/2$ Landau level filling factor // *Physical review letters*. 1999. V. 83. No. 17. P. 3530.
121. *Fubini S.* Vertex operators and quantum Hall effect // *Modern Physics Letters A*. 1991. V. 6. No. 04. P. 347–358.
122. *Fubini S., Lütken C.A.* Vertex operators in the fractional quantum Hall effect // *Modern Physics Letters A*. 1991. V. 6. No. 06. P. 487–500.
123. *Greiter M., Wen X.G., Wilczek F.* Paired hall states // *Nuclear Physics B*. 1992. V. 374. No. 3. P. 567–614.
124. *Greiter M., Wen X.G., Wilczek F.* Paired Hall states in double-layer electron systems // *Physical Review B*. 1992. V. 46. No. 15. P. 9586.
125. *Willett R.L.* The quantum Hall effect at $5/2$ filling factor // *Reports on Progress in Physics*. 2013. V. 76. No. 7. P. 076501.
126. *Willett R.L., Nayak C., Shtengel K., Pfeiffer L.N., West K.W.* Magnetic-field-tuned aharonov-bohm oscillations and evidence for non-abelian anyons at $\nu = 5/2$ // *Physical review letters*. V. 111. No. 18. P. 186401. 2013.
127. *Lee D.H., Zhang Sh. Ch.* Collective excitations in the Ginzburg-Landau theory of the fractional quantum Hall effect // *Physical review letters*. 1991. V. 66. No. 9. P. 1220.

128. *Lopez A., Fradkin E.* Universal properties of the wave functions of fractional quantum Hall systems // Physical review letters. 1992. V. 69. No. 14. P. 2126.
129. *Töke C., Jain J. K.* Change in the character of quasiparticles without gap collapse in a model of fractional quantum Hall effect // Physical Review B. 2009. V. 80. No. 20. P. 205301.
130. *Sarma S. D., Pinczuk A.* Perspectives in quantum hall effects: Novel quantum liquids in low-dimensional semiconductor structures. — John Wiley & Sons, 2008.
131. *Bolotin K. I., Ghahari F., Shulman M. D., Stormer H. L., Kim P.* Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene // Nature. V. 462. No. 7270. P. 196–199. 2009.
132. *Tsukazaki A., Akasaka S., Nakahara K., Ohno Y., Ohno H., Maryenko D., Ohtomo A., Kawasaki M.* Observation of the fractional quantum Hall effect in an oxide // Nature materials. 2010. V. 9. No. 11. P. 889–893.
133. *Kukushkin I. V., Smet J. H., Scarola V. W., Umansky V., von Klitzing K.* Dispersion of the excitations of fractional quantum Hall states // Science. 2009. V. 324. No. 5930. P. 1044–1047.
134. *Lerner I. V., Lozovik Y. U. E.* Mott exciton in a quasi-two-dimensional semiconductor in a strong magnetic field // Sov. Phys. JETP,. 1980. V. 51. No. 3. P. 588–592.
135. *Apalkov V. M., Rashba E. I.* Interaction of excitons with an incompressible quantum liquid // Physical Review B. 1992. V. 46. No. 3. P. 1628.
136. *Girvin S. M., MacDonald A. H., Platzman P. M.* Collective-excitation gap in the fractional quantum Hall effect // Physical review letters. 1985. V. 54. No. 6. P. 581.
137. *Kulik L. V., Dickmann S., Drozdov I. K., Zhuravlev A. S., Kirpichev V. E., Kukushkin I. V., Schmult S., Dietsche W.* Antiphased cyclotron-magnetoplasma mode in a quantum Hall system // Physical Review B. 2009. V. 79. No. 12. P. 121310.
138. *Van'kov A. B., Kulik L. V., Dickmann S., Kukushkin I. V., Kirpichev V. E., Dietsche W., Schmult S.* Cyclotron spin-flip excitations in a $\nu = 1/3$ quantum Hall ferromagnet // Physical review letters. 2009. V. 102. No. 20. P. 206802.
139. *Khandelwal P., Kuzma N. N., Barrett S. E., Pfeiffer L. N., West K. W.* Optically Pumped Nuclear Magnetic Resonance Measurements of the Electron Spin Polarization in GaAs Quantum Wells near Landau Level Filling Factor $\nu = 1/3$ // Physical review letters. 1998. V. 81. No. 3. P. 673.
140. *Dickmann S., Zhilin V. M.* Double-exciton component of the cyclotron spin-flip mode in a quantum Hall ferromagnet // Physical Review B. 2008. V. 78. No. 11. P. 115302.
141. *Kulik L. V., Zhuravlev A. S., Bisti V. E., Kirpichev V. E., Khannanov M. N., Kukushkin I. V.* Resonance reflection of light from a $\nu = 1/3$ Laughlin liquid // JETP letters. 2015. V. 100. No. 9. P. 581–584.
142. *Kulik L. V., Ovchinnikov K., Zhuravlev A. S., Bisti V. E., Kukushkin I. V., Schmult S., Dietsche W.* Resonant Rayleigh scattering as a probe of spin polarization in a two-dimensional electron system // Physical Review B. 2012. V. 85. No. 11. P. 113403.
143. *Zhuravlev A. S., Dickmann S., Kulik L. V., Kukushkin I. V.* Slow spin relaxation in a quantum Hall ferromagnet state // Physical Review B. 2014. V. 89. No. 16. P. 161301.
144. *Kukushkin I. V., Smet J. H., von Klitzing K., Wegscheider W.* Cyclotron resonance of composite fermions // Nature. V. 415. No. 6870. P. 409–412. 2002.

145. *Gerhardts R. R., Weiss D., von Klitzing K.* Novel magnetoresistance oscillations in a periodically modulated two-dimensional electron gas // Physical review letters. 1989. V. 62. No. 10. P. 1173.
146. *Shilton J. M., Mace D. R., Talyanskii V. I., Pepper M., Simmons M. Y., Churchill A. C., Ritchie D. A.* Effect of spatial dispersion on acoustoelectric current in a high-mobility two-dimensional electron gas // Physical Review B. 1995. V. 51. No. 20. P. 14770.
147. *Park K., Jain J. K.* Phase diagram of the spin polarization of composite fermions and a new effective mass // Physical review letters. 1998. V. 80. No. 19. P. 4237.
148. *Iordanskii S. V.* The lattices with the continuous vorticity as a model for FQHE // Письма в ЖЭТФ. 2011. V. 93. No. 3. P. 190–193.
149. *Zhang Y.* Waves, particles, and interactions in reduced dimensions. — Harvard University, 2009.
150. *Fu H., Wu Y., Zhang R., Sun J., Shan P., Wang P., Zhu Z., Pfeiffer L. N., West K. W., Liu H. et al.* $3/2$ fractional quantum Hall plateau in confined two-dimensional electron gas // Nature communications. 2019. V. 10. No. 1. P. 1–6.
151. *Du R. R., Yeh A. S., Stormer H. L., Tsui D. C., Pfeiffer L. N., West K. W.* Fractional quantum Hall effect around $\nu = 3/2$: Composite fermions with a spin // Physical review letters. 1995. V. 75. No. 21. P. 3926.
152. *Falson J., Maryenko D., Friess B., Zhang D., Kozuka Y., Tsukazaki A., Smet J. H., Kawasaki M.* Even-denominator fractional quantum Hall physics in ZnO // Nature Physics. 2015. V. 11. No. 4. P. 347–351.
153. *Kulik L. V., Zhuravlev A. S., Dickmann S., Gorbunov A. V., Timofeev V. B., Kukushkin I. V., Schmult S.* Magnetofermionic condensate in two dimensions // Nature communications. 2016. V. 7. No. 1. P. 1–6.
154. *Kulik L. V., Gorbunov A. V., Zhuravlev A. S., Timofeev V. B., Dickmann S., Kukushkin I. V.* Super-long life time for 2D-cyclotron spin-flip excitons // Scientific Reports. V. 5. No. 1. P. 1–6. 2015.
155. *Tiemann L., Gamez G., Kumada N., Muraki K.* Unraveling the spin polarization of the $\nu = 5/2$ fractional quantum Hall state // Science. 2012. V. 335. No. 6070. P. 828–831.
156. *Zhang Q., Arikawa T., Kato E., Reno J. L., Pan W., Watson J. D., Manfra M. J., Zudov M. A., Tokman M., Erukhimova M., et al.* Superradiant decay of cyclotron resonance of two-dimensional electron gases // Physical review letters. 2014. V. 113. No. 4. P. 047601.
157. *Zhuravlev A. S., Kuznetsov V. A., Kulik L. V., Bisti V. E., Kirpichev V. E., Kukushkin I. V., Schmult S.* Artificially constructed plasmarons and plasmon-exciton molecules in 2D-metals // Physical Review Letters. 2016. V. 117. No. 19. P. 196802.
158. *Kuznetsov V. A., Kulik L. V., Velikanov M. D., Zhuravlev A. S., Gorbunov A. V., Schmult S., Kukushkin I. V.* Three-particle electron-hole complexes in two-dimensional electron systems // Physical Review B. 2018. V. 98. No. 20. P. 205303.

Научное издание
Загитова Азалия Азатовна
Кулик Леонид Викторович

**ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗОНДИРОВАНИЯ ОБЪЕМНЫХ СОСТОЯНИЙ
КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛИА**

Текст книги дан в авторской редакции

Верстка выполнена в издательстве «Физматкнига»

Операторы верстки *А. В. Елфимов, А. К. Розанов*

Издательство «Физматкнига».

141701, Московская область, г. Долгопрудный, ул. Первомайская, д. 3А.

Тел. (499) 390-51-38.

Подписано в печать 30.10.2020. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 100 экз.

Отпечатано в АО «Т8 Издательские технологии»

109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5