

с коллегами, охвачен широкий круг физических явлений в объемных полупроводниках и в двумерных полупроводниковых наноструктурах. Описаны и проанализированы свойства экситонных комплексов и экситон-дырочной жидкости в объемных материалах, квантовый эффект Холла и вигнеровская кристаллизация в гетеропереходах, бозе-эйнштейновская конденсация экситонов в квантовых ямах, циклотронных магнитоэкситонов в холловском диэлектрике и экситонных поляритонов в микрорезонаторах. Сборник будет полезен научным сотрудникам, аспирантам и студентам старших курсов физических специальностей университетов. Академик В.Б. Тимофеев – выдаю-

щийся физик-экспериментатор, широко известный в нашей стране и за рубежом своими достижениями в области физики полупроводников, конденсированных сред и низкоразмерных полупроводниковых систем, лауреат Государственной премии СССР, имеет правительственные и международные награды.

В избранных обзорных статьях известного в нашей стране и за рубежом специалиста в

области оптики полупроводников академика В.Б.Тимофеева, написанных в разные годы и по большей части в соавторстве



8 **30PO** D 0 цикл ЕМАТИЧЕСКИЙ

ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОБЪЕМНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ И НАНОСТРУКТУРАХ



ТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦИКЛ ОБЗОРОВ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Электронные и электронно-дырочные корреляционные явления в объемных полупроводниках и наноструктурах – тематический цикл обзоров

Том 1



Москва Издание Бориса Николаева 2020 УДК 538.95+537.632 ББК 22.379 Э45

Составитель академик В.Б. Тимофеев

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н. А.В. Горбунов, к.п.н. О.И. Левченко, Т.Ю. Ткачук, М.И. Быхало

Электронные и электронно-дырочные корреляционные явления в объемных полупроводниках и наноструктурах – тематический цикл обзоров. В.Б. Тимофеев (сост.): в 2 т. Т. 1. – М.: Издание Бориса Николаева, 2020. – 472 с.: илл. ISBN 978-5-6040418-4-0 (Т. 1)

В избранных обзорных статьях известного в нашей стране и за рубежом специалиста в области оптики полупроводников академика В.Б. Тимофеева, написанных в разные годы и по большей части в соавторстве с коллегами, охвачен широкий круг физических явлений в объемных полупроводниках и в двумерных полупроводниковых наноструктурах. Описаны и проанализированы свойства экситонных комплексов и экситон-дырочной жидкости в объемных материалах, квантовый эффект Холла и вигнеровская кристаллизация в гетеропереходах, бозе-эйнштейновская конденсация экситонов в квантовых ямах, циклотронных магнитоэкситонов в холловском диэлектрике и экситонных поляритонов в микрорезонаторах.

Сборник будет полезен научным сотрудникам, аспирантам и студентам старших курсов физических специальностей университетов.

© ИФТТ РАН, 2020

© Коллектив авторов, 2020

© Тимофеев В.Б. (составление), 2020

ISBN 978-5-6040418-4-0

ВВЕДЕНИЕ

лектроны и дырки в полупроводниках, обладающие отрицательным и положительным элементарным зарядом, соответственно, можно рассматривать как заряженные квазичастицы с эффективными массами, которые определяются локальной кривизной энергетических зон. При низких плотностях такие частицы взаимодействуют друг с другом посредством кулоновского потенциала $e^2 / \varepsilon r$, а величина заряда частиц модифицируется диэлектрической проницаемостью ε . Благодаря притягивающему взаимодействию между электронами и дырками они могут образовывать разнообразные связанные электронно-дырочные (e-h) состояния, которые, согласно предположению Ламперта (Lampert, 1958), аналогичны полиэлектронам, исследованным ранее Уилером (Wheeler, 1946) в физике элементарных частиц. Можно рассмотреть шесть ожидаемых состояний таких частиц, из которых пять состояний, с числом частиц $N \ge 2$, являются многочастичными. Отдельно следует проанализировать также случай локализованных многочастичных комплексов, которые формируются как связанные состояния на примесных центрах. Ситуация N = 2, связанное состояние электрона с дыркой, соответствует водородоподобному экситону (при равных массах электрона и дырки — атому позитрония) с энергией связи (или экситонным Ридбергом) относительно состояния свободной (e-h)-пары, равной $E_{\rm x}=e^2/2\varepsilon a_{\rm x}$, где боровский радиус экситона $a_{\rm x}=\hbar^2\varepsilon/\mu e^2$. Здесь приведенная масса экситона μ определяется трансляционными массами электрона и дырки согласно выражению $\mu^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$. При больших (e–h)-плотностях из-за эффекта экранирования изменяется потенциальная энергия кулоновского взаимодействия: она приобретает теперь вид $(e^2 / \varepsilon r) \exp(-r / \lambda)$, где λ – длина экранирования. Связанные комплексы перестают быть стабильными, когда λ сравнивается с размером комплекса, т.е. с величиной a_{i} . По мере роста (e–h)-плотности n величина λ уменьшается согласно выражению $\lambda = (k_{\rm B}\varepsilon T / 8\pi e^2n)^{1/2}$, соответствующему длине экранирования в рамках при-ближения Дебая-Хюккеля (Debye–Hückel), или выражению $\lambda = (\varepsilon \hbar^2 / 8m^* e^2n)^{1/3}$ в рамках приближения Томаса-Ферми (Thomas-Fermi). Возникающая вследствие эффекта экранирования нестабильность (e–h)-связанных состояний приводит к двум различным по своей природе состояниям вещества: металлическому или диэлектрическому. Согласно критерию Мотта (Mott, 1974) переход от диэлектрического к металлическому состоянию происходит, когда длина экранирования $\lambda = 0.84a_x$. В соответствии с этим критерием характерная величина электронно-дырочной плотности перехода металл-изолятор в рамках приближения Дебая-Хюккеля составляет $n_{\rm M} = (k_{\rm B}T / E_x) / 11\pi a_x^3$, а в приближении Томаса-Ферми — $n_M = 1.5 \cdot 10^{-4} \cdot a_x^{-3}$. Самостоятельный интерес представляет собой концепция электронно-дырочной жидкости (ЭДЖ) или капель ЭДЖ, впервые введенная в физику конденсированных сред, прежде всего полупроводников, Л.В. Келдышем (Keldysh, 1968). Природа ЭДЖ и некоторые ее свойства будут также рассмотрены в двух из представляенных обзоров данного цикла.

В обзоре 1 изложены общие представления о многочастичных электронно-дырочных комплексах в объемных полупроводниках, а также представлен обширный фактический материал, связанный с их основными, экспериментально установленными параметрами.

В обзоре 2 рассматриваются устойчивые трансляционно-инвариантные 4-х и 3-частичные комплексы в полупроводниках с непрямой щелью: электрически нейтральные экситонные молекулы или биэкситоны (связанные состояния двух экситонов) и заряженные трионы (связанные состояния экситона с электроном или дыркой). В таких полупроводниках, как, в частности, Ge и Si, благодаря достаточно большим временам жизни экситонов для изучения свойств экситонных молекул наиболее информативными с экспериментальной точки зрения оказываются спектры излучательной рекомбинации. Исследуя такие спектры в функции температуры, степени орбитального вырождения (числа электронных долин) и магнитного поля, надежно определяются энергии диссоциации молекул, а также устанавливается роль эффектов отдачи при излучательном распаде молекул. В обзоре проанализировано влияние многодолинности электронного спектра, а также действие магнитного поля на стабильность экситонных молекул. Экспериментальные аспекты трансляционно-инвариантных трионов в объемных полупроводниках, в отличие от теоретических аспектов, до настоящего времени остаются, на наш взгляд, недостаточно надежно исследованными.

В обзоре 3 рассмотрены спектроскопические явления, связанные с экситонными молекулами в прямозонных полупроводниках. Благодаря гигантским силам осцилляторов дипольно-разрешенных прямых переходов в таких кристаллах для изучения экситонных молекул оказались очень эффективны методы нелинейной оптической спектроскопии. К их числу, прежде всего, относится метод 2-фотонного резонансного фотовозбуждения основного состояния экситонных молекул, а также наблюдение эффектов 4-волнового смешивания и гиперкомбинационного рассеяния света с участием основного и конечных состояний. Последний метод оказался очень эффективным для определения дисперсионных ветвей, нижней и верхней, экситонных поляритонов, являющихся конечными состояниями в процессах неупругого рассеяния света в этих кристаллах.

Многоэкситонные комплексы, связанные с мелкими примесными центрами (МЭПК) в многодолинных полупроводниках, в частности, в кристаллах германия и кремния, рассмотрены в обзоре 4. В этом обзоре проанализирована природа устойчивости таких комплексов, связанная с вырождением зон собственного энергетического спектра непрямозонных полупроводников, а также изложены основы оболочечного строения электронно-дырочного энергетического спектра МЭПК в тесной аналогии с заполнением электронных оболочек в обычных атомах. Представлены также результаты исследований влияния одноосных упругих деформаций и магнитного поля на спектры излучения многоэкситонных примесных комплексов. Проанализирована первопричина тонкой структуры спектров излучения МЭПК, обусловленная обменными электронно-дырочным и электрон-электронным взаимодействиями.

Конденсация экситонов в капли электронно-дырочной жидкости рассмотрена в обзоре 5. Обсуждается энергия основного состояния ЭДЖ, спектры спонтанного и стимулированного излучения электронно-дырочной жидкости в полярных прямозонных полупроводниках, эффекты воздействия одноосного упругого давления на свойства ЭДЖ, движение капель ЭДЖ во внешних возмущающих потенциальных полях, включая магнитное поле, а также плазменные явления в электронно-дырочной жидкости.

Термодинамические свойства электронно-дырочной жидкости изложены в обзоре 6. Здесь детально обсуждается полностью восстановленная фазовая диаграмма конденсации: «многокомпонентный экситонный газ электронно-дырочная жидкость». Со стороны газовой фазы, вдоль термодинамически равновесной границы раздела, определен парциальный состав многокомпонентной газовой фазы. Обсуждается также область фазовой диаграммы, где происходит ионизационное разрушение (коллапс) экситонов, — область перехода «экситонный газ — электронно-дырочная плазма». Наконец, рассмотрена многокомпонентная смесь электронно-дырочных жидкостей.

В обзоре 7 рассматриваются теоретические аспекты, касающиеся характеристик случайных потенциалов и формируемой ими плотности состояний (ПС) в двумерных электронных системах, а также экспериментальные методы исследования ПС, как термодинамической, так и одночастичной электронной, в поперечном магнитном поле в функции фактора заполнения. Показано, как одночастичную плотность состояний можно исследовать с помощью спектроскопического метода, основанного на анализе измеренных спектров люминесценции, а также каким образом с помощью такого метода удается установить зависимость распределения ПС от фактора заполнения. Проанализировано, каким образом на энергетическом спектре сказывается экранирование флуктуаций случайного потенциала. Существенно, что предложенный спектроскопический метод позволяет получить ценную информацию и о само́м случайном потенциале: о его амплитуде и линейных масштабах.

Экспериментальные и теоретические аспекты квантового эффекта Холла (КЭХ), целочисленного и дробного, в двумерных электронных системах изложены в обзоре 8. Подчеркивается, что беспрецедентно высокая точность измерений проквантованной величины холловского сопротивления в двумерной электронной системе определяется топологической инвариантностью. Обсуждается важность КЭХ для метрологических приложений. К этой части обзора включен дополнительный материал, связанный с недавней публикацией об обнаружении дробного квантования кондактанса в отсутствии магнитного поля в специально приготовленных гетероструктурах с квазиодномерными электронными каналами и низкой электронной плотностью (Кumar *et al.*, 2019). Обнаружение дробных кондактансов с четными знаменателями, в частности ¼, обладающих не абелевской природой, открывает новые возможности и перспективы в квантовых информационных и вычислительных технологиях.

В обзорах 9, 10, 11 и 12 анализируются сильно коррелированные явления в двумерном электронном газе, помещенном в поперечное квантующее магнитное поле: в одиночном гетеропереходе и в одиночных квантовых ямах на основе GaAs/AlGaAs гетероструктур. В основе экспериментального метода лежит исследование спектров излучательной рекомбинации двумерных электронов с фотовозбужденными дырками в δ -слое акцепторов, пространственно удаленном от электронного слоя. Исследования выполнялись в режимах целочисленного и дробного квантового эффекта Холла, а также в ультраквантовом режиме, при факторах заполнения $\nu \ll 1$ и низких температурах. Показано, что 1-й момент спектра излучательной рекомбинации электронов с дырками δ -слоя акцепторов в функции магнитного поля прямо связан со средней энергией основного состояния двумерной электронной системы. Отсюда открывается уникальная возможность для прямого измерения с помощью развертки магнитного поля циклотронной и спиновой электронных энергий, а также энергетических щелей квазичастичных возбуждений в режиме дробного квантового эффекта Холла. В обзорах представлены также результаты исследований в режиме вигнеровской кристаллизации, обсуждается результирующая фазовая диаграмма, разделяющая области существования вигнеровского электронного кристалла и несжимаемых жидкостей в режиме дробного квантования холловского сопротивления.

В обзорах 13, 14 и 15 обсуждается явление Бозе-Эйнштейновской конденсации диполярных экситонов в латеральных ловушках на основе диода Шоттки, содержащего гетероструктуру с двойной либо одиночной GaAs/ AlGaAs квантовой ямой. В условиях бозе-конденсации обнаружена и исследована крупномасштабная пространственная когерентность экситонного бозе-конденсата, а также характерное для такой конденсации поведение коррелятора интенсивности люминесценции в области порога фазового перехода.

Современные достижения в области исследований двумерных экситонных поляритонов в полупроводниковых наноструктурах с микрорезонаторами, а также их коллективные свойства в условиях бозе-конденсации рассмотрены в обзоре 16.

В заключительном обзоре 17 обсуждаются спиновые возбуждения в двумерном электронном газе, помещенном в поперечное квантующее магнитное поле, в режимах холловского ферромагнетика (фактор заполнения $\nu = 1$) и холловского изолятора (фактор заполнения $\nu = 2$). В холловском ферромагнетике центром внимания являются фотовозбужденные «голдстоуновские» экситоны и их спиновая релаксация. В двумерном холловском изоляторе с высокой подвижностью электронов при низких температурах (T < 1 K) и фотовозбуждении достаточно плотного бозе-газа долгоживущих триплетных циклотронных магнитоэкситонов обнаружено принципиально новое коллективное состояние — магнитофермионный конденсат. Конденсированная фаза взаимодействует когерентно с внешним электромагнитным полем, демонстрирует сверхизлучающие свойства при рекомбинации коррелированных электронов конденсата с тяжелыми дырками валентной зоны, а также бездиссипативно растекается в слое с двумерным электронным газом на макроскопически большие расстояния, перенося целочисленный спин. Экспериментально реализована визуализация растекания конденсата в случайном флуктуирующем потенциале гетероструктуры в функции накачки и температуры. Обнаруженные эффекты объясняются в терминах когерентного конденсата в неравновесной системе двумерных фермионов с полностью квантованным энергетическим спектром, в котором присутствует вырожденный ансамбль долгоживущих триплетных магнитоэкситонов, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна. В заключении обсуждаются возможные приложения обнаруженных явлений в спинтронике.

В заключение хочу поблагодарить своих коллег за существенный вклад в написание и последующее издание части обзоров настоящего цикла. Приношу глубокую благодарность А.В. Горбунову за большой, ответственный труд по редактированию данного издания и исправление обнаруженных ошибок и неточностей, а также О.И. Левченко за оказанную помощь в редактировании и в издании данного тематического цикла обзоров в целом.

В.Б. Тимофеев

Литература

- 1. Keldysh, L.V. Concluding remarks // Proceedings of the 9th International Conference on the Physics of Semiconductors. Leningrad : Nauka, 1968. P. 1303–1310.
- 2. Kumar, S. Zero-magnetic field fractional quantum states / S. Kumar et al. // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122, Iss. 8. P. 086803/1.–086803/5.
- 3. Lampert, M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. 1958. Vol. 1, Iss. 12. P. 450–453.
- 4. Mott, N.F. Metal-insulator transitions. London : Taylor & Francis, 1974. 278 p.
- 5. Wheeler, J.A. Polyelectrons // Annals of the New York Academy of Sciences. 1946. Vol. 48, Iss. 3. P. 219–238.

A REVIEW OF N = 1 TO ∞ PARTICLE COMPLEXES IN SEMICONDUCTORS^{*}

G.A. Thomas¹, V.B. Timofeev^{2**}

¹Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 07974 USA; ²Institute of Solid State Physics, Academy of Science USSR, 142432 Chemogolovka, USSR

1. Introduction

The electrons and holes in many semiconductors can be described as particles with effective masses determined by the local curvature of their energy bands. At low densities they interact with each other via the bare Coulomb potential $e^2/\kappa r$, where the electronic charge e is modified by the static dielectric constant of the lattice κ , and the particles are separated by a distance r. Because of this attractive interaction between the electrons and holes, they can form a variety of bound states which, as Lampert (1958) has noted, are analogous to the polyelectrons investigated by Wheeler (1946). We shall consider six states of these particles, the first five of which are of this few-body type. If we denote the number of particles in the complex by N, this series is composed of N = 1 to 4. In addition, there is the special case of immobile complexes formed around an impurity. The case of N = 2, for example, is the exciton (Wannier 1937) with binding energy (for spherical bands), with respect to a free e–h (electron–hole) pair, of $E_x = e^2/2\kappa a_x$ with the Bohr radius $a_{\rm r} = \hbar^2 \kappa / \mu e^2$. Here, the reduced mass of the exciton, μ , is determined by the electron and hole translational effective masses, according to $\mu = 1/m_{_{\rm h}} + 1/m_{_{\rm h}}$. At higher densities screening changes the form of the interaction between an electron and hole to the screened Coulomb potential (Ziman 1964), $(e^2/\kappa) \exp(-r/\lambda)$, where λ is the screening length. The bound complexes will become unstable at a particle density (Mott 1974) where λ is of the order of the size of the complex, e.g., a_x . Since λ decreases with e-h pair density *n* according to $\lambda = (\kappa k_{\scriptscriptstyle B} T / 8\pi e^2 n)^{1/2}$ for Debye–Hückel screening [or $\lambda = (\kappa \hbar^2 / 8m^* e^2 n^{1/3})^{1/2}$ for the Thomas-Fermi case], the instability of the bound states forms a natural division between the two regimes of electron-hole interactions. Thus, the Mott criterion (Mott 1974), $\lambda = 0.84a_{,,}$ defines (Rice 1977, Hensel et al. 1977) the characteristic density for the transformation from metal to non-metal $n_M = (k_B T/E_x)/(11\pi a_x^3)$ (Debye–Hückel) or $n_M = 1.5 \times 10^{-4} a_x^{-3}$ (Thomas–Fermi). The final topic on which

^{*} Optical Properties of Solids / ed. by M. Balkanski // Handbook on Semiconductors / ser. ed. by T.S. Moss. – Amsterdam : North-Holland, 1980. – Vol. 2, Ch. 2. – P. 45–63.

^{**} Work done in part at the Aspen Center for Physics.

we shall present some data will be the electron–hole liquid (Rice 1977, Hensel et al. 1977) ($N = \infty$) which can form as a result of this many-body Coulomb interaction, provided the conditions are favorable, i.e., a sufficiently low temperature and high carrier density.

2. Free electrons and holes (N = 1)

Table 1 lists the band gaps E_g of some selected semiconductors both near room temperature (~300 K) and at liquid helium temperature (~4 K). These materials fall into two classes: direct gap (with the electron and hole band extrema at the same point in the Brillouin zone) or indirect gap (with a finite crystal momentum required to connect the electron and hole extrema). The values of E_g increase by roughly 0.1 eV as the semiconductors are cooled from 300 K to temperatures near absolute zero. The band gaps are measured by various means, the most accurate of which are optical. The rather precise low-*T* value of E_g for Ge, for example, results from a combination of the exciton recombination energy (Rice 1977, Hensel et al. 1977) (measured by near infrared luminescence) minus the emitted phonon energy (Nelin and Nilsson 1972) (measured by inelastic neutron scattering) minus the exciton binding energy (Rice 1977, Hensel et al. 1977) (measured by far infrared photoconductivity). The exciton binding energy can also be estimated from the formulae given above using the measured dielectric constant κ and effective masses.

Table 1

Semicon-	Energy gap E _g (eV)		Dielectric	Valley degeneracy	Masses			
ductor*	300 K	4K	ĸ	ν	m _{de}	$m_{_{hh}}$	m _{lh}	
Ge	0.66ª	0.7474ª	15.36ª	4ª	0.22ª	0.35ª	0.042ª	
Si	1.11ª	1.1696ª	11.4ª	6ª	0.32ª	0.52ª	0.15ª	
AgBr	2.7 ^b	2.698 ^c	10.6 ^d	4 ^e	0.29 ^b	1.71 ^e	0.79 ^e	
GaP	2.25 ^f	2.35 ^g	11.0 ^f	3 ^b	0.51 ^b	0.48 ^b	0.16 ^b	
SiC (cubic)		2.4 ^h		3 ^h				
SiC (15R)		2.99 ^h		6 ^h				
AlAs			10.9 ⁱ	3 ^b	2 ^b	0.65 ^j	0.15 ^j	
TIBr			35.l ^b	3 ^k	0.52 ^k	0.74 ^h	0.55 ^k	
PbS	0.34 ¹		190 ^m	4.4 ^m	0.11 ^m	0.11 ^m	0.08 ^m	
GaAs	1.44 ⁿ	1.521 ⁿ	12.35°	1	0.067 ^b	0.52 ^b	0.085 ^b	
InP	1.35 ^p	1.421 ^p	12.6 ^q	1	0.08 ^b	0.58 ^b	0.12 ^b	
CdS	2.42 ^r	2.577 ^r	8.6 ^s	1	0.21 ^r	5.0 ^r	0.7 ^r	

Free carrier properties

Semicon-	Energy gap E _g (eV)		Dielectric constant	electric Valley		Masses			
ductor*	300 K	4K	κ	ν	m _{de}	m _{hh}	m _{lh}		
CdSe	1.74 ^t	1.841 ^t	9.4 ^s	1	0.13 ^t	2.5 ^t	0.45 ^t		
CdTe	1.45 ¹	1.59 ^e	10.3°	1	0.096 ^b	1.09 ^b	0.10 ^b		
ZnS	3.7 ¹	3.8 ^u	8.6 ^b	1	0.28 ^v	1.4 ^v	0.49 ^v		
ZnSe	2.67 ^v	2.818 ^v	8.8°	1	0.18 ^b	1.27 ^b	0.15 ^b		
ZnO			8.6 ^b	1	0.28 ^b	2.27 ^b	0.79 ^b		
CuCl	3.1 ¹	3.2 ^w	3.7 ^w	1	0.42 ^w	20 ^w			
CuBr			5.2 ^w	1	0.23 ^w	23 ^w			
ZnTe	2.37 ^v	2.391 ^v	9.9 ^v	1	0.16 ^s	0.68 ^x	0.15 ^x		
GaSb	0.78 ¹		15.7 ^b	1	0.047 ^b	0.32 ^b	0.045 ^b		

m 1	1	1	
Tal	ple	1	cont.

* Direct gap: lower part of the table; indirect gap: upper part of the table.

aHensel et al. (1977).¿LawaebBeni and Rice (1978).kHodbycPelant et al. (1976).'Kittel'dAscarelli (1969).''RaviceTamura and Masumi (1973).''SturgeVink (1973).'Strzal''Humphreys (1978).''Durner''Choyke (1969).''Mitra''Ilegems and Pearson (1970).''Hopfie

ⁱLawaete (1971). ^kHodby et al. (1972). ⁱKittel (1966). ^mRavich and Efimova (1970). ⁿSturge (1967). ^oStrzalkowski (1976). ^pTurner et al. (1964). ^qMitra (1964). ⁱHopfield and Thomas (1961). 'Hopfield (1960). [§]Rode (1975). [†]Wheeler and Dimmock (1962) Dimmock and Wheeler (1961). [†]Lempicki et al. (1961). ^{*}Segall and Marple (1965). ^wNikitine et al. (1970). ^{*}Stradling (1968).

Some effective masses of electrons and holes, measured using cyclotron resonance, are also given in table 1. The values listed are convenient simplifications of the general mass tensor appropriate for calculating the density of states. In Ge for example, the value is obtained from $m_{de} = \nu^{2/3} (m_t^2 m_l)^{1/3} = (4)^{2/3} [(0.082)^2 1.58]^{1/3} m = 0.22m$, where, for each of the $\nu = 4$ electron valleys, m_t and m_l are the transverse and longitudinal masses on the ellipsoidal electron energy surfaces and m is the free electron mass (9.11 × 10⁻²⁸g). Similarly, for the holes, a useful approximation is to consider two averaged spherical bands with light and heavy hole masses m_{lh} and m_{hh} , for which the density of states mass is given by $m_{dh} = (m_{hh}^{3/2} + m_{h}^{3/2})^{2/3}$, for Ge $[(0.35)^{3/2} + (0.042)^{3/2}]^{2/3}m = 0.357$ m.

3. Excitons (N = 2)

As discussed above, one ingredient in the accurate determinations of E_{G} is the measurement of the absolute value of the photon energy produced by the recombination of excitons. This state (Knox 1963) dominates the luminescence and absorption spectrum from high purity semiconductors at low temperature and carrier densities. The exciton ground state luminescence from a direct gap semiconductor is essentially a delta function (Peierls 1932). In contrast (Elliott 1957) a characteristic feature of the spectra of the indirect gap materials is that a set of exciton recombination replicas appears, (due to the emission of different phonons) with the linewidths related to the exciton kinetic energies. Table 2A lists the energy, at T = 4.2 K, of the phonons connecting the high symmetry points where the electrons and holes reside at the band extrema. All four phonon replicas (Thomas and Capizzi 1976, 1979) have been observed for Ge, but only three (Haynes et al. 1959) for Si. These one-phonon emission processes in luminescence are strongly affected by the symmetry (Elliott 1957, Thomas and Capizzi 1979, Lax 1974) of the electrons, the holes and the phonons so that an event may be allowed (A) or forbidden (F) or partly of each type. Processes which are forbidden at precisely the high symmetry point can occur at points in the Brillouin zone nearby, but the resulting intensities are weak and the line shapes are modified. The same considerations apply to the recombination of all complexes.

Recombination can also occur with the emission of two phonons, but in this case, the number of processes with momenta near high symmetry points is comparable to all those at other accessible points of the zone so that the joint two-phonon density of states dominates the spectrum rather than selection rules (Thomas et al. 1976b). The positions of prominent maxima in the two-phonon density of states are given in table 2B.

Table 2A

Semiconductor	Mode (symmetry)	Energy at electronic band extrema (meV)	Selection rule ^d
Ge ^a	TA(L ₃)	7.9 ± 0.1	F
	$LA(L_2)$	27.5 ± 0.1	А
	$LO(L_1)$	30.3 ± 0.1	F
	$TO(L_3)$	35.9 ± 0.1	A+F
Si ^b	$TA(\Delta_5)$	18.4 ± 0.3	А
	$LA(\Delta_1)$	43.8 ± 0.8	А
	$LO(\Delta_2)$	56.2 ± 1.1	F
	$TO(\Delta_5)$	$57.7 + 1.4^{*}$	А
AgBr ^c	$TA(L_3)$	6.4 ± 0.1	F
	$LA(L_1)$	11.8 ± 0.4	А
	TO(L ₃)	8.0 ± 0.2	А
SiC(15R) ^e	TA	45	
	LA	78	
	ТО	95	
	LO	105	

Phonons in indirect semiconductors

* (More accurately the LO–TO energy difference is 1.85 ± 0.05)^f.

^a Nelin and Nilsson (1972). ^dLax and Hopfield (2

^bDolling (1963).

^cVon der Osten and Dorner (1975).

^dLax and Hopfield (1961). ^ePatrick et al. (1963). ^fHammond and Silver (1978).

Table 2B

Semiconductor	Principal modes	Peak energy (meV)
Geª	TA + TA	21
	TA + LA	35
	TA + TO	45
	LA + TO	57
	LO + TO	62
	TO + TO	69

Two-phonon density of states peaks

^aThomas et al. (1976b).

Excitons

Semiconductor	Ionizatio E _x (n	on energy neV)	Ground sta $\Delta_{\rm c}$ (r	Bohr radius $a_x(Å)$	
	Е	Т	Е	Т	Т
Ge	4.15ª	4.17 ^b	1.01 ^c	1.01 ^d	115°
Si	14.7 ^e	14.66 ^b	0.30 ^{f,g}	0.32 ^h	43 ^h
AgBr	16.3 ⁱ	49.5 ^j	3.8 ⁱ		42 ⁱ
GaP	20.5 ^k	19 ¹	1.9 ^k	0.9 ¹	
AlAs	18 ^m				
TlBr	23 ⁿ				
GaAs	4.2°				
InP	4.0 ^p				
CdS	27ª	35.2 ^j			
CdSe	15 ^r	18.1 ^j			54 ^r
CdTe		10 ^p			
ZnS	36 ^s	44.8 ^j			
ZnSe		19 ^p			
ZnO	59 ^t	42 ^u			
ZnTe	11 ^m	10 ^p			
CuCl	189 ^u	232 ^j			
CuBr		104 ^u			
GaSb	2.8 ^p				

^aSidorov and Pokrovskii (1972).
^bLipari and Altarelli (1977).
^cFrova et al. (1975).
^dAltarelli and Lipari (1976).
^eShaklee and Nahory (1970).
^fHammond and Silver (1978).
^gMerle et al. (1978).
^hLipari and Altarelli (1978).

Ascarelli (1969). Kane (1979). Kumphreys et al. (1978). Altarelli et al. (1978). "Nahory and Fan (1966). "Nakahara et al. (1974). "Sell et al. (1973). PSegall and Marple (1965). Rode (1975).
Dimmock and Wheeler (1961).
Wheeler and Dimmock (1962).
Miklosz and Wheeler (1967).
Lowndes (1972).
'Hümmer (1973).
'Nikitine and Haken (1973).

Table 3

The energy necessary to ionize an exciton is not measured in these luminescence spectra since no feature is present to define the gap edge. Far infrared radiation can be used, however, to break up an exciton and produce a conductivity signal (Rice 1977, Hensel et al. 1977). The most accurate values of the exciton binding energy listed in table 3 are obtained in this way. Both experimental values (followed by an E) and theoretical values (T), are listed for comparison.

In some important cases the exciton ground state is split (e.g., Frova et al. 1975) by an energy Δ_c due to the anisotropy of the crystal field. This splitting can be measured accurately using either the absorption spectrum (often (Frova et al. 1975, Merle et al. 1978) with differential spectroscopic techniques), or the recombination luminescence spectrum (Hammond and Silver 1978). Some values are listed in table 3.

The characteristic size of an exciton is given by the Bohr radius a_x which is calculated either using the carrier wave functions that give best agreement with the experimental values of E_x and Δ_c , or as noted above. The exciton effective mass M_x can be complicated as in the case of Ge where there is a reversal from heavy to light with increasing exciton momentum (Frova et al. 1975). The value of M_x is also different in the split exciton ground states. Substantial success has been obtained in theoretical descriptions (Frova et al. 1975, Lipari and Altarelli 1977) of the excitonic state, particularly for the cases of Ge and Si, where E_x , Δ_c , and the dispersion curves have been calculated with results in good agreement with experiment as can be seen in table 3.

4. Trions (N=3)

Three particle complexes (Lampert 1958) composed of two electrons and a hole (a negative trion) or two holes and an electron (a positive trion), are the least common of the small particle complexes. They were first observed in cyclotron resonance (Kawabata et al. 1977) and luminescence (Thomas and Rice 1977) experiments. The cyclotron resonance observation was made in uniaxially stressed Si at a low temperature ($kT/E_x \approx 0.01$), under pulsed conditions, out of thermo-dynamic equilibrium. The trion masses appear to be about 20% larger than the sum of their constituent particle masses. The luminescence measurements were made in uniformly excited Ge at relatively high temperatures ($kT/E_x \approx 0.14$) and at densities near the Mott density where screening reduces the exciton ionization energy. Under these high density conditions large numbers of trions are present (Insepov et al. 1976) in thermal equilibrium.

The trion binding energy (Hylleraas 1947, Stébé and Comte 1977) with respect to a free carrier and exciton E_{T^+} or E_{T^-} , is generally less than 10% of E_x . The trion with the larger mass (T^+ or T^-) has the larger binding energy, as listed in table 4. The trion characteristic size is estimated to be about 50% larger (Thomas and

Rice 1977) than the exciton. In the trion recombination process (Thomas and Rice 1977) the odd carrier left behind can take up some recoil energy so that the luminescence line shape has a much larger low energy tail than that of the exciton in the indirect gap case. Trions have also been reported (Stébé et al. 1978) in CuCl; they have been discussed for other direct gap semiconductors as well (Stébé and Comte 1977).

Trion binding energy Biexciton binding energy **Biexciton** radius E_{T^+}, E_{T^-} (meV) E_{R} (meV) $a_{\rm v}(\rm Å)$ Semiconductor Е Т Е Т Т 0.2ª Ge 0.2^{b} 0.1^c 140^c Si(6,2) 1.2^d 0.44^e 100^d Si(2,1) $0.62(0.71)^{f}$ 0.85g Si(well) 1.46^{h} 6.7ⁱ AgBr 1^c 20ⁱ CdS 5.4^j 2^{c} CdSe 0.3^{k} 2.7^{1} ZnS 2.8° 3.8^k ZnO CuCl 19.2^m 38.0^k 22.8(5.6)ⁿ 43.4° 29.3° CuBr 9(2)ⁿ 26.0^k

Free exciton complexes

^aThomas and Rice (1977). ^bElkomoss and Amer (1975). Insepov and Norman (1975). ^cBrinkman et al. (1973).

^dThewalt (1978).

^eForney and Baldereschi (1979).

fStébé and Munschy (1975). gKulakovskii et al. (1978). hGourley and Wolfe (1978). Pelant et al. (1976). Shionoya et al. (1973). ^kNikitine and Haken (1973). ^lHuang (1973). ^mStébé et al. (1978). ⁿStébé and Comte (1977). ^oGrun et al. (1970).

Table 4

5. Biexcitons (excitonic molecules) (N=4)

The possibility of binding four light particles (two electrons and two positrons) into a neutral molecule was first demonstrated theoretically by Hylleraas and Ore (1947). It was found that the complex of two electrons and two positrons in vacuum is stable relative to dissociation into two positronium atoms. The possibility that the analog of the positronium molecules may exist in a semiconductor involving four effective mass particles (two electrons and two holes) was raised by Lampert (1958) and Moskalenko (1958). Subsequently there have been many observations (Hanamura and Haug 1977) of radiative decay of biexcitons in semiconductors. Since it is not possible to solve the four-body problem exactly a number of the theoretical descriptions have used the variational technique for calculation of the ground state energy (Sharma 1968a, b, Wehner 1969, Adamows-

ki et al. 1972, Akimoto and Hanamura 1972a, b, Brinkman et al. 1973). In the theoretical calculations a variational wave function is used which is a product of the Hylleraas–Ore wave function and an overlap function for the heavier particles (usually the holes). Since in semiconductors the electron and hole masses are not identical and in many cases the masses are anisotropic the theories have considered the biexciton binding energy E_{B} as a function (Akimoto and Hanamura 1972a, b, Brinkman et al. 1973) of the mass ratio $\sigma \equiv m_e/m_b$ and of anisotropy parameters $\gamma \equiv m_{_{II}}/m_{_{II}}$. It has been shown (Inui 1941) that if the biexciton is bound at $\sigma = 1$ (positronium molecule case) it is bound for all values of σ in the region $0 \le \sigma \le 1$. In the limit $\sigma \rightarrow 0$ (hydrogen molecule case), the variational binding energy per electron is close to the exact value of 0.348 Ry (Inui 1941, Nordsieck 1940). The binding energy decreases monotonically with increasing σ and, in the limit $\sigma \rightarrow 1$ the calculated values are close to 0.02 of the positronium Rydberg obtained by Hylleraas and Ore (1947) and Ore (1947). The value of E_{R} is not as sensitive to the anisotropy parameter γ as to σ and increases with decreasing γ (Hanamura 1973). Theoretical values of E_{R} for Ge and Si and some compound semiconductors are listed in table 4. The most likely processes for biexciton radiative emission are those in which the complex decays into a photon and an exciton is the 1s singlet, 2s or 2p state (in indirect semiconductors such processes involve simultaneous creation of a phonon).

There have been a number of claims involving emission lines attributed to decay of biexcitons. In the case of direct gap semiconductors (Gogolin and Rashba 1973), the strongest evidence (Nikitine and Haken 1973) is in the case of CuCl and CuBr ionic crystals which have large values of E_B . In other direct gap semiconductors, such as CdS, such evidence does not appear to be as strong (Dite et al. 1973, Lysenko et al. 1976). In these materials the observed lines in the emission spectra under high excitation, claimed to be biexciton (Shionoya et al. 1973), can be simply described in terms of stimulated emission from bound exciton complexes (Dite et al. 1973, Lysenko et al. 1976) for which the transition probability is very large in accordance with giant oscillator strengths.

It is easy to avoid confusion between biexcitons and bound exciton complexes in the case of the indirect band semiconductors Ge and Si because of their high purity. But, in these materials, E_B is very small with respect to the binding energy of electron–hole liquid (ehl) so that observation of the biexcitons is difficult here also.

However, clear observations of small numbers of biexcitons have been made in AgBr (Hulin et al. 1977b) and in Si (Thewalt 1978) at low temperatures and low gas densities. A possible, small biexciton contribution to the luminescence in Ge at relatively high temperatures and densities has also been discussed (Thomas and Rice 1977). Larger partial densities of biexcitons can be produced (Kulakovskii and Timofeev 1977) under conditions of applied stress, Si(2, 1), where higher gas densities can be attained at low temperatures than in the unstressed case, Si(6,2). Here, the gas density can be higher because the stress suppresses the condensa-

tion of the electron-hole liquid. For the same reason molecules are prevalent (Gourley and Wolfe 1978) in the gas confined in a strain well. The luminescence line shape (Kulakovskii and Timofeev 1977, Cho 1973) of the biexciton is similar to that of the trion (Thomas and Rice 1977) because of the important recoilemission processes in both cases.

Since the wave function of the biexciton has a size of the order of a free exciton radius, the corresponding matrix element for biexciton radiative decay (Cho 1973) is less than a_x^{-1} . Therefore, the width of the biexciton line in the case of indirect semiconductors should be of the order of $E_x \mu/M_x$ in accordance with experimental observation (Thewalt 1978, Kulakovskii and Timofeev 1977).

6. Bound exciton complexes

Table 5 gives some binding energies of excitons (*X*) bound to impurity centers including, for example, neutral donors (D^0), neutral acceptors (A^0) and ionized donors (D^+), in accordance with notation introduced by Lampert (1958). At the neutral impurities, the bound complexes will behave as paramagnetic centers because the spins of the like particles (holes for the case of D^0X) will be paired, while the remaining particle will contribute in a less restricted fashion to the optical and magnetic properties.

The emission and absorption spectra for the bound excitons will consist of very narrow lines because their wave function is restricted to a narrow region of momentum of the order of the inverse size of the complex. Also, since the complex is immobile, there is not a spread of energies related to the kinetic energy as in the case of free excitons in indirect gap semiconductors. The binding energies in table 5 are measured from the optical spectra relative to the energy of free excitons. Arguments based on the band symmetries, along with electronspin resonance measurements of the *g*-values of the complexes, have been used to identify the nature of the centers. Examples of such analysis are the work of Haynes (1960) on Si and the work of Thomas and Hopfield (1962), Nassau et al. (1970), Dean et al. (1967b) and Reynolds et al. (1969) on CdS, GaP, CdSe and ZnO.

Rashba and Gurgenishvili (1962) have shown that in a direct band gap semiconductor, such as CdS, the oscillator strength for radiative decay of a weakly bound exciton can be calculated using the binding energy of the bound exciton (*BE*), the exciton mass, and the oscillator strength per molecule of the free excitons. They found a simple equation for the *BE* oscillator strength $f_{BE} \simeq (a_{BE}^3/\Omega) f_{FE}$ (where Ω is the volume of the *BE* unit cell and a_{BE} is the radius of the *BE*), and pointed out that excitons, weakly bound to impurities, have giant oscillator strengths that are many orders of magnitude larger than the oscillator strength of the free exciton. Typically, *BE* radiative decay in direct gap semiconductors is the main recombination channel at low temperatures.

Table 5

	Impurity		Complex			Total			
Semicon- ductor	name	ionization energyª (meV)	name	binding energy (meV)	radi (ns	ative sec)	nonra (ns	diative sec)	oscil- lator strength (10 ⁻⁵)
		(IIIe V)		Е	Е	Т	E	Т	
Ge	Р	12							
	As	12.7							
	Sb	10							
	В	10.4							
	Al	10.2							
	Ga	10.8							
	In	11.2							
Si	Li		D^0X	3.09 ^b					
	Р	45.5	D^0X	4.4 ^b					
	As	50							
	Sb	39							
	В	46	A^0X	3.65 ^b			1°	2.5 ^d	2.9 ^e
	Al	67	A^0X	6 ^b			104 ^c	200 ^d	3.7 ^e
	Ga	71	A^0X	7 ^b			58°	100 ^e	4.1 ^e
	In	157	A^0X	14 ^b			<5°	2 ^e	11 ^e
CdS	F	35.1	$D^0X\!/D^+X$	8.25/8.09 ^f					
	In	33.8	D^0X/D^+X	7.89/7.08 ^f					
	Ga	33.1	D^0X/D^+X	7.68/6.46 ^f					
	Cl	32.7	D^0X/D^+X	7.58/6.20 ^f	0.5 ^g	0.56 ^h			
	Br	32.5	D^0X/D^+X	7.51/6.06 ^f					
	Ι	32.1	$D^{0}X\!/D^{+}X$	7.39/5.75 ^f					

Bound exciton complexes

^aFisher and Ramdas (1969). ^bKosai and Gershenson (1974). ^cLyon et al. (1977). ^dOsbourn and Smith (1977). ^eDean et al. (1967a). ^fNassau et al. (1970). ^gHenry and Nassau (1970). ^hSkettrup et al. (1971).

The complex consisting of an electron and a hole bound to an ionized donor (D^+X) is the most simple *BE* complex. Hopfield (1964) has estimated the binding energies of such *BE* by extrapolation of molecular binding energies. More accurate calculations for the three-particle complexes were carried out by means of variational methods by Sharma and Rodriguez (1967), Suffczynski and Gorz-kowski (1967) and Skettrup et al. (1971). In the latter work, the authors computed the binding energy of three-particle complexes for the important interval of e–h mass ratios m_e/m_h by adding a long-range tail to the variational function and

found that the oscillator strength was about 10⁴ times greater than that of the free exciton.

In the case of indirect band semiconductors, the oscillator strength for radiative transitions of *BE* is very small and radiative time decay is longer than the nonradiative Auger lifetime. Therefore, the radiative channel for *BE* radiative decay is relatively ineffective in such semiconductors. The first calculations of the Auger transition rate for acceptors bound to excitons in Si were carried out recently (Lyon et al. 1977) (see table 5). It is easy to see that Auger transition rate is more rapid for the deeply bound centers.

Under intense optical excitation of doped Si and Ge additional sharp lines appear in the spectrum beyond the simple bound exciton lines, as first observed for Si doped with B by Kaminski et al. (1971). As many as, perhaps, eleven lines have been observed in Si doped with Li by Kosai and Gershenzon (1974). The data appear to indicate that at least two excitons are bound to an impurity in this high excitation case. However, in spite of considerable study of the behavior of the new lines in magnetic field (Sauer 1973), under uniaxial stress (Sauer 1974), and pulsed excitation (Kosai and Gershenzon 1974), the nature of these new complexes remains under investigation at the present.

7. The electron-hole liquid ($N = \infty$) (Keldysh 1968)

Several excellent reviews have been written of the electron-hole liquid state (Rice 1977, Hensel et al. 1977, Pokrovskii 1972, Benoit a la Guillaume and Voos 1975, Bagaev 1975 and Jeffries 1975). We present in table 6 a summary of the quantitative parameters, both experimental (*E*) and theoretical (*T*), that describe the experimental results. The most accurate values of the e-h pair density in the limit of zero temperature n_0 , the binding energy of the liquid with respect to excitons ϕ , and the Fermi energies of electrons and holes E_{Fe} and E_{Fh} have been obtained from measurements of the near infrared recombination luminescence and are listed in table 6A. The e-h liquid ground state energy $-E_G$ is defined by $-E_G = \phi + E_s$.

The liquid parameters are temperature dependent with a simple form in the low temperature limit such that the sum of the Fermi energies varies as $E_{_{\rm F}}(T) = E_{_{\rm F}}(0)(1 - \delta_{_{\rm E}}T^2)$, the density varies as $n(T) = n_0(1 - \delta_n T^2)$, and the chemical potential varies as $\mu'(T) = \mu'(0) - \delta_{_{\mu}}T^2$. The isothermal compressibility of the e–h liquid χ can be calculated from δ_n and n_0 . As the temperature is raised further, the liquid is found to coexist with the surrounding gas up to a critical temperature T_c at which both phases take on the same density n_c .

In the presence of uniaxial compressive stress, the band structure of Ge and Si becomes simplified so that for Ge the four electron valleys and two hole valleys occupied at zero strain Ge(4, 2), become one of each under large stress along

the (111) crystallographic axis, Ge(1, 1). In silicon, a (100) stress transforms the unstressed crystal Si(6, 2) similarly into Si(2, 1). As indicated in table 6A, the reduction in density of states caused by such strains reduces the values of all the ground state parameters.

Table 6A

	De	ensity		Fermi	energy		Binding energy		Ground state	
Semicon- ductor	n ₀ (10	$^{17} \mathrm{cm}^{-3}$)	E _{Fe} (1	neV)	$E_{_{Fh}}$ (1	neV)	ϕ (n	neV)	$-E_{g}$ (ergy meV)
	Е	Т	Е	Т	Е	Т	Е	Т	Е	Т
Ge(4, 2)	2.38ª	2.2 ^b	2.53ª	2.40 ^b	3.90ª	3.70 ^b	1.8ª	1.75 ^b	6.0ª	5.9 ^b
Ge(1, 1)	0.1 ^c	0.11 ^d	0.8 ^c	0.8 ^d	1.9 ^c	2.1 ^d	0.65 ^e	0.45 ^d	2.95 ^e	3.08 ^d
Ge(4, 1)	0.8 ^f									
Si(6, 2)	33.3 ^g	32.0 ^b	8 ^g	7.5 ^b	16 ^g	13.7 ^b	8.2 ^g	7.3 ^b	22.9 ^g	22 ^b
Si(6, 1)	9.8 ^h		3.4 ^h		13.6 ^h		5.5 ^h		18.2 ^h	
Si(4,1)	9 ^h		4.4 ^h		12.3 ^h		3.1 ^h		15.8 ^h	
Si(2, 1)	4.5 ^h	4.47 ^d	4.3 ^h	4.18 ^d	9.38 ^h	9.06 ^d	2 ^h	1.9 ^d	14.7 ^h	14.7 ^d
AgBr	80 ⁱ	100 ^j		77.9 ^j		12.3 ^j	55 ⁱ	30 ^j		121 ^j
GaP	60 ^k	70 ^j	12.7 ^k	13.5 ⁱ	24.3 ^k	25.8 ^j	14 ^k	11.9 ^j	30 ^k	48.8 ^j
SiC (cubic)	90 ¹		22 ¹		22 ¹		171			
SiC (15R)	200 ^m		24 ^m		24 ^m		20 ^m			
AlAs		125 ^j		19.3 ^j		28.0 ^j		14.5 ^j		59 ^j
TlBr		140 ^j		61.9 ^j		21.0 ^j		-2.2 ^j		109.8 ^j
PbS		24×10^{-5j}		0.012 ^j		0.012 ^j				0.025
PbTe		$3 imes 10^{-6j}$		0.001 ^j		0.001 ^j				0.002 ^j
GaAs	0.07 ⁿ	0.37 ^j		6.1 ^j		0.8 ^j	4º	0.3 ^j	9 ⁿ	10 ^j
CdS	10 ^p	39 ^j	26 ^p	50.7 ^j	4 ^p	7.7 ^j	12 ^p	1 ^j	40 ^p	101 ^j
CdSe		5.4 ^j		21 ^j		3.4 ^j	0 ^q	-4 ^j		48 ^j
CdTe		2.4 ^j		16 ^j		2 ^j		0 ^j		33 ^j
ZnS		49 ^j		43 ^j		17 ^j		-5 ^j		104 ^j
ZnSe		32 ^j		46 ^j		8 ^j		5 ^j		59 ⁱ
ZnO		200 ^j		116 ^j		20 ^j				224 ^j
ZnTe		6.6 ^j		17 ^j		4 ^j		3 ^j		35 ^j

Electron-hole liquid: ground state

The measurements of the ground state parameters in materials other than Ge and Si have not been refined to as great a degree by repeated experiments but appear to be reasonably reliable. Some serious questions remain unanswered as yet regarding the validity of the description of the conditions in the direct gap materials using equilibrium thermodynamics in view of the very short carrier lifetimes.

Table 6B

Semi-	δ_{E} (m	eV) ⁻²	δ_n (me	eV)−2	δ_{μ} (n	neV) ⁻²	χ (10 ⁻ ci	⁻³⁵ meV m ⁶)	<i>n_c</i> (10 ¹	⁷ cm ⁻³)	T _c	(K)
tor	E	Т	Е	Т	Е	Т	Е	Т	Е	Т	Е	Т
Ge(4,2)	0.71ª	0.92 ^b	0.94ª	1.2 ^b	2.2ª	1.7 ^b	2.0ª	1.9 ^b	0.6 ^u	0.5 ^b	6.7 ^u	8.18 ^b
Ge(1, 1)			6.7 ^e	6.7 ^b		1.4 ^b		337 ^b	0.077 ^e	0.017 ^b	3.5 ^e	3.72 ^b
Si(6, 2)	0.05 ^g	0.078 ^b	0.06 ^g	0.10 ^b	0.79 ^g	0.024 ^b	0.05 ^g	0.032 ^b	12 ^r	8 ^v	28 ^r	28 ^v
Si(2,1)		0.185 ^b		0.25 ^b		0.065 ^b		1.17 ^b		0.78 ^b		24.4 ^b
GaP											40 ^k	
CdS	0.009 ^s		0.014 ^s						8s		55s	
GaAs		6.1 ^b		8.2 ^b		2.0 ^b		242 ^b	0.03 ^t	0.064 ^b	2.1 ^t	2.1 ^b
SiC(15R)											>60 ^m	

Electron-hole liquid: finite temperature

*Some values corrected by Kelso and Vashishta (1979), private communication.

aThomas et al. (1973).
Thomas et al. (1976a).
bVashishta et al. (1974b).
cThomas and Pokrovskii (1978).
dVashishta et al. (1974a).
eFeldman et al. (1977).
fAlekseev et al. (1973).
gHammond et al. (1976).
hKulakovsky (1978).

ⁱHulin et al. (1977b). ^JBeni and Rice (1978). ^kShah et al. (1977a). Hulin et al. (1977a). ^IBimberg (1978). ^mSkolnik et al. (1978). ⁿShah et al. (1977b). ^oHildebrand and Göbel (1976). PLysenko et al. (1974, 1975). Müller et al. (1977).
PLeheny and Shah (1976).
'Dite (1977).
*Leheny and Shah (1977).
*Stopachinskii (1977).
*Thomas et al. (1978).
*Combescot (1974).

In table 7 we list some miscellaneous properties related to the e-h liquid that appear to be typical values. Detailed analysis of the reliability of these values is reviewed elsewhere (Rice 1977, Hensel et al. 1977). The enhancement factor g_{eh} measures the probability of finding the electron at the position of the hole within the e-h liquid. The liquid is found to form droplets with surface energy *S*, radius *R* and charge *Q* all of which vary with stress. The liquid is found, in pulsed excitation conditions, to decay with a lifetime τ_0 and the excitons with a lifetime τ_x , the latter being clearly extrinsic. The radiative part of the total lifetimes can only be estimated roughly. The droplet growth time has been estimated as shown in table 7 as has the exciton diffusion length and the diffusion coefficient of both droplets and excitons.

Semicon-	Enhancen <i>8</i>	nent factor	Surface (10 ⁻⁴ e	energy S rg/cm²)	ChargeQ (e)		
ductor	E	Т	E	Т	Е	Т	
Ge(4,2)	3.2 ^d	2.3 ^b	2.6 ^c	3.5 ^d	-100 ^e	-(20-500) ^f	
Ge(well)							
Si(6,2)	10 ¹	3.5 ^b					
	Lifetime		Growth time	Diffusion	coefficient Droplet		
	liquid t_0 (μ s)	exciton t_x (μ s)	liquid (µs)	exciton (cm²/s)	liquid (cm²/s)	radius R (µm)	
	E	Е	E	Е	Е	Е	
Ge(4,2)	40 ^g	5 ^g	<0.5 ^h	1500 ^g	<10 ⁻⁹	3-10 ^j	
Ge(well)	500 ^k	300°	1 ⁿ			30-400 ^k	
Si(6,2)	0.15 ¹	21	< 0.81			<0.7 ^m	
Si(well)	2 ^p						

Electron-hole liquid (miscellaneous).

Table 7

^aWestervelt et al. (1974a, b).
^bVashishta et al. (1974b).
^cWestervelt (1976).
^dVashishta et al. (1976).
^ePokrovskii and Svistunova (1974).
^fRice (1974).
^gPokrovskii (1972).
^hBagaev (1975).

Westervelt (1979). Bagaev (1976). Wolfe et al. (1978). Vuthbert (1970a, b). "Capizzi (1975). "Furneau et al. (1976). %Kelso (1979), private comm. PGourley and Wolfe (1978).

Acknowledgements

This work has been carried out while the authors were participants in the Joint Research Group in Condensed Matter Physics of the Joint US–USSR Commission on Scientific and Technological Cooperation. The authors wish to thank members of that group for helpful and stimulating discussions and the Aspen Center for Physics for the hospitality which it has extended to members of the group. This research has been supported in part by a grant from the National Science Foundation in support of the Joint Research Group.

References

Adamowski, J. Binding energy of the biexcitons in isotropic semiconductors / J. Adamowski, S. Bednarek, M. Suffczynski // Philosophical Magazine. – 1972. – Vol. 26. – P. 143–151.

- 2. Akimoto, O. Binding energy of the excitonic molecule / O. Akimoto, E. Hanamura // Solid State Communications. 1972a. Vol. 10, Iss. 3. P. 253–255.
- 3. Akimoto, O. Excitonic molecule. I. Calculation of the binding energy / O. Akimoto, E. Hanamura // Journal of the Physical Society of Japan. 1972b. Vol. 33, Iss. 6. P. 1537–1544.
- 4. Alekseev, A.S. Electron-hole drops in uniaxial-deformed germanium / A.S. Alekseev, V.S. Bagaev, T.I. Galkina // Sovjet Physics JETP. 1973. Vol. 36, Iss. 3. P. 536–540.
- 5. Altarelli, M. Indirect exciton dispersion and line shape in Ge / M. Altarelli, N.O. Lipari // Physical Review Letters. 1976. Vol. 36, Iss. 11. P. 619–622.
- 6. Altarelli, M. Camel's back excitons in GaP / M. Altarelli, R.A. Sabatini, N.O. Lipari // Solid State Communications. 1978. Vol. 25, Iss. 12. P. 1101–1104.
- 7. Ascarelli, G. Dynamic piezo-optic study of exciton and polaron states in AgBr // Physical Review. 1969. Vol. 179, Iss. 3. P. 797–815.
- 8. Bagaev, V.S. Properties of electron-hole drops in germanium crystals // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. Berlin : Springer, 1975. P. 72–90.
- 9. Bagaev, V.S. Surface tension of electron-hole liquid in germanium / V.S. Bagaev, N.N. Sibel'din, V.A. Tsvetkov // JETP Letters. 1975. Vol. 21, Iss. 3. P. 180–183.
- 10. Bagaev, V.S. Kinetics of exciton condensation in germanium / V.S. Bagaev et al. // Sovjet Physics JETP. 1976. Vol 43, Iss. 4. P. 783–794.
- 11. Beni, G. Theory of electron-hole liquid in semiconductors / G. Beni, T.M. Rice // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 2. P. 768–785.
- 12. Bimberg, D. Observation of an electron-hole liquid in cubic SiC / D. Bimberg, M.S. Skolnick, W.J. Choyke // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 40, Iss. 1. – P. 56–60.
- Benoit à la Guillaume, C. Condensation of excitons into electron-hole drops in semiconductors / C. Benoit à la Guillaume, M. Voos // Optical Properties of Solids: New Developments / ed. by B.O. Seraphin. –Amsterdam : North Holland, 1976. – P. 143–186.
- 14. Brinkman, W.F. The excitonic molecule / W.F. Brinkman, T.M. Rice, B. Bell // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 1570–1580.
- 15. Capizzi, M. Electron-hole drops in silicon / M. Capizzi et al. // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 16, Iss. 6. – P. 709–712.
- 16. Cho, K. Emission line shapes of exciton molecules in direct and indirect gap materials // Optics Communications. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 412–416.
- Choyke, W.J. Optical properties of polytypes of SiC: interband absorption, and luminescence of nitrogen-exciton complexes // Materials Research Bulletin. 1969. Vol. 84. P. S141–S152.
- Combescot, M. Estimation of the critical temperature of electron-hole droplets in Ge and Si // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 32, Iss. 1. – P. 15–17.
- 19. Cuthbert, J.D. Recombination kinetics of excitonic molecules and free excitons in intrinsic silicon // Journal of Luminescence. – 1970a. – Vol. 1–2. – P. 307–314.
- Cuthbert, J.D. Recombination kinetics of excitonic molecules and free excitons in intrinsic silicon // Physical Review B. – 1970b. – Vol. 1, Iss. 4. – P. 1552–1557.
- Dean, P.J. Absorption due to bound excitons in silicon / P.J. Dean, W.F. Flood, G. Kaminsky // Physical Review. – 1967a. – Vol. 163, Iss. 3. – P. 721–725.
- 22. Dean, P.J. Two-electron transitions in the luminescence of excitons bound to neutral donors in gallium phosphide / P.J. Dean et al. // Physical Review Letters. 1967b. Vol. 18, Iss. 4. P. 122–124.
- Dimmock, J.O. Exciton structure and Zeeman effects in cadmium selenide / J.O. Dimmock, R.G. Wheeler // Journal of Applied Physics. – 1961. – Vol. 32, Iss. 10. – P. 2271– 2277.
- 24. Dite, A.F. Biexciton in CdS spectrum. Inducedradiative decay of exciton-impurity complexes / A.F. Dite et al. // JETP Letters. 1973. Vol. 18, Iss. 9. P. 341–344.

- Dite, A.F. Gas-liquid phase diagram inanonequilibrium electron-hole system in silicon / A.F. Dite, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Sovjet Physics JETP. – 1977. – Vol. 45, Iss. 3. – P. 604–612.
- Dolling, C. Lattice vibrations in crystals with the diamond structure // Inelastic scattering of neutrons in solids and liquids. – Vienna : International Atomic Energy Agency, 1963. – Vol 2. – P. 37–48.
- 27. Elkomoss, S.G. Binding energy for some atomic and exciton complex systems / S.G. Elkomoss, A.S. Amer // Physical Review B. – 1975. – Vol. 11, Iss. 8. – P. 2925–2932.
- Elliott, R.J. Intensity of optical absorption by excitons // Physical Review. 1957. Vol. 108, Iss. 6. – P. 1384–1389.
- 29. Feldman, B.J. Electron-hole droplets in germanium in the high stress limit / B.J. Feldman, H.-H. Chou, G.K. Wong // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 24, Iss. 8. – P. 521–523.
- 30. Fisher, P. Symmetry of impurity states in semiconductors / P. Fisher, A.K. Ramdas // Physics of the Solid State / ed. by S. Balakrishna, M. Krishnamurthy, B. Ramachandra-Rao – New York : Academic Press, 1969. – P. 149–182.
- Forney, J.J. Binding energy of excitonic molecules / J.J. Forney, A. Baldereschi // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 635–638.
- Frova, A. Mass reversal effect in the split indirect exciton of Ge / A. Frova et al.// Physical Review Letters. 1975. Vol. 34, Iss. 25. P. 1572–1575.
- Furneaux, J.E. Rapid formation kinetics of a long-lived electron-hole drop in Ge under pulsed excitation / J.E. Furneaux, J.P. Wolfe, C.D. Jeffries // Solid State Communications. – 1976. – Vol. 20, Iss. 4. – P. 317–319.
- 34. Gogolin, A.A. Effect of exciton interaction on exciton spectra / A.A. Gogolin, E.I. Rashba // JETP Letters. 1973. Vol. 17, Iss. 12. P. 478–479.
- Gourley, P.L. Spatial condensation of strain-confined excitons and excitonic molecules into an electron-hole liquid in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 40, Iss. 8. – P. C. 526–530.
- 36. Grun, J.B. Luminescence of copper halides excited by a high power laser / J.B. Grun et al. // Journal of Luminescence. 1970. Vol. 1–2. P. 241–253.
- Hammond, R.B. Temperature dependence of the electron-hole-liquid luminescence in Si / R.B. Hammond, T.C. McGill, J.W. Mayer // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, Iss. 8. – P. 3566–3575.
- Hammond, R.B. Analysis of LO and TO phonon assisted free exciton luminescence in silicon / R.B. Hammond, R.N. Silver // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 28, Iss. 12. – P. 993–996.
- 39. Hanamura, E. Giant two-photon absorption due to excitonic molecule // Solid State Communications. 1973. Vol. 12, Iss. 9. P. 951–953.
- 40. Hanamura, E. Condensation effects of excitons / E. Hanamura, H. Haug // Physics Reports. 1977. Vol. 33, Iss. 4. P. 209–284.
- Haynes, J.R. Analysis of intrinsic recombination radiation from silicon and germanium / J.R. Haynes, M. Lax, W.F. Flood // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 1959. – Vol. 8. – P. 392–396.
- 42. Haynes, J.R. Experimental proof of the existence of a new electronic complex in silicon // Physical Review Letters. – 1960. – Vol. 4, Iss. 7. – P. 361–363.
- 43. Henry, C. Lifetimes of bound excitons in CdS / C. Henry, K. Nassau // Physical Review B. 1970. Vol. 1, Iss. 4. P. 1628–1634.
- 44. Hensel, J.C. The electron-hole liquid in semiconductors: experimental aspects / J.C. Hensel, T.G. Phillips, G.A. Thomas // Solid State Physics. Advances in research

and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. – New York : Academic Press, 1977. – Vol. 32. – P. 88–314.

- 45. Hildebrand, O. The electron-hole liquid in semiconductors: experimental aspects / O. Hildebrand, E.O. Göbel // Proceedings of the 13th International Conference on the Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. –Amsterdam : North-Holland, 1976. P. 942–945.
- Hodby, J.W. Cyclotron resonance of electrons and of holes in thallium chloride and in thallium bromide / J.W. Hodby et al. // Solid State Communications. – 1972. – Vol. 10, Iss. 11. – P. 1017–1020.
- 47. Hopfield, J.J. Fine structure in the optical absorption edge of anisotropic crystals // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1960. Vol. 15, Iss. 1–2. P. 97–107.
- Hopfield, J.J. Fine structure and magneto-optic effects in the exciton spectrum of cadmium sulfide / J.J. Hopfield, D.G. Thomas // Physical Review. – 1961. – Vol. 122, Iss. 1. – P. 35–52.
- Hopfield J.J. The quantum chemistry of bound exciton complexes // Physics of semiconductors: Proceedings of the 7th International Conference, Paris / ed. by M. Hulin. – Paris : Dunod, 1964. – P. 725–735.
- 50. Huang, W.T. Binding energy of excitonic molecules in isotropic semiconductors // Physica Status Solidi (b). 1973. Vol. 60, Iss. 1. P. 309–317.
- 51. Hulin, D. Electron-hole liquid in GaP / D. Hulin et al. // Physics Letters A. 1977a. Vol. 61, Iss. 5. P. 349–352.
- 52. Hulin, D. Electron-hole liquid and biexciton pocket in AgBr / D. Hulin et al. // Physical Review Letters. 1977b. Vol. 39, Iss. 18. P. 1169–1172.
- 53. Hümmer, K. Interband magnetoreflection of ZnO // Physica Status Solidi (b). 1973. Vol. 56, Iss. 1. P. 249–260.
- 54. Humphreys, R.G. Indirect exciton fine structure in GaP and the effect of uniaxial stress / R.G. Humphreys, U. Rössler, M. Cardona // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 10. P. 5590–5605.
- Hylleraas, E.A. Electron affinity of positronium // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 8. – P. 491–493.
- 56. Hylleraas, E.A. Binding energy of the positronium molecule / E.A. Hylleraas, A. Ore // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 8. P. 493–496.
- Ilegems, M. Infrared reflection spectra of Ga_{1-x}Al_xAs mixed crystals / M. Ilegems, G.L. Pearson // Physical Review B. – 1970. – Vol. 1, Iss. 4. – P. 1576–1582.
- Insepov, Z.A. Three-particle charged electron-hole complexes in semiconductors / Z.A. Insepov, G.E. Norman // Sovjet Physics JETP. – 1975. – Vol. 42, Iss. 4. – P. 674–675.
- Insepov, Z.A. Plasma model of an exciton gas in a semiconductor / Z.A. Insepov, G.E. Norman, L.Y. Shurova // Sovjet Physics JETP. – 1976. – Vol. 44, Iss. 5. – P. 1028– 1032.
- 60. Inui, T. Further contribution to the theory of hydrogen molecule // Proceedings of Phys. Math. Soc. of Japan. 1941. Vol. 23. P. 992–999.
- 61. Jeffries, C.D. Electron-hole condensation in semiconductors // Science. 1975. Vol. 189, Iss. 4207. P. 955–964.
- Kaminskii, A.S. Condensation of nonequilibrium carriers in silicon / A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii, N.V. Alkeev // Sovjet Physics JETP. – 1971. – Vol. 32, Iss. 6. – P. 1048– 1053.
- 63. Kane, E.O. Polaron effects on exciton // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 1321–1324.
- 64. Kawabata, T. Observation of cyclotron resonance absorptions due to excitonic ion and excitonic molecule ion in silicon / T. Kawabata, K. Muro, S. Narita // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 4. P. 267–270.

- 65. Keldysh, L.V. Concluding remarks // Proceedings of the 9th International Conference on the Physics of Semiconductors.– Leningrad : Nauka, 1968. P. 1303–1310.
- 66. Kittel, C. Introduction to solid state physics. New York : Wiley, 1966. 648 p.
- 67. Knox, R.S. Theory of excitons // Solid State Physics / ed. by F. Seitz, D. Turnbull New York : Academic Press, 1963. Supplement 5. 207 p.
- 68. Kosai, K. New photoluminescence line-series spectra attributed to decay of multiexciton complexes bound to Li, B, and P centers in Si / K. Kosai, M. Gershenzon // Physical Review B. – 1974. – Vol. 9, Iss. 2. – P. 723–736.
- 69. Kulakovskii, V.D. Biexcitons in the emission spectrum of uniaxially deformed silicon / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1977. Vol. 25, Iss. 10. P. 458–461.
- Kulakovskii, V.D. Electron-hole liquid and exciton and biexciton gas in elastically deformed silicon crystals / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev, V.M. Edel'shtein // Sovjet Physics JETP. – 1978. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 193–199.
- Lampert, M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. – 1958. – Vol. 1, Iss. 12. – P. 450–453.
- Lawaete, P. Valence-band parameters in cubic semiconductors // Physical Review B. 1971. – Vol. 4, Iss. 10. – P. 3460–3467.
- 73. Lax, M. Selection rules connecting different points in the Brillouin zone / M. Lax, J.J. Hopfield // Physical Review. 1961. Vol. 124, Iss. 1. P. 115–123.
- 74. Lax, M.J. Symmetry principles in solid state and molecular physics // New York : Wiley. – 1974. – 499 p.
- 75. Leheny, R.F. Experimental evidence for the existence of an electron-hole liquid in II-VI compounds / R.F. Leheny, J. Shah // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 13. – P. 871–874.
- Leheny, R.F. Condensation of optically excited carriers in CdS: Determination of an electron-hole-liquid phase diagram / R.F. Leheny, J. Shah // Physical Review Letters. – 1977. – Vol. 38, Iss. 9. – P. 511–514.
- 77. Lempicki, A. Polarization of luminescence and its application to the study of centres in CdS and SnS crystals / A. Lempicki et al. // Proceedings of the International Conference on Semiconductor Physics, Prague / ed. by K. Zaveta. – New York : Academic Press, 1961. – P. 768–770.
- 78. Lipari, N.O. Theory of indirect excitons in semiconductors / N.O. Lipari, M. Altarelli // Physical Review B. – 1977. – Vol. 15, Iss. 10. – P. 4883–4897.
- 79. Lipari, N.O. Anisotropy splitting of the exciton ground state in Si / N.O. Lipari, M. Altarelli // Bulletin of the American Physical Society. – 1978. – Vol. 23. – P. 426.
- Lowndes, R.P. Anharmonicity in the silver and thallium halides: far-infrared dielectric response // Physical Review B. – 1972. – Vol. 6, Iss. 4. – P. 1490–1498.
- Lyon, S.A. Bound exciton lifetimes for acceptors in Si / S.A. Lyon et al. // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 7. – P. 425–428.
- Lysenko, V.G. Radiative recombination under conditions of screening of the Coulomb interaction in CdS crystals / V.G. Lysenko et al. // JETP Letters. 1974. Vol. 20, Iss. 3. P. 77–79.
- Lysenko, V.G. Radiative recombination of a nonequilibrium electron-hole plasma in CdS crystals / V.G. Lysenko et al. // Sovjet Physics JETP. – 1975. – Vol. 41, Iss. 1. – P. 163–168.
- Lysenko, V.G. Condensation of non-equilibrium electron-hole pairs near impurity centers in cadmium sulfide crystals / V.G. Lysenko, V.I. Revenko, V.B. Timofeev // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 3. – P. 136–139.
- Merle, J.-C. Uniaxially stressed silicon: Fine structure of the exciton and deformation potentials / J.-C. Merle et al. // Physical Review B. – 1978. – Vol. 17, Iss. 12. – P. 4821–4834.

- Miklosz, J.C. Exciton structure and magneto-optical effects in ZnS / J.C. Miklosz, R.G. Wheeler // Physical Review. – 1967. – Vol. 153, Iss. 3. – P. 913–923.
- Mitra, S.S. Trends in the characteristic phonon frequencies of the NaCl-, diamond-, zinc-, blende-, and wurtzite-type crystals / S.S. Mitra, R. Marshall // The Journal of Chemical Physics. – 1964. – Vol. 41, Iss. 10. – P. 3158–3164.
- 88. Moskalenko, S.A. The theory of Mott exciton in alkali halide crystals // Optics and Spectroscopy. 1958. Vol. 5, Iss. 2. P. 147–155. (in Russian)
- 89. Mott, N.F. Metal-insulator transitions. –London : Taylor & Francis, 1974. 278 p.
- 90. Müller, G.O. Electron-hole liquid in CdS crystals as revealed by non-equilibrium transmission spectroscopy / G.O. Müller et al. // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 21, Iss. 2. – P. 217–219.
- 91. Nahory, R.E. Oscillatory photoconductivity and energy-band parameters of ZnTe / R.E. Nahory, H.Y. Fan // Physical Review Letters. – 1966. – Vol. 17, Iss. 5. – P. 251–253.
- 92. Nassau, K. Optical properties of substitutional donors in CdS / K. Nassau, C.H. Henry, W. Shiever // Proceedings of the 10th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by S.P. Keller, J.C. Hensel, F. Stern. – Cambridge MA : U.S. Atomic Energy Commission, Division of Technical Information, 1970. – P. 629–632.
- 93. Nakahara, J. Edge absorption stimulated by disorder in mixed crystals of thallous halides / J. Nakahara, K. Kobayashi, A. Fujii // Journal of the Physical Society of Japan. 1974. Vol. 37, Iss. 5. P. 1319–1324.
- 94. Nelin, G. Phonon density of states in germanium at 80 K measured by neutron spectrometry / G. Nelin, G. Nilsson // Physical Review B. 1972. Vol. 5, Iss. 8. P. 3151–3160.
- 95. Nikitine, S. Optical and magneto-optical properties of copper halides / S. Nikitine et al. // Proceedings of the 10th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by S.P. Keller, J.C. Hensel, F. Stern. Oak Ridge : U.S. Atomic Energy Commission, Division of Technical Information, 1970. P. 191–202.
- 96. Nikitine, S. Spontaneous and stimulated emission of excitons at high concentrations / S. Nikitine, H. Haken // Luminescence of Crystals, Molecules, and Solutions / ed. by B. Baron, M. Martens, S.P. Varma. – Boston : Springer, – 1973. – P. 4–19.
- 97. Nordsieck, A. On the value of the electric quadrupole moment of the deuteron // Physical Review. 1940. Vol. 58, Iss. 4. P. 310–315.
- 98. Ore, A. Structure of the quadrielectron // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 12. P. 913–914.
- 99. Osbourn, G.C. Auger transition rates for excitons bound to acceptors in Si and Ge / G.C. Osbourn, D.L. Smith // Physical Review B. 1977. Vol. 16, Iss. 12. P. 5426–5435.
- 100. Osten, W. von der. Phonon dispersion in AgBr and exchange of the transverse mode eigenvectors at L / W. von der Osten, B. Dorner // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 16, Iss. 4. – P. 431–434.
- 101. Patrick, L. Optical properties of 15R SiC: Luminescence of nitrogen-exciton complexes, and interband absorption / L. Patrick, D.R. Hamilton, W.J. Choyke // Physical Review. – 1963. – Vol. 132, Iss. 5. – P. 2023–2031.
- 102. Peierls, R. Zur theorie der absorptionsspektren fester körper // Annalen der Physik. 1932. Vol. 405, Iss. 8. P. 905–952.
- 103. Pelant, I. Excitonic molecule in AgBr / I. Pelant, A. Mysyrowicz, Benoit à la Guillaume // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 25. – P. 1708–1711.
- 104. Pokrovskii, Ya.E. Condensation of non-equilibrium charge carriers in semiconductors // Physica Status Solidi (a). – 1972. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 385–410.
- 105. Pokrovsky, Ya.E. Electric charge of the electron-hole drops in Ge / Ya.E. Pokrovsky, K.I. Svistunova // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.H. Pilkuhn. – Stuttgart, 1974. – P. 71–75.

- 106. Rashba, E.I. Edge absorption theory in semiconductors / E.I. Rashba, G.E. Gurgenishvili // Sovjet Physics Solid State. – 1962. – Vol. 4, Iss. 4. – P. 759–760.
- 107. Ravich, Yu.I. Semiconducting lead chalcogenides / Yu.I. Ravich, B.A. Efimova, I.A. Smirnov / ed. by L.S. Stil'bans. New York : Plenum. 1970. 392 p.
- 108. Reynolds, D.C. Excited terminal states of a bound exciton-donor complex in ZnO / D.C. Reynolds, T.C. Collins // Physical Review. 1969. Vol. 185, Iss. 3. P. 1099–1103.
- 109. Rice, T.M. Charge on an electron-hole drop // Physical Review B. 1974. Vol. 9, Iss. 4. P. 1540–1546.
- 110. Rice, T.M. The electron-hole liquid in semiconductors: theoretical aspects // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. – Academic Press : New York, 1977. – P. 1–86.
- 111. Rode, D.L. Low-field electron transport // Semiconductors and Semimetals / ed. by R.K. Willardson, A.C. Beer. Academic Press : New York, 1975. Vol. 10. P. 1–89.
- 112. Sauer, R. Evidence for bound multiple-exciton complexes in silicon // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 6. P. 376–379.
- 113. Sauer, R. Bound multiple-exciton complexes in silicon at high doping levels? // Solid State Communications. 1974. Vol. 14, Iss. 6. P. 481–483.
- 114. Segall, B. Intrinsic exciton absorption / B. Segall, D.T.F. Marple // Physics and Chemistry of II–VI Compounds / ed. by M. Aven, J.S. Prener. – Amsterdam : North-Holland, 1967. – P. 319-378.
- 115. Sell, D.D. Polariton reflectance and photoluminescence in high-purity GaAs / D.D. Sell et al. // Physical Review B. 1973. Vol. 7, Iss. 10. P. 4568–4586.
- 116. Shah, J. Observation of electron-hole liquid in GaP / J. Shah et al. // Physical Review Letters. 1977a. Vol. 38, Iss. 20. P. 1164–1167.
- 117. Shah, J. Low-temperature absorption spectrum in GaAs in the presence of optical pumping / J. Shah, R.F. Leheny, W. Wiegmann // Physical Review B. 1977b. Vol. 16, Iss. 4. P. 1577–1580.
- 118. Shaklee, K.L. Valley-orbit splitting of free excitons? The absorption edge of Si / K.L. Shaklee, R.E. Nahory // Physical Review Letters. – 1970. – Vol. 24, Iss. 17. – P. 942– 945.
- 119. Sharma, R.R. Theory of excitons bound to ionized impurities in semiconductors / R.R. Sharma, S. Rodriguez // Physical Review. 1967. Vol. 153, Iss. 3. P. 823–827.
- 120. Sharma, R.R. Binding energy of the excitonic molecule // Physical Review. 1968a. Vol. 170, Iss. 3. P. 770–772.
- 121. Sharma, R.R. Binding energy of the positronium molecule // Physical Review. 1968b. Vol. 171, Iss. 1. P. 36–42.
- 122. Shionoya, S. Anisotropic excitonic molecules in CdS and CdSe / S. Shionoya et al. // Solid State Communications. 1973. Vol. 12, Iss. 3. P. 223–226.
- 123. Sidorov, V.I. Submillimeter exciton photoconductivity in germanium / V.I. Sidorov, Ya.E. Pokrovskii // Sovjet Physics: Semiconductors 1973. Vol. 6, Iss. 12. P. 2015–2016.
- 124. Skettrup, T. Properties of excitons bound to ionized donors / T. Skettrup, M. Suffczynski, W. Gorzkowski // Physical Review B. – 1971. – Vol. 4, Iss. 2. – P. 512–517.
- 125. Skolnick, M.S. The electron-hole-liquid in 15R-SiC / M.S. Skolnick, D. Bimberg, W.J. Choyke // Solid State Communications. 1978. Vol. 28, Iss. 10. P. 865–868.
- 126. Stébé, B. Binding energies of the excitonic molecule ion and of the excitonic ion / B. Stébé, G. Munschy // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 17, Iss. 9. – P. 1051– 1054.
- 127. Stébé, B. Charged excitons in direct-gap semiconductors / B. Stébé, C. Comte // Physical Review B. 1977. Vol. 15, Iss. 8. P. 3967–3979.
- 128. Stébé, B. Existence of charged excitons in CuCl / B. Stébé et al. // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 26, Iss. 10. – P. 637–640.

- 129. Stopachinskii, V.V. Low-temperature photoluminescence of gallium arsenide // JETP. 1977. Vol. 45, Iss. 2. P. 310–315.
- 130. Stradling, R.A. Cyclotron resonance from thermally excited holes in ZnTe // Solid State Communications. 1968. Vol. 6, Iss. 9. P. 665–669.
- 131. Strzalkowski, I. Dielectric constant and its temperature dependence for GaAs, CdTe, and ZnSe / I. Strzalkowski, S. Joshi, C.R. Crowell // Applied Physics Letters. 1976. Vol. 28, Iss. 6. P. 350–352.
- 132. Sturge, M.D. Optical absorption of gallium arsenide between 0.6 and 2.75 eV // Physical Review. 1962. Vol. 127, Iss. 3. P. 768–773.
- 133. Suffczynski, M. Excitons bound to charged donors / M. Suffczynski, W. Gorzkowski, R. Kowalczyk // Physics Letters A. 1967. Vol. 24, Iss. 9. P. 453–454.
- 134. Tamura, H. Cyclotron resonance of positive holes in AgBr / H. Tamura, T. Masumi // Solid State Communications. – 1973. – Vol. 12, Iss. 11. – P. 1183–1186.
- 135. Thewalt, M.L.W. Biexcitons in Si / M.L.W. Thewalt, J.A. Rostworowski // Solid State Communications. 1978. Vol. 25, Iss. 12. P. 991–993.
- 136. Thomas, D.G. Optical properties of bound exciton complexes in cadmium sulfide / D.G. Thomas, J.J. Hopfield // Physical Review. 1962. Vol. 128, Iss. 5. P. 2135–2148.
- 137. Thomas, G.A. Temperature-dependent luminescence from the electron-hole liquid in Ge / G.A. Thomas et al.// Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 6. P. 386–389.
- 138. Thomas, G.A. / The indirect recombination mechanisms in germanium / G.A. Thomas, M. Capizzi // Physics of Semiconductors: Proceedings of the 13th International Conference, Rome / ed. by F.G. Fumi. 1976. Amsterdam : North-Holland, 1976. P. 914–917.
- 139. Thomas, G.A. Collision broadening in the exciton gas outside the electron-hole droplets in Ge / G.A. Thomas et al. // Physical Review B. – 1976a. – Vol. 13, Iss. 4. – P. 1692– 1702.
- 140. Thomas, G.A. Insensitivity to selection rules of two-phonon luminescence spectra / G.A. Thomas et al. // Physical Review Letters. 1976b. Vol. 37, Iss. 15. P. 1000–1003.
- 141. Thomas, G.A. Trions, molecules and excitons above the Mott density in Ge / G.A. Thomas, T.M. Rice // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 6. – P. 359–363.
- 142. Thomas, G.A. Mott distortion of the electron-hole fluid phase diagram / G.A. Thomas, J.B. Mock, M. Capizzi // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 8. P. 4250–4259.
- 143. Thomas, G.A. Electron-hole liquid in germanium under infinite uniaxial compression / G.A. Thomas, Ya.E. Pokrovskii // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 2. P. 864–870.
- 144. Thomas, G.A. Indirect recombination mechanisms in germanium / G.A. Thomas, E.I. Blount, M. Capizzi // Physical Review B. 1979. Vol. 19, Iss. 2. P. 702–718.
- 145. Turner, W.J. Exciton absorption and emission in InP / W.J. Turner, W.E. Reese, G.D. Pettit // Physical Review. – 1964. – Vol. 136, Iss. 5A. – P. A1467–A1470.
- 146. Vashishta, P. Electron-hole liquid in many-band systems. I. Ge and Si under large uniaxial strain / P. Vashishta, P. Bhattacharyya, K.S. Singwi // Physical Review B. 1974a. Vol. 10, Iss. 12. P. 5108–5126.
- 147. Vashishta, P. Thermodynamics of the electron-hole liquid in Ge, Si, and GaAs / P. Vashishta, S.G. Das, K.S. Singwi // Physical Review Letters. – 1974b. – Vol. 33, Iss. 15. – P. 911–914.
- 148. Vashishta, P. Surface energy of electron-hole liquid in germanium at zero and finite $\langle 111\rangle$ uniaxial stress / P. Vashishta, R.K. Kalia, K.S. Singwi // Solid State Communications. 1976. Vol. 19, Iss. 10. P. 935–938.
- 149. Vink, A.T. The dielectric constant of GaP from a refined analysis of donor-acceptor pair luminescence, and the deviation of the pair energy from the Coulomb law / A.T. Vink et al. // Journal of Luminescence. – 1973. – Vol. 8, Iss. 2. – P. 105–125.

- 150. Wannier, G.H. The structure of electronic excitation levels in insulating crystals // Physical Review. 1937. Vol. 52, Iss. 3. P. 191–197.
- 151. Wehner, R.K. On the excitonic molecule // Solid State Communications. 1969. Vol. 7, Iss. 5. P. 457–458.
- 152. Westervelt, R.M. Decay kinetics of electron-hole-drop and free-exciton luminescence in Ge: Evidence for large drops / R.M. Westervelt et al. // Physical Review Letters. – 1974a. – Vol. 32, Iss. 19. – P. C. 1051–1054.
- 153. Westervelt, R.M. Erratum: Decay kinetics of electron-hole-drop and free-exciton luminescence in Ge: Evidence for large drops / R.M. Westervelt et al. // Physical Review Letters. – 1974b. – Vol. 32, Iss. 23. – P. 1331.
- 154. Westervelt, R.M. Experimental and theoretical analysis of electron-hole drop nucleation phenomena in ultra-pure Ge // Proceedings of the 13th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by F.G. Fumi, Rome. – Amsterdam : North-Holland, 1976. – P. 902–905.
- 155. Westervelt, R.M. Motion of electron-hole drops in Ge / R.M. Westervelt, J.C. Culbertson, B.S. Black // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 359–362.
- 156. Wheeler, J.A. Polyelectrons // Annals of the New York Academy of Sciences. 1946. Vol. 48, Iss. 3. P. 219–238.
- 157. Wheeler, R.G. Exciton structure and Zeeman effects in cadmium selenide / R.G. Wheeler, J.O. Dimmock // Physical Review. 1962. Vol. 125, Iss. 6. P. 1805–1815.
- 158. Wolfe, J.P. Properties of the strain-confined electron-hole liquid in Ge / J.P. Wolfe et al. // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 3. P. 1479–1503.
- 159. Ziman, J.M. Principles of the Theory of Solids. Cambridge : Cambridge University Press, 1964. 360 p.

FREE MANY PARTICLE ELECTRON-HOLE COMPLEXES IN AN INDIRECT GAP SEMICONDUCTOR*

V.B. Timofeev

Dedicated to the Memory of Professor Vladimir L. Broude

1. Introduction

At low temperatures free electrons and holes, regardless how they are created in a semiconductor, are bound into excitons by Coulomb forces. In the limit of low nonequilibrium density n, when the dimensionless parameter r_s satisfies the inequality $r_s \equiv (3/4\pi n)^{1/3}/a_{ex} \gg 1$ (where a_{ex} is the Bohr radius of the exciton orbit) the exciton gas may be considered as a weakly interacting Boltzmann gas. By analogy with "polyelectronic" complexes first considered by Wheeler (1946), Lampert (1958) suggested that in a nonequilibrium electron–hole gas in a semiconductor free multiparticle complexes more complicated than the exciton can exist, namely, neutral excitonic molecules (bound states of two excitons, often called biexcitons) and excitonic ions (bound states of an exciton with an electron or a hole). The possibility of the existence of biexcitons in semiconductors was independently pointed out by Moskalenko (1958). The stability of such free complexes was later confirmed by reliable variational calculations.

Since the first work by Lampert many attempts have been made to discover these free multiparticle complexes, in particular the biexcitons, by spectroscopic means. The progress in experimental investigation of this problem is most evident during the last few years both in direct gap semiconductors (see, for example, the review article by Hanamura and Haug (1977) and by Grun in this volume) and in indirect gap semiconductors.

In contrast to ordinary gases the electron-hole (e–h) gas in a semiconductor is in principle a nonequilibrium system due to recombination processes. For example, in direct gap semiconductors the electron-hole recombination times are extremely short (usually of the order of nanoseconds). As a result the formation and decay of complexes takes place under highly nonequilibrium conditions which means the absence of equilibrium both with respect to the lattice temperature and between the components of the e–h system itself. A number of experimental methods have been proposed to study the energy spectrum of biexcitons which have proved to be effective in such nonequilibrium conditions.

^{*} Excitons / ed. by E.I. Rashba, M.D. Sturge // Modern Problems in Condensed Matter Sciences / ser. ed. by V.M. Agranovich, A.A. Maradudin. – Amsterdam : North-Holland, 1982. – Vol. 2, Ch. 9. – P. 349–392.

From practical point of view the most attractive of these methods are the resonant two-photon excitation of biexcitons (Hanamura 1973) and the stimulated one-photon transformation of an exciton into a biexciton (Gogolin and Rashba 1973). The effectiveness of these processes in direct gap semiconductors is due to extremely large oscillator strengths of corresponding optical transitions. To the same class of phenomena belongs the two- photon resonant (with respect to the biexciton state) Raman scattering (Ueta and Nagasawa 1976). The application of these methods to indirect gap semiconductors is less effective because of very small probabilities of optical transitions. On the other hand, indirect gap semiconductors have much longer recombination times (e.g. in Ge and Si these times are of the order of microseconds). Therefore one can expect that the chemical reactions of binding into complexes and the decay of the latter will occur under quasi-equilibrium conditions at low temperatures even at relatively small e–h gas densities. Under such conditions important information about the properties of free complexes can be obtained immediately from their emission spectra.

Because the strongest pair correlations of internal motion in the complex are between the electron and hole, the most probable radiative decay consists of the creation of a photon and a corresponding "recoil" particle. In indirect gap semiconductors such processes are accompanied by the emission of a phonon to conserve momentum. Experimental efforts were first concentrated on the search for new lines in the emission spectra corresponding to the radiative decay of excitonic molecules. The experimental activity in this direction was greatly stimulated by the well-known paper by Haynes (1966), who discovered a new radiative channel in an exciton gas of sufficiently high density in Si and attributed it to excitonic molecules. However, later it was established that this phenomenon was connected with the condensation of electrons and holes (Pokrovskii et al. 1969, 1972). For direct gap semiconductors the most convincing evidence for the biexciton radiative decay was found in CuCl and CuBr crystals, where according to variational calculations, the excitonic molecules have large binding energies. It should, however, be born in mind that compound semiconductors in contrast to atomic semiconductors such as Ge and Si contain, as a rule, relatively high concentrations of residual shallow electrically active impurity centers. At low temperatures excitons are easily bound forming immobile bound exciton complexes (BE) (Lampert 1958, Haynes 1960). Such immobile complexes in direct gap semiconductors typically have extremely large oscillator strengths for optical transitions (Rashba et al. 1962, Rashba 1975) and at low temperatures they provide the most effective radiative channel.

Since the spectral positions of the emission lines of bound and free complexes emission lines are very close it is difficult to identify free complexes in the spectra of radiative recombination in direct gap semiconductors.

This difficulty caused by the dominance of BE radiation in the emission spectra is absent in the indirect gap elemental semiconductors Ge and Si when of high purity. Modern technologies make it possible to grow Ge and Si crystals with extremely small concentrations of electrically active impurities, of the order of 10^{10} cm⁻³

(Ge) and 10^{12} cm⁻³ (Si) or even less. However, in Ge and Si another problem arises, namely, the condensation into an electron–hole liquid (EHL) (Keldysh, 1968).

In the region of parameters where such a phase transition exists the gaseous phase density is restricted by the condensation threshold. In Ge and Si and, in other indirect gap semiconductors free multiparticle complexes are less stable than the EHL. Consequently, at low temperatures the partial fraction of excitonic molecules and excitonic ions in the nonequilibrium e-h gas is small even near the condensation threshold. In the high-temperature region of the gas-liquid coexistence curve a new complication arises caused by the ionization of weakly bound states in the gaseous phase as a result of thermal processes and screening of the Coulomb interaction.

The conditions for the experimental detection of free multiparticle complexes in indirect gap semiconductors become more favourable when the degeneracy of the conduction and valence bands is lifted. The stability of complexes is insensitive to such degeneracy whereas the EHL binding energy decreases substantially when the degeneracy is lowered. Under such conditions it becomes possible to increase considerably the partial fraction of biexcitons in the saturated e–h gas. In our opinion up to now the free complexes have been most comprehensively studied in Si crystals, and in the present review we shall mainly use experimental results concerning this indirect gap material.

2. The binding energy of excitonic molecules

Despite the direct analogy between the Wannier–Mott exciton and the hydrogen atom one should bear in mind that in all known semiconductors the electron-to-hole ratio of effective masses is much greater than the corresponding ratio for free electron to proton, which is about 1/1840. In this connection first of all the question arose whether the excitonic molecule (EM) is stable with respect to the decay into two excitons for any values of the mass ratio parameter $\sigma = m_e/m_h$.

When the electron and hole effective masses do not differ considerably the four body problem of EM stability lacks a small parameter for a series expansion. Consequently in this case the widely used (particularly in molecular spectroscopy) adiabatic approximation is inapplicable. In other words at $m_e \approx m_h$ the zero oscillation amplitude is of the order of the EM dimension itself and consequently the concept of "nuclear equilibrium position" becomes meaningless.

In the limit $\sigma = 1$ the problem of EM stability is identical to the problem for the positronium molecule which was first solved by Hylleraas and Ore (1947). From variational calculations they found that the positronium molecule binding energy is only about 0,017 Rydberg of the positronium atom. Such a small binding energy as compared with the H₂ molecule results from the large contribution of the kinetic energy of intramolecular motion due to the small difference between the masses m_e and m_b . The EM binding energy $\Delta_{\rm EM}$ as a function of the parameter σ was first calculated by Sharma (1968a, b) who used the variational method of James and Coolidge (1933) with a 5 parameter trial wave function. According to his calculations the excitonic molecule is stable everywhere except the interval $0.2 \leq \sigma \leq 0.4$. This result, it turned out later, was wrong and was corrected by Wehner (1969) and Adamowski et al. (1971). It was shown in these papers that if the EM is stable in the limit $\sigma = 1$ then it should be stable within the whole region $0 \leq \sigma \leq 1$ ($\partial^2 \Delta_{\rm FM} / \partial \sigma^2 > 0$ for the whole range $\sigma \in [0, 1]$).

The EM binding energy for semiconductors with various band structures was calculated by Akimoto and Hanamura (1972a, b) and Brinkman et al. (1973).

In variational calculations the wave function is usually chosen in the form of a product of the Hylleraas–Ore (H–O) function and the envelope function for the holes:

$$\psi = \left[\psi_{\mathrm{H-O}}(r) / S(R) \right] F(R), \tag{1}$$

where $S^2(R) \equiv \int \psi_{\mu_{-}0}^2(r) d\tau_r$, and *R* represents the inter-hole distance. In the limit $\sigma \rightarrow 0$, substituting F(R) in eq. (1) for the δ function one obtains the trial function which was previously used by Inui (1938, 1941) for variational calculations of the $\rm H_{_2}$ molecule. In this limit, variational calculations yield $\Delta_{_{\rm FM}}/\rm Ry^{ex}\,{\approx}$ 0.3 (Ry^{ex} is the exciton Rydberg) whereas the exact result is 0.35. In the other limiting case when $\sigma = 1$ one has F(R) = 1 and the wave function (1) coincides with the (H–O) function for the positronium molecule. The dependence of the EM ground state energy on the effective mass ratio, $E(\sigma)$, is then found using standard variational procedure by minimizing the Hamiltonian expectation values (1) with respect to the parameters in the trial function (1). The EM binding energy relative to the dissociation into two free excitons, $\Delta_{_{\rm FM}} = E - 2Ry^{_{\rm ex}}$ is determined. Figure 1 shows the dependence of the EM binding energy (in exciton Rydberg units) on the parameter σ in the interval $0 \leq \sigma \leq 1$ calculated by Akimoto and Hanamura (1972). A similar result was also obtained by Brinkman et al. (1973). For $\sigma > 1$ the abscissa is to be read as σ^{-1} by symmetry. It is seen from fig. 1 that the EM should be stable at any mass ratio and the ratio $\Delta_{_{\rm FM}}/{\rm Ry^{ex}}$ is a monotone, rapidly decreasing function of σ in the range $0 \leq \sigma \leq 1$.

It is interesting to know how the size of the EM depends on the parameter σ . For $\sigma = 0$ the inter-hole distance is fixed. With increasing σ the kinetic energy of the holes increases leading to their delocalization and to the growth of the mean inter-hole distance $\langle R \rangle$, which is calculated from the formula

$$\langle R \rangle = \int \psi^2 R d\tau_r / \int \psi^2 d\tau_r.$$
 (2)

The evaluation of $\langle R \rangle$ as a function of the parameter σ was performed by Akimoto and Hanamura (1972) and the result is shown in fig. 2 from which it is seen that the ratio $\langle R \rangle / a_{ex}$ increases monotonically from 1.44 to 3.47 in the interval $0 \leq \sigma \leq 1$. Thus the EM is a more loose formation than the hydrogen molecule. It is also interesting to note that (*R*) changes much more slowly than Δ_{EM} .



Fig. 1. The binding energy of the excitonic molecules in units of exciton Rydberg for different electron to hole mass ratios (from Akimoto and Hanamura 1972).



Fig. 2. The ratio of the mean inter-hole distance of the excitonic molecules to the Bohr radius of the exciton for different electron to hole mass ratios (from Akimoto and Hanamura 1972).

Less information is available about the effects of anisotropy of the effective mass spectrum on the magnitude of the EM binding energy. Brinkman et al. (1973) and Bednarek et al. (1978) have found that with increasing anisotropy parameter $\gamma \equiv m_{\parallel}^{e}/m_{\perp}^{e}$ (or $m_{\parallel}^{h}/m_{\perp}^{h}$) the binding energy of the excitonic molecule decreases.
3. The gas of excitons and excitonic molecules and the electron-hole liquid in uniaxially strained silicon crystals

In indirect gap semiconductors the main obstacle hampering the experimental detection of excitonic molecules from emission spectra is the smallness of the EM binding energy which, as a rule, is less than the EHL binding energy. In such semiconductors the e-h gas density in the region of gas-EHL coexistence is always restricted by the condensation threshold (Hensel et al., 1978). In unstrained Ge and Si at low temperatures the partial fraction of EM in the e-h gas along the gas-liquid phase boundary is almost two orders of magnitude less than that of excitons. The density of e-h gas saturated vapours can be substantially increased by increasing the electronic temperature, however this entails other complications because of thermodissociation processes. The conditions for the experimental observation of biexcitons become more favourable when the indirect gap semiconductor is uniaxially strained so that the EHL binding energy considerably decreases. It is well known that uniaxial elastic deformation lifts the degeneracy of the bands in Ge and Si. As a result of this the mean kinetic energy per pair in the EHL increases whereas the binding energy and the equilibrium pair density in the condensed phase decrease (Bagaev et al. 1969, Benoit a la Guillaume et al. 1972). We note that under the same conditions as was shown by Bir and Pikus (1974) the binding energy of the exciton (and, apparently, of the EM) are not altered significantly. The change of the EHL binding energy is accompanied by considerable changes in the partial composition of saturated vapour along the gas-liquid phase boundary. We first consider the change of the EHL binding energy when the energy spectrum is altered by the lifting of the band degeneracy by directional deformation in Si crystals.

Kulakovskii et al. (1978), Edelstein et al. (1979b) have investigated the recombination–radiation spectra of Si deformed along the axes $\langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ and $\langle 111 \rangle$ (i.e. Si (2–1), Si(4–1) and Si (6–1)) where the first figure denotes the number of the lowest split-off electron valleys, and the second is the multiplicity of the valence band degeneracy at the extremum (with spin degeneracy neglected). At pressures $p < p_{\rm cr}$, a continuous restructuring of the EHL recombination spectrum takes place as the deformation is increased. Above the pressure $p_{\rm cr}$, when the splitting of the bands $\Delta_{\rm cr}$ exceeds the corresponding values of the Fermi energies of the electron and holes in the EHL, the recombination spectrum of the EHL acquires a canonical form for each given compression direction and is independent of the applied pressure. Figure 3 shows the recombination spectra of Si(6–1), Si(4–1) and Si(2–1) measured at T = 1.8 K and under pulsed laser excitation. For comparison the figure also shows the spectrum of undeformed Si(6–2). Each spectrum contains a wide band L corresponding to the EHL emission and emission lines FE connected with the gas of free excitons. Figure 3 demonstrates qualitatively

that as the "multivalley character" is decreased the EHL band becomes narrower and its maximum and "violet" edge lies closer to the exciton line. In the strained crystals the condensation threshold increases noticeably.



Fig. 3. The radiative recombination spectrum of Si(6–2) (1), Si(6–1) (2), Si(4–1) (3) and Si(2–1) (4) under 30 kW/cm² pulsed laser excitation at T = 1.8 K. The dashed lines show the approximation of the spectra given by eq. (3). (From Kulakovskii et al. 1978.)

The equilibrium concentration of e-h pairs in the EHL in indirect gap semiconductors is determined by analyzing the shape of the recombination spectrum, using the following expression,

$$I(E) \propto \int_{-E}^{E} D_{e}(E') D_{h}(E'-E) f_{e}(E') f_{h}(E'-E) dE'.$$
(3)

where D(E'), D(E'-E) are the densities of states in the electron and hole bands, f_e and f_h are the distribution functions of electrons and holes. The energy of the recombination photon is

$$\hbar\omega = E + E_{gap}^{i} - E_{xc} - \hbar\Omega, \qquad (4)$$

where E_{gap}^{i} is the width of the indirect gap, E_{xc} is the sum of the exchange and correlation energies, and $\hbar\Omega$ is the energy of the emitted phonon. In this expression no account is taken of the dependence of the transition matrix element on energy, nor of the corrections to the density of states due to interactions between the particles. Hence at a known electron temperature the density of e–h pairs in the condensed phase, n_0 , is the single fit parameter in expression (3).

The approximation to the EHL spectrum shape given by expression, (3) is shown in fig. 3. Within the framework of this description the sum of the Fermi energies of electrons and holes, $E_e^F(n_0)$ and $E_h^F(n_0)$ is the width of the band L, and the EHL binding energy φ is determined as the distance between the position of chemical potential $\overline{\mu}$ and the boundary of the exciton–phonon spectrum.

Kulakovskii et al. (1978) have found that at maximum lifting of degeneracy in the bands, i.e. in Si(2–l), the EHL binding energy undergoes a fourfold decrease relative to the undeformed crystal Si(6–2). Consequently in Si(2–1) the e–h gas density near the threshold of condensation into EHL increases by almost one order of magnitude compared with Si(6–2). Qualitatively this is seen from the comparison of the Si(6–2) and Si(2–1) spectra shown in fig. 3, which were measured at equal generation levels of nonequilibrium carriers. With decreasing EHL binding energy φ the exciton line intensity increases. At the same time an increase of the background emission between the EHL and exciton bands is observed. However only in the spectra of Si(2–l) does this background exhibit a clearly pronounced spectral feature: a separate new line M due to the emission of excitonic molecules.

The appearance of the M line is clear from the time evolution of the emission spectra of Si(2–1) under pulsed excitation illustrated by fig. 4. At the instant of pulsed excitation of e–h pairs with a concentration of about $n_{eh} \approx 10^{17}$ cm⁻³ the EHL emission (L band) predominates. The free exciton emission line FE is also clearly seen in the spectra. Besides the L and FE lines a new line M appears in the spectra when the applied uniaxial stress p is greater than 20 kg/mm². The spacing between the maxima of the lines M and FE does not change with increasing pressure (up to the destruction of the crystal at $p \approx 90-100$ kg/mm²) and equals 2 meV. After the decay of the EHL emission band the shape of the M line remains unchanged and its decay time is $\tau_{\rm M} \approx 0.5 \tau_{\rm FF}$.



Fig. 4. Kinetics of the emission spectrum of the Si(2–1) under pulsed excitation (30 kW/cm²) and T = 1.8 K. Spectra 1–5 correspond respectively to delays of 0.05, 0.25, 0.35, 0.7, and 1.1 μ s relative to the exciting pulse (From Kulakovskii et al. 1978).

The line M was first discovered in the emission spectra of Si by Kulakovskii and Timofeev (1977) and was attributed to the indirect radiative decay of excitonic molecules in conformity with the conservation law,

$$E_p^{EM} = E_q^{ex} + \hbar\Omega_{p-q} + \hbar\omega, \qquad (5)$$

where E_p^{EM} and E_q^{ex} are the energies of the biexciton and exciton, respectively, and $\hbar\omega$ is the energy of the emitted photon. The molecular origin of the M line was confirmed by experiments performed under stationary volume excitation. Figure 5 shows the evolution of the emission spectrum of Si(2–1) at $p = 50 \text{ kg/mm}^2$ in the region of the exciton structure under stationary volume laser excitation ($\lambda = 1.064 \text{ m}$) and at T = 1.8 K. By the use of such a source it is possible to obtain volume excitation in Si(2–1) crystals starting with a deformation $p \gtrsim 20 \text{ kg/mm}^2$. At minimum excitation densities the spectrum contains only the free exciton emission line and the line BE of the exciton bound to a neutral acceptor (boron atoms). With increasing pumping the intensity of the BE line is saturated. The M line then appears between the BE and FE emission bands and with increasing exciton concentration

its intensity increases quadratically with exciton line intensity (inset in fig. 5). This quadratic dependence is one of the main confirmations of the molecular origin of the M band. The intensity ratio of the lines FE and M ceases to depend on excitation density at T = 1.8 K and at concentrations $n_{\rm e,h} \approx 10^{15}$ cm⁻², when condensation of the exciton and biexciton gas into EHL sets in. It follows from these experiments performed under the conditions of uniaxial deformation, that only in Si(2–1) are the partial pressures of excitons and biexcitons of the same order of magnitude at densities $n_{\rm e,h}$ corresponding to the onset of condensation into EHL.



Fig. 5. Variation of the emission spectra of Si(2–1) ($p \approx 45 \text{ kg/mm}^2$, T = 1.8 K) with changing excitation density as *n* is increased from 10^{14} to 10^{15}cm^{-3} . The insert shows the $J_M(J_{FE})$ dependence in a logarithmic scale, the straight line corresponds to $J_M \propto J_{FE}^2$ (From Kulakovskii et al. 1978).

If one judges from the known variational estimates of the EM binding energy and from the experimental values of the EHL binding energy, a similar situation should exist in Ge crystals. In unstressed Ge near the threshold of condensation into EHL the density of excitons must exceed that of biexcitons by more than two orders of magnitude. A situation favourable for the detection of biexcitons from emission spectra should arise in Ge crystals under the conditions of uniaxial stress along the direction $\langle 111 \rangle$ (Ge(1–1), i.e. at maximum lifting of the degeneracy in the electron and hole bands).

4. The rate of indirect annihilation and the shape of excitonic molecule emission lines

In the case considered of indirect electronic transitions, the radiative annihilation of an excitonic molecule results into creation of a photon, phonon and exciton. Therefore the corresponding line in the luminescence must have a finite width even if the EM is initially at rest. This is due to the fact that a part of the EM energy is given up to the created "recoil" exciton to increase its kinetic energy. It is these "recoil" processes that determine the essential differences of the shape of the EM emission spectrum in the case of indirect annihilation as compared to their emission spectrum in direct gap semiconductors.

In order to estimate the width of the EM emission line at $T \rightarrow 0$ for the case of indirect transitions we use the fact that the characteristic dimension of the EM wave function is of the order of the exciton radius a_{ex} (fig. 2). Having this in mind it is quite natural to assume that the matrix element $M(P \mid q, Q)$ of the corresponding radiative transition will differ from zero at $|q| \lesssim a_{ex}^{-1}$ Therefore the typical "recoil" energy of the exciton, which determines the linewidth, is $\hbar^2/2m_{ex}a_{ex}^2$. Hence the width Γ of the biexciton emission line is of the order of

$$\Gamma \sim m^* / m_{ex} R y^{ex}, \tag{6}$$

where m^* and m_{ex} are the reduced and translational masses of the exciton. According to eq. (6) the EM emission linewidth in Si(2–1) should be $\Gamma \approx 3$ meV, and in Ge(1–1) about 1.5 meV.

For the calculation of the biexciton-emission lineshape it is necessary to know the dipole matrix element of the corresponding transition. The indirect EM annihilation amplitude was calculated by Kulakovskii et al. (1978). The matrix element of the corresponding transition was found in standard fashion by secondorder perturbation theory (interaction with phonons and electromagnetic fields) and after simple transformations it was reduced to the form,

$$M(\boldsymbol{P}|\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q}) \propto \int d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{r}_{e} d\boldsymbol{r}_{h} \psi^{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{e}|\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_{h}) e^{-i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}} \psi^{*\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}_{e}|\boldsymbol{r}_{h}), \qquad (7)$$

where ψ^{p} , e^{-iQr} and ψ^{q} are the biexciton, phonon, and exciton wave functions. In the derivation it was assumed that the spin function of the electrons and holes in the biexciton is antisymmetric under the permutation of both the electrons and the holes while the coordinate function is symmetric.

Expression (7) is a generalization of the well-known formula of Elliott (1957) and Sakharov (1948) for the annihilation amplitude which is proportional to $\psi_{ex}(0)$ of the exciton (or the positronium atom) and also has a simple physical interpretation. In fact, expression (7) is evidently the probability amplitude of finding one of the electrons and one of the holes at the same point in the biexciton while the other electron and hole form an exciton with a wave function ψ^{q}

It follows from the translational invariance of the exciton and biexciton in the effective-mass method, that $M(\mathbf{P}|\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ contains $\delta(\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{q})$ in conformity with the quasimomentum-conservation law. In addition, since the internal motion in the exciton and the EM is independent of the center of gravity, the function $M(\mathbf{P}|\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ after separating out the δ function, will depend only on one linear combination of the remaining two independent vectors,

$$M(\boldsymbol{P}|\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}) = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q})N(2\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}). \tag{8}$$

To determine *M* and *N* explicitly it is necessary to know the wave function of the ground state of the EM. There is no exact solution of this problem, therefore Kulakovskii et al. (1978) have evaluated *M* using the variational approximation of Brinkman et al. (1973), which is the most suitable for the biexciton in Si(2–1). Substitution of the expression for the variational wave function of the biexciton and also of the expressions for the exciton and phonon wave functions into (7) and numerical integration yields the function *N*. The values of *N*(*q*) thus calculated in the region $|\boldsymbol{q}|a_{ex} \leq 2,5$ are shown in fig. 6. As expected, the function *N* is concentrated in the region $|\boldsymbol{q}|a_{ex} < 2$.

If phonon dispersion is neglected, then the probability for the emission of a photon of energy $\hbar\omega$ is

$$W(\hbar\omega) \propto \int d\mathbf{P} d\mathbf{q} \exp\left(-P^2/8m_{ex}kT\right) N^2\left(\left|2\mathbf{q}-\mathbf{P}\right|\right) \times \delta\left(E_{\mathbf{p}}^{EM}-E_{\mathbf{q}}^{ex}-\hbar\Omega-\hbar\omega\right). \tag{9}$$

At sufficiently low temperatures, such that the mean thermal momentum $\langle P \rangle$ of the EM satisfies the inequality $\langle P \rangle a_{ex} \ll 1$, one can see from (9) that the line shape is given by the expression

$$W(\hbar\omega) \propto |q| N^2(2q),$$
 (10)

with $q / m_{ex} = E_q^{ex} - \Delta_{EM} - \hbar\Omega - \hbar$. Figure 7 shows the fit of the experimental shape of the EM emission line in Si(2–1) at T = 1.8 K with the aid of the theoretical relation (10). The numerical values of the function N correspond to fig. 6. To obtain the result of fig. 7 the following was assumed: an exciton binding energy of 12 meV, $a_{ex} = 52.5$ Å, and a EM binding energy for Si(2–1), corresponding to the trial function of Brinkman et al. (1973), $\Delta_{\rm EM} = 0.4$ meV. The agreement between theory and experiment seems quite satisfactory, especially if one remembers that no free parameters were used in the approximation.



Fig. 6. The dependence of the matrix element of the excitonic molecule radiative decay transition on the parameter $a_{ex}q$. Curve (1) is calculated by Kulakovskii et al. (1978) with the use of the variational wave function of Brinkmann et al. (1973), curves (2) and (3) are calculated with the use of Cho's approximation (1973) and correspond to $a_{EM} = a_{EX}$ and $a_{EM} = 3a_{EX}$, respectively.



Fig. 7. Comparison of the calculated luminescence spectrum of EM (points) with the experimental one. The figure shows also the emission spectrum of excitons (FE) obtained at low excitation density. T = 1.8 K. (From Kulakovskii et al. 1978.)

It is important to emphasize that both the line shape and the binding energy are uniquely determined by the EM wave function and hence are not independent quantities. Therefore it is impossible to determine the EM binding energy accurately on the basis of the analysis of the line shape. One could try to determine $\Delta_{\rm EM}$ from the position of the high-frequency boundary of the emission spectrum, however the experimental determination of this boundary in the case of biexcitons is not sufficiently exact.

Previously Cho (1973) has proposed a model-derived expression for the indirect biexciton-annihilation amplitude of the form

$$M(\boldsymbol{P}|\boldsymbol{q}) \propto \left[\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{P} - \boldsymbol{q} \right)^2 + a_{EM}^{-2} \right]^{-2}.$$
 (11)

It turned out, however, that the model expression (11) describes satisfactorily only the long-wave wing of the experimental profile of the EM line, which corresponds, as is seen from (11), to a large momentum transfer. The same conclusion can be drawn from a comparison of expression (11) with the numerical calculation of the function $N(\mathbf{q})$. Thus the estimates of the EM binding energy obtained by Pelant et al. (1976) and by Gourley and Wolfe (1978) by fitting the experimental profile with a model expression for the matrix element $M(\mathbf{P}|\mathbf{q},\mathbf{Q})$ seem not to be exact. For example, in AgBr crystals Pelant et al. (1976) used expression (11) to fit the indirect EM emission profile and obtained an anomalously large value of the binding energy, $\Delta_{_{EM}} \approx \frac{1}{2} \text{Ry}^{ex}$, which has no simple explanation within the framework of existing theoretical ideas. Apparently, this anomaly is caused by the procedure used for fitting the experimental profile.

The EM binding energy in an indirect gap semiconductor can be estimated experimentally in a thermodynamic way if quasi-equilibrium between the components of the gas phase, namely the FE/EM equilibrium, holds. Under conditions of thermodynamic equilibrium the concentrations of excitons and biexcitons, n_{ex} and n_{EM} , are related in the following way

$$n_{EM} = n_{ex}^2 \left(\left(4\pi \hbar^2 / kT m_{ex} \right)^{3/2} g_{EM} / g_{ex}^2 \right) \exp\left(\Delta_{EM} / kT \right), \tag{12}$$

where $g_{\rm EM}$, $g_{\rm ex}$ are the statistical weights. Then the EM binding energy can be determined from the temperature dependence of the ratio of FE line to M line intensities, using relation (12). Such measurements were made by Edelstein et al. (1979b) for Si(2–1) in a temperature range 2 to 4.2 K and at concentrations $n_{e,h} \approx 10^{15} \, {\rm cm}^{-3}$ and the results are shown in fig. 8. These authors used volume excitation with the aid of a Nd:YAG laser and thus avoided the difficulties arising from temperature changes of the spatial distribution of the FE/EM gas and usually encountered when surface excitation is used. They found for the EM binding energy in Si(2–1) a value of $\Delta_{\rm EM} = 0.55 \pm 0.15$ meV, or $\Delta_{\rm EM} \approx 0.04 \, {\rm Ry}^{ex}$. If in this experiment the quasiequilibrium in the gas phase was incomplete, then the true value of $\Delta_{\rm EM}$ might be somewhat greater.



Fig. 8. Spectra 1, 2, 3 of Si(2-1) under stationary excitation and T = 2, 3.1, and 4.2 K respectively. (From Edelstein et al. 1979b.)

One can judge the state of FE/EM equilibrium from studies of the kinetics of the emission spectra under the conditions of pulsed excitation. If radiation is emitted mainly through the channel of excitons and EM (EHL emission being absent) then at quasi-equilibrium the nonstationary density of EM will decay according to the law $n_{EM} \propto n_{ex}^2 \propto \exp(-2t/\tau_{exc})$, i.e. twice as fast as the exciton density. Studying the decay kinetics of excitons and biexcitons in Si(2–1) with 50 ns time resolution Kulakovskii et al. (1978) found $\tau_{EM} = 0.2 \ \mu s$ and $\tau_{FE} = 0.38 \ \mu s$ at 2 K. The kinetics of the exciton and EM emission lines under pulsed excitation of $n_{e,h} \approx 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, as well as the decay of the EHL line, are shown in fig. 9. It is seen that 0.5 μs after the exciting pulse, when the drops of EHL have evaporated the decay of the FE and EM line intensities is described by an exponential law. With increasing temperature the respective times also increase at T = 10 K, they are equal to $\tau_{EM} \approx 1 \ \mu s$ and $\tau_{FE} = 1.9 \ \mu s$. Thus for Si(2–1) in the investigated temperature interval $\tau_{EM} \approx \frac{1}{2} \tau_{ex}$, indicative of the vicinity to FE/EM quasiequilibrium, when the mean e–h concentration, $n_{e,h}$, is about 10^{15} cm^{-3} .

It is interesting to compare the experimental value of Δ_{EM} for Si(2–1) with the values resulting from variational calculations. Brinkman et al. (1973), Akimoto and Hanamura (1972a, b) and Forney and Baldereschi (1978) have found that

 $\Delta_{_{E\!M}} \approx 0.03 \text{ Ry}^{ex}$. Huang (1973) obtained a considerably larger value $\Delta_{_{E\!M}} \approx 0.11 \text{ Ry}^{ex}$. Note, that in the above variational calculations of the binding energy no account was taken of anisotropy effects, which are possibly a significant case of silicon.



Fig. 9. Dependence of the emission line intensities of excitons (FE), excitonic molecules (M), and EHL (L) on the delay relative to the excitation pulse in Si(2–1) at T = 2 K, (From Kulakovskii et al. 1978.)

Recently radiative decay of the excitonic molecule has been found in the emission spectra of uniaxially compressed Ge by Kukushkin et al. (1980). It is demonstrated in this paper that the electron–hole liquid (EHL) stability in Ge remains large (~ 0.28 Ry, Ry is excitonic Rydberg) with respect to the excitonic molecule binding energy ($\Delta_M \approx 0.03$ Ry) even with a high stress along $\langle 111 \rangle$ axis, which lifts orbital degeneracy of the bands completely. Because of this stability, the partial fraction of the molecules, relative to the free exciton (FE), in the gas phase in Ge $\langle 111 \rangle$ at low temperature is too small for the EM emission to be detectable in the spectra (see fig. 10, upper part). The EHL binding energy should decrease to ~ 0.18 Ry in Ge compressed along a nonsymmetrical direction close (5°) to the $\langle 001 \rangle$ axis (e.g. $\langle 1, 1, 16 \rangle$), due to the decrease in the hole density of states. Kukushkin et al. have found that in this case the partial fractions of excitons and molecules in the gas phase at the coexistence boundary with EHL at T = 2 K are of the same order of magnitude. Under such conditions the EM radiative decay line is visible in the emission spectra (M line) (see fig. 10, lower part). The shape of this

line has been analyzed and the EM binding energy has been estimated equal to $\Delta_M \approx (0.15 \pm 0.1)$ meV by the thermodynamic method. It is interesting to mention that for the same experimental values of kT/Ry and I_M/I_{FE} , and with normalized scales (Ry(Si)/Ry(Ge) ≈ 4.8), the shapes of the EM emission lines for Si(2–1) and Ge $\langle 1, 1, 16 \rangle$ completely coincide (see curve 9 of fig. 10).



Fig. 10. LA-phonon assisted spectra of Ge stressed along $\langle 111 \rangle$ (≈ 130 MPa) and $\langle 1, 1, 16 \rangle$ (≈ 200 MPa) at T = 1.8 K for different pumping powers P (W/cm²). Spectra (1)–(10) correspond to P = 5, 1, 0.3, 0.03, 0.03, 50, 20, 8, 2, 0.03. Spectra (1)–(4), (6)–(10) correspond to the pure samples with $N_i = N_D + N_A \approx 5 \times 10^{11}$ cm⁻³ spectrum 5 to a sample with $N_i = 5 \times 10^{12}$ cm⁻³. E'_s , μ_L and E_{FE} shown by arrows indicate the boundary of the band, EHL chemical potential and free exciton level. The dots at curve (9) correspond to the shape of EM and FE lines for Si(2–1) taken at T = 9 K. (From Kukushkin et al. 1980.)

5. Gas of excitons and excitonic molecules in a parabolic potential well

The gas of excitons and EM exhibits interesting features when the nonequilibrium e-h system is confined within a three-dimensional spherically symmetric potential well described by a potential $V(r) = \alpha r^2$, where α is a force constant. Gourley and Wolfe (1978) have shown that it is possible to realize such conditions by means of inhomogeneous stress applied along one of the main crystallographic directions. The center of the parabolic potential well is then localized inside the sample where the stress is maximum. Gourley and Wolfe accomplished this by stressing Si monocrystals, cut in the form of rectangular parallelepipeds, along the axis $\langle 100 \rangle$ with a rounded steel plunger. In this case the stress maximum was about 50 kg/mm² at 0.3 mm inside the surface to which the external stress was applied. Earlier this strain-confinement technique was used by Wolfe et al. (1975a, b) to detect giant electron-hole drops (so-called γ -EHD) in Ge crystals.



Fig. 11. Side view of the exciton luminescence from a 4 mm \times 4 mm \times 1.8 mm Si crystal at T = 15 K, showing explicitly the migration of excitons from the excited surface to the potential well. (From Gourley and Wolfe 1978.)

The nonequilibrium e-h pairs created by laser light near the surface or in the volume of the sample are driven by the stress to the center of the potential well, where the stress is maximum. Figure 11 is a photograph showing the migration of

nonequilibrium carriers in Si crystals to the center of the potential well where the excitons and EM are condensed into EHL at $T < T_c$. In nonuniformly stressed Si crystals, due to the long exciton lifetimes the nonequilibrium e–h system, comes to a quasi-equilibrium state in the vicinity of the potential well center. In this case the spatial distribution of the e–h gas component (excitons, biexcitons, free electrons and holes) is determined by the shape of the potential well. It follows from the paper by Gourley and Wolfe (1978), that the local density of free particles confined to three-dimensional parabolic potential well is given by the expression:

$$n_i(r) = n_i(0) \exp\left(-\alpha_i r^2 / kT\right), \tag{13}$$

where the subscript *i* refers to the type of particle (excitons, EM etc.). Here $n_i(0) = (\alpha_i^2 / \pi kT)^{3/2} N_i$, where *N*, is the total number of particles in the gas which occupies the effective volume $V_i = (\pi kT / \alpha_i)^{3/2}$. According to eq. (13) the spatial profile of the recombination-radiation spot of the *i*th component of the gas confined to the potential well has a Gaussian form $I(r_x) = I_0 \exp(-\alpha_i r_x^2 / kT)$. The full width at half-maximum (FWHM), ΔH , of this distribution is

$$\Delta H = \left(2.77kT/\alpha_i\right)^{1/2}.\tag{14}$$

Thus, the width of the spatial distribution of gas particles of the *i*th kind is independent of the gas density and consequently of the excitation level, and is a function only of temperature. In fig. 12 FWHM of the spatial distribution of the exciton gas emission in nonuniformly stressed Si(2–1) crystals is plotted versus temperature. Within the temperature range 22–5 K the width is proportional to $T^{1/2}$, in agreement with eq. (14). It is also seen from fig. 12 that this temperature dependence ceases to hold at $T \leq 4$ K, when under the excitation level used in the experiment condensation of excitons into drops of EHL occurs. As the EM, unlike the exciton, consists of two e–h pairs, it is natural to expect the force constants to be related by $\alpha_{EM} = 2\alpha_{FE}$. Therefore at a fixed temperature the FWHM of the spatial distribution of the EM gas is narrower than that of the exciton gas, namely, $\Delta H_{FE} = \sqrt{2}\Delta H_{EM}$. The measured spatial profiles of the radiation from the gas of excitons and excitonic molecules confined to a potential well confirm this conclusion (fig. 13).

Furthermore, the density of states D(E) of the free ideal gas confined to a three-dimensional parabolic potential well suffers substantial modification and is given by $D(E) \propto E^2$. As a result of this the shape of the exciton–phonon luminescence spectrum is well described by the expression

$$I(E) \propto E^2 \exp(-E/kT). \tag{15}$$

Figure 14 shows the result of fitting the spectrum by eq. (15). For comparison the function $E^{1/2} \exp(-E/kT)$ which usually describes the shape of the exciton–

phonon luminescence in the case of indirect allowed transitions in unstressed crystals, is plotted.



Fig. 12. (a) Spatial extent of the luminescence in Si from the potential well vs *T*. Above T = 5 K, ideal gas behaviour is observed. Below T = 4 K, the FE gas has condensed into an EHL. (b) Relative intensities of the three phases obtained with 1 (meV) spectral resolution. (From Gourley and Wolfe 1978.)

The EM binding energy in nonuniformly stressed Si(2–1) crystals, when the nonequilibrium e–h gas is spatially confined by a parabolic potential well, was extracted from the temperature dependence of the FE/EM emission–intensity ratio. Under these conditions Gourley and Wolfe (1979) have obtained for the intensity ratio $R \equiv I_{FE}^2/I_{EM}$ in the case of thermodynamic equilibrium the following expression:

$$R(T) = \beta \frac{g_{FE}^2}{g_{EM}} \left[\frac{1}{2\hbar^2} \frac{m_{ex}^2 \alpha_{EM}}{m_{EM} \alpha_{FE}^2} \right]^{3/2} (kT)^3 \exp\left(-\frac{\Delta_{EM}}{kT}\right), \tag{16}$$

where β is proportional to the FE to EM ratio of radiative probabilities, which is assumed to be independent of temperature. The ratio R(T) does not depend on the total number of e-h pairs in the potential well, nor therefore on the excitation level. The temperature dependence of R(T) given by eq. (16) differs from that in the case of free particles by a factor $T^{3/2}$. In nonuniformly stressed Si(2-1) crystals the EM binding energy was estimated by Gourley and Wolfe (1979) from the FE to M intensity ratio measured in the temperature range 3.5–10 K. The EM binding energy found is $\Delta_{EM} \approx 1.5$ meV, which is more than twice the value found in the same way for uniformly stressed Si(2-1) crystals. The cause of such discrepancy remains unclear.



Fig. 13. Spatial profiles of the EM and FE distributions obtained by scanning the image of the Si crystal across the entrance slit of a monochromator set at the respective wavelength. (From Gourley and Wolfe 1979.)



Fig. 14. High temperature FE line shape showing the excellent fit of the simple fitting function with $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^2$ (From Gourley and Wolfe 1979.)

In conclusion to this section it should be emphasized that under quasiequilibrium in the potential well the distribution of the EM gas and the spatial extent of this distribution are insensitive to the excitation level and to the related density gradient. The latter is unavoidable under surface excitation of unstressed or uniformly stressed crystals, and the distribution itself depends on the excitation level in this case, which is particularly critical when the EM binding energy is estimated in a thermodynamic way. This seems to provide one of the main advantages of the strain-confinement method in studying the radiative annihilation of the EM gas in comparison with the case of unstressed or uniformly stressed crystals where there is no potential well. On the other hand, it should be born in mind that the resulting gas distribution will depend on the shape of the potential well. In particular, eq. (16) used to estimate the EM binding energy is valid only for the case of a parabolic well. To our opinion, it remains an open question whether the shape of the potential well can be exactly determined from emission spectra, if the well is produced by nonuniform stress, as well as to what extent such a potential well may be regarded as uniform. The investigation of this problem is of undoubted interest.

> Excitonic molecules in silicon crystals with different degrees of degeneracies of the electron valleys; "hot" excitonic molecules

It is interesting to find out how the EM stability will be affected if the degeneracy of electronic valleys and their relative orientation in k space are changed. Such changes can be accomplished with the aid of uniform stress along various crystallographic axes. Remember that according to Bir and Pikus (1974) this does not lead to significant changes in the EM binding energy. In the case of a "cold" EM in Si(2–1) two electrons, in conformity with the Pauli principle, may either be in one valley X(100) (a state of the type XX), or in two lowest different valleys but lying on the same stress axis (a state of the type \overline{XX}). With the stress applied in other directions, e.g. along (110) or (111), as well as in unstressed Si crystals, the two electrons of the EM may belong to valleys with mutually perpendicular principal axes (states of the type XY). By analogy with the so-called D⁻ centers in Ge and Si considered by Gershenson et al. (1971) and Narita and Taniguchi (1976, 1977) one could assume that the binding energy for an excitonic molecule with XY electrons will be greater than for one with XX or $X\overline{X}$ electrons. This assumption is based on the expected reduction of the Coulomb repulsion of XY electrons due to the anisotropy of their effective masses.

With this purpose Kulakovskii and Timofeev (1980a) have investigated the emission spectra of "cold" EM in Si(2–1) and Si(4–1), as well as of "hot" molecules in Si(2–1). The "hot" biexciton discovered by Kaminskii and Pokrovskii (1979) implies a situation with one of the EM electrons in the upper split-off valley.

Figure 15 displays the emission spectrum of Si stressed along $\langle 100 \rangle$ at T = 2K and excitation density $n_{e,h} \approx 4 \times 10^{15}$ cm⁻³ in which the lines M of "cold" and M_h of "hot" biexcitons are distinctly seen. First of all, making use of the impact ionization method, it was examined whether these lines correspond to weakly bound states, because other radiative processes, e.g. exciton–exciton collisions and electron–hole plasma radiation, may contribute to the spectral region of interest. Figure 15 shows how the spectra are affected by the application of a constant electric field to heat the carriers. It is seen that the intensity of the biexciton line, M, decreases when a field $E \approx 10$ V/cm is applied, whereas the intensity of the exciton emission line, FE, increases (due to impact ionization of EM). The effect of the electric field is more pronounced in the case of "hot" excitons and "hot" EM, as the emission line of the latter disappears from the spectrum at smaller fields. This is due to the decrease of the inter-valley relaxation time as a result of carrier heating by the electric field. Thus these impact ionization experiments prove explicitly that the lines M and M_h correspond to weakly bound states.



Fig. 15. The emission spectra of "cold" and "hot" excitons (FE), excitonic molecules (M), and EHL of Si stressed along the $\langle 100 \rangle$ axis at excitation level $n \approx 4 \times 10^{15}$ cm⁻³ and T = 2 K. The dashed curve is measured with electric field $E \approx 10$ V/cm applied. (From Kulakovskii and Timofeev 1980a.)

A similar biexciton line M is found in the spectra of Si(4–1), too (fig. 16). However its intensity, under some other conditions, is approximately an order of magnitude less than in Si(2–1). This is due to the larger EHL binding energy in Si(4–1), as compared to Si(2–1). Consequently the density of the saturated e–h gas in these crystals is several times less than in Si(2–1). The intensity of this line increases quadratically with the FE intensity. The shape of this line coincides with the contour of the emission line of "cold" EM in Si(2–1) (shown by a dashed line in fig. 16).



Fig. 16. The TA-phonon assisted component of the emission spectrum of Si stressed along the $\langle 110 \rangle$ axis at 2 K. The "cold" EM emission line of Si(2–1) is shown by dashed line for comparison. (From Kulakovskii and Timofeev 1980a.)

A more detailed investigation has been carried out of the "hot" EM line M_h in Si stressed along $\langle 100 \rangle$. It appeared that the shape of the line M_h also coincides with the shape of the "cold" biexciton line M and its intensity is $I_h \propto I_{FE} \cdot I_{FE}^h$ (i.e. is proportional to the product of "cold" and "hot" FE intensities). It follows uniquely from this result that this line is due to recombination of the "hot" exciton in an EM consisting of one "cold" and one "hot" exciton.

Consider now the binding energies of biexcitons in three different cases: when the electronic states in the molecule are of the type XX or $X\overline{X}$ ("cold" EM in Si(2–1)), of the type XX, $X\overline{X}$ or X ("cold" EM in Si(4–1)) and, only of the type XY ("hot" EM in Si(2–1)). To determine the binding energy Kulakovskii and Timofeev (1980a) used eq. (12) relating the EM and FE densities, which is valid under the conditions of thermodynamic equilibrium in the gas phase. To compare the EM binding energies in Si(2–1) and Si(4–1) the intensity ratio I_{EM}/I_{FE} was compared in these crystals at equal FE emission-line intensities, measured in the same experimental geometry. In addition, equal diffusion depths of excitons in Si(2–1) and Si(4–1) were assumed. From such a comparison it was found that the EM binding energy in Si(4–1) is approximately 0.1 meV less than in Si(2–1).

It is easier to estimate the ratio of "hot" to "cold" EM binding energies in Si stressed along $\langle 100 \rangle$ because "hot" and "cold" excitons and biexcitons are excited within the same volume, then the diffusion length does not come into question in this case. For the ratio $R = I_{EM}^h I_{FE} / I_{FE}^h I_{EM}$ we have:

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{EM}^h}{m_{EM}} \right)^{3/2} \frac{g_{EM}^h}{g_{EM}} \left(\frac{g_{FE}}{g_{FE}^h} \right)^2 \exp \frac{\Delta_{EM}^h - \Delta_{EM}}{kT}.$$
 (17)

In Si(2–1), where there are two lower and four split-off electron ellipsoids, the statistical weights are $g_{FE} = 8$, $g_{FE}^h = 16$, $g_{EM} = 16$ and $g_{EM}^h = 32$. When the experimental values for the FE, FE^{*h*}, EM and EM^{*h*} line intensities were substituted into eq. (17), it was established that the binding energy of the EM with XY electronic states is 0.5 meV less than of those with XX or XX states. Thus it turned out unexpectedly that the EM binding energy in Si is insensitive to the degeneracy of the electron valleys, and, contrary to the existing belief, even shows a tendency to decrease in the case of mutually perpendicular orientation of the electron ellipsoids or when the number of the latter is increased.

It is extremely important to know the stability of the biexciton in unstressed Si(6–2). This is so, particularly in connection with the hope of discovering more complicated, free multiparticle complexes containing more than two e–h pairs. Wang and Kittel (1972) considered a multiparticle complex in a model semiconductor with large degeneracy of the electron and hole bands and with an infinite hole mass ($\sigma \rightarrow 0$). They found that in the case of eight-fold degeneracy eight-exciton complexes with a binding energy about $6Ry^{ex}$ should be highly stable. The model considered is remote from a real semiconducting structure. However, if we use the analogy with the multiparticle bound-exciton complex, the structure of which is well described within the framework of the shell model (Kirczenow 1977, Thewalt 1977, see also Ch. 10 of this volume) we may expect that in Ge and Si, where the valence band is four-fold degenerate, four-exciton complexes with electrons and holes in the singlet state will be stable. Note, that a three-exciton complex in these crystals will be unstable because 3 electrons (3 holes) cannot form a spin-singlet state.

Up to now, only Thewalt and Rostworowski (1978) have reported the observation of the biexciton emission line in unstressed Si(6–2) crystals. The EM binding energy was estimated in this paper at $\Delta_{\rm EM} \approx 1.3$ meV. As this estimate was based on the analysis of the spectrum shape and was not obtained by the thermodynamic method, it is rather difficult so far to say anything about its exactness. In addition, it was found in this paper that in Si(6–2) the EM to FE ratio of line intensities has a maximum value of $I_{\rm EM}/I_{\rm FE} \approx 1/20$, whereas from the data of Kulakovskii and Timofeev (1980a) it follows that at the same temperature (T = 2 K) even close to the EHL condensation threshold the background radiation in the region of the M line does not exceed 1/50 of $I_{\rm FE}$. Thus the problem of biexciton stability in Si(6–2) as well as the possibility, in principle, of the existence of more complicated free multiparticle complexes in these crystals needs further investigation.

7. Excitonic molecules in a magnetic field

By virtue of the small binding energy the excitonic molecules in semiconductors appear to provide a convenient model for experimental studies of molecular properties in magnetic field. For example, in the case of EM in Si(2–1) which is close to the model of positronium molecules, fields of the order of 80 kOe are sufficient to make the diamagnetic-shift energy δE_{dia}^{ex} of the free exciton and the paramagnetic-splitting energy $g_{e,h} \cdot \mu_B \cdot H$ of the electron and hole spin states in the exciton comparable to the EM binding energy. The same situation for the hydrogen molecule could be expected at astronomical magnetic fields of the order of 10⁵ kOe and 10⁷ kOe, respectively.

In this connection the problem arises of biexciton stability under the effect of such magnetic fields. It seemed, a priori, that the biexciton with its approximately equal effective masses m_e and m_h , and its loose formation compared with the hydrogen molecule, should have a magnetic susceptibility considerably greater than twice the exciton susceptibility. In fact, the mean interparticle distances $\langle r_{ee} \rangle$, $\langle r_{eh} \rangle$, $\langle r_{hh} \rangle$ in the EM calculated with the aid of the most convenient variational wave function for $m_e \approx m_h$ are of the order of $3a_{ex}$ (fig. 2). Therefore, by analogy with atoms, where according to Langevin the diamagnetic susceptibility is proportional to the square of the distance between the electron and the nucleus, it could be expected that $\chi_{EM} \sim 10\chi_{ex}$ where χ_{ex} is the diamagnetic susceptibility of the exciton. In this case it could appear that the stability of the EM decreases in magnetic field. On the other hand, the smallness of the EM binding energy as compared to the exciton Rydberg is an indication to the fact that the electron-hole correlations in the biexciton are of almost the same order as in the exciton and, consequently, χ_{FM} will not differ significantly from $2\chi_{ex}$.

The experimental observations of Edelstein et al. (1979b), Kulakovskii et al. (1979b) have shown that in Si(2–1) the EM emission line is present in the spectra up to magnetic fields $H \approx 100$ kOe, with the FE to EM intensity ratio almost unchanged. We first consider the diamagnetic properties of EM.

The Hamiltonian of the EM in magnetic field is

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}_1 \right)^2 + \left(\boldsymbol{P}_a - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}_a \right)^2 + \left(\boldsymbol{P}_2 - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}_2 \right)^2 + \left(\boldsymbol{P}_b - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}_b \right)^2 \right] + V_{\text{coul}}, \quad (18)$$

where \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 and \mathbf{r}_a , \mathbf{r}_b are the coordinates of electrons and holes, respectively, and $\mathbf{A}_r = \frac{1}{2}\mathbf{H}\mathbf{r}$. Here no account is taken of the interaction of spins with magnetic field, for it is assumed that this does not affect the orbital motion. Remember that in semiconductors with nondegenerate bands two electrons and two holes form spin singlets, in conformity with the Pauli principle. Further it will be always assumed that the Zeeman energies are much less than the Coulomb interaction energy.

The motion of the centre of gravity of the molecule can be separated from the internal motion by the method of Lamb (1952), namely, the operator of the EM total momentum (which is a motion integral) is written in the form:

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_a + \boldsymbol{P}_b + \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{c}} [\boldsymbol{A}_a + \boldsymbol{A}_b - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2].$$

If reduced coordinates,

$$z = r_{1} - r_{a}, \quad \zeta = r_{2} - r_{b}, \quad R = \frac{1}{2}(r_{1} + r_{2} - r_{a} - r_{b})$$

$$q = \frac{1}{4}(r_{1} + r_{2} + r_{a} + r_{b}), \quad (20)$$

are introduced, then the eigenfunction of the K operator corresponding to the eigenvalue K is given by

$$\phi_{\mathbf{K}} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{K} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_{z+\zeta}\right) q\right\} \psi_{\mathbf{K}}\left(\mathbf{R}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}\right).$$
(21)

Here ψ_{κ} , as was shown by Edelstein (1979a), is the eigenfunction of the Hamiltonian H_{κ} :

$$\hat{H}_{K} = \frac{K^{2}}{8m} + \frac{e}{mc} K A_{z+\zeta} + \hat{H}_{0} + \hat{H}_{1} + \hat{H}_{2}, \qquad (22)$$

where

$$\hat{H}_{0} = \frac{1}{2} \boldsymbol{P}_{R}^{2} + \frac{1}{m} (\boldsymbol{P}_{z}^{2} + \boldsymbol{P}_{\zeta}^{2}) + V_{Coul}$$

is the Hamiltonian of the molecule in the centre-of-gravity system with no magnetic field applied. Edelstein (1979a) has found that an energy-correction term proportional to the square of the magnetic field comes from \hat{H}_1 in the second order perturbation theory (van Vleck orbital paramagnetism) and from \hat{H}_2 in the first order perturbation theory (Langevin diamagnetism).

Consider first the contribution of \hat{H}_2 to the magnetic susceptibility χ_{EM} . It follows from the symmetry of the ψ function of the ground state \hat{H}_0 with respect to permutation of two electrons that the Langevin correction to the energy is given by,

$$\delta E_{EM}^{L} = \frac{e^{2}}{mc^{2}} \left[\frac{3}{4} \left(\left\langle A_{z}^{2} \right\rangle + \left\langle A_{\zeta}^{2} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \left\langle A_{z} A_{\zeta} \right\rangle \right].$$
(23)

It is interesting to compare δE_{EM}^L with the Langevin formula for the diamagnetic shift of the atom δE_{at}^L . We have

$$\delta E_{at}^{L} = \frac{e^2}{8c^2} \sum_{i} \frac{\left\langle 0 \left[\left[Hr_i \right] \right] 0 \right\rangle}{m_i}, \tag{24}$$

where $|0\rangle$ is the ground state vector of the atom. It is seen that δE_{EM}^{L} does not reduce to the mean square of some distance, as happens in the case of atoms. The calculation of integrals in eq. (23) using the variational function suggested by Brinkman et al. (1973) yields

$$\delta E_{EM}^{L} = 11.4 \frac{e^2}{6mc^2} H^2 a_{ex}^2.$$
(25)

As is known the diamagnetic energy-shift for one exciton is

$$\delta E_{ex}^{dia} = 3 \frac{e^2}{6mc^2} H^2 a_{ex}^2.$$
 (26)

The van Vleck paramagnetic shift is $\delta E^{VV} < 0$. Hence for the EM to FE ratio of magnetic susceptibilities we obtain the inequality

$$\chi_{EM}/2\chi_{ex} < 1.9.$$
 (27)

Thus it appears that the EM diamagnetic susceptibility calculated by Edelstein (1979) is not very far from twice the FE susceptibility, although the used variational function did not contain explicitly the wave functions of the two excitons. It should be born in mind that the accuracy of eq. (27) corresponds to that of the trial wave function.

The diamagnetic properties of the EM were investigated experimentally by Kulakovskii et al. (1979b). Since the excitonic state is the final state of EM radiative decay the properties of excitons in magnetic field were simultaneously studied. From the Zeeman splitting the g factors of the electron and hole were determined. In the case of holes this factor, as expected, was found to be anisotropic. In addition, the susceptibility of the exciton was estimated from the magnitude of the diamagnetic spectral shift. It appeared that the diamagnetic shift of the exciton, δE_{ex}^{dia} , is anisotropic too. This is mainly due to the strong anisotropy of the electron effective mass (in Si(2–1) $m_{h\parallel} \approx 0.8 m_{h\perp}$, whereas $m_{e\parallel} \approx 5 m_{e\perp}$). It was possible to follow the anisotropy of the diamagnetic shift for the geometry $H||p|| \langle 100 \rangle$ in the case of "cold" and "hot" excitons which have electron ellipsoids with the long axis parallel or perpendicular to the magnetic field respectively. If we use the relation $\chi = H^{-1} \partial E / \partial H$ for the diamagnetic susceptibility, then from the experimentally observed diamagnetic shifts we obtain for the "cold" exciton $\chi_c \approx 2.8 \times 10^{-25} \text{ erg/Oe}^2$ and for the "hot" exciton $\chi_h \approx 1.3 \times 10^{-25} \text{ erg/Oe}^2$. These values may be compared to the diamagnetic susceptibility of the hydrogen atom $\chi_{\mu} = 1.3 \times 10^{-30} \text{ erg/Oe}^2$.

Since Si(2-1) has two equivalent valleys in the conduction band the formation is possible of biexcitons with the total spin 0 and 1. Therefore the lowest EM state is split by the magnetic field into a triplet,

$$E_{S_z,0}^{EM}(H) = E^{EM}(0) + \frac{1}{2}g_e S_z \mu_B H + \delta E_{EM}^{dia}, \qquad (28)$$

where $S_z = S_{z_1} + S_{z_2} = 0, \pm 1$. In a magnetic field the energy of an exciton with electron and hole spins S_z and j_z , respectively, is

$$E_{S_z,j_z}^{ex}(H) = E^{ex}(0) + (g_e S_z + g_h j_z) \mu_B H + \delta E_{ex}^{dia}.$$
(29)

Hence for the EM binding energy in a magnetic field *H* we obtain

$$\Delta_{EM}(H) = 2E_{-1/2,-1/2}^{ex} - E_{-1,0}^{EM} = \Delta_{EM}(0) - g_h \mu_B H + 2\delta E_{ex}^{dia} - \delta E_{EM}^{dia}.$$
 (30)

Besides, for uniaxially stressed Si(2–1) crystals it should be taken into account that the spin-relaxation times are comparable with the exciton lifetime (Kula-kovskii et al. 1979a). Therefore, even when the paramagnetic splitting $g\mu_{\rm B}H \approx 3kT$ the population of different spin states is of the same order. Because of this, in Si(2–1) with magnetic field applied they are lower in energy.



Fig. 17. Emission spectra of excitons and excitonic molecules in Si(2–1) at T = 2 K without (1) and with (2), (3) magnetic field H = 8 T (Voigt configuration). (2) $H \perp E$, (3) $H \parallel E$. The right side figure shows the optical transitions between split excitonic molecule levels and exciton levels when magnetic field is applied. (From Kulakovskii et al. 1979b.)

Those biexciton states in which the holes form a spin singlet are lowered in energy. Then the EM binding energy is given by the expression

$$\Delta_{EM}(H) = -\left(E_{S_{z_1}+S_{z_2},0}^{EM} - E_{S_{z_1},1/2}^{ex} - E_{S_{z_1},-1/2}^{ex}\right) = \Delta_{EM}(0) + 2\delta E_{ex}^{dia} - 2\delta E_{EM}^{dia}.$$
 (31)

The FE and EM emission spectrum of Si(2–1) in a field of about $H \approx 80$ kOe is shown in fig. 17 together with the scheme of expected transitions. In a magnetic field the emission lines are strongly broadened, so that it is not possible to resolve the structure of separate Zeeman components. Therefore the change of the EM binding energy in the magnetic field can be estimated only from the change of the I_{EM} to I_{ex} ratio of integrated intensities under the assumption of quasi-equilibrium between excitons and biexcitons, $I_{EM}/I_{ex} \propto \exp(\Delta_{EM}/kT)$. Examining this ratio over the whole range $H \lesssim 80$ kOe both for $\overline{H} || \overline{p} || \langle 100 \rangle$ and for $\overline{H} \perp \overline{p} || \langle 100 \rangle$ it was found that the EM diamagnetic shift does not exceed 3 excitonic shifts, in agreement with the above calculation. This experimental upper limit of the EM to FE ratio of susceptibilities is a direct indication of very strong electron–hole correlations in the biexciton, analogous to the positronium molecule.

It is interesting to mention the case of a biexciton in extremely strong magnetic field when the contribution to the ground state energy caused by the magnetic field is much greater than the energy of Coulomb interaction. The stability of the EM in such magnetic fields, according to the theoretical analysis of Chui (1974) should increase as $\ln^2 H$. In this limit of magnetic field the electron and hole spins are aligned parallel to the field and both equal to 1. EM with such a spin orientation are completely unstable at H = 0. We note, in this connection, that the experimental data of Kulakovskii et al. (1979b) do not exclude a monotonic increase of the EM binding energy in Si(2–1) with increasing magnetic field.

8. Excitonic trions

By analogy with the localized states D^- and A^+ in semiconductors one can suppose that at low temperatures stable, three-particle complexes or trions may be present in the nonequilibrium e–h gas, namely, FE ions $X^-(e_2h)$ and EM ions $X_2^+(eh_2)$. These complexes can be regarded as bound states of an exciton with an electron or a hole. The idea of such complexes was proposed by Lampert (1958) who predicted their stability from the analogy with the ions of hydrogen atom and molecule, H^- and H_2^+ .

Munschy and Stebe (1974, 1975) and Insepov and Norman (1975) have carried out a variational calculation of the trion binding energy. An isotropic model was used for the calculation with no account for spin states and band degeneracy. The stability of trions was investigated as a function of the mass–ratio parameter $\sigma = m_e/m_h$ ($0 \le \sigma \le 1$). It follows from variational calculations, the result of which is presented in fig. 18 that the trions (e_2h) and (eh_2) should be stable at any σ . The calculations did not invoke band degeneracy, anisotropy of the effective mass spectrum and interaction of spin states. If these effects were taken into account the dependence $\Delta_{\rm T}(\sigma)$ could be modified, however this would hardly change the main result already obtained, namely, that $\Delta_{\rm T} > 0$, $\partial^2 \Delta_{\rm T} / \partial \sigma^2 > 0$ over the entire range $\sigma \in [0, \infty]$.

Up to now two reports are known where the model of excitonic trions has been used to interpret some of the observed peculiarities connected with the high-density e-h gas, in the emission spectra of Ge (Thomas and Rice 1977) and in the cyclotron-resonance spectra of uniaxially stressed Si (Kawabata et al. 1977).

First we consider the features to be expected in the emission spectra of trions. It can be affirmed a priori that the emission spectrum of trions in indirect gap semiconductors, as in the biexciton case, must have a finite width even when the complex is at rest, i.e. as $T \rightarrow 0$. This is due to the fact that in an indirect optical transition a part of the trion energy will be consumed in imparting kinetic energy to the "recoil" particle, namely, to the electron in the case of a (e_2h) complex, and to the hole in the case of (eh_2) . Compared to the EM emission line, the emission band of (e_2h) or (eh_2) trions should be broader by a factor $(1 + m_e/m_h)$ or

 $(1 + m_h/m_e)$, respectively (see eq. (6)). Therefore the full width of the trion emission spectrum is much greater than its binding energy (in Ge and Si more than by an order of magnitude). As to the line shape of the trion spectrum, this, apparently, should not differ considerably from that of the biexciton line, especially in its low-energy part which corresponds to large transfer momenta. The main obstacle for the experimental detection of trions from emission spectra consists in the fact that the spectral positions of the trion and EM emissions are very close. Furthermore, the partial fraction of trions in the nonequilibrium e-h gas is less than that of biexcitons because of the smaller binding energy. This additionally hampers the extraction of the trion contribution from the resulting spectrum.



Fig. 18. The binding energy of the trions (e_2h) (1) and (eh_2) (2) in units of the exciton Rydberg for different electron-to-hole mass ratios. The solid lines are calculated by Insepov and Norman (1975), the dashed lines by Stebe and Munschy (1975).

Thomas and Rice (1977) and Thomas et al. (1978) have studied the emission spectra of indirect excitons in Ge at temperatures above the critical temperature of condensation into EHL ($T > T_c$). With increasing density of the e–h gas they observed a broadening of the exciton-phonon emission spectrum (the TA component) towards lower energies. The authors attribute this low-energy tail to trions with a small fraction of biexcitons; the partial fraction of these increases with increasing density. However, the EM and trion contributions to the resulting spectrum could not be separated; moreover, it was not possible to isolate the trion emission from the exciton band, in contrast to the situation in uniaxially stressed silicon. It should be born in mind that at densities exceeding the density

of the exciton-plasma transition the emission from the electron-hole plasma sets in just in the spectral region where EM and trion emission is expected. Zhidkov and Pokrovskii (1979) have used the method of impact ionization of weakly bound states (of the biexciton type) and find that the observed broadening (or the low-energy tail) of the spectrum in uniaxially stressed Ge could be caused by EHP emission rather than by EM or trions. Thus, there have yet to be reliable observations of trion emission by means of optical spectroscopy.

Now consider attempts to detect trions in the cyclotron-resonance (CR) absorption spectra. Since the trion is a free charged complex the application of an external magnetic field leads to its cyclotron motion. The complex will move as a whole around the magnetic field direction if the Zeeman energy of the complex is much less than its binding energy. It is reasonable in this connection to use lower cyclotron frequencies without violating, however, the general condition $\omega_c \tau \gg 1$ necessary for CR observations.

Kawabata et al. (1977) studied CR in the high-density nonequilibrium e-h gas in uniaxially stressed Si crystals. The uniaxial stress was applied along the direction of the external magnetic field in order to simplify the expected picture of the CR spectrum for excitonic ions. In addition, under the conditions of uniaxial stress it was possible to avoid the complications arising from the condensation into EHL. The measurements were performed in the Voigt configuration. Figure 19(a), (b), (c) displays the CR spectra measured in Si(2-1), Si(4-1) and Si(6-1) at T = 1.7 K and high excitation levels. In all stress configurations two new resonance absorption peaks are observed (denoted by the indices X_1 and X_2) which are found in the region of stronger magnetic fields as compared to the canonical CR spectrum of free electrons and holes (the lines e and h in the figure). These new peaks disappear from the spectra at T = 4.2 K and their intensity grows more rapidly with increasing excitation level then the intensity of the lines e and h. If the peaks X_1 and X_2 are associated with the cyclotron resonance absorption of the e_2h and eh_2 trions, then it is possible from their positions in the spectrum to determine the cyclotron masses of the trions and to compare them with the expected values, $(2m_e + m_h)$ and $(m_e + 2m_h)$ respectively. It appears that in all stress configurations the cyclotron masses of the supposed complexes $e_{h}h$ and eh_{h} found from CR spectra are approximately by 15-20% larger than expected. One of the possible origins of this discrepancy (Kawabata et al. 1977) is the fact that the excitonic states $M_i = \pm 1/2$ and $M_i = \pm 3/2$ remain mixed under relatively small uniaxial stresses used.

Here attention should be called to two circumstances which so far preclude the possibility of unique interpretation of the new peaks detected in the CR spectra of uniaxially stressed Si within the framework of the excitonic-ion model. The first circumstance is the spin resonance of free excitons which could be expected in the same spectral region. Secondly, for not very large uniaxial stresses and under intense optical pumping the cyclotron resonance of "hot" holes in both split-off bands may be observed (Kulakovskii et al. 1980b). Due to the interaction between the split-off bands the dispersion law E(k) for the holes strongly deviates from quadratic in an energy range of the order of the stress splitting. Therefore the CR spectrum of "hot" holes in the split-off bands differs from that of holes in the points of zero slope. It should be stressed, however, that despite the above apprehensions the investigation of CR spectra seems to be one of the most promising methods for the search and study of free charged multiparticle complexes in semiconductors.



Fig. 19. The cyclotron resonance absorption spectra of stressed Si at 0.7 K under light excitation in three different configurations of stress (a), (b), (c). In this spectra, e and h denote the cyclotron resonance of free electron and the split band hole. (From Kawabata et al., 1977.)

9. Gas of excitons and excitonic molecules along the equilibrium boundary with electron-hole liquid

In the indirect gap semiconductors Ge and Si, the exciton gas at low temperatures and sufficiently high densities may condense into EHL (Keldysh 1968). This condensation phenomenon is a phase transition of the first kind. The region of coexistence of the gas and liquid phases in the nonequilibrium e–h system is determined by the phase diagram and is usually described in coordinates n, T. From the experimental point of view the gas–EHL phase diagrams have been most thoroughly investigated in germanium (Thomas et al. 1974a, b, 1978) and in silicon (Shah et al. 1977 and Dite et al. 1977). By now the properties of the EHL itself are well known and it has been established that up to the critical region it can be described as a two-component Fermi liquid (Rice 1977, Hensel et al. 1978).

The interest of the phenomenon of condensation of a dielectric exciton gas into a metallic EHL becomes still greater in connection with the problem of the metal–insulator transition. It should be recalled that, taking mercury as an example, Landau and Zeldovitch (1943) have discussed the possibility, in principle, of the separate occurrence of two phase transitions, namely, gas–liquid and metal–insulator in a single system, and of two critical regions corresponding to these transitions. However hitherto these two transitions have not been observed separately in the same system.

The nonequilibrium e-h system in a semiconductor at low temperatures may be considered as a convenient model for studying this problem. It was expected, on the basis of critical-density estimates, that in such a system the two-phase transitions might occur separately (Rice 1974). The possibility of two critical points existing on the gas–EHL phase diagram was discussed theoretically in the papers by Insepov et al. (1972, 1976), Rice (1974), Sander (1976), Ebeling et al. (1976) and Thomas (1977). Here two criteria can be pointed out, which are used to estimate the critical density $n_c(r_s^c)$ corresponding to the ionization collapse of excitons, when the dielectric gas of excitons transforms into a completely ionized e-h plasma (exciton–plasma (E–P) transition). One of the criteria (known as Mott criterion) is based on the numerical solution of a two-particle Schrödinger equation with a statically screened Coulomb potential $V(r) = (e^2/\kappa r) \exp(-r/r_0)$ and establishes that the FE binding energy vanishes at

$$r_0(\overline{n}) \approx 0.84a_{ex},\tag{32}$$

where $r_0(\overline{n})$ is the static screening radius.

Approximately the same result was obtained recently by Zimmermann et al. (1978) who took into account the effects of dynamic screening of Coulomb interaction. In a model semiconductor with simple bands and isotropic and equal effective masses $m_e = m_h$, according to such a criterion of plasma screening, the E–P transition at T = 0 K occurs at critical densities corresponding to $r_s^{ep} = 6.8$ (Sander and Fairobent, 1976). This density is more than two orders of magnitude less than the critical-density value for the gas–EHL phase transition ($r_s^0 \sim 1$). Note that in the case of mercury and other liquid metals the critical-density estimates for the transitions metal-insulator and gas–liquid are of the same order of magnitude (Mott 1974). Within the framework of the other approach the critical density of the E–P transition is estimated from the "collapse", due to dielectric screening of Coulomb interaction of the energy gap in the spectrum of one-particle collective excitations in the high-density exciton system (Bisti and Silin, 1978). In this approximation the excitons remain stable at larger densities, up to $r_s^{cd} \approx 1.8$, i.e. until the wave functions overlap. It remained an open question which of these criteria is appropriate to the experiment in the case of an e–h system in a semiconductor and whether the E–P transition will have the character of a phase transition and show peculiarities along the gas–liquid phase boundary.

The most convenient object for the experimental investigation of the problems appeared to be Si crystals uniaxially stressed along the axis (100), Si(2–1). As has already been pointed out in sect. 3, the gas-EHL phase boundary is shifted towards higher densities by more than an order of magnitude as compared to unstressed Si crystals. As a result of this at low temperatures the FE and EM concentrations in such a dense e-h gas are of the same order of magnitude. This enabled Kulakovskii et al. (1980c), by measuring the radiative recombination spectra and photoconductivity, to follow experimentally the partial composition of the gas phase (excitons, biexcitons, free electrons and holes) in Si(2-1) up to densities corresponding to $r_s \approx 2$ to 2.5. The composition of the gas phase was analyzed along the equilibrium boundary. The density n_{a} of saturated vapours of the gas phase, at which condensation into EHL occurred, was determined from threshold measurements of the FE and EHL line intensities. The absolute values of n_{a} were estimated with the aid of special calibrational measurements of \overline{n}_{eb} with accuracy to a factor of 2. In determining the FE and EM concentrations from the intensity ratio of their lines it was taken into account that the EM to FE ratio of radiative probabilities calculated with the use of the variational function of Brinkman et al. (1973) is equal to 2.3. Also, the free carrier concentration was estimated independently by means of photoconductivity measurements.

Kulakovskii et al. (1980c) have established that with increasing density up to $r_s \approx (2.7 \pm 0.3)$ and T = 12.5 K the gas phase consists mainly of FE and EM, the fraction of free carriers (and, apparently, of trions) being more than an order of magnitude smaller. The partial composition of the gas phase in Si(2–1) is seen from fig. 20, which shows the gas–EHL phase diagram.

The E–P transition in Si(2–1) was studied by investigating the smoothing of the FE and EM discrete spectra into the structureless spectrum of the e–h plasma at higher excitation levels and at temperatures $T > T_c$. No critical density n_c of the E–P transition was seen, but a gradual change over the range T = 13 to 21 K with densities $n_c = (1.5 - 3) \times 10^{17}$ cm⁻³ ($r_s = 2 - 2.5$). Thus, in Si(2–1) the E–P change-over occurs close to the critical region of the gas–EHL transition (in fig. 20 the critical region is shaded). It was possible to observe the E–P transition in Si(2–1) at lower temperatures (approximately half) than in Si(6–2) (Dite et al. 1977) because of considerably higher gas-phase densities which can be realized in these crystals. We recall that on the basis of the plasma-screening model the ionizational breakup of excitons was expected to occur abruptly and to be accompanied by a splitting of the excited volume into regions occupied by weakly and highly ionized exciton gas (Insepov et al. 1972, 1976, Ebeling et al. 1976). However in Si(2–1), as well as in Si(6–2) (Shah et al. 1977, Dite et al. 1977), and in Ge(4–2) (Thomas 1978) the observed transformation of the discrete excitonic spectrum into a plasma one is smooth (diffuse) and does not exhibit features characteristic of a first order phase transition.



Fig. 20. Gas–liquid phase diagram for Si(2–1). ((\bullet) density of EHL, (\odot) onset density of the gas phase, (\Box) excitons, (\odot) excitonic molecule, (\diamond) free carriers). The critical region is dashed. Curve (1) corresponds to the equilibrium density of the exciton gas at the phase boundary and (2) is the line calculated for the Mott transition. The region of exciton-plasma transformation is shown by the short horizontal lines at $T \gtrsim T_c$. Arrows indicate the magnitude of the critical density of the exciton-plasma transition calculated in terms of plasma – (r_s^{cp}), and dielectric – (r_s^{cd}) screening of Coulomb interaction. (From Kulakovskii et al. 1980c.)

Thus, the above analysis of the partial composition of the e-h gas along the phase boundary with the EHL shows that the excitonic (and molecular) states in

Si(2–1) retain their individuality up to densities corresponding to $r_s \approx 2.5$. It is interesting to compare these experimental observations with the existing estimates for the E–P transition. According to the Mott criterion (eq. 32) based on the plasma-screening approach the critical density n_{cp} of the E–P transition in Si(2–1) at T = 0 K corresponds to $r_s^{cp} \approx 10$ (indicated by an arrow in fig. 20). It is seen that at $T \rightarrow 0$ K this value of the critical density is just within the two-phase region, i.e., the E–P transition is preceded by the condensation of the exciton gas into EHL. With increasing temperature the effectiveness of the screening decreases, and the critical values n_{cp} are shifted to higher densities. It is easy to calculate the line of the Mott transition for Si(2–1) in the temperature range of interest (2–20 K) using formula (32) and the following expression for the static screening radius,

$$r_{scr}^{-2} = \sum_{e,h} \frac{e^2 \left(m_{e,h}\right)^{3/2} \left(2kT\right)^{1/2}}{\kappa \pi \hbar^3} F_{-1/2} \left(E_{e,h}^F / kT\right),\tag{33}$$

which is valid for arbitrary degeneracy of the electron and hole gas. In eq. (33) $F_{-1/2}(E_{e,h}^F/kT)$ is the Fermi integral. The calculated Mott density is shown in fig. 20 (curve 2). It is seen that at $T \approx 8$ K the threshold density of the e-h gas consisting mainly of FE and EM considerably exceeds the critical density of the E-P transition calculated from the Mott criterion. It means that the plasma-screening approximation is inadequate for the state in this region. This is not surprising since the critical-density values obtained in this approximation fall into the region where the e-h gas cannot be regarded as weakly interacting. It is quite natural to expect that at such densities and temperatures its state should be considerably affected by electron-hole correlations which are not taken into account within the plasma-screening approach. Of great interest, in this connection, are the estimates obtained by Bisti and Silin (1978) in the approximation of dielectric screening of Coulomb interaction. It was found that the dielectric gap in the spectrum of one-particle excitations of the exciton system becomes vanishingly small at $r_c^{cd} \approx 1.8$ which is close to the experimental data (shown by an arrow in fig. 20). In connection it should be noted that in direct gap semiconductors the discrete excitonic structure is smoothed out and practically disappears at densities corresponding to $r_s \approx 2$ (Frova et al. 1977, Lysenko and Revenko 1978).

The gas–EHL phase diagram in Ge was studied recently by Thomas et al. (1978) with the purpose of considering the possible existence of two critical regions, namely, gas–liquid and metal-insulator. The authors have carried out spectroscopic measurements on the gas side of the phase boundary but did not find evidence for a metal-insulator phase transition separate from the gas–liquid transition. However, they did find that the shape of the phase boundary near the critical region deviates from that observed in the case of simple fluids. Thomas et al. (1978) refer to these deviations as a "Mott distortion" of the phase diagram believing that the gradual ionization of the dielectric FE and EM gas affects the shape of the phase diagram. As to the partial composition of the gas phase, this

remains an open question in the case of Ge since for the time being there are no reliable observations of excitonic molecules and trions along the equilibrium boundary with the liquid in these crystals.

10. Conclusion

Thus, we have seen that in the class of indirect gap semiconductors the subject of most comprehensive studies has been up to now the four-particle complex, or the excitonic molecule in uniaxially stressed silicon crystals. Since the average masses of electrons and holes in Si(2-1) are close to each other the discovery of excitonic molecules in these crystals may be regarded as experimental evidence for the stability of a free complex analogous in structure to the positronium molecule. By virtue of its long electron-hole recombination times Si(2-1) appears, at present, to be most convenient for the search for Bose–Einstein condensation of the EM gas, since the main question here is whether it is possible, in principle, to cool the saturated EM gas at sufficiently high density down to the critical temperature corresponding to such a phase transition.

There are a number of other problems related to the subject of the present review which still wait for their solution. Among these we may mention the problem of the binding energy of four-exciton complexes in indirect gap semiconductors like Si and Ge. So far no reliable variational calculations of the binding energy of such complicated electron-hole structures are known, they are only expected by analogy with bound multi-exciton complexes. Nor is the effect of effective-mass anisotropy and complicated band structure on the stability of free complexes known. For example, it may be expected that, compared to the isotropic model, the stability of the complexes will be greater in semiconducting structures with strong and approximately equal anisotropy of electron and hole effective masses when the directions of the principal axes of the electron and hole ellipsoids coincide. Finally, of a certain interest is the problem of stability of multiparticle complexes in polar indirect gap semiconductors because their binding energy may be considerably modified by the strong interaction with optical phonons.

Acknowledgements

The author wishes to express his sincere gratitude to his colleagues Dr. A.F. Dite, Dr. V.M. Edelstein and Dr. V.D. Kulakovskii for their discussions. Thanks are also due to Prof. E.I. Rashba for a careful reading of the manuscript and some useful comments.

REFERENCES

- 1. Adamowski, J. Binding energy of the biexcitons / J. Adamowski, S. Bednarek, M. Suffczynski // Solid State Communications. – 1971. – Vol. 23. – P. 2037–2038.
- 2. Akimoto, O. Binding energy of the excitonic molecule / O. Akimoto, E. Hanamura // Solid State Communications. 1972a. Vol. 10, Iss. 3. P. 253–255.
- 3. Akimoto, O. Excitonic molecule. I. Calculation of the binding energy / O. Akimoto, E. Hanamura // Journal of the Physical Society of Japan. 1972b. Vol. 33, Iss. 6. P. 1537–1544.
- 4. Bagaev, V.S. Motion of electron-hole drops in germanium / V.S. Bagaev et al. // JETP Letters. 1969. Vol. 10, Iss. 7. P. 195–198. (in Russian)
- Bednarek, S. Binding energy of exciton complexes in anisotropic semiconductors / S. Bednarek, J. Adamowski, M. Suffczynski // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1978. – Vol. 11, Iss. 22. – P. 4515–4522.
- 6. Benoit à la Guillaume, C. Condensation of free excitons into electron-hole drops in pure germanium / C. Benoit à la Guillaume, M. Voos, F. Salvan // Physical Review B. – 1972. – Vol. 5, Iss. 8. – P. 3079–3087.
- 7. Bir, G.L. / G.L. Bir, G.E. Pikus // Symmetry and strain-induced effects in semiconductors. – Jerusalem : Keter Publ. House, 1974. – Ch. 7.
- 8. Bisti, V.E. Exciton-plasma transition in semiconductors / V.E. Bisti, A.P. Silin // Solid State Physics. 1978. Vol. 20, Iss. 6. –P. 1850–1855. (in Russian)
- 9. Brinkman, W.F. The excitonic molecule / W.F. Brinkman, T.M. Rice, B. Bell // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 1570–1580.
- 10. Cho, K. Emission line shapes of exciton molecules in direct and indirect gap materials // Optics Communications. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 412–416.
- 11. Chui, S.T. «Excitonic» matter in a superstrong magnetic field // Physical Review B. 1974. Vol. 8, № 9. P. 3438–3446.
- Dite, A.F. Gas-liquid phase diagram in a nonequilibrium electron-hole system in silicon / A.F. Dite, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Soviet Physics JETP. – 1977. – Vol. 45, Iss. 3. – P. 604–612.
- Ebeling, W. Theory of bound states and ionization equilibrium in plasmas and solids / W. Ebeling, W. Kraeft, D. Kremp // Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gaselectronik, Vol. 5 / ed. by R. Rompe, M. Steenback. – Berlin : Akademie-Verlag, 1976. – Ch. 5.
- 14. Edelshtein, V.M. Diamagnetic susceptibility of excitonic molecules // Soviet Physics JETP. 1979a. Vol. 50, Iss. 2. P. 384–386.
- Edelstein, V.M. Electron-hole liquid and free exciton and biexciton gas in uniaxially stressed Si / V.M. Edelshtein, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, 1978 / ed. by B.L.H. Wilson – Edinburgh, 1979b. – P. 383–386.
- Elliott, R.J. Intensity of optical absorption by excitons // Physical Review. 1957. Vol. 108, Iss. 6. – P. 1384–1389.
- Forney, J.J. Binding energy of excitonic molecules / J.J. Forney, A. Baldereschi // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, 1978 / ed. by B.L.H. Wilson Edinburgh, 1979. P. 635–638.
- Frova, A. The electron-hole system in GaSe at high densities / A. Frova et al. // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 45–48.
- Gershenzon, E.I. Binding energy of a carrier with a neutral impurity atom in germanium and in silicon / E.I. Gershenzon, G.N. Gol'tsman, A.P. Mel'nikov // JETP Letters. – 1971. – Vol. 14, Iss. 5. – P. 281–283.
- 20. Gogolin, A.A. Effect of exciton interaction on exciton spectra / A.A. Gogolin, E.I. Rashba // JETP Letters. 1973. Vol. 17, Iss. 12. P. 690–693.

- Gourley, P.L. Spatial condensation of strain-confined excitons and excitonic molecules into an electron-hole liquid in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 40, Iss. 8. – P. 526–530.
- 22. Gourley, P.L. Thermodynamics of excitonic molecules in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review B. 1979. Vol. 20, Iss. 8. P. 3319–3327.
- Hanamura, E. Giant two-photon absorption due to excitonic molecule // Solid State Communications. – 1973. – Vol. 12, Iss. 9. – P. 951–953.
- 24. Hanamura, E. Condensation effects of excitons / E. Hanamura, H. Haug // Physics Reports. 1977. Vol. 33, Iss. 4. P. 209–284.
- Haynes, J.R. Experimental proof of the existence of a new electronic complex in silicon // Physical Review Letters. – 1960. – Vol. 4, Iss. 7. – P. 361–363.
- Haynes, J.R. Experimental observation of the excitonic molecule // Physical Review Letters. – 1966. – Vol. 17, Iss. 16. – P. 860–862.
- 27. Hensel, J.C. The electron-hole liquid in semiconductors: experimental aspects / J.C. Hensel, T.G. Phillips, G.A. Thomas // Solid State Physics. 1978. Vol. 32. P. 87–314.
- 28. Huang, W.-T. Binding energy of excitonic molecules in isotropic semiconductors // Physica Status Solidi (b). 1973. Vol. 60, Iss. 1. P. 309–317.
- 29. Hylleraas, E.A. Binding energy of the positronium molecule / E.A. Hylleraas, A. Ore // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 8. P. 493–496.
- Insepov, Z.A. Exciton and plasma phase transitions in semiconductors of the Ge type / Z.A. Insepov, G.E. Norman // Soviet Physics JETP. – 1972. – Vol. 35, Iss. 6. – P. 1198–1201.
- Insepov, Z.A. Three-particle charged electron-hole complexes in semiconductors / Z.A. Insepov, G.E. Norman // Soviet Physics JETP. – 1975. – Vol. 42, Iss. 4. – P. 674–675.
- 32. Insepov, Z.A. Plasma model of an exciton gas in a semiconductor / Z.A. Insepov, G.E. Norman, L.Y. Shurova // Soviet Physics JETP. – 1976. – Vol. 44, Iss. 5. – P. 1028– 1032.
- 33. Inui, T. A contribution to the theory of the hydrogen molecule / Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1938. Vol. 20, № 9. P. 770–779.
- 34. Inui, T. Further contribution to the theory of hydrogen molecule / Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1941. Vol. 23, № 12. P. 992–999.
- 35. James, H.M. The ground state of the hydrogen molecule / H.M. James, A.S. Coolidge // The Journal of Chemical Physics. – 1933. – Vol. 1, № 12. – P. 825–835.
- 36. Kaminskii, A.S. Polarization of recombination radiation of multiparticle exciton-impurity complexes in silicon under uniaxial deformation / A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // Soviet Physics JETP. – 1979. – Vol. 49, № 5. – P. 878–884.
- Kawabata, T. Observation of cyclotron resonance absorptions due to excitonic ion and excitonic molecule ion in silicon / T. Kawabata, K. Muro, S. Narita // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 4. – P. 267–270.
- Keldysh, L.V. Concluding remarks // Proceedings of the 9th International Conference on the Physics of Semiconductors. – Leningrad : Nauka, 1968. – P. 1303–1310.
- 39. Keldysh, L.V. Collective properties of excitons in semiconductors // Excitons in semiconductors / ed. by B.M. Vul. – Moscow : Nauka, 1971. – P. 5–19. (in Russian)
- 40. Kirczenow, G. A new model for bound multiexciton complexes // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 21, Iss. 8. – P. 713–715.
- Kukushkin, I.V. Radiation of exciton molecules in uniaxially compressed germanium / I.V. Kukushkin, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. – 1980. – Vol. 32, Iss. 4. – P. 280–284.
- 42. Kulakovskii, V.D. Biexcitons in the emission spectrum of uniaxially deformed silicon / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1977. Vol. 25, Iss. 10. P. 458–461.
- Kulakovskii, V.D. Electron-hole liquid and exciton and biexciton gas in elastically deformed silicon crystals / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev, V.M. Edel'shtein // Soviet Physics JETP. – 1978. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 193–199.

- Kulakovskii, V.D. Multiparticle exciton-impurity complexes in silicon in a magnetic field / V.D. Kulakovskii, A.V. Malyavkin, V.B. Timofeev // Soviet Physics JETP. – 1979a. – Vol. 49, Iss. 1. – P. 139–146.
- 45. Kulakovskii, V.D. Diamagnetism of excitons and excitonic molecules in silicon / V.D. Kulakovskii, A.V. Malyavkin, V.B. Timofeev // Soviet Physics JETP. – 1979b. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 380-384.
- 46. Kulakovskii, V.D. The excitonic molecule emission in the uniaxially stressed Si with the different electron valley degeneracy / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Solid State Communications. 1980a. Vol. 33, Iss. 12. P. 1187–1189.
- Kulakovskii, V.D. Cyclotron resonance of hot holes heated by a SHF field in uniaxially deformed Ge / V.D. Kulakovskii, V.A. Tulin, V.B. Timofeev // JETP Letters. – 1980b. – Vol. 31, Iss. 1. – P. 20–23.
- Kulakovskii, V.D. Partial composition of a dense electron-hole system and excitonplasma transition in uniaxially stressed silicon / V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin, V.B. Timofeev // Soviet Physics JETP. – 1980c. – Vol. 51, Iss. 1. – P. 191–198.
- Lamb, W.E. Fine structure of the hydrogen atom. III // Physical Review. 1952. Vol. 85, Iss. 2. – P. 259–276.
- Lampert, M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. – 1958. – Vol. 1, Iss. 12. – P. 450–453.
- 51. Landau, L.D. On the relation of the liquid to gaseous state at metals / L.D. Landau, J.B. Zeldovich // Acta Phys.-Chim. USSR. – 1943. – Vol. 18. – P. 194.
- 52. Lysenko, V.G. Exciton spectrum of a high-density gas of nonequilibrium carriers in CdS crystals / V.G. Lysenko, V.I. Revenko // Solid State Physics. 1978. Vol. 20, Iss. 7. P. 1238–1240. (in Russian)
- 53. Moskalenko, S.A. The theory of Mott exciton in alkali halide crystals // Optics and Spectroscopy. 1958. Vol. 5, Iss. 2. P. 147–155. (in Russian)
- 54. Mott, N.F. Electrons in disordered structures // Advances in Physics. 1967. Vol. 16, Iss. 61. P. 49–144.
- 55. Mott, N.F. Metal-insulator transitions. London : Taylor & Francis, 1974. 278 p.
- 56. Munschy, G. Existence and binding energy of the excitonic ion / G. Munschy, B. Stébé // Physica Status Solidi (b). – 1974. – Vol. 64, Iss. 1. – P. 213–222.
- Narita, S.-I. Uniaxial stress effect on the electron affinity of the D⁻ state in germanium / S.-I. Narita, M. Taniguchi // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 36, Iss. 15. – P. 913–915.
- Pelant, I. Excitonic molecule in AgBr / I. Pelant, A. Mysyrowicz, C. Benoit à la Guillaume // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 25. – P. 1708–1711.
- 59. Pokrovskii, Ya.E. Occurrence of a condensed phase of nonequilibrium carriers in germanium / Ya.E. Pokrovskii, K.I. Svistunova // JETP Letters. – 1969. – Vol. 9, Iss. 7. – P. 261–262.
- 60. Pokrovskii, Ya.E. Condensation of non-equilibrium charge carriers in semiconductors // Physica Status Solidi (a). – 1972. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 385–410.
- 61. Rashba, E.I. Edge absorption theory in semiconductors // Solid State Physics. 1962. Vol. 4, Iss. 4. P. 1029–1031. (in Russian)
- 62. Rashba, E.I. Gigantic oscillator strengths inherent in exciton complexes // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. Berlin : Springer, 1975. P. 150–170.
- 63. Rice, T.M. Theory of electron-hole fluid // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.N. Pulkuhn. – B.G. Teubner Stuttgart, 1974. – P. 23–32.
- 64. Rice, T.M. The electron-hole liquid in semiconductors: theoretical aspects // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. Academic Press : New York, 1977. P. 1–86.
- 65. Saharov, A.D. Interaction of an electron and a positron at the birth of pairs / Soviet Physics JETP. 1948. Vol. 18, Iss. 7. P. 631–635. (in Russian)
- 66. Sander, L.M. Mott transition of the electron-hole liquid in Ge / L.M. Sander, D.K. Fairobent // Solid State Communications. 1976. Vol. 20, Iss. 7. P. 631–634.
- 67. Shah, J. Investigation of exciton-plasma Mott transition in Si / J. Shah, M. Combescot, A.H. Dayem // Physical Review Letters. 1977. Vol. 38, Iss. 25. P. 1497–1500.
- Sharma R.R. Binding energy of the excitonic molecule // Physical Review. 1968a. Vol. 170, Iss. 3. – P. 770–772.
- 69. Sharma R.R. Binding energy of the positronium molecule // Physical Review. 1968b. Vol. 171, Iss. 1. P. 36–42.
- Stébé, B. Binding energies of the excitonic molecule ion and of the excitonic ion / B. Stébé, G. Munschy // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 17, Iss. 9. – P. 1051–1054.
- 71. Taniguchi, M. D[–] States in germainum / M. Taniguchi, S.-I. Narita // Journal of the Physical Society of Japan. 1977. Vol. 43, Iss. 4. P. 1262–1269.
- 72. Thewalt, M.L.W. Details of the structure of bound excitons and bound multiexciton complexes in Si // Canadian Journal of Physics. 1977. Vol. 55, Iss. 17. P. 1463–1480.
- Thewalt, M.L.W. Biexcitons in Si / M.L.W. Thewalt, J.A. Rostworowski // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 25, Iss. 12. – P. 991–993.
- 74. Thomas, G.A. Luminescence from interacting electrons and holes in germanium / G.A. Thomas, T.M. Rice, J.C. Hensel // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.N. Pulkuhn. – B.G. Teubner Stuttgart, 1974a. – P. 105–109.
- 75. Thomas, G.A. Liquid-gas phase diagram of an electron-hole fluid / G.A. Thomas, T.M. Rice, J.C. Hensel // Physical Review Letters. 1974b. Vol. 33, Iss. 4. P. 219–222.
- Thomas, G.A. The electron-hole fluid in semiconductors // Nuovo Cimento B. 1977. Vol. 39, Iss. 2. – P. 561–568.
- 77. Thomas, G.A. Trions, molecules and excitons above the Mott density in Ge / G.A. Thomas, T.M. Rice // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 6. – P. 359–363.
- Thomas, G.A. Mott distortion of the electron-hole fluid phase diagram / G.A. Thomas, J.B. Mock, M. Capizzi // Physical Review B. – 1978. – Vol. 18, Iss. 8. – P. 4250–4259.
- Ueta, M. Two-photon generation of excitonic molecules in CuCl and CuBr / M. Ueta, Y. Nagasawa // Proceedings of Oji Seminar on Physics of Highly Excited States in Solids, 1975 / ed. by M. Ueta, Y. Nishina. – Berlin : Springer-Verlag, 1976. – P. 1–24.
- Wang, J. Shy-Yih. Excitonic molecules: a possible new form of chemical bonding / J. Shy-Yih Wang, C. Kittel // Physics Letters A. – 1972. – Vol. 42, Iss. 3. – P. 189–190.
- Wehner, R.K. On the excitonic molecule // Solid State Communications. 1969. Vol. 7, Iss. 5. – P. 457–458.
- Wheeler, J.A. Polyelectrons // Annals of the New York Academy of Sciences. 1946. Vol. 48, Iss. 3. – P. 219–238.
- Wolfe, J.P. Observation of large long-lived electron-hole drops in germanium / J.P. Wolfe et al. // Physical Review Letters. – 1975a. – Vol. 34, Iss. 5. – P. 275–277.
- Wolfe, J.P. Photograph of an electron-hole drop in germanium / J.P. Wolfe // Physical Review Letters. – 1975b. – Vol. 34, Iss. 20. – P. 1292–1293.
- Wolfe, J.P. Properties of the strain-confined electron-hole liquid in Ge / J.P. Wolfe et al. // Physical Review B. – 1978. – Vol. 18, Iss. 3. – P. 1479–1503.
- Zimmermann, R. Dynamical screening and self-energy of excitons in the electron– hole plasma / R. Zimmermann et al. // Physica Status Solidi (b). – 1978. – Vol. 90, Iss. 18. – P. 175–187.
- 87. Zhidkov, A.E. Existence of bi-excitons and trions in germanium / A.E. Zhidkov, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. 1979. Vol. 30, Iss. 8. P. 468–471.

ЭКСИТОННЫЕ МОЛЕКУЛЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ*

В.Д. Кулаковский, В.Г. Лысенко, В.Б. Тимофеев

1. Введение

Принципиальная возможность связывания в вакууме четырех легких частиц (двух электронов и двух позитронов) силами кулоновского происхождения в нейтральную молекулу была впервые показана Хиллераасом и Ope [1, 2] на основании вариационных расчетов. Из расчетов следовало, что такой четырехчастичный комплекс устойчив относительно диссоциации на два атома позитрония. Близким аналогом молекулы позитрония в полупроводниках является экситонная молекула — ЭМ (или биэкситон) — связанный комплекс из двух электронов и двух дырок. Концепция биэкситона в физике твердого тела была введена Лампертом [3] и независимо Москаленко [4]. Прогресс в экспериментальных исследованиях свойств ЭМ наиболее очевиден за последние годы как в полупроводниках с прямой щелью (см., например, обзоры Ханамуры, Хауга и др. [5, 6], Грюна и др. [7]), так и в непрямозонных полупроводниках (см., например, [8]).

В отличие от обычных газов, электронно-дырочный газ в полупроводниках (электроны, дырки, экситоны, молекулы и т. д.) является принципиально неравновесной системой из-за процессов рекомбинации. В прямозонных полупроводниках, где оптические межзонные переходы дипольно разрешены и времена прямой рекомбинации чрезвычайно малы (при ширинах щели $E_{\sigma} > 1$ эВ эти времена имеют наносекундный масштаб), процессы связывания в экситонные молекулы и их распада протекают в сильно неравновесных условиях как по отношению к фононной системе, так и между компонентами самой электронно-дырочной системы. Поэтому для экспериментального изучения свойств биэкситонов в этих кристаллах были развиты нелинейно-оптические методы, оказавшиеся наиболее эффективными в условиях такой неравновесности. К их числу относятся двухфотонное резонансное возбуждение биэкситона [9], индуцированное однофотонное превращение экситона в биэкситон [10, 11], а также двухфотонное резонансное комбинационное рассеяние (или гиперкомбинационное рассеяние) с участием биэкситонных состояний [12]. Эффективность этих процессов в прямозонных полупроводниках связана с гигантской величиной нелинейной восприимчивости в условиях двухфотонного резонанса в соответствующее

^{*} Успехи Физических наук. – 1985. – Т. 147. Вып. 1. – С. 3–47.

биэкситонное состояние. Отсюда проистекают начатые недавно исследования нелинейных эффектов по многоволновому смешиванию и бистабильности с участием биэкситонов [13].

Использование перечисленных методов нелинейной оптики в непрямозонных полупроводниках менее эффективно из-за малой вероятности оптических переходов. В таких полупроводниках рекомбинация носит непрямой характер с участием фонона, который уносит бриллюэновский импульс, и поэтому отличается большими временами (в Si и Ge, например, времена рекомбинации имеют микросекундный масштаб). Естественно ожидать, что в непрямозонных полупроводниках при столь больших временах рекомбинации образование и распад экситонных молекул будет протекать в квазиравновесных условиях даже при относительно невысоких плотностях экситонов и достаточно низких температурах. Поэтому ценную информацию о свойствах ЭМ в таких материалах можно почерпнуть, анализируя их спектры излучательного распада.

К настоящему времени наиболее всесторонне изучены свойства ЭМ в одноосно деформированных кристаллах Si и Ge. Поэтому в данном обзоре в основном используются результаты исследований биэкситонов в этих полупроводниках. При обсуждении нелинейно-оптических методов исследования биэкситонных состояний в полупроводниках с прямой щелью мы используем главным образом результаты для CdS, учитывая относительную простоту энергетического спектра (невырожденные зоны) в этих кристаллах и достаточно высокую точность сведений о необходимых экспериментальных параметрах.

По обсуждаемому предмету имеется очень обширная библиография. Авторы заранее приносят свои извинения, если какие-то из работ оказались непроцитированными в данном обзоре.

2. Энергия связи экситонных молекул

В полупроводниках отношение эффективных масс электрона m_e и дырки m_h много больше отношения масс свободного электрона и протона. В связи с этим возникал вопрос об устойчивости ЭМ по отношению к диссоциации на два экситона при произвольном значении параметра $\sigma = m_e/m_h$.

Когда эффективные массы электрона и дырки не сильно отличаются, в задаче об устойчивости четырех тел отсутствует малый параметр, по которому можно вести разложение. Поэтому здесь неприменимо широко используемое в молекулярной спектроскопии адиабатическое приближение. Иными словами, при $m_e \sim m_h$ амплитуда нулевых колебаний оказывается масштаба само́й молекулы, и поэтому сама концепция «равновесных координат ядер» теряет смысл.

В пределе $\sigma = 1$ задача о стабильности ЭМ полностью адекватна задаче о молекуле позитрония, которая впервые решалась Хиллераасом и Оре [1,

2]. В условиях, когда $m_e = m_h$, из соображений симметрии задачи потенциал притяжения оказывается максимальным, когда и электроны, и дырки находятся в синглетных состояниях. Однако на синглетной волновой функции, взятой в форме Гайтлера — Лондона, устойчивое молекулярное состояние не возникает. Хиллераас и Оре предложили использовать волновую функцию в виде [1, 2]

$$\Psi_{HO} = 2\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(r_{1a} + r_{1b} + r_{2a} + r_{2b})\right]ch\left[\frac{1}{2}\beta\alpha(r_{1a} - r_{1b} - r_{2a} + r_{2b})\right],$$
(1)

где индексы 1, 2 и *а, b* отвечают электронам и дыркам, а α и β — варьируемые параметры. С помощью вариационных расчетов на волновой функции (1) было найдено, что энергия связи молекулы позитрония составляет всего 0,017 от величины ридберга позитрониевого атома Ry. Столь малая величина энергии связи по сравнению со случаем молекулы водорода H₂ связана е тем, что из-за близости масс m_e и m_h существенно возрастает вклад кинетической энергии относительного движения внутри молекулы.

Энергии связи ЭМ Δ_M в полупроводниках с различной структурой энергетических зон рассчитывалась в работах [14–20]. В вариационных расчетах волновая функция обычно выбирается в виде произведения функции Хиллерааса — Оре (Ψ_{HO}) и оболочечной функции для дырок $F(R_h)$:

$$\Psi = \frac{\Psi_{HO}(\mathbf{r})}{S(R_h)} F(R_h), \qquad (2)$$

где $S^2(R_h) \equiv \int \Psi_{HO}^2(\mathbf{r}) d^3 r$, а R_h — характеризует расстояние между дырками. В пределе $\sigma \to 1$ при замене в выражении (2) $F(R_h)$ на δ -функцию получается пробная функция, которая ранее использовалась для вариационных расчетов молекулы H₂ [21–23]. В этом пределе вариационные вычисления дают для отношения $\Delta_M/\text{Ry} = 0,3$, тогда как точный результат равен 0,35. В пределе $\sigma = 1 F(R_h) = 1$, и волновая функция (2) совпадает с функцией Хиллерааса — Оре для молекулы позитрония. Зависимость энергии основного состояния $E_M(\sigma)$ находилась с помощью стандартной вариационной процедуры — минимизации среднего значения гамильтониана на пробной волновой функции вида (2). Энергия связи ЭМ определяется по отношению к диссоциации на два свободных экситона, а именно, $\Delta_M = -E_M - 2$ Ry.

Теоретический анализ зависимости $\Delta_M(\sigma)$ показал, что: 1) $\Delta_M(\sigma)$ является симметричной по отношению к $\sigma = 1$ [17, 18], 2) Δ_M монотонно уменьшается в области $0 < \sigma < 1$ [17, 18] и 3) при $\sigma \to 1 \ \partial \Delta_M / \partial \sigma \to 0$ [24]. Результаты вариационного расчета зависимости $\Delta_M(\sigma)$ представлены на рис. 1.

В работе [20] для расчета энергии связи ЭМ был использован метод Монте-Карло и формализм функций Грина, основанный на формальной аналогии между уравнением Шрёдингера и уравнением диффузии. Электроны и дырки рассматривались на одинаковой основе. Результаты расчета также приведены на рис. 1 (штриховая кривая). Из рис. 1 видно, что в отличие от вариационных расчетов данный метод приводит к правильным значениям Δ_M при $\sigma \to 0$ ($\Delta_M \to 0,35$ Ry). Далее, во всей области значений σ ($0 < \sigma < 1$) расчет с использованием метода Монте-Карло и формализма функций Грина приводит к заметно бо́льшим значениям Δ_M , чем вариационный расчет [16]; при $\sigma \to 1$ различие достигает двух раз. Как будет показано ниже, расчеты с использованием метода Монте-Карло и формализма функций Грина дают значения Δ_M , которые согласуются с экспериментально найденными значительно лучше, чем вычисленные вариационным способом.

Молекула водорода является достаточно компактным образованием: расстояние между двумя протонами составляет всего 1,44 a_{H} , где a_{H} — боровский радиус атома водорода. По мере увеличения отношения масс m_{e}/m_{h} возрастает кинетическая энергия дырок, что приводит к их делокализации и возрастанию среднего межчастичного расстояния $\langle R_{h} \rangle$ между ними, которое вычисляется по формуле

$$\langle R_h \rangle = \int \Psi^2 R_h d^3 h \Big(\alpha \int \Psi^2 d^3 r \Big)^{-1}.$$
 (3)

Расчет $\langle R_h \rangle$ как функции параметра σ выполнен в работах [14, 15]. Результат расчета иллюстрирует рис. 1, из которого видно, что в интервале $0 < \sigma < 1$ отношение $\langle R_h \rangle / a_{ex}$, где a_{ex} — боровский радиус экситона, монотонно возрастает от 1,44 до 3,47. Таким образом, в общем случае экситонная молекула является более рыхлым образованием, чем молекула водорода.



Рис. 1. Зависимость энергии связи ЭМ (*a*) и отношения среднего расстояния между дырками в ЭМ (*б*) от отношения эффективных масс электрона и дырки. Сплошные линии расчет вариационным методом [14, 15], штриховая — расчет методом Монте-Карло с использованием функций Грина [20]. Кружки — эксперимент: *1* — CdS [5, 6], *2* — CuBr [5, 6], *3* — ZnTe [5, 6], *4* — CuCl [5, 6], *5* — ZnSe [5, 6], *6* — Ge $\langle \sim 100 \rangle$ [37], *7* — Si $\langle 100 \rangle$ [42], *8* — Si [52].

Несколькими теоретическими группами рассматривалось влияние анизотропии эффективных масс дырок (электронов) на величину энергии связи экситонной молекулы [16–18]. Было найдено, что энергия связи ЭМ слабо зависит от параметра анизотропии для наиболее типичных полупроводниковых структур $\gamma_{e,h} = m_{\perp}^{e,h} / m_{\parallel}^{e,h}$ и, в общем случае, имеет тенденцию к уменьшению при возрастании анизотропии масс.

Наконец, в работе [25] рассматривался также вопрос о влиянии сложной структуры зонного спектра на энергию основного состояния экситонной молекулы. Так, в прямозонных полупроводниках со структурой сфалерита зона проводимости в Г-точке простая и имеет симметрию Γ_6 , а четырехкратно вырожденная по спину валентная зона имеет симметрию Γ_8 . В этом случае возникают два типа экситонов с угловыми моментами $J_{ex} = 1$ (Γ_5) и $J_{ex} = 2$ ($\Gamma_5 + \Gamma_4$). Триплетное состояние экситона с $J_{ex} = 2$ оптически неактивно. В качестве базисных спиновых функций ЭМ можно выбрать произведения состояния двух электронов с $J_e = 0$ и состояний двух дырок с $J_h = 0$ и $J_h = 2$, а именно: $|J_{\rm M}, m_{\rm M}\rangle = |0, 0\rangle_e |J_h, m_h\rangle_h$, где $J_{\rm M} = J_h = 0$; 2. Тогда волновую функцию ЭМ можно записать в виде

$$\left|\Psi_{M}\left(J_{M},\boldsymbol{m}_{M}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp\left(i\mathbf{k}R_{0}\right)\Psi\left(\mathbf{r}_{1a},\mathbf{r}_{2b},\mathbf{R}_{0}\right)\left|J_{M},\boldsymbol{m}_{M}\right\rangle,\tag{4}$$

где \mathbf{R}_0 — координата центра масс молекулы. Молекулярные состояния типа (4) в рамках приближения эффективной массы шестикратно вырождены и при учете обменного взаимодействия расщепляются на три терма: Γ_1 , Γ_3 и Γ_5 . Эффекты обменного взаимодействия могут заметно повлиять на энергию основного состояния ЭМ. Ярким примером служат кристаллы Cu₂O, где из-за эффектов обменного взаимодействия связанной молекулярной орбитали не возникает и ЭМ нестабильны [25]. В непрямых полупроводниках Si и Ge влияние обменного взаимодействия на энергию связи ЭМ пренебрежимо мало́ из-за большого радиуса боровских орбит.

3. Экситонные молекулы в полупроводниках с непрямой запрещенной зоной (Si и Ge)

3.1. Излучательный распад ЭМ в одноосно сжатых кристаллах Si и Ge

Наиболее прямым методом обнаружения и исследования свойств ЭМ является анализ спектров их излучательной рекомбинации. Ввиду сильных парных электронно-дырочных (e–h) корреляций в ЭМ самым вероятным процессом излучательного распада ЭМ оказывается рекомбинация одной e–h-пары с испусканием фотона и рождением экситона отдачи. В непрямых полупроводниках такой процесс сопровождается одновременным испуска-

нием фонона, уносящего бриллюэновский квазиимпульс. Соответствующая реакция записывается в виде

$$\Im M \mapsto \phi$$
отон + ϕ онон + экситон. (5)

Первые попытки обнаружить излучательную аннигиляцию ЭМ были сделаны в непрямых полупроводниках Si и Ge. Благодаря возможности получения Si и Ge с очень малой концентрацией мелких примесей в этих кристаллах удается избежать сложностей, связанных с наличием интенсивного излучения экситонно-примесных комплексов, имеющих существенно бо́льшую энергию связи, чем ЭМ [3]. Исследования в этом направлении стимулировала известная работа Хейнса [26], обнаружившего в чистом кремнии новый излучательный канал при больших плотностях возбуждения экситонов. Однако позднее было показано, что обнаруженное им явление связано с конденсацией экситонов в плотную металлическую электронно-дырочную жидкость [27–31]. Из-за сильного вырождения электронной и дырочной зон энергия связи электронно-дырочной жидкости φ в кристаллах Si и Ge оказывается очень большой: $\varphi \sim 0.5$ Ry [31], в то время как энергия связи ЭМ, как обсуждалось выше, лежит в пределах 0,1 Ry. Из-за относительно малой энергии связи ЭМ в Si и Ge парциальная доля ЭМ в неравновесном e-h-газе оказывается невысокой даже вблизи порога конденсации в электроннодырочную жидкость. Оценки парциальной доли ЭМ в газовой фазе, выполненные в рамках принципа детального равновесия, дают для отношения концентраций молекул $(n_{_M})$ и экситонов $(n_{_{ev}})$ значения $n_{_M}/n_{_{ev}} \approx 10^{-2} - 10^{-3}$. Отсюда становится понятным, почему в течение долгого времени в недеформированных Si и Ge не удавалось обнаружить излучения ЭМ, несмотря на интенсивные поиски этого излучательного канала.

Парциальную долю ЭМ можно заметно увеличить и тем самым создать более предпочтительную ситуацию для их экспериментального обнаружения, если использовать одноосную деформацию кристаллов^{*}. При одноосной деформации кристаллов Si и Ge энергия связи электронно-дырочной жидкости уменьшается из-за увеличения вклада от кинетической энергии вследствие снятия орбитального вырождения в электронной и дырочной зонах [31, 33–35]. В результате этого возрастает плотность газовой фазы и, как следствие, парциальная доля ЭМ, поскольку $n_M/n_{ex} \sim n_{ex}$. Наиболее благоприятная ситуация имеет место в кристаллах Si и Ge, сжатых вдоль оси, близкой к (100), когда энергия связи жидкости уменьшается в четыре-пять раз, а плотность газовой фазы возрастает больше, чем на порядок [34, 36, 37]. Энергия связи ЭМ, так же как и экситонный ридберг, мало изменяется при снятии вырождения зон. В результате излучательной рекомбинации ЭМ

^{*} Отметим, что до настоящего времени практически все исследования ЭМ в непрямых полупроводниках выполнялись в кремнии и германии. Исключением является только работа [32], в которой сообщалось о наблюдении излучения ЭМ в AgBr. Исследования свойств ЭМ в этих кристаллах пока не проводилось.

часть ее энергии передается остающемуся экситону. Поэтому линия излучения ЭМ должна располагаться с длинноволновой стороны от линии излучения свободных экситонов (FE). Такая линия (M) была обнаружена при исследовании кинетики спектров рекомбинационного излучения высокочистых кристаллов кремния (концентрация остаточных мелких примесей меньше 10^{12} см⁻³), сильно сжатых вдоль оси $\langle 100 \rangle$ (Si $\langle 100 \rangle$) (давление P < 200 МПа), при импульсном возбуждении, обеспечивающем среднюю плотность е—h-пар $\overline{n} \sim 10^{17}$ см⁻³ (рис. 2, *a*) [38]. После затухания излучения электронно-дырочной жидкости (линия L) форма длинноволнового края линии M остается неизменной. Расстояние между максимумами линий M и FE, как и следовало ожидать, не зависит от величины деформации и составляет в Si примерно 2 мэВ.



Рис. 2. Спектры излучения одноосно сжатых кристаллов <u>Si</u> (100) при T = 1,8 К и различных условиях возбуждения. a - Импульсное возбуждение ($\overline{n} \sim 3 \cdot 10^{17}$ см⁻³; спектры 1-5 отвечают задержкам относительно импульса возбуждения соответственно 0; 0,25; 0,35; 0,7 и 1,1 мкс [38]); $\delta -$ объемное стационарное возбуждение, средняя плотность n изменяется от $\sim 10^{14}$ до $\sim 10^{15}$ см⁻³; на вставке показана зависимость интенсивности излучения ЭМ от интенсивности излучения свободных экситонов в логарифмическом масштабе; прямая отвечает зависимости $I_M \propto I_{FE}^2$ [36]

Молекулярная природа линии М подтверждается экспериментами, выполненными в сильно одноосно сжатых кристаллах Si (*P* > 500 МПа) в условиях стационарного объемного возбуждения [36]. Рис. 2, *б* иллюстриру-

ет изменение спектров излучения сильно сжатых кристаллов Si (100) при увеличении плотности возбуждения. При малых плотностях возбуждения в спектре наблюдается излучение свободных (линия FE) и связанных на остаточных акцепторах (линия BE) экситонов. Канал, связанный с рекомбинацией экситонно-примесных комплексов, быстро насыщается. При этом в спектре появляется линия излучения ЭМ, интенсивность которой, как и следовало ожидать при молекулярном происхождении этой линии, увеличивается пропорционально квадрату интенсивности экситонной линии (вставка на рис. 2, б). При больших плотностях ($\overline{n} > 10^{15}$ см⁻³) интенсивность линии М, так же как и линии FE, насыщается из-за конденсации газа экситонов и ЭМ в электронно-дырочную жидкость.



Рис. 3. Спектры излучения экситонов и ЭМ в Ge $\langle \sim 100 \rangle$ при T = 1,8 К с испусканием LA- и TA-фононов [37]. Спектры LA 1, 1' записаны при 100 и 13%-ной модуляции интенсивности возбуждающего света (W = 20 Вт/см²): 1 — интегральный, 1' — дифференциальный спектры (увеличение ×6). Спектры TA (2') и LA (2) записаны при W = 25 Вт/см²; спектр TA дан с увеличением ×42; отношение интенсивностей TA- и LA-компонент показано в верхней части рисунка.

В кристаллах Ge экспериментальное обнаружение ЭМ связано с дополнительными трудностями, во-первых, из-за меньшего (~ в 5 раз) масштаба энергий связи экситонов и ЭМ, и, во-вторых, из-за большей стабильности (e—h)-жидкости вследствие сильной анизотропии зон [35]. Так, в Ge, сжатом вдоль оси $\langle 111 \rangle$ ($P \sim 150$ МПа), энергия связи е—h-жидкости, несмотря на полное снятие вырождения зон, остается еще достаточно большой ($\varphi \sim 0,27$ Ry) [39]. Только при деформации Ge вдоль несимметричного направления, близкого к $\langle 100 \rangle$ (**P** $\not\parallel \langle 100 \rangle$) (Ge $\langle \sim 100 \rangle$), когда анизотропия валентной зоны оказывается относительно небольшой, и, как следствие, плотность дырочных состояний минимальной, энергию связи электроннодырочной жидкости удается уменьшить до $\sim 0,1$ Ry [40]. В этих условиях в спектре излучения Ge наблюдается интенсивная линия излучения ЭМ [37, 41] (рис. 3). Ее интенсивность пропорциональна квадрату интенсивности линии FE, что хорошо видно из сравнения записей спектров с использованием 100 и 13%-ной модуляции интенсивности возбуждающего лазера. Найденная величина показателя степенной зависимости $I_M \sim I_{FE}^k$ ($k = (I_M / I_{FE})_{пиф} / (I_M / I_{FE})_{пнт})$ составляет 1,9 ± 0,1.



Рис. 4. Сравнение экспериментального контура линии излучения ЭМ в Si (100) с рассчитанным (значки) и с контуром линии излучения ЭМ в Ge (~100) (на вставке). Спектры излучения Si 1, 2 записаны при T = 1,8 К и плотностях возбуждения $\overline{n} \approx 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ и $3 \cdot 10^{13}$ см⁻³ соответственно [36]. Спектры излучения Si (кружки) и Ge (сплошная линия), показанные на вставке, для удобства сравнения записаны при одинаковых отношениях $I_M/I_{FE} = 1$ и kT/Ry = 0,05 [50]

На рис. 4 показан результат сравнения формы линий M и FE в Ge (~100) и Si (100), записанных при одинаковых отношениях kT/Ry и интенсивностей линий M и FE. На вставке к этому рисунку приведены спектры излучения ЭМ и экситонов в Ge при T = 1,5 K = 0,05R (Ge) и в Si (100) при T = 7 K = 0,05 Ry (Si). Энергетический масштаб обезразмерен в единицах соответствующих ридбергов. Существенно, что при таком сравнении не используется никаких подгоночных параметров. Хорошее совпадение формы спектров излучения для Si и Ge подтверждает одинаковую (молекулярную) природу линии M в этих кристаллах.

3.2. Форма спектра излучения ЭМ при непрямой аннигиляции

При непрямом излучательном распаде ЭМ соответствующая линия излучения должна иметь конечную ширину даже при T = 0 К, так как часть энергии ЭМ передается при рекомбинации остающемуся экситону отдачи. Оценить ширину линии излучения ЭМ можно из следующих соображений [38]. Поскольку волновые функции экситона и ЭМ имеют размер порядка боровского радиуса экситона, a_{ex} , матричный элемент излучательного перехода M должен быть существенным в области волновых векторов экситона отдачи $k_{ex} \leq a_{ex}^{-1}$. Следовательно, энергия, которую забирает экситон отдачи при рекомбинации ЭМ, лежит в пределах

$$\frac{\hbar^2 k_{ex}^2}{2M_{ex}} \lesssim \frac{\hbar^2}{2M_{ex} a_{ex}^2} = \frac{m_{ex}}{M_{ex}} \text{Ry}, \tag{6}$$

где m_{ex} и M_{ex} — соответственно приведенная и трансляционная эффективные массы экситонов. Оценки по формуле (6) дают для ширины линии М значения около 3 мэВ в Si и 0,5 мэВ в Ge, что хорошо согласуется с экспериментальными величинами. Из приведенных выше рассуждений также очевидно, что при достаточно низких температурах $kT \ll (m_{ex}/M_{ex}) R$ чувствительным к температуре должен быть только «фиолетовый» край линии М (из-за изменения распределения ЭМ по энергиям), а форма «красного края», определяемая эффектами отдачи, должна мало меняться. Этот вывод хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований влияния температуры на форму линии М, выполненных в работах [38, 42–44].

Тот факт, что «красный» край линии M связан с эффектами отдачи, в случае Ge можно показать непосредственно. Из группового анализа следует, что в Ge-переходы с испусканием LA-фононов являются разрешенными, а с испусканием TA-фононов — запрещенными в нулевом порядке по k [32]. Поэтому при рекомбинации экситонов с рождением TA-фонона в матричном элементе появляется дополнительный множитель, пропорциональный их квазиимпульсу [45], а спектральные зависимости TA- и LA-компонент линии излучения экситонов связаны соотношением

$$I_{FE}^{TA}(E) \sim E I_{FE}^{LA}(E), \qquad (7)$$

где энергия $E \sim \mathbf{k}_{ex}^2$ отсчитывается от низкочастотной границы спектра (E = 0 отвечает излучению покоящегося экситона). В случае излучательного распада ЭМ квазиимпульс уносится экситоном отдачи. Поэтому при $T \approx 0$ К отношение интенсивностей ТА- и LA-компонент должно возрастать с уменьшением энергии испускаемого кванта:

$$I_{M}^{TA}\left(E+\Delta_{M}\right)\sim\left(-E-\Delta_{M}\right)I_{M}^{LA}\left(E+\Delta_{M}\right).$$
(8)

Сравнение спектров излучения экситонов и ЭМ с испусканием ТА- и LAфононов показано на рис. 3 (кривые 2' и 2 соответственно) [37]. В верхней части рисунка представлено отношение интенсивностей I^{TA}/I^{LA}. Видно, что в согласии с формулами (7) и (8) отношение I^{TA}/I^{LA} возрастает при рекомбинации экситонов с увеличением $\hbar\omega$ пропорционально их тепловой энергии, а при рекомбинации ЭМ — с уменьшением $\hbar\omega$ пропорционально энергии отдачи экситона ($-E - \Delta_M$). Вблизи фиолетовой границы линии М соотношение (8) нарушается из-за теплового распределения ЭМ по энергиям.

Для аналитического описания формы линии излучения непрямого биэкситона нужно знать матричный элемент перехода. Подробный расчет амплитуды аннигиляции биэкситона выполнен в работе [36]. Матричный элемент перехода находился во втором порядке теории возмущений и после преобразований приводился к виду

$$M(\mathbf{P}|\mathbf{p},\mathbf{q}) \sim \int d^{3}r d^{3}r_{e} d^{3}r_{h} \Psi^{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_{h}\,\mathbf{r}_{e}|\mathbf{r},\mathbf{r}_{h}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \psi^{*p}\left(\mathbf{r}_{e}|\mathbf{r}_{h}\right), \qquad (9)$$

где) $\Psi^{\mathbf{p}}$, е^{-iqr} и ψ^{p} — волновые функции молекулы, фонона и экситона. Эта формула является обобщением известной формулы Эллиотта [46] для амплитуды аннигиляции экситона, пропорциональной $\psi_{ex}(0)$, и также имеет прозрачный физический смысл. Из формулы (9) видно, что это есть амплитуда вероятности найти в биэкситоне один из электронов и одну из дырок в одном месте, а другим — электрону и дырке — образовать экситон с волновой функцией ψ^{p} . Авторы [36] вычислили матричный элемент М ($\mathbf{P} | \mathbf{p}, \mathbf{q}$) численным интегрированием выражения (9), использовав волновую функцию биэкситона, соответствующую лучшему из известных вариационных приближений [16]. Как и ожидалось, практически вся функция М($\mathbf{P} | \mathbf{p}, \mathbf{q}$) сосредоточена в области $pa_{ex}/\hbar < 1$.

Если пренебречь дисперсией фонона, то для вероятности испускания света с частотой ω можно получить выражение

$$I(\hbar\omega) \sim \int d^{3}\mathbf{P} d^{3}\mathbf{p} \exp\left(-\frac{\mathbf{P}^{2}}{8M_{ex}kT}\right) M^{2}\left(\left|\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{P}\right|\right) \times \delta\left(E_{M}^{\mathbf{p}}-E_{ex}^{\mathbf{p}}-\hbar\omega-\hbar\Omega_{\mathbf{q}}\right).$$
(10)

При столь низких температурах, когда средний тепловой импульс биэкситона **Р** удовлетворяет неравенству $(1/\hbar) \langle P \rangle a_{ex} \ll 1$, из (10) видно, что форма линии дается выражением

$$I(\hbar\omega) \sim |\mathbf{p}| M^2(\mathbf{p}) \tag{11}$$

при $\mathbf{p}^2 = 4M_{ex} \left(E_{ex} - \hbar\omega - \Delta_M - \hbar\Omega_{\mathbf{q}} \right)$. На рис. 4 представлен экспериментальный контур линии излучения биэкситона в Si при T = 1,8 K и аппроксимация контура, рассчитанная по формуле (10). При построении принята энергия связи экситона 12 мэВ, $a_{ex} = 52,5$ Å и $\Delta_M = 0,4$ мэВ [36]. Согласие теории и эксперимента представляется удовлетворительным тем более, если учесть, что при такой аппроксимации не были использованы какие-либо подгоночные параметры. Здесь важно подчеркнуть, что и форма линии, и энергия связи однозначно определяются волновой функцией биэкситона и, следователь-

но, не являются независимыми величинами. Поэтому с помощью анализа формы линии трудно определить энергию связи экситонной молекулы с высокой точностью.

3.3. Энергия связи ЭМ в Si и Ge (экспериментальные методы)

Для определения энергии связи ЭМ можно воспользоваться следующими двумя методами: во-первых, величину Δ_{M} можно извлечь из анализа спектрального расположения линий излучения ЭМ и свободных экситонов, а вовторых, ее можно определить на основании измерения изменения относительных интенсивностей этих линий (пропорциональных концентрации) с температурой. Оба метода не лишены недостатков. Так, при конечной температуре линия излучения ЭМ не имеет четко определенной коротковолновой границы, отвечающей переходу из основного состояния ЭМ (с $\mathbf{P} = 0$) в основное состояние свободного экситона (с $\mathbf{p} = 0$). Второй же метод справедлив только при наличии теплового равновесия между экситонами и ЭМ.

В работе [47] Чо предложил простое модельное описание для амплитуды непрямой аннигиляции ЭМ следующего вида:

$$M(\mathbf{P}|\mathbf{p}) \sim \left[\left(\frac{1}{2} \mathbf{P} - \mathbf{p} \right)^2 + a_M^{-2} \right]^{-2}.$$
 (12)

При выборе параметра $a_M \approx 1,2 \ a_{ex}$ удается удовлетворительно описать «красный» хвост линии излучения *M*. С использованием такой аппроксимации контура линии излучения ЭМ в работах [38, 42–44, 48] было найдено, что энергия связи ЭМ в Si (100) составляет 1,3—1,4 мэВ $\approx 0,1$ Ry. Однако в свете изложенного в предыдущем параграфе не ясно, какова истинная погрешность в оценке энергии связи ЭМ, основанной на использовании выражения (12).

В работах [36, 42, 43, 48, 49] для определения энергии связи ЭМ в кристаллах Si был применен термодинамический метод, основанный на использовании соотношения Caxá

$$n_{M} = n_{ex}^{2} \left(\frac{4\pi\hbar^{2}}{M_{ex}kT}\right)^{3/2} \frac{\nu_{M}}{\nu_{ex}^{2}} \exp\frac{\Delta_{M}}{kT},$$
(13)

вытекающего из условия равенства химических потенциалов экситонов и ЭМ (в расчете на одну е—h-пару)

$$\mu_M = 2\mu_{ex};\tag{14}$$

здесь $\nu_{M(ex)}$ — кратность вырождения уровней ЭМ (экситонов) и учтено, что трансляционная масса молекулы равна двум экситонным. Как отмечалось выше, этот метод должен давать достоверный результат, если между компонентами газовой фазы — экситонами и ЭМ — за время их жизни успева-

ет установиться квазиравновесие. Измерения температурной зависимости отношения I_M/I_{FE}^2 в Si (100) в условиях объемного возбуждения в области температур 1,8—4 К, выполненные в работе [36], привели к значению $\Delta_{_M} = 0,6$ мэВ. В работах Горли и Вольфа [42, 43, 48] были реализованы условия специального неоднородного сжатия кристаллов Si, когда газ экситонов и ЭМ оказывается помещенным в параболическую деформационную потенциальную яму и не соприкасается с поверхностью образца. В этих условиях время жизни ЭМ $\tau_{_M}$ достигало ${\sim}10^{-5}$ с и авторам удалось измерить зависимость $I_{_M}/I_{_{F\!E}}^2$ в области температур 4,2—9 К. Найденное значение для $\Delta_{\rm M}$ оказалось равным 1,1 мэВ. Измерения энергии связи ЭМ в германии, выполненные в однородно сжатых кристаллах [37, 50] на основании измерения зависимости I_M/I_{FE}^2 в области температур 1,5–3 К (рис. 5) привели к значению $\Delta_{_M} = 0.27 \pm 0.06$ мэВ ≈ 0.1 Ry. Это значение по отношению к экситонному ридбергу ближе к полученному в Si Вольфом и Горли [48]. Не исключено, что в экспериментах с однородно сжатым Si [36] из-за очень малого времени жизни ЭМ приT<4,2К (
 $\tau_{_M}\sim 10^{_7}\,{\rm c})$ в экситонной системе не успевало установиться равновесие и, как следствие, оценка $\Delta_{\scriptscriptstyle M}$ оказалась заниженной.



Рис. 5. Спектры излучения экситоиов и ЭМ в Ge $\langle \sim 100 \rangle$ [37]. 1-3 - W = 25 BT/cm²; $T_b(\mathbf{K}) = 1,47$ (1), 1,74 (2) и 2,1 (3); 4 - W = 3 BT/cm²; $T_b = 2,1$ К. На вставке показана полулогарифмическая зависимость $\ln(I_M T_{ex}^{3/2}/I_{FE}^2)$ от T_{ex}^{-1} , из которой определялась энергия связи ЭМ.

В заключение этого раздела обратим внимание, что экспериментальные значения энергии связи ЭМ в Si и в Ge ($\Delta_M \sim 0,10 \pm 0,02$ Ry) оказываются существенно больше ожидаемых как из вариационных расчетов, согласно

которым при $m_e \sim m_h \Delta_M \approx 0,03$ Ry [16], так и из расчетов, основанных на методе Монте-Карло и формализме функций Грина ($\Delta_M \sim 0,06$ Ry) [20]. Не исключено, что заметный вклад в увеличение стабильности ЭМ в Si и Ge вносят деформационные акустические фононы.

3.4. Ударная диссоциация ЭМ свободными носителями в слабом электрическом поле

При больших плотностях экситонов в газовой фазе возникают опасения, что в спектральную область излучения ЭМ (полоса М) может дать вклад излучательная рекомбинация, связанная с экситон-экситонными столкновениями. В рамках такого процесса интенсивность излучения пропорциональна n_{ev}^2 а ширина линии излучения определяется кинетической энергией экситона отдачи, как и в случае излучения ЭМ. Вклад в спектры излучения из-за процессов неупругих экситон-экситонных соударений можно выделить с помощью экспериментов по ударной диссоциации слабо связанных состояний свободными носителями. Учитывая, что энергии связи ЭМ и экситона отличаются более чем на порядок, в достаточно слабых электрических полях носители будут разрушать в основном молекулярные состояния. В результате диссоциации ЭМ на свободные экситоны излучение ЭМ исчезнет, тогда как скорость неупругих экситон-экситонных соударений (и соответствующий канал излучения в спектрах) в этих условиях только возрастет. Действие ударной ионизации на спектры излучения ЭМ и экситонов иллюстрирует рис. 6 [51]. Видно, что в Si (100) при средней плотности е-hпар $\sim 4\cdot 10^{15}\,\text{сm}^{-3}$ интенсивность линии M уже заметно уменьшается в полях E = 10 B/cм, а в полях E = 50-60 B/cм линия М полностью исчезает из спектра. Линия излучения свободных экситонов в таких малых полях, наоборот, даже несколько возрастает из-за смещения равновесия между экситонами и ЭМ в сторону экситонов. Аналогичный результат был получен и при исследовании ЭМ в Ge [41]. При небольших плотностях возбуждения, когда в спектре наблюдается также и линия излучения связанных экситонов, включение электрического поля в первую очередь приводит к исчезновению линии ЭМ (рис. 6). Этот результат подтверждает, что энергия связи ЭМ существенно меньше энергии связи экситонно-примесных комплексов.

Таким образом, исследования в условиях ударной диссоциации позволяют исключить из рассмотрения процессы экситон-экситонных столкновений и подтверждают, что линия М обусловлена рекомбинацией очень слабо связанных экситонных состояний. Отметим еще, что поведение линии М в слабом электрическом поле противоречит также интерпретации этой линии в терминах излучательной рекомбинации ионизованной е–h-плазмы малой плотности. Действительно, в этом случае в слабом электрическом поле интенсивность линии М могла бы только увеличиваться за счет ионизации экситонов.



Рис. 6. Спектры излучения Si (100) при T = 2 К и плотностях возбуждения $\overline{n} \sim 4 \cdot 10^{16}$ см⁻³ (*a*) и $3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ (*b*) [51]. Спектры 1–4 записаны при напряженностях внешнего электрического поля 0, 20, 40 и 60 В/см соответственно.

3.5. ЭМ в полупроводниках с различным числом электронных долин

В одноосно сжатых кристаллах Ge $\langle \sim 100 \rangle$ как электронная, так и дырочная зоны не вырождены. Поэтому оба электрона (дырки) в ЭМ принадлежат одному и тому же электронному (дырочному) экстремуму. В Si $\langle 100 \rangle$ в зоне проводимости имеется две долины х и \bar{x} , расположенные на оси сжатия $\langle 100 \rangle$. Поэтому два электрона в ЭМ в Si $\langle 100 \rangle$ могут принадлежать либо одной долине (состояния типа xx), либо разным, но лежащим на одной оси (состояния типа xx).

После обнаружения и идентификации линии излучения ЭМ в сильно сжатых кристаллах Si $\langle 100 \rangle$ в работе [52] была выявлена очень слабая линия М в очень чистых недеформированных кристаллах Si при T = 1,4 K (рис. 7). Каминский и Покровский [53] обнаружили также линию М вблизи линии излучения «горячих» экситонов в относительно слабо сжатых кристаллах Si $\langle 100 \rangle$ и связали эту линию с излучением «горячих» ЭМ, включающих один «холодный» и один «горячий» экситон^{*}. В работе [54] обнаружены также ли-

^{*} В слабо сжатых кристаллах Si с расщеплением зоны проводимости ΔE_c , меньшим энергии наименьшего междолинного (TA) фонона ($\hbar\Omega_{TA} = 18$ мэВ), время междолинной релаксации оказывается много больше времени жизни экситонов [56, 57]. Под «горячими» здесь подразумеваются экситоны с электроном из отщепленной долины [56]. Во избежание недоразумений отметим, что тепловое распределение по энергиям в пределах одной долины успевает установиться в каждой долине за время $\tau \ll \tau_{ev}$.

нии излучения ЭМ в кристаллах Si, сжатых вдоль оси $\langle 110 \rangle$. В отличие от «холодных» ЭМ в Si $\langle 100 \rangle$, для электронов в ЭМ в недеформированном Si и в Si $\langle 110 \rangle$ возможны как состояния типа xx и xx, так и состояния типа xy (с электронами из долин, главные оси которых взаимно перпендикулярны). В «горячих» ЭМ в Si $\langle 100 \rangle$ и Si $\langle 110 \rangle$ электронные состояния только типа xy. Из-за ослабления кулоновского отталкивания в случае электронных состояний типа xy (благодаря анизотропии электронных эллипсоидов) можно было ожидать, что энергия связи ЭМ с электронными состояниями типа xy окажется несколько больше, чем с состояниями типа xx (xx), как у D^- -центров в Ge [55].



Рис. 7. ТА-компонента спектра излучения ЭМ и экситонов в недеформированном Si при 1,8 К [52]. *α*- и В-излучение экситонно-примесных комплексов на фосфоре и боре соответственно.

В [54] было изучено изменение отношений интенсивностей линий излучения «горячих» ЭМ и «горячих» экситонов, «холодных» ЭМ и «холодных» экситонов, а также «горячих» и «холодных» ЭМ в Si $\langle 100 \rangle$ при вариации в широких пределах как полной плотности экситонов, так и соотношения между плотностями «горячих» и «холодных» экситонов. В согласии с молекулярной природой линии М ее интенсивность оказалась пропорциональной произведению интенсивностей линий излучения «холодных» экситонов. Для сравнения энергий связи «горячих» и «холодных» ЭМ с электронными состояниями типа ху и хх (xx) был использован термодинамический метод. Поскольку «холодные» и «горячие» экситоны и ЭМ находятся в одном объеме, исходя из условий равенства химических потенциалов (квазиравновесная ситуация),

$$\mu_M^h = \mu_{ex}^c + \mu_{ex}^h,$$

$$\mu_M^c = 2\mu_{ex}^c,$$
(15)

при $n_M^h \ll n_M^c$ можно написать [54]

$$\frac{I_M^h}{I_{FE}^h} \left(\frac{I_M^c}{I_{FE}^c} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_M^h}{M_M^c} \right)^{3/2} \frac{\nu_M^h}{\nu_{ex}^c} \frac{\nu_{ex}^h}{\nu_{ex}^h} \exp \frac{\Delta_M^h - \Delta_M^c}{kT};$$
(16)

здесь индексы *h* относятся к горячим, а индексы *c* — к холодным экситонам (ЭМ). Коэффициент 1/2 появляется вследствие того, что в линию M_h дает вклад аннигиляция только одного (горячего) экситона в ЭМ. В Si (100) с двумя основными и четырьмя отщепленными долинами $\nu_{ex}^c = 8$, $\nu_{ex}^h = 16$, $\nu_M^c = 6$, $\nu_M^h = 32$. Экспериментально найдено, что энергия связи Δ_M^h , в противоположность ожидаемому, оказалась несколько меньше: $\Delta_M^c = \Delta_M^h + 0,15$ мэВ [54]. Абсолютное же изменение величины Δ_M , как и ожидалось, оказалось небольшим.

3.6. Многоэкситонные молекулы

Образованию ЭМ с числом связанных экситонов больше двух в полупроводниках с простыми зонами препятствует обменное отталкивание. В многодолинных полупроводниках с четырехкратно вырожденной по спину валентной зоной (типа Ge и Si) это препятствие отсутствует из-за большого вырождения зон. В работе Ванга и Киттеля [58] было найдено, что в предельном случае $m_{e}/m_{h} \rightarrow 0$ стабильны ЭМ с числом экситонов, меньшим кратности вырождения зоны проводимости, причем энергия связи растет с увеличением числа связанных экситонов. Причиной сильного связывания является относительно малый вклад от кинетической энергии электронов благодаря отсутствию узлов у электронной волновой функции. В Si и Ge можно ожидать существования четырехэкситонных молекул, поскольку наименьшая кратность вырождения зон (валентной) равна четырем. Такие молекулы должны включать экситоны с «легкой» и «тяжелой» массой. Поэтому возникает вопрос об их устойчивости относительно распада на две ЭМ из экситонов с «тяжелой» массой. Более предпочтительной является ситуация в Si, где соответствующее расщепление экситонного терма мало́ (~0,02 Ry [31]). Такие многоэкситонные молекулы пока не обнаружены. Их экспериментальное обнаружение по спектрам излучательной рекомбинации является крайне сложной задачей, учитывая чрезвычайно малую парциальную долю таких свободных многоэкситонных комплексов в экситонном газе.

4. Экситонные молекулы в магнитном поле (Si и Ge)

4.1. Краткое введение

Рассмотрим свойства ЭМ в магнитном поле. Благодаря чрезвычайно малым масштабам энергий связи, ЭМ в одноосно деформированных кристаллах Si и Ge с экспериментальной точки зрения оказываются удобной моделью для исследований магнитных свойств. Так, например, предел сильного магнитного поля, при котором энергии парамагнитного расщепления соответствующих спиновых состояний электрона (дырки) и диамагнитного сдвига в экситоне начинают превышать энергию диссоциации ЭМ, достигается в легко реализуемых полях $H \sim 8$ Tл для Si и $H \sim 1$ Tл для Ge. Для молекулы водорода такая ситуация возникает в магнитных полях астрономического масштаба ($H > 10^6$ Tл).

Возникает вопрос о стабильности ЭМ при достижении таких магнитных полей. В этой связи интересны два случая, отличающиеся соотношениями между временами жизни τ_{ex} и спиновой релаксации τ_s . При $\tau_s \gg \tau_{ex}$ равновесие между экситонами в различных спиновых состояниях отсутствует. Поэтому, несмотря на то, что молекулы образуют два экситона, находящихся в различных спиновых состояниях, парамагнитное расщепление в этом случае не затрагивает стабильность ЭМ в магнитном поле. Стабильность ЭМ с ростом магнитного поля будет уменьшаться только при условии, что диамагнитный вклад в его энергию δE^d_M больше удвоенного экситонного (δE^d_{ex}). Соотношение $\tau_{ex} \ll \tau_s$, реализуется в одноосно деформированных кристаллах Si [59].

В противоположном случае ($\tau_{ex} \gg \tau_s$) экситоны равновесно распределены по спиновым подуровням, и энергия диссоциации ЭМ чувствительна к парамагнитному расщеплению и уменьшается с ростом магнитного поля. Такая ситуация наблюдается в одноосно деформированных кристаллах Ge [37]. Исследования ЭМ в одноосно деформированных кристаллах Si и Ge в магнитном поле, удачно дополняющие друг друга, позволяют однозначно разделить диамагнитный и парамагнитный вклады. Эта задача представляет определенный интерес, поскольку априори относительно величины диамагнитной восприимчивости ЭМ, аналогичной молекуле позитрония, можно сделать два противоположных заключения. С одной стороны, учитывая, что $a_{M} \sim 3a_{ev}$ [14, 15], по аналогии с атомами, где согласно Ланжевену диамагнитная восприимчивость пропорциональна квадрату расстояния электронов от ядра, можно было бы ожидать, что диамагнитная восприимчивость ЭМ χ_{M} на порядок больше экситонной: $\chi_{M} \sim 10 \chi_{ev}$. С другой стороны, малая энергия связи ЭМ указывает, что парные e-h-корреляции в ЭМ, повидимому, такие же, как в экситоне, и поэтому $\chi_{\scriptscriptstyle M}$ может мало отличаться от двух экситонных.

Таблица 1

Правила отбора дли непрямых переходов в Si и Ge

-1/2, 1/2			0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda e_{z}u_{LO}$	$\sqrt{rac{2}{3}}eta(e_+u+eu_+)$			$-\sqrt{rac{2}{3}}\lambda e_z u_{LA}$	$\sqrt{rac{2}{3}}etaig(e_+u+eu_+ig)$
1/2, -1/2			0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda e_z u_{LO}$	$-\sqrt{rac{2}{3}}eta(e_+u+eu_+)$			$\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda e_z u_{LA}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\beta(e_+u+eu_+)$
-1/2, -1/2	6		$rac{1}{\sqrt{3}} \gamma e u_{_{LA}}$	$-rac{1}{\sqrt{3}}\eta e_+ u_{_{LO}}$	$-rac{1}{\sqrt{3}}lpha e_z u_+$	9		$-rac{1}{\sqrt{3}}\eta e_+ u_{_{LA}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha e_z u_+ + \gamma e u)$
1/2, 1/2	a) Si, $\Gamma_8^+ - \Delta$		$rac{1}{\sqrt{3}} \gamma e_+ u_{_{LA}}$	$rac{1}{\sqrt{3}}\eta e u_{LO}$	$rac{1}{\sqrt{3}}lpha e_{z}u_{-}$	6) Ge, $\Gamma_{8}^{+} - I$		$rac{1}{\sqrt{3}}\eta e u_{_{LA}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\alpha e_z u + \gamma e_+ u_+ \right)$
-3/2, 1/2			$-\gamma e_{-}u_{LA}$	$\eta e_+ u_{LO}$	$lpha e_z u_+$			$\eta e_+ u_{_{LA}}$	$\left(\alpha e_{z} u_{+} - \gamma e_{-} u_{-} \right)$
3/2, -1/2			$-\gamma e_+ u_{_{LA}}$	$-\eta e_{-}u_{LO}$	$-\alpha e_z u$			$-\eta e_{_{LA}}$	$-(\alpha e_z u + \gamma e_+ u_+)$
j_z, s_z		фононы:	LA	ГО	TO, TA		фононы:	LA	ГО

Здесь ось z направлена вдоль главной оси соответствующего экстремума, для Ge ось x выбрана в одной из плоскостей σ_{v} , в Si направление осей *х, у* произвольно; значения $_{I_z}$, $_{S_z}$ указывают проекции моментов дырок ($_{I_z}=\pm 3/2,\pm 1/2$) и электронов ($_{S_z}=\pm 1/2$); величины u_{I_z} означают амплитуды смещений, $lpha,eta,\gamma$ и η – константы, е – вектор поляризации, $e_{\pm}=e_{x}\pm ie_{y}.$

4.2. Непрямые экситоны в магнитном поле

В реакции излучательного распада биэкситона экситонное состояние оказывается конечным. Поэтому о свойствах ЭМ в магнитном поле можно судить, анализируя относительное расположение и спектральные сдвиги соответствующих зеемановских компонент в спектрах излучения экситонов и ЭМ, их поляризацию и относительные интенсивности. В связи с этим остановимся прежде всего на спектроскопических свойствах непрямых экситонов в магнитном поле на примере одноосно деформированных кристаллов Si и Ge *. В магнитном поле основное состояние экситона в этих кристаллах расщепляется на четыре спиновых подуровня. В малых магнитных полях, когда циклотронная энергия $\hbar\omega_c = eH/mc \ll$ Ry, энергию расщепленных экситонных термов можно записать в виде

$$E_{ex}(H) = E_{ex}(0) + (s_z g_e + j_z g_h) \mu_0 H + \frac{1}{2} \chi_{ex} H^2, \qquad (17)$$

где $s_z(j_z)$ — проекции спина электрона (дырки), $g_{e(h)} - g$ -факторы электрона (дырки), μ_0 — магнетон Бора. Правила отбора для непрямых переходов в Si и Ge были получены в работах [61, 62]. Они приведены в табл. 1.

4.2.1. д-факторы

Из формулы (17) видно, что величины *g*-факторов электрона и дырки, связанных в непрямом экситоне, можно определить экспериментально по расщеплению соответствующих зеемановских компонент в спектрах непрямой излучательной аннигиляции экситонов. Наиболее просто это удается сделать в одноосно сжатых кристаллах Si, в спектрах излучения которых наблюдаются все четыре зеемановские компоненты (s_z , $j_z = \pm 1/2$) [59]. Как и следовало ожидать, *g*-фактор электрона в экситоне оказался изотропным и близким к двум, *g*-фактор дырки существенно анизотропен [63]. В интересном для нас случае одноосно сжатого Si для геометрии $\mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 001 \rangle g_{h||} = 1,1$ [59] (табл. 2).

Большая интенсивность зеемановских компонент спектра излучения, отвечающих переходам из возбужденных спиновых состояний экситонов, в условиях, когда величина парамагнитного расщепления составляет несколько *kT*, указывает на отсутствие теплового равновесия в распределении непрямых экситонов в одноосно сжатом кремнии по спиновым подуровням. Это означает, что времена спиновой релаксации в одноосно сжатом кремнии существенно больше времени их жизни τ_{ex} ($\tau_{ex} \approx 10^{-6}$ с [36]). Отметим, что в недеформированном Si $\tau_s \approx 10^{-8}$ с $\ll \tau_{ex}$ [64]. Сильное увеличение времени спиновой релаксации при одноосном сжатии кремния наблюдается также и в экситонно-примесных комплексах [65]. В недеформирован-

^{*} Информация о пара- и диамагнитных свойствах прямых экситонов в недеформированном Ge содержится в обзоре Захарчени и Сейсяна [60].

ных кристаллах спин дырки в основном состоянии (Γ_8) быстро релаксирует из-за смешивания спин-орбита, а время релаксации спина электрона с изотропным *g*-фактором определяется электронно-дырочным обменным взаимодействием [65]. В одноосно сжатых кристаллах время релаксации спина дырок резко возрастает из-за снятия вырождения в валентной зоне [66]. Увеличение τ_s для дырок, в свою очередь, ведет к возрастанию и τ_s для электронов. Как будет показано ниже, учет больших времен спиновой релаксации, приводящих к отсутствию термодинамического равновесия между экситонами в различных спиновых состояниях, является весьма важным для понимания проблемы ЭМ в Si (100) в магнитном поле.

Таблица 2

	Si $\langle 100 \rangle$	Ge $\langle {\sim}100\rangle$	Ge $\langle 111 \rangle$
<i>g</i> _e , эксперимент	$1,9 \pm 0,1$ [59]	1,6 ± 0,1 [37]	$1,0\pm0,2$ [37]
g_{e}^{*} , эксперимент	2,0 [63]	1,57 [68]	0,9 [68]
$g_{h\parallel}$, эксперимент	$1,2\pm 0,2~[59]$	$\textbf{4,5} \pm \textbf{1,0} \text{ [37]}$	$\textbf{4,5} \pm \textbf{1,0} ~ \textbf{[37]}$
$oldsymbol{\mathcal{G}}^{*}_{h\parallel}$, эксперимент		6,8 [67]	6,8 [67]
$\chi_{\it ex}$, мэВ/Тл:			
расчет	0,0045 [59]	0,18 [73]	0,27 [73]
эксперимент	$0,004 \pm 0,0015$ [59]	$0,\!15\pm0,\!03~[37]$	$\textbf{0,}25\pm\textbf{0,}05~[37]$
$\chi_{\scriptscriptstyle M}$, мэВ/Тл², эксперимент	$0,010 \pm 0,002$ [59]	$0,\!50\pm0,\!08~[37]$	-
$\chi_{\rm M}/\chi_{\rm ex}$			
эксперимент	$\textbf{2,5} \pm \textbf{0,5} \text{ [59]}$	$2,7\pm0,5~[37]$	_
расчет	<3,8 [81]	<3,8 [81]	_

g-Факторы электронов и дырок в экситонах и диамагнитные восприимчивости экситонов и ЭМ в одноосно сжатых кристаллах Si (100), Ge (111) и Ge (~ 100) .

Для сравнения приведены также g-факторы свободных электронов (g_e^*) и дырок $(g_{h\parallel}^*)$

В кристаллах Ge интенсивность излучения из возбужденных спиновых состояний быстро уменьшается с ростом спинового расщепления, и отдельные зеемановские компоненты в спектре излучения экситонов разрешить не удается. Следовательно, в Ge время спиновой релаксации оказывается существенно меньше времени жизни экситонов, которое, так же как и в Si, составляет ~10⁻⁶ с. Столь сильное различие в величинах τ_s в кристаллах Si и Ge связано с тем, что в Ge, в отличие от Si, *g*-фактор электрона сильно анизотропен и рассеяние по импульсу приводит к рассеянию по спину.

Величины *g*-факторов электрона и дырки в экситоне в сильно сжатом Ge при $\mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 100 \rangle$ ($P \approx 400 \text{ МПа}$) были определены в работе [37] на основании анализа спектрального распределения излучения непрямых экситонов в π -и σ -поляризациях в магнитных полях H = 1 - 4 Тл. При $\mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 100 \rangle g$ -фактор электрона ($g_e \approx 1,6$) оказался близким к *g*-фактору свободного электрона ($g_e = 1,57$ [67]), а *g*-фактор дырки $g_h = -4,5 \pm 1$, существенно больше *g*-фактора дырки в экситоне в недеформированном ($g_h = -1,6$ [61, 62]) и несколько меньше *g*-фактора свободной дырки в предельно сильно сжатом Ge ($g_h = -6,8$ [68]). Полная информация о *g*-факторах электрона и дырки в непрямом экситоне в одноосно деформированных кристаллах Si и Ge содержится в табл. 2.

4.2.2. Диамагнитная восприимчивость непрямых экситонов в Si и Ge

Величина диамагнитного сдвига экситонного терма может быть определена экспериментально с помощью анализа отклонения зависимости $E_{w}(H)$ от линейной. С этой целью удобно представить зависимость сдвига экситонной линии в спектре от величины магнитного поля $\delta E_{_{EE}} \equiv E_{_{EE}}(s_{_{z}}, j_{_{z}}, H) - E_{_{EE}}(H=0)$ в координатах $\delta E_{_{FF}}$ /H, H. В области слабых магнитных полей зависимость $\delta E_{_{FF}}$ /H аппроксимируется прямой линией, наклон которой дает диамагнитную восприимчивость, а точка пересечения с осью ординат — величину суммарного g-фактора электрона и дырки в экситоне. На рис. 8 показаны экспериментальные зависимости $\delta E_{_{FF}} \cdot H^{-1}(H)$, измеренные по спектральным сдвигам линии излучения свободного экситона в Ge $\langle \sim 001 \rangle$ и Ge $\langle 111 \rangle$ [37]. Видно, что отклонение зависимости от линейной наступает в достаточно сильных магнитных полях $H \sim 1,5$ Тл, когда $\hbar \omega_c \sim \mathrm{Ry}/2$. Как и следовало ожидать, вследствие сильной анизотропии эффективных масс электронов и дырок величина χ_{ex} оказывается существенно анизотропной. Аналогичная ситуация наблюдается и в Si [59]. Найденные значения χ_{ev} для разных направлений магнитного поля и одноосного сжатия в Si и Ge приведены в табл. 2.

В области малых магнитных полей диамагнитную восприимчивость непрямых экситонов можно с достаточной точностью вычислить в рамках теории возмущений, если учесть анизотропию спектра масс электронов и дырок. Хорошо известно, что гамильтониан электрона с изотропным спектром, движущегося в центральном поле (без учета спинового движения), содержит поправку к энергии основного состояния вида ($e^2/8mc^2$) [**Hr**]² (так называемое ланжевеновское слагаемое) [69]. Если эффективные массы электронов и дырок оказываются тензорами, то гамильтониан, описывающий относительное движение электрона и дырки в экситоне с нулевым импульсом центра тяжести, имеет вид [70]

 $\mathscr{H}^0=\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2,$

(18)

где

$$\mathscr{H}_{0} = \frac{1}{2} \mathbf{p} m_{ex}^{-1} \mathbf{p} - \frac{e^{2}}{\varepsilon r},$$
(19)

$$\mathscr{H}_{1} = \frac{e}{c} \Big[\mathbf{A}^{e} \left(\mathbf{r} \right) m_{e}^{-1} - \mathbf{A}^{h} \left(\mathbf{r} \right) m_{h}^{-1} \Big] \mathbf{p}, \qquad (20)$$

$$\mathscr{H}_{2} = \frac{e^{2}}{2c^{2}} \Big[\mathbf{A}^{e} \left(\mathbf{r} \right) m_{e}^{-1} \mathbf{A}^{e} \left(\mathbf{r} \right) + \mathbf{A}^{h} \left(\mathbf{r} \right) m_{h}^{-1} \mathbf{A}^{h} \left(\mathbf{r} \right) \Big] + \frac{3e^{2}}{c^{2}} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} \right) M_{ex}^{-1} \mathbf{A} \left(\mathbf{r} \right), \qquad (21)$$

$$\mathbf{A}^{e,h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{H} m_{ex} m_{e,h}^{-1} \mathbf{r}], \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^{e} + \mathbf{A}^{h}$$
$$m_{ex}^{1} = m_{e}^{-1} + m_{h}^{-1}, M_{ex} = m_{e} + m_{h},$$

и считается, что в \mathscr{H}_1 симметризованы произведения координат и импульсов. Из этих выражений видно, что квадратичная по магнитному полю поправка к энергии возникает не только от \mathscr{H}_2 в первом порядке теории возмущений (диамагнетизм Ланжевена), но и от \mathscr{H}_1 во втором порядке (орбитальный парамагнетизм Ван-Флека). В случае изотропных масс \mathscr{H}_1 переходит в [71, 72]

$$\frac{e\hbar}{2m_{ex}c}\frac{m_h - m_e}{m_h + m_e} \text{HL}.$$
(22)

Момент относительного движения **L** сохраняется. В основном состоянии $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, поэтому в изотропном пределе орбитального парамагнетизма нет.

Вычисления χ_{ex} для экситонов в одноосно сжатом Ge были выполнены в работе [73]. В таких кристаллах с невырожденной валентной зоной спиновое движение с хорошей точностью отделяется от орбитального, которое описывается гамильтонианом (18). Оказалось, что, несмотря на большую анизотропию эффективных масс, основной вклад в χ_{ex} проистекает от ланжевеновского слагаемого. В частности, и в Ge $\langle 100 \rangle$, и в Ge $\langle 111 \rangle$ ван-флековская поправка не превышает нескольких процентов, и ею можно пренебречь. Для тензора диамагнитной восприимчивости непрямых экситонов в Ge в системе координат кристалла (т. е. $x \parallel \langle 100 \rangle$, $y \parallel \langle 010 \rangle$ и $z \parallel \langle 001 \rangle$) авторы [73] получили следующее выражение:

$$\chi_{ik} = - \begin{vmatrix} 0,26 & 0,05 & 0,06 \\ 0,05 & 0,26 & 0,06 \\ 0,06 & 0,06 & 0,18 \end{vmatrix}$$
 M3B/T π^2 . (23)

Этот тензор определяет диамагнитную поправку к энергии, которая дается формулой

$$\delta E_{ex}^{d} = -\frac{1}{2} \chi_{ik} H_{i} H_{k}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$
(24)

где для электронных долин, направленных вдоль осей $\langle 111 \rangle$, $\langle \overline{1}11 \rangle$, $\langle 1\overline{1}1 \rangle$ и $\langle 11\overline{1} \rangle$, поле **H** соответственно равно

 $(H_x, H_y, H_z), (H_y, -H_x, H_z), (H_y, H_x, H_z),$ и (-H_x, -H_y, H_z);

все компоненты *H*; определены относительно кристаллографических осей.



Рис. 8. Сдвиг линии излучения свободных экситонов (*a*) и изменение ее интенсивности (б) в сильно одноосно сжатых кристаллах Ge в зависимости от магнитного поля. *a* — Значки — эксперимент в условиях $\mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 1.1.16 \rangle$ (*1*) и $\mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 111 \rangle$ (*2*) [37], сплошные линии — результат расчета [73]; $\boldsymbol{\delta} - \mathbf{H} || \mathbf{P} || \langle 1.1.16 \rangle$, значки — экспериментальные измерения интегральной интенсивно-

сти линии FE в разрешенной (LA) компоненте: ($\delta I_{LA}/I_{LA}$)/H (3), и изменения отношений интенсивностей запрещенной (TA) и разрешенной (LA) компонент линии FE: $\delta (I_{TA}/I_{LA})/H$ (4); рассчитанные зависимости показаны соответственно прямыми 5 и 6 [78, 77]. Для выделения квадратичных по магнитному полю членов по оси ординат отложена измеряемая величина, деленная на величину магнитного поля.

При сжатии Ge вдоль направления (111) тензор диамагнитной восприимчивости содержит две компоненты $\chi_{ex\parallel}$ и $\chi_{ex\perp}$ — продольную и поперечную относительно *H*. Они равны

$$\chi_{e_{Y}} = -0,46$$
 мэВ/Тл², $\chi_{e_{Y}} = -0,52$ мэВ/Тл² [73].

Сравнение рассчитанных и экспериментальных значений диамагнитных восприимчивостей приводится на рис. 8 и в табл. 2. Видно, что они хорошо согласуются между собой. Сравнение диамагнитных восприимчивостей экситонов в Ge и Si и в атомах водорода, у которого $\chi_{\rm H} = 8,1\cdot10^{-17}$ мэВ/Тл², показывает, что χ_{ex} (Si) на 8 порядков, а χ_{ex} (Ge) на 10 порядков больше $\chi_{\rm H}$.

4.2.3. Магнито-штарк-эффект непрямых экситонов

При трансляционном движении свободного экситона в поперечном магнитном поле в системе координат, связанной с центром масс экситона,

возникает электрическое поле $\vec{e^r} = [(\mathbf{p}/M_{ex}c)\mathbf{H}]$ (M_{ex} и \mathbf{p} — трансляционная масса и импульс экситона). Возникновение электрического поля обусловлено тем, что в двухчастичном гамильтониане (18) появляется лоренцевское слагаемое ($2e/M_{ex}c$) $\mathbf{pA}(\mathbf{r})$, которое в комбинации с \mathcal{H}^0 и $P^2/2M_{ex}$ определяет оператор полного возмущения. Это электрическое поле поляризует экситон и приводит к подмешиванию к его основному состоянию антисимметричных состояний *p*-типа. Благодаря такому подмешиванию результирующая волновая функция свободного экситона теряет свойство симметрии относительно инверсии координат. Данное явление, получившее название магнито-штарк-эффекта, использовалось для изучения внутренней структуры и свойств трансляционной симметрии прямых экситонов на примере кристаллов CdS [74–76].

Здесь будет рассмотрено одно из интересных проявлений магнитоштарк-эффекта в спектрах непрямой аннигиляции экситона в одноосно деформированных кристаллах Ge [77]. Экситон-фононные переходы в Ge могут быть как разрешенными (с участием нечетных TO- и LA-фононов), для которых матричный элемент перехода $g_{al}(\mathbf{k}_e \mathbf{k}_h) \neq 0$ при $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_h = 0$, так и запрещенными (с участием четных TA- и LO-фононов), для которых $g_f = 0$ при $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_h = 0$ [45]. В первом приближении $g_{al} = g_0$, $g_f = \eta_e \mathbf{k}_e + \eta_h \mathbf{k}_h$. Амплитуды непрямой аннигиляции экситона с импульсом **p**, сопровождающейся испусканием фонона с импульсом **q**, отсчитанным от минимума электронной долины, для разрешенных и запрещенных переходов в изотропном случае соответственно равны

$$A_{al} = g_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \psi_{ex}^p(0), \qquad (25)$$

$$\boldsymbol{A}_{f} = \delta \left(\mathbf{p} - \mathbf{q} \right) \left[\mathbf{b} \mathbf{p} \psi_{ex}^{\mathbf{p}} \left(0 \right) - i c \nabla \psi_{ex}^{\mathbf{p}} \left(0 \right) \right], \tag{26}$$

где $b = (\eta_e m_e + \eta_h m_h) M_{ex}^{-1}$, с $= \eta_e - \eta_h$. В отсутствие магнитного поля волновая функция основного состояния экситона центросимметрична даже при анизотропном спектре эффективных масс. Поэтому $\nabla \psi_{ex}^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и вклад как в разрешенную, так и в запрещенную компоненты определяется только величиной $\psi_{ex}^{\mathbf{p}}(\mathbf{0})$. Включение магнитного поля, прежде всего, влечет за собой поперечное сжатие волновой функции основного состояния экситона $\psi_{ex}^{0}(\mathbf{r})$ [78]:

$$\psi_{ex}^{0}(r) = \frac{\exp(-r/a_{ex})}{\pi^{1/2}} \left\{ 1 + \left(\frac{\hbar\omega_{c}}{4R}\right)^{2} \left[\frac{11}{6} - \frac{r}{6a_{ex}}\left(1 + \frac{3}{2}\sin^{2}\theta\right) - \frac{r^{3}}{6a_{ex}^{3}}\sin^{3}\theta\right] \right\}$$
(27)

 $(\theta -$ угол между **r** и **H**), которое приводит к одинаковому возрастанию амплитуд непрямой аннигиляции экситона как для разрешенных, так и для запрещенных переходов. Ситуация радикально изменяется для экситонов, движущихся поперек магнитного поля, для которых из-за лоренцевского слагаемого в гамильтониане, поляризующего экситон*, к собственной волновой функции $\psi_{ex}^0(r)$ оператора \mathscr{H}^0 добавляется еще одно слагаемое:

$$\psi_{ex}^{\mathbf{p}}\left(\mathbf{r}\right) = \psi_{ex}^{0}\left(r\right) - \psi_{ex}^{0}\left(r\right) \frac{\varepsilon a_{ex}}{e} \vec{\mathscr{E}} r \left(1 + \frac{r}{2a_{ex}}\right). \tag{28}$$

Волновая функция экситона при этом теряет свойство центральной симметрии, поскольку $\nabla \psi_{ex}^{\mathbf{p}}(\mathbf{0})$ отличен от нуля и равен

$$\nabla \psi_{ex}^{p}\left(0\right) = -\psi_{ex}^{0}\left(0\right) \frac{\varepsilon a_{ex}}{e} \vec{e}.$$
(29)

При этом возникает добавка к кинетической энергии

$$-\frac{9}{4}\varepsilon a_{ex}^3 \mathscr{E}^2 = \frac{p_\perp^2}{2M_{ex}} \frac{9m_{ex}}{8M_{ex}} \left(\frac{\hbar\omega_c}{R}\right)^2,\tag{30}$$

означающая увеличение в магнитном поле трансляционной массы экситона в направлениях, перпендикулярных **Н**.

Из формул (25), (26), (28) и (29) получается следующее выражение для отношения интенсивностей запрещенной и разрешенной компонент экситон-фононной люминесценции [77]:

$$\frac{I_f}{I_{al}}(\mathbf{H}) = \left\langle \mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{c}\frac{\varepsilon\vec{e} a_{ex}}{e} \right\rangle, \tag{31}$$

где скобки означают усреднение по больцмановскому распределению экситонов. Зависимость от магнитного поля возникает в выражении (31) дважды: во-первых, $\mathscr{E} \sim H$ и, во-вторых, вследствие перераспределения экситонов в импульсном пространстве из-за изменения трансляционной массы. Таким образом, более быстрый рост интенсивности запрещенной компоненты по сравнению, с разрешенной вызван исключительно магнито-штарк-эффектом.

На рис. 8 проводится сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей отношения интенсивностей запрещенной и разрешенной компонент I_f/I_{al} для экситонов в Ge $\langle \sim 100 \rangle$. При расчете использовались значения $m_{ex}/M_{ex} = 1/8$, $a_{ex} = 160$ Å [73] и отношение параметров |c|/|b| = 2, которое вытекает из экспериментально найденного в работах [45, 80] отношения $\eta_e^2/\eta_h^2 \leq 1/10$. Приближение слабого поля $\hbar\omega_c \ll$ Ry, в рамках которого проводился расчет, справедливо в полях H < 0,7-1 Тл. В работе [78] было найдено, что зависимость $I_{al}(H)$ именно в этих полях начинает отличаться от квадратичной. Из рис. 8 видно, что отношение I_f/I_{al} , где фактор $\psi_{ex}^0(0)$ сократился, хорошо описывается в более широком интервале полей (до $H \sim 3$ Тл).

^{*} Поляризация экситона из-за движения в пределе сильных магнитных полей $\hbar\omega_c \gg {
m Ry}$ была отмечена и вычислена в работе [79].

Следует подчеркнуть различие между магнитными свойствами атомарных газов и экситонов в полупроводниках. Поправки к волновой функции покоящегося экситона, пропорциональные H^2 , определяются приведенной массой и, следовательно, аналогичны соответствующим поправкам в атомах. Поправки же от магнито-штарк-эффекта определяются трансляционной массой M и, вследствие этого, более существенны для экситонов, так как $M_{at} \gg M_{ex}$.

4.3. Диамагнитная восприимчивость ЭМ

По аналогии с молекулой водорода следует ожидать, что в сильно сжатых кристаллах Ge с простыми электронной и дырочной зонами ЭМ в основном состоянии имеют нулевой результирующий спиновый момент. В этом случае энергию ЭМ в области слабых магнитных полей можно записать в виде

$$E_{M}(H) = E_{M}(0) + \frac{1}{2}\chi_{M}H^{2}.$$
 (32)

G учетом выражения (17) для энергии экситонного терма находим, что изменение энергии связи ЭМ в магнитном поле при s_z , $j_z = \pm 1/2$ равно

$$\Delta_{M}(H) - \Delta_{M}(0) = \left(\left| \boldsymbol{g}_{e} \right| + \left| \boldsymbol{g}_{h} \right| \right) \mu_{0} H + \frac{1}{2} \delta \chi \cdot H^{2}, \tag{33}$$

где $\delta \chi = 2 \chi_{ex} - \chi_{M}$.

Несколько иная ситуация имеет место в Si, одноосно деформированном вдоль оси $\langle 001 \rangle$, где электроны в основном состоянии ЭМ могут находиться в разных долинах и иметь суммарный спин S = 1. Для таких ЭМ энергия связи вообще не зависит от расщепления, связанного со спином электрона. Более того, как отмечалось выше, в сильно сжатых кристаллах Si отсутствует тепловое равновесие между различными парамагнитно расщепленными экситонными термами. Поэтому с термодинамической точки зрения экситоны в различных спиновых состояниях являются независимыми компонентами, а изменение эффективной энергии связи ЭМ определяется только разностью диамагнитных воспримчивостей χ_M и $2\chi_{ex}$:

$$\Delta_{M}(H) - \Delta_{M}(0) = \frac{1}{2}\delta\chi \cdot H^{2}.$$
(34)

Используя уравнения (32)—(34) и указанные выше значения для χ_{ex} , $g_{e,h}$ и $\Delta_M(0)$, можно оценить величину критического поля, в котором должно происходить разрушение ЭМ. При $\chi_M = 10\chi_{ex}$ ЭМ должны были бы разрушаться только вследствие их большого диамагнетизма: в Si при H = 1 Tл, а в Ge уже при $H \sim 0,2$ Тл. При $\chi_M = 2\chi_{ex}$ ЭМ в Si должны были бы оставаться стабильными в любых полях, а ЭМ в Ge разрушались бы из-за спинового расщепления электронов и дырок при $H \sim 1,5$ Тл. Диамагнитная восприимчивость экситонных молекул рассчитывалась Эдельштейном [81]. Он рассмотрел поправки к энергии, пропорциональные квадрату магнитного поля, возникающие как в первом (диамагнетизм Ланжевена), так и во втором (орбитальный парамагнетизм Ван-Флека) порядках теории возмущений. В частности, было установлено, что в случае биэкситона ланжевеновская поправка к энергии не сводится к среднему значению от квадрата какого-либо расстояния, как это имеет место в многоэлектронном атоме. В расчетах использовалась вариационная волновая функция ЭМ, взятая из [14, 15]. Величины ланжевеновской и ван-флековской поправок зависят от выбора системы координат, в то время как их сумма является константой. Наименьшая величина ланжевеновской поправки к энергии, найденная в [81] численным интегрированием, оказалась равной

$$\delta E_{M}^{d} \approx 11.4 \frac{e^{2} H^{2}}{6 m_{ex} c^{2}} a_{ex}^{2}.$$
(35)

Напомним, что для одного экситона диамагнитный сдвиг энергии равен

$$\delta E_{ex}^d \approx 3 \frac{e^2 H^2}{6m_{ex}c^2} a_{ex}^2. \tag{36}$$

Отсюда с учетом, что ван-флековский парамагнитный член дает отрицательный вклад в энергию основного состояния ЭМ, для отношения диамагнитных восприимчивостей биэкситона и экситона следует оценка [81]

$$\frac{\chi_M}{2\chi_{ex}} < 1,9, \tag{37}$$

согласно которой $\chi_{\!_M}$ ненамного отличается от удвоенной восприимчивости свободного экситона.

Экспериментальные исследования влияния магнитного поля на стабильность ЭМ были проведены для Si [49, 59] и для Ge [37, 50]. ЭМ в Si сохраняют стабильность во всем исследованном интервале полей $H \leq 8$ Tл. Линия излучения ЭМ в магнитном поле уширяется из-за зеемановского расщепления конечного состояния — экситона. Оценка изменения энергии связи ЭМ в Si в магнитном поле была сделана в работе [49] по изменению отношения интенсивностей линий излучения ЭМ и экситонов при фиксированной температуре. При увеличении H до 8 Tл при 2 K I_M/I_{FE} уменьшается меньше, чем в три раза, откуда следует, что $\chi_M < 2,7\chi_{ex}$.

В германии, в отличие от кремния, интенсивность линии излучения ЭМ в магнитном поле быстро уменьшается, и эта линия практически исчезает в спектре уже в полях $H \sim 1,5$ Тл даже при T = 1,6 К (рис. 9). Линия FE при этом возрастает из-за увеличения числа экситонов вследствие диссоциации ЭМ. Интегральная интенсивность излучения изменяется слабо, так как квантовые выходы ЭМ и экситонов близки. Найденная экспериментально величина критического магнитного поля для ЭМ близка к оцененной выше

исходя только из величин спинового расщепления электронов и дырок. Следовательно, и в Ge χ_M близка к $2\chi_{ex}$. Величина χ_M была определена из анализа зависимости отношения интенсивностей линий экситонов и ЭМ — I_M/I_{FE}^2 — от магнитного поля [37]. В условиях термодинамического равновесия из равенства химических потенциалов $\mu_M = 2\mu_{ex}$ вытекает, что в газовой фазе изменение отношения n_M/n_{ex}^2 в магнитном поле должно описываться соотношением [37]

$$F(H) \equiv \frac{n_M(H)}{n_{ex}^2(H)} \left(\frac{n_M(0)}{n_{ex}^2(0)} \right)^{-1} = \exp\left(\frac{H^2 \delta \chi/2}{kT}\right) f(g_e, g_h, H, T),$$
(38)

где плотности экситонов и ЭМ при H = 0 связаны соотношением (13). Функция f описывает уменьшение доли ЭМ из-за парамагнитного расщепления:

$$f = 4 \left[ch \frac{(g_e + g_h)\mu_0 H}{2kT} + ch \frac{(g_e - g_h)\mu_0 H}{kT} \right]^{-2}.$$
 (39)

Из экспериментальной зависимости I_M/I_{FE}^2 (см. вставку на рис. 9) следует, что в Ge, так же как и в Si, $\chi_M = (2,5 \pm 0,5) \chi_{ex}$.



Рис. 9. Влияние магнитного поля на спектры излучения экситонов и ЭМ в Ge (~001) [37]. Спектры 1-4 записаны при $T_b = 1,5$ К. H = 0, 0, 4, 0,8 и 1,2 Тл соответственно. На вставке показано изменение в магнитном поле отношения интенсивностей линий излучения ЭМ и экситонов I_M/I_{FE}^2 . Эксперимент — кривая *F*; расчет без учета диамагнитных сдвигов линий FE и M (т. е. при $\delta E_M = 2\delta E_{ex}$) — кривая *f*. Полученное из отношения экспериментальных значений *F* и *f* изменение энергии связи ЭМ — кривая $\Delta - \Delta_H$.

Интересно отметить, что при фиксированном магнитном поле, таком, что спиновое расщепление $(|g_e| + |g_h|) \mu_0 H$ больше энергии связи ЭМ $\Delta_M(0)$, относительная доля ЭМ в Ge не уменьшается, а, наоборот, возрастает с увеличением температуры из-за перераспределения экситонов по спиновым подуровням и заполнения возбужденных спиновых состояний. Такое возрастание доли ЭМ наблюдается экспериментально в кристаллах Ge $\langle {\sim}100\,\rangle$ при H=1-1,2 Tл в интервале температур 1,5–2,5 К.

Таким образом, из исследований ЭМ в Ge $\langle \sim 100 \rangle$ и Si $\langle 100 \rangle$ в магнитном поле следует, что, несмотря на большой размер ЭМ, их диамагнитная восприимчивость близка к двум экситонным. Этот результат согласуется с измерениями χ_{M} в прямозонном полупроводнике CdS, выполненными в работе [82], в которой было найдено, что $\chi_{M} = 2,4 \chi_{ex}$. Следовательно, парные электрон-дырочные корреляции в ЭМ столь же сильны, как и в свободном экситоне. Дестабилизация ЭМ в германии связана главным образом с тем, что экситоны с ориентированными по спину электронами и дырками не могут образовать устойчивого молекулярного состояния из-за сильного обменного отталкивания. Обратим внимание, что мы рассматривали выше только предел достаточно слабых магнитных полей $\hbar\omega_c <$ Ry, когда экситоны еще не являются диамагнитными.

4.3.1. Спин-ориентированный газ экситонов в одноосно деформированном Ge

Известная теоретическая концепция, основанная на целочисленности экситонного спина, предсказывает квантовое статистическое поведение системы экситонов большой плотности в полупроводниках при низких температурах и возможность бозе-эйнштейновской конденсации экситонов, если отталкивание между экситонами на близких расстояниях преобладает над вандер-ваальсовым притяжением [83-86]. Между обычными экситонами в полупроводниках, как обсуждалось выше, преобладают силы притяжения, и они связываются в ЭМ или в плотную металлическую электронно-дырочную жидкость. Качественно иная ситуация возникает в экспериментах с экситонами в сильно одноосно сжатых кристаллах Ge $\langle \sim 001 \rangle$. В этом случае при $T \lesssim 2$ К и H > 1 Тл, когда парамагнитное расщепление в экситоне становится больше $\Delta_{M}(0)$ и средней тепловой энергии экситонов, ЭМ оказываются диссоциированными из-за обменного отталкивания между спин-ориентированными экситонами. Экспериментально также было найдено, что магнитные поля до 5 Тл не стабилизируют электронно-дырочную жидкость (из-за большой величины диамагнитного вклада в энергию основного состояния жидкой фазы, связанного с диамагнетизмом Ландау [40]). Поэтому в Ge (~001) в магнитных полях *H* = 2–5 Тл при низких температурах возникает уникальная возможность исследовать квантовое статистическое поведение спин-ориентированного экситонного газа вплоть до плотностей, когда наступает их ионизационное разрушение [87, 88].

Информацию о статистическом поведении экситонного газа при изменении его плотности удается почерпнуть из анализа формы экситон-фононных спектров излучения. Соответствующий эксперимент выполнялся в работах [87, 88](рис. 10). С ростом концентрации экситонов экситонная линия сначала сужается в соответствии с изменением распределения экситонов в зоне согласно статистике Бозе — Эйнштейна:

$$I_{FE}(E) \sim \sqrt{E} f_{BE} = \sqrt{E} \left[\exp\left(\frac{E - \mu_{ex}}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}.$$
(40)

При больших *n*_{ex} начинает сказываться взаимодействие между экситонами и линия излучения экситонов начинает уширяться (см. рис. 10).



Рис. 10. Изменение LA-компоненты спектра (π -поляризация) излучения спин-ориентированных экситонов в Ge (\sim 100) с ростом плотности возбуждения [87, 88]. *a*) H = 5 Тл, $T_b = 1,75$ К, W (Вт/см²) = 3 (1), 40 (2) и 200 (3), значками показана аппроксимация формы спектра в рамках больцмановского (4) и бозе-эйнштейновского распределения экситонов (5); б) зависимости полуширины линии излучения экситонов от ее интегральной интенсивности, значки — эксперимент при $T_b = 1,75$ К (7) и 2,15 К (6), ожидаемая зависимость γ (T_{ex}) для идеального бозе-газа экситонов показана сплошной линией, а для больцмановского распределения экситонов и штрих-пунктирной (без учета разогрева экситонной системы) и штриховой (с учетом такого разогрева).

В условиях, когда взаимодействие между экситонами невелико, в этих экспериментах на основании аппроксимации формы линий излучения экситонов выражением (40) удается независимо определить их химический потенциал μ_{ex} и, следовательно, плотность экситонов. Вплоть до концентраций экситонов, отвечающих безразмерному параметру $r_s = 3$, газ экситонов еще остается слабо взаимодействующим (параметр r_s характеризует плотность экситонов в единицах боровского радиуса $r_s = [(3/4\pi)na_{ex}^3]^{1/5})$. Из рис. 10 видно, что взаимодействие между экситонами приводит в первую очередь к уширению красного края линии излучения экситонов и к сдвигу ее максимума в фиолетовую сторону. По этому уширению впервые была экспериментально оценена эффективная длина рассеяния экситонов, которая оказалась равной $a_s^{ex} \approx a_{ex}$. Это значение a_s близко к известному для водоро-

да $a_s^H \sim 0,8a_H$ [89] и существенно меньше ожидаемого из расчетов $a_s^{ex} \sim 8a_{ex}$ [90, 91]. В случае спин-ориентированного газа экситонов в Ge $\langle \sim 001 \rangle$ пока не удалось реализовать условий, соответствующих бозе-эйнштейновской конденсации. Как известно, для идеального бозе-газа критическая концентрация для конденсации в импульсном пространстве связана с температурой соотношением [92]

$$n_{c} = \frac{\nu \left(MT\right)^{3/2}}{\left(3,31\right)^{3/2} \hbar^{2}},\tag{41}$$

где ν — кратность вырождения, M — масса. Из формулы (41) следует, что для спин-ориентированного газа экситонов в Ge критическая плотность есть $r_s^c \approx 3,2 \ T^{-1/2}$ (K). В области реализованных экспериментально температур $T\gtrsim 2$ К r_s^c оказывается меньше 2,3, т.е. попадает в область плотностей, где экситоны разрушаются из-за экранировки кулоновского взаимодействия в столь плотной экситонной системе [88, 93–95]. Дальнейшее понижение температуры связано со значительными экспериментальными трудностями изза неравновесной природы экситонной системы. Тем не менее очевидно, что спин-ориентированный газ экситонов на примере Ge $\langle \sim 001 \rangle$ является новым нетривиальным квантовым объектом.

Отметим также, что исследования формы линии излучения очень плотного экситонного газа были выполнены недавно в прямозонном полупроводнике Cu_2O с дипольно запрещенными прямыми переходами [96, 97]. В этих кристаллах образование ЭМ невозможно из-за сильного обменного взаимодействия [98]. Вследствие этого в Cu_2O удается получать большие плотности экситонов. В работах [96, 97] не было обнаружено сужения с ростом плотности возбуждения линий излучения как синглетных, так и триплетных экситонов, однако было найдено, во-первых, что возрастание полуширины линии триплетных экситонов с ростом W происходит медленнее, чем ожидалось исходя из оценок разогрева экситонной системы возбуждающим излучением, и, во-вторых, что при больших W у этой линии оказывается очень широким длинноволновый край. Эти результаты хорошо согласуются с полученными для непрямых экситонов в Ge $\langle \sim 100 \rangle$.

4.4. ЭМ в сильном магнитном поле

До сих пор мы рассматривали влияние на ЭМ слабых магнитных полей, когда магнитная энергия является слабым возмущением по сравнению с кулоновской, т.е. в условиях $\hbar \omega_c < \text{Ry}$. В этих условиях нижним состоянием является синглетный терм с $\mathbf{S} = \mathbf{J} = 0$, а триплетный терм (\mathbf{S} и/или $\mathbf{J} = 1$) является отталкивательным. Здесь \mathbf{S} характеризует суммарный спин электронов, а \mathbf{J} — дырок. В случае водорода отталкивательный характер у триплетного терма сохраняется на расстояниях $R \leq 8a_{H}$, где a_{H} — боровский радиус атома водорода [69]. Магнитное поле расщепляет этот терм, и в случае больших полей ($\hbar\omega_c \gg \text{Ry}$) может оказаться, что не только его нижняя ветвь опустится ниже синглетного терма, но и глубина потенциальной ямы у этой ветви будет достаточной для образования связанного состояния [99–102].

Обнаруженная в германии диссоциация ЭМ в магнитном поле $H \sim 1-5$ Тл связана с тем, что в этих полях ориентированные по спину электроны и дырки еще не могут образовать устойчивой молекулярной орбитали с триплетными состояниями электронов и дырок. Область экспериментально исследованных до настоящего времени полей $H \leq 8$ Тл и в Si, и в Ge еще далека от предела сильного магнитного поля, рассмотренного в работах [99–102], в котором ожидается стабилизация молекулярных состояний. Для реализации такого предела в случае германия нужны поля порядка нескольких десятков тесла.

5. Экситонные молекулы в прямозонных полупроводниках

Рассмотрим теперь оптические явления, связанные с экситонными молекулами в прямозонных полупроводниках. В этих полупроводниках резонансное возбуждение и излучательный распад биэкситонов могут происходить без участия фононов. Вероятности прямых, разрешенных в нулевом порядке по волновому вектору переходов, сопровождающихся рождением или излучением биэкситонов, на много порядков превышают соответствующие вероятности для непрямозонных полупроводников. Времена жизни биэкситонов при прямой бесфононной рекомбинации столь коротки, что в системе экситонов и биэкситонов, как правило, не устанавливается термодинамическое равновесие. Поэтому для экспериментального изучения свойств биэкситонов в таких полупроводниках были развиты нелинейнооптические методы — двухфотонное возбуждение, двухфотонное комбинационное рассеяние и др. — оказавшиеся наиболее эффективными в условиях такой неравновесности. Методы нелинейной оптики менее пригодны для изучения спектра биэкситонов в непрямозонных полупроводниках из-за малой вероятности соответствующих переходов.

Далее, прямые дипольно-разрешенные переходы в экситонные состояния происходят, как известно, при сильном свето-экситонном смешивании [103], поэтому при достаточно низких температурах и в условиях, близких к резонансному двухфотонному возбуждению или рассеянию с участием биэкситонов, становятся существенными поляритонные эффекты. Эти эффекты отсутствуют при непрямой рекомбинации с участием бриллюэновских фононов.

Основные свойства биэкситонов и методы их исследования рассмотрим на примере сульфида кадмия, прямозонного полупроводника с вюрцитной решеткой (группа симметрии $C_{_{6\nu}}$), где экстремумы зоны проводимости и

наивысшей валентной зоны имеют симметрии Γ_7 и Γ_9 соответственно и расположены в центре зоны Бриллюэна. Зависимости энергий экситонов E_{ex} и биэкситонов E_m от их волновых векторов \mathbf{k}_x и **К** описываются, в пренебрежении анизотропией кристалла, соотношениями

$$\begin{split} E_{ex}\left(\mathbf{k}_{x}\right) &= E_{ex}\left(0\right) + \frac{\hbar^{2}\mathbf{k}_{x}^{2}}{2M_{ex}},\\ E_{M}\left(\mathbf{K}\right) &= E_{M}\left(0\right) + \frac{\hbar^{2}\mathbf{K}^{2}}{2M}, \end{split}$$

где $M_{ex} = m_e + m_h, M = 2M_{ex}$ — трансляционные массы экситона и биэкситона соответственно. В CdS $m_e \approx 0, 2 m_0$ изотропна, а m_h анизотропна; главные значения тензора массы для дырок $m_{h\perp} \approx 0, 7 m_0, m_{h\parallel} \approx 5 m_0$. Энергия связи Δ_M ЭМ в CdS определяется как $\Delta_M = 2E_{ex}^t(0) - E_M(0)$, где $E_{ex}^t(0)$ — энергия нижайшего состояния триплетного экситона.

5.1. Индуцированное светом превращение экситона в биэкситон

Гамильтониан взаимодействующих со светом экситонов и ЭМ в представлении вторичного квантования можно записать в виде [104]

$$H = H_{ex} + H_{M} + H_{p} + H_{exp} + H_{pM};$$

здесь

$$\begin{split} H_{ex} = &\sum_{\mathbf{k}_{x}} E_{ex} \left(\mathbf{k}_{x} \right) b_{\mathbf{k}_{x}}^{+} b_{\mathbf{k}_{x}}, \ H_{M} = \sum_{\mathbf{K}} E_{M} \left(\mathbf{K} \right) C_{\mathbf{K}}^{+} C_{\mathbf{K}}, \\ H_{p} = &\sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega \left(\mathbf{q} \right) a_{\mathbf{q}}^{+} a_{\mathbf{q}}, \end{split}$$

где H_{ex} , H_M и H_p — гамильтонианы невзаимодействующих экситонов, ЭМ и фотонов, а $b_{\mathbf{k}_x}^+$, $b_{\mathbf{k}_x}$, $C_{\mathbf{K}}^+$, $C_{\mathbf{K}}$ и $a_{\mathbf{q}}^+$, $a_{\mathbf{q}}$ — соответствующие им операторы рождения и уничтожения. Процесс однофотонного поглощения с рождением экситона определяется гамильтонианом

$$H_{exp} = \sum_{\mathbf{k}} g b_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{+} + a_{-\mathbf{k}}^{-} \right) + \text{K. c.;}$$

здесь g — константа экситон-фотонной связи, а сила осциллятора дипольноразрешенного перехода в основное состояние f_{ex} пропорциональна квадрату радиальной части волновой функции экситона в нуле $|\psi_{ex}(0)|^2$ [46].

Гамильтониан H_{pM} описывает интересующий нас процесс поглощения фотона с энергией $\hbar\omega(\mathbf{q})$ в присутствии экситона с энергией $E_{ex}(\mathbf{k}_x)$, в результате чего образуется биэкситон с энергией $E_M = E_{ex} + \hbar\omega$ и импульсом $\hbar \mathbf{K} = \hbar \mathbf{k}_x + \hbar \mathbf{q} \simeq \hbar \mathbf{k}_x (\mathbf{q} = 2\pi/\lambda - волновое число фотона):$

$$H_{pM} = \sum G_M(\mathbf{K}) C_{\mathbf{K}}^+ \left(b_{\mathbf{k}_x} + b_{-\mathbf{k}_x}^+ \right) \left(a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^+ \right) \delta \left(\mathbf{K} - \mathbf{k}_x - \mathbf{q} \right) + \kappa. \text{ c.,}$$

где $G_{M}(\mathbf{K})$ — константа связи с полем фотонов. Вероятность этого процесса записывается в виде [104]

$$P_{1}(\mathbf{K};\mathbf{k}_{x},\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle \mathbf{K} \middle| H_{pM} \middle| \mathbf{k}_{x},\mathbf{q} \right\rangle \right|^{2} \delta\left(E_{M} - E_{ex} - \hbar\omega \right) =$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left| G_{M}(\mathbf{K}) \right|^{2} \delta\left(\mathbf{K} - \mathbf{k}_{x} - \mathbf{q} \right) \delta\left[E_{ex}(\mathbf{0}) - \Delta_{M} + \frac{\hbar^{2}\mathbf{K}^{2}}{4M_{ex}} - \hbar\omega \right];$$
(42)

 $G_M(\mathbf{K})$ определяется волновой функцией биэкситона, которая в общем случае может быть достаточно сложной [13–15]. Для оценки силы осциллятора перехода в простейшем приближении, когда $\Delta_M \ll \mathbf{R}$ у, биэкситон можно рассматривать как образование, состоящее из двух слабо связанных экситонов. Тогда волновые функции экситонов слабо деформируются при объединении в биэкситон, и волновую функцию ЭМ можно представить в виде симметризованного произведения волновой функции экситонов $\psi_{\rm ex}$ и функции $F(R_h)$, описывающей относительное движение экситонов в биэкситоне [10, 105]. В этом случае матричный элемент $G_M(\mathbf{K})$ будет пропорционален фурьеобразу волновой функции $F(R_h)$, а сила осциллятора перехода в пересчете на один экситон определяется выражением

$$f_M(K) = f_M(0) \left[1 + \left(\frac{a_M K^2}{2} \right)^2 \right]^{-2},$$

где $a_{_M} = \sqrt{\hbar^2/M\Delta_{_M}}$ — величина порядка размера биэкситона, а

$$\frac{f_M(0)}{f_{ex}} = \frac{16\pi a_M^3}{\Omega} \gg 1,$$
(43)

где Ω — объем элементарной ячейки кристалла.

Соотношение (43), впервые полученное Рашбой и др. [10, 106], показывает, что процесс индуцированного светом превращения экситона в ЭМ в прямозонных полупроводниках характеризуется гигантскими силами осциллятора.

Помножив (42) на функцию распределения экситонов в зоне и суммируя по всем \mathbf{k}_x , можно рассчитать форму линии индуцированного поглощения, что было сделано в ряде работ [105, 107, 108].

При экспериментальном исследовании индуцированного превращения экситонов в биэкситоны образец обычно возбуждается лазерным излучением в области межзонных переходов, в результате чего в экситонной зоне образуется некоторое распределение экситонов, которое в случае квазиравновесия может описываться больцмановским распределением с температурой T_{ex} . Сквозь возбуждаемый объем образца пропускается слабое широкополосное зондирующее излучение и регистрируется спектр его пропускания в зависимости от плотности или распределения экситонов. При этом наблюдаются довольно широкие полосы однофотонного поглощения, свидетельствующие об образовании биэкситонов. Индуцированное прев-
ращение экситонов в биэкситон проявляется также в других экспериментах [109], например, по четырехволновому смешиванию вблизи двухфотонного биэкситонного резонанса (см. ниже).

Однако пока отсутствуют удовлетворительные теоретические аппроксимации экспериментально наблюдаемых полос индуцированного поглощения. Дело в том, что при расчете индуцированного поглощения необходимо знать распределение экситонов в зоне. В случае CdS возникают и другие трудности, связанные с анизотропией его зонного спектра, зависимостью энергии экситонов и биэкситонов не только от абсолютной величины, но и направления их волновых векторов. Кроме того, энергия связи биэкситона сравнима с величиной продольно-поперечного расщепления Δ_{LT} поэтому при расчете биэкситонного поглощения необходимо учитывать поляритонные эффекты.

5.2. Гигантское двухфотонное поглощение с рождением биэкситона

Простейшим нелинейно-оптическим эффектом, в котором проявляется аномально большая сила осциллятора перехода, является двухфотонное поглощение [9]. Процесс двухфотонного поглощения, рассматриваемый во втором порядке теории возмущений, идет через промежуточное экситонное состояние, для которого матричный элемент перехода *g* пропорционален $\psi_{ex}(0)$. Второй этап процесса состоит в присоединении к виртуальному экситону второго экситона и характеризуется матричным элементом $G_M(K)$. В результате поглощения двух фотонов с энергиями $\hbar\omega(\mathbf{q})$ образуется биэкситон с энергией $E_M = 2\hbar\omega$ и волновым вектором $\mathbf{K} = 2\mathbf{q}$. Результирующая вероятность перехода имеет вид [104]

$$P_{2}(\mathbf{K};\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_{\mathbf{k}_{x}} \frac{\langle \mathbf{K} | H_{pM} | \mathbf{k}_{x}, \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{k}_{x}, \mathbf{q} | H_{exp} | \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}{E_{ex}(\mathbf{k}_{x}) - \hbar\omega(\mathbf{q})} \right|^{2} \delta(E_{M}(\mathbf{K}) - 2\hbar\omega(\mathbf{q})) =$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{G_{M}(\mathbf{0})g}{\Delta_{M}} \right|^{2} \delta(\mathbf{K} - 2\mathbf{q}) \delta(E_{M} - 2\hbar\omega).$$
(44)

Вероятность двухфотонного поглощения легко сравнить с вероятностью P_{ex} однофотонного экситонного поглощения в рамках модели слабо связанных экситонов в биэкситоне. В этом приближении несложно показать [106], что их отношение равно

$$\frac{P_2}{P_{ex}} \sim \left(\frac{Ry}{\Delta_M}\right)^{3/2} \left(\frac{E_0}{\Delta_M}\right)^2,$$

где E_0 — величина порядка ширины экситонной зоны. Здесь левый множитель получился в результате интегрирования числителя (44) и имеет порядок

10²−10³. Правый множитель порядка 10⁴ возник из-за резонансного знаменателя в (44). Таким образом, результирующая вероятность рассмотренного двухфотонного поглощения аномально велика, в связи с чем процесс был назван «гигантским двухфотонным поглощением». Интенсивность этого поглощения пропорциональна плотности фотонов и, согласно [9], может даже сравниться с однофотонным экситонным поглощением при разумных уровнях возбуждения (например, при 10⁷ Вт·см⁻² для CuCl).

Резонансное возбуждение биэкситонов в процессе гигантского двухфотонного поглощения было обнаружено экспериментально в кубических кристаллах CuCl и CuBr в спектрах пропускания [110] и спектрах возбуждения полосы излучательной рекомбинации биэкситонов M_L [111–113]· В CdS долгое время не удавалось обнаружить проявлений гигантского двухфотонного поглощения [114, 115]. Возникавшие экспериментальные трудности частично были связаны с тем, что линии двухфотонного поглощения в CdS маскировались интенсивными полосами поглощения экситонно-примесных комплексов (ЭПК), наблюдаемых в спектрах пропускания и возбуждения исследуемых образцов [116, 117]. Поэтому достоверные исследования гигантского двухфотонного поглощения были выполнены на особочистых образцах CdS с содержанием мелких примесей менее 10^{15} см⁻³, в которых линии экситонно-примесных комплексов были слабее линий двухфотонного поглощения [118, 119].

Приведем примеры спектров пропускания CdS при лазерном возбуждении. На рис. 11 представлены спектральные зависимости прошедшего сквозь образец CdS лазерного излучения в поляризации $\mathbf{E} \perp \mathbf{C}, \mathbf{q} \perp \mathbf{C}$. Кривым *1–5* соответствуют плотности мощности от 10 до 10⁵ Вт/см² возбуждающего излучения. Как видно из рисунка, на фоне пологого хвоста полосы экситонного поглощения, сдвигающегося с ростом уровня возбуждения в длинноволновую сторону, отчетливо наблюдаются узкие линии поглощения с энергиями 2,5499 эВ (486,102 нм); 2,5488 эВ (486,312 нм) и 2,5470 эВ (486,665 нм). Последние две линии связаны с образованием ЭПК *I*₁₈ и *I*_b, их интенсивность убывает с ростом уровня возбуждения из-за насыщения поглощения. Линия 2,5499 эВ, интенсивность которой сверхлинейно возрастает в интервале накачек от 10^2 до $3 \cdot 10^4$ Вт/см² и насыщается при более высоких уровнях возбуждения, связана с резонансным двухфотонным поглощением с рождением биэкситона. Она наблюдается только при зондировании образца узкополосным лазерным излучением и не проявляется в спектрах пропускания образца при любых плотностях мощности, если зондирующее излучение широкополосное. Действительно, при зондировании образца излучением с малой полушириной лазерной линии γ_i поглощение возникает только на частоте $\hbar\omega=E_{_M}/2$, а полуширина линии поглощения равна $2\gamma_i$ [120]. При зондировании образца широкополосным излучением возможно, как будет показано ниже, рождение биэкситонов с поглощением любых двух фотонов с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$,

удовлетворяющих условию $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = E_M$. В этом случае вместо ярко выраженной линии поглощения наблюдается рост связанного с биэкситонами поглощения в довольно широкой спектральной области ниже экситонного резонанса [121, 122].



Рис. 11. Спектральная зависимость интенсивности прошедшего сквозь CdS монохроматического лазерного излучения, поляризованного $\mathbf{E} \perp \mathbf{C}$ при температуре 2 К [118]. Кривым *1–5* соответствуют накачки 10, 10², 10³, 10⁴ и 10⁵ Вт/см².

Гигантское двухфотонное поглощение проявляется в спектрах возбуждения М- и Р-полос излучения биэкситонов [123, 124], при исследовании модуляционных спектров пропускания CdS [125] и в ряде других косвенных экспериментов. С помощью гигантского двухфотонного поглощения можно достаточно точно определить энергию связи Δ_M и энергию возбуждения биэкситона $E_M(0)$. Для CdS эти величины оказались следующими [118, 119, 123]: $\Delta_M = 4, 4 \pm 0, 2$ мэВ, $E_M = 5,0998$ эВ при $T \lesssim 2$ К.

5.3. Поляритонные эффекты

Использованный выше элементарный подход к рассмотрению явлений индуцированного и двухфотонного поглощения позволил доказать существование биэкситона в прямозонных полупроводниках и определить их характерные параметры. Однако количественное согласие между экспериментально наблюдаемой формой полосы биэкситонного поглощения и теоретическими предсказаниями было неудовлетворительным. Различные усовершенствования теории типа введения затуханий γ_{ex} и γ_{M} экситонного и биэкситонного состояний, учета продольно-поперечного расщепления экситонных состояний и их неравновесного заполнения не привели к заметному прогрессу в описании эксперимента. Дело в том, что процессы индуцированного и гигантского двухфотонного поглощения с рождением биэкситона отличаются большими вероятностями только при сильном экситон-фотонном взаимодействии. Поэтому в рассматриваемой области спектра требуется более строгий учет смешивания экситонных и фотонных состояний, т. е. переход к поляритонному представлению. При этом автоматически учитывается различие между продольными, поперечными и смешанными экситонными состояниями, эффекты пространственной дисперсии и запаздывания.

При переходе к поляритонному нредставлению вместо поперечных экситонов и фотонов в среде возникают новые одночастичные состояния экситонные поляритоны, соответствующие связанным экситон-фотонным состояниям [126–129]. Энергия поляритона $\hbar \omega_p$ и его волновой вектор **k** связаны дисперсионным соотношением следующего вида [130–132]:

$$\varepsilon_{b} + \frac{4\pi\beta(\hbar\omega)^{2}}{\left[E_{ex}\left(\mathbf{k}\right) - i\gamma_{ex}\right]^{2} - \left(\hbar\omega\right)^{2}} = \frac{c^{2}k^{2}}{\omega^{2}},\tag{45}$$

где ε_b — фоновая диэлектрическая проницаемость, $4\pi\beta$ — экситонная поляризуемость, $\gamma_{\rm ex}$ — константа затухания экситона.

На рис. 12 сплошными кривыми представлены решения уравнения (45), отвечающие нижней и верхней поляритонным ветвям. Пунктирной линией проведена кривая дисперсии фотонов $\hbar\omega_T = \hbar kc/n$, а штриховой — поперечных экситонов $E_{ex}^T \left(k_x^T\right)$. Штрихпунктирной линией проведена кривая $E_{ex}^L \left(k_x^L\right)$, которая является решением уравнения $\varepsilon = \left(k_x^L\right)^2 c^2/\omega^2 = 0$ и отвечает продольным экситонам, не взаимодействующим со светом. Из рисунка видно, что только вблизи экситонного резонанса (т. е. при **k**, близком к световым) кривые дисперсии поляритонов значительно отличаются от соответствующих кривых дисперсии фотонов и поперечных экситонов. Вдали от экситонного резонанса, где кривые дисперсии поляритонов, говорят соответственно о «фотоноподобных» и «экситоноподобных» поляритонах. Вклад «фотонной» и «экситонной» компонент в поляритонное состояние определяется коэффициентами A(k) и B(k) [105, 133]:

$$A = (1 - x^{2}) [1 + 4\pi\beta (1 - x^{2})]^{1/4} \left(\sqrt{(1 - x^{2})^{2} + 4\pi\beta} \right)^{-1},$$

$$B = \sqrt{4\pi\beta / [(1 - x^{2})^{2} + 4\pi\beta]},$$

где $x = \hbar \omega(k) / E_{ex}^{T}(k)$.

В работах [25, 134] определена энергетическая структура биэкситонных состояний и рассмотрены правила отбора для процесса двухфотонного поглощения с образованием биэкситонов в прямозонных полупроводниках. В частности, для CdS матричный элемент перехода, отвечающего поглощению двух фотонов с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ с образованием биэкситона в основном состоянии Γ_1 , пропорционален ($\mathbf{e}_{1\perp}\mathbf{e}_{2\perp}$) — скалярному произведению проекций векторов поляризации фотонов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 на плоскость, перпендикулярную оси **С** кристалла [135].



Рис. 12. Кривые дисперсии экситонов, фотонов и поляритонов вблизи экситонного резонанса в CdS при гелиевой температуре [138]. Крестиками приведены полученные методом ГКР экспериментальные значения $\hbar \omega_p(k)$

С учетом этого, вероятность образования биэкситона в результате слияния двух поляритонов с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$, волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и поляризациями \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 описывается, согласно [104], соотношением

$$P(\mathbf{K};\mathbf{k}_{1},\mathbf{k}_{2}) = \frac{2\pi}{\hbar} |(\mathbf{e}_{1\perp}\mathbf{e}_{2\perp})|^{2} |G_{M}(\mathbf{K})[A(\mathbf{k}_{1})B(\mathbf{k}_{2}) + A(\mathbf{k}_{2})B(\mathbf{k}_{1})]|^{2} \delta(\mathbf{K}-\mathbf{k}_{1}-\mathbf{k}_{2})\delta(E_{M}-\hbar\omega_{1}-\hbar\omega_{2}), \qquad (46)$$

где, как и ранее, через $G_M(\mathbf{K})$ обозначен матричный элемент перехода. В результате такого процесса поглощения двух поляритонов образуется биэкситон с энергией $E_M = \hbar \omega_1 + \hbar \omega_2$ и волновым вектором $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ в соответствии с законами сохранения. Вероятность процесса мало зависит от того, являются ли поляритоны «экситоноподобными» или «фотоноподобными», насколько различаются их энергии, образованы они фотонами лазерного излучения или же возникли в результате термализации экситонов после межзонного возбуждения. Таким образом, переход к поляритонному представлению устраняет различие между «гигантским двухфотонным» и «индуцированным» поглощениями: оба процесса описываются на языке поглощения двух поляритонов с вероятностью, которая дается формулой (46).

5.4. Индуцированная биэкситонами реабсорбция. Дисперсия биэкситонов

В работе [136] для исследования биэкситонных состояний использовались модифицированные варианты индуцированного поглощения. Образец возбуждался лазерным излучением с энергиями фотонов $\hbar\omega_i < E_{_{ev}}(0)$ и, таким образом, создавалось неравновесное распределение поляритонов с энергиями $\hbar\omega_i \pm \gamma_i$. Далее, как обычно, возбуждаемый объем образца зондировался слабым широкополосным излучением и исследовался спектр его пропускания. В работе [137] для регистрации биэкситонного поглощения в качестве зондирующего света предложено использовать собственно рекомбинационное излучение, исходящее из возбуждаемого объема, и исследовать спектр его реабсорбции. На рис. 13 кривыми 1-6 показаны спектры люминесценции CdS при гелиевой температуре, возбуждаемого перестраиваемым лазерным излучением с энергиями фотонов от 2,5623 до 2,5563 эВ при плотности мощности возбуждения 10⁵ Вт/см². Видно, что в спектрах люминесценции отчетливо наблюдаются минимумы, положение которых $\hbar\omega_{abs}$ сдвигается при изменении энергии возбуждающих фотонов $\hbar\omega_i$ так, что сумма $\hbar\omega_{abs} + \hbar\omega_i$ не зависит от $\hbar\omega_{,}$ и незначительно изменяется при изменении направления волновых векторов фотонов возбуждающего излучения **q**.

Наблюдаемая реабсорбция связана с поглощением фотонов рекомбинационного излучения с энергией $\hbar \omega_{abs}$ и волновым вектором ${f k}_{abs}$, которые вместе с рождаемыми с помощью лазера поляритонами образуют биэкситоны с энергиями $E_{M} = \hbar \omega_{i} + \hbar \omega_{abs}$ и волновыми векторами $\mathbf{K} = \mathbf{q}_{i} + \mathbf{k}_{abs}$. В эксперименте есть возможность изменять от 0 до 180° угол между направлением волновых векторов возбуждающих фотонов **q**, и направлением наблюдения рекомбинационного излучения, из которого поглощаются фотоны с волновыми векторами **k**_{abs}. Тогда волновой вектор рождающихся в результате наблюдаемой реабсорбции биэкситонов будет изменяться от $|{f K}^{\it max}| = |{f q}_i| + |{f k}_{\it abs}| pprox 2q_i = 2\omega_i n/c pprox 10^6$ см $^{-1}$ до $|{f K}^{\it min}| pprox |{f q}_i| - |{f k}_{\it abs}| pprox 0$. Биэкситоны с различными волновыми векторами К ^{min} < К < К ^{max} имеют слегка различные значения энергии $E_{M}(K)$, что и наблюдалось экспериментально [138]. На рис. 14 представлены экспериментально измеренные зависимости энергии биэкситона $E_{_M}=\hbar\omega_{_{abs}}+\hbar\omega_{_i}$ от величины волновых векторов биэкситона $|\mathbf{K}| = |\mathbf{q}_i + \mathbf{k}_{abs}|$, измеренные при различных углах между \mathbf{q}_i и ${f k}_{_{abs}}$. Сплошной линией проведена кривая $E_{_M}(K)=E_{_M}(0)+(\hbar^2K^2/2M),$ дающая наилучшее согласие с экспериментальными результатами. Найденные

в результате подгоночные параметры $E_{_M}(0) = 5,0994$ эВ и $M = (1,7-2,4) M_{_{ex}}$ хорошо совпадают с данными, полученными другими методами.



Рис. 13. Спектры люминесценции CdS, в которых наблюдаются индуцированные биэкситонами линии реабсорбции, при температуре 5 К и различных энергиях фотонов $\hbar \omega_i$ возбуждающего излучения мощностью 10⁵ Вт/см² [137].



Рис. 14. Кривая дисперсии $E_M(K)$ Γ_1 -биэкситона в CdS при температуре 5 K, измеренная методом индуцированной реабсорбции [138].

Отметим, что при изменении угла между \mathbf{q}_i и \mathbf{k}_{abs} , когда оба излучения поляризованы перпендикулярно оси С кристалла CdS, интенсивность линий реабсорбции изменяется в соответствии с множителем $|(\mathbf{e}_{i\perp}\mathbf{e}_{abs\perp})|^2$ (см. формулу (46)). Аналогичная зависимость наблюдается при изменении угла между векторами поляризации \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_{abs} в случае, когда возбуждающее и реабсорбированное излучения распространяются параллельно оси **С**. Эти угловые и поляризационные измерения позволили однозначно установить, что в результате двухполяритонного поглощения возбуждается полносимметричное состояние кристалла Γ_1 , отвечающее двум связанным парам электронов и дырок. т. е. биэкситон. Наблюдаемый биэкситон свободен, т. е. может передвигаться по кристаллу, его трансляционная масса $M = (2, 0 \pm 0, 4) M_{ex}$, а энергия связи относительно распада на два Γ_6 -экситона равна 4,4–4,8 мэВ.

Как видно из рис. 11 и 13, интенсивность линий гигантского двухфотонного и индуцированного поглощений сравнима либо превышает интенсивность линий однофотонного поглощения с образованием ЭПК, которым отвечают силы осциллятора порядка единицы. С ростом температуры полуширина линий биэкситонного поглощения увеличивается, и они исчезают из спектров пропускания при 20–25 К, что связано с процессами термодиссоциации биэкситонов и их рассеянием на фононах.

5.5. Гиперкомбинационное рассеяние через промежуточное биэкситонное состояние

Важным инструментом исследования структуры и спектра биэкситонов и поляритонов в прямозонных полупроводниках является гиперкомбинационное (или двухфотонное комбинационное) рассеяние (ГКР). Как показано выше, если энергия возбуждающих фотонов $\hbar\omega_i$ равна $E_M/2$, то резонансно рождаются биэкситоны, которые за времена жизни порядка $10^{-9} - 10^{-10}$ с термализуются и затем излучательно рекомбинируют. Если сумма энергий двух фотонов лазерного излучения не соответствует двухфотонному резонансу биэкситонов, то в этом случае возбуждаются только виртуальные биэкситоны, которые распадаются на два поляритона. Один из этих поляритонов с энергией $E_{\rm f}$ и импульсом $\hbar {f k}_{\rm f}$ будем называть поляритоном отдачи. Он может быть либо «экситоноподобным», либо «фотоноподобным» в зависимости от условий наблюдения ГКР. Другой фотоноподобный поляритон с энергией E_{p} и волновым вектором **k**_p вылетает из кристалла в направлении наблюдения и регистрируется в виде рассеянного излучения. В отличие от случая строго резонансного двухфотонного возбуждения, здесь в промежуточном состоянии релаксации биэкситонов не происходит, а сам процесс ГКР подчиняется следующим законам сохранения энергии и импульса:

$$2\hbar\omega_i = E_R + E_f, \quad 2\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_R + \mathbf{k}_f. \tag{47}$$

Таким образом, ГКР является неразделимым процессом двухфотонного поглощения и излучательного распада на два поляритона, в котором выполняются законы сохранения (47), и его вероятность во втором порядке теории возмущений описывается выражением [104]

$$P_{\Gamma KP} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\left| C\left(2\mathbf{k}_{i}; 2\mathbf{k}_{i} - \mathbf{k}_{R}, \mathbf{k}_{R} \right) C\left(2\mathbf{k}_{i}; \mathbf{k}_{i}, \mathbf{k}_{i} \right) \right|^{2}}{E_{M}\left(2\mathbf{k}_{i} \right) - 2\hbar\omega_{i}\left(\mathbf{k}_{i}\right)} \times \delta\left(E_{f}\left(\mathbf{k}_{f}\right) + E_{R}\left(\mathbf{k}_{R}\right) - 2\hbar\omega_{i}\left(\mathbf{k}_{i}\right) \right).$$
(48)

Правый матричный элемент $C(2\mathbf{k}_i; \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i) = 4 |G_M(2\mathbf{k}_i)A(\mathbf{k}_i)B(\mathbf{k}_i)|^2$ отвечает переходу из основного состояния кристалла в промежуточное биэкситонное состояние при поглощении двух одинаковых поперечных Γ_5 -поляритонов. Он не равен нулю только для переходов в полносимметричное Γ_1 -состояние биэкситона. Левый матричный элемент

$$C\left(2\mathbf{k}_{i};\mathbf{k}_{f},\mathbf{k}_{R}\right) = |(\mathbf{e}_{f\perp}\mathbf{e}_{R\perp}) G_{M}(2\mathbf{k}_{i}) [A(\mathbf{k}_{f})B(\mathbf{k}_{R}) - A(\mathbf{k}_{R})B(\mathbf{k}_{f})]|^{2}$$

зависит от угла между векторами \mathbf{k}_{R} и $\mathbf{k}_{f} = 2\mathbf{k}_{i} - \mathbf{k}_{R}$ в соответствии с «геометрическим фактором» $|(\mathbf{e}_{f\perp}\mathbf{e}_{R\perp})|^{2}$, где $\mathbf{e}_{R\perp}$ и $\mathbf{e}_{f\perp}$ — проекции векторов поляризации рассеянного поляритона и поляритона отдачи на плоскость, перпендикулярную гексагональной оси кристалла.

Рассмотрим ниже случай, когда все принимающие участие в процессе ГКР поляритоны имеют волновые векторы, лежащие в плоскости (\mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y), перпендикулярной оси **С** кристалла CdS. В зависимости от направления наблюдения рассеянного излучения $\mathbf{n}_R = \mathbf{k}_R / |\mathbf{k}_R|$ будем различать рассеяние «назад», «вбок» и «вперед».

Рис. 15 иллюстрирует процесс ГКР. В случае рассеяния «назад» (рис. 15, *a*) два одинаковых фотона лазерного излучения возбуждают состояние кристалла с волновым вектором $2\mathbf{k}_i$ и энергией $2\hbar\omega_i$ близкое к биэкситонному Γ_1 -состоянию. Это промежуточное состояние распадается на «фотоноподобный» поляритон с волновым вектором \mathbf{k}_R^T , направленным навстречу \mathbf{k}_i , и «экситоноподобный» поперечный поляритон отдачи с волновым вектором \mathbf{k}_f^T величиной порядка $3\mathbf{k}_i$ и энергией $E_f^T(k_f^T) \approx E_{ex}^T(0) + (\hbar^2 k_f^T)^2 / 2M_{ex}$. Промежуточное состояние может распадаться также на «фотоноподобный» поляритон с энергией $\hbar\omega_R^L$ и продольный экситон с энергией $E_f^L(k_f^L) = E_{ex}^L(0) + (\hbar^2 k_f^L)^2 / 2M_{ex}$ и волновым вектором \mathbf{k}_f^L , направленным навстречу \mathbf{k}_i . В обоих случаях выполняются законы сохранения энергии и импульса (47), так что при изменении энергии фотонов $\hbar\omega_i$ возбуждающего излучения спектральное положение линий ГКР $\hbar\omega_R$ изменяется в соответствии с выражениями

$$E_{R}^{T} = 2\hbar\omega_{i} - E_{f}^{T} \left(\mathbf{k}_{f}^{T} \right),$$

$$E_{R}^{L} = 2\hbar\omega_{i} - E_{f}^{L} \left(\mathbf{k}_{f}^{L} \right).$$
(49)

Явление ГКР с участием биэкситонных состояний впервые было обнаружено в кристаллах CuCl [12, 139–141]. В работах [118, 123, 142] в спектрах излучения CdS, помимо известных линий люминесценции ЭПК, наблюдались две интенсивные линии ГКР, названные $R_T u R_L$, спектральные положения $\hbar \omega_R^T$ и $\hbar \omega_R^L$ которых изменялись в соответствии с соотношением (49) [143], а относительные интенсивности линий зависели от направления наблюдения. В силу «геометрического фактора» при наблюдении «назад» интенсивность R_L -линии была значительно слабее R_T -линии, а при рассеянии «вбок» доминировала R_L -линия.



Рис. 15. Схема процесса ГКР при возбуждении полупроводника фотонами с энергией $\hbar \omega_i$, и импульсами $\hbar k_i$. Законы сохранения энергии и импульса (47) выполняются в пространстве ($\hbar \omega$, \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y) на геометрическом месте точек, проекция которого на плоскость ($\hbar \omega$, \mathbf{k}_x) представлена штриховой линией на рис. *a*, а на плоскость (\mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y) — сплошными кривыми на рис. *б*.

Интенсивность линий в обоих случаях возрастала, в соответствии с (48), при приближении $\hbar \omega_i \kappa E_M/2$, что позволило независимо определить положение биэкситонного уровня $E_M(K = 2k_i) = 5,0998$ эВ, а из угловых и поляризационных зависимостей интенсивности линий ГКР — установить его симметрию Γ_1 [118, 138, 144].

Поведение линий ГКР при рассеянии «вперед» на малый угол $\theta \leq 30^{\circ}$ значительно отличается от случая рассеяния «назад» или «вбок». На рис. 16

представлены спектры ГКР в кристаллах CdS при температуре 2 K, угле рассеяния $\theta = 15^{\circ}$, плотности мощности возбуждающего лазерного излучения 10^{3} Вт/см² и энергиях фотонов от 2,5494 до 2,5501 эВ.



Рис. 16. Спектры ГКР в CdS в направлении «вперед» под углом $\theta = 15^{\circ}$ при температуре 2 К и различных энергиях фотонов лазерного излучения (кривые *1–6* соответственно).

Как видно из рисунка, кроме линий ЭПК, в спектрах излучения наблюдаются две линии R_T^+ и R_T^- , расположенные приблизительно симметрично относительно лазерной линии $\hbar\omega_i$. Интенсивность этих линий резонансно возрастает при приближении $\hbar\omega_i$ к $E_M/2$. Изменение волновых векторов \mathbf{k}_R^+ , \mathbf{k}_R^- и связанных с ними спектральных положений линий R_T^+ и R_T^- при изменении угла рассеяния иллюстрируется рис. 15 б, на котором в плоскости ($\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$) в виде «восьмерки» представлена проекция геометрического места точек, на котором выполняются законы сохранения энергии и импульса (47) при заданном $\hbar\omega_i$. Как видно из рисунка, в направлении наблюдения, характеризуемом углом θ , могут рассеиваться, удовлетворяя законам сохранения, поляритоны с волновыми векторами \mathbf{k}_R^+ , \mathbf{k}_R^- и \mathbf{k}_R^x . Поляритон с большим (порядка $3\mathbf{k}_i$) волновым вектором \mathbf{k}_R^x является «экситоноподобным», и соответствующая ему слабая линия ГКР наблюдается только в очень тонких совершенных образцах CdS.

При уменьшении угла рассеяния от $\theta_{max} \approx 30^{\circ}$ до 0 и неизменном $\hbar\omega_i$ абсолютная величина волнового вектора \mathbf{k}_R^- увеличивается, а \mathbf{k}_R^+ — уменьшается, приближаясь к \mathbf{k}_i . В силу этого в спектрах излучения CdS соответствующие линии ГКР R_T^- и R_T^+ приближаются к линии $\hbar\omega_i$ возбуждающего лазерного излучения. Задавшись параметрами ε_b , E_{ex}^T (0), $4\pi\beta$ и M_{ex} , определяющими закон дисперсии поперечных поляритонов (45), в работе [104] рассчитана зависимость спектрального положения R_T^+ -, R_T^- - и R_T^x -линий в CdS от угла рассеяния θ при различных значениях $\hbar\omega_i$ возбуждающего лазерного излучения. На рис. 17 приведены экспериментальные положения линий R_T^- и R_T^+ в зависимости от энергий фотонов $\hbar\omega_i$ для трех углов рассеяния: 3°, 19° и 45°. Сплошными линиями приведены соответствующие результаты теоретических расчетов, полученные решением системы уравнений (47) при условии, что закон дисперсии поляритонов описывается уравнением (45) при общепринятых параметрах ε_b , E_{ex}^T (0), $4\pi\beta$ и M_{ex} .



Рис. 17. Зависимость спектрального положения R_T^+ - и R_T^- -линий от энергии фотонов $\hbar \omega_i$ возбуждающего излучения при различных углах $\theta = 3,19$ и 45° наблюдения «вперед» [143].

Можно решить и обратную задачу: по экспериментальным зависимостям положений R_{τ} -линий от энергии фотонов возбуждающего излучения и угла рассеяния восстановить кривую дисперсии поляритонов. Действительно, поскольку можно с большой точностью определить энергии и волновые векторы возбуждающих полупроводник и рассеянных фотонов, из законов сохранения (47) можно определить волновые векторы и соответствующие им энергии поляритонов отдачи и, таким образом, построить кривую их дисперсии. На рис. 12 крестиками приведены экспериментальные значения полученных описанным образом $\hbar \omega_{f}$ и k_{f} при наблюдении ГКР в направлениях «назад», «вбок» и «вперед», а сплошной линией — теоретические кривые дисперсии поляритонов и продольных экситонов в CdS, дающие наилучшее согласие с экспериментальными данными при следующих параметрах: $\varepsilon_h = 7,5; E_{ex}^T(0) = 2,5523$ эВ, $\Delta_{IT} = 1,9$ мэВ. В настоящее время метод определения дисперсии поляритонов с помощью ГКР по точности не уступает другим методам [130–132, 145]. Этим методом была исследована описанная ниже перестройка поляритонного спектра вблизи биэкситонного резонанса.

5.6. Перестройка диэлектрической функции вблизи двухфотонного биэкситонного резонанса

Как известно, оптические свойства полупроводника (поглощение, преломление и т. д.) определяются комплексной диэлектрической функцией ε (**k**, ω), которая описывает динамический отклик среды на внешнее электромагнитное поле (зависимость от **k** возникает в средах с пространственной дисперсией [146]). При малых интенсивностях поля индукция **D** и электрическое поле **E** связаны линейно:

$$D_{i}(\mathbf{k},\omega) = \sum_{j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k},\omega) E_{j}(\mathbf{k},\omega) = \sum_{j} [\delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}(\mathbf{k},\omega)] E_{j}(\mathbf{k},\omega).$$

При больших интенсивностях поля излучения связь между **D** и **E** перестает быть линейной. В нелинейной оптике это обстоятельство учитывается разложением поляризации среды **P** по степеням **E**. Например, для кристаллов с центром инверсии это разложение имеет вид

$$\mathbf{P}(\omega) = [\chi^{(1)}(\omega) + \chi^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) | \mathbf{E}(\omega) |^2 + \dots] \mathbf{E}(\omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega),$$

где $\chi(\omega)$ — нелинейная восприимчивость, зависящая от $|\mathbf{E}(\omega)|^2$. Аналогично можно обобщить выражение

$$\mathbf{D}(\mathbf{k},\omega) = \mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{k},\omega) = \varepsilon_{\perp}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}(\omega)$$

и считать диэлектрическую функцию также зависящей от интенсивности электромагнитного поля или плотности фотонов или поляритонов [13].

Нас будет интересовать спектральная область двухфотонного (или двухполяритонного) возбуждения биэкситонов. Зная зависимость диэлектрической функции от плотности поляритонов, можно проследить за изменением оптических констант n и \varkappa , а также за перестройкой одночастичного спектра поляритонов в спектральной области двухфотонного биэкситонного резонанса. Такого рода перестройка рассматривалась впервые в работе [147]. Микроскопический расчет поперечной комплексной диэлектрической функции, зависящей от плотности поляритонов, выполнен в работах [148–151] с использованием диаграммной техники для запаздывающих поляризационных операторов (см. также [152]). Не останавливаясь на деталях расчета [153, 154], приведем результирующее выражение для $\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)$, в котором учтены пространственная дисперсия и зависимость от плотности поляритонов n_{α} вблизи двухполяритонного резонанса биэкситонов:

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k},\omega) = \varepsilon_{b} + \frac{\left(\varepsilon_{0} - \varepsilon_{\infty}\right)E_{ex}^{2}\left[\left(E_{M}^{*} - \hbar\omega_{p}\right)^{2} - \left(\hbar\omega\right)^{2}\right]}{\left[\left(E_{M}^{*} - \hbar\omega_{p}\right)^{2} - \left(\hbar\omega\right)^{2}\right]\left[E_{ex}^{*2} - \left(\hbar\omega\right)^{2}\right] - 4n_{p}\left|G_{M}\right|^{2}E_{ex}^{*}\left(E_{M}^{*} - \hbar\omega_{p}\right)}; \quad (50)$$

здесь n_p — число заполнения поляритонов с энергией $\hbar\omega_p$, G_M — матричный элемент, соответствующий возбуждению биэкситонов при слиянии пробного фотона $\hbar\omega$ с поляритоном $\hbar\omega_p$. Спектры экситонов и биэкситонов описываются выражениями

$$E_{ex}^{*} = E_{ex}(0) + \frac{\hbar^{2}\mathbf{k}_{x}^{2}}{2M_{ex}} - i\gamma_{ex}, \quad E_{M}^{*} = E_{M}(0) + \frac{\hbar^{2}\mathbf{K}^{2}}{4M_{ex}} - i\gamma_{M},$$

где γ_{ex} и γ_{M} — константы затухания экситонов и биэкситонов соответственно. В пределе слабых уровней возбуждения полупроводника ($n_{p} \rightarrow 0$) нелинейная диэлектрическая функция (50) совпадает с приведенной в левой части (45) диэлектрической функцией при линейном отклике. При $n_{p} \neq 0$ у диэлектрической функции (50) возникают особенности, соответствующие резонансному поглощению на частотах

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} \left[\left(E_{ex} + E_M - \hbar\omega_p \right) \pm \sqrt{\left(E_{ex} - E_M + \hbar\omega_p \right)^2 + 4E_R^2} \right],\tag{51}$$

где $E_R^2 = 4n_p |G_M|^2 E_{ex} (E_{ex} - \hbar\omega_p)$. Это означает, что если в результате интенсивного возбуждения в полупроводнике создается неравновесное распределение поляритонов с плотностью $n_p (\hbar\omega_p)$, либо квазиравновесное распределение экситонов (в этом случае $n_p = n_{ex}$, $\hbar\omega_p = E_{ex}$), то помимо обычного экситонного резонанса $\hbar\omega = E_{ex}$ должен наблюдаться резонанс на частоте $\hbar\omega = E_M - \hbar\omega_p$ (либо $\hbar\omega = E_M - E_{ex}$). Если возбуждение и зондирование светом производить на одной и той же частоте $\hbar\omega_p = \hbar\omega$, что соответствует условию эксперимента по наблюдению гигантского двухфотонного поглощения, то, согласно (50), резонанс наблюдается при значениях энергий фотонов $\hbar\omega = E_M/2$. Зная нелинейную диэлектрическую функцию (50) и используя уравнение ε_1 (**k**, ω) = $c^2 k^2 / \omega^2$, аналогичное (45), можно проанализировать, как перестраивается одночастичный спектр поляритонов в условиях двухфотонного возбуждения биэкситонов.



Рис. 18. Спектральная зависимость вещественной (*n*) и мнимой (\varkappa) частей комплексного показателя преломления в области экситонного и биэкситонного резонансов при различных значениях плотности поляритонов n_n .

На рис. 18 представлены рассчитанные с помощью диэлектрической функции (50) спектральные зависимости вещественной *п*<u>и мним</u>ой *к* ча-личных значениях плотности поляритонов n, и константе биэкситонного затухания $\gamma_{_M} = 3 \cdot 10^{-4}$ эВ. В общем случае при $n_{_p} \neq 0$ для вещественной части *п* возникает три решения. Это означает, что в кристалле на любой частоте *и* должны распространяться три поляритонные волны. Наибольшее расщепление нижней поляритонной ветви наблюдается вблизи биэкситонного резонанса $\hbar \omega = E_{_M}/2$. Ход дисперсии показателя преломления этих волн зависит как от концентрации поляритонов n_n возбуждающего излучения, так и от константы затухания биэкситонов γ_{M} . Входящий в выражение для $\varepsilon_{\scriptscriptstyle +}({\bf k},\omega)$ параметр $E_{\scriptscriptstyle R}^2\,$ определяет силу осциллятора двухфотонного перехода, а следовательно, эффективную величину соответствующего продольнопоперечного расщепления. С ростом n_n увеличивается расщепление между поляритонными ветвями в области биэкситонного резонанса. Из теории экситонных поляритонов известно [103, 55], что эффекты пространственной

дисперсии проявляются в оптических спектрах, когда продольно-поперечное расщепление много больше эффективного затухания. При $\gamma \gtrsim \Delta_{\iota \tau}$ кривые дисперсии $n(\hbar\omega)$ становятся классическими и в области резонансного поглощения демонстрируют хорошо известный в классической кристаллооптике аномальный ход [155, 156]. С ростом уровня возбуждения отношение $E_{_R}/\gamma_{_M}$ изменяется в широком интервале, что приводит к наблюдаемой на рис. 18, а трансформации кривых дисперсии поляритонов вблизи биэкситонного резонанса. При малых уровнях возбуждения ($n_{\rm s} \lesssim 10^{15} \, {\rm cm}^{-3}$) величина коэффициента двухфотонного поглощения $\alpha = 2\varkappa$ пропорциональна плотности поляритонов, а полуширина линии двухфотонного поглощения возрастает с увеличением константы биэкситонного затухания γ_{M} . Однако, как следует из рис. 18, б, полуширина линии поглощения определяется не только γ_{M} , но и существенно зависит от плотности поляритонов n_{p} . При возрастании уровня возбуждения, начиная с концентраций поляритонов $n_n \approx 10^{15} - 10^{16}$ см⁻³, наблюдается насыщение роста \varkappa , а при более высоких п_ происходит уменьшение коэффициента двухфотонного поглощения. При этом полуширина линии двухфотонного поглощения сверхлинейно возрастает (при неизменном $\gamma_{\rm M}$). Таким образом, теория объясняет наблюдаемые экспериментально в кристаллах CuCl и CuBr (см. рис. 11) насыщение роста коэффициента двухфотонного поглощения и уширение соответствующей линии с ростом уровня возбуждения [118, 119, 157, 158].

Отметим, что на рис. 18, а и б приведены спектральные зависимости n и ж при определенных плотностях поляритонов n_n. При сравнении реальных экспериментальных результатов с теоретическими кривыми нужно учитывать, что в области двухфотонного резонанса коэффициент поглощения α , как и показатель преломления *n*, существенно зависит от плотности поляритонов n_p , которая в свою очередь нелинейно зависит от интенсивности возбуждающего излучения I_n . Именно: $n_n = I_n / \hbar \omega_n v_e$, где $v_e = c/n [1 + c_n v_n]$ $+ (\alpha c/n\gamma_{_M})]$ — скорость переноса энергии в среде, которая в пределе малых значений коэффициентов поглощения α и затухания $\gamma_{\scriptscriptstyle M}$ переходит в групповую скорость поляритонов $v_e
ightarrow v_g = d\omega/dk$ [158]. При сканировании длины волны возбуждающего излучения (при фиксированной интенсивности I_n) вблизи биэкситонного или экситонного резонансов скорость переноса энергии у, может изменяться на несколько порядков, что проявится в соответствующем изменении плотности поляритонов. Необходимо также принимать во внимание, что интенсивность прошедшего сквозь кристалл излучения в спектральной области биэкситонного резонанса определяется уравнением

$$dI_p(z) = -\alpha (I_p)I_p dz,$$

в котором распределение коэффициента поглощения $\alpha(z)$ неоднородно по глубине образца z.

К настоящему времени уже имеются экспериментальные доказательства изменения зависимости α ($\hbar\omega$), связанные с двухфотонным или индуциро-

ванным поглощением с образованием биэкситонов в кристаллах CuCl, CuBr и CdS. Сравнение экспериментальных зависимостей α ($\hbar\omega$) с теоретическими расчетами позволяет определить не только энергию биэкситонов $E_M(0)$ в этих полупроводниках, но и ряд других параметров (матричный элемент перехода G_M , значение константы затухания γ_M).

Более сложной экспериментальной задачей является измерение изменений показателя преломления, требующее использование ряда тонких экспериментальных методик. Так, в работах [159, 160] исследовалось вращение плоскости поляризации слабого линейно-поляризованного излучения, прошедшего сквозь образец CuCl, возбуждаемый интенсивным циркулярно поляризованным излучением с энергией фотонов $\hbar \omega_p$. Согласно правилам отбора, рождение биэкситонов в основном состоянии Γ_1 возможно только в результате поглощения света с циркулярной поляризацией, противоположной возбуждающему излучению. Анализ вращения плоскости поляризации зондирующего излучения позволил определить зависящие от уровня возбуждения изменения показателя преломления $\Delta n \simeq (1-3) \cdot 10^{-3}$, связанные с индуцированным поглощением на частоте $\hbar \omega = E_M - \hbar \omega_p$ [13].

В одноосных кристаллах проводить аналогичные эксперименты крайне сложно. Поэтому, в ряде работ для регистрации изменения показателя преломления в CdS было предложено использовать метод отклонения зондирующего луча кристаллом, имеющим форму преломляющего клина [156, 161]. Измерение особенностей в отклонении зондирующего луча продемонстрировало изменение показателя преломления порядка $10^{-2}-10^{-1}$ в спектральной области вблизи $\hbar\omega = E_M/2$.

Как уже отмечалось, одним из наиболее точных методов определения кривой дисперсии поляритонов вблизи экситонного резонанса является гиперкомбинационное рассеяние. В процессе ГКР в качестве промежуточного состояния участвует биэкситон, поэтому полученные с помощью ГКР экспериментальные результаты позволяют определить малые изменения параметров, характеризующих биэкситонное состояние. На рис. 19 сплошными линиями представлены теоретически рассчитанные положения линий ГКР R_{T}^{+} и R_{T}^{-} без учета перестройки одночастичного спектра поляритонов (случай предельно малых плотностей поляритонов $n_n \rightarrow 0$). Представленные квадратиками экспериментально измеренные положения R_T^+ - и R_T^- -линий ГКР, наблюдаемого в направлении «вперед» под углом $\theta = 12^\circ$, заметно отличается от расчета при $n_{p} \rightarrow 0$. Штриховыми линиями проведены рассчитанные зависимости $\hbar \omega_{R_{t}^{T}}(\hbar \omega_{i})$ с учетом перестройки спектра поляритонов при следующих значениях подгоночных параметров: $E_{ex}^{T}(0) = 2,5523$ эВ; $\varepsilon_{b} = 7,5$; $|G_{_{M}}|^2 = 10^{-21}$ эВ² см³, $E_{_{M}}(0) = 5,0992 \pm 2 \cdot 10^{-4}$ эВ, $\gamma_{_{M}} = 0,85$ мэВ. Наилучшее согласие между экспериментальными результатами и теорией достигалось при учете зависимости плотности поляритонов от $\hbar\omega_n$ при фиксированной интенсивности возбуждающего излучения I_n.



Рис. 19. Экспериментальные и теоретические зависимости спектрального положения R_T^+ и R_T^- -линий ГКР в CdS от энергии фотонов возбуждающего излучения $\hbar \omega_i$ в области двухфотонного биэкситонного резонанса без учета (сплошные линии) и с учетом (штриховые линии) гигантского двухфотонного поглощения [138].

Таким образом, совокупность теоретических и экспериментальных работ подтверждает, что в прямозонных полупроводниках CuCl, CuBr и CdS в области биэкситонного двухфотонного резонанса наблюдаются «биполяритонные» эффекты, которые являются обобщением поляритонных эффектов вблизи экситонного резонанса.

Описанные выше зависимости показателя преломления и коэффициента двухфотонного поглощения от уровня возбуждения для прямозонного полупроводника можно использовать для наблюдения и исследования явления оптической бистабильности пропускания плоскопараллельных образцов CuCl и CdS.

Теоретическое обоснование оптической бистабильности в области биэкситонного резонанса приведено в работах [162, 151, 163].

5.7. Четырехволновое смешивание в спектральной области двухфотонного поглощения с рождением биэкситона

Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения от уровня возбуждения полупроводника можно использовать для экспериментального исследования явления четырехволнового смешивания в кристал-

лах прямозонных полупроводников в спектральной области биэкситонного резонанса [164]. В такого рода экспериментах два плоских пучка лазерного когерентного монохроматического излучения с длиной волны λ и равными интенсивностями I_n сходятся под малым углом φ на поверхности исследуемого образца. Вследствие интерференции этих пучков интенсивность I результирующего излучения имеет на поверхности полупроводника синусоидальное распределение $I = 4I_n \sin^2(\pi x/d)$ с периодом $d = \lambda/\sin \varphi$. При достаточно высокой интенсивности возбуждающего излучения вследствие перестройки спектральной зависимости коэффициента поглощения и показателя преломления они оказываются пространственно промодулированными и образуют амплитудную и фазовую решетку (динамическую голографическую решетку) с периодом d. Каждый из возбуждающих пучков испытывает дифракцию на этой решетке, так что из возбуждаемой области выходит веер дифрагированных лучей, отвечающих различным порядкам дифракции. Исследуя угловые зависимости интенсивности дифрагированного излучения, можно судить о пространственном распределении коэффициента поглощения α или показателя преломления *n* в образце, сделать оценки коэффициентов диффузии экситонов и биэкситонов в кристалле, а также их времен жизни и релаксации.



Рис. 20. Спектральная зависимость интенсивности дифрагированного в первом порядке излучения в области двухфотонного и индуцированного биэкситонных резонансов при различных уровнях возбуждения. *1* – 1; *2* – 2,5; *3* – 10; *4* – 25 и *5* – 100 кВт/см².

По спектральному распределению интенсивности дифрагированного излучения можно судить, в частности, о распространении поляритонов в

кристалле в условиях двухфотонного и индуцированного поглощения. На рис. 20 представлены спектральные зависимости интенсивности излучения, дифрагированного в первом порядке, при возбуждении CdS двумя сходящимися под углом 1,6° пучками лазерного излучения различной мощности. Как и в случае спектральной зависимости интенсивности гиперкомбинационного растения в CuCl [141] и CdS [138], интенсивность дифрагированного излучения минимальна, когда кристалл возбуждается строго в области двухфотонного поглощения $\hbar \omega = E_M / 2$ [165, 166] или индуцированного поглощения $\hbar \omega = E_M - E_{ex}$. Как показано в работе [158], такое поведение связано с особенностями реабсорбции дифрагированного излучения в возбуждаемом объеме образца.

Как и оптическая бистабильность, явление четырехволнового смешивания может иметь практическое применение в устройствах высокочастотной модуляции и отклонения лазерного излучения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненных за последние годы экспериментальных и теоретических исследований достигнут существенный прогресс в понимании структуры экситонных молекул и их оптических свойств в полупроводниках. Значительно расширился круг как изучаемых объектов, где обнаружены ЭМ, так и экспериментальных методов исследования таких четырехчастичных комплексов. К настоящему времени ЭМ обнаружены и всесторонне исследованы в ряде полупроводников, отличающихся анизотропией спектра и отношением эффективных масс электронов и дырок $\sigma = m_a/m_b$. Это позволяет сравнить результаты существующих расчетов зависимости энергии связи ЭМ от параметра σ с наиболее надежными экспериментальными измерениями (см. рис. 1). Наилучшее согласие с экспериментом дают недавно выполненные расчеты, основанные на методе Монте-Карло и формализме функции Грина [20]. Из рис. 1 видно, что количественные расхождения теории и эксперимента носят систематический характер, и, по-видимому, они связаны не только с неточным знанием волновой функции ЭМ. Значительный вклад в увеличение стабильности экситонных молекул могут привносить фононы: деформационные — в случае атомных полупроводников (типа Ge и Si) и поляризационные — в гетерополярных полупроводниках (типа CuCl, GdS и др.). Изучение этого малоисследованного вопроса представляло бы несомненный интерес.

Остаются нерешенными и другие интересные вопросы. Так, в многодолинных полупроводниках типа Ge и Si могут быть стабильны более сложные экситонные молекулы, в которых связаны более двух экситонов. Такие многочастичные структуры не имеют аналогов в молекулярной спектроскопии. Их стабильность следует из расчетов [58] и экспериментальных наблюдений устойчивых многоэкситонных комплексов, связанных с мелкой примесью, в непрямозонных полупроводниках [167–169].

Не исследован экспериментально вопрос о стабильности ЭМ в пределе сильного магнитного поля, когда кулоновская энергия много меньше циклотронной. Здесь интересно знать, будут ли устойчивы молекулярные орбитали в случае диамагнитных ортоэкситонов и каков характер парного взаимодействия таких экситонов.

В прямозонных полупроводниках сохраняют актуальность исследования нелинейной восприимчивости и перестроек диэлектрической функции вблизи двухфотонного резонанса, связанного с возбуждением ЭМ. С гигантским нелинейным откликом среды в условиях двухфотонного возбуждения ЭМ тесно связаны и перспективы исследования других нелинейно-оптических явлений — многоволнового смешивания, оптической бистабильности, динамической голографии и др.

Наконец, на наш взгляд, интересен поиск экситонных молекул и многоэкситонных комплексов в низкоразмерных, в частности двумерных, полупроводниковых структурах, например, в одиночных или многослойных гетероструктурах с квантовыми ямами [170, 171]. В таких структурах многочастичные комплексы должны отличаться заметно большей стабильностью, чем в трехмерных кристаллических средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Hylleraas, E.A. Binding energy of the positronium molecule / E.A. Hylleraas, A. Ore // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 8. P. 493–496.
- 2. Ore, A. Structure of the quadrielectron // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 12. P. 913–914.
- Lampert, M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. – 1958. – Vol. 1, Iss. 12. – P. 450–453.
- 4. Москаленко, С.А. К теории экситона Мотта в щелочно-галоидных кристаллах // Оптика и спектроскопия. 1958. Т. 5, № 2. С. 147–155.
- 5. Hanamura, E. Condensation effects of excitons / E. Hanamura, H. Haug // Physics Reports. 1977. Vol. 33, Iss. 4. P. 209–284.
- 6. Klingshirn, C. Optical properties of highly excited direct gap semiconductors / C. Klingshirn, H. Haug // Physics Reports. 1981. Vol. 70, Iss. 5. P. 315–398.
- 7. Grun, J.B. Biexcitons in CuCl and related systems / J.B. Grun, B. Honerlage, R. Levy // Excitons / ed. by E.I. Rashba, M.D. Sturge. – Amsterdam : North-Holland Pub. Co., 1982. – Ch. 11. – P. 459–504.
- Timofeev, V.B. Free many particle electron-hole complexes in an indirect gap semiconductor // Excitons / ed. by E.I. Rashba, M.D. Sturge. – Amsterdam : North-Holland Pub. Co., 1982. – Ch. 9. – P. 349–392.
- 9. Hanamura, E. Giant two-photon absorption due to excitonic molecule // Solid State Communications. 1973. Vol. 12, Iss. 9. P. 951–953.
- 10. Гоголин, А.А. Влияние взаимодействия экситонов на экситонные спектры / А.А. Гоголин, Э.И. Рашба // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17, № 12. С. 690–693.

- 11. Rashba, E.I. Gigantic oscillator strengths inherent in exciton complexes // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. Berlin : Springer, 1975. P. 150–170.
- 12. Nagasawa, N. Radiative and two-photon resonance Raman processes associated with excitonic molecules in CuCl / N. Nagasawa, T. Mita, M. Ueta // Journal of the Physical Society of Japan. 1976. Vol. 41, Iss. 3. P. 929–936.
- 13. Haug, H. Nonlinear optical phenomena and bistability in semiconductors // Festkoerperprobleme. – 1982. – Vol. 22. – P. 149–171.
- 14. Akimoto, O. Binding energy of the excitonic molecule / O. Akimoto, E. Hanamura // Solid State Communications. 1972. Vol. 10, Iss. 3. P. 253–255.
- Akimoto, O. Excitonic molecule. I. Calculation of the binding energy / O. Akimoto, E. Hanamura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1972. – Vol. 33, Iss. 6. – P. 1537–1544.
- 16. Brinkman, W.F. The excitonic molecule / W.F. Brinkman, T.M. Rice, B. Bell // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 1570–1580.
- 17. Adamowski, J. Binding energy of the biexcitons / J. Adamowski, S. Bednarek, M. Suffczynski // Solid State Communications. – 1971. – Vol. 23. – P. 2037–2038.
- Bednarek, S. Binding energy of exciton complexes in anisotropic semiconductors / S. Bednarek, J. Adamowski, M. Suffczynski // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1978. – Vol. 11, Iss. 22. – P. 4515–4522.
- Gutljansky, E.D. A theorem for dissociation energy and binding energy of biexcitons in the isotropic model of a semiconductor / E.D. Gutljansky, V.E. Khartsiev // Solid State Communications. – 1973. – Vol. 12, Iss. 11. – P. 1087–1090.
- Lee, M.A. Ground state of excitonic molecules by the Green's-function Monte Carlo method / M.A. Lee, P. Vashishta, R.K. Kalia // Physical Review Letters. – 1983. – Vol. 51, Iss. 26. – P. 2422–2425.
- 21. Inui, T. A contribution to the theory of the hydrogen molecule / Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1938. Vol. 20, № 9. P. 770–779.
- 22. Inui, T. Further contribution to the theory of hydrogen molecule / Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1941. Vol. 23, № 12. P. 992–999.
- 23. Nordsieck, A. On the value of the electric quadrupole moment of the deuteron // Physical Review. 1940. Vol. 58, № 4. P. 310–315.
- 24. Wehner, R.K. On the excitonic molecule // Solid State Communications. 1969. Vol. 7, Iss. 5. P. 457–458.
- Bassani, F. Energy level structure of biexcitons and related optical transitions / F. Bassani, J.J. Forney, A. Quattropani // Physica Status Solidi (b). 1974. Vol. 65, Iss. 2. P. 591–601.
- 26. Haynes, J.R. Experimental observation of the excitonic molecule // Physical Review Letters. 1966. Vol. 17, Iss. 16. P. 860–862.
- 27. Келдыш, Л.В. Заключительное слово // Труды 9-й Международной конференции по физике полупроводников. Ленинград : Наука, 1969. Т. 2 С. 1384.
- Келдыш, Л.В. Коллективные свойства экситонов в полупроводниках // Экситоны в полупроводниках : сб. статей / отв. ред. Б.М. Вул. – Москва : Наука, 1971. – Гл. 2. – С. 5–18.
- 29. Покровский, Я.Е. Возникновение конденсированной фазы и неравновесных носителей заряда в германии / Я.Е. Покровский, К.И. Свистунова // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9, № 7. С. 435–438.
- 30. Аснин, В.М. Конденсация экситонного газа в германии / В.М. Аснин, А.А. Рогачев // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9, № 7. С. 415–419.
- 31. Hensel, J.C. The electron-hole liquid in semiconductors: experimental aspects / J.C. Hensel, T.G. Phillips, G.A. Thomas // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. – Academic Press : New York, 1977. – Vol. 32. – P. 88–314.

- 32. Pelant, I. Excitonic molecule in AgBr / I. Pelant, A. Mysyrowicz, C. Benoit à la Guillaume // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 25. – P. 1708–1711.
- 33. Багаев, В.С. Движение электронно-дырочных капель в германии / В.С. Багаев и др. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10, № 7. Р. 309–313.
- 34. Kulakovskii, V.D. Thermodynamics of electron-hole liguid in semiconductors / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Electron-Hole Droplets in Semiconductors / ed. by C.D. Jeffries, L.V. Keldysh. – Amsterdam : North Holland, 1983. – Ch. 2. – P. 95–186.
- Rice, T.M. The electron-hole liquid in semiconductors: theoretical aspects // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. – Academic Press: New York, 1977. – P. 1–86.
- 36. Кулаковский, В.Д. Электронно-дырочная жидкость и газ экситонов и биэкситонов в упруго деформированных кристаллах кремния / В.Д. Кулаковский, В.Б. Тимофеев, В.М. Эдельштейн // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 1. С. 372–383.
- Кулаковский, В.Д. Экситоны и экситонные молекулы в деформированном германии в магнитном поле / В.Д. Кулаковский, И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, № 2(8). – С. 684–695.
- 38. Кулаковский, В.Д. Биэкситон в спектре излучения одноосно деформированного кремния / В.Д. Кулаковский, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 25, № 10. – С. 487–491.
- 39. Feldman, B.J. Density and binding energy of electron-hole droplets in uniformly stressed germanium / B.J. Feldman, H.-h. Chou, G.K. Wong // Solid State Communications. 1978. Vol. 26, Iss. 3. P. 209–211.
- 40. Кукушкин, И.В. Электронно-дырочная жидкость малой плотности в одноосно сжатом Ge / И.В. Кукушкин, В.Д. Кулаковский // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 3. С. 900–914.
- 41. Кукушкин, И.В. Излучение экситоных молекул в одноосно сжатом германии / И.В. Кукушкин, В.Д. Кулаковский, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32, № 4. – С. 304–308.
- 42. Gourley, P.L. Spatial condensation of strain-confined excitons and excitonic molecules into an electron-hole liquid in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review Letters. 1978. Vol. 40, Iss. 8. P. 526–530.
- 43. Wolfe, J.P. Strain-confined excitons and electron-hole liquid / J.P. Wolfe, C.D. Jeffries // Electron-Hole Droplets in Semiconductors / ed. by C.D. Jeffries, L.V. Keldysh. – Amsterdam : North Holland, 1983. – Ch. 5. – P. 431–507.
- 44. Wolfe, J.P. Excitons, electron-hole liquid and electron-hole plasma in stressed Si / J.P. Wolfe, P.L. Gourley // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 367–370.
- 45. Thomas, G.A. Indirect recombination mechanisms in germanium / G.A. Thomas, E.I. Blount, M. Capizzi // Physical Review B. 1979. Vol. 19, Iss. 2. P. 702–718.
- Elliott, R.J. Intensity of optical absorption by excitons // Physical Review. 1957. Vol. 108, Iss. 6. – P. 1384–1389.
- 47. Cho, K. Emission line shapes of exciton molecules in direct and indirect gap materials // Optics Communications. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 412–416.
- 48. Gourley, P.L. Properties of the electron-hole liquid in Si: Zero stress to the high-stress limit / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review B. 1981. Vol. 24, Iss. 10. P. 5970–5998.
- Edelshtein, V.M. Electron-hole liquid and free exciton and biexciton gas in uniaxially stressed Si / V.M. Edelshtein, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 383–386.
- Kukushkin, I.V. The luminescence of the excitonic molecules in uniaxially stressed Ge / I.V. Kukushkin, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Journal of Luminescence. – 1981. – Vol. 24–25, Part 1. – P. 393–396.

- 51. Кулаковский, В.Д. Парциальный состав неравновесной электронно-дырочной системы большой плотности и экситонно-плазменный переход в одноосно деформированном кремнии / В.Д. Кулаковский, И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 78, № 1. – С. 381–394.
- 52. Thewalt, M.L.W. Biexcitons in Si / M.L.W. Thewalt, J.A. Rostworowski // Solid State Communications. 1978. Vol. 25, Iss. 12. P. 991–993.
- 53. Каминский, А.С. Поляризация рекомбинационного излучения многочастичных экситон-примесных комплексов в кремнии при одноосной деформации / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76, № 5. – С. 1727–1739.
- 54. Kulakovskii, V.D. The excitonic molecule emission in the uniaxially stressed Si with the different electron valley degeneracy / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Solid State Communications. 1980. Vol. 33, Iss. 12. P. 1187–1189.
- 55. Taniguchi, M. D[–] States in germainum / M. Taniguchi, S.-I. Narita // Journal of the Physical Society of Japan. 1977. Vol. 43, Iss. 4. P. 1262–1269.
- 56. Алкеев, Н.В. Спектр и поляризация рекомбинационного излучения в деформированном кремнии / Н.В. Алкеев, А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18, № 11. С. 671–675.
- 57. Кулаковский, В.Д. Междолинная релаксация и люминесценция «горячих» экситонов в упруго деформированном кремнии / В.Д. Кулаковский, И.Б. Левинсон, В.Б. Тимофеев // ФТТ. – 1978. – Т. 20, № 2. – С. 399–401.
- Wang, J.Shy-Yih. Excitonic molecules: a possible new form of chemical bonding / J.Shy-Yih Wang, C. Kittel // Physics Letters A. – 1972. – Vol. 42, Iss. 3. – P. 189–190.
- Кулаковский, В.Д. Диамагнетизм экситонов и экситонных молекул в кремнии / В.Д. Кулаковский, А.В. Малявкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77, № 2. – С. 752–759.
- 60. Захарченя, Б.П. Диамагнитные экситоны в полупроводниках / Б.П. Захарченя, Р.П. Сейсян // УФН. 1969. Т. 97, № 2. С. 193–210.
- 61. Пикус, Г.Е. Поляризация экситонного излучения кремния под действием магнитного поля или одноосной деформации // ФТТ. – 1977. – Т. 19, № 6. – С. 1653–1664.
- 62. Аснин, В.М. Поляризация экситонной люминесценции во внешнем магнитном поле / В.М. Аснин и др. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 4. С. 1600–1609.
- 63. Бир, Г.Л. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках / Г.Л. Бир, Г.Е. Пикус. – Москва : Наука. – 1972. – 584 с.
- 64. Алтухов, П.Д. Неравновесная ориентация электронов в электронно-дырочных каплях в кремнии в магнитном поле / П.Д. Алтухов, Г.Е. Пикус, А.А. Рогачев // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25, № 3. С. 154–157.
- 65. Кулаковский, В.Д. Многочастичные экситонно-примесные комплексы в кремнии в магнитном поле / В.Д. Кулаковский, А.В. Малявкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76, № 1. – С. 272–287.
- 66. Bir, G.L. The relaxation time and the width of the spin resonance line of impurity centers in semiconductors with degenerate bands / G.L. Bir, G.E. Picus // Physics of semiconductors: Proceedings of the 7th International Conference, Paris / ed. by M. Hulin. Paris : Dunod, 1964. P. 789–794.
- Feher, G. Electron spin resonance experiments on shallow donors in germanium / G. Feher, D.K. Wilson, E.A. Gere // Physical Review Letters. 1959. Vol. 3, Iss. 1. P. 25–28.
- Hensel, J.C. Quantum resonances in the valence bands of germanium. II. Cyclotron resonances in uniaxially stressed crystals / J.C. Hensel, K. Suzuki // Physical Review B. – 1974. – Vol. 9, Iss. 10. – P. 4219–4257.
- 69. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Москва : Наука, 1974. 752 с.
- 70. Рашба, Э.И. Теория гиперболических диамагнитных экситонов / Э.И. Рашба, В.М. Эдельштейн // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, № 4. С. 1428–1442.

- Lamb, W.E. Fine structure of the hydrogen atom. III // Physical Review. 1952. Vol. 85, Iss. 2. – P. 259–276.
- 72. Нокс, Р.С. Теория экситонов. Москва : Мир, 1966. 219 с.
- Тратас, Т.Г. Диамагнитная восприимчивость непрямых экситонов в деформированном германии / Т.Г. Тратас, В.М. Эдельштейн // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, № 2(8). – С. 696–699.
- 74. Гросс, Е.Ф. Эффект инверсии магнитного поля в спектре экситонного поглощения кристалла CdS / E.Φ. Гросс, Б.П. Захарченя, О.В. Константинов // ФТТ. – 1961. – Т. 3, № 1. – С. 305–308.
- Hopfield, J.J. Fine structure and magneto-optic effects in the exciton spectrum of cadmium sulfide / J.J. Hopfield, D.G. Thomas // Physical Review. – 1961. – Vol. 122, Iss. 1. – P. 35–52.
- 76. Самойлович, А.Г. Вырождение электронного газа в полупроводниках / А.Г. Самойлович, Л.Л. Коренблит // УФН. Т. 1955. 57, № 12. С. 577–630.
- 77. Кулаковский, В.Д. Влияние движения экситонов в магнитном поле на люминесценцию. Непрямые запрещенные переходы в Ge / В.Д. Кулаковский, В.М. Эдельштейн // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86, № 1. – С. 338–342.
- 78. Bisti, V.E. Influence of magnetic field on exciton luminescence / V.E. Bisti et al. // Solid State Communications. 1982. Vol. 44, Iss. 2. P. 197–199.
- 79. Горьков, Л.П. К теории экситона Мотта в сильном магнитном поле / Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский // ЖЭТФ. 1967. Т. 53, № 2. С. 717–722.
- 80. Störmer, H.L. Magnetoluminescence of the electron-hole liquid in germanium / H.L. Störmer, R.W. Martin // Physical Review B. – 1979. – Vol. 20, Iss. 10. – P. 4213–4236.
- Эдельштейн, В.М. Диамагнитная восприимчивость экситонных молекул // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77, № 2. – С. 760–763.
- 82. Разбирин, Б.С. Биэкситоны в кристаллах А₂В₆ / Б.С. Разбирин, И.Н. Уральцев, Г.В. Михайлов // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25, № 4. С. 191–194.
- 83. Москаленко, С.А. Обратимые оптико-гидродинамические явления в неидеальном экситонном газе // ФТТ. – 1962. – Т. 4, № 1. – С. 276–284.
- 84. Келдыш, Л.В. Коллективные свойства экситонов большого радиуса / Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов // Письма в ЖЭТФ. – 1967. – Т. 5, № 7. – С. 238–242.
- 85. Blatt, J.M. Bose-Einstein condensation of excitons / J.M. Blatt, K.W. Böer, W. Brandt // Physical Review. 1962. Vol. 126, Iss. 5. P. 1691–1692.
- 86. Москаленко, С.А. Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов и биэкситонов. – Кишинев : Штиинца, 1970. – 167 с.
- 87. Кукушкин, И.В. Бозе-газ ориентированных по спину экситонов в одноосно деформированном германии / И.В. Кукушкин, В.Д. Кулаковский, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 34, № 1. – С. 36–40.
- Timofeev, V.B. Spin aligned exciton gas in uniaxially compressed Ge / V.B. Timofeev, V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin // Physica B+C. – 1983. – Vol. 117–118, Part 1. – P. 327–332.
- 89. Каган, Ю. Коллективные возбуждения в бозе-газе спин-поляризованного атомарного водорода / Ю. Каган, Г.В. Шляпников // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 34, № 6. – С. 358–362.
- 90. Келдыш, Л.В. Коллективные свойства экситонов в полупроводниках / Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов // ЖЭТФ. – 1968. – Т. 54, № 3. – С. 978–993.
- 91. Hanamura, E. Optical response of many exciton system // Solid State Communications. – 1972. – Vol. 11, Iss. 3. – P. 485–488.
- 92. Frova, A. The electron-hole system in GaSe at high densities / A. Frova et al. // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 1. P. 45–48.
- 93. Лысенко, В.Г. Спектр экситона в газе неравновесных носителей высокой плотности в кристаллах CdS / В.Г. Лысенко, В.И. Ревенко // ФТТ. – 1978. – Т. 20, № 7. – С. 2144–2147.

- 94. Бисти, В.Е. Экситонно-плазменный переход в полупроводниках / В.Е. Бисти, А.П. Силин // ФТТ. 1978. Т. 20, № 6. С. 1850–1855.
- 95. Кукушкин, И.В. Экситонно-плазменный переход в неоднородно деформированном германии / И.В. Кукушкин и др. // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84, № 3. – С. 1145–1157.
- Hulin, D. Evidence for Bose-Einstein statistics in an exciton gas / D. Hulin, A. Mysyrowicz, C. Benoit à la Guillaume // Physical Review Letters. – 1980. – Vol. 45, Iss. 24. – P. 1970–1973.
- Mysyrowicz, A.D. Study of exciton luminescence in Cu₂O / A.D. Mysyrowicz, D. Hulin, C. Benoit à la Guillaume // Journal of Luminescence. – 1981. – Vol. 24–25, Iss. 2. – P. 629–632.
- 98. Bassani, F. Biexciton binding energy in Cu₂O / F. Bassani, M. Rovere // Solid State Communications. 1976. Vol. 19, Iss. 9. P. 887–890.
- 99. Кадомцев, Б.Б. Вещество в сверхсильном магнитном поле / Б.Б. Кадомцев, В.С. Кудрявцев // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, № 1. С. 144–152.
- 100. Chui, S.T. «Excitonic» matter in a superstrong magnetic field // Physical Review B. 1974. Vol. 8, № 9. P. 3438–3446.
- 101. Жилич, А.Г. Вопросы квантовой теории атомов и молекул / А.Г. Жилич, В.С. Монозон, Б.К. Кюпер. – Ленинград : Наука, 1981.
- 102. Гадияк, Г.В. Биэкситон в сильном магнитном поле / Г.В. Гадияк, Ю.Е. Лозовик, М.С. Обрехт // ФТТ. 1983. Т. 25, № 4. С. 1063–1067.
- 103. Пекар, С.И. Кристаллооптика и добавочные световые волны. Киев : Наукова думка, 1982. 295 с.
- 104. Henneberger, F. Polariton effects in the optical spectra of excitonic molecules / F. Henneberger, J. Voigt // Physica Status Solidi (b). 1976. Vol. 76, Iss. 1. P. 313–323.
- 105. Гоголин, А.А. Влияние биэкситонов на краевое поглощение и люминесценцию // ФТТ. – 1973. – Т. 15, № 9. – С. 2746–2756.
- 106. Рашба, Э.И. Гиганские силы осцилляторов, связанные с экситонными комплексами // ФТП. – 1974. – Т. 8, № 7. – Р. 1241–1256.
- 107. Петрашку, К.Г. Поглощение света в полупроводниках, связанное с превращением экситонов в биэкситоны / К.Г. Петрашку, П.И. Хаджи // ФТП. – 1975. – Т. 9, № 6. – С. 1115–1122.
- 108. Hanamura, E. Excitonic molecule. IV. Optical properties // Journal of the Physical Society of Japan. 1975. Vol. 39, Iss. 6. P. 1516–1524.
- 109. Kuroiwa, A. Single exciton-to-excitonic molecule optical conversion in CdS / A. Kuroiwa, H. Saito, S. Shionoya // Solid State Communications. 1976. Vol. 18, Iss. 8. P. 1107–1109.
- 110. Gale, G.M. Direct creation of excitonic molecules in CuCl by giant two-photon absorption / G.M. Gale, A. Mysyrowicz // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 32, Iss. 13. – P. 727–730.
- 111. Nagasawa, N. The Bose condensation of excitonic molecules in CuCl crystals / N. Nagasawa et al.// Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 38, Iss. 2. – P. 593.
- 112. Nakata, N. The Bose condensation of excitonic molecules in CuBr crystals / N. Nakata et al. // Journal of the Physical Society of Japan. 1975. Vol. 38, Iss. 3. P. 903.
- 113. Nagasawa, N. Generation of excitonic molecules by giant two-photon absorption in-CuCl and their Bose condensation / N. Nagasawa et al. // Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 39, Iss. 4. – P. 987–993.
- 114. Mysyrowicz, A. Luminescence of CdS generated by high intensity excitation below the bandgap / A. Mysyrowicz et al. // Solid State Communications. 1975. Vol. 17, Iss. 4. P. 523–526.
- 115. Svorec, R.W. Two-photon absorption in the vicinity of the exciton absorption in CdS / R.W. Svorec, L.L. Chase // Solid State Communications. 1975. Vol. 17, Iss. 7. P. 803–806.

- 116. Voigt, J. Direct formation of excitonic molecules by optical absorption in CdS single crystals/J. Voigt, I. Rückmann// Physica Status Solidi (b). – 1974. – Vol. 61, Iss. 2. – P. K85–K89.
- 117. Лысенко, В.Г. Биэкситон в спектрах «ультрачистых» кристаллов CdS? Излучение экситонно-примесных комплексов / В.Г. Лысенко, В.Б. Тимофеев // ФТТ. – 1976. – Т. 18, № 4. – С. 1030–1033.
- 118. Nozue, Y. Resonant raman scattering under two-photon excitation of excitonic molecules in CdS / Y. Nozue, T. Itoh, M. Ueta // Journal of the Physical Society of Japan. – 1978. – Vol. 44, Iss. 4. – P. 1305–1313.
- 119. Puls, J. Excitation spectroscopy of the I2 bound exciton and the excitonic molecule in CdS II. Relation between I2-line and EM-lines / J. Puls, I. Rückmann, J. Voigt // Physica Status Solidi (b). 1979. Vol. 96, Iss. 2. P. 641–646.
- 120. Bechstedt, F. Two-photon resonance Raman scattering by excitons via an intermediate excitonic molecule. I. Bare-exciton approach / F. Bechstedt, F. Henneberger // Physica Status Solidi (b). – 1977. – Vol. 81, Iss. 1. – P. 211–220.
- 121. Saito, H. Optical formation and luminescence of excitonic molecule in CdS / H. Saito et al. // Journal of Luminescence. 1976. Vol. 12–13. P. 575–580.
- 122. Rückmann, I. Comparative optical studies of the high density exciton gas in CdS / I. Rückmann et al. // Journal of Luminescence. 1981. Vol. 24–25, Part 2. P. 593–596.
- 123. Itoh, T. Giant two-photon absorption and two-photon resonance raman scattering in CdS / T. Itoh, Y. Nozue, M. Ueta // Journal of the Physical Society of Japan. 1976. Vol. 40, Iss. 6. P. 1791–1792.
- 124. Лебедев, М.В. Р-полоса и люминесценция биэкситонов в CdS / М.В. Лебедев, В.Г. Лысенко // ФТТ. 1983. Т. 25, № 4. С. 1191–1198.
- 125. Hvam, J.M. Induced absorption and gain from high density excitons in CdS // Solid State Communications. 1978. Vol. 26, Iss. 6. P. 373–376.
- 126. Пекар, С.И. Теория электромагнитных волн в кристалле, в котором возникают экситоны // ЖЭТФ. 1958. Т. 33, № 4. С. 1022–1036.
- 127. Пекар, С.И. Дисперсия света в области экситонного поглощения в кристаллах // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, № 5. – С. 1176–1188.
- 128. Hopfield, J.J. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals // Physical Review. 1958. Vol. 112, Iss. 5. P. 1555–1567.
- 129. Hopfield, J.J. Theoretical and experimental effects of spatial dispersion on the optical properties of crystals / J.J. Hopfield, D.G. Thomas // Physical Review. 1963. Vol. 132, Iss. 2. P. 563–572.
- 130. Пермогоров, С.А. Эффекты пространственной дисперсии в спектрах отражения кристаллов при наклонном падении света на границу кристалла / С.А. Пермогоров, В.В. Травников, А.В. Селькин // ФТТ. – 1972. – Т. 14, № 12. – С. 3642–3649.
- 131. Kiselev, V.A. Additional waves and Fabry-Perot interference of photoexcitons (polaritons) in thin II–VI crystals / V.A. Kiselev, B.S. Razbirin, I.N. Uraltsev // Physica Status Solidi (b). – 1975. – Vol. 72, Iss. 1. – P. 161–172.
- 132. Пекар, С.И. Пространственная дисперсия и добавочная световая волна в области экситонного поглощения в CdS / С.И. Пекар, М.И. Страшникова // ЖЭТФ. 1977. Т. 68, № 6. С. 2047–2054.
- 133. May, V. On the Influence of the polariton effect on excitonic molecules / V. May, J. Röseler // Physica Status Solidi (b). 1980. Vol. 102, Iss. 2. P. 533–543.
- 134. Goede, O. Deformation effects on biexcitons in wurtzite-type crystals // Physica Status Solidi (b). 1977. Vol. 81, Iss. 1. P. 235–244.
- 135. Doni, E. Selection-rules for direct creation of biexcitons by giant two-photon absorption / E. Doni, R. Girlanda, G.P. Parravicini // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 17, Iss. 2. – P. 189–192.
- 136. Phach, V.D. Biexciton resonant two-photon absorption in CuCl / V.D. Phach et al. // Physica Status Solidi (b). 1977. Vol. 84, Iss. 2. P. 731–740.

- 137. Schrey, H. Luminescence-assisted two-photon spectroscopy (LATS) a new spectroscopic method applied to biexciton levels in highly excited CdS and ZnO / H. Schrey, V.G. Lyssenko, C. Klingshirn // Solid State Communications. – 1979. – Vol. 32, Iss. 10. – P. 897–899.
- 138. Lyssenko, V.G. The dispersion curves of the excitonic polariton and the excitonic molecule in CdS and their interaction / V.G. Lyssenko et al. // Solid State Communications. – 1982. – Vol. 42, Iss. 6. – P. 401–406.
- 139. Nagasawa, N. Generation of excitonic molecules by giant two-photon absorption in CuCl and CuBr and their Bose condensation / N. Nagasawa et al. // Journal of Luminescence. 1976. Vol. 12–13, Iss. 1. P. 587–592.
- 140. Hönerlage, B. Polariton effects in resonant Raman scattering in CuCl / B. Hönerlage et al. // Physica Status Solidi (b). 1977. Vol. 83, Iss. 2. P. K101–K103.
- 141. Phach, V.D. Two-photon resonant Raman scattering via biexcitons / V.D. Phach et al. // Physica Status Solidi (b). 1978. Vol. 86, Iss. 1. P. 159–168.
- 142. Itoh, T. Two-photon raman scattering in CdS associated with the exciton interactions / T. Itoh, Y. Nozue, M. Ueta // Journal of the Physical Society of Japan. – 1976. – Vol. 41, Iss. 2. – P. 713–714.
- 143. Schrey, H. Two-photon Raman scattering and the polariton dispersion in CdS / H. Schrey et al. // Physical Review B. 1979. Vol. 20, Iss. 12. P. 5267–5274.
- 144. Schrey, H. Angle- and polarization dependences of the two-photon Raman scattering via biexcitons in CdS / H. Schrey, V.G. Lyssenko, C. Klingshirn // Solid State Communications. 1979. Vol. 31, Iss. 5. P. 299–302.
- 145. Winterling, G. Resonant Brillouin scattering near the A-exciton in CdS / G. Winterling, E. Koteles // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 2. P. 95–98.
- 146. Агранович, В.М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. – Москва : Наука, 1979. – 432 с.
- 147. Хаджи, П.И. Явление нутации в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в области М-полосы / П.И. Хаджи, С.А. Москаленко, С.А. Белкин // Письма в ЖЭТФ. 1979.– Т. 29, № 4. С. 223–227.
- 148. Haug, H. Dielectric function for semiconductors with a high exciton concentration / H. Haug, R. März, S. Schmitt-Rink// Physics Letters A. 1980. Vol. 77, Iss. 4. P. 287–288.
- 149. März, R. Optical properties of dense exciton-biexciton systems / R. März, S. Schmitt-Rink, H. Haug // Zeitschrift für Physik B. Condensed Matter. – 1980. – Vol. 40, Iss. 1. – P. 9–14.
- 150. May, V. Renormalization of polaritons due to virtual formation of biexcitons at high densities of excitation / V. May, K. Henneberger, F. Henneberger // Physica Status Solidi (b). – 1979. – Vol. 94, Iss. 2. – P. 611–620.
- 151. Henneberger, F. Non-linear optical response and optical bistability due to excitonic molecules / F. Henneberger, V. May // Physica Status Solidi (b). – 1982. – Vol. 109, Iss. 2. – K139–K143.
- 152. Bigot, J.Y. On the dielectric function of three-level systems under high excitation I. Theoretical approach / J.Y. Bigot, B. Hönerlage // Physica Status Solidi (b). – 1984. – Vol. 121, Iss. 2. – P. 649–659.
- 153. Schmitt-Rink, B. Comment on nonlinear optical response and optical bistability due to excitonic molecules / B. Schmitt-Rink, H. Haug // Physica Status Solidi (b). 1982. Vol. 113, Iss. 2. P. K143–K145.
- 154. Henneberger, F. Nonlinear optical response and retarded photon self-energy comment on "Non-linear optical response and optical bistability due to excitonic molecules" / F. Henneberger, V. May // Physica Status Solidi (b). – 1982. – Vol. 113, Iss. 2. – P. K147–K151.
- 155. Страшникова, М.И. Зависимость эффектов пространственной дисперсии в кристалле CdS от константы затухания экситонов / М.И. Страшникова, Е.В. Бессонов // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 6. С. 2206–2214.

- 156.Лебедев, М.В. Эффекты пространственной дисперсии в смешанной моде экситонных поляритонов в CdS / М.В. Лебедев, В.Г. Лысенко, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 88, № 6. – С. 2193–2200.
- 157. Masumoto, Y. High intensity effect on two-photon resonant, coherent Raman scattering via excitonic molecules in CuCl and CuBr / Y. Masumoto, S. Shionoya // Solid State Communications. – 1981. – Vol. 38, Iss. 9. – P. 865–869.
- 158. Schmitt-Rink, S. Nonlinear energy transport of radiation in dielectrics due to virtual biexciton formation / S. Schmitt-Rink, H. Haug // Physica Status Solidi (b). 1981. Vol. 108, Iss. 2. P. 377–387.
- 159. Kuwata, M. Renormalization of polaritons due to the formation of excitonic molecules in CuCl: an experimental aspect / M. Kuwata, T. Mita, N. Nagasawa // Solid State Communications. – 1981. – Vol. 40, Iss. 10. – P. 911–914.
- 160. Kuwata, M. Self-induced polarization rotation effect of an elliptically polarized beam in CuCl / M. Kuwata, N. Nagasawa // Journal of the Physical Society of Japan. – 1982. – Vol. 51, Iss. 8. – P. 2591–2596.
- 161.Broser, I. Thin prism refraction. A new direct method of polariton spectroscopy / I. Broser et al.// Solid State Communications. 1981. Vol. 39, Iss. 11. P. 1209–1211.
- 162. Koch, S.W. Two-photon generation of excitonic molecules and optical bistability / S.W. Koch, H. Haug // Physical Review Letters. 1981. Vol. 46, Iss. 6. P. 450–452.
- 163. Hennebeger, F. Resonatorless optical bistability based on increasing nonlinear absorption / F. Hennebeger, H. Rossmann // Physica Status Solidi (b). – 1984. – Vol. 121, Iss. 2. – P. 685–693.
- 164. Maruani, A. Nonlinear spectroscopy of biexcitons in CuCl by resonant coherent scattering / A. Maruani et al. // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 41, Iss. 20. – P. 1372– 1375.
- 165. Chemla, D.S. Evidence of the autoionizing character of biexcitons / D.S. Chemla, A. Maruani, E. Batifol // Physical Review Letters. – 1979. – Vol. 42, Iss. 16. – P. 1075– 1079.
- 166. Maruani, A. Active nonlinear spectroscopy of biexcitons in semiconductors: Propagation effects and Fanointerferences / A. Maruani, D.S. Chemla // Physical Review B. – 1981. – Vol. 23, Iss. 2. – P. 841–860.
- 167. Каминский, А.С. Конденсация неравновесных носителей заряда в кремнии / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский, Н.В. Алкеев // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59, № 6. – С. 1937–1947.
- 168. Thewalt, M.L.W. Bound multiexciton complexes // Excitons / ed. by E.I. Rashba, M.D. Sturge. Amsterdam : North-Holland Pub. Co., 1982. Ch. 10. P. 393–458.
- 169. Кулаковский, В.Д. Многоэкситонные комплексы в полупроводниках / В.Д. Кулаковский, Г.Е. Пикус, В.Б. Тимофеев // УФН. 1981. Т. 135, № 10. С. 237–284.
- 170. Miller, R.C. Biexcitons in GaAs quantum wells / R.C. Miller et al. // Physical Review B. 1982. Vol. 25, Iss. 10. P. 6545–6547.
- 171. Miller, R.C. Photoluminescence from GaAs-Al_xGa_{1-x}As quantum wells with nonuniform p-type doping profiles // Journal of Applied Physics. 1984. Vol. 56, Iss. 4. P. 1136–1140.

МНОГОЭКСИТОННЫЕ КОМПЛЕКСЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ*

В.Д. Кулаковский, Г.Е. Пикус, В.Б. Тимофеев

1. Введение

В спектрах излучения полупроводников наряду с линиями излучения свободных экситонов наблюдаются линии, обусловленные рекомбинацией экситонов, связанных на примесях. Предположение о возможности существования в полупроводниках экситонов, связанных с мелкими примесями (экситонно-примесных комплексов — ЭПК), было впервые высказано Лампертом [1] еще в 1958 г. В этой работе рассматривался экситон, связанный на нейтральном доноре (НД) или акцепторе (НА), как аналог двухатомной молекулы. В полупроводнике (Si) связанные состояния экситона с мелкими примесями были обнаружены Хейнсом в 1960 г. [2]. В настоящее время наряду с экситонно-примесными комплексами на нейтральных центрах во многих кристаллах обнаружены также экситоны, связанные на заряженных центрах и изоэлектронных ловушках.

В 1970 г. Каминский и Покровский [3] обнаружили, что в спектрах излучательной рекомбинации Si, легированного бором, при больших уровнях возбуждения появляется серия узких линий, расположенных в шкале энергий ниже линии излучения ЭПК на акцепторе. При этом, как было установлено в [3–5], более длинноволновые линии возгораются при больших уровнях возбуждения. Основываясь на этом, авторы интерпретировали обнаруженный спектр как результат излучательной рекомбинации комплекса, состоящего из нейтрального примесного центра и нескольких связанных на нем экситонов. Такие многоэкситонные комплексы будем далее обозначать символом МЭПК, а состояние с определенным числом *m* связанных экситонов на нейтральном доноре — НДЭ, и акцепторе — НАЭ, Авторы [3–5] предположили, что более длинноволновые линии обнаруженного дискретного спектра соответствуют комплексам с бо́льшим числом т. Работы Покровского с соавторами [3–5], Зауэра [6], Косаи и Гершензона [7], в которых были обнаружены новые серии линий, связанные с другими примесями в Si, и детально исследована зависимость интенсивности линий серии от уровня возбуждения, подтвердили высказанное в [3] предположение о их природе. Однако результаты последующих работ Зауэра и Вебер [8, 9], посвященных исследованию расщепления линий, приписываемых связанным многоэкси-

^{*} Успехи Физических наук. – 1981. – Т. 135. Вып. 2. – С. 237–284.

тонным комплексам, в магнитном поле и в деформированных кристаллах Si, не нашли первоначально объяснения в рамках модели МЭПК, в связи с чем авторы [8, 9] категорически отвергли эту идею. Хотя их вывод оказался поспешным, сами работы [8, 9] несомненно стимулировали интерес к проблеме МЭПК. В результате выполненных за последующие годы экспериментальных и теоретических работ концепция МЭПК была не только подтверждена, но и был достигнут существенный прогресс в понимании их структуры, а также значительно расширен как круг изучаемых объектов, так и число экспериментальных методик, использованных для изучения таких комплексов.

Авторы настоящего обзора ставят целью изложить основные результаты экспериментальных и теоретических исследований в этой области, а также отметить ряд вопросов, требующих дальнейшего изучения.

2. Оболочечная модель связанных многоэкситонных комплексов

Причиной устойчивости связанных многоэкситонных комплексов с несколькими экситонами в непрямых полупроводниках Si, Ge, SiC и других является высокая степень вырождения зон. Если в полупроводниках с простыми зонами в точке Г в одном и том же орбитальном 1s-состоянии могут находиться только 2 электрона с противоположными спинами, то в Si, где экстремумы расположены в точках Δ , в этом состоянии могут находиться 12 электронов, отличающихся либо спинами, либо блоховскими функциями. В Ge экстремумы зоны проводимости находятся в точках L, и кратность вырождений основного электронного состояния равна 8. Во всех этих кристаллах валентная зона в точке экстремума Г 4-кратно вырождена, и поэтому в одном и том же орбитальном состоянии могут находиться 4 дырки с моментами $j_{y} = \pm 3/2, \pm 1/2$. Роль вырождения зон как причины устойчивости связанных многочастичных состояний была проиллюстрирована еще в 1972 г. Вангом и Киттелем [10], которые на примере модельного многодолинного полупроводника с отношением эффективных масс электронов и дырок $m_{_e}/m_{_b} \rightarrow 0$ показали возможность существования таких комплексов с энергией связи порядка экситонного ридберга на каждую связанную пару. Еще в первых работах, посвященных связанным экситонам [11, 12], для их описания использовалось одноэлектронное приближение, т. е. предполагалось, что электроны и дырки находятся в самосогласованном поле, симметрия которого совпадает с симметрией примесного центра. При этом учитывалось орбитально-долинное расщепление основного состояния НД и предполагалось, что оба электрона в ЭПК на НД находятся в нижнем из расщепившихся состояний Г₁, и поэтому их спины антипараллельны. Эта модель позволила объяснить наблюдаемое зеемановское расщепление линий излучения ЭПК в GaP и Si. Подобная модель использовалась Дином и др. [13], которые исследовали расщепление линий излучения комплексов в кубических кристаллах SiC в магнитном поле. Они нашли, что для объяснения одинакового числа зеемановских компонент у линий МЭПК с разным числом e-h-пар достаточно предположить, что электроны и дырки в комплексах заполняют одночастичные состояния в соответствии с принципом Паули.

Логическое завершение эти идеи получили в работах Кирченова [14, 15], в которых было высказано предположение о том, что в комплексах на нейтральных донорах (НДЭ,,) два электрона заполняют нижний уровень Г,, а остальные m-1 электронов заполняют верхние уровни, отщепившиеся в результате орбитально-долинного взаимодействия. Например, в Si, где 12-кратно вырожденное основное состояние НД в результате взаимодействия с короткодействующим полем донора расщепляется на 3 терма Г., Г. и Г. [16], m-1 электронов заполняют термы Γ_3 и Γ_5 , имеющие практически одну и ту же энергию. Исключение составляет только Li, для которого нижними являются уровни $\Gamma_{\rm 3}$ и $\Gamma_{\rm 5}.$ В Ge 8-кратно вырожденное основное состояние НД расщепляется на Γ_1 и Γ_5 [16] и в комплексах $m \ge 2$ заполняется уровень Γ_{s} . Величина орбитально-долинного расщепления Δ_{w} так же, как и энергия связи, зависит от числа связанных экситонов, а также от примеси, на которой происходит связывание. Основным состоянием для дырки в ЭПК в Si, Ge, SiC является 4-кратно вырожденное состояние Г₈. Соответственно для двух дырок основными состояниями являются антисимметризованные по спину состояния с полным моментом J = 0 (Γ_1) и J = 2. Разность энергий этих состояний называется *j*-*j*-расщеплением. Состояние *J* = 2 короткодействующим потенциалом примеси расщепляется на 2 терма Г₃ и Г₅ [15]. Для трех дырок основным состоянием является состояние Γ_8 с J = 3/2, а для четырех — невырожденное состояние Γ_1 с J = 0. Следующие дырки заполняют возбужденные состояния Г,, отличающиеся от основного плавной функцией. Согласно [17], в Si ближайшим к Γ₂ является двукратно вырожденное состояние Γ₇, в которое значительный вклад дают функции валентной зоны Г,, отщепившейся от зоны Γ_{s} в результате спин-орбитального взаимодействия.

Для экситонов, связанных на НД, *j*–*j*-расщепление, так же, как и $\Gamma_3 - \Gamma_5$ расщепление терма J = 2, мало́ и обычно не проявляется в спектрах. В этом случае можно считать, что две дырки заполняют все возможные в соответствии с принципом Паули состояния, как это показано на рис. 1, где приведена схема заполнения состояний НДЭ_{*m*} [15]. В соответствии с этой схемой основное состояние НДЭ_{*m*} в Si можно обозначить в виде

$$\begin{cases} 2\Gamma_1; \Gamma_8 \} \text{ при } m = 1, \\ \{ 2\Gamma_1, (m-1)\Gamma_{3,5}; m\Gamma_8 \} \text{ при } 2 \le m \le 4, \\ \{ 2\Gamma_1, (m-1)\Gamma_{3,5}; 4\Gamma_8, (m-4)\Gamma_7 \} \text{ при } m = 5, 6 \end{cases}$$

$$(1)$$



Рис. 1. Схема оптических переходов между энергетическими термами МЭПК на мелких нейтральных примесях замещения P, B и Al в Si. P — нейтральный донор, B и Al — нейтральные акцепторы в случаях слабого и сильного *j*-*j*-взаимодействия.

В соответствии с оболочечной моделью (ОМ) нижнее возбужденное состояние МЭПК образуется при переходе одного электрона из оболочки Γ_1 в $\Gamma_{3.5}$. При $m \leqslant 4$ эти состояния обозначаются как

$$\{\Gamma_1, m\Gamma_{3.5}; m\Gamma_8\}$$
⁽²⁾

Существенное понижение энергии в состоянии Γ_1 для НД связано с большой амплитудой плавной волновой функции электрона в области притягивающего потенциала центральной ячейки. В комплексах на НА электроны наоборот выталкиваются полем иона из центральной ячейки. Поэтому для комплексов, связанных на НА в Si, расщепление между электронными состояниями Γ_1 и $\Gamma_{3,5}$ незначительно и практически не проявляется в спектрах. В этом случае в нижнем состоянии $\Gamma_{1,3,5}$ может находиться до 12 электронов. В ЭПК на наиболее мелком акцепторе — боре, *j*-*j*-расщепление также мало́ [18, 19]. Схема заполнения состояний МЭПК на боре показана на рис. 1. В соответствии с этой схемой основное состояние НАЭ_m в Si можно обозначить как

$$\{ m\Gamma_{1,3,5}; (m+1) \Gamma_8 \} \quad \text{при } m \leq 3, \{ m\Gamma_{1,3,5}; 4\Gamma_8, (m-3) \Gamma_7 \} \quad \text{при } m = 4,5.$$
 (3)

Для комплексов на более глубоких акцепторах — Al, Ga, In в спектрах люминесценции $HAЭ_m$ с одним и двумя связанными экситонами отчетливо наблюдается расщепление линий, вызванное расщеплением основного состояния дырок в ЭПК на 3 терма $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$ [15, 20–22].*

Кратность вырождения термов в оболочечной модели выше, чем это следует из теории групп для кубического кристалла, в котором максимальная степень вырождения для состояний с целым спином равна 3 и с полуцелым — 4. Это обстоятельство связано с тем, что оболочечная модель не учитывает корреляции между частицами, которые должны приводить к дополнительному расщеплению термов. Тонкая структура линий излучения МЭПК в Si была обнаружена в работе [26] при использовании спектральной аппаратуры с высоким разрешением (решеточный монохроматор + интерферометр). В Ge, где эти расщепления больше, дополнительная тонкая структура уровней ЭПК на НД недавно обнаружена в [27, 28]. Ниже мы подробнее обсудим причины возникновения тонкой структуры уровней МЭПК.

3. Спектры излучения МЭПК в Si

В непрямых полупроводниках рекомбинация электронов и дырок сопровождается передачей импульса фонону или примеси. В Si разрешены переходы с испусканием (или поглощением) всех четырех фононов TO, TA, LO и LA. Соответствующие линии сдвинуты, по сравнению с бесфононными (NP), на частоту соответствующего фонона с волновым вектором **K**_Δ. Наиболее интенсивными в Si являются NP- и TO-линии.

3.1. Одноэлектронные переходы

Наиболее интенсивными излучательными переходами в комплексах являются одноэлектронные переходы, в результате которых рождается фотон и образуется новый комплекс с меньшим на единицу числом связанных экситонов. Как указывалось выше, в комплексах на донорах замещения 2 электрона находятся на нижнем уровне Γ_1 , а остальные m - 1 на верхнем, т. е. $\Gamma_{3,5}$ в Si и Γ_5 в Ge. В этом случае в комплексах, содержащих 2 или более экситонов, возможны переходы двух типов (см. рис. 1) [15], а именно, так называемые α -переходы:

$$\{2\Gamma_{1}, (m-1)\Gamma_{3,5}; m\Gamma_{8}\} \to \{\Gamma_{1}, (m-1)\Gamma_{3,5}; (m-1)\Gamma_{8}\},$$
(4)

^{*} В ранних работах [23, 24] расщепление терма J = 2 связывалось с обменным взаимодействием дырок J = 2 с электроном s = 1/2, приводящим к образованию двух состояний с полным моментом 3/2 и 5/2. Однако величина наблюдаемого расщепления существенно превышала ожидаемое для Si обменное расщепление. В [15, 25] было предположено, что появление трех линий в спектрах может быть связано с расщеплением терма J = 2 короткодействующим полем примеси, имеющим симметрию T_d . Для МЭПК и НД, так же, как и на В, это расщепление мало́ из-за малой плотности волновой функции дырки на центре.

когда рекомбинирует электро
н Γ_{1} и остающийся комплекс находится в возбужденном состоянии,
и β -переходы:

$$\{2\Gamma_{1}, (m-1)\Gamma_{3,5}; m\Gamma_{8}\} \to \{2\Gamma_{1}, (m-2)\Gamma_{3,5}; (m-1)\Gamma_{8}\},$$
(5)

когда рекомбинирует электрон $\Gamma_{3,5}$ и комплекс остается в основном состоянии. В НДЭ₁ (2 электрона Γ_1) возможен только α -переход, при этом в результате излучательного распада остается нейтральный донор в основном состоянии. Ключевым для объяснения спектров МЭПК на НД явилось сделанное Кирченовым [15] предположение о том, что все линии, наблюдаемые в бесфононных спектрах НДЭ_m в Si (P) (рис. 2), связаны с рекомбинацией электрона из состояния Γ_1 , т. е. являются α -линиями. Хотя β -линии в NP спектрах в Si и не запрещены правилами отбора (см. ниже), они практически не наблюдаются. Причина этого заключается в том, что комбинации блоховских функций, соответствующие всем состояниям терма $\Gamma_{3,5}$, обращаются в нуль в центре донора, где его короткодействующий потенциал максимален. Амплитуда волновой функции дырки на доноре также мала. Поэтому матричный элемент для соответствующих непрямых NP-переходов мал.



Рис. 2. Спектры излучения МЭПК в Si (P), в бесфононной (NP) области и с испусканием ТО-фононов (T = 4,2 K) [18].

Линии излучения, обусловленные рекомбинацией электронов $\Gamma_{3,5}$, были обнаружены Тьюалтом (см. рис. 2) [18] в фононных компонентах спектра. В согласии с тем, что доля электронов $\Gamma_{3,5}$ увеличивается с ростом числа экситонов в комплексе, отношение интенсивностей β - и α -линий $I(\beta_{m-1})/I(\alpha_m)$ возрастает с увеличением m.

Энергии связи экситона в комплексах δ_m можно определить по положению линий α_1 для m = 1 и β_{m-1} для m = 2-4. В Si (P) они равны 4,58; 3,8; 6,69 и 9 мэВ для m = 1, 2, 3 и 4 соответственно. Немонотонное поведение δ_m при m = 2 связано с началом заполнения новой электронной оболочки $\Gamma_{3,5}$ в НДЭ₂. В работе [29] была сделана попытка определить энергии связи экситонов в МЭПК термодинамическим методом. Полученные авторами

значения для δ_1 и δ_2 оказались близкими к указанным выше, а значения δ_3 и δ_4 — в 3–4 раза меньше. Однако не исключено, что для короткоживущих МЭПК с m = 3 и 4 не достигается термодинамическое равновесие.

Разность частот линий β_m и α_{m-1} определяет величину орбитально-долинного расщепления: $\Delta_{mVO} = \hbar \omega \ (\beta_{m-2}) - \hbar \omega \ (\alpha_{m-1})$. В Si (P) для МЭПК с m = 1-3 Δ_{mVO} составляет примерно 4 мэВ [18]. Как и ожидалось, эта величина заметно меньше расщепления $\Gamma_1 - \Gamma_5$ для нейтрального донора (~12 мэВ). Более того, в отличие от величины расщепления $\Gamma_1 - \Gamma_5$ в нейтральном доноре величины ны Δ_{mVO} почти не изменяются при переходе от одного донора к другому [24]. Отметим также, что $\Delta_{mVO} > \delta_2 = 3,8$ мэВ, т. е. возбужденное состояние МЭПК с двумя экситонами в Si (P) нестабильно по отношению к распаду на ЭПК и свободный экситон. Тем не менее из полуширины линии излучения α_3 следует, что время жизни этого состояния, по крайней мере, не меньше, чем 10^{-10} с.

В Si (Li) (донор внедрения), где электроны в МЭПК при низких температурах находятся только на нижнем уровне $\Gamma_{3,5}$, каждому комплексу в спектре излучения отвечает только одна линия m_m (рис. 3). Аналогичная ситуация имеет место в МЭПК на НА при отсутствии *j*-*j*-расщепления (т. е. в Si (B) (рис. 4)), так как для этих центров, как было указано выше, состояния Γ_1 , Γ_3 и Γ_5 имеют практически одну и ту же энергию.

Энергии связи экситонов в МЭПК в Si (Li) и Si (B) можно определить по спектральному положению линий m_m . Величина δ_m монотонно возрастает по мере заполнения основных электронной и дырочной оболочек (табл. 1). Из табл. 1 видно, что в Si (B) $\delta_3 \approx 2\delta_1$, а в Si (Li) $\delta_4 \approx 3\delta_1$.

В МЭПК на нейтральных донорах с $m \ge 5$ и нейтральных акцепторах с $m \ge 4$ дырки заполняют помимо оболочки Γ_8 верхнюю оболочку Γ_x . Поэтому в спектрах излучения таких комплексов в принципе могут наблюдаться две серии линий, связанные с рекомбинацией дырок из оболочки Γ_8 и из оболочки Γ_x . Соответственно в первом случае МЭПК переходит в возбужденное состояние:

$$\{m\Gamma_{1,3,5}; 4\Gamma_8, (m-3)\Gamma_X\} \to \{(m-1)\Gamma_{1,3,5}; 3\Gamma_8, (m-3)\Gamma_X\}.$$
 (6)

При рекомбинации дырки $\Gamma_{\!_X}$ МЭПК переходит в основное состояние:

$$\{m\Gamma_{1,3,5}; 4\Gamma_8, (m-3)\Gamma_X\} \to \{(m-1)\Gamma_{1,3,5}; 4\Gamma_8, (m-4)\Gamma_X\}.$$
 (7)

Пьезо- и магнетоспектроскопические исследования (см. гл. 6, 7) показали, что линии, наблюдаемые в спектрах МЭПК на НД и НА, отвечают переходам типа (6), поэтому по положению этих линий в случае комплексов с числом дырок, превышающим четыре, уже нельзя судить об энергии связи δ_m . Переходам типа (7) для МЭПК с m = 5 и 6 в Si (Li), возможно, отвечают слабые линии А и В [30] (рис. 3). Однако амплитуда этих линий мала, и они до сих пор не исследовались сколь-нибудь подробно. В Si (В) линия излучения МЭПК, отвечающая переходу (7), должна быть расположена фиолетовее линии m_4 в области интенсивных линий $m_1 \div m_3$ и пока не выделена на их фоне.


Рис. 3. Спектр излучения МЭПК в Si (Li) с испусканием ТА-фонона (T = 1,8 K) [30].



Рис. 4. Спектры излучения МЭПК на акцепторах. *a*) Si(B) [19], T = 1,8 K; *б*) Si(Al) [18], T = 4,2 К. Линия P_{NP}^1 связана с излучением НДЭ₁ на остаточной примеси фосфора.

Таблица 1

	В		Al		Р		Li
т	δ [18]	<i>δ</i> * [29]	δ [18]	<i>δ</i> * [29]	δ [18]	<i>δ</i> * [29]	δ [30]
1	3,9	3,6	5,1	4,4	4,6	4,9	3,4
2	6,1	6,0	5,2	4,6	3,8	5,8	5,9
3	8,3	6,1	8,5	6,8	6,7	4,5	8,15
4	_	3,0	_	—	_	3,3	10
5	_	_	_	_	_	2,2	7,5
6	_	_	_	_	_	_	8,8

Энергии связи МЭПК в Si, определенные спектроскопическим (δ) и термодинамическим (δ^*) методами (по данным работ [18, 29, 30])

В МЭПК на НД линии (7), отвечающие рекомбинации дырок Γ_x с электронами из внутренней оболочки Γ_1 , должны наблюдаться и в бесфононном спектре, где линии у́же и их число существенно меньше (присутствуют только α -линии). Обнаружение этих линий позволило бы идентифицировать дырочную оболочку Γ_x . Как указано выше, на более глубоких, чем бор, акцепторах в ЭПК оказывается существенным *j*-*j*-взаимодействие дырок, которое приводит к расщеплению уровня ЭПК на три терма Γ_1 , Γ_3 , Γ_5 . Схема переходов в этом случае показана на рис. 1, а положение соответствующих линий для В, Al и Ga [18] — на рис. 5.



Рис. 5. Расположение в шкале энергий линий излучения МЭПК в Si, легированном различными акцепторами.



Рис. 6. Спектр излучения НДЭ₁ в Si(P) (*T* = 19 K) [18].

В спектрах излучения экситонов, связанных на НД в Si, наряду с линиями α и β при повышении температуры до 19 К наблюдаются дополнительные линии, связанные с переходом из возбужденных состояний, в которых один из электронов возбужден из уровня Γ_1 в состояние $\Gamma_{3,5}$ (рис. 6) [18]. В этом случае возможна рекомбинация электрона Γ_1 (переходы γ^1 , γ^{1*} в возбужденное состояние НД) и электрона $\Gamma_{3,5}$ (переход δ в основное состояние НД). В Si (P) разрешаются обе линии $\gamma^{(1)}$ и γ^{1*} , соответствующие переходам в состояния Γ_5 и Γ_3 НД, несколько различающиеся по энергии. Переходы из возбужденного состояния ЭПК впервые, по-видимому, наблюдались Дином с соавторами [31], однако правильно были проинтерпретированы лишь в рамках ОМ Тьюалтом [18], разрешившим в спектре излучения Si (P) при 19 К все три линии γ^1 , γ^{1*} и δ . Несколько раньше переход δ был обнаружен в спектрах модуляционного поглощения Si (P) [32], однако авторы ошибочно интерпретировали его как двухэлектронный переход для свободного экситона (см., например, [33]).

3.2. Двухэлектронные переходы в ЭПК

Помимо рассмотренных выше одноэлектронных переходов в спектрах излучения ЭПК на донорах фосфора наблюдались также так называемые двухэлектронные переходы, при которых один из оставшихся электронов переходит из основного состояния 1s в возбужденное состояние *n*s, а именно переходы [18, 34]

$$\{2\Gamma_1(1\mathbf{s}); \Gamma_8\} \to \{\Gamma_1(n\mathbf{s})\} \quad \mathbf{c} \ n = 2 - 6 \tag{8}$$

и переходы (рис. 6) [18]

$$\{\Gamma_1, \Gamma_{3,5}(1s); \Gamma_8\} \to \{\Gamma_{3,5}(2s)\}.$$
 (9)

Интенсивность линий излучения, отвечающих этим переходам, значительно меньше, чем линий α_1 или δ . Строго говоря, переходы (8), (9) не являются запрещенными в рамках одноэлектронной модели, так как волновые функции 1s-электронов в ЭПК не ортогональны функциям *ns*-электронов в НД. Различие между переходами (8), (9) и (4), (5) носит с этой точки зрения количественный характер, и Кирченов предлагает называть их также одноэлектронными [15].

В рамках оболочечной модели запрещенными являются такие переходы, в которых конечное электронное состояние ортогонально исходному. К ним относятся, например, переходы [15]

$$\{2\Gamma_1(1\mathbf{s});\Gamma_8\} \to \{\Gamma_{3.5}(n\mathbf{s})\} \tag{10}$$

с n = 1, 2, ..., поскольку любое состояние Γ_1 ортогонально любому состоянию $\Gamma_{3,5}$. Переходы такого типа не наблюдались в слаболегированных кристаллах Si ни в бесфононных спектрах, ни в спектрах соответствующих фононных повторений.

Заметим, что в общем случае, т. е. при учете корреляции между частицами в комплексе, нужно рассматривать не представления отдельных частиц, а общие представления начального и конечного состояния. При таком общем подходе теория групп, например, не запрещает перехода типа (10) [15]. Действительно, такие переходы наблюдались в Ge, где корреляционные расщепления существенно больше, чем в Si (см. гл. 4).

4. Тонкая структура уровней ЭПК в Ge

В отличие от кремния, в Ge твердо установлено существование МЭПК только с одним и двумя связанными экситонами [35, 27, 28].

В работах [27, 28] была обнаружена тонкая структура уровней экситона, связанного на НД (Bi, P, As). Эта тонкая структура проявилась как в бесфононных спектрах люминесценции, связанных с переходами НДЭ₂ \rightarrow НДЭ₁ и НДЭ₁ \rightarrow НД, так и в спектрах поглощения, связанных с возбуждением связанного экситона и LA-фонона.

На рис. 7 показана тонкая структура линий ЭПК на As и P.



Рис. 7. Спектры излучения МЭПК на доноре в Ge в бесфононной области (T = 1,5 K) [27, 28]. Число связанных в комплексе экситонов указывает нижний индекс, *a*) Ge(As), *б*) Ge(P).

В Ge 4-кратно вырожденное состояние НД в результате орбитально-долинного взаимодействия расщепляется на 2 терма Γ_1 и Γ_5 . В соответствии с оболочечной моделью в основном состоянии ЭПК электроны заполняют оба спиновых состояния Γ_1 , в первом возбужденном — одно Γ_1 и одно Γ_5 . Приведенные на рис. 7 спектры соответствуют переходам в основное и первое возбужденное состояния НД. Как указывалось выше, оболочечная модель не учитывает электрон-электронных и электрон-дырочных корреляций. В соответствии с теорией групп в результате электрон-электронных корреляций возбужденное состояние { Γ_1 , Γ_5 ; Γ_8 } должно расщепиться на два, соответствующих симметризованному и антисимметризованному по орбитальным состояниям произведениям ($\Gamma_1 \cdot \Gamma_5$). Волновая функция состояния { $(\Gamma_1 \cdot \Gamma_5)_c$; Γ_8 }, содержащая симметризованное произведение волновых функций разных долин, антисимметризована по спину (полный спин двух 1*s*-электронов равен нулю). Антисимметризованным по орбитальным состояниям термам { $(\Gamma_1 \cdot \Gamma_5)_{ac}$; Γ_8 } соответствуют симметризованные по спину состояниям термам { $(\Gamma_1 \cdot \Gamma_5)_{ac}$; Γ_8 } соответствуют симметризованные по спину состояния с *S* = 1 и $S_z = \pm 1$; 0. Верхнее возбужденное состояние { $2\Gamma_5$; Γ_8 } расщепляется на 4 терма, соответствующих ($\Gamma_5 \cdot \Gamma_5$)_{*c*} = $\Gamma_{1c} + \Gamma_{3c} + \Gamma_{5c}$ и ($\Gamma_5 \cdot \Gamma_5$)_{*ac*} = Γ_{5ac} .

Состояние Γ_{1c} может смешиваться с основным состоянием Γ_1 , состояния Γ_{5c} и Γ_{5ac} — с соответствующими термами первого возбужденного уровня, что приводит к изменению их энергий и волновых функций. Причиной расщепления симметризованных и антисимметризованных состояний является различие в энергии двух электронов, находящихся в одной или разных долинах. Из-за сильной анизотропии эффективных масс в Ge ($m_{e\parallel} \approx 20 \ m_{e\perp}$) волновая функция электрона на доноре в каждой долине сжата вдоль главной оси долины. Из-за меньшего перекрытия волновых функций энергия кулоновского отталкивания для электронов, находящихся в разных долинах меньше, чем для электронов в одной и той же долине. Подобное расщепление одно- и двухдолинных состояний наблюдалось в [37, 38] на D^- центрах в Ge и Si. Указанное расщепление мы будем называть корреляционным. Если величина орбитально-долинного расщепления равна Δ_{1vo} , а разность энергий одно- и двухдолинных состояний двух электронов — Δ_{cor} , то энергия основного состояния $\{2\Gamma_1; \Gamma_8\}$ равна [36]

$$E(\Gamma_{1}) = \Delta_{1VO} + \frac{1}{2}\Delta_{cor} - \sqrt{\Delta_{1VO}^{2} + \frac{1}{2}\Delta_{1VO}\Delta_{cor} + \frac{1}{4}\Delta_{cor}^{2}}, \qquad (11)$$

а энергия двух расщепившихся термов $\{\Gamma_1, \Gamma_5; \Gamma_8\}$ —

$$E(\Gamma_{5c}) = \frac{3}{2} \Delta_{1VO} + \frac{1}{2} \Delta_{cor} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_{1VO}^2 + \Delta_{cor}^2}, \qquad (12)$$

$$E(\Gamma_{5ac}) = \Delta_{1VO}.$$
(13)

Для возбужденных состояний $\{2\Gamma_5; \Gamma_8\}$

$$E(\Gamma_{3c}) = E(\Gamma_{4c}) = 2\Delta_{1VO}, \tag{14}$$

$$E(\Gamma_{5c}) = \frac{3}{2}\Delta_{1VO} + \frac{1}{2}\Delta_{cor} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{1VO}^2 - \Delta_{cor}^2},$$
(15)

$$E(\Gamma_{1c}) = \Delta_{1VO} + \frac{1}{2}\Delta_{cor} + \sqrt{\Delta_{1VO}^2 + \frac{1}{2}\Delta_{1VO}\Delta_{cor} + \frac{1}{4}\Delta_{cor}^2}.$$
 (16)

148

Таким образом, при $\Delta_{cor} \ll \Delta_{1VO}$ расщепление терма { $\Gamma_1, \Gamma_5; \Gamma_8$ } равно $\Delta_{100}/2$. Корреляция между электронами и дырками должна приводить к дальнейшему расщеплению вырожденных состояний. В принципе имеются два механизма электронно-дырочного взаимодействия, приводящих к снятию вырождения. Один из них — электронно-дырочный обмен, приводящий к расщеплению термов с моментом дырок 3/2 и моментом электронов S = 1 на 3 уровня с полным моментом 1/2, 3/2 и 5/2. По оценкам величина обменного расщепления в Ge не превышает 0,1 мэВ, и экспериментально оно не наблюдалось. Второй механизм связан с кристаллическим расщеплением основного состояния дырок $\Gamma_{\rm g}$ в экситоне на два терма L₄ + L₅ и L₆. Это расщепление вызывается несферическим распределением электронов, связанным с анизотропией эффективной массы. Состояния L₄ + L₅ и L₆ соответствуют проекциям момента дырок на направление данного экстремума равным $\pm 3/2$ и $\pm 1/2$. Величина кристаллического расщепления Δ_{cr} для свободного экситона в Ge около 1 мэВ [39, 40], в Si — около 0,3 мэВ [41]. В ЭПК в результате кристаллического расщепления терм { Γ_5 ; Γ_8 } расщепляется на три: Γ_8 , Γ_8 и ($\Gamma_6 + \Gamma_7$), а состояние $\{\Gamma_3; \Gamma_8\}$ на два — Γ_8 и ($\Gamma_6 + \Gamma_7$). Согласно расчетам энергия состояний $\Gamma_{\!_{6}}$ и $\Gamma_{\!_{7}}$ одинакова. Кристаллическое расщепление также смешивает состояния Γ_{8c} , Γ_{8ac} или ($\Gamma_6 + \Gamma_7$), произошедшие из разных термов. Схема расщепления уровней ЭПК в результате корреляционного и кристаллического расщеплений [36] показана на рис. 8. Там же указаны величины смещений уровней, рассчитанные при условии, что $\Delta_{car} \ll \Delta_{1VO}$ и $\Delta_{cr} \ll \Delta_{1VO}$. Для состояний $\{2\Gamma_5; \Gamma_8\}$ также предполагалось, что $\Delta_{cr} \ll \Delta_{cor}$. В этом приближении энергия трех состояний $\Gamma_6 + \Gamma_7$, Γ_8 , $\Gamma_6 + \Gamma_7$ не меняется. Заметим, что учет только кристаллического расщепления при $\Delta_{_{cor}}=0$ приводит к полному расщеплению термов в соответствии с рис. 7. Согласно этой схеме состояние {Г₁, Г₅; Г₈} должно расщепляться на 6 подуровней. В работах [27, 28] наблюдалось 4 уровня для As и 5 уровней для Р. Для идентификации этих уровней и определения величин корреляционного и кристаллического расщеплений необходимы дальнейшие эксперименты. В частности, было бы желательно исследовать поведение этих уровней в магнитном поле и при деформации. Для экситона, связанного на нейтральном акцепторе, орбитально-долинное расщепление, по-видимому, всегда мало. Как указано выше, в результате обменного взаимодействия при учете кубической анизотропии поля акцептора состояние двух дырок ($\Gamma_8 \cdot \Gamma_8$)_{ас} расщепляется на 3 терма Γ_1 , Γ_5 , Γ_3 , Величину расщепления $\Gamma_5 - \Gamma_4$ будем обозначать Δ_{ev} , расщепление ($\Gamma_5 - \Gamma_1$) – Δ'_{ev} . Кулоновское взаимодействие дырок с электроном, находящимся в определенной долине, понижает симметрию с T_d до C_{3v} . В результате происходит расщепление состояния $\Gamma_{_{5}}$ на L $_{_{1}}$ и L $_{_{3}},$ а состояния $\Gamma_{_{1}}$ и $\Gamma_{_{3}}$ преобразуются соответственно в L₁ и L₃. При этом может происходить смешивание состояний L₁, произошедших из Γ_1 и Γ_5 , а также термов L₂, произошедших из Γ_5 и Γ_5 (см.

рис. 8). Энергия состояний 1, 4, соответствующих представлениям Γ_1 , при учете кристаллического расщепления равна

$$E_{1,4} = \frac{1}{2}\Delta_{ex} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\Delta_{ex}^2 + \Delta_{cr}^2}.$$
 (17)

Энергия остальных уровней не меняется, т. е.

$$E_{2,3} = \Delta_{ex}$$
 и $E_{5,6} = \Delta'_{ex}$. (18)

Каждый из этих уровней четырехкратно вырожден по числу долин и двукратно по спину электронов.



Рис. 8. Схема расщепления уровней НДЭ₁ в Ge [36]. $\Delta' = \frac{1}{4} \Delta_{cr}$, Δ_{cor} — корреляционное расщепление.

Величина кристаллического расщепления для одной дырки Δ_{cr} в (17) может отличаться от значения Δ_{cr} для свободного экситона и экситона, связанного на нейтральном доноре. Видно, что согласно (18) смешивания состояний L₃, произошедших из Γ_3 и Γ_5 , не происходит. Этот результат является следствием приближений, сделанных при выводе (17) и (18): в соответствии с оболочечной моделью предполагалось, что волновая функция двух дырок является антисимметризованным произведением функций каждой из дырок или суммой таких произведений, преобразующейся по соответствующему представлению.

5. Правила отбора для переходов в МЭПК в Si и Ge

В рамках одноэлектронного приближения, лежащего в основе оболочечной модели, правила отбора для переходов из состояния МЭПК с *т*экситонами в состояние с (m - 1)- или (m + 1)-экситонами определяются правилами отбора для рекомбинации или генерации отдельной пары электрон–дырка. При непрямых переходах излучение или поглощение фотона возможно только при одновременном излучении (поглощении) фонона или при передаче импульса примесному центру. В Si непрямые переходы можно рассматривать как результат виртуального перехода дырки Γ_{25} в одну из Δ -зон или электрона Δ_1 в одну из Γ -зон и последующую прямую рекомбинацию (или прямое возбуждение пары с последующим рассеянием электрона или дырки). В Ge непрямые переходы сопровождаются рассеянием электрона L₁ в одну из Γ -зон или дырки Γ_{25} в одну из L-зон. При расчете вероятности перехода необходимо учитывать интерференцию всех возможных каналов.

Применение метода инвариантов, основанного на общих соображениях симметрии, дает возможность определить общий вид матричных элементов перехода, не рассматривая конкретно вклад каждого из каналов. Эти правила отбора определяются лишь симметрией группы волнового вектора в точках экстремума и представлениями, по которым преобразуются волновые функции электронов и дырок в точке экстремума.

В табл. 2 приведены правила отбора для электронов Δ_6 и дырок Γ_8 в Si и электронов L_6 и дырок Γ_8 в Ge, полученные указанным методом [25, 42]. Эти правила отбора справедливы как для пар свободных носителей, так и для свободных экситонов. В табл. 2 ось *z* направлена по главной оси соответствующего экстремума, для Ge ось *x* выбрана в одной из плоскостей σ_V , в Si направление осей *x*, у произвольно. Значения j_z и s_z указывают проекции моментов дырок ($j_z = \pm 3/2, \pm 1/2$) и электронов ($s_z = \pm 1/2$). В Si непрямые переходы разрешены с участием всех фононов, а именно продольного акустического LA-фонона с амплитудой смещения u_{LA} , соответствующего представлению Δ_1 , продольного оптического LO-фонона (u_{LO}) (представление Δ'_2) и поперечных ТО- и TA-фононов (представление Δ_5). (В табл. 2 предполагается, что соответствующие смещения u_x , u_y преобразуются как *yz* и *xz*.) Видно, что правила отбора при рассеянии на LA-фононах определяной γ , на LO-, TO- и TA-фононах двумя — λ и η или *a* и β .

При определении правил отбора для бесфононной линии удобно представить потенциал примеси V(r), на котором происходит рассеяние и который преобразуется по представлению Γ_1 группы T_d , как сумму потенциалов $V^+(r)$ и $V^-(r)$, четного и нечетного по отношению к операции C_{4v} , входящей в группу $\Delta(C_{4v})$, но отсутствующей в группе T_d . Потенциалы V^+ и V^- преобразуются по представлениям Δ_1 и Δ'_2 группы Δ . Зная эти представления,

можно определить правила отбора, приведенные в табл. 2. При этом константа $\overline{\gamma}$ связана с рассеянием на V^+ , а $\overline{\lambda}$ и $\overline{\eta}$ – с рассеянием на V^- . В Si переходы через разные зоны дают сравнимый вклад. При переходах только через зону Γ_{s} отличны от нуля $\alpha = \beta, \gamma$ и $\overline{\gamma}$. При переходах через Δ_{s} не равны нулю β , γ , η и $\overline{\gamma}$, $\overline{\eta}$. При переходах через $\Gamma'_2 - \eta = \lambda$, $\overline{\eta} = \overline{\lambda}$, остальные константы равны нулю. В Ge непрямые переходы из точки L в Г разрешены лишь с участием LA-фонона с амплитудой u_{I_A} (представление L_2) и TO-фононов с амплитудами u_x , u_y (представление L_z). Правила отбора для LA-фонона определяются двумя константами λ и η , для ТО-фонона — тремя: α , β и γ [42]. Переход с участием LO- и ТА-фононов разрешается при отступлении от точек экстремума [43]. При определении правил отбора для бесфононных переходов потенциал примеси V(r) представляется в виде суммы потенциалов V^+ и V^- , четного и нечетного по отношению к инверсии i, входящей в группу L ($C_{3,.}$ ·*i*), но не входящей в T_d . Потенциалы V^+ и V^- преобразуются по представлениям L₁ и L₂-группы L. Переходы из точки L в Г разрешены только с рассеянием на потенциале V^- и правила отбора определяются двумя константами $\overline{\lambda}$ и $\overline{\eta}$.

В Ge разность энергии между экстремумами Γ'_2 и L₁ намного меньше, чем расстояние L₁ или Γ'_{25} от любого другого экстремума. Поэтому основной вклад в LA- и NP-линии вносят переходы через зону Γ'_2 . При учете только этих переходов $\eta = \lambda$, $\overline{\eta} = \overline{\lambda}$ и правила отбора для LA- и NP-линий совпадают с правилами отбора для прямых переходов $\Gamma'_2 - \Gamma'_{25}$. Переходы через зону L'₃ дают вклад только в η и $\overline{\eta}$, через зону L'₂ только в λ и $\overline{\lambda}$. При переходах через зону $\Gamma_{15} \lambda = -2\eta$, $\overline{\lambda} = -2\overline{\eta}$. Переходы с участием ТО-фононов через зону Γ_2 запрещены. Переходы через зону L'₃ дают вклад только в γ ; через L'₂ — только в α , при переходах через $\Gamma_{15} - \alpha = \beta = \gamma/2$.

При построении табл. 2 не учитывалось, что вследствие спин-орбитального взаимодействия к термам L₆ и Γ_8^+ , произошедшим из L₁ и Γ'_{25} , могут подмешиваться состояния других зон. В этом приближении оптические переходы из состояний (3/2, 1/2) и (-3/2; -1/2) запрещены. Для непрямых экситонов не учитывалось возможное примешивание других возбужденных состояний к термам с $j_z = \pm 3/2$ и $j_z = \pm 1/2$, возникающее в результате кристаллического расщепления. Если это расщепление сравнимо с энергией связи, то силы осцилляторов для перехода в эти состояния могут несколько различаться, но зависимость матричных элементов от направления вектора поляризации *е* не меняется.

Таблица 2

		-1/2, 1/2		$-\sqrt{rac{2}{3}}\lambda e_z u_{_{LA}}$	$\sqrt{rac{2}{3}}etaig(e_+u+eu_+ig)$	$-\sqrt{rac{2}{3}\lambda}e_z$		-1/2, 1/2		0	$-\sqrt{rac{2}{3}}\lambda e_z u_{LO}$	$\sqrt{rac{2}{3}}etaig(e_+u+eu_+ig)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\overline{\lambda}e_z$
Si		1/2, -1/2		$\sqrt{rac{2}{3}}\lambda e_z u_{LA}$	$-\sqrt{rac{2}{3}}eta(e_+u+eu_+)$	$\sqrt{rac{2}{3}}\overline{lpha}e_z$		1/2, -1/2		0	$\sqrt{rac{2}{3}}\lambda e_z u_{_{LO}}$	$-\sqrt{rac{2}{3}}eta(e_+u+eu_+)$	$\sqrt{rac{2}{3}}\overline{lpha}e_z$
к переходов в Ge и	6	-1/2, -1/2		$-rac{1}{\sqrt{3}}\eta e_+ u_{_{LA}}$	$-rac{1}{\sqrt{3}}(lpha e_{z}u_{+}+\gamma e_{-}u_{-})$	$-rac{1}{\sqrt{3}}ar{\eta}e_+$	6	-1/2, -1/2		$rac{1}{\sqrt{3}}\gamma e_{-}u_{_{LA}}$	$-rac{1}{\sqrt{3}}\eta e_+u_{_{LO}}$	$-rac{1}{\sqrt{3}}lpha e_z u_+$	$rac{1}{\sqrt{3}}(\overline{\gamma}e_{}-\overline{\eta}e_{_+})$
бора для непрямы:	a) Ge, $\Gamma_8^+ - I$	1/2, 1/2		$rac{1}{\sqrt{3}}\eta e u_{_{LA}}$	$rac{1}{\sqrt{3}}(lpha e_{z}u_{-}+\gamma e_{+}u_{+})$	$rac{1}{\sqrt{3}}\overline{\eta}e_{-}$	6) Si, $\Gamma_8^+ - \Delta$	1/2, 1/2		$rac{1}{\sqrt{3}}\gamma e_+ u_{_{LA}}$	$rac{1}{\sqrt{3}}\eta e u_{_{LO}}$	$rac{1}{\sqrt{3}}lpha e_z u$	$rac{1}{\sqrt{3}}(\overline{\gamma}e_{_+}+\overline{\eta}e_{})$
Правила от		-3/2, 1/2		$\eta e_+ u_{_{LA}}$	$\alpha e_z u_+ - \gamma e u$	$\overline{\eta} e_+$		-3/2, 1/2		$-\gamma e_{_{LA}}$	$\eta e_+ u_{LO}$	$lpha e_z u_+$	$-(\overline{\gamma}e_{}-\overline{\eta}e_{_+})$
		3/2, -1/2		$-\eta e_{-}u_{LA}$	$-(\alpha e_z u + \gamma e_+ u_+)$	$-\overline{\eta}e_{-}$		3/2, -1/2		$-\gamma e_+ u_{LA}$	$-\eta e_{-}u_{LO}$	$-\alpha e_z u$	$-(\overline{\gamma}e_++\overline{\eta}e)$
		j_z, s_z	фонон:	LA	TO	NP		j_z, s_z	фонон:	LA	ΓO	TO, TA	NP

Многоэкситонные комплексы в полупроводниках

Используя табл. 2 и зная волновые функции электронов и дырок в МЭПК, можно найти правила отбора для переходов, связанных с рекомбинацией определенной пары в комплексе*. При этом для фононных переходов складываются вероятности переходов через разные экстремумы, отвечающие излучению фононов с соответствующим волновым вектором К. Поэтому правила отбора для состояний электронов Γ_1 , Γ_2 и Γ_5 в Si или Γ_1 и Γ_5 в Ge одинаковы и интенсивности этих линий (при равной заселенности) пропорциональны статистическому весу этих состояний. Для бесфононных линий складываются матричные элементы переходов, и поэтому вероятности переходов для разных состояний электронов различны. Правила отбора для состояний Г, в Si и Ge совпадают с правилами отбора для прямого экситона $\Gamma_{8}^{+} \cdot \Gamma_{2}^{\prime}$. В табл. 3 приведены значения относительных интенсивностей линий, связанных с рекомбинацией электронов Γ_1, Γ_2 и Γ_5 в Si и Γ_1, Γ_5 в Ge, усредненные по всем возможным состояниям дырок и просуммированные по вырожденным состояниям электронов (т. е. учитывающие вырождение термов Г₃ и $\Gamma_{\rm s}$). Как указывалось в гл. 3, в бесфононных спектрах Si β -линии, связанные с рекомбинацией электронов Г_{3.5}, практически не наблюдаются. Следовательно, константы $\overline{\gamma}$ и $(\overline{\eta} - \overline{\alpha})^{**}$ малы. Указанное обстоятельство связано с тем, что для состояний Г, и Г, значение соответствующих комбинаций блоховских функций обращается в нуль в точке, где потенциал V(r) максимален.

Таблица 3

состоя	ниям дырок, в	Ge и Si
Терм	Si	Ge
Γ_1	$(2\overline{\eta}+\overline{\alpha})^2$	$(2\overline{\eta}+\overline{lpha})^2$
Γ_3	$2(\overline{\eta}-\overline{\alpha})^2$	_
Γ ₅	$6\overline{\gamma}^2$	$2(\overline{\eta}-\overline{lpha})^2$

Относительные интенсивности линий излучения при рекомбинации электронов Γ_i , усредненные по всем возможным состояниям дырок, в Ge и Si

* Правила отбора для фононных линий экситонов, связанных на центре, могут несколько отличаться от правил отбора для свободных экситонов. Причина этого заключается в том, что для свободных экситонов матричный элемент перехода M пропорционален $f(r)|_{r=r_e-r_n=o}$, тогда как для связанных $M \sim \int f_e(r)f_h(r)d^3r$. Вследствие этого интенсивности переходов для состояний с $j_z = \pm 3/2$ и $j_z = \pm 1/2$ могут несколько различаться даже при отсутствии кристаллического расщепления, что можно учесть, введя дополнительные множители (1 + x) и (1 - x) в матричные элементы переходов в эти состояния. Для бесфононных переходов, сопровождаемых передачей примеси большого импульса $K \sim 1/a$, где a – постоянная решетки, матричный элемент перехода определяется короткодействующей составляющей потенциала примеси V(r) при $r \sim a$. Поэтому для таких переходов $M \sim f_e(0) f_h(0)$ и правила отбора для них совпадают с правилами отбора для свободных экситонов.

** В работе [44] указано, что наилучшее согласование наблюдаемой степени поляризации NP-линии излучения свободных носителей в Si (B) в продольном магнитном поле с результатами теоретических расчетов имеет место при $[(\overline{\lambda} - \overline{\eta}) + 3\overline{\gamma}^2]/(2\overline{\eta} + \overline{\lambda})^2 = 0,18.$

Вероятности переходов для состояний двух дырок Γ_1 , Γ_3 и Γ_5 , образованных в результате спин-орбитального расщепления, одинаковы, и поэтому интенсивности этих линий при равной заселенности пропорциональны статистическому весу состояний 1:2:3.

Таблица 4

Направление деформации	Симме- трия		Состо	ЯНИЯ	
Без деформации	T_{d}	Γ_1	Γ_3	Γ_5	Γ ₈
(111)	$C_{_{3v}}$	Γ_1	Γ_3	$\Gamma_1{+}\Gamma_3$	$\Gamma_4{+}\Gamma_5{+}\Gamma_6$
(110)	C_{2v}	Γ_1	$\Gamma_1 {+} \Gamma_3$	$\Gamma_1{+}\Gamma_2{+}\Gamma_4$	$\Gamma_3 + \Gamma_5$
$\langle 100 \rangle$	D_{2d}	Γ_1	$\Gamma_1{+}\Gamma_3$	$\Gamma_4{+}\Gamma_5$	$\Gamma_6 + \Gamma_7$

Расщепление состояний Г₁, Г₃, Г₅ и Г₈ в Si при деформации вдоль различных осей

В следующих разделах мы используем эти правила отбора для расчета поляризации излучения в магнитном поле и в деформированных кристаллах.

6. Влияние упругих одноосных деформаций на спектры излучения МЭПК

6.1. Вырождение зон и стабильность комплексов

В соответствии с оболочечной моделью максимальное число электронов и дырок в основном состоянии комплексов определяется степенью вырождения зоны проводимости и валентной зоны. Поэтому естественно было ожидать, что при сильных одноосных деформациях, приводящих к частичному снятию вырождения, комплексы с большим числом связанных экситонов либо вообще не будут образовываться, либо будут иметь значительно меньшую энергию связи. Впервые влияние сильных одноосных деформаций на МЭПК в Si было исследовано в [19]. При использованных деформациях величина расщепления валентной зоны существенно превышала энергию связи экситонов в комплексах, поэтому могли заполняться только состояния, отвечающие нижней отщепленной зоне. В этих условиях вырождение валентной зоны равно двум. Зона проводимости остается вырожденной не менее, чем четырехкратно, так как долины, расположенные на одной оси, остаются нерасщепленными. Поэтому в МЭПК на донорах и на акцепторах в деформированном Si первой заполняется дырочная оболочка, в которой может находиться всего лишь две дырки. Проведенные исследования показали, что и в Si(B) и в Si(P) при больших деформациях вдоль любой из осей (111), (110) и (100) линии излучения комплексов с тремя и

четырьмя дырками исчезают. В Si (P) остаются лишь линии излучения, отвечающие рекомбинации e-h-пар в комплексах с одним и двумя экситонами, а в Si (B) — только с одним (рис. 9). Позднее аналогичные результаты были получены при исследовании стабильности комплексов на различных донорах (P, As, Sb) и акцепторах (B, Al) в [26, 30, 34]. Во всех случаях было найдено, что линии излучения комплексов с тремя дырками при 2 К исчезают из спектра, если их энергия связи становится меньше 1 мэВ. Очевидно, что образование комплексов со столь малой энергией оказывается термодинамически невыгодным.



Рис. 9. Спектры излучения МЭПК в одноосно сжатом Si, легированном B, P и Li. *a*) Si (B), Si (P), давление **P** || $\langle 111 \rangle$, T = 1,8 K, P = 20 МПа – сплошная линия, P = 120 МПа – штриховая линия; P = 20 МПа, T = 7 К – штрих-пунктир [19]; б) Si (Li), **P** || $\langle 100 \rangle$, P = 175 МПа, T = 1.6 К [30].

Несколько отличается ситуация в сильно сжатом Si (Li), в котором остается также линия излучения комплекса с тремя дырками [30]. В Si (Li) основным электронным состоянием является не спиновой синглет Г., а 10-кратно вырожденное состояние Г_{3 5}. Благодаря этому энергия связи НДЭ₃ (4 электрона и 3 дырки) в Si(Li) в 1,5 раза больше, чем в Si(P). В этих условиях НДЭ₂ остается стабильным и в сильно сжатом Si, несмотря на то, что он включает дырку в возбужденном состоянии, подобно тому, как это имеет место в МЭПК с пятью дырками в недеформированном Si. При этом энергия связи экситона в НДЭ₃ в сильно сжатом Si (Li) уменьшается в четыре раза по сравнению с недеформированными кристаллами, в то время как энергия связи комплексов с одной и двумя дырками почти не изменяется. Эти эксперименты подтверждают, что орбитальное вырождение зон является необходимым условием для образования связанных МЭПК с *m* > 1. В условиях, когда вырождение зон позволяет образование комплекса с двумя или более экситонами, в которых все электроны и дырки находятся в основном 1ѕ-состоянии, возможность связи с таким комплексом еще одного экситона с дыркой в возбужденном состоянии возрастает с ростом вырождения зон. Так, в сильно сжатом Si комплексы с тремя дырками образуются только в Si (Li), а в недеформированном Si комплексы с пятью дырками образуются на всех донорах и акцепторах.

Ценную информацию об электронных состояниях комплексов можно получить на основании изучения характера расщепления линий излучения МЭПК в условиях слабой одноосной деформации, когда величины расщепления зо
н $\Delta_{_{\!\!\mathcal{E}\!\!\mathcal{C}}}$, $\Delta_{_{\!\!\mathcal{E}\!\!\mathcal{V}}}$ меньше энергии связи экситонов в комплексах. Как отмечалось выше, в первых работах в этом направлении [8, 45] было найдено, что все линии m_m в Si(B) и α_m в Si(P) расщепляются на такое же число компонент, как и линии излучения ЭПК m_1 и α_1 соответственно. В рамках одноэлектронного приближения, лежащего в основе оболочечной модели, этот результат находит естественное объяснение, так как величина сдвига каждой из линий определяется только изменением энергии рекомбинирующей пары и не зависит от изменения энергии других электронов и дырок [15, 18]. Соотношения между интенсивностями компонент должны изменяться от линии к линии, так как с ростом числа е-h-пар в МЭПК изменяется число электронов и дырок, занимающих соответствующие состояния. Этот эффект особенно сильно проявляется при расщеплениях уровней, превосходящих величину kT: в этих условиях в МЭПК с малым числом экситонов заполняются только нижние уровни, а при увеличении числа связанных пар происходит заполнение уровней с большими энергиями. Детальное исследование расщепления линий α в Si (P) и *m* в Si (B) было выполнено в работах [19, 30, 34].

6.2. Расщепление зон, уровней свободного экситона и мелких примесей в деформированном Si

В многодолинных полупроводниках Si, Ge, SiC степень расщепления зоны проводимости зависит от направления деформации **P**, в то время как четырехкратно вырожденная валентная зона (J = 3/2) всегда расщепляется на две, вырожденных двухкратно. Энергия этих зон в точке экстремума (K = 0) определяется выражением [16]

$$E = \pm \sqrt{\mathcal{E}_{\varepsilon}} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{2}} \Big[\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} \right)^2 + \left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz} \right)^2 + \left(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz} \right)^2 \Big] + d^2 \left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 \right).$$
(19)

При деформации вдоль главных осей (100) или (111) расщепившимся уровням соответствуют состояния с $j_z = \pm 3/2$ и $\pm 1/2$. При сжатии нижним для дырок является уровень ($\pm 1/2$), а при растяжении — ($\pm 3/2$). При деформации по другим направлениям расщепленным состояниям нельзя приписать определенное значение проекции момента j_z на направление деформации, хотя для краткости их часто также обозначают как состояния с $j_z = \pm 3/2$ или $\pm 1/2$. При кинетических энергиях дырки, сравнимых с величиной деформационного расщепления, величина деформационного смещения и значение j_z зависит от направления квазиимпульса при сжатии вдоль любой оси.

Зона проводимости в Si не расщепляется при **P** \parallel (111), а при **P** \parallel (100) и Р || (110) она расщепляется на две. Число долин в нижней зоне равно двум при сжатии вдоль оси (100). При других направлениях деформации происходит расщепление на 3 зоны. В Ge зона проводимости не расщепляется при Р $\|\langle 100 \rangle$, при **P** $\|\langle 111 \rangle$ и **P** $\|\langle 110 \rangle$ происходит расщепление на две, при остальных направлениях — на три или четыре зоны. Расщепление уровня свободного экситона обусловлено расщеплением как зоны проводимости, так и валентной зоны, причем их вклады являются аддитивными [16]. Поэтому уровень свободного экситона в Si расщепляется на два при **P** || (111) и четыре при Р || (100) или (110) [46]. При малых деформациях следует учитывать кристаллическое расщепление дырочных состояний свободного экситона. Его можно описать введением в (19) начальной деформации ε_0 , направленной по главной оси соответствующего экстремума (100), (010), (001) в Si и (111), $(11\overline{1}), (1\overline{1}1), (\overline{1}11)$ в Ge. В Si, где кристаллическое расщепление мало ($\sim 0, 3$ мэВ [41]), оно проявляется лишь при очень малых нагрузках (<10 МПа), при которых в сдвигах расщепленных уровней свободного экситона наблюдается нелинейность. В Ge кристаллическое расшепление составляет ~1 мэВ [40].

В МЭПК на донорах электроны заполняют состояния нейтрального донора. Расщепление основного 1s-состояния нейтрального донора хорошо изучено (см., например, [16]). В первом приближении при описании зависимости энергетических уровней от деформации можно пренебречь понижением симметрии примесного центра в деформированных кристаллах и считать орбитально-долинное расщепление независящим от деформации. В этом случае для Si матрица взаимодействия с деформацией имеет вид [16]

Γ_1	$\frac{1}{3} \bigl(E_1 + E_2 + E_3 \bigr)$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(E_1 - E_2 \right)$	$-rac{1}{3\sqrt{2}}ig(2E_{3}-E_{1}-E_{2}ig)$	0	0	0	
г J	$\frac{1}{\sqrt{6}} \bigl(E_1 - E_2 \bigr)$	$\frac{1}{2} \bigl(E_1 + E_2 \bigr) + \Delta_3$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\big(E_1-E_2\big)$	0	0	0	
13	$-rac{1}{3\sqrt{2}}(2E_3-E_1-E_2)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \bigl(E_1 - E_2 \bigr)$	$\frac{1}{6} \left(E_1 + E_2 \right) + \frac{2}{3} E_3 + \Delta_3$	0	0	0	(20)
ſ	0	0	0	$E_1 + \Delta_5$	0	0	
Γ_{z}	0	0	0	0	$E_2 + \Delta_5$	0	
° [0	0	0	0	0	$E_{\rm 3}+\Delta_{\rm 5}$	

где E_i — сдвиг долины на оси i = x, у, z, Δ_3 , Δ_5 — величины орбитальнодолинного расщепления для термов Γ_3 и Γ_5 в недеформированном Si. При $\mathbf{P} \parallel \langle 111 \rangle$, когда $E_1 = E_2 = E_3$, расщепление уровней Γ_3 , Γ_5 и Γ_1 отсутствует. При $\mathbf{P} \parallel \langle 100 \rangle$ или $\mathbf{P} \parallel \langle 110 \rangle$ зона проводимости расщепляется на две зоны: четырехкратно и двукратно вырожденную. В первом случае

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{2}{3}\Delta_{_{arepsilon c}}$$
, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3 = \frac{1}{3}\Delta_{_{arepsilon c}}$, во втором — $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = -\frac{1}{3}\Delta_{_{arepsilon c}}$, $\mathbf{E}_3 = \frac{2}{3}\Delta_{_{arepsilon c}}$

где $\Delta_{\varepsilon c}$ — деформационное расщепление зоны проводимости (при сжатии $\Delta_{\varepsilon c} > 0$, а при растяжении $\Delta_{\varepsilon c} < 0$). При этом состояние НД в соответствии с (20) расщепляется на 5 уровней; при $\Delta_3 = \Delta_5$ два из них совпадают. Отметим, что число расщепленных уровней, произошедших из терма Γ_5 при деформации по $\langle 111 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$ (рис. 10), меньше, чем разрешено теорией групп (табл. 4). Это обстоятельство связано с тем, что в (20) не учитывалось изменение орбитально-долинного расщепления при деформации. Это изменение мало и практически всегда его можно не учитывать.



Рис. 10. Расщепление 1s-состояния нейтрального донора в Si при сжатии **P** || $\langle 100 \rangle$ и **P** || $\langle 110 \rangle$. *a*) Si (P), *б*) Si (Li). В скобках указана кратность вырождения терма.



Рис. 11. Расщепление линий МЭПК в Si (P) и Si (B) при деформации сжатия вдоль осей (100) и (111) [19, 30, 48]. Для удобства сравнения спектров β-линии в Si (P) и FE-линии в Si (B) и Si (P), измеренные в фононной области, смещены на величину энергии TO-фонона (58,05 мэВ) в бесфононную часть спектра.

Обратимся теперь к нейтральному акцептору, основное состояние которого Γ_8 в недеформированном Si и Ge четырехкратно вырождено по спину. При деформации вдоль любой оси это состояние расщепляется так же, как и валентная зона, на два, вырожденных двукратно. Это расщепление определяется формулой (19). Величина расщепления основного состояния нейтрального акцептора несколько меньше расщепления зоны в точке K = 0.

6.3. Расщепление уровней МЭПК в Si, деформированном вдоль оси (111)

В рамках ОМ электроны и дырки в комплексах последовательно заполняют рассмотренные выше состояния нейтральных примесей. Наиболее простая картина расщепления уровней имеет место при **P** || $\langle 111 \rangle$ (рис. 12), когда электронные состояния не расщепляются. Из рис. 11 видно, что все α -линии в Si (P) и линии *m* в Si (B) при **P** || $\langle 111 \rangle$ расщепляются на дублеты. Это означает, что величины расщепления дырочных оболочек для всех комплексов на P и B Δ_m^h с $m \ge 1$ совпадают, $\Delta_m^h \approx \Delta^h$. При фиксированной температуре заселенность верхних уровней комплексов убывает с увеличением Δ^h . В условиях термодинамического равновесия отношения интенсивностей компонент в дублетах для комплексов» содержащих *n*_h дырок, описываются следующими выражениями:



Рис. 12. Схема разрешенных оптических переходов между уровнями МЭПК при слабой деформации вдоль оси (111). *a*) Si (P), *б*) Si (B). Расщепление *β*-линий в Si (P) не показано.

$$n_{h} = 1: \quad \frac{I'}{I} = \exp\left(-\frac{\Delta^{h}}{kT}\right),$$

$$n_{h} = 2: \quad \frac{I'}{I} = \frac{4\exp\left(-\Delta^{h}/kT\right) + \exp\left(-2\Delta^{h}/kT\right)}{1 + 4\exp\left(-\Delta^{h}/kT\right)},$$

$$n_{h} = 3: \quad \frac{I'}{I} = \frac{1 + 2\exp\left(-\Delta^{h}/kT\right)}{2 + \exp\left(-\Delta^{h}/kT\right)},$$

$$n_{h} = 4: \quad \frac{I'}{I} = 1.$$
(21)

161

Измеренные зависимости I'/I (Δ^h) при фиксированной температуре в Si (B), Si (P) [19, 34, 30] и Si (Li) [30] хорошо согласуются с ожидаемыми в рамках ОМ. Для линий α_5 и α_6 в Si (P) и линии m_4 в Si (B) отношение I'/I, так же, как и для α_4 и m_3 , равно 1 [25]. Это показывает, что линии α_5 , α_6 и m_4 обусловлены рекомбинацией дырок из основного состояния Γ_8 , как и предполагалось ранее [15, 18].

При увеличении деформации и в Si (P), и в Si (B) абсолютные интенсивности линий излучения комплексов с одной и двумя дырками слегка возрастают, а с тремя и больше — уменьшаются и полностью исчезают при $P > P_{\kappa p} \sim 120$ МПа [19]. По положению линий β'_2 и β'_3 в Si (P) и m'_2 и m'_3 в Si (B), отвечающих переходам в основные состояния, можно проследить за изменением энергий связи экситонов в МЭПК с $n_h = 3$ и 4 соответственно. Экстраполяция положения этих линий к $P = P_{\kappa p}$ в Si (P) и Si (B) приводит к значениям энергии связи экситона ~1 мэВ в комплексах с $n_h = 3$ и ~3 мэВ в комплексах с $n_h = 4$. Таким образом, исчезновение комплексов с $n_h = 3$ при $P \sim P_{\kappa p}$ обусловлено тепловой диссоциацией [19, 30]. Их отсутствие приводит к исчезновению также МЭПК с $n_h = 4$, так как вероятность одновременного захвата на комплексов. В соответствии со значительно большей энергией связи комплексов с $n_h = 4$ отношения интенсивностей линий α_4 и α_3 в Si (P) и m_3 и m_4 в Si (B) слабо зависят от деформации вплоть до $P \sim P_{\kappa p}$.

6.4. Влияние расщепления зоны проводимости

Как отмечалось выше (см. рис. 10), состояние Г, остается синглетным при деформации вдоль любой оси, поэтому линии излучения α_m в Si(**P**) при ${f P} \parallel \langle 100 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$ так же, как и при ${f P} \parallel \langle 111 \rangle$, расщепляются только на две компоненты из-за расщепления дырочной оболочки. Дополнительные компоненты появляются лишь у линий, обусловленных рекомбинацией электронов $\Gamma_{3,5}$, т. е. у β -линий в Si(P) и у всех линий в Si(Li) и Si(B). Так как при $P \parallel \langle 100 \rangle \Gamma_{3,5}$ расщепляется на 3 подоболочки Γ_4^5 , Γ_1^3 и $\Gamma_{3,5}^{3,5}$ *, то число компонент в *β*-линиях с учетом двукратного расщепления дырочной оболочки может достигать шести. Хотя β -линии имеют большую полуширину и в этой же фононной области спектра присутствуют интенсивные α -линии, большинство компонент удается разрешить [30, 47]. Остановимся на основных особенностях поведения β -линий в сжатом Si (P). При очень больших деформациях Р || (100) в спектре излучения остается лишь одна компонента линии излучения НДЭ, β_1 , отвечающая переходу $\{2\Gamma_1^1, \Gamma_4^5; 2\Gamma_6^8\} \rightarrow \{2\Gamma_1^1; \Gamma_6^8\}$ и проявляющаяся только в фононной области спектра [19, 30]. При малых деформациях в фононной области можно различить по четыре компоненты в линиях излучения НДЭ₃ — β_2 и НДЭ₄ — β_2 , причем по две из них (более

^{*} Верхние индексы означают состояния, из которых произошли данные подоболочки.

слабые) проявляются и в бесфононном спектре [30]. Эту особенность линий β_2 и β_3 можно легко понять, если обратиться к схеме расщепления состояний НД (см. рис. 10). Компоненты, отсутствующие в бесфононном спектре, обусловлены рекомбинацией электронов в состоянии Γ_4^5 , а наблюдающиеся в бесфононном спектре — рекомбинацией электронов из более высокого терма — Γ_1^3 [34, 30].

Как указывалось в гл. 3, интенсивность линий, отвечающих рекомбинации электронов Γ_3 и Γ_5 , в бесфононном спектре очень мала. При деформациях по $\langle 100 \rangle$ (а также по $\langle 110 \rangle$) происходит смешивание состояний Γ_1^1 и Γ_1^3 , что и приводит к возгоранию линии γ . При больших деформациях, когда деформационное расщепление $\Delta_{\rm cc}$ намного превышает орбитально-долинное, волновая функция электронов Γ_1^3 представляет собой симметризованную комбинацию функций четырех верхних долин, а функция Γ_1^1 — двух нижних долин.

Наличие в деформированном Si симметричного по долинам электронного состояния Γ_1^3 приводит также к возгоранию линии 2e, отвечающей двухэлектронным переходам $\{2\Gamma_1^1 (1s); \Gamma_6^8\} \rightarrow \{\Gamma_1^3\}$ [30, 48] (см. рис. 12). Отношение интенсивности линии (2e) к интенсивности линии α_1 , отвечающей переходу из этого же состояния ЭПК, не зависит от плотности возбуждения и температуры, а разность $\hbar\omega(\alpha_1) - \hbar\omega(2e)$ (см. рис. 11) хорошо согласуется с известным для нейтрального донора фосфора расщеплением состояний Γ_1^1 и Γ_1^5 (см. рис. 10, *a*). Переходы из $\{2\Gamma_1^1; \Gamma_8^6\}$ в антисимметричные состояния Γ_1^4 и $\Gamma_{3,5}^5$ так же, как и переход из $(2\Gamma_1; \Gamma_8\}$ в $\Gamma_{3,5}$ в недеформированном Si, не наблюдаются. В Si (Li), сжатом вдоль оси $\langle 100 \rangle$, расщепление нижних термов Γ_4^5 и Γ_3^1 (см. рис. 10, *б*) в НДЭ_{*m*} невелико даже при больших сжатиях $P \gtrsim 100$ МПа: Е (Γ_4^5) — Е (Γ_1^5) ~ 0,1 мэВ. Поэтому в условиях равновесия даже при $T \approx 1,6$ К будет заполнен верхний уровень. В спектре излучения сжатого таким образом Si (Li) при любых давлениях наблюдается дублетная структура линий НДЭ₁ и НДЭ₂ (рис. 9, *б*) [30].

6.5. «Горячая» люминесценция МЭПК

Помимо рассмотренных переходов из основных состояний МЭПК в Si (P), сжатом вдоль оси $\langle 100 \rangle$, даже при 2 K хорошо видны линии излучения, отвечающие переходам из возбужденного состояния ЭПК { Γ_1^1 , Γ_4^5 ; Γ_6^8 } в Γ_1^1 (переход δ) и в Γ_4^5 (переход γ) [30–34]. В недеформированном Si эти линии возгораются лишь при T > 15 K [18]. Отношение $I(\delta)/I(\gamma)$ не зависит от интенсивности возбуждения и температуры. Одной из причин возрастания интенсивности этих линий является уменьшение расщепления между этими состояниями с 4 мэВ в недеформированном Si до 1,5 мэВ в сильно сжатом. Однако и при таком расщеплении при 2 K доля возбужденных ЭПК в условиях термодинамического равновесия должна быть ничтожно малой. По всей вероятности, время релаксации при деформации увеличивается и

оказывается сравнимым с временем жизни состояния. Заметное отклонение от термодинамически равновесного распределения наблюдается и для комплексов с m > 1, содержащих электроны из возбужденных состояний $\Gamma_{3,5}$, кроме терма Γ_1^3 [30]. Расчеты времени релаксации электронов в таких комплексах не проводились.



Рис. 13. Спектр излучения МЭПК в Si (Al), сжатом вдоль (111) (T = 1,8 K) [20]. Вверху — ТОкомпонента, внизу — бесфононная область. Линии излучения НАЭ₁ с электроном в верхней отщепленной долине обозначены индексом *C*. Классификация линий соответствует схеме переходов рис. 14, *б*.

Наиболее сильное отклонение от термодинамически равновесного состояния наблюдается в комплексах на акцепторах (B, Al) (рис. 13) [19, 20, 30], когда волновая функция электрона на примесном центре во всех состояниях мала, и поэтому передача импульса примеси затруднена. Так, в относительно чистых кристаллах Si (B) с концентрацией примесей ~10¹³ см⁻³ линия излучения «горячего» ЭПК на атомах бора видна при 2 К при расщеплении зоны проводимости, большем 10 мэВ [19, 49]. Смещение линий m'_1 и m_1 (с) в Si (B) линейно по деформации (рис. 11). Это показывает, что орбитальнодолинное расщепление состояний Γ_1 и $\Gamma_{3,5}$ в МЭПК в недеформированном Si (B) практически отсутствует, что и следовало ожидать для акцепторного центра.

6.6. Особенности расщепления уровней при сильной *j-j*-связи

Как указывалось в гл. 2, в ЭПК на более глубоких, чем бор, акцепторах состояние $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ двух дырок расщепляется на 3 терма: Γ_1 , Γ_3 и Γ_5 . При отсутствии расщепления термов Γ_3 и Γ_5 , когда эти 5 уровней образуют состояние с полным моментом J = 2 и $J_z = \pm 2, \pm 1, 0$, при деформации происходит смешивание состояний с $J_z = 0$, термов J = 0 и J = 2 (при деформации по $\langle 100 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$ ось *z* направлена по соответствующей оси). Энергия этих состояний [50, 51]

$$E_{1,2} = -\frac{1}{2}\Delta_{ex} \pm \sqrt{\Delta_{ex}^2 + 4\Delta_{ev}^2} ; \qquad (22)$$

здесь Δ_{ex} — обменное расщепление, а Δ_{ev} — деформационное, $\Delta_{ev} = 2\sqrt{\mathscr{E}}_{e}$, где \mathscr{E}_{e} определяется формулой (19). Энергия остальных термов с J = 2 не меняется. Если величины обменного расщепления термов $\Gamma_{5} - \Gamma_{1} (\Delta_{ex})$ и $\Gamma_{3} - \Gamma_{1} (\Delta'_{ex})$ различны, то при произвольном направлении деформации состояния Γ_{5} и Γ_{3} расщепляются на 2 уровня каждое. При деформации по оси $\langle 100 \rangle$ расщепляется только уровень Γ_{3} , при деформации по оси $\langle 111 \rangle$ — только Γ_{5} . Энергии двух уровней, зависящих от деформации, определяются формулой (22), причем в первом случае под Δ_{ex} следует понимать расстояние до уровня Γ_{3} , т. е. Δ'_{ex} , во втором — до $\Gamma_{5} (\Delta_{ex})$. При заметном кристаллическом расщеплении, кроме внешней деформации, следует учитывать внутреннюю, направленную по оси соответствующего экстремума.

Все переходы для МЭПК на акцепторах, которые разрешены в сильно деформированных кристаллах как одноэлектронные (сплошные стрелки на рис. 14, *б*), хорошо видны в спектрах излучения Si (Al) — (рис. 14, *a*) [20].



Рис. 14. Расщепление линий излучения МЭПК в Si (Al) при сжатии вдоль оси (111) [20]. *a*) Наблюдаемое расщепление, *б*) схема расщеплений. Точками показаны измеренные величины расщеплений уровней.

Переходы, показанные на рис. 14, б пунктиром, разрешены лишь при малых деформациях в силу смешивания различных одночастичных волновых функций в состояниях E_1 и E_2 из-за обменного взаимодействия. При деформациях по осям $\langle 100 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$ интенсивность этих линий должна уменьшаться с ростом деформации по закону

$$\frac{I_{f}\left(\Delta_{\varepsilon v}\right)}{I_{f}\left(0\right)} = 1 - \frac{\Delta_{\varepsilon v}}{\sqrt{\frac{1}{4}\Delta_{\varepsilon x}^{2} + \mathscr{E}_{\varepsilon}}},$$
(23)

в то время как интенсивность разрешенных линий при этом слегка возрастает:

$$\frac{I_a(\Delta_{\varepsilon v})}{I_a(0)} = 1 + \frac{\Delta_{\varepsilon v}}{\sqrt{\frac{1}{4}\Delta_{\varepsilon v}^2 + \ell_{\varepsilon}^2}}.$$
(24)

При деформации по оси, отличной от (100) и (111), расщепившиеся состояния дырок не имеют определенного момента и формулы (23), (24) справедливы лишь при выполнении условия изотропии

$$\frac{2b}{c_{11} - c_{12}} = \frac{d}{\sqrt{3}c_{44}}.$$
(25)

Для Si

$$\frac{2b}{c_{11}-c_{12}}\frac{\sqrt{3}c_{44}}{d}\approx 1,14,$$

поэтому отступление от (24), (23) должно быть невелико. Линия излучения ЭПК m_1^2 , отвечающая переходу 2, расположенная краснее линии излучения m_1^1 на величину расщепления уровня нейтрального акцептора, хорошо видна в бесфононном спектре рис. 13. Однако ее не удается проследить в фононных повторениях [20]. Зависимости отношений интенсивностей бесфононных линий m_1^2 и m_1^1 при Р || $\langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$ показаны на рис. 15 вместе с расчитанными по формулам (23) и (24) при двух значениях констант *d* и *b*, измеренных для НАЭ₁ и НА. Из рисунка видно, что экспериментальная зависимость $I(m_1^2)/I(m_1^1)$ для «холодных» ЭПК в Si (Al), сжатом вдоль оси $\langle 100 \rangle$, оказывается значительно слабее, чем в других случаях. Такое поведение свидетельствует о заметных отступлениях от оболочечной модели.

Из расщепления линий излучения можно определить константы деформационного потенциала для дырок во всех МЭПК в Si (B) и Si (Al), определяющие расщепление линий при деформации по (111) или (100):

$$\Delta_{\varepsilon_{111}} = \frac{d_m}{\sqrt{3}} \varepsilon_{111}, \qquad (26)$$

$$\Delta_{\varepsilon 100} = b_m \varepsilon_{100} ; \qquad (27)$$

здесь ε_{111} и ε_{100} — относительные деформации при **Р** || $\langle 111 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$ соответственно, m — число экситонов в комплексе. Как и ожидалось (см. гл. 3), значения $d_m(b_m)$ в НАЭ_m на боре не зависят от числа связанных экситонов и составляют так же, как и для НА бора, ~0,84 $d_{FE}(b_{FE})$ [20, 52]. Для более глубокого акцептора Al $d_{HA}(b_{HA}) \approx 0,6 \ d_{FE}(b_{FE})$ [52]. При переходе же к НАЭ₁ на Al значения деформационных констант $d_1(b_1)$ возрастают до значения 0,8 $d_{FE}(b_{FE})$. При дальнейшем увеличении числа экситонов в НАЭ_m они не изменяются.



Рис. 15. Зависимости отношений интенсивностей линий МЭПК m_1^2 и m_1^1 в Si (Al) от величины расщепления основного состояния НА. Экспериментальные значения получены в следующих условиях: $1 - \mathbf{P} \parallel \langle 100 \rangle$, «холодные» НАЭ₁; $2 - \mathbf{P} \parallel \langle 100 \rangle$, «горячие» НАЭ₁; $3 - \mathbf{P} \parallel \langle 110 \rangle$, «холодные» НАЭ₁; $4 - \mathbf{P} \parallel \langle 110 \rangle$, «горячие» НАЭ₁; $5 - \mathbf{P} \parallel \langle 111 \rangle$. Сплошными линиями показан расчет при значениях параметров $d/d_{FE} = b/b_{FE} = 0,6$ и 0,8 — кривые 6 и 7, соответственно.

6.7. Поляризация линий излучения МЭПК в деформированном кремнии

В рамках ОМ поляризация каждой линии излучения МЭПК, как и ее положение в спектре, определяется состояниями рекомбинирующих электрона и дырки. Одноосная деформация приводит к изменению энергии этих состояний и расщеплению соответствующих линий излучения. Как отмечалось выше, в простейшем случае при **Р** \parallel (111 \rangle , когда расщепляется только валентная зона, все линии излучения МЭПК расщепляются на дублеты. Компоненты дублета удобно обозначать как X_{l}^a , где верхний и нижний индексы указывают соответственно состояния рекомбинирующих, электрона и дырки (рис. 16). Обратим внимание на то, что при сжатии длинноволновыми являются линии $X_{\pm 1/2}^a$, а при растяжении — $X_{\pm 3/2}^a$. При **Р** \parallel (100 \rangle расщепляют-

ся и электронные состояния (см. рис. 16), что приводит к дополнительному расщеплению линий излучения. Так, линии излучения экситонов расщепляются на два дублета $FE_{\pm 1/2}^{(100)}$, $FE_{\pm 1/2}^{(001)(010)}$ и $FE_{\pm 3/2}^{(001)(010)}$.



Рис. 16. Одноэлектронные переходы в МЭПК на акцепторе и доноре замещения при одноосном растяжении (P < 0) и сжатии (P > 0) вдоль осей (111) и (100) [54]; *a*) МЭПК на акцепторе, В; *б*) МЭПК на доноре, Р.

Таблица 5

Относительная интенсивность ТО-, ТА-линий излучения	
в деформированном Si в π - и σ -поляризациях	

р	Topa	Ιπ	Ισ	При $\alpha/\beta = 0,5$	
P	Терм	1	I.	I^{π}	I^{σ}
(111)	$X_{\pm 1/2}^{\Gamma_{1,3,5}}$	$2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$2(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta$	3,5	2,0
	$X_{\pm 3/2}^{\Gamma_{1,3,5}}$	$2(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	$2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta$	1,5	3,0
$\langle 100 \rangle$	$X^{(100)}_{\pm 1/2}$	α^2	$2\beta^2$	0,25	2
	$X^{(100)}_{\pm 3/2}$	$3\alpha^2$	0	0,75	0
	$X^{(010)(001)}_{\pm 1/2}$	β^2	$\frac{1}{2}(5\alpha^2+\beta^2)$	1	1,125
	$X^{(010)(001)}_{\pm 3/2}$	$3\beta^2$	$\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)$	3	1,875

Как отмечалось выше, при рекомбинации электронов и дырок в МЭПК с участием фононов следует суммировать интенсивности для переходов из разных долин. Правила отбора для переходов, связанных с рекомбинацией электронов Γ_1 , $\Gamma_{3,5}$ с дыркой Γ_8 , для ТО (ТА)-линий приведены в табл. 2. Используя эту таблицу, можно рассчитать относительные интенсивности ТО (ТА)-линий излучения свободных экситонов в деформированном Si (табл. 5) [25, 53]. Из экспериментальных исследований поляризации экситонных линий излучения при одноосной деформации Si [53], а также в магнитном поле [44] следует, что для ТО-линии $\alpha/\beta = 0,5$. Численные значения интенсивностей переходов в этом случае также указаны в табл. 5.

Наиболее простая ситуация имеет место для МЭПК в Si(B), для которых орбитально-долинное расщепление электронной 1s-оболочки отсутствует. Вследствие этого электронные состояния расщепляются в соответствии с расщеплением долин. Как и следовало ожидать в этом случае, поляризация фононных компонент линий излучения МЭПК в Si(B) совпадает с поляризацией соответствующих линий излучения свободных экситонов (рис. 17, *в*, *г* и табл. 6) [54].



Рис. 17. Спектры излучения МЭПК в поляризациях параллельно (сплошная линия) и перпендикулярно (штриховая линия) направлению деформации **Р** $\parallel \langle 111 \rangle$ [54]; *a*), *b*) Si (P), P = 25 МПа, T = 2 K; e), *c*) Si (B), P = 22 МПа, T = 2 K. Рис. *a*) и *e*) — соответствуют растяжению (P < 0), рис. *b*) и *c*) — сжатию (P > 0).

$ \begin{tabular}{ $ IledopMattinat} \\ \hline $ IledopMattinat $ IledopMattinat $ IledopMattinat $ IledopMattinat $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $$	Степ	ень поляризац	ии линий	излучен	нем ви	к в одноосно	о деформ	ированно	M Si ((+) –	- сжатие, (–) –]	Таблица (растяжение)	
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$		-				Состоян	ие ре-		Степ	ень поляризаци	И	
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	имесь	Деформа	ция	Фонон	Линия	комбинир	ующих			Экспериме	HT	
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$		11.0000					1Ц П	Расчет	Изме-	Исправленная	Экситонная	
$ \left(111\right) \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		паправление	онак			нодтянис	дырка		ренная		линия FE (TO)	
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	Р		Ι	NP	α_1	Γ_1	$\pm 3/2$	-100	-70	-100^{*}		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			+	NP	α_1	Γ_1	$\pm 1/2$	60	45	64		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		/100/	I	NP	α_1	Γ_1	$\pm 3/2$	-100	-62	100^{*}		
$ \left(111 \right) \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			+	NP	$\alpha^{}_1$	L L	$\pm 1/2$	60	42	66		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		/111/	+	TO	α_i	Γ_1	$\pm 1/2$	27	19	27		
$ \left \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			I	TO	$lpha_i$	L 1	$\pm 3/2$	-33	-23	-33		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			Слабое сжатие	TO	$lpha_i$	Γ_1	$\pm 1/2$	-43	31	-49		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$\langle 100 \rangle$	Сильное сжатие	TO	$lpha_i$	Γ_1	$\pm 1/2$	-78	-50	-79		
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$			+	TO	β, δ	$\Gamma_{3,5}$	$\pm 1/2$	-78	-50	-79		
B $\begin{pmatrix} (111) \\ + \\ + \\ (100) \\ + \\ - \\ - \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{1,3,5} \\ \Gamma_{1,3,5} \\ + \\ -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1/2 \\ 27 \\ -78 \\ -47 \\ -78 \\ -41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 24 \\ -68 \\ -6$			I	TO	α_i	Γ_1	$\pm 3/2$	33	20	33		
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	þ	/111/	+	TO	m_{1}	$\Gamma_{1,3,5}$	$\pm 1/2$	27	19	27	24	
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	٩	(111)	+	TO	$m_{_2}$	$\Gamma_{1,3,5}$	$\pm 1/2$	27	17	24	24	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		/100/	+	TO	$m_{_1}$	(100)	$\pm 1/2$	-78	-47	-72	-68	
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$			+	TO	$m_{_2}$	(100)	$\pm 1/2$	-78	-41	-65	-68	
$- TO m_2 (010) (001) \pm 3/2 23 18 27 27$			Ι	TO	$m_{_1}$	(010) (001)	$\pm 3/2$	23	17	26	27	
			I	TO	$m_{_2}$	(010) (001)	$\pm 3/2$	23	18	27	27	

В.Д. Кулаковский, Г.Е. Пикус, В.Б. Тимофеев

В Si (P) основное состояние электронов Г₁ при **P** || (111) включает волновые функции всех шести нерасщепленных долин одинаковым образом. Поэтому измеренная поляризация фононных повторений линий излучения ЭПК также совпадает с поляризацией соответствующих экситонных линий [54].

При **Р** || (100) долины в зоне проводимости не эквивалентны. Орбитально-долинное взаимодействие смешивает состояния разных долин. Это смешивание проявляется в двух термах:

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{3} \Delta_{\varepsilon c} + \Delta_{VO} \right) \pm \sqrt{\Delta_{\varepsilon c}^2 + \Delta_{VO}^2 + \frac{2}{3} \Delta_{\varepsilon c} \Delta_{VO}} \right].$$
(28)

Вследствие этого поляризация соответствующих линий излучения МЭПК на донорах зависит от соотношения между величинами деформационного Δ_{sc} и орбитально-долинного Δ_{vo} расщеплений. Интенсивность этих линий (без учета населенностей) в π и σ поляризациях определяется формулами

$$I_{E_{1}}^{\pi(\sigma)} = \frac{1}{6\left(1+2\zeta^{2}\right)} \Big[4I^{\pi(\sigma)} \left(FE_{3/2(1/2)}^{(100)} \right) \left(1-\zeta\right)^{2} + I^{\pi(\sigma)} \left(FE_{3/2(1/2)}^{(010)(001)} \right) \left(1+2\zeta\right)^{2} \Big], \quad (29)$$

$$I_{E_2}^{\pi(\sigma)} = \frac{1}{3(1+2\zeta^2)} \Big[I^{\pi(\sigma)} \Big(FE_{3/2(1/2)}^{(100)} \Big) \Big(1+2\zeta \Big)^2 + I^{\pi(\sigma)} \Big(FE_{3/2(1/2)}^{(010)(001)} \Big) \Big(1-\zeta \Big)^2 \Big], \qquad (29')$$

где $\zeta \equiv \Delta_{_{\mathcal{E}C}}/3E_1$.

Остальные четыре терма образуются либо только электронами долины (100) ($E_3 = \Delta_{VO} - \frac{2}{3} \Delta_{\varepsilon c}$), либо электронами долин (010) и (001) ($E_{4-6} = \Delta_{VO} + \frac{1}{3} \Delta_{\varepsilon c}$). Поляризация отвечающих этим термам линий излучения должна совпадать с поляризацией экситонных линий $FE_{3/2(1/2)}^{(100)}$ и $FE_{3/2(1/2)}^{(001)(010)}$ соответственно, а относительные интенсивности равны 1 (E_3) и 3 (E_{4-6}).

Из (28), (29) видно, что при малых деформациях, когда подмешиванием состояний Γ_3 в Γ_1 можно пренебречь, для α -линии в Si (P):

$$I(\alpha_{3/2(1/2)}) = \frac{1}{3} \Big[I(FE_{3/2(1/2)}^{(100)}) + I(FE_{3/2(1/2)}^{(001)(010)}) \Big],$$
(30)

т. е. интенсивность равна сумме интенсивностей экситонных переходов из разных долин. При больших деформациях ($\zeta \to 1$) нижнее электронное состояние включает лишь волновые функции двух нижних долин и

$$I(\alpha_{3/2(1/2)}) \to I(FE_{3/2(1/2)}^{(100)}).$$
 (31)

Рассчитанные и экспериментальные значения степени поляризации TO-компонент ряда линий в Si (P) [54] приведены в табл. 6. В условиях эксперимента, из-за многократных отражений внутри кристалла, выходящее из кристалла излучение оказывается частично деполяризовано. Поэтому при сопоставлении рассчитанных и экспериментальных значений степени поляризации удобно ввести соответствующий коэффициент деполяризации. Этот коэффициент мы определили по измеренной поляризации NP линии $\alpha_{1,3/2}^{\Gamma_1}$ которая согласно теории должна быть равна 100%. Как видно из табл. 6, с учетом этого коэффициента согласие между рассчитанными и экспериментальными значениями для всех линий оказывается достаточно хорошим.

Выше мы рассмотрели переходы в МЭПК с участием фононов. Как указывалось выше, расчет интенсивностей бесфононных линий отличается от расчета фононных компонент наличием интерференции между переходами из различных долин. Относительные интенсивности бесфононных переходов при рекомбинации электронов Γ_1 при **P** || $\langle 100 \rangle$ и **P** || $\langle 111 \rangle$ совпадают (табл. 7). Из табл. 7 следует, что степень поляризации для линий $\alpha_{i,\pm3/2}^{\Gamma_1}$ и $\alpha_{i,\pm1/2}^{\Gamma_1}$ должна составлять соответственно 100% и 60%. Экспериментальные спектры излучения МЭПК в Si (P) показаны на рис. 17, *a*, *б* [54]. Так же, как и для ТО-компонент, согласие между измеренными и рассчитанными значениями степени поляризации с учетом фактора деполяризации оказывается хорошим.

Таблица 7

Относительная интенсивность NP-линий $lpha_{_{m}}$	
в деформированном Si в π - и σ -поляризациях при P $\parallel\langle 1 \H{0} 0 angle$ и P \parallel	$\langle 111 \rangle$

Терм	I^{π}	I^{σ}
$X^a_{\pm 1/2}$	4	1
$X^a_{\pm 3/2}$	0	3

При деформации вдоль направлений, отличных от $\langle 111 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$, интенсивности I^{π} и I^{σ} зависят от направления распространения света, а также от соотношения упругих модулей ($s_{11} - s_{12}$)/ s_{44} и констант деформационного потенциала b/d (как и для прямых переходов $\Gamma_2^1 - \Gamma_8$, они определяются формулами (40–39) из [16]).

При наличии *j–j* связи (МЭПК на акцепторах Al, Ga, In) нужно учесть дополнительное расщепление состояния с двумя дырками $\Gamma_8 \times \Gamma_8 = \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5$. Если расщепление Γ_3 и Γ_5 достаточно мало, то его можно не рассматривать. При одноосной деформации четыре из пяти уровней $\Gamma_3 + \Gamma_5$, имеющие $J_z = \pm 2 (\pm 1/2, \pm 3/2)$ и $J_z = \pm 1 (\pm 1/2, \pm 3/2)$, не смещаются. Поляризация линий $X^a_{\pm 1/2}$ и $X^a_{\pm 3/2}$ совпадает с поляризацией соответствующих линий излучения свободных экситонов $FE^a_{\pm 1/2}$ и $FE^a_{\pm 3/2}$. Суммарная интенсивность этих линий равна четырем.

Спиновые состояния двух оставшихся уровней (см. рис. 14, б) E_1 и E_2 представляют суперпозицию состояний $\pm 1/2$ и $\pm 3/2$. Поэтому обе линии,, отвечающие переходам из этих состояний, расщепляются на дублеты изза расщепления конечного состояния НА. При этом поляризация линий

с меньшей энергией в этих дублетах совпадает с поляризацией коротковолновой компоненты в дублете, возникающем при рекомбинации дырок в состояниях $J_z = \pm 2, \pm 1$, произошедших из $\Gamma_{3,5}$.

С ростом деформации вклад дырок (±3/2) в E_1 и (±1/2) в E_2 уменьшается и линии, соответствующие рекомбинации дырок в этих состояниях, исчезают из спектра. При сильной деформации остается пара линий, образующая дублет, расщепленный на величину $2\Delta_{\varepsilon c}$ и смещенный относительно дублета E_{3-6} на энергию $\Delta_{v0}/2$. Расположение линий в этом дублете такое же, а относительная интенсивность в 2 раза меньше, чем в дублете E_{3-6} (без учета заселенностей уровней).

6.8. Энергии связи МЭПК в деформированном Si

Энергии связи ЭПК в Si(B) и Si(Li) не изменяются с точностью до ошибки их определения (~0,2 мэВ) при деформации кристаллов Si вдоль любой оси [19, 30]. Иная ситуация в случае Si(P). В недеформированном Si(P) и в Si (P), сжатом по осям $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$, энергия связи ЭПК составляет соответственно $\delta_1 = 4,5, \, \delta_{1\langle 111 \rangle} = 4,3, \, \delta_{1\langle 110 \rangle} = 3,3$ и $\delta_{1\langle 100 \rangle} = 2,9 \pm 0,2$ мэВ [19]. Из приведенных значений видно, что величина δ_1 сильно изменяется в тех случаях, когда деформация приводит к расщеплению зоны проводимости и уменьшению химического сдвига, связанного с орбитально-долинным взаимодействием. В соответствии с (20) химический сдвиг нижнего уровня Г в Si (P) при сильном сжатии по оси (100) должен уменьшаться на величину $2\Delta_{vo}/3$, а при сжатии по $\langle 110
angle$ на $\Delta_{vo}/3$, где Δ_{vo} — орбитально-долинное расщепление в недеформированном кристалле. Это приводит к уменьшению расстояния от уровня Γ_1^1 до ближайшего из расщепленных уровней Γ_3 : в первом случае в 3 раза, во втором — в 1,5 раза (при этом не учитывается изменение плавных функций при деформации). Отличие Si (Li) от Si (P) заключается в том, что в Si (Li) химический сдвиг нижнего многократно вырожденного $\Gamma_{_{3}\,_{5}}$ - уровня при деформации по $\langle 100\,\rangle$ и $\langle 110\,\rangle$ не изменяется (хотя расстояние до ближайших уровней, как указано выше, также уменьшается в 3 (**P** \parallel (100)) и 1,5 (**P** \parallel (110)) раза). Поэтому величины δ_1 и δ_2 в Si (Li) не зависят от деформации.

Отметим также, что энергия связи НДЭ₂ в основном состоянии $\{2\Gamma_1^1, \Gamma_4^5; 2\Gamma_6^8\}$ в сильно сжатом вдоль $\langle 100 \rangle$ Si (P) (4,4 ± 0,2 мэВ) несколько больше, чем в недеформированном Si (3,8 ± 0,2 мэВ) [30]. Энергия связи ЭПК в Si (Al) уменьшается в деформированных кристаллах с 5,1 мэВ до 4,2 мэВ уже при расщеплении валентной зоны $\Delta_{ev} \sim \Delta_{ex} \sim 1$ мэВ [20]. Это может быть объяснено уменьшением обменной энергии.

Влияние магнитного поля на спектры МЭПК

7.1. Зеемановское расщепление

В рамках оболочечной модели в отсутствие орбитально-долинного и *j–j*взаимодействий расщепление линий излучения МЭПК определяется только изменением энергии рекомбинирующей пары. При отсутствии е–h-обмена это изменение энергий есть сумма изменения энергии электрона и дырки:

$$\hbar\Delta\omega = E_{H_s}^e + E_{H_i}^h \,. \tag{32}$$

При не очень сильных магнитных полях *H* в (32) достаточно учитывать лишь линейное по полю зеемановское расщепление. Соответствующий гамильтониан \mathscr{H}_{H}^{e} для электронов имеет вид [16]

$$\mathscr{H}_{H}^{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \mu \Big[g_{\parallel} \sigma_{z} H_{z} + g_{\perp} \big(\sigma_{x} H_{x} + \sigma_{y} H_{y} \big) \Big].$$
(33)

Здесь ось z направлена по главной оси данного экстремума. В (33) μ — магнетон Бора, σ_i — матрица Паули, g_i — g-факторы электрона. Согласно (33) каждый электронный уровень данной долины расщепляется на два с энергиями

$$E_{H_s}^e = s\mu \sqrt{g_{\parallel} H_z^2 + g_{\perp} H_{\perp}^2}, \quad s = \pm \frac{1}{2}.$$
 (34)

Для Si g_{\parallel} практически не отличается от g_{\perp} , и расщепление не зависит от направления **H**:

$$E_{H_e}^e = sg_e \mu H \,. \tag{35}$$

Для Ge, где $g_{\parallel} \neq g_{\perp}$, характер расщепления уровней для Γ_1 и Γ_5 состояний различен. Магнитное поле смешивает эти состояния. Поэтому расщепление линий излучения НДЭ₁ и НДЭ₂ при $\Delta_{VO} \neq 0$ уже не определяется простой формулой (34). В Si ($g_{\parallel} = g_{\perp} = g_e = 2$) расщепление электронных уровней для всех термов Γ_1 , Γ_3 и Γ_5 одинаково и определяется формулой (35) и при $\Delta_{VO} \neq 0$.

Гамильтониан \mathscr{H}_{H}^{h} , описывающий зеемановское расщепление уровней дырок, имеет вид

$$\mathscr{H}_{H}^{h} = \mu \Big[g_{1} \big(\mathbf{J} \mathbf{H} \big)^{2} + g_{2} \big(J_{x}^{2} H_{x}^{2} + J_{y}^{2} H_{y}^{2} + J_{z}^{2} H_{z}^{2} \big) \Big],$$
(36)

здесь g_1 и g_2 — изотропный и анизотропный *g*-факторы дырки. Для свободных дырок $g_2 \ll g_1$, однако для связанных они могут быть сравнимы. При $g_2 = 0$ 4-кратно вырожденное состояние Γ_8 расщепляется на 4 терма с $j = J_z = \pm 3/2, \pm 1/2$:

$$E_{Hj}^{h} = g_{1}\mu Hj.$$
(37)

При $g_2 \neq 0$ расстояние между уровнями не эквидистантно и зависит от направления **H** [16]:

$$E_{H,\pm 3/2}^{h} = \pm \frac{3}{2} g_{h_{5/2}} \mu H, \quad E_{H,\pm 1/2}^{h} = \pm \frac{1}{2} g_{h_{1/2}} \mu H.$$
(38)

Таким образом, при выполнении условий (32) в спектрах излучения каждая линия может расщепляться на 8, соответствующих 2 значения
м $s_{_{z}}=\pm 1/2$ электрона и 4 значениям J_z для дырок. (В Ge при **H** $mathbb{H}$ (100) расщепление E_H^e различно для разных долин.) В соответствии с правилами отбора (табл. 2) переходы из состояний (3/2, 1/2) и (-3/2, -1/2) запрещены. Поэтому в тех случаях, когда спины электронов и дырок параллельны, соответствующие линии излучения не наблюдаются. Из формул (33) видно, что при $g_{\parallel} \neq g_{\perp}$ **s** не параллелен Н, если Н направлено не по главной оси или не перпендикулярно ей. Согласно (34) J не параллельно H, если $g_2 \neq 0$ и H направлено не по главным осям (111), (100) или (110). В этих случаях могут наблюдаться все 8 линий. В табл. 8, 9 приведены относительные интенсивности NP- и TO-, ТА-компонент *α*-линий для всех возможных переходов. Для бесфононных *а*-линий относительные интенсивности не зависят от направления магнитного поля. В этом случае в геометрии Фарадея из шести линий две запрещены. Эта же таблица определяет относительные интенсивности линий в НАЭ, при $\overline{\eta} = \overline{\lambda}$ и $\overline{\gamma} = 0$. Для ТО-, ТА-линий относительные интенсивности зависят от направления магнитного поля. В таблицах указаны значения $I_{_} =$ $I_{++}-I_{--}$ и $I_+=I_{++}+I_{--}$ в геометрии Фарадея и $I^{\pi}=I_{zz}$ и $I^{\sigma}=I_{xx}$ в геометрии Фойхта при **H** || (111) и **H** || (100). Здесь I_{++} и I_{--} – интенсивности в правой и левой циркулярной поляризации, $z \parallel \mathbf{H}$, а $x \perp \mathbf{H}$. В рассмотренных случаях $I_{_{xx}}$ не зависит от направления оси *х* в плоскости, перпендикулярной **H.** Табл. 8, 9 определяют поляризацию каждой из линий излучения МЭПК. Интенсивность каждой из линий зависит также от заселенности соответствующих состояний. Рассмотрим особенности спектров излучения комплексов в геометриях Фойхта и Фарадея.

Таблица 8

:		Геометри	я Фарадея	Геометрия Фойхта		
J_z	S _z	I_{-}	I_+	I^{π}	I^{σ}	
3/2	-1/2	3	7	0	7	
-3/2	1/2	-3	3	0	3	
1/2	1/2	1	1	0	1	
-1/2	-1/2	-1	1	0	1	
1/2	-1/2	0	0	4	0	
-1/2	1/2	0	U	4	U	

Относительные интенсивности NP-линий α_m в магнитном поле в Si в геометрии Фарадея и Фойхта

Таблица 9

$\mathbf{P}\parallel\langle 110 angle$							
	_	Геометри	я Фарадея	Геометрия Фойхта			
, J _z	S _z	Ι_	I_+	I^{π}	I^{σ}		
$3/2 \\ -3/2$	$-1/2\\1/2$	$-9 \Phi_{T}$ $9 \Phi_{T}$	$3(2+\Phi_T)$	$3(1-\Phi_T)$	$\frac{3}{2}(2+\Phi_{T})$		
$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2\end{array}$	$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2\end{array}$	$egin{array}{c} -3 \ \Phi_{_T} \ 3 \ \Phi_{_T} \end{array}$	$2 + \Phi_T$	$1 - \Phi_T$	$\frac{1}{2}(2+\Phi_T)$		
$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2\end{array}$	$-\frac{1/2}{1/2}$	0 0	$4(1 - \Phi_T)$	$2(1+2\Phi_T)$	$2(1 - \Phi_T)$		
$\mathbf{P} \parallel \langle 100 angle$							
$3/2 \\ -3/2$	$-\frac{1/2}{1/2}$	$\begin{array}{c} -6 \Phi_{_T} \\ 6 \Phi_{_T} \end{array}$	3	3	3/2		
$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2\end{array}$	$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2\end{array}$	$egin{array}{c} -2 \ \Phi_{_T} \ 2 \ \Phi_{_T} \end{array}$	1	1	1/2		
$\begin{array}{c} 1/2\\ -1/2 \end{array}$	$-\frac{1/2}{1/2}$	0 0	4	0	2		
	Φ_T	$=rac{lphaeta}{lpha^2+eta^2}$; Φ_T	= 0,4 при $\frac{\alpha}{\beta}$ =	0,5.			

Относительные интенсивности ТО-, ТА-линий излучения в Si в геометриях Фарадея и Фойхта

7.2. *α*-линии в Si(P) в геометрии Фойхта

 α -линии в спектрах МЭПК связаны с рекомбинацией электрона Γ_1 и одной из дырок Γ_8 . В общем случае в Si при H || $\langle 100 \rangle, \langle 111 \rangle, \langle 110 \rangle$ наблюдаются 6 линий.

При *gµH* ≪ *kT* интенсивности зеемановских компонент определяются вероятностями одноэлектронных переходов между соответствующими спиновыми подуровнями (табл. 8, 9), и поэтому относительная интенсивность линий одинакова для всех комплексов.

Качественное различие в спектрах излучения комплексов наблюдается в больших магнитных полях, когда $g\mu H \gg kT$ и возбужденные спиновые подуровни не заселены ($H \gtrsim 50$ кЭ в Si). В этом случае [55–57] число наблюдаемых зеемановских компонент изменяется от 1 для α_1 до 6 для линии α_4 (рис. 18). При увеличении магнитного поля от 50 до 80 кЭ относительные интенсивности зеемановских компонент для всех α -линий в Si (P) не изменяются и энергетические расстояния между компонентами линейно увеличиваются с ростом магнитного поля. Такое поведение линий находит естественное объяснение в рамках ОМ.



Рис. 18. Расщепление бесфононных α -линий излучения МЭПК в Si (P) в магнитном поле [57]. Вверху — схема переходов. H = 62 кЭ, T = 1,8 К, геометрия Фойхта ($\mathbf{H} \perp \mathbf{K}, \mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$) [57]. Штриховые линии — МЭПК при H = 0. Поляризация линий вдоль и перпендикулярно **H** указана символами \parallel и \perp . На схеме переходов (вверху) расщепление терма $\Gamma_{3,5}$ не показано.

В сильном магнитном поле $H \sim 50 \div 80$ кЭ два электрона Γ_1 , по-прежнему, в основном состоянии ЭПК образуют спиновый синглет, S = 0, а дырка имеет $J_z = -3/2$. Согласно правилам отбора (табл. 8) в этом случае разрешен только один переход, который и наблюдается в спектре излучения ЭПК (см. рис. 18). При увеличении числа е-h-пар дырки в основном состоянии комплекса в соответствии с принципом Паули занимают последовательно состояния с проекциями $j_z = -1/2$, 1/2 и 3/2. Электроны при этом попадают

в облочку $\Gamma_{3,5}$ и не проявляются в α -линиях, связанных с рекомбинацией электронов из оболочки Γ_1 . Схемы ожидаемых в рамках ОМ α -переходов из основных состояний МЭПК в расщепленные по спину состояния НДЭ_{m-1} показаны на рис. 18. (Расщепление оболочки $\Gamma_{3,5}$, электроны которой не участвуют в α -переходах, не показано.) Из рис. 18 видно, что экспериментально наблюдаемое число зеемановских компонент в α -линиях и их состояние поляризации хорошо согласуются с ожидаемым в рамках ОМ. Линии излучения, отвечающие переходам с $\Delta(S_z + J_z) = 0$, не разрешаются в спектре из-за близких значений *g*-факторов для электронов Ge и дырок со спином 1/2 (g_{h_n}).

Отметим также различие между измеренными и рассчитанными с использованием табл. 8 относительными интенсивностями зеемановских компонент. Частично оно связано с деполяризацией излучения в образце из-за многократного рассеяния. Однако причина различия для одинаково поляризованных линий остается пока не ясной.



Рис. 19. Расщепление бесфононных α -линий МЭПК в сжатых кристаллах Si (P), помещенных в магнитное поле [57]. Геометрия Фойхта, $\mathbf{H} \perp \mathbf{K}$, $\mathbf{H} \parallel \mathbf{P} \parallel \langle 111 \rangle$, H = 62 кЭ, P = 230 МПа. Штриховые линии — линии излучения при H = 0, справа — схема разрешенных переходов.

Значительно проще картина расщепления α -линий в одноосно сжатом Si (P), когда валентная зона лишь двукратно вырождена по спину. На рис. 19 показаны спектры излучения МЭПК в упруго деформированном вдоль оси $\langle 111 \rangle$ кристалле, помещенном в магнитное поле **H** || **P**, измеренные в конфигурации Фойхта [57]. Обе линии α_1 и α_2 расщепляются на триплеты. Схема переходов показана на рис. 19 справа. Компоненты 2 и 3 не расщепляются из-за совпадения *g*-факторов электронов и дырок. Поляризация отдельных компонент согласуется с ожидаемой в рамках ОМ. В НДЭ,, где основное со-

стояние не расщеплено, относительные интенсивности зеемановских компонент не изменяются. Интенсивность компоненты 4 в ЭПК уменьшается при увеличении Н в согласии с тем, что она отвечает переходу из возбужденного состояния. Заметим, однако, что отношение интенсивностей компонент 4 и 1 в ЭПК на порядок превышает ожидаемое в условиях квазиравновесия между спиновыми подуровнями.

Следовательно, время спиновой релаксации в комплексах в деформированном Si (P), по крайней мере, больше времени их жизни (10⁻⁷ с [58]). Столь значительное увеличение времени спиновой релаксации в деформированном Si объясняется уменьшением спин-орбитального взаимодействия при снятии вырождения валентной зоны [59].

7.3. *а*-линии в Si(P) в геометрии Фарадея

На рис. 20 показаны NP- и TO-спектры комплексов в недеформированном Si, приведенные в [60]. В этой работе измерялась как суммарная интенсивность *I*₊, так и разность интенсивностей в правой и левой поляризации, *I_*. Поскольку при отражении от поверхностей кристалла излучение частично деполяризуется, наблюдаемая степень поляризации отличается от истинной. Соответственно при определении *I* вводилась поправка на фактор деполяризации, который определялся по поляризации NP-линии излучения ЭПК α_1 в сильном магнитном поле. В этом случае из всех дырочных уровней заселено только состояние с $j_z = -3/2$ и в соответствии с табл. 8 в NP-линии α_1 излучение должно быть полностью поляризовано. Из рис. 20 видно, что $\alpha_{_1}$ и $\alpha_{_2}$ представляют отдельные линии излучения с поляризацией $\sigma\,$, при этом линия α_2 несколько шире, чем α_1 . Линии $\alpha_2 - \alpha_6$ расщеплены на 2 компоненты, четко наблюдаемые в поляризованном спектре. Эти компоненты имеют разную поляризацию. Для линий α_z отношение интенсивностей этих компонент, равное отношению I_{--}/I_{++} , составляет 4 : 1, для линий $\alpha_4 - \alpha_6$ оно составляет 1 : 1. Как указывалось выше, в соответствии с ОМ в сильном магнитном поле в ЭПК заселено только состояние с $j_z = -3/2$, а в НДЭ $_2$ состояние $J_z = -2$ с $j_z = 3/2$ и $j_z = -1/2$. Согласно табл. 8 в обоих переходах (-3/2, +1/2) и (-1/2, -1/2) излучение полностью σ_{-} поляризовано. Эти две линии в спектре не разрешаются — наблюдается лишь некоторое уширение линии α_2 по сравнению с α_1 . В НДЭ₃ в сильном поле заполнен только терм $J_z = -3/2$ с $j_z = -3/2$, -1/2 и 1/2. В этом случае отношение интенсивностей в правой и левой поляризации $I_{++}/I_{--} = 1/4$ (рис. 20). Линии $\alpha_4 \div \alpha_6$ связаны с рекомбинацией электрона $\Gamma_{\!\scriptscriptstyle 1}$ и дырок полностью заполненной оболочки $\Gamma_{\rm s}$ с J=0, и поэтому для них $I_{++}/I_{--}=1.$ Если бы линии $\alpha_{\rm s}$ и $\alpha_{\rm s}$ были связаны с рекомбинацией дырок оболочки Г,, то в зависимости от степени вырождения этого уровня либо только α_{z} , либо обе линии должны были бы быть сильно поляризованы.


Рис. 20. Спектры излучения $I_+ + I_-$ и поляризации $I_+ - I_-$ бесфононных α -линий (*a*) и ТО-компонент α - и β -линий (*б*) излучения МЭПК в Si (P) в магнитном поле [62]. **H** $\parallel \langle 111 \rangle$, T = 1,9 К. *a*) H = 30 кЭ, *б*) H = 50 кЭ.

Степень поляризации линии α_1 в TO-спектре (см. рис. 20) ниже, чем в NP-спектре: согласно табл. 8 при $\Phi_T = 0,4$ для нее $P_c = I_{++}/I_{--} = 50$ %. Поляризация в TO-спектре линий $\alpha_2 \div \alpha_4$ еще ниже, так как на поляризованные линии $(\pm 3/2, \pm 1/2)$ и $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ накладываются неполяризованные $(\pm 1/2, \pm 1/2)$.

7.4. МЭПК в Si(B) в геометрии Фойхта

Как отмечалось выше, в ЭПК Si (B) j-j-расщепление невелико. Парамагнитное расщепление термов становится больше j-j-расщепления при $H \ge 30$ кЭ. Остановимся сначала на спектрах комплексов в Si (B), упруго сжатом вдоль оси $\langle 111 \rangle$, когда стабильным является лишь ЭПК. Две дырки в ЭПК образуют синглетное состояние, которое не расщепляется. Спектр излучения ЭПК и схема переходов в этом случае качественно совпадают со спектром ЭПК в сильно сжатом Si (P) [57]. Зеемановские компоненты, соответствующие переходам (1/2, -1/2) и (-1/2, 1/2), не разрешены, однако линия, отвечающая им, сильно уширена. Распределение интенсивности в зеемановском спектре излучения указывает также на то, что, как и в сжатом Si (P), квазиравновесие между спиновыми подуровнями не успевает установиться за время жизни ЭПК ($\sim 10^{-6}$ с [58]).



Рис. 21. *а*) Расщепление бесфононных линии излучения МЭПК в Si (B) в магнитном поле [57] (H = 62 кЭ, T = 1,8 K, геометрия Фойхта ($\mathbf{H} \perp \mathbf{K}, \mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$); штриховые линии — спектр при H = 0; линия $\alpha_1(P)$ — излучение НДЭ₁ на остаточной примеси фосфора); δ) схема расщепления уровней и разрешенных переходов МЭПК на боре в магнитном поле (штриховые линии — ожидаемые переходы из основного состояния НАЭ₂, если два электрона образуют спиновый синглет).

В недеформированном Si (B) при $H \sim 60$ кЭ линия излучения ЭПК расщепляется на дублет (рис. 21, *a* [57]). При увеличении магнитного поля отношение интенсивностей компонент (2) и (1) линии m_1 уменьшается:

$$\frac{I(2)}{I(1)} \approx 4 \exp\left(-\frac{\mathcal{G}_{h_{1/2}}\mu H}{kT}\right).$$

Это означает, во-первых, что в недеформированном Si в ЭПК на боре, так же, как и на фосфоре, успевает установиться термодинамическое равновесие между спиновыми подуровнями и, во-вторых, что только компонента (1) от-

вечает переходу из основного состояния. Следовательно, в основном состоянии $J_z = -2$, $S_z = -1/2$. Схема разрешенных переходов для МЭПК на атомах бора в Si в магнитном поле представлена на рис. 21, *б*. Для переходов 1 и 3 энергии испускаемых фотонов совпадают. Предэкспоненциальный множитель в (39) связан с различием матричных элементов для переходов 1 и 2.

Линии излучения МЭПК с двумя и тремя экситонами в сильном магнитном поле расщепляются соответственно на дублет и триплет (см. рис. 21) Относительные интенсивности зеемановских компонент в обеих линиях не изменяются при увеличении магнитного поля от 40 до 80 кЭ, поэтому все компоненты соответствуют переходам из основного состояния. Для объяснения наблюдаемой картины расщепления необходимо предположить, что в МЭПК в магнитном поле нижнее состояние для двух электронов имеет проекцию результирующего момента $S_z = -1$, а для трех электронов — $S_z = -3/2$ (рис. 21). Если бы два электрона образовывали спиновый синглет Γ_1 то линия m_2 должна была бы расщепиться в магнитном поле на квинтет, как показано на рис. 21, б штриховой линией. Таким образом, данные по измерениям в поперечном магнитном поле хорошо согласуются с результатами, полученными при одноосном сжатии.

7.5. Спектры НАЭ, при сильном *j-j*-взаимодействии

Расщепление линии излучения НАЭ, в магнитном поле в кристаллах в Si(Al) полностью совпадает с наблюдаемым в Si(B) (рис. 21, 22) [20]. Схема переходов в МЭПК на Al в магнитном поле показана на рис. 22, б. При рассмотрении расщепления уровней ОМ пренебрегается малым расщеплением возбужденного состояния Г₃, Г₅ ЭПК, соответствующего полному моменту дырок J = 2. Основным состоянием ЭПК является состояние с J = 0 и моментом электронов $S_z = -1/2$. Об этом свидетельствует тот факт, что в спектре линии *m*₁ наблюдаются три зеемановские компоненты, обусловленные переходами из нижайшего состояния. При переходах из состояния J = 2 при $s_z = -1/2$ должна была бы наблюдаться только одна компонента (-2, -1/2). Этот результат находится в согласии с выводами, полученными при исследовании влияния одноосной деформации (гл. 6). Компонента 4 на рис. 22 обусловлена рекомбинацией е-h-пары в состоянии ($J = 0, s_z = 1/2$). Ее интенсивность уменьшается с ростом магнитного поля, однако при H = 60 - 80 кЭ она на порядок превышает ожидаемую в условиях термодинамического равновесия между подуровнями $s_z = +1/2$ и -1/2. Компоненты, отвечающие переходам 5 и 6, не удается выделить, так как они из-за близости g, и суммы $g_{h_{1,2}} + g_{h_{2,2}}$ в НА совпадают с линиями 1 и 2. Заметим, что компоненты, отвечающие рекомбинации e-h-пар в ЭПК в состоянии (-2, -1/2), которое при H = 40 кЭ расположено ниже, чем $\{0; 1/2\}$, но выше терма $\{0, -1/2\}$, при 2 К в спектре не наблюдаются [20]. Таким образом, в ЭПК отсутствует равновесие только между электронными состояниями терма с I = 0. Это не удивительно, так как при J = 0 электрон-дырочное обменное взаимодействие, которое является наиболее эффективным каналом спиновой релаксации, сильно ослаблено. Между состояниями с J = 2 и J = 0 при $H \neq 0$ так же, как и при H = 0, равновесие успевает установиться.



Рис. 22. *а*) Спектр излучения МЭПК в Si(Al) в магнитном поле [20] (H = 62 кЭ, $H \perp K$, $H \parallel \langle 111 \rangle$, T = 1,8 K); штриховые линии — спектр при H = 0); δ) схема расщепления уровней и разрешенных переходов МЭПК в Si(Al) в магнитном поле (взаимное расположение уровней с J = 0 и 2 для НАЭ₁ отвечает H = 60 кЭ).

В НАЭ₂ переходы из основного (-3/2, -1) состояния в ЭПК с J = 0 запрещены. Поэтому в больших полях ($H \gtrsim 50$ кЭ) в спектре излучения НАЭ₂ так же, как и в Si (B), видны только две линии, соответствующие переходам в состояния J = 2 с $J_z = -2$ и $J_z = -1$. Не ясно пока, однако, почему интенсивность линии, отвечающей переходу из возбужденного (-1/2; -1) состояния в Si (Al), больше, чем в Si (B). Эта линия в Si (Al) хорошо видна еще при $H \sim 60$ кЭ (рис. 22) [20].

7.6. Поляризация излучения МЭПК в продольном магнитном поле

В малых полях, особенно при исследовании фононных линий в спектрах МЭПК, не удается разрешить отдельные зеемановские компоненты. В этих

случаях эффективным методом исследования является измерение степени поляризации всей линии в целом. В частности, использование этого метода показало отличие спектров МЭПК с разным числом экситонов [61], несмотря на внешне подобный характер зеемановского расщепления, наблюдавшийся в [7].

Как указывалось выше, поляризация каждой из зеемановских компонент в МЭПК не зависит от числа экситонов и определяется величинами $I_{\pm}(j_z, s_z)$ в табл. 8, 9.

Относительные интенсивности этих компонент W зависят от заселенности соответствующих состояний, т. е. числа связанных экситонов m, типа заполненной оболочки r (Γ_1 , $\Gamma_{3,5}$) и температуры. Эти интенсивности $W_m^r(s_z, j_z)$ определяются выражением [61]

$$W_m^2(s_z, j_z) = \sum_{s_z} g_{s_z,m}^r \nu_{s_z,m}^{s_z,r} \exp\left(-\frac{g_e \mu H S_z}{kT}\right) \sum_{j_z} \nu_{j_z,m}^{J_z} \exp\left(-\frac{g_h \mu H J_z}{kT}\right); \quad (40)$$

здесь $g_{S_{z},m}^{r}$ — статистический вес состояния с полным моментом электронов S_{z} , т. е. число комбинаций, с помощью которых может быть реализовано состояние с данным S_{z} в оболочке r комплекса с m электронами. $\nu_{S_{z},m}^{S_{z},r}$ — число электронов со спином s_{z} в оболочке r в состоянии S_{z} при заданном числе электронов m-1 для оболочки $\Gamma_{3,5}$ в НДЭ_m и m для оболочки $\Gamma_{1,3,5}$ в НАЭ_m. $\nu_{J_{z},m}^{J_{z}}$ — число дырок с моментом J_{z} при заданном числе Japan и m + 1 в НАЭ_m.

В соответствии с принципом Паули $\nu_{j_zm}^{J_z}$ принимает значения 0 или 1, за исключением ЭПК на акцепторах, где при наличии расщепления для термов $J_z = 0$ с $J_z = 0$, 2 $\nu_{j_z,1}^0 = 1/2$ для всех четырех значений $j_z = \pm 3/2, \pm 1/2$. В комплексах на НД для терма Γ_1 с S = 0 $\nu_{s_zm}^{0,\Gamma_1} = 1$ для всех $s_z = \pm 1/2$ при всех m, поэтому для α -линий $W_m^{\Gamma_1}(s_z, j_z)$ не зависит от s_z :

$$W_{m}^{\Gamma_{1}}(s_{z}, j_{z}) = \sum_{J_{z}} \nu_{j_{z},m}^{J_{z}} \exp\left(-\frac{g_{h_{j_{z}}} \mu H_{j_{z}}}{kT}\right).$$
(41)

Степень циркулярной поляризации излучения линий X_m^r определяется выражением

$$P_{c}(X_{m}^{r}) = \sum_{s_{z}, j_{z}} I_{-}(s_{z}, j_{z}) W_{m}^{r}(s_{z}, j_{z}) \left| \sum_{s_{z}, j_{z}} I_{+}(s_{z}, j_{z}) W_{m}^{r}(s_{z}, j_{z}) \right|^{-1},$$
(42)

где $X_{m^{+}}^{\Gamma_{1}} = \alpha_{m}, X_{m}^{\Gamma_{3,5}} = \beta_{m-1}$ для НДЭ_{*m*} и $X_{m^{+,3,5}}^{\Gamma_{1,3,5}} = m_{m}$ для НАЭ_{*m*}.

Поляризация линий излучения в Si(P) и Si(B) в продольном магнитном поле изучалась в работах [60–62].

На рис. 23 показана зависимость $P_c(H)$ для α_m (NP и TO) и β_{m-1} (TO)-линий излучения комплексов в Si (P) с m = 1-6. Степень поляризации α -линий уменьшается с увеличением числа связанных экситонов, при этом NP- и TO-линии имеют разный знак поляризации, что объясняется различием в знаках I_- (см. табл. 8, 9). Линии $\alpha_4 - \alpha_6$ неполяризованы, так как они связаны с рекомбинацией дырок и электронов из заполненных Γ_8 и Γ_1 оболочек. Поляризация линий β_1 и β_2 также в основном определяется ориентацией дырок и совпадает по знаку с поляризацией ТО-линий α_2 и α_3 . Для линии β_3 знак поляризации обратный, так как в комплексе с m = 4 дырки неполяризованы, а ориентация электронов, как видно из табл. 8, 9, приводит к обратному знаку поляризации.



Рис. 23. Циркулярная поляризация бесфононных (NP) и TO-компонент линий излучения МЭПК в Si (P) — $\alpha m_m^{P,TO}$ и βm_m^{TO} и свободного экситона (FE) в магнитном поле в конфигурации Фарадея [62]. **Н** $\parallel \langle 111 \rangle$, T = 1,9 К. Сплошные линии — эксперимент, кружки и штриховые линии — теория при $g_e = 2, g_h = 1, 2, T = 1,9$ К.



Рис. 24. Циркулярная поляризация NP- и TO-линий излучения МЭПК в Si (B), в магнитном поле [63]. **Н** $\parallel \langle 111 \rangle$, T = 1,9 K, $N_B = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³. Сплошные линии — эксперимент, штриховые — теория при $g_e = 2, g_h = 1,2$.

На рис. 24 показана зависимость $P_c(H)$ для NP- и TO-линий HAЭ_m с m = 1-4. Знак поляризации линий m_1, m_2 определяется ориентацией дырок, а линий m_3 и m_4 , связанных с рекомбинацией дырок из состояния J = 0 — ориентацией электронов. Поэтому знак их поляризации различен. Теоретические кривые на рис. 24 построены по формулам (40)–(42) при $\alpha/\beta = 0.5$, $g_h = 1,2, g_e = 2$. Согласно [63], лучшее согласование теории и эксперимента имеет место, если предположить, что в комплексах на HA имеется небольшое орбитально-долинное расщепление обратного знака, т. е. что в них, как и в комплексах на Li (HД), нижними являются электронные уровни $\Gamma_{3,5}$. При этом величина расщепления Δ_{mVO} должна несколько возрастать с увеличением m от 0,05 мэВ при m = 1, до 0,16 мэВ при m = 3. В спектрах HAЭ_m непосредственно орбитально-долинное расщепление не наблюдалось.

На рис. 23 также показана зависимость $P_{c}(H)$ для ТО-линии свободного экситона. Некоторое различие в значениях P в насыщении для свободного экситона и ЭПК, возможно, связано с упомянутым выше различием в правилах отбора для свободных и связанных экситонов. Кривые рис. 24 сняты при Н || (111). Как видно из табл. 9, степень поляризации ТО-линий зависит от направления магнитного поля. Если Н направлено не по главным осям (111) и (100), то в продольном поле должна возникать и линейная поляризация [64]. Так, при **H** || (110) интенсивности ТО-линий в поляризации **e** || (001) и е || (110) различны. Согласно расчетам [64] степень линейной поляризации $P_{1}=(I_{001}-I_{1\overline{10}})/(I_{001}+I_{1\overline{10}})$ достигает 31 и 11% для ТО-линий α_{1} и α_{3} соответственно. Лини
и $\alpha_{_2}$ и $\alpha_{_4}$ линейно не поляризованы. Указанные расчеты соответствуют $g_2 = 0$. Анизотропия g-фактора дырок должна приводить и к поляризации NP-линий α_m . Так, при $g_1 = 0.6, g_2 = 0.4$ для линии $\alpha_1 P_1 = 10$ %, для α_{3} $P_{1} = 6\%$, линии α_{2} и α_{4} не поляризованы. Возникновение линейной поляризации в геометрии Фарадея при Н || (110) было обнаружено на связанных экситонах в Ge(As) [65]. Детально это явление экспериментально не исследовалось.

7.7. д-факторы электронов и дырок в МЭПК

По величине расщепления линий излучения МЭПК можно определить *g*-факторы рекомбинирующих электронов и дырок. Эти результаты представлены в табл. 10 [13, 57, 66], где для сравнения приведены также *g*-факторы электрона в нейтральном доноре и дырки в нейтральном акцепторе [67, 68]. Из таблицы видно, что *g*-факторы электронов в МЭПК на донорах и акцепторах в пределах ошибки измерения практически совпадают с *g*-фактором электрона в нейтральном доноре. Что же касается *g*-факторов дырок, то они совпадают с *g*-фактором дырок в нейтральном акцепторе бора только в МЭПК на атомах бора, в то время как в МЭПК на донорах они существенно отличаются от *g*_h в Si (B). Расщепление дырочных уровней в магнитном поле определяется гамильтонианом (36). При *g*₂ \neq 0 величина расщепления зависит от направления магнитного поля,
иg-факторы дырок $g_{h_{32}}$
и $g_{h_{12}}$ не совпадают. Так, при $H \parallel \langle 111 \rangle$ [16]

$$g_{h_{1/2}} = g_1 + \frac{13}{4}g_2, \ g_{h_{3/2}} = \frac{1}{3}\sqrt{6\left(g_1 + \frac{9}{4}g_2\right)^2 + 3\left(g_1 + \frac{5}{4}g_2\right)^2}.$$
 (43)

В деформированном Si при
H $\parallel \mathbf{P} \parallel \langle 111 \rangle$ [16]

$$g_{h\parallel} = g_1 + \frac{13}{4}g_2. \tag{44}$$

Таблица 10

<i>g</i> -факторы связанных электронов и дырок в МЭПК, НД и НА
и параметры, характеризующие диамагнитный сдвиг в МЭПК
в Si (H (111)); по данным работ [12, 57, 66–68]

	НДЭ1	НДЭ ₁		НД	HA	НАЭ
	Si (As)	Si(P)	ндЭ ₂ –ндЭ ₄ Si(P) [57]	Si(P)	Si(B)	Si(B)
	[12]	[66]		[67]	[68]	[57]
g_e	1,85	1,99	2,0	2,0		1,85
$\mathcal{S}_{h_{_{1/2}}}$	1,46	1,54	1,8	_	1,15	1,2
$\mathcal{S}_{h_{3/2}}$	1,17	1,27	1,2	_	1,1	1,1
g_1	0,74	0,86	0,6	_	1,03	1,2
g_2	0,22	0,21	0,4	_	0,04	0,1
$b_{\scriptscriptstyle 1/2}$ · 10 ⁵ мэВ/кЭ ²	1,85*	1,5	<u>ט</u> ט.) *
$b_{\scriptscriptstyle 3/2}$ · 10 ⁵ мэВ/кЭ ²		3,4	2,2	_	_	2

* Усредненное значение

Из табл. 10 видно, что в МЭПК на фосфоре разность $g_{h_{x2}} - g_{h_{y2}}$ значительно больше, чем в нейтральном акцепторе. Различие в значениях константы g_2 для свободных и связанных дырок вызвано наличием у дырок, связанных на центре или в экситоне, плавных функций d, g, ... типа [16]. Большие значения g_2 в комплексах на НД указывают на большую амплитуду d, g, ... функций. Такое различие представляется естественным, так как в МЭПК на НД дыркам энергетически не выгодно находиться вблизи положительно заряженного донора, и поэтому вклад d, g, ... функций, обращающихся в ноль на доноре, увеличивается. В заключение отметим, что при построении теоретических кривых $P_c(H)$ на рис. 23 не учитывалось различие $g_{h_{y2}}$ и $g_{h_{y2}}$ и полагалось, что $g_h = 1,2$. Это обстоятельство связано с тем, что для линий α_m в сильных магнитных полях преобладает вклад от дырки с $j_z = 3/2$. Поэтому замена g_h на $g_{h_{y3}} = 1,2$ обеспечивает хорошее согласие с теорией даже при заметных значениях g_2 .

7.8. Диамагнитное расщепление термов ЭПК на НД в Ge



Рис. 25. Циркулярная поляризация NP-линий НДЭ в Ge(As) в магнитном поле [65]. T = 1,9 K, $N_{As} = 2 \cdot 10^{15}$ см⁻³. $1 - H \parallel \langle 100 \rangle, 2 - H \parallel \langle 110 \rangle, 3 - H \parallel \langle 111 \rangle$.

В сильных магнитных полях наряду с зеемановским расщеплением в спектрах излучения свободных и связанных экситонов должно проявляться и квадратичное по полю диамагнитное расщепление, а также диамагнитный сдвиг уровней. Этот эффект наиболее резко выражен в Ge, где радиус экситона значительно больше, чем в Si. Диамагнитное расщепление электронных уровней связано с различием продольной и поперечной эфективных масс электронов m_{\parallel} и m_{\perp} . Поэтому при H $\not\mid$ (100) в Ge состояния, соответствующие разным долинам, смещаются по-разному. Это смещение

$$\Delta_{e\,dia}^{l} = \lambda_2 H^2 \left(3\cos^2\theta_l - 1 \right),\tag{45}$$

где θ_l — угол между H и главной осью долины z_l . При $m_{\parallel} > m_{\perp}$, как это имеет место в Ge и Si, $\lambda_2 > 0$. В экситонах, связанных на HД в Ge, диамагнитный сдвиг (45) приводит к расщеплению термов Γ_5 и их смешиванию с термами Γ_1 . В сильном магнитном поле, когда диамагнитное расщепление превышает орбитально-долинное, при H || (111) нижние уровни соответствуют долинам (111), (111) и (111). Эти три состояния расщепляются орбитально-долинным взаимодействием на два терма Γ_1 и Γ_3 . При H || (110) нижние уровни соответствуют долинам (111) н (111). Эти два состояния так же, как два верхних, расщеплены орбитально-долинным взаимодействием (111) н (111). Эти два состояния так же, как два верхних, расщеплены орбитально-долинным взаимодействием. Диамагнитные эффекты также приводят к расщеплению дырочных термов $\pm 3/2$ и $\pm 1/2$. Это расщепление описывается гамильтонианом, подобным деформационному гамильтониану [16]. В сферическом приближении

$$H_{hdia} = \overline{\lambda}_{3} \left[\left(\mathbf{J} \mathbf{H} \right)^{2} - \frac{5}{4} H^{2} \right].$$
(46)

В Ge константа $\overline{\lambda}_3 > 0$. Вследствие диамагнитных эффектов, а также анизотропии *g*-фактора дырок характер расщепления уровней ЭПК и поляриза-

ция LA-линий зависит от направления магнитного поля. Поскольку в Ge для экситона, связанного на HД, диамагнитное расщепление терма Γ_5 , определяемое (45), может быть сравнимо или даже превышать орбитально-долинное, то изменение поляризации в продольном магнитном поле, а также и расщепление уровней оказываются существенно различными при **H** || $\langle 100 \rangle$, $\langle 111 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$. Это наглядно иллюстрируется рис. 25, где показана зависимость $P_c(H)$ для NP-линий ЭПК в Ge (As) для трех указанных направлений магнитного поля [65].

7.9. Диамагнитные сдвиги линий МЭПК в Si

Квадратичный по полю сдвиг линий излучения МЭПК в Si наблюдается в полях H > 30 кЭ [57]. Особенно хорошо этот сдвиг виден для узкой линии излучения ЭПК в Si (P). Недавно поведение линии излучения ЭПК в Si (P) было подробно исследовано в работе [66] при T = 4,2 К, когда населенность возбужденных спиновых состояний достаточно велика вплоть до $H \sim 60$ кЭ. Анализируя квадратичные сдвиги всех шести зеемановских компонент, авторы выделили также и вклад от диамагнитного расщепления дырочных термов $\pm 3/2$ и $\pm 1/2$, которое оказалось очень существенным при **H** || $\langle 111 \rangle$ (табл. 10).

Установление диамагнитных свойств представляется интересным, в частности, из-за возможности оценить размер комплекса. Для сферически симметричных волновых функций диамагнитный сдвиг Δ_{dia} связан в первом порядке теории возмущений со средним радиусом частиц в комплексе соотношением Ланжевена [69]

$$\Delta_{dia} = \frac{e^2 H^2}{12c^2} \sum_i \frac{\left\langle r_i^2 \right\rangle}{m_i},\tag{47}$$

где суммирование ведется как по электронным, так и дырочным состояниям.

Если положить, что в комплексе $\langle r_i^2 \rangle = 3a_B^2$ (так же, как для 1*s*-водородоподобной волновой функции) и что радиусы электронных и дырочных оболочек ввиду примерного равенства эффективных масс электронов и дырок совпадают, то для радиуса ЭПК в Si (P) и Si (B) получается значение $r_i \approx 0,65$ $a_{B,FE} \approx 30$ Å [67]. Таким образом, размер ЭПК меньше размера экситона, что согласуется с расчетами, выполненными в работе [70]. Отметим, однако, что значение r_i для ЭПК, полученное с использованием формулы Ланжевена без учета ван-флековского члена парамагнитного происхождения, возникающего во втором порядке теории возмущений и имеющего обратный знак, может оказаться несколько заниженным.

Из анализа диамагнитных сдвигов линий излучения МЭПК в Si (B) для переходов между основными состояниями с помощью выражения (47) в работе [57] было найдено, что размер комплексов практически не изменяется с ростом числа связанных с центром e–h-пар. Отсюда следует, что при увеличении числа e–h-пар в комплексе возрастает электронно-дырочная плотность. Этот результат согласуется с расчетом, выполненным в работе [70]. Обнаруженное при исследованиях диамагнитных сдвигов явление «самоуплотнения» комплексов с увеличением числа е–h-пар хорошо коррелирует также с уменьшением безызлучательного времени жизни е–h-пар в этих комплексах. Известно, что в непрямых полупроводниках это время определяется главным образом процессами безызлучательной оже-рекомбинации.

8. Электронно-дырочный и электронно-электронный обмен и тонкая структура уровней МЭПК в Si

Недавно в работах [26, 71] удалось впервые резрешить тонкую структуру α -линии излучения НДЭ, в кремнии. Авторы [71] использовали кремний, выращенный методом бестигельной зонной кристаллизации и легированный фосфором путем облучения нейтронами. В таких образцах ширина α -линии НДЭ₁, не имеющей тонкой структуры, не превышает 5 мкэВ. Высокое разрешение достигалось благодаря использованию интерферометра Фабри — Перо. Было обнаружено, что линия α_2 , соответствующая переходу $\{2\Gamma_1, \Gamma_3, 2\Gamma_8\} \rightarrow$ $\{\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_8\}$, состоит из большого числа компонент, связанных с расщеплением как начального, так и конечного состояний. Особый интерес представляет обнаружение тонкой структуры α_2 -линии в образцах, сжатых по оси (001), когда в спектре надежно разрешены три компоненты [71]. В деформированном кристалле исходное состояние НДЭ $_2$ вырождено только по спину электрона Γ_4 и не расщепляется. Спины двух остальных электронов Γ_1 так же, как и двух дырок $\Gamma_{\!_6},$ антипараллельны. В конечном состоянии НДЭ $_{\!1}^*$ имеются два электрона Γ₁ и Γ₄ и дырка Г₆, и единственной причиной расщепления этого возбужденного состояния являются обменные взаимодействия. Поэтому указанные эксперименты впервые позволили непосредственно определить величины обменных расщеплений в кремнии. В работе [71] учитывался только обмен между электроном Г, и дыркой Г,. Эта модель объясняет наблюдаемое расщепление линии α_2 , но не объясняет соотношения интенсивностей отдельных компонент. Как отмечалось выше, согласно оболочечной модели плавные волновые функции состояний Г₄ и Г₁ одинаковы, и поэтому е-h-обмен для электронов Γ_1 и Γ_4 также должен быть одинаков и определяться выражением

$$\mathscr{H}_{eh}^{ex} = \Delta_{\perp} \left(\mathbf{JS} \right) + \left(\Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp} \right) J_z S_z , \qquad (48)$$

где **J** — момент дырки Γ_6 ($J_z = \pm 1/2$), а **S** = $s_1 + s_4$ — суммарный момент электронов Γ_1 и Γ_4 (S = 0; 1). Наряду с е-h-обменом необходимо учитывать и е-е-обмен между электронами разных долин. Этот обмен в Si практически изотропен. Он приводит к обменному взаимодействию электронов Γ_1 и Γ_4 , определяемому выражением

$$\mathscr{H}_{ee}^{ex} = \Delta_3 \left(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_4 \right) = \frac{1}{2} \Delta_3 \left(S^2 - \frac{3}{2} \right). \tag{49}$$

По порядку величины константы Δ_{\perp} , Δ_{\parallel} и Δ_{3} должны быть близки, поскольку е-е-обмен, как и е-h, определяются короткодействующим взаимодействием [16, 72]. В соответствии с (48), (49) α_{2} -линия в кристалле, сжатом по оси $\langle 001 \rangle$, должна состоять из четырех компонент, положение и интенсивности которых в π (I_{\parallel}) и σ (I_{\perp}) поляризациях определяются табл. 11 [72].

Таблица 11

Относительное расположение Е и интенсивности в
 π (I_{\parallel}) и σ
 (I_{\perp}) поляризациях компонент α_2 -линии в Si, сжатом вдоль ос
и $\langle 001\rangle$

N		Интенсивность			
N	E	I_{\parallel}	I_{\perp}		
Ι	$\Delta \frac{ex}{ee}$	2	1/2		
II	$\Delta_{_\parallel}(R-1)/4$	$3 - R^{-1}(1 + 8\xi)$	$(l + R^{-1})/4$		
III	$2\Delta_{\parallel}/4$	0	1		
IV	$-\Delta_{_{\parallel}}(R+1)/4$	$3 + R^{-1}(1 + 8\xi)$	$(1 - R^{-1})/4$		

$$(R=\sqrt{1+8\xi^2},$$
 где $\xi=\Delta_{\perp}/\Delta_{\parallel})$

Эта модель дает возможность удовлетворительно объяснить как положение, так и относительные интенсивности линий, обнаруженных в работе [71], если положить $\Delta_3 = 104$ мкэВ, $\Delta_4 = -47$ мкэВ, $\Delta_4 = -12$ мкэВ [72].

В недеформированном кристалле е–h-обмен определяется выражением [16]

$$\mathscr{H}_{eh}^{ex} = 2\Delta_1(\mathbf{JS}) + 2\Delta_2 \sum_i J_i S_i .$$
⁽⁵⁰⁾

При малых деформациях, когда деформационное расщепление уровня Γ_{s} мало по сравнению с энергией связи, константы Δ_{\parallel} и Δ_{\parallel} в (48) связаны с Δ_{\perp} и Δ_2 в (50) соотношением: $\Delta_\perp = 4\Delta_1 + 10\Delta_2$, $\Delta_\parallel = 2\Delta_1 + 1/2\Delta_2$ (при сжатии по $\langle 001 \rangle$), $\Delta_{\perp} = 3\Delta_2$, $\Delta_{\parallel} = 6\Delta_1 + 27/2\Delta_2$ (при растяжении по $\langle 001 \rangle$). Указанным выше значениям Δ_{\parallel} и Δ_{\perp} соответствуют $\Delta_{1}=-$ 48 мкэВ, $\Delta_{2}=-17$ мкэВ, что согласуется с оценками $|\Delta_{eh}^{ex}| \approx \simeq 50$ мкэВ, определенными в [73] по времени спиновой релаксации электрона в экситоне. В недеформированном кристалле помимо е-h-обмена структура нижнего терма НДЭ $_{2}$ { $2\Gamma_{1}, \Gamma_{5}, \Gamma_{8}$ } определяется также *j*-*j*-расщеплением и кристаллическим расщеплением, рассмотренными в гл. 4, а структура терма НДЭ $_{1}^{*} - \{\Gamma_{1}, \Gamma_{5}, \Gamma_{8}\} - e-e-, e-h$ обменом и кристаллическим расщеплением. Обменно-долинное взаимодействие приводит лишь к одинаковому сдвигу всех подуровней этого состояния. Однозначно определить величины этих расщеплений по данным работы [71] не удается. По-видимому, это можно будет сделать, если удастся провести измерения при более низких температурах, что позволит менять заселенность верхних состояний НДЭ₂.

9. Заключение

Основное внимание в настоящем обзоре уделено многоэкситонным комплексам в кремнии. Это связано, прежде всего, с тем, что в этих кристаллах комплексы наиболее изучены. По-видимому, именно в кремнии свойства МЭПК наилучшим образом описываются одноэлектронной теорией, приводящей к оболочечной модели. Как указывалось выше, наряду с Si, МЭПК наблюдались в Ge, GaP, SiC. Само явление образования таких комплексов на мелких примесных центрах носит общий характер, и можно ожидать их обнаружение в других полупроводниках с вырожденными зонами. Так, в прямозонных полупроводниках со структурой сфалерита, у которых экстремум верхней валентной зоны 4-кратно вырожден по спину, наряду со связанными экситонами на НД и НА может существовать стабильный комплекс НАЭ,. Хотя оболочечная модель качественно, а во многих случаях и количественно описывает свойства МЭПК в Si, целый ряд вопросов, касающихся внутренней структуры МЭПК, остаются нерешенными. Так, остается неясным, как будет осуществляться заполнение внешних (возбужденных) дырочных оболочек комплекса и какова стабильность комплексов в этих условиях. В связи с этим интересно знать, каково максимальное число e-h-пар, которые могут связаться с центром, образуя устойчивый комплекс. Представляло бы интерес теоретическое исследование этого вопроса. Одноэлектронный подход, который пока используется для описания энергетического спектра и заполнения оболочек МЭПК, является лишь грубым приближением. Поэтому естественно было ожидать проявления тонкой структуры спектра, обусловленной электрон-электронными (дырочными) корреляциями. Эксперименты, выполненные в Ge и Si, подтвердили эти предположения. Однако детально вопрос о природе обнаруженной тонкой структуры еще не исследован и конкретные механизмы, ответственные за наблюдаемое расщепление уровней, не установлены. Коллективные электрон-электронные взаимодействия должны также приводить к изменению g-факторов электронов. Поэтому представляло бы интерес прецизионное измерение величины парамагнитного расщепления в МЭПК с разным числом связанных экситонов.

МЭПК на нейтральных примесях содержат нечетное число частиц (электронов или дырок) и поэтому по своей природе должны быть парамагнитными центрами. Поэтому изучение спектров электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) таких комплексов и развитие оптических методов детектирования спектров ЭПР может оказаться тонким инструментом изучения их внутренней структуры.

В заключение следует отметить, что многочастичный экситонно-примесный комплекс в полупроводнике не поддается строгому теоретическому описанию из-за отсутствия в задаче малого параметра. В этой связи определенный интерес представляли бы вариационные расчеты энергии основного состояния МЭПК и, на их основе, анализ стабильности МЭПК при изменении числа связанных экситонов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Lampert M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. 1958. Vol. 1, Iss. 12. P. 450–453.
- 2. Haynes, J.R. Experimental proof of the existence of a new electronic complex in silicon // Physical Review Letters. – 1960. – Vol. 4, Iss. 7. – P. 361–363.
- 3. Каминский, А.С. Рекомбинационное излучение конденсированной фазы неравновесных носителей заряда в кремнии / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // Письма в ЖЭТФ. – 1970. – Т. 11, № 8. – С. 381–384.
- 4. Каминский, А.С. Конденсация неравновесных носителей заряда в кремнии / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский, Н.В. Алкеев // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59, №. 6. – С. 1937–1947.
- Pokrovskii, Ya.E. Experimental evidences of the existence of condenced phase of nonequilibrium charge carriers in Ge and Si / Ya.E. Pokrovskii, A. Kaminsky, K. Svistunova // Proceedings of the 10th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by S.P. Keller, J.C. Hensel, F. Stern. – Cambridge MA : U.S. Atomic Energy Commission, Division of Technical Information, 1970. – P. 504–509.
- 6. Sauer, R. Evidence for bound multiple-exciton complexes in silicon // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 6. P. 376–379.
- 7. Kosai, K. New photoluminescence line-series spectra attributed to decay of multiexciton complexes bound to Li, B, and P centers in Si / K. Kosai, M. Gershenzon // Physical Review B. – 1974. – Vol. 9, Iss. 2. – P. 723–736.
- Sauer, R. Magnetic field and stress-induced splitting of the novel sharp emission line series in silicon associated with P, Li, or B: no bound multiple-exciton complexes / R. Sauer, J. Weber // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 36, Iss. 1. – P. 48–51.
- 9. Sauer, R. Experimental evidence against the shell model of bound multiexciton complexes in silicon / R. Sauer, W. Schmid, J. Weber // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 24, Iss. 8. – P. 507–509.
- Wang, J. Shy-Yih. Excitonic molecules: A possible new form of chemical bonding / J. Shy-Yih Wang, C. Kittel // Physics Letters A. – 1972. – Vol. 42, Iss. 3. – P. 189–190.
- 11. Thomas, D.G. Bound excitons in GaP / D.G. Thomas, M. Gershenzon, J.J. Hopfield // Physical Review. 1963. Vol. 131, Iss. 6. P. 2397–2404.
- Cherlow, J.M. Raman scattering and photoluminescence in boron-doped and arsenicdoped silicon / J.M. Cherlow, R.L. Aggarwal, B. Lax // Physical Review B. – 1973. – Vol. 7, Iss. 10. – P. 4547–4560.
- Dean, P.J. Donor exciton satellites in cubic silicon carbide: Multiple bound excitons revisited / P.J. Dean // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 24. – P. 1635–1638.
- 14. Kirczenow, G. A new model for bound multiexciton complexes // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 21, Iss. 8. – P. 713–715.
- Kirczenow, G. Shell model of bound multiexciton complexes in silicon // Canadian Journal of Physics. – 1977. – Vol. 55, Iss. 20. – P. 1787–1801.
- 16. Бир, Г.Л. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках / Г.Л. Бир, Г.Е. Пикус. – Москва : Наука. – 1972. – 584 с.
- 17. Lipari, N.O. Interpretation of acceptor spectra in semiconductors / N.O. Lipari, A. Baldereschi // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 25, Iss. 9. – P. 665–668.
- Thewalt, M.L.W. Details of the structure of bound excitons and bound multiexciton complexes in Si // Canadian Journal of Physics. – 1977. – Vol. 55, Iss. 17. – P. 1463– 1480.
- Кулаковский В.Д. Влияние вырождения зон на образование многочастичных экситонно-примесных комплексов (Э_mПК) // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 27, № 4. – С. 217–221.

- Kulakovskii, V.D. The electronic structure of the bound exciton and bound multiexciton complexes in Al-doped Si / V.D. Kulakovskii, A.V. Malyavkin // Physica Status Solidi (b). – 1979. – Vol. 92, Iss. 2. – P. 455–465.
- Lyon, S.A. Edge luminescence spectra of acceptors in Si: Implications for multiexciton complexes / S.A. Lyon, D.L. Smith, T.C. McGill // Physical Review B. – 1978. – Vol. 17, Iss. 6. – P. 2620–2624.
- 22. Elliott, K.R. Bound-exciton absorption in Si:Al, Si:Ga, and Si:In / K.R. Elliott et al. // Physical Review B. 1978. Vol. 17, Iss. 4. P. 1808–1815.
- Thewalt, M.L.W. Fine structure of the luminescence from excitons and multiexciton complexes bound to acceptors in Si // Physical Review Letters. – 1977. – Vol. 38, Iss. 9. – P. 521–524.
- 24. Lightowlers, E.C. Fine structure in the bound exciton and multiple bound exciton luminescence from aluminium-doped silicon / E.C. Lightowlers, M.O. Henry // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1977. Vol. 10, Iss. 9. P. L247–L250.
- 25. Пикус, Г.Е. Поляризация экситонного излучения кремния под действием магнитного поля или одноосной деформации // ФТТ. – 1977. – Т. 19, № 6. – С. 1653–1664.
- 26. Parsons, R.R. Resolved fine structure of exciton complexes bound to phosphorus impurities in silicon // Solid State Communications. 1977. Vol. 22, Iss. 11. P. 671–673.
- Mayer, A.E. Bound-exciton luminescence and absorption in phosphorus-doped germanium / A.E. Mayer, E.C. Lightowlers // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1979. – Vol. 12, Iss. 13. – P. L539–L544.
- 28. Mayer, A.E. Donor bound exciton luminescence and absorption in germanium / A.E. Mayer, E.C. Lightowlers // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1979. – Vol. 12, Iss. 24. – P. L945–L951.
- Lyon, S.A. Thermodynamic determination of work functions of bound multiexciton complexes / S.A. Lyon, D.L. Smith, T.C. McGill // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 41, Iss. 1. – P. 56–60.
- Thewalt, M.L.W. Piezospectroscopic studies of phosphorus-, boron-, and lithiumdoped silicon / M.L.W. Thewalt, J.A. Rostworowski, G. Kirczenow // Canadian Journal of Physics. – 1979. – Vol. 57, Iss. 11. – P. 1898–1923.
- Dean, P.J. New radiative recombination processes involving neutral donors and acceptors in silicon and germanium / P.J. Dean, J.R. Haynes, W.F. Flood // Physical Review. 1967. Vol. 161, Iss. 3. P. 711–729.
- 32. Nishino, T. Temperature dependence of anomalous structure in the derivative absorption spectra of Si:P / T. Nishino, H. Nakayama, Y. Hamakawa // Solid State Communications. 1977. Vol. 22, Iss. 5. P. 327–329.
- Henry, M.O. Absorption due to the creation of bound excitons in phosphorus-doped silicon / M.O. Henry, E.C. Lightowlers // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1977. – Vol. 10, Iss. 21. – P. L601–L604.
- 34. Каминский, А.С. Многочастичные примесные комплексы в одноосно деформированном кремнии, легированном фосфором / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75, № 3. – С. 1037–1043.
- 35. Martin, R.W. Observation of bound multiple-excitons in germanium // Solid State Communications. 1974. Vol. 14, Iss. 4. P. 369–372.
- 36. Пикус, Г.Е. Тонкая структура уровней связанного экситона и многоэкситонных комплексов в германии / Г.Е. Пикус, Н.С. Аверкиев // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32, № 5. – С. 352–356.
- 37. Taniguchi, M. Very shallow trapping state in doped germanium // M. Taniguchi, M. Hirano, S. Narita // Physical Review Letters. 1975. Vol. 35, Iss. 16. P. 1095–1098.
- 38. Taniguchi, M. D[–] states in germainum / M. Taniguchi, S.-I. Narita // Journal of the Physical Society of Japan. 1977. Vol. 43, Iss. 4. P. 1262–1269.

- 39. Kane, E.O. Exciton dispersion in degenerate bands // Physical Review B. 1975. Vol. 11, Iss. 10. P. 3850–3859.
- Thomas, G.A. Collision broadening in the exciton gas outside the electron-hole droplets in Ge / G.A. Thomas et al. // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, Iss. 4. – P. 1692– 1702.
- 41. Hammond, R.B. Temperature dependence of silicon luminescence due to splitting of the indirect ground state / R.B. Hammond, D.L. Smith, T.C. McGill // Physical Review B. 1975. Vol. 35, Iss. 22. P. 1535–1538.
- 42. Аснин, В.М. Поляризация экситонной люминесценции во внешнем магнитном поле / В.М. Аснин и др. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 4. С. 1600–1609.
- 43. Lax, M. Selection rules connecting different points in the Brillouin zone / M. Lax, J.J. Hopfield // Physical Review. 1961. Vol. 124, Iss. 1. P. 115–123.
- 44. Алтухов, П.Д. Ориентация неравновесных носителей в электронно-дырочных каплях, свободных и связанных экситонах в кремнии в магнитном поле / П.Д. Алтухов, Г.Е. Пикус, А.А. Рогачев // ФТТ. – 1978. – Т. 20, № 2. – С. 489–500.
- 45. Алкеев, Н.В. Влияние деформации на спектр многочастичных примесных комплексов в кремнии / Н.В. Алкеев, А.С. Каминский, Я.Е. Покровский / ФТТ. – 1975. – Т. 17, № 3. – С. 843–845.
- 46. Balslev, I. Influence of uniaxial stress on the indirect absorption edge in silicon and germanium // Physical Review. 1966. Vol. 143, Iss. 2. P. 636–647.
- Sauer, R. Stress study of donor exciton satellites in silicon: Existence of multiple donor-bound excitons strongly requestioned / R. Sauer, J. Weber // Physical Review Letters. – 1977. – Vol. 39, Iss. 12. – P. 770–773.
- 48. Каминский, А.С. Многочастичные примесные комплексы в кремнии, легированном бором, фосфором и сурьмой / А.С. Каминский, В.А. Карасюк, Я.Е. Покровский // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 74, № 6. – С. 2234–2243.
- 49. Кулаковский, В.Д. Многочастичные экситонно-примесные комплексы в легированном Si (B) // ФТТ. – 1978. – Т. 20, № 5. – С. 1394–1402.
- 50. Бир, Г.Л. Поляризация рекомбинационного излучения биэкситонов в деформированном германии / Г.Л. Бир, Г.Е. Пикус // ФТТ. – 1975. – Т. 17, № 5. – С. 1284–1297.
- Kartheuser, E. Group-theoretical study of double acceptors in semiconductors under uniaxial stress / E. Kartheuser, S. Rodriguez // Physical Review B. – 1973. – Vol. 8, Iss. 4. – P. 1556–1570.
- 52. Chandrasekhar, H.R. Quantitative piezospectroscopy of the ground and excited states of acceptors in silicon / H.R. Chandrasekhar et al. // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 8. P. 3836–3851.
- 53. Алкеев, Н.В. Собственная излучательная рекомбинация в деформированном кремнии / Н.В. Алкеев, А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // ФТТ. 1976. Т. 18, № 3. С. 713–719.
- 54. Каминский, А.С. Поляризация рекомбинационного излучения многочастичных экситон-примесных комплексов в кремнии при одноосной деформации / А.С. Каминский, Я.Е. Покровский // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76, № 5. – С. 1727–1739.
- 55. Кулаковский, В.Д. Земановское расщепление в спектрах излучения многочастичных экситонно-примесных комплексов в кремнии / В.Д. Кулаковский, А.В. Малявкин, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 27, № 10. – С. 576–579.
- 56. Кулаковский, В.Д. Дополнение к статье В.Д. Кулаковского, А.В. Малявкина, В.Б. Тимофеева, опубликованной в томе 27, вып. 10 / В.Д. Кулаковский, А.В. Малявкин, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 28, № 1. – С. 58.
- 57. Кулаковский, В.Д. Многочастичные экситонно-примесные комплексы в кремнии в магнитном поле / В.Д. Кулаковский, А.В. Малявкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76, № 1. – С. 272–287.

- 58. Schmid, W. Auger lifetimes for excitons bound to neutral donors and acceptors in Si // Physica Status Solidi (b). 1977. Vol. 84, Iss. 2. P. 529–540.
- 59. Bir, G.L. The relaxation time and the width of the spin resonance line of impurity centers in semiconductors with degenerate bands / G.L. Bir, G.E. Picus // Physics of semiconductors: Proceedings of the 7th International Conference, Paris / ed. by M. Hulin. Paris : Dunod, 1964. P. 789–794.
- 60. Алтухов, П.Д. Циркулярная поляризация излучения связанных многоэкситонных комплексов в Si : Р в магнитном поле / П.Д. Алтухов и др. // ФТТ. – 1980. – Т. 22, № 1. – С. 239–242.
- 61. Алтухов, П.Д. Поляризация рекомбинационного излучения связанных многоэкситонных комплексов (СМК) в кремнии в магнитном поле / П.Д. Алтухов и др. // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 26, № . – С. 468–472.
- 62. Аверкиев, Н.С. Магнитные свойства связанных многоэкситонных комплексов в кремнии, легированном фосфором / Н.С. Аверкиев и др. // ФТТ. 1980. Т. 22, № 7. С. 1980–1987.
- 63. Алтухов, П.Д. Магнитные свойства связанных многоэкситонных комплексов в кремнии, легированном бором // П.Д. Алтухов и др. // ФТТ. 1980. Т. 22, № 2. С. 599–601.
- 64. Аверкиев, Н.С. Линейная поляризация излучения экситонов в магнитном поле в кремнии // ФТТ. – 1980. – Т. 22, № 8. – С. 2493–2495.
- 65. Аверкиев, Н.С. Циркулярная поляризация фотолюминесценции многоэкситонных комплексов в Si и Ge в магнитном поле / Н.С. Аверкиев и др. // Материалы II республиканского коллоквиума по модуляционной спектроскопии полупроводников. – Сухуми 1979, Тбилиси 1980. – С. 183.
- 66. Каминский, А.С. Излучение экситонов, связанных на атомах фосфора в кремнии, в магнитном поле / А.С. Каминский, В.А. Карасюк, Я.Е. Покровский // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79, № 2. – С. 422–430.
- Wilson, D.K. Electron spin resonance experiments on donors in silicon. III. Investigation of excited states by the application of uniaxial stress and their importance in relaxation processes / D.K. Wilson, G. Feher // Physical Review. – 1961. – Vol. 124, Iss. 4. – P. 1068–1083.
- 68. Merlet, F. Experimental study of the Zeeman splitting of boron levels in silicon / F. Merlet et al. // Physical Review B. – 1975. – Vol. 12, Iss. 8. – P. 3297–3317.
- 69. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Москва : Наука, 1974. 752 с.
- Wünsche, H.-J. Binding-energy calculations for multiple bound excitons / H.-J. Wünsche, K. Henneberger, V.E. Khartsiev // Physica Status Solidi (b). 1978. Vol. 86, Iss. 2. P. 505–515.
- 71. Каминский, А.С. Взаимодействие носителей заряда в многочастичных экситонпримесных комплексах в кремнии / А.С. Каминский, В.А. Карасюк, Я.Е. Покровский // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 33, № 3. – С. 141–144.
- 72. Пикус, Г.Е. Электрон-электронный обмен в многодолинных полупроводниках и тонкая структура многоэкситонных комплексов в кремнии / Г.Е. Пикус, Н.С. Аверкиев // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 34, № 1. – С. 28–31.
- 73. Altukhov, P.D. Nonequilibrium paramagnetism of electron-hole drops in silicon / P.D. Altukhovet al. // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 379–386.

CONDENSATION OF EXCITONS AND ELECTRON-HOLE LIQUIDS IN SEMICONDUCTORS*

Ya.E. Pokrovskii and V.B. Timofeev

1. Introduction

The systematic investigation of exciton condensation in semiconductors, which began in the USSR in 1968–69, is still one of the most lively research fields in solid-state physics. This is associated primarily with interest in the unusual properties of the nonequilibrium crystal state arising as a result of condensation. In 1968, on the basis of the analogy between an ordinary atomic gas and a gas of excitons in semiconductors, Keldysh predicted the condensation of an exciton gas at sufficiently high density and low temperature [1]. In view of the small effective mass of the electrons and holes of which the exciton is composed, such a condensed phase would be expected to consist not of excitons but of electrons and holes capable of relatively free motion in the region occupied by the liquid phase, and it would be expected to have metal-like properties.

Subsequent experimental work with germanium and silicon confirmed this prediction. The main purpose of the work carried out in 1969–72 was to demonstrate the occurrence of exciton condensation. There were two points of view as to the conditions in which exciton condensation might be possible. One view (see, for example, the review by Pokrovskii [2]) was that a drop of electron–hole liquid (EHL) is formed at exciton concentrations of order 10^{11} cm⁻³ in germanium if the crystal temperature is below 2 K. The equilibrium concentration in the drops in these conditions is around $2.5 \cdot 10^{17}$ cm⁻³, i.e., may be several orders of magnitude higher than the particle concentration in the gas phase. The second view (see, for example, Rogachev [3]) rested on the assumption that at exciton concentrations of less than 10^{15} cm⁻³ in germanium only exciton molecules — biexcitons — are formed, and these molecules only condense at higher concentrations.

The charge-carrier concentration in the liquid phase in these conditions was estimated at $2.4 \cdot 10^{16}$ cm⁻³. Both these viewpoints were based on the investigation of the band structure of the recombination radiation of collective states, which was interpreted in the first case as the result of electron–hole recombination and in the second as the result of biexciton annihilation. Confirmation of these interpretations would involve the direct observation of drop formation, either by light scattering or from the appearance of a current pulse on drop breakdown in the field of metallic contacts.

^{*} Sect. A: Physics Reviews / ed. by I.M. Khalatnikov // Soviet Scientific Reviews / ser. ed. by V.I. Goldanskii et al. – Chur : Harwood, 1979. – Vol. 1, Ch. 5. – P. 191–246.

A detailed investigation of the effect of various perturbations (uniaxial strain, strong magnetic fields) on the band structure of collective-state radiation, conducted in 1972–75, showed that in germanium and silicon these bands appear on recombination in a highly degenerate electron–hole plasma. Thus, it has now been established that in germanium and silicon exciton condensation occurs at relatively low concentrations and the condensed phase formed has the properties of a highly degenerate electron–hole Fermi liquid.

Recently, the first experimental evidence of the existence of EHL in other semiconductor materials — in particular, compounds of the type A_2B_6 and A_3B_5 , which have a "narrow" band structure — has been obtained and calculations have been made to demonstrate EHL stability.

There is likewise no doubt as to the existence of biexcitons in semiconductors. However, the results of spectral research which seem to indicate the existence of biexcitons in broad-band crystals are in a number of cases also capable of other interpretations. Recently, a new radiation band which is evidently associated with biexciton decay has been observed in silicon under uniaxial strain.

In the USSR, in the last two years, the continuing effort to determine EHL properties and parameters in semiconductors more accurately has been supplemented by new lines of research. The present chapter attempts to give an account of the current state of this new work. The results obtained prior to 1972 have been reviewed by Pokrovskii [2].

2. Ground State of Electron-hole Liquid

One of the central problems of EHL theory is to calculate the dependence of the ground-state energy of an electron-hole plasma on the density. The minimum of the ground-state energy $\langle E(n) \rangle_{min}$ (the mean energy as calculated per electron-hole pair) determines EHL stability with respect to a free gas of excitons (biexcitons) and also the equilibrium charge-carrier density n_0 . The main obstacle to rigorous theoretical consideration of EHL is the lack of a small parameter in the theory; this is typical of Fermi-liquid systems. In fact, the EHL binding energy is of the order of the exciton Rydberg E_{ex} ; the mean distance between particles is $r_0 \sim a_{ex}$, corresponding to an EHL density $n_0 \sim a_{ex}^{-3}$. Therefore at this density the Fermi charge-carrier momentum $P_F \sim a_{ex}^{-1}$ and the mean potential and kinetic energies are comparable. Because of this lack of a small parameter, EHL theory is based mainly on numerical methods of calculation.

The EHL energy is calculated by averaging the Hamiltonian over a multiparticle wave function of the simplest type and then calculating the correlation energy, which is determined by the sum of a perturbation-theory series. The solution of the first part of this problem is simple, as a rule, but the second part requires the use of special methods. For semiconductors with diamond structure, in the effective-mass approximation, the Hamiltonian of an electron–hole system with Coulomb interactions is written in the form [4–6]

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{p,s} \varepsilon_{e}^{(k)}(p) a_{pks}^{+} a_{pks} + \sum_{i,j} \sum_{p} \hat{H}_{ij}(p) b_{pj}^{+} b_{pj} + H_{int}, \qquad (2.1)$$

where ν is the number of electron wells; $\varepsilon_e^{(k)}(\mathbf{p})$ is the quadratic dispersion law for electrons; a_{pks}^+ is the creation operator for an electron with momentum \mathbf{p} and spin s at the k-th well, and the matrix $H_{ij}(\mathbf{p})$ describes a valence band that is fourfold degenerate at the Γ point. The interaction Hamiltonian \hat{H}_{int} is

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{1}{2} \sum_{q} V_q \left(\rho_q^+ \rho_q - 2N \right),$$

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon q^2}$$
(2.2)

where $\rho_q = \rho_q^{(e)} - \rho_q^{(h)}$ is the operator for density fluctuations with wave vector **q**; V_q is the Coulomb-interaction matrix element. In homeopolar semiconductors the dielectric permittivity ε is taken to be constant.

The first approximation for the ground-state energy of a system with the Hamiltonian in Eqs. (2.1) and (2.2) is the Hartree-Fock approximation, which takes into account the interactions of particles of a single kind. The general formula for the energy, in the first approximation $E_{HF} = E_{kin} {}^{*}E_{eych}$, is [4]

$$E_{kin} = \frac{2.2099}{r_s^2} \left[\frac{m}{\nu_e^{2/3} m_{de}} + \frac{m}{m_{dh}} \right];$$
(2.3)

$$E_{exch} = -\frac{0.916}{r_s} \left[\nu_e^{-1/3} \phi(\gamma_e) + \psi(\gamma_h) \right], \qquad (2.4)$$

where m_{de} and m_{dh} are the effective masses of the state densities and the energies are measured in units of E_{ex} .

In an isotropic model the term in the square brackets in Eq. (2.3) is equal to unity and that in Eq. (2.4) to two. As a result of anisotropy of the effective-mass spectrum and, to a greater extent, the presence of many wells, the kinetic energy is reduced in absolute value in comparison with the potential energy and thereby the EHL binding energy is increased.

Note that the renormalization of the EHL effective masses on the basis of selfconsistency considerations [7] does not exceed 10% and therefore no account is taken of this effect in the calculations.

The greatest theoretical difficulties are encountered in the calculation of the correlation energy, which is the difference between the accurate ground-state energy E_0 and the approximate Hartree-Fock value. For high densities ($na_{ex}^3 \gg 1$) a classic solution has been obtained for an isotropic slightly nonideal Fermi gas [8]. In the limit $na_{ex}^3 \gg 1$ it is possible to order the terms of the perturbation-theory

series in powers of *n* and to isolate the main diagrams which together constitute the random-phase approximation (RPA).

Strictly speaking, RPA may be used to describe phenomena which occur at large distances and correspond to a small transfer momentum, much less than the Fermi momentum ($q \ll p_F$). In the case of an electron–hole liquid, which corresponds to densities in the range $na_{ex}^3 \sim 1$ the momentum $q \leq p_F$ gives the main contribution to the energy and therefore, strictly speaking, RPA is not very suitable for the description of EHL. Therefore for this density range several methods have been developed for the calculation of the correlation energy, modifying the RPA.

One of these is the Hubbard method, in which the RPA dependence of the energy on the transfer momentum is modified at large momenta. The Hubbard method has been used to calculate the EHL ground-state energy in semiconductors with various band structures [5, 9, 10] and also in quasi-two-dimensional semiconductors [11, 12].

In the Nozieres-Pines method the contribution of the momentum to the interaction energy is taken explicitly into account in the two limiting regions: for momentum $q \ll p_F$, the RPA framework; and for $q \gg p_F$ by taking the sum of the second-order diagrams for interactions giving the main contribution in terms of q^{-1} . In the intermediate region the energy is found by interpolation between the limiting cases [4]. There have been several calculations of the EHL ground-state energy by this method [4,13,14].

Vashishta and his colleagues [15, 16] have used the self-consistent formalism for the calculation of the ground-state energy developed earlier for an electron gas [17]; in a certain sense, this is a generalization of RPA. In this formalism static corrections to the "local" field are introduced, so as to take into account particle correlations, screening of the Coulomb interaction, and electron–hole correlations.

In semiconductors with polar binding, the dielectric permittivity depends on the frequency. In particular, the electron-phonon interaction with longitudinal optical (LO) phonons leads to strong dispersion ε in the low-frequency region

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty}\varepsilon_{0} \frac{\omega_{L0}^{2} - \omega^{2}}{\varepsilon_{\infty}\omega_{L0}^{2} - \varepsilon_{0}\omega^{2}}$$
(2.5)

where ε_{∞} and ε_0 are the high-frequency ($\omega \gg \omega_{L0}$) and static ($\omega \rightarrow 0$) values of ε .

It has been shown [18, 19] that, in calculating the interaction energy in RPA (in the Hubbard and Nozieres-Pines approximations), taking into account interactions with optical phonons leads to the substitution $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon(\omega)$ according to Eq. (2.5). Keldysh and Silin calculated the correlation energy using the Nozieres-Pines method [18]; numerical estimates showed that the main correction was that of the exchange-interaction energy. The EHL ground-state energy in a polar semiconductor has also been calculated in a plasmon-pole approximation [19]. The result of taking into account the dispersion of the permittivity is to renormalize not only the width of the forbidden band but also the plasma frequency (one

of the modifications of the polar effect). Overall, these numerical calculations [18, 19] show that, as a result of interactions with optical phonons, the EHL binding energy is reduced in absolute value. However, since the exciton Rydberg decreases more rapidly — in fact, in proportion to $\varepsilon_{\infty}^2/\varepsilon_0^2$ — EHL stability relative to a gas of free excitons (biexcitons) increases significantly.

The first reliable experimental investigation of the recombination radiation and amplification spectra of EHL used crystals of cadmium sulphide — a narrowband semiconductor with partially ionic binding [20–22]. The high EHL binding energy found in these crystals was unexpected, and could not be explained using theories which take no account of the dispersion of the dielectric permittivity [20]. Calculations of the EHL ground-state energy in cadmium sulphide in the plasmon-pole approximation, taking into account electron–phonon interaction, show good agreement with experiment [19].

In the above theoretical methods for the calculation of the EHL ground-state energy, it is assumed *a priori* that the condensed phase has metallic properties and therefore an electron–hole gas is taken as the initial approximation. As the electron and hole density tends to zero, the EHL energy given by these methods does not tend to the exciton binding energy and in fact, in the limit as $n \rightarrow 0$, the electron–hole correlation is not adequately taken into account. On the other hand, it is known [23] that in the case of an isotropic spectrum the initial metallic state is unstable because of electron–hole interaction and the gap arising at the Fermi surface in the limit as $n \rightarrow 0$ tends to the exciton binding energy. The appearance of a gap in the energy spectrum of the condensed exciton (biexciton) phase in the isotropic model means that this phase has dielectric properties.

The suggestion that a dielectric electron–hole (or exciton) liquid may be formed in semiconductors was made by Keldysh [24]. Numerical calculations of the energy of a particle system transformed using the canonical Bogolyubov transformation show that in the single-particle spectrum there is a gap decreasing with increase in density [25, 26]. In an isotropic semiconductor with $\sigma \equiv m_e/m_h = 1$ a dielectric liquid is found to be energetically more favorable than a gas of free electrons at $r_s \gtrsim 2.7$. The corresponding equilibrium density is $r_s = 4$ and the binding energy of the condensed dielectric phase relative to a gas of free excitons is $0.088E_{ex}$. In a self-consistent approximation, the ground-state energy of a dielectric EHL is [26]

$$E(n) = -E_{ex} \left(1 + 61.2na_{ex}^3 \right). \tag{2.6}$$

Since the derivative $dE(n)/dn|_{n=0}$ is negative, the dielectric liquid is stable relative to a gas of free excitons. For the two-dimensional case, variational calculations lead to a binding energy of $0.1E_{ex}$ for a dielectric EHL and an equilibrium density of $r_s = 2.2$ [27].

The experimental observation of a dielectric liquid in a system of nonequilibrium electron–hole pairs remains an open question. A single-well semiconductor with a near isotropic mass spectrum seems the most promising for this purpose. The above methods permit the numerical calculation of the ground-state energy. Rigorous proof of their validity is impossible, because of the lack of a small parameter in the theory; therefore, it is only possible to form an estimate of their accuracy by comparing calculations for a specific semiconductor with experimental results. In a number of such comparisons it remains uncertain how appropriate the method of numerical calculation is to the experiment considered.

In this connection there is much interest in a new approach by means of which analytic calculation of the most important EHL energetic and thermodynamic characteristics is possible [28, 29]. In this approach, idealized models of semiconductors with a strongly anisotropic electron spectrum are considered. EHL in such semiconductors are found to be highly compressed, with an equilibrium density $n_0 \gg a_{ex}^{-3}$ and their binding energy is high $-|E(n)|_{min} \gg E_{ex}$. The EHL compression in such systems is due to Coulomb interactions. It has been shown [28, 29] that this tendency appears for semiconductors in limitedly strong magnetic fields and also in quasi-one-dimensional, quasi-two-dimensional, and multiwell semiconductor structures. From a formal point of view the condition for the existence of such systems is the presence of a region of concentration satisfying the inequality

$$a_{ex}^{-1} \ll p_F \ll \left(\frac{n}{a_{ex}}\right)^{1/4}.$$
(2.7)

The condition $p_F \ll (n/a_{ex})^{1/4}$ requires smallness with respect to some parameter; this cannot be the case in isotropic semiconductors. This parameter may be the number of wells ν in a multiwell semiconductor, for example. In this case $p_F \sim (n/\nu)^{1/3} \ll (n/a_{ex})^{1/4}$ for sufficiently large ν . In these conditions the system is separated into ν subsystems in momentum space and between the particles of different subsystems there is no exchange repulsion associated with the Pauli principle. Note that in real cases $\nu \leq 10$ and therefore the stringent condition in Eq. (2.7) is not satisfied.

Strong anisotropy of the electron spectrum also leads to separation of the system into large a number of subsystems which are independent with respect to the Pauli principle in coordinate space. In the case of a magnetic field such subsystems are Landau cylinders. Since in a superstrong magnetic field *H* the transverse motion is restricted to a magnetic length of order $\lambda \sim H^{-1/2}$, the wave functions of identical particles at transverse distances larger than λ do not overlap and therefore there is no exchange repulsion between these particles. In this connection an electron gas in a magnetic field is found to be equivalent to the situation of a multiwell semiconductor with $\nu \sim 1/\lambda^2 = H \gg 1$ and the Fermi momentum p_F in this case is small with respect to the parameter $\lambda^2 = 1/H$ ($p_F = 2\pi^2 n\lambda^2 = 2\pi^2 n/H$). An analogous discussion may be given for EHL with any other kind of strong anisotropy that leads to the separation of the system into a large number of particle subsystems are of small probability, the number of the subsystem to which a particle belongs may be regarded as a quantum number determining its

state in combination with the other quantum numbers: the numbers of the wells and Landau cylinders in multiwell EHL and EHL in a magnetic field, and the number of the layer and fiber in quasi-two-dimensional and quasi-one-dimensional EHL. For sufficiently strong anisotropy the distance between the particles of one subsystem is much less than the mean distance between particles belonging to different subsystems. The main contribution to the energy of the system in this case is that of Coulomb interactions between particles of different subsystems with characteristic transfer momentum $q \sim n^{1/4}$, which leads to an anomalously large correlation energy

$$E_{corr} = -An^{1/4} \tag{2.8}$$

It is very significant that for all model systems satisfying Eq. (2.7) a single approach is used and the results qualitatively agree [30–32]. All the models taking into account different forms of anisotropy lead to increases in the EHL binding energy $|E(n)|_{min}$ and its equilibrium density. An EHL becomes steadily more compressed with increase in anisotropy of the system [27, 28].

In the case of a superstrong magnetic field satisfying the condition $n \ll H^{4/3}$, the theoretical relations for the EHL binding energy and equilibrium density as a function of the magnetic field are as follows

$$\left< E(n) \right>_{min} \sim -H^{2/7}, \ n_0 \sim H^{8/7}.$$
 (2.9)

Although the conditions for the applicability of the theory are very restrictive as regards the magnetic field, it is hoped that the tendency of EHL to compression will appear at experimentally accessible magnetic fields.

There is no doubt that the experimental investigation of EHL properties in strongly anisotropic media, both natural and artifically produced, shows great promise.

3. Spontaneous and Stimulated Emission Spectra of Electron–Hole Liquids

The analysis of EHL emission spectra yields information on important parameters of the condensed phase — the chemical potential, binding energy, equilibrium density, etc. The EHL radiative-recombination spectrum in the case of transitions separated in zero order with respect to q is determined by the additional density of the states participating in the recombination and by the distribution of electrons and holes with an equilibrium concentration n_0 in the corresponding states, according to the Pauli principle. As a rule, the form of the emission spectrum is analyzed using a rough approximation which disregards the corrections to the state density $\rho(\varepsilon)$ due to particle interactions. In the case of indirect recombination the form of the radiation spectrum may be approximated by the expression

$$I(h\nu) \sim \int_{0}^{h\nu} \left[\varepsilon\left(\varepsilon - h\nu\right)\right]^{1/2} \left[1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - E_F^e}{kT}\right)\right]^{-1} \left[1 + \exp\left(\frac{h\nu - \varepsilon - E_F^h}{kT}\right)\right] d\varepsilon, \qquad (3.1)$$

where $E_F^e(n_0)$ and $E_F^h(n_0)$ are the electron and hole Fermi energies. The energy of the emitted photon is

$$\hbar\omega = h\nu + E^i_{gap} - \Delta E - \hbar\Omega \tag{3.2}$$

where E_{gap}^i is the width of the indirect forbidden gap; ΔE is the change in the gap due to correlation-interaction effects; $\hbar\Omega$ is the energy of the emitted phonon. It follows from Eq. (3.1) that at a known temperature the density n_0 is the only adjustable parameter. How correct the approximation using Eq. (3.1) is may be judged by determining the equilibrium density in the EHL by an independent method, for example, by means of plasma resonance, light scattering, or quantum oscillation effects [2].

Consider the EHL indirect-recombination spectrum for the example of silicon crystals, as a function of the degree of degeneracy in electron and hole bands — specifically, Si (6-2), Si (6-1), Si (4-1), and Si (2-1); the first figure gives the number of the lowest electron well and the second the multiplicity of the valence-band degeneracy. As is known, the degree of degeneracy in Si bands may be controlled by means of uniaxial elastic strain applied in the crystallographic directions $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$, and $\langle 100 \rangle$.

For pressures $P < P_{cr}$ increase in the strain is accompanied by continuous tuning of the EHL recombination spectrum. At pressures of P_{cr} and above, when the separation in the bands is comparable with the corresponding values of the electron and hole Fermi energies in the EHL, the recombination spectrum takes a form that is constant for each given direction of compression and does not change with increase in the applied pressure [2].

Recombination spectra for Si (6-1), Si (4-1), and Si (2-1) are given in Figure 1; the spectra were obtained in conditions of large uniaxial strain -24, 42, and 48 kgf/mm², respectively [33] - at a temperature T = 1.8 K under pulsed laser excitation. For comparison, Figure 1 also shows the spectrum for Si (6-2) in the absence of strain. Each of the spectra contains a broad band L corresponding to EHL emission and free-exciton emission lines FE labelled by arrows in Figure 1. (The structure TO–LO corresponds to recombination processes with the emission of TO and LO phonons.) It is evident from Figure 1 that, as the degeneracy in the bands is lifted, the width of the EHL band in the spectrum decreases and its maximum and the violet edge are shifted closer to the exciton line. In crystals under strain the radiation intensity of the exciton gas increases considerably in comparison with the EHL band and the condensation threshold also increases. These results demonstrate qualitatively that the lifting of degeneracy in the valence band and decrease in the number of electron well reduces the binding energy per pair of particles in the EHL and also the equilibrium density.



Figure 1. Spectrum of Si (6-2) (1), Si (6-1) (2), Si (4-1) (3), and Si (2-1) (4) recombination radiation under 30-kW/cm² pulsed laser excitation at T = 1.8 K. The dashed lines show the approximation of the spectra for Si (6-2) and Si (6-1) given by Eq. (3.1); the points indicate the curves obtained by using two adjustable parameters n_0 and Γ_0 .

The EHL radiation spectrum for Si (6-2) and Si (2-1) may be satisfactorily described using Eq. (3.1) (see the dashed curves in Figure 1). In both these cases the Fermi energies of electrons E_F^e and holes E_F^h are close and the integral in Eq. (3.1) is the convolution of two functions with the same width and so the contour $I(h\nu)$ obtained is insensitive to small variations in the state density. For Si (4-1) and to an even greater extent for Si (6-1), for which $E_F^e/E_F^h \sim 1/4$, the calculated contour (dashed in Figure 1) and the experimental contour differ significantly. This shows clearly that the expression $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ for the state density used in Eq. (3.1) is not a sufficiently good approximation and it is necessary to include the corrections to $\rho(\varepsilon)$ due to particle interactions.

The corrections to ρ are of two kinds. Firstly, the dependence $\varepsilon(q)$ is changed and the dispersion law ceases to be quadratic. Secondly, the excited-state energy levels in a Fermi liquid created in the recombination of electron–hole pairs holes in the conduction band and electrons in the valence band — are found to be broadened as a result of the finite lifetime associated with the relaxation of these states. The broadening increases with distance from the Fermi surface. To take account of the broadening, an effective state density $\rho_{eff}(\varepsilon)$ may be introduced

$$\rho_{eff}(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int d\varepsilon_0 \rho(\varepsilon_0) \Gamma(\varepsilon_0) \Big[\pi \big(\varepsilon - \varepsilon_0\big)^2 + \Gamma^2(\varepsilon_0) \Big]^{-1}.$$
(3.3)

The corrections to ρ due to the change in the dispersion law and the quenching of the excited states lead to a smoother curve of $\rho_{e\!f\!f}$ in comparison with $\varepsilon^{1/2}$ near the bottom of the band. Therefore it seems hopeful that introducing these corrections will allow the red tail in the EHL radiation spectrum to be described. *A priori* it is difficult to say which of these corrections will dominate. For example, investigation of the EHL radiation spectrum in germanium using a magnetic field indicates that the broadening of the energy levels close to the bottom of the band is fairly large [34].

For silicon, there have been attempts to describe the recombination spectrum by considering only the quenching of excited states in the EHL. Adopting Eq. (3.3) for ρ_{eff} , $\Gamma(\varepsilon)$ is taken in the form [35]

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{E_F} \right)^2, \tag{3.4}$$

and it is assumed that $\Gamma_0^h/\Gamma_0^e \simeq E_F^h/E_F^e$. The temperature is taken to be zero. Thus, there are two adjustable parameters — n_0 and Γ_0 . The points in Figure 1 show the results obtained when these two parameters are used to approximate the experimental curves in silicon in the presence and absence of strain; the agreement is evidently good. The values adopted for n_0 and Γ_0 and for $E_F^e + E_F^h$ and E_F^h are given by Kulakovskii *et al.* [33].

As would be expected, the value of Γ_0 obtained increases with increase in E_F . Approximately twice as large a value of Γ_0 is given by the formula $\Gamma_0 = \pi e^2 p_F^2 / 16 \varepsilon r_d \hbar^2$, where *e* is the electron charge; ε is the dielectric permittivity; r_d is the screening

radius; and p_F is the Fermi momentum. Note that the introduction of the parameter Γ_0 has little effect on the value of the equilibrium density — less than 10% for Si (6-2) and Si (2-1) and less than 20% for Si (6-1) and Si (4-1).

In the case of direct transitions ($\mathbf{q}_e = -\mathbf{q}_h$) the EHL spontaneous-recombination spectrum may be roughly approximated by a simple method. In fact, assuming a quasi-equilibrium distribution of electrons and holes and neglecting the dependence of the dipole-moment matrix element on the wave vector \mathbf{q} , the spontaneous spectrum may be written in the form

$$I_{sp}\left(E, E_{F}^{e,h}\right) \sim \sum_{\mathbf{q}_{e}=-\mathbf{q}_{h}=\mathbf{k}} f_{e}f_{h}\delta\left[E-\varepsilon_{e}\left(\mathbf{q}\right)-\varepsilon_{h}\left(-\mathbf{q}\right)\right],$$
(3.5)

where $f_{e,h} = \left\{1 + \exp\left[\varepsilon_{e,h}(\mathbf{q}) - E_F^{e,h}(T)/kT\right]\right\}^{-1}$ are the electron and hole distribution functions; $E_F^e(T)$ and $E_F^h(T)$ are the Fermi energies; E is the energy measured from the red end of the spectrum $-E'_{gap}$; E'_{gap} is the forbidden-band width, transformed to take into account particle interactions. It is possible to pass in Eq. (3.5) from summation over \mathbf{q} to integration, taking into account the dispersion laws in the electron and hole bands. Only when T = 0 may $I_{sp}(E)$ be expressed using elementary functions. For $T \neq 0$, as a rule, numerical methods must be employed.

In narrow-band semiconductors EHL are characterized by large amplification (negative absorption) factors with respect to radiative recombination processes. The absorption factor $\alpha(\hbar\omega)$ (for amplification $\alpha < 0$) may be calculated using the expression for the rate of spontaneous radiative transitions $\theta_{sp}(\hbar\omega)$ per unit volume and solid angle in unit interval of energy

$$\theta_{sp}(\hbar\omega) = \frac{4Ne^2\omega}{m_0^2\hbar c^3} \left| D \right|^2 I_{sp}, \tag{3.6}$$

where *N* is the refractive index. The relation between the absorption coefficient $\alpha(\hbar\omega)$ and $\theta_{sv}(\hbar\omega)$ is as follows

$$\alpha(\hbar\omega) = -\frac{\pi^2 c^2 \hbar}{N^2 \omega^2} r_{sp}(\hbar\omega) \left[1 - \exp \frac{\hbar\omega - E'_{gap} - E^e_F(T) - E^h_F(T)}{kT} \right].$$
(3.7)

Amplification occurs when $E_F^e + E_F^h > 0$ and is observed in the energy interval $\hbar \omega - E'_{gap} < E_F^e(T) + E_F^h(T)$. With increase in temperature and at a fixed density of electron–hole pairs in the plasma the amplification factor at the maximum decreases, and the spectral interval in which amplification is observed becomes correspondingly narrower.

Absorption, radiation, and amplification spectra are shown in Figure 2 for cadmium sulphide crystals under pulsed laser excitation at T = 1.4 K [22]. With increase in the concentration of nonequilibrium charge carriers in the crystal there appear separate regions filled by exciton gas (discrete structure of absorption spectrum) and EHL (absorption continuum). The red end of the positive-absorption continuum and the violet end of the amplification spectrum of the EHL correspond to the chemical potential per pair of particles. The width of the amplification spectrum is determined by the sum of the electron and hole Fermi energies and hence the value of the equilibrium density. The spectra of spontaneous recombination and amplification may be roughly described using Eqs. (3.5) and (3.7).



Figure 2. Emission and transmission spectra of CdS crystals under excitation of 0 (1), 10⁴ (2), 10⁵ (3), 10⁶ (4), and $3 \cdot 10^6$ W/cm² (5). The spectrum of the amplification (negative absorption; α is the absorption factor) was measured by changing the size of the excited region at $3 \cdot 10^6$ W/cm² pumping.

The greatest discrepancy between the calculation and experiment is close to the red end of the spectra, where a long-wave tail appears. The origin of this tail is not understood; it is evidently associated with multiparticle interactions in a high-density plasma and in particular interactions with plasma oscillations [36]. It should also be remembered that in narrow-band semiconductors the EHL equilibrium density corresponds to relatively large values of the dimensionless parameter $r_s \sim 2$. Therefore the EHL amplification and recombination spectra in these crystals may be considerably modified as a result of the increased effect of electron–hole correlations (the exciton effect).

4. Gas-EHL Phase Diagrams

The condensation of excitons to an electron-hole liquid provides a complete analogy to the gas-liquid transition and shows all the features of a phase transition of the first kind. The region of existence of an electron-hole liquid may be shown on an n-T (density-temperature) phase diagram in which the equilibrium curve is determined, from the point of view of the gas, by the condensation kinetics of the gas-phase components and, from the point of view of the liquid, by the internal thermodynamic properties of the EHL. The calculation of EHL conduction is complicated because the electron-hole system is multicomponent and its partial composition changes along the line of gas-liquid coexistence, so that it is necessary to consider the conditions for equilibrium between all the thermodynamic phases (a dielectric gas of excitons, a metallic gas of free charge carrier, and the EHL). The conditions of phase equilibrium are significantly different in different semiconductors and so there is as yet no systematic theory of the phase transitions in this system.

The temperature properties of the EHL may be described using Landau phenomenological theory for a quantum Fermi liquid. In this description the free energy F(n, T) per single electron–hole pair in the region where $kT \ll E_F^{e,h}$ is written as an expansion in terms of the temperature [37]

$$F(n, T) = E_0(n) - (1/2)\gamma(n)(kT)^2, \qquad (4.1)$$

where $F_0(n)$ is the ground-state energy at T = 0; $\gamma(n) = (\pi/3n\hbar^3)^{2/3}(m_{de} + m_{dh})$; $m_{de}(m_{dh})$ is the effective mass of the electron (hole) state density, taking into account the multiplicity of the band degeneracy. Corrections to the chemical potential μ_F , the Fermi energy $E_F^e + E_F^h = E_F$, and the equilibrium density n_0 in the liquid phase follow automatically from Eq. (4.1); these corrections are quadratic in the temperature:

$$\mu_{F}(T) = \mu_{F}(0) - \delta_{\mu}E_{F}(0)(kT)^{2};$$

$$E_{F}(T) = E_{F}(0)\left[1 - \delta_{E}(kT)^{2}\right];$$

$$n_{0}(T) = n_{0}(0)\left[1 - \delta_{n}(kT)^{2}\right],$$
(4.2)

where

$$\begin{split} \delta_{\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma(0)}{E_{F}(0)}; \\ \delta_{n} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma'(0)}{n_{0}(0)E_{0}''(0)}; \\ \delta_{E} &= \frac{\pi^{2}}{12} \frac{1}{E_{F}^{e}(0)E_{F}^{h}(0)} - \frac{1}{3} \frac{\gamma'(0)}{n_{0}(0)E_{0}''(0)}, \end{split}$$

and a prime denotes the derivative. Experimental measurements of the temperature dependence $n_0(T)$ afford the possibility, in principle, of determining the local curvature of $E_0(n)$ close to the minimum and this, in turn, allows an experimental estimate of the compressibility to be obtained. This possibility of estimating EHL compressibility is unique in the physics of condensed Fermi systems.



Figure 3. Approximate temperature dependence for the equilibrium density $n_0(T)$, Fermi energy $E_F(T)$, and chemical potential $\mu_F - \hbar \Omega^{TO}$ per electron–hole pair in EHL in silicon.

The quadratic dependence of the EHL equilibrium density $n_0(T)$ has been observed experimentally in Ge [38] and in Si [39, 40]. In Figure 3, approximate curves of $\mu_F(T)$, $E_F(T)$, and $n_0(T)$ plotted using Eq. (3.2) are shown for silicon [40]. The agreement with experiment is good in the region T < 22 K. Dite *et al.* give values of the adjustable parameters $E_F(0)$, $n_0(0)$, $\mu_F(0)$, δ_μ , δ_E , δ_n , and also of the compressibility $\chi = E_0''(0)n_0^3(0)^{-1}$ and the binding energy $\phi(0)$ which are obtained from experimental curves and in particular are taken from Figure 3 by the least-squares method [40]. The experimental values of $n_0(0)$, $E_F(0)$, $\phi(0)$, and χ are found to be in good agreement with the theoretical values calculated for silicon by Vashishta *et al.* [16], but the experimental values for δ_n , δ_μ , and δ_E are approximately half the theoretical values. Note that in calculating γ Vashishta *et al.* assumed $m_{de} + m_{de} = 2m_0$ rather than the true value of $1.6m_0$ [16]. On this basis the calculated values of δ_n , δ_n , and δ_E would be 20% too high.

In calculating EHL parameters close to the critical point (T_c, n_c) the free energy of the electron–hole system is usually written in the form [37]

$$F(n, T) = F_0(n, T) + F_{xc}(n, T),$$
(4.3)

where $F_0(n, T)$ is the free energy of an ideal Fermi gas of electrons and holes and $F_{xc}(n, T)$ is its exchange and correlation component. In the random-phase approximation on which the calculation is based, the main contribution to the thermodynamic characteristics is due to plasmons. Since $\hbar\omega_p \gg kT_c$, it is assumed that F_{xc} is independent of the temperature, i.e., $F_{xc}(n, T) \simeq E_{xc}(n)$. Knowing the free energy in Eqs. (4.1) and (4.3), the phase diagram may be constructed and the critical parameters (n_c, T_c) may be calculated from the conditions $\partial \mu / \partial n = 0$ and $\partial^2 \mu / \partial n^2 = 0$. Since μ already includes the first derivative $\partial F / \partial n$, the condition for the critical point is $\partial^3 F / \partial n^3 = 0$. Hence it is clear why the values (n_c, T_c) are so sensitive to the detailed form of $F_w(n)$.

Thomas *et al.* [38] used a value of F_{xc} obtained by the Hubbard method [5] to calculate the critical point, while Vashishta *et al.* used a value of F_{xc} obtained in the self-consistent approach [16]. There have also been attempts to take into account the temperature dependence of the correlation component of the free energy using calculations in the plasmon-pole approximation [41, 42]; in this approach a screening vector included in the plasmon dispersion is considered.

Consider the experimentally measured gas–liquid phase diagram in a nonequilibrium electron–hole system in silicon in Figure 4 [40]. To construct the equilibrium curve from the viewpoint of the liquid phase, careful measurements are made of the EHL recombination spectrum for different concentrations of nonequilibrium electron–hole pairs and different temperatures and then, from an analysis of the shape of the EHL recombination spectrum, the electron temperature T_{EHL} and the charge-carrier density $n_0(T)$ in the liquid phase are found. Certain difficulties are encountered close to the critical point in analyzing the shape of the EHL spectrum. In this region the EHL band considerably overlaps the recombination line of the gas phase (nonequilibrium electron–hole plasma — EHP) [40]. Therefore, in the immediate vicinity of the critical temperature it is impossible to separate the contours of the recombination bands corresponding to the liquid and gas phases either from the spectral positions or from the kinetics of the band shape. The critical temperature and density can only be estimated by extrapolating the experimental curves of $n_{\rm EHL}(T)$ and $n_{\rm EHP}(T)$. For silicon, this extrapolation gives $n_c = (1.2 \pm 0.2) \cdot 10^{18} \, {\rm cm}^{-3}$ and $T_c (28 \pm 2)$ K, in good agreement with calculation [43].



Figure 4. Gas–EHL phase diagram in silicon.

From the viewpoint of the gas phase the gas–liquid equilibrium curve is determined primarily by the condensation kinetics of excitons. There is one feature of the gas–liquid phase transition in a high-density system of excitons (or non-equilibrium charge carriers) which must be considered. Near the critical point the density of nonequilibrium electron–hole pairs in the liquid $n_0 > n_{MI}$ is the density at which "metallization" of the excitons occurs. Therefore, if at mean densities $\overline{n} < n_{MI}$ the exciton gas condenses into a drop of EHL, at $n_{MI} < \overline{n} < n_c$ condensation of a metallic gas of electron–hole plasma (EHP) must occur. Thus, on the gas–liquid equilibrium curve there is a region (for $\overline{n} \sim n_{MI}$) where the exciton gas is converted to an EHP. Although there has been discussion of this problem in theoretical papers [44–46, 37], it remains an open question whether this transformation is analogous to a phase transition of the first kind.

So far, the relation between the condensation kinetics of excitons and the curve of gas–liquid equilibrium has been discussed for the example of silicon crystals. An experimental curve for the saturated vapor density of exciton gas $n_{ex}^0(T)$ is shown in Figure 4. At low temperatures the dependence $n_{ex}^0(T)$ is not described by the expression

$$n_{ex}^{*}(T) = g\left(\frac{m_{ex}kT}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right), \qquad (4.4)$$

where *g* is the degeneracy factor of the exciton ground state and m_{ex} is the effective mass of the state density; this expression is only valid in conditions of detailed equilibrium for nonrecombining particles and a plane gas–liquid phase boundary. The experimental results are only described by Eq. (4.4) when T > 14 K. This gives some understanding of the reasons for the great discrepancy in the values of the binding energy obtained by spectroscopic and thermodynamic means.

Calculation of the saturated vapor density of the exciton gas taking into account the surface tension, the finite lifetime of the recombining particles in EHL, and also the diffusion of excitons to an EHL drop gives [47]

$$n_{ex}(T,R) = n_{ex}^* \exp\left(\frac{2\sigma}{n_0 R k T}\right) + \frac{n_0 R}{3\nu_T \tau_0} \left(1 + \frac{\nu_T R}{D}\right), \tag{4.5}$$

where σ is the surface tension; v_T is the thermal velocity of the excitons; D is the diffusion coefficient; R is the drop radius. For steady excitation, as $t \to \infty$, R and n_{ex} tend to the limiting values R_0 and n_{ex}^0 given by the conditions

$$\frac{dn_{ex}(R_0)}{dR_0} = 0, \quad n_{ex}^0 = n_{ex}(R_0).$$
(4.6)

The curve of $n_{ex}^0(T)$ calculated from Eqs. (4.5) and (4.6) for silicon [48] (curve 2 in Figure 4) with $\sigma = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ erg/cm}^2$ and $D = 50 \text{ cm}^2/\text{s}$ is only in qualitative agreement with the experimental curve of $n_{ex}^0(T)$. The experimental curve of $n_{ex}^0(T)$ may be satisfactorily described by Eq. (4.5) using the EHL drop radius as the fitting parameter with $R = 0.3 \mu$.

From the dependence $n_{ex}^0(T)$ it also follows that the chemical potentials of the exciton gas and the EHL are only equal when $T \gtrsim 15$ K. At lower temperatures, when detailed equilibrium is absent from the system, $\mu_{ex} \neq \mu_{EHL}$ (for example, for $T \sim 4$ K, $\mu_{ex} - \mu_{EHL} = 4$ meV).

Investigation of the recombination-radiation spectra in silicon indicates [40] that the dielectric gas of excitons is converted to a metallic electron-hole plasma at mass concentrations $\overline{n} \gtrsim 5 \cdot 10^{16}$ cm⁻³. (This concentration corresponds to a dimensionless parameter $r_s \sim 4$.) This metallization of the exciton gas is a consequence of the disappearance of the bound exciton states due to screening of the Coulomb interaction. The transition should occur when the screening radius $r_s = 0.84a_{ex}$; for a nondegenerate gas, this corresponds to a density

$$n_{MI}(T) = \frac{kT}{11.2E_{ex}a_{ex}^3},$$
(4.7)

where a_{ex} is the radius of the Bohr orbital and E_{ex} is the exciton binding energy. Curve 3 in Figure 4 shows the dependence $n_{MI}(T)$ calculated for silicon from Eq. (4.7). For $\overline{n} < n_{MI}$ the exciton gas is weakly thermally ionized while for $\overline{n} > n_{MI}$ the bound exciton states disappear due to screening of the Coulomb interaction.

In the emission spectra the metallization of excitons is evident in that, from $\overline{n} \sim 10^{16}$ cm⁻³, the exciton-phonon spectrum begins to broaden toward lower energies, as a result of blurring of the red edge. For $\overline{n} \sim (1-3) \cdot 10^{16} \,\mathrm{cm}^{-3}$ this is associated with exciton-exciton (or exciton- electron) collisions, which are accompanied by an increase in the effective quenching Γ ; in addition, the spectrum becomes more symmetric. However, for $\overline{n} \gtrsim 5 \cdot 10^{16}$ cm⁻³ there is a reversal in the asymmetry of the recombination spectrum which cannot be explained by collision processes alone. From $\overline{n}\gtrsim 5\cdot 10^{16}~{
m cm^{-3}}$ the form of the spectrum corresponds to EHP emission. With increase in \overline{n} to $2 \cdot 10^{18}$ cm⁻³ the red end of the recombination spectrum moves towards lower energies, in accordance with the rearrangement of the EHP energy spectrum due to correlation interactions in the high-density electron-hole system [49]. At the same time, the width of the EHP recombination spectrum increases in accordance with the Fermi filling of the electron and hole bands by charge carriers. Thus, in the case of silicon crystals it is found that at $T \gtrsim 20$ K the EHP gas condenses to a liquid. This means that, if in the range 20 K < T < 27 K there is an isothermal change in the system toward higher mean densities, then at $\overline{n} \sim n_{_{M}}$ metallization of the dielectric exciton gas begins, yielding an EHP, and then at some threshold value of the density there is a phase transition of the first kind in the EHP- EHL system. However, there is no property of the system which indicates that metallization of the excitons is a consequence of the phase transition.

EHL thermodynamics has been investigated theoretically for model semiconductors with limitedly large anisotropy of the electron spectrum [31, 32]. (The method was considered in Section 1.) The introduction of a nonzero temperature in the theory does not affect the initial assumptions of the theory and so it is possible to obtain analytic expressions for the thermodynamic characteristics.

Andryushin *et al.* used the Matsubara diagram technique to calculate the thermodynamics of a two-dimensional laminar semiconductor and obtained the following equation of state for the EHL [31]

$$\mu(n,T) = An^{1/4} + 2T \ln\left(\exp\frac{\pi nc}{T} - 1\right),$$
(4.8)

where *c* is the distance between layers. The isotherms $\mu(n)$ are of Van der Waals type, i.e., for $T < T_c$ there are two stable points $n_g(\mu, T)$ and $n_e(\mu, T)$ and one unstable $(\partial \mu / \partial n < 0)$ branch of the solution. The smaller of the stable solutions (n_g)

corresponds to the gas phase and the larger (n_e) to the EHL. The results obtained for the parameters of the critical region were [31]

$$n_{c} = 0.03 \text{ c}^{-4/3};$$

$$T_{c} = 0.16 \text{ c}^{-1/3};$$

$$\mu_{c} = -11.0 T_{c}.$$
(4.9)

In the model adopted the gas phase is a nondegenerate electron–hole plasma and therefore excitons play no substantial role. Moreover, even at the lowest temperatures ($T \ll T_c$) the exciton concentration is much less than the concentration of free charge carriers as a result of the condition $\mu_0 = \mu$ (T = 0) $\sim c^{-1/3} \gg 2$. At the critical temperature the density of charge carriers in the gas phase is so large that the existence of excitons is impossible as a result of screening effects.

Finally, Onishchenko investigated EHL thermodynamics when extremal anisotropy of the energy spectrum is produced by a superstrong magnetic field [32]. The equation of state of the EHL was calculated using a diagram technique and the following values were obtained for the parameters close to the critical point

$$T_{c} = 0.21 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^{2/7};$$

$$n_{c} = 0.09 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^{8/7}.$$
(4.10)

5. Effect of Strain on EHL Properties

The investigation of the spectra and polarization of the intrinsic recombination radiation of semiconductor crystals at low temperature, under uniaxial strain, is intimately connected with the problem of establishing the physical nature of collective electron states. The uniaxial strain of cubic crystals such as germanium and silicon leads to the splitting of the degenerate conduction bands and the valence band into a series of branches of smaller degeneracy, the development of anisotropy of the crystals, and the appearance of polarization of the intrinsic recombination radiation. As noted by Asnin *et al.* [50], the polarization of the recombination radiation should reach saturation at significantly different splitting of the permitted bands for collective states with nondegenerate and degenerate energy distributions. In fact, for quasiparticles with a Boltzmann energy distribution (excitons, biexcitons), the permitted-band branches with the minimum energies will have the largest populations even for splitting of the order of the mean thermal energy kT, causing the maximum possible polarization of the radiation even at small strains. For degenerate EHL saturation of the polarization would be expected at splittings greater than the Fermi energy, i.e., at consider-
ably larger strains. Thus, even a qualitative study of the radiation polarization as a function of the strain in principle allows the character of the collective-state energy spectrum to be established.

Experiments on the polarization of exciton and collective-state radiation in germanium subjected to uniaxial compression in the direction (111) have given contradictory results [50–53]. On the one hand, it has been claimed that, as regards its dependence on the magnitude of the compression, the polarization of collective-state radiation is analogous to the polarization of exciton radiation and saturation occurs at low strain, so that the collective states are biexcitons [50–52]. On the other hand, Alekseev *et al.* found that the polarization of the integral radiation of the collective-state radiation, and saturation occurs at high strain, leading to the conclusion that the collective-state radiation is due to recombination in degenerate EHL [53]. The fundamental disagreement between these experimental results may be associated with parasitic polarization of the recombination radiation that is unrelated to the strain.

The spectral distribution of the polarization of the intrinsic recombination radiation has been investigated in detail for germanium as a function of the applied pressure P in the direction (111) [54]. To ensure strain homogeneity, pure germanium samples $(15 \times 2.5 \times 1.7 \text{ mm}^3)$ with pointed ends were used. The samples were placed inside a screen with narrow slits for the inlet of the exciting radiation and the outlet of the recombination radiation. The construction was such as to allow rigid fixing of the samples with respect to the beam of exciting radiation (from an argon laser of power up to 0.5 W) and the spectrometer slit when the pressure was applied. The polarization of the recombination radiation was analyzed by means of a polaroid, which was rotated by 90° at intervals of 10 μ s [11], so that its axis was alternately parallel and perpendicular to the direction of compression. Apparatus polarization was compensated by synchronous change in the amplification factor of the photoresponse so that the radiation signal of germanium in the absence of strain remained unchanged as the polaroid rotated. The appearance of polarization due to strain disrupted the compensation and the radiation spectra corresponding to two different positions of the polaroid were then recorded as successive segments in a single pass of the spectral interval. In recording the spectra the signal-to-noise ratio was approximately two orders of magnitude.

It was established that polarization of a broad band of collective-state radiation begins at the long-wave edge; with increase in pressure *P* the polarization gradually increases and extends over the whole radiation band. The polarization of the LA and TO components of the integral exciton and collective-state radiation is shown in Figure 5 as a function of the pressure *P*, together with the analogous results of other experiments [50–53]. It is evident from Figure 5 that the polarization of the TO components of the exciton and collective-state radiation due to splitting of the conduction band is saturated at significantly different *P*. For example, the polarization of the exciton radiation is saturated at $P = 100-150 \text{ kgf/cm}^2$, which at 4.2 K corresponds to a splitting of the conduction band of (2-3)kT. The polarization of the collective-state radiation is saturated at $P \simeq 350 \text{ kgf/cm}^2$, which corresponds to a splitting of $\sim 3.2 \text{ meV}$ and is close to the electron Fermi energy in the degenerate EHL of germanium. The polarization of the LA component of the radiation is associated with valence-band splitting of the germanium. In this case the polarization of the exciton radiation changes sign at $P = 275 \text{ kgf/cm}^2$, which corresponds to a valence-band splitting of \sim 0.8 meV. This is close to the "crystalline" splitting of the exciton ground state in germanium. Since the crystalline splitting is specific to free excitons and is insignificant for free charge carriers, the polarization of the LA component of a degenerate EHL rises monotonically with increase in P and tends to saturation at $P \sim 1000 \text{ kgf/cm}^2$, which corresponds to a valence-band splitting of $\sim 3 \text{ meV}$. Thus, the results of these experiments [54] show that the polarization of collective-state radiation due to the uniaxial compression of germanium corresponds to the model of an electron-hole drop consisting of a degenerate plasma of nonequilibrium charge carriers and agrees with the conclusion of Alekseev et al. [53].



Figure 5. Pressure dependence of polarization α (P) for the LA component of the exciton radiation from Ref. 52 (1), Ref. 53 (2), and Ref. 54 (3); for the TO component of the exciton radiation obtained by Ref. 52 (2), Ref. 53 (3), and Ref. 54 (4); and for the TO component of the collective-state radiation from Ref. 52 (1) and Ref. 54 (2).

The data of Pokrovskii and Svistunova [54] have been used as the basis for a quantitative analysis of the shape of the EHL radiation spectrum in germanium as a function of the pressure *P* in the direction (111) [55], and the charge-carrier concentration and Fermi energy have been expressed as a function of *P*. It has been shown that with increase in *P* from 0 to 1000 kgf/cm² the EHL charge-carrier concentration decreases from $2.4 \cdot 10^{17}$ cm⁻³ to $0.17 \cdot 10^{17}$ cm⁻³ and the Fermi energy changes from 2.5 to 1.08 meV for electrons and from 3.9 to 2.7 meV for holes. The EHL parameters for compression of germanium in the direction (111) with $P \simeq 1000$ kgf/cm² are close to theoretical values obtained for the limiting case of "infinitely large" strain [56].

Detailed theoretical analysis of the exciton-radiation polarization in germanium due to uniaxial strain shows that strong anisotropy of the splitting of the indirect-exciton branches leads to polarization which is the opposite of that caused by crystalline splitting [57]. This means that the point of sign reversal of the polarization under compression in the direction (111) is shifted toward lower P and the absolute value of the exciton-radiation polarization in the low-pressure region is reduced. The temperature also has a strong effect on the dependence of the exciton-radiation polarization on the pressure P, and this has been suggested as the reason for the discrepancy between different experimental results [52–55].

The spectra and polarization of the intrinsic recombination radiation of silicon under strain in the direction (100) has also been investigated [58]. The method used was similar to that of Pokrovskii and Svistunova [54], but strain by compression was supplemented by strain by extension of the crystals. The exciton radiation of silicon is associated not only with transitions between a lower branch of the conduction band and an upper branch of the valence band but also with transitions from an upper branch of the conduction band ("hot" excitons [59]). Analysis of the amplitude and polarization of different components of the exciton radiation under compressive and tensile strain in the direction (100) and comparison of the experimental data with theoretical results shows that transitions associated with the emission of LO phonons occur predominantly through the intermediate state $|\Delta_{5,v}>$. For transitions with the emission of TO phonons both $|\Gamma_{15,c}>$ and $|\Delta_{5,v}>$ are intermediate states. It has also been shown that the crystalline splitting of the exciton level in silicon is negative and no more than 0.5 meV. The polarization of EHL radiation in silicon due to uniaxial strain begins at the long-wave edge of the emission band, and gradually extends over the whole band with increase in pressure, reaching saturation at $P \simeq 1600 \text{ kgf/cm}^2$, which corresponds to a splitting of 14 meV for the conduction band and 7.5 meV for the valence band. The saturation of the polarization at such large splittings confirms that there is strong EHL degeneracy in silicon. At large pressures, the absolute value of the EHL-radiation polarization approaches the polarization of the TO component of the exciton radiation. This behavior has been shown to be in agreement with theoretical expectations for the radiation of a degenerate plasma [58].

Pikus, in a work devoted mainly to the analysis of emission by silicon in a magnetic field [60], also calculated the polarization of different exciton- radiation components for strain in the directions (100) and (111). For the direction (100) these results agree with those obtained previously [57] but Pikus notes that unique determination of the intermediate states from the experimental data [58] cannot be rigorous.

The investigation of EHL properties in germanium crystals under strain is closely related to the problem of producing large electron-hole drops. The first evidence for the existence of "large" electron-hole drops was obtained in studying the microwave absorption of photoexcited germanium from the appearance of a characteristic peak whose position in a magnetic field depends on the drop size (Alfven radiation); it was found that the drop may reach a diameter of 1 mm [61]. It was subsequently shown that large drops occur in specific conditions of inhomogeneous strain of germanium, leading to the formation of potential wells for EHL. Using a viewer sensitive to the intrinsic IR radiation of germanium, it was possible to photograph large electron-hole drops and to show that one, two or four such drops may be formed, depending on the direction of the strain [62]. It was also established that the lifetime of the large drops is 500 μ s, which is approximately an order of magnitude larger than the EHL lifetime in germanium in the absence of strain. Although these were impressive results, it remained unclear whether, by means of inhomogeneous strain, it is in fact possible to create a single large drop of EHL (rather than a cloud of small drops localized in a potential well) and why, in physical terms, the lifetime of large drops should be so large. An investigation of the kinetics of EHL luminescence with very inhomogeneous strain of germanium in the direction (111) showed that at $T \simeq 2$ K the lifetime of electron-hole drops increases with rise in P and reaches 400 μ s at P = 300 kgf/cm² [63, 64]. Hence it was concluded that the increase in the lifetime is associated not with the drop size but with the decrease in the equilibrium concentration of charge carriers in the condensed phase under uniaxial strain. A subsequent series of experiments on the inhomogeneous strain of germanium was undertaken to investigate not only the luminescence kinetics but also the kinetics and spatial distribution of the absorption and scattering of a 3.39- μ m laser beam. In the absence of strain the relaxation time constant for luminescence, absorption, and scattering was found to be about 40 μ s; the absorption did not exceed 12% and its spatial distribution was that of a cloud of small droplets with no sharply defined edge. With inhomogeneous strain the scattering of the radiation disappeared and the absorption increased to 80% in the case when the exciting and probing rays were combined and focused on the crystal close to the region of maximum strain. At the same time, the damping and absorption time constants increased by approximately an order of magnitude. The spatial distribution of the absorption and its absolute value were found to correspond to the absorption of a homogeneous sphere of radius about 0.4 mm with a charge-carrier concentration of $1 \cdot 10^{17}$ cm⁻³. This implies that in the experimental conditions a single large drop was produced.

Further confirmation of the existence of large electron–hole drops was obtained in the investigation of VHF exciton breakdown in germanium under inhomogeneous strain with pulse excitation [65]. Reduction in temperature to 1.3 K, so that free charge carriers have little effect on the VHF absorption, led to sign reversal of the modulation of the VHF signal due to photoexcitation and increase in the relaxation time of the signal to 500 μ s. The resulting detuning of the resonator corresponded to the volume from which the VHF field was excluded, of the order of 1 mm. Pulse conditions of VHF exciton breakdown, observed in germanium in the absence of strain and typical of a cloud of small droplets, disappear under inhomogeneous strain, to be replaced by breakdown lasting for the length of a VHF pulse. This form of exciton breakdown is natural for a large drop, since the surface area of a single drop is approximately two orders of magnitude smaller than that of a cloud of small droplets and the large drops should have little effect on the VHF exciton breakdown.

Ultrasonic waves travelling in a crystal may also be regarded as dynamic inhomogeneous strain. Therefore the details of the interaction between ultrasound and an electron-hole drop may only be understood on the basis of the properties of the condensed phase in crystals under strain.

Alekseev and Galkina investigated the interaction of 160-MHz ultrasonic waves with electron-hole drops in germanium [66]. Pure germanium samples were excited by a radiation band of wavelength 1.52 μ m. The damping of the resulting ultrasound was measured by the echo-pulse method. The absorption was investigated as a function of the temperature and the ultrasound intensity. For a travelling ultrasound wave of low intensity the absorption maximum was observed at 2.4 K. This absorption is associated with oscillatory motion of a small drop in the field of the wave. With increase in the ultrasound energy flux to 2W/cm² a new absorption maximum appeared at 3.2 K. In addition, increase in the ultrasound intensity led to a small (10-20%) rise in the radiation intensity of the drop. On the other hand, for excitation by a standing acoustic wave the intensity of the recombination radiation decreased with increase in ultrasound intensity. Alekseev and Galkina interpreted their results in the following manner. Assuming that in the field of a travelling ultrasonic wave the drop size increases, leading to increase in the recombination-radiation intensity, it may be expected that for larger drops the mechanism of ultrasound absorption associated with the excitation of capillary oscillations will predominate. This mechanism leads to the appearance of absorption at higher temperatures. In the field of a standing wave at small intensities, the strain appearing in the germanium crystal leads to forces acting on the drop and on the exciton; these forces act in opposite directions, and hence result in spatial separation of the regions occupied by drops and excitons, so that the supply of excitons to the drop is reduced and both the volume of the condensed phase and the recombination-radiation intensity decrease.

Keldysh and Tikhodeev have considered various theoretical questions regarding the interaction of ultrasonic waves with electron–hole drops [67], including those which relate to experiment [66]. Their solution rests on the hydrodynamic equations for the motion of a drop in the field of a time-dependent inhomogeneous strain, taking into account the viscosity and friction at the crystal lattice for a Fermi liquid. The solution is obtained for the case of an incompressible liquid, which is valid for small strains. The ultrasound absorption coefficient may be written as the sum of two terms. The first corresponds to the absorption due to drop motion in the absence of deformation. The maximum absorption corresponding to this mechanism takes the form of a resonance and depends on the ultrasound frequency and the drop-momentum relaxation time due to interactions with the crystal lattice. This relaxation time depends greatly on the temperature, which again leads to a maximum of ultrasound absorption by the drop (for example at 2.4 K, as obtained by Alekseev and Galkina [66]). The second term describes the absorption of ultrasound due to the deformation of a drop with finite viscosity. The expression for this term is complicated, in general, but is much simplified in the limit of small viscosity, which is valid for a drop of relatively large size and temperatures such that the inverse drop-momentum relaxation time on lattice oscillations is significantly greater than the ultrasound frequency. In this case the temperature dependence of the ultrasound absorption calculated for an electron-hole drop in germanium has two characteristic maxima and corresponds to the experimental curve obtained by Alekseev and Galkina [66].

One other possible effect associated with strain is of interest [68]: it is found that in the region occupied by the EHL the width of the forbidden band is less than in adjacent regions of the crystal, and therefore the crystal lattice inside the drop must be stretched. Thus, close to the interface there is a strain gradient, leading to the exertion of a pressure on the drop. Since the elastic properties of a lattice are anisotropic even in cubic crystals, this pressure will be anisotropic, which, it has been suggested, should lead to flattening of the drop — for germanium and silicon, in one of the directions (100). This flattening is opposed by the surface tension. However, if the drop is sufficiently large (for germanium, the radius must exceed 3 μ m), the contribution from the lattice strain predominates and flattening of the drop becomes energetically favorable. This effect is expected to be very considerable, since estimates indicate that a drop of radius 10 μ m in germanium should be converted to a disk with a diameter-to-height ratio of $\simeq 4$.

6. Motion of Electron-Hole Drops

The motion of electron-hole drops is among the most important of the properties that remain to be solved, although attempts have been continuing since the very early stages of research into exciton condensation in semiconductors. In fact, electron-hole drops in germanium and silicon contain 10^6 - 10^8 electronhole pairs, i.e., are of considerable mass. Therefore, although the interaction with the crystal lattice is weak, the drop diffusion coefficient must be very small (in germanium, $\lesssim 10^{-3}$ cm²/s). It was expected that the drop would be localized in the immediate vicinity of the excitation region. However, the very first experiments showed that the cloud of droplets may cover a considerable region of the crystal, extending several millimeters from the excitation region. With increase in intensity of the excitation the size of the cloud increases but the size of the drops within the cloud remains largely unchanged. On the basis of the experiments it was concluded that drop motion is not a diffusion process and that the forces acting on the drop to produce its motion are the result of nonequilibrium processes.

Bagaev *et al.* showed, both theoretically and experimentally, that the reason for the motion of the excitons and the drop from the excitation region may be entrainment by the phonon "wind" [69]. In fact, a large part of the energy liberated on thermalization of electrons and holes after photoexcitation and also on recombination into electron–hole drops is converted to lattice oscillations. This energy is very considerable. For example, the power liberated in the recombination of an electron–hole liquid is about $10^3 \,\text{W/cm}^3$ in germanium and about $10^6 \,\text{W/cm}^3$ in silicon. Hence the drops themselves are the source of the phonons which, as they propagate through the crystal, interact with excitons and other drops leading to the mutual repulsion of the drops and the motion of the droplet cloud from the excitation region into the depth of the crystal (the phonon wind).

Bagaev et al. considered the spatial distribution of excitons and drops as a result of interaction with the phonon wind for various cases of surface excitation (a "large" spot, a narrow strip, and a "small" spot) [69]. In the simplest case, when the excitation is over a large plane surface of the crystal, the decrease in the concentration of nonequilibrium charge carriers from the surface into the depth of the crystal is exponential, but the corresponding decay constant may be much larger than the diffusion length and at large excitation power is proportional to the flux density of phonons. For the case of crystal excitation over a narrow strip or a small spot the expression obtained is more complicated, but at large excitation intensities the effective volume of the region occupied by nonequilibrium charge carriers is proportional to the excitation power. For this reason, the density of the nonequilibrium charge carriers is limited in the case of surface excitation. To permit quantitative estimates of the entrainment of excitons and drops by the phonon wind, Bagaev et al. made certain assumptions as to the phonon distribution function. Thermalization and recombination are accompanied by the formation mainly of short-wave optical and acoustic phonons, which rapidly decay to longer-wave acoustic phonons with long lifetimes. As the dependence of the exciton and EHL energy on small deformations is strongly nonlinear, phonons may be effectively scattered and absorbed by both excitons and drops. Since the drops themselves are the source of the phonon flux which is responsible for the diffusion of excitons to the drop surface, the limits on the drop size arise naturally. Accurate determination of the limiting size is impossible, since the phonon distribution function and the accurate values of the scattering and absorption cross sections are unknown. However, by substituting reasonable values of these

parameters in the solution of the exciton diffusion equation, Bagaev *et al.* obtained a limiting radius of $\sim 15 \ \mu$ m for the electron–hole drops in germanium, which is in satisfactory agreement with experiment.

Keldysh has undertaken a more detailed theoretical consideration of the limits on the drop size due to interaction with the phonon wind [70]. Taking into account that the strength of a phonon wind is proportional to the local energy flux density of the phonons, he obtained an expression for the repulsive force between two small volumes within the region occupied by the EHL. This expression is analogous to the force acting inside the volume of a homogeneously charged liquid and the standard solution of this problem may be used. One obvious consequence of this analogy is that beyond a certain point large volumes of EHL cannot be stable and must break down to smaller drops. This is true both for spherical drops growing as a result of the increase in exciton flux at its surface and for a plane liquid layer produced, for example, by intense pulse excitation. The numerical results depend strongly on the phonon distribution function adopted and for germanium the limiting drop radius is found to be $\sim 7-35 \ \mu m$, which is in qualitative agreement with experiment. Keldysh also obtained expressions describing the dispersion of the drop for pulse excitation by a large or small light spot.

The effect of the phonon wind on the motion of electron–hole drops in germanium has been confirmed in a number of experiments. For example, Bagaev *et al.* used as a phonon source the end of a germanium crystal subjected to continuous surface excitation by laser radiation of wavelength $\lambda = 1.06 \ \mu m$ [69]. At some distance from the end an electron–hole drop was excited by a modulated laser beam with $\lambda = 1.52 \ \mu m$. The spatial distribution of the modulated component of the charge carriers was determined from the absorption of a laser beam with $\lambda = 3.39 \ \mu m$, which could be moved over the crystal. A series of such experiments showed that, on reaching some threshold value of the excitation power for the radiation with $\lambda = 1.06 \ \mu m$, the charge-carrier distribution becomes asymmetric and the charge carriers are observed to drift up to 2 mm away from the excited end. Quantitative estimates obtained on the basis of this drift are in reasonable agreement with the calculation of exciton and drop entrainment by the phonon wind [69].

Durandin *et al.* subjected germanium crystals to volume excitation by short pulses of radiation with $\lambda = 1.5 \ \mu$ m from a barium-vapor laser, so as to produce nonequilibrium charge carriers in a cylindrical volume of diameter 300 μ m and height 3 mm [71]. The space-time distribution of the drops was recorded by means of the scattering and absorption signals for a probing laser beam with $\lambda = 3.39 \ \mu$ m. It was found that at each moment of time the drops are mainly confined within a narrow cylindrical layer, the radius of which increases over time. The radius of the layer increases rapidly at first and then the motion of the droplet cloud becomes much slower. The rate of motion of the cloud in the first 0.5 μ s was estimated at 10⁵ cm/sec. This rapid phase of cloud motion does not appear in the theory of the phonon wind, the source of which is the drop itself. It is evidently associated with the appearance of a powerful new mechanism of phonon generation at high concentrations of nonequilibrium charge carriers. The "slow" phase of the motion may be interpreted as a result of the mutual repulsion between the drops due to the generation of the phonon wind. Estimates published in the paper confirm that this conclusion is reasonable.

Astemirov *et al.* used a rather different method to record the space-time distribution of the drops [72]. Nonequilibrium charge carriers were excited in germanium by short pulses of laser radiation focused on a small spot in such a way as to ensure surface excitation. The recordings of the drop were made using metal-semiconductor contacts applied to opposite faces of the crystal. The drops reached the contact after some delay, which decreased with increase in intensity of the exciting radiation (Figure 6). The results were interpreted on the basis of the calculations by Keldysh [70]. From a comparison of the experimental values with the calculated curves, an estimate was made of the characteristic constant for the interaction between phonons and electron–hole drops in germanium.



Figure 6. Photocurrent due to drop breakdown in the field of contacts in germanium for different levels of pulsed surface excitation *j*, W/cm²: $1.4 \cdot 10^6$ (*1*), $1.1 \cdot 10^6$ (*2*), $8 \cdot 10^5$ (*3*), $6.7 \cdot 10^5$ (*4*), $6 \cdot 10^5$ (*5*), $4.3 \cdot 10^5$ (*6*), $3.3 \cdot 10^5$ (*7*), $3 \cdot 10^5$ (*8*). The upper right-hand graph shows the time of flight of the drop as a function of *j* [72].

Subsequently, the same method of recording the drop distribution was used to obtain a dependence of the time of drop motion in the phonon wind on the magnitude of the compression of germanium samples in the direction (110) [73]. The rate of drop motion was found to decrease considerably with increase in pressure from 0 to 230 kgf/cm^2 . This decrease in drop velocity was attributed to weakening of the phonon wind as a result of a decrease in equilibrium concentration in the drops, leading to a reduction in the rate of radiationless recombination.

Ashkinadze and Fishman obtained further experimental evidence that a fast component of drop motion in germanium appears after a certain threshold level of surface excitation has been reached [74, 75]. The appearance of free charge carriers surrounding the drop was recorded by means of the absorption of 8-mm radio waves propagating in a waveguide in which the sample was placed [74]. The end of the sample on which the exciting-radiation pulse was focused was outside the waveguide at some known distance from its wall. At small excitation intensities there was practically no absorption signal. After some threshold level was reached, the absorption signal appeared with some delay, which decreased with increase in the level of excitation. The maximum drop velocity observed was $2 \cdot 10^5$ cm/s, which agrees with the results of other experiments. The initial rapid reduction in the recombination-radiation intensity of the drop observed experimentally at 1.5 K in thin germanium samples [75] was attributed to motion of the drops from the excitation region to the opposite face of the crystal, followed by rapid breakdown at the surface.

7. EHL Behavior in Magnetic Fields

The investigation of EHL behavior in magnetic fields is of very great interest. Firstly, because of the low effective mass of the electrons and holes in semiconductors, radical restructuring of the spectrum of a degenerate two-component Fermi liquid occurs in magnetic fields that are large but experimentally attainable. Secondly, in magnetic fields of several Tesla, quantum properties of the liquid appear, in the form of quantum oscillations of various of its parameters. Thirdly, at small magnetic fields it is possible to observe unusual magnetic properties of electron-hole drops, associated with their nonequilibrium nature. Finally, investigation of the interactions of electron-hole drops with variable and constant magnetic fields allows their electrical conductivity to be determined.

The theory of EHL behavior in "superstrong" magnetic fields was considered by Keldysh and Onishchenko [28] (see Section 1). Experiments show that in fields of 5-20 T the charge-carrier concentration in EHL in germanium increases approximately linearly with increase in magnetic field strength [34], in accordance with the theory [28].

Quantum oscillations of the intensity of EHL recombination radiation in germanium and silicon were among the convincing demonstrations of the existence of strong charge-carrier degeneracy in the condensed phase of these semiconductors. Asnin *et al.* observed oscillations of the degree of circular polarization of EHL radiation in germanium [76]. The dependence of the degree of circular polarization (even with sign reversal) on the magnetic field was found to be even more oscillatory for the short-wave edge of the emission band, i.e., in the spectral region corresponding to transitions of electrons and holes with energies close to the Fermi energy. From the oscillation period observed, a value of $2.6 \cdot 10^{17}$ cm⁻³ was calculated for the charge-carrier concentration in the condensed phase of germanium; this is close to the generally accepted value. However, the oscillation amplitude was found to be approximately six times larger than the value expected if the usual value is taken for the electron g factor in germanium (1.58). No reasonable explanation was offered for this discrepancy. Altukhov *et al.* reported anomalously large circular polarization of EHL radiation in silicon in magnetic fields [77]. The degree of circular polarization of the EHL emission band was 10% at 5 T. If the Fermi energy of electrons and holes in the condensed phase of silicon is of the order of 10 meV, the explanation of this large polarization in relatively small fields would require a hole g factor of 25, which is much too large to be reasonable. More recently [78], Altukhov et al. discovered that the direction of circular polarization of EHL radiation in silicon in a magnetic field was incorrectly determined in their previous experiments [77]. In fact, it is negative, i.e., opposite in direction to the circular polarization of the excitons, and hence is determined by the orientation of electrons, and not of the holes, as they had previously assumed [77]. The absolute value of the circular polarization was also found to be smaller: at low levels of excitation it was no more than 5% and with increase in the level of excitation it rapidly decreased. Altukhov et al. attributed this decrease to the nonequilibrium orientation of the electrons in the drop, resulting from the electron orientation in the excitons which feed the drop. If the electron spinrelaxation time in an exciton is comparable with the exciton lifetime, the electron orientation cannot reach its equilibrium value in the space of the lifetime. Since the exciton lifetime decreases with increase in the level of excitation (because of increase in the drop surface on which the excitons are captured), with increase in excitation intensity the drop is fed by a flux of excitons with a decreasing level of electron orientation. After the condensation of the excitons, the electron orientation is retained for a time of the order of the spin-relaxation time in an EHL. If this time is comparable with, or larger than, the lifetime of the drop in silicon $(1.5 \cdot 10^{-7} \text{ s})$, which estimates show to be possible, the drop radiation must have strong circular polarization. This orientation should cause significant changes in the recombination-radiation spectrum of the drop, which was not observed in the experiment (Figure 7).

The theory of the polarization of exciton radiation in a magnetic field has been considered in detail by Asnin *et al.* for germanium [79] and by Pikus for silicon [60]. A detailed comparison of calculated and experimental results shows that the experimental observations may be explained by assuming that exciton-level splitting is quadratic in the magnetic field [79]. The *g* factor of holes in excitons was found to be -1.6, with a diamagnetic-shift constant of 2 meV/kOe and an exciton level splitting of 1.5-2.5 meV/kOe in germanium. The degree of circular

polarization of the radiation of free and bound excitons in silicon in a magnetic field for phononless, LA, LO, TA, and TO phonon transitions has been calculated [60] by the method of invariants, which allows a general expression to be obtained without the need to consider specific intermediate states. The results take the form of fairly complex expressions which are useful for the interpretation of experimental data.



Figure 7. Spectral distribution of radiation and degree of circular polarization *P* in a 4.8-T magnetic field at 1.9 K in pure Si. The intensity of excitation increases from curve *1* to curve *3* [78].

Quantum magnetic oscillations of the intensity of stimulated EHL emission in cadmium sulphide were observed by Dite *et al.* [80]. Whereas the oscillation depth of spontaneous EHL emission in this material is too small and cannot be experimentally observed, Dite *et al.* showed that in laser conditions the oscillation depth of stimulated emission may be many times larger (by a factor approximately equal to the amplification factor for radiation in the active region of the crystal). By isolating a single EHL emission mode in conditions when the crystal walls formed the resonator, clear oscillations of the intensity of this mode were observed in a magnetic field. From the oscillation period observed a value of 12 ± 3 meV was calculated for the electron Fermi energy; this corresponds to a concentration of $\sim 10^{18}$ cm⁻³ in the EHL. The agreement with estimates obtained by other methods is good.

Experiments on the interaction of electron–hole drops with variable and constant magnetic fields may be used to determine the electrical conductivity and mobility of charge carriers inside such a drop in germanium [81, 82]. Although electron–hole drops in germanium have been systematically investigated since 1969, even today there are no reliable experimental data on their electrical conductivity. This is because the drop is surrounded by a cloud of free charge carriers which determine the conductivity of the crystal for both constant and variable (VHF) currents up to bulk mean concentrations of $\sim 10^{17}$ cm⁻³, at which continuous conduction over a chain of drops appears. However, in producing such large concentrations, overheating of the crystal is unavoidable and the results of direct measurement in no way characterize EHL conductivity.

A variable magnetic field excites a Foucault current in the drops, leading to high-frequency losses. These losses were investigated in the range 10-30 MHz by a method which is used to investigate nuclear magnetic resonance. The germanium samples were placed in the induction coil of an oscillatory circuit and excited either by short pulses or by periodically modulated laser radiation. Photo excitation led to change in the Q factor of the oscillatory circuit and hence to modulation of the high-frequency potential, which was recorded on an oscillograph. To create large drops the samples were subjected to inhomogeneous strain. The sample image was projected with twelvefold magnification onto a smallaperture photosensor, by means of which the image of the large drops in their recombination radiation could be scanned and their size and shape determined. Calculations show that the energy loss due to the excitation of Foucault currents is proportional to the electrical conductivity of the drops, the total volume occupied by all the drops, and the square of the drop radius *R*. Applying a constant magnetic field leads to a change in the losses due to change in the electrical conductivity, analogous to the usual effect of transverse magnetic resistance in an intrinsic semiconductor: the losses decrease in proportion to the square of the magnetic field strength H_{0} . This result was used in the direct determination of the charge-carrier mobility in drops from the dependence of the losses on the magnitude of the constant magnetic field. At 1.8 K the electron and hole mobility in small drops in germanium with $10^{10}-10^{11}$ cm⁻³ residual impurities in the absence of strain was $2 \cdot 10^6$ cm²/V·s, which is approximately two orders of magnitude larger than the literature value [83]. The mobility decreased to $6.7\cdot 10^5$ cm²/V·s in large drops as a result of the decrease in the concentration and degree of degeneracy of the EHL in germanium in the presence of strain. In impure germanium the mobility in large drops decreases approximately in proportion to the concentration of impurity (in the range 10¹⁴–10¹⁵ cm⁻³). Hence it was concluded that in pure germanium the dominant mechanism is electron-hole scattering, which is strongly suppressed as a result of degeneracy of the plasma in the drop, whereas in impure germanium it is scattering on neutral impurities. Over a broad range of photoexcitation intensities the high-frequency losses due to Foucault currents in large drops were proportional to $I^{5/3}$, where I is the integral intensity of the emission from the drops. This dependence was as expected, since the losses in a large drop are proportional to R^5 and the recombination-radiation intensity $I \sim R^3$. The only discrepancy was at large drop sizes, where the skin effect appeared; this was taken into account by means of more complicated expressions. Measurements of the sizes of large drops and the determination of the absolute value of the high-frequency losses of mobility in the same conditions showed that the equations employed provide a description of the effect observed that is not only qualitatively but also quantitatively satisfactory.

The unusual magnetic properties of the charge carriers are associated with their high mobility inside the drop. The drop consists of nonequilibrium electrons and holes, recombination of which produces a flux of charge carriers from the surface to the center of the drop. In an external magnetic field the Lorentz field acts on this flux, causing the electron and hole components of the drop plasma to rotate in opposite directions. This "recombination" magnetization [84] may be considerably larger than the magnetization associated with ordinary diamagnetism and paramagnetism of the degenerate plasma. The effect is particularly significant for large drops, since it is proportional to R^5 . The pronounced flattening of large drops in small (0.2–1 T) magnetic fields is evidence of their recombination magnetization [85]. With increase in magnetic field strength, saturation of the flattening effect occurs. A quantitative investigation of this effect in pure and impure germanium has shown that the flattening and its saturation is a natural consequence of the recombinational magnetism of the drop [82]. The saturation of the flattening effect (for drop dimensions across and along the field in a ratio of about 4) occurs even when no account is taken of the surface tension and the reaction of the walls of the potential well in which the large drop is localized, because of the redistribution of the recombinational fluxes in the magnetic field. It is also shown that ordinary diamagnetism and paramagnetism of the EHL must cause elongation of the drop along the magnetic field, but this is an effect of smaller order. Investigation of the change in shape of the electron-hole drop in a magnetic field, taking into account not only recombination magnetism but also the effect of surface tension, the phonon wind, and diamagnetism and paramagnetism of the liquid, has shown that diamagnetism and paramagnetism do not significantly change the shape of the drop [86, 87]. The interaction with the phonon wind leads to elongation of the drop along the field and recombination magnetism leads to flattening of the drop. It is predicted that in strong fields the drop would split into smaller droplets as a result of these two effects.

All the above calculations are based on the assumption that the electron–hole drop takes the form of an ellipsoid of revolution in a magnetic field. However, Kaminskii has pointed out that this form of drop cannot satisfy the requirements

of continuity of the charge-carrier flow outside and inside the drop [88]. If continuity of the flow is assumed, the form of the drop, taking surface tension and recombination magnetism into account, differs significantly from an ellipsoid of revolution. With increase in magnetic field strength the drop takes the form of a cylinder with a truncated generatrix and a height: diameter ratio of about 2.4. In pure germanium at 2 K with drop radius 5 μ m, this shape should be produced in fields of about 0.6 T.

8. Plasma Phenomena in EHL

Research into plasma and magnetoplasma phenomena is to a large extent the continuation and development of work begun in the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR in 1969 on the absorption of long-wave infrared radiation due to the excitation of plasma oscillations of electron-hole drops in germanium. For example, to enable the concentration in the condensed phase of germanium to be determined more accurately from the absorption spectrum for long-wave infrared radiation, Gavrilenko et al. used known band parameters for a numerical calculation of accurate values of the effective optical mass and mass of the state density [89]. These calculations led to a value of $(1.97 \pm 0.05) \cdot 10^{17}$ cm⁻³ for the charge-carrier concentration at 1.5 K, which is thought to be more accurate than the value $2.4 \cdot 10^{17}$ cm⁻³ obtained from the shape of the recombination-radiation spectra for the drops, since in that case no account was taken of the dispersion of the phonons participating in the recombination process. The renormalization of the effective masses in electron-hole drops in germanium has been confirmed in experiments on the magnetoplasma resonance in the wavelength range 440–770 μ m [90]. The radiation source used in the experiments was an backward-wave lamp with continuous tuning, ensuring a high spectral resolution. The positions of the magnetoplasma-absorption peaks with respect to the cyclotron-resonance lines are determined mainly by the electron and hole masses and do not much depend on the particle concentrations. The values found for the effective electron and hole masses in the drops were 10-15% higher than the corresponding free-particle masses, which is in agreement with calculation [89]. Data on the change in the plasma-absorption spectrum of electron-hole drops in germanium in magnetic fields of up to 4 T were used by Kononenko and Murzin in an analysis of the dependence of the electron and hole concentrations in the EHL on the magnetic field [86]. The change in shape of the drop in the magnetic field was taken into account; the initial drop size was taken to be 1 μ m. On the basis of the analysis, it was concluded that the electron and hole concentration rises from $2.2 \cdot 10^{17}$ to $3.9 \cdot 10^{17}$ cm⁻³ when the magnetic field strength increases from 0 to 4 T.

Zayats *et al.* have made a detailed theoretical analysis of the long-wave infrared absorption spectrum of electron–hole drops in germanium [91]. The numerical results obtained on the basis of Mie theory take into account not only the absorption but also the scattering of the radiation. Comparison of the theoretical results with experimental absorption curves show that at comparatively low levels of excitation, corresponding to mean electron and hole concentrations of less than 10^{15} cm⁻³, it is sufficient to take account only of electric-dipole absorption. It is assumed that the drop size does not exceed 1 μ m. With increase in the level of excitation the absorption curve changes in shape and is shifted toward lower energies. These changes were attributed to an increase in drop size, but the calculated and experimental results are only consistent if the drop radius has some distribution in the range 1–16 μ m. Since a similar long-wave shift of the absorption curve is also observed for impure germanium, it is assumed that in this case larger drops are also formed.

Finally, investigation of the absorption of electron-hole drops in germanium at wavelengths of 0.6–1.35 mm revealed not only the electric-dipole magneticabsorption peaks already known [90] but also new peaks that were interpreted as magnetic-dipole absorption peaks resulting from the interaction of the drop with the magnetic vector of the long-wave radiation [92]. From the positions of these peaks the effective mass of the electrons in the drops was determined. It was found that the longitudinal mass is practically the same as the free-electron mass, whereas the transverse mass is 15% larger. Magnetic-dipole absorption depends more strongly on the drop radius than electric-dipole absorption, and so is more sensitive to the change in the shape of the drop in the magnetic field. On the basis of the change in the separation of the radiation and change in the magnetic field, it was concluded that the flattening of the drop increases to 1.7 in magnetic fields of 2 T.

Bragina *et al.* observed plasma absorption at high levels of pulse photoexcitation and attributed it to the appearance of free charge carriers in the space between the drops in germanium [93]. The fraction of the crystal volume filled by EHL in these experiments was estimated at $10^{-2}-10^{-1}$. The absorption of the radiation of an backward-wave lamp was investigated at wavelengths of 1.5-2.5 mm, recording the signal on reflection, modulated due to the photoexcitation of the crystal. With increase in excitation intensity a strongly fluctuating decrease in reflection was observed immediately after the end of the exciting light pulse. This decrease is associated with the breakdown of the electron–hole drops, which are good reflectors of the radiosignal, and the appearance of a plasma of nonequilibrium charge carriers with a concentration of not more than 10^{14} cm⁻³, which is transparent to the radiosignal. Drop breakdown may be the result of overheating when the drop is so large that the drop plasma is effectively heated as a result of interaction with the Auger electrons formed in recombination.

Another plasma effect associated with Auger electrons has been theoretically examined [94]. Generally speaking, Auger electrons may excite plasma oscillation of the drops, which should appear as long-wave IR radiation in the region of the plasma frequency. Estimates show [94] that when the free path length of the Auger electrons is significantly larger than the drop radius the IR radiation may be of an intensity sufficient to be observed.

9. Exciton Molecules

It was first demonstrated in 1947 that the combination of four light particles (two electrons and two positrons) into a neutral molecule is a theoretical possibility [95, 96]. It was shown that such a four-particle complex would be stable *in vacuo* with respect to dissociation into two positronium atoms. According to the Lampert hypothesis [97] (see also Moskalenko [98]), the analog of a positronium molecule in a semiconductor is an exciton molecule (or biexciton), which is a bound state of four particles with effective masses (two electrons and two holes). Since these pioneering works appeared, attempts have been continuing to observe the radiative decay of biexcitons in semiconductors by spectroscopic means.

As no accurate solution of the four-particle problem is available, theoretical calculations of the biexciton ground-state energy have generally been restricted to a variational approximation [99–104]. In this case the variational wave function is expressed as the product of the Hylleraas-Ore function and the shell function for the heavier particles (usually the holes). In semiconductors the effective masses of electrons and holes are not equal and in many cases that are of interest they are anisotropic; therefore the theoretical analysis has been concerned primarily with the dependence of the exciton-molecule binding energy on the parameters characterizing the mass ratio [103–105] $\sigma \equiv m_e/m_h$ and the anisotropy [105] $\gamma \equiv m_{\perp}/m_{\parallel}$. It has been shown that, if the exciton molecule is stable with respect to dissociation into free excitons when $\sigma = 1$ (the case of a positronium molecule), it will be stable for any σ in the range $0 \le \sigma \le 1$. In the limit as $\sigma \to 0$ (the case of a H₂ molecule) the calculated value of the binding energy is close to $0.348 E_{ex}$, where E_{ex} is the exciton Rydberg. The binding energy decreases monotonically with increase in σ and when $\sigma \rightarrow 1$ it is close to $0.02 E_{ev}$, in accordance with the results of Hylleraas and Ore [95, 96]. The exciton-molecule binding energy is less sensitive to the anisotropy parameter γ than to σ and increases somewhat with decrease in γ [105].

Several spectrosopic methods have been suggested for the experimental determination of the biexciton ground-state energy. Of these the most interesting from a practical point of view are those based on resonance two-photon excitation of the biexciton [106] and induced one-photon conversion of an exciton to a biexciton [107–109]. In narrow-band semiconductors these phenomena are characterized by an extremely large oscillator strength of the optical transition and may therefore prove of great value for the experimental study of the biexciton spectrum. The use of these methods in broad-band semiconductors is much less effective because of the extremely small oscillator strength of the corresponding transitions.

Since in a biexciton pair electron-hole correlations of the internal motion are the strongest, the most probable process of biexciton radiative decay will be accompanied by the creation of a photon and a singlet exciton in the 1 S or 2 S, 2 P states. In broad-band semiconductors such processes must be accompanied by the simultaneous creation of a phonon in accordance with the momentum-conservation law.

Considerable experimental effort has been directed toward the detection of several lines in the emission spectrum corresponding to the radiative decay of a biexciton. In narrow-band semiconductors the strongest indication that this process is a reality has been obtained with ionic crystals of CuCl and CuBr, in which, according to variational calculations, the exciton molecules have a high binding energy [110]. In other narrow-band materials, such as CdS, CdSe, and ZnO, the experimental evidence is less convincing.

It must be remembered that, as a rule, binary semiconductors with ioniccovalent binding, in contrast to atomic semiconductors of the type of Ge and Si, contain a relatively high concentration of small, electrically active donor or acceptor centers. At low temperatures excitons or free electron-hole pairs readily combine with such centers to form stable exciton-impurity complexes (EIC). In narrow-band semiconductors such complexes are characterized by extremely large oscillator strengths of the optical transition $-f_{FIC} \sim (a_{e_x}^3/\Omega) f_{e_x}$, where a_{e_x} and f_{ev} are the Bohr radius and oscillator strength of a free exciton, and Ω is the volume of an elementary cell of the crystal [108, 109] - and therefore at low temperatures they provide a very effective radiative channel. Estimates show that the radiative probability of an EIC at a neutral donor is of the same order as the probability of biexciton radiative decay, or larger. As the cross section for the binding of two excitons in a biexciton is less than or, at best, of the same order as the cross section for the capture of a free exciton by a center, it is obvious that the biexciton emission lines are comparable in intensity with the EIC lines when the density of the nonequilibrium electron-hole pairs is higher than the concentration of the corresponding center $(\overline{n}_{e,h} > n_{a,d})$, i.e., when the EIC radiation channel is saturated. This means that the concentration of small centers sets a lower limit to the densities $\overline{n}_{e,h}$ at which biexciton radiation is observed in the experimental spectrum. The upper limit on $\overline{n}_{e,h}$ is set by screening of the Coulomb interaction with respect to the weakly bound state. For example, if, as a result of screening effects, the exciton bound state disappears from the spectrum at concentrations of nonequilibrium electron-hole pairs corresponding to the dimensionless parameter $r_{c} \sim 2-3$, the biexciton bound state must break down at significantly smaller concentrations when $r_c \gtrsim 10$.

Taking as an example the CdS crystal, the least flawed by the II-VI group, the content of small donor impurities in the purest samples is $n_d \sim 10^{15}$ cm⁻³. At he-lium temperatures the biexciton bound state in the crystals disappears as a result

of screening effects at $n_{e,h} \sim 10^{16}$ cm⁻³. This means that the experimental situation is unfavorable for the detection of biexciton radiation in CdS.

The complications arising because the radiative decay of exciton-impurity complexes predominates in the spectra may easily be eliminated in high-purity Ge and Si broad-band semiconductors. Modern techniques allow atomic Ge and Si semiconductors to be produced with smaller concentrations of electrically active impurities than has previously been possible — 10^{10} cm⁻³ for Ge and 10^{12} for Si. However, another problem arises in Ge and Si, in that biexcitons are much less stable than an EHL in these crystals. Thus, the biexciton gas is strongly dissociated even at the densities of the saturated exciton gas at which condensation to a liquid occurs. The concentration n_M of biexcitons in thermodynamic equilibrium with an exciton gas of density n_{ex} may be estimated from the formula

$$n_{M} = n_{ex}^{2} \left(\frac{4\pi\hbar^{2}}{kTm_{ex}} \right)^{3/2} \left(\frac{g_{M}}{g_{ex}^{2}} \right) \exp\left(\frac{\Delta}{kT} \right), \tag{9.1}$$

where g_{ex} and g_M are the statistical weights of excitons and biexcitons; m_{ex} is the effective mass of the exciton state density; Δ is the biexciton binding energy. If experimental values for the exciton-gas saturation vapor density n_{ex} obtained using the phase diagram found by Dite *et al.* [40] and the value $\Delta = 0.4$ meV obtained by variational calculations [105] are substituted in Eq. (9.1), the ratio $n_M/n_{ex} \sim 10^{-2}$. Estimates show that in Ge crystals the partial pressure of biexcitons in the nonequilibrium electron-hole gas is even less. Thus it may be understood why there have yet to be reliable observations of biexciton radiation in Ge and Si after such a long time.

The conditions for the experimental observation of biexcitons in these crystals are much more favorable if uniaxial elastic stress is present. It is known that in Ge and Si uniaxial strain removes the degeneracy in the bands and as a result there is an increase in the mean kinetic energy per pair of particles in the EHL. As a result the EHL binding energy decreases and the gas–liquid equilibrium line is shifted markedly toward high densities of the saturated exciton gas. Simple calculations assuming thermodynamic equilibrium show that in Si deformed along $\langle 100 \rangle$ and Ge deformed along $\langle 111 \rangle$ the partial pressures of excitons and biexcitons are at least of the same order along the gas–liquid equilibrium line.

The radiative decay of a biexciton has been observed in the spectra of Si elastically deformed along the axis $\langle 100 \rangle$ [111, 33]. In the spectra of high-purity crystals of Si (2-1) with a boron-atom content of $n_a \sim 10^{12}$ cm⁻³ at high intensities of pulsed and steady excitation and low temperatures, a new emission line corresponding to biexciton annihilation appears at $P \gtrsim 20$ kgf/mm².

The development of Si(2-1) recombination in steady laser excitation ($\lambda = 1.064 \mu$) at T = 1.8 K is of more interest (Figure 8). Using a laser based on an aluminium-yttrium garnet, volume excitation may be produced in deformed Si crystals at P > 20 kgf/mm². The spectra in Figure 8 correspond to mean exciton

concentrations of 10^{14} – $8 \cdot 10^{14}$ cm⁻³. At minimum pumping only free-exciton (FE) radiation and that of excitons bound at neutral boron atoms (BE) is seen. With increase in intensity of the excitation, saturation of the BE-line intensity is observed. The M line which then appears increases in proportion to the square of the exciton-line intensity (the inset in Figure 8), which is direct confirmation of its molecular origin.



Figure 8. Emission spectra of excitons (FE) and biexcitons (M) in Si (2-1) ($P \sim 45 \text{ kgf/mm}^2$, T = 1.8 K) for a mean concentration of nonequilibrium electron–hole pairs in the range 10^{14} – 10^{15} cm^{-3} . The inset shows the dependence $I_M(I_{FE})$ in logarithmic coordinates; the straight line corresponds to $I_M \sim I_{FE}^2$.

At $\overline{n} > 10^{15}$ cm⁻³ and T = 1.8 K the ratio of FE and M line intensities no longer depends on the pumping. With increase in pressure and constant pumping, the spectrum is shifted toward lower energies and there is an increase in the absorption coefficient in the region of the wavelength of the exciting light and of course also in the mean density of electron–hole pairs produced. At P > 50 kgf/cm² the ratio of M and FE line intensities remains unchanged and approximately equal to the ratio I_M/I_{FE} for pulse excitation. This is associated with the condensation of the exciton and biexciton gas to an EHL, which occurs at $\overline{n}_{ex} \sim 10^{15}$ cm⁻³ and T = 1.8 K. Thus, it follows from these experiments that in Si (2-1) the exciton and biexciton partial pressures in the saturated gas phase are in fact of the same order.

In the case of indirect biexciton annihilation considered, an exciton, a phonon, and a photon are created, in accordance with the conservation law

$$E_{\mathbf{K}}^{M} = E_{\kappa}^{FE} + \hbar\Omega + h\nu.$$
(9.2)

Even for a biexciton that is initially at rest the corresponding luminescence line has a finite width, associated with the consumption of part of the biexciton energy in imparting kinetic energy to the exciton that is created. Overall, the line for indirect biexciton decay is radically different in shape from the case of phononless biexciton emission in a narrow-band semiconductor.

The line width for the emission of an indirect biexciton may be estimated on the basis of the following considerations. Since the biexciton wave function has a characteristic dimension of the order of the exciton radius a_{ex} , it is natural to assume that the matrix element of the moment of the radiative transition $M(\mathbf{K}, \kappa)$ is significant when $|\mathbf{K}/2 - \kappa| \lesssim a_{ex}^{-1}$, where **K** and κ are the biexciton and exciton momenta. Then the characteristic energy of exciton removal, determining the linewidth, is $\hbar^2/2ma_{ey}^2$. Hence the biexciton-emission linewidth Γ is of order

$$\Gamma \sim \frac{\mu}{m_{ex}} E_{ex},\tag{9.3}$$

where μ and m_{ex} are the reduced and translational masses of the exciton, and E_{ex} is the exciton Rydberg.

Kulakovskii *et al.* have made a detailed calculation of the biexciton-annihilation amplitude [33]. The transition matrix element was found using a standard procedure in second-order perturbation theory (interaction with phonons and electromagnetic fields): after simple transformations it was brought to the form

$$M(\mathbf{P}/\mathbf{q},\mathbf{Q}) \sim \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h \psi^{\mathbf{P}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_e | \mathbf{r},\mathbf{r}_h) e^{-iqr} \psi^{*\mathbf{Q}}(\mathbf{r}_e | \mathbf{r}_h), \qquad (9.4)$$

where $\psi^{\mathbf{P}}$, e^{-iqr} , and $\psi^{\mathbf{Q}}$ are the biexciton, phonon, and exciton wave functions. In the derivation it was assumed that the electron and hole spin functions in the biexciton are antisymmetric under the exchange of two electrons or two holes, and the coordinate functions are symmetric. Equation (9.4) is a generalization of the well-known Elliott formula [112] for the exciton-annihilation amplitude, proportional to $\psi_{ex}(0)$, and has a simple physical interpretation. In fact, Eq. (9.4) is evidently the amplitude of the probability that one electron and one hole will be found at the same point in the biexciton while the other electron and hole form an exciton with wave function $\psi^{\mathbf{Q}}$.

From the translational invariance of the exciton and biexciton in the effective-mass method, it follows that $M(\mathbf{P} | \mathbf{q}, \mathbf{Q})$ contains $\delta(\mathbf{P} - \mathbf{q} - \mathbf{Q})$, i.e., the quasimomentum-conservation law is satisfied. In addition, since the internal motion in the exciton and the biexciton is independent of the motion of the center of gravity, the function $M(\mathbf{P} | \mathbf{q}, \mathbf{Q})$ will only depend, after the removal of the δ function, on a linear combination of the two remaining independent vectors

$$M(\mathbf{P}|\mathbf{q},\mathbf{Q}) = \delta(\mathbf{P}-\mathbf{q}-\mathbf{Q})N(\mathbf{Q}-\frac{\mathbf{P}}{2}).$$
(9.5)

Kulakovskii *et al.* determined *M* explicitly using the wave function of the biexciton ground state corresponding to the best of the known variational approximations. Substitution of expressions for the biexciton and exciton wave functions into Eq. (9.4) and numerical integration leads to the function *N*. It was found that practically the whole of the function *N* (and hence the important values for the matrix element *M*) is concentrated in the region $ka_{ex} \leq 1$, which is consistent with the above estimate for Γ .



Figure 9. Comparison of calculated (points) and experimental (curve) biexciton emission spectrum in Si (2-1) and also exciton (FE) emission spectrum recorded at a low exciton intensity when $\overline{n} \sim 10^{13}$ cm⁻³ and T = 1.8 K.

If the dispersion of the phonon (for Si, the TO phonon) is neglected, the probability for the emission of light with frequency ω is

$$w(\hbar\omega) \sim \int dP dQ \exp\left(\frac{-p^2}{8mkT}\right) N^2 \left(\left|Q - \frac{P}{2}\right|\right) \delta\left(E_P^M - E_Q^{FE} - \hbar\omega - \hbar\Omega\right).$$
(9.6)

At low temperatures such that the mean thermal momentum of the biexciton $\langle P \rangle$ satisfies the inequality $\langle P \rangle a_{ex} \ll 1$, it is evident from Eq. (9.6) that the line shape is given by the expression

$$w(\hbar\omega) \sim |Q| N^2(Q),$$
 (9.7)

where $Q^2/4m = E^{FE} - \hbar\Omega - \Delta - \hbar\omega$. The experimental shape of the biexciton emission line in Si (2-1) at T = 1.8 K is shown in Figure 9, together with the theoretical approximation by Eq. (9.7) using the value of *N* calculated by Kulakovskii *et*

al. [33] The result assumes an exciton binding energy of 12 meV [5], $a_{ex} = 52.5$ Å, and a binding energy $\Delta = 0.4$ meV. The agreement between experiment and theory is completely satisfactory. It should be emphasized that to estimate the biexciton binding energy by using some model expression for $M(\mathbf{P} | \mathbf{q}, \mathbf{Q})$ to fit the experimental curve* is logically incorrect. In fact, it is evident from Eq. (9.7) that both the shape of the line and the binding energy are uniquely determined by the biexciton wave function, and hence are not independent. Therefore it is absolutely impossible to determine the true biexciton binding energy on the basis of an analysis of the line shape.

The biexciton binding energy may only be estimated experimentally from the temperature dependence of the intensity ratio for the exciton and biexciton lines. Assuming thermodynamic equilibrium in the gas phase, measurements of this kind in the range T = 2-4.2 K lead to a value for the biexciton binding energy in Si (2-1) of $\Delta = 0.55 \pm 0.15$ meV. It should be emphasized that, despite this small value of Δ , the spectral distance between the maxima of the exciton and biexciton emission lines in Si (2-1) is fairly large (~ 2 meV), in accordance with Eq. (9.6). In this sense, conditions for biexciton detection in emission spectra are less favorable in Ge (1-1) crystals not only because the binding energy Δ is smaller, but also because the expected distance between the exciton and biexciton lines is too small (~ 0.3 meV).

Note finally that the gas phase may also include molecular ions (analogs of H_2^+ and H^-). The available variational calculations demonstrate the stability of such mobile complexes [114]. Since the binding energy of such particles is much less than that of the biexciton, the conditions for their spectroscopic detection are extremely difficult. It may be expected *a priori* that the emission linewidth for such particles will be greater than that of the biexciton line by a factor $(m_e + m_b)/m_{e,b}$.

10. Conclusion

In recent years there has been considerable progress in understanding the condensation of excitons and nonequilibrium charge carriers into an electron-hole liquid in semiconductors. This is evident both in the abundance of experimental data and in the development of theoretical methods of quantitative description of the important effects observed. It is significant that the experimental and theoretical results in a number of the most fundamental problems are in good agreement. Interest in this subject has not developed by chance: it is associated, in particular, with the unique possibility of modeling the properties of materials in extreme conditions. Since the characteristic energy and density scales of an electron-hole liquid are much less than those of atomic liquids, it is possible to investigate effects which occur in ordinary materials at very high densities, under

^{*} Cho suggested a model expression of the form $M \sim [(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k})^2 + a_{ex}^{-2}]^{-2}$ [113].

superstrong external perturbations, etc. In contrast to an electron gas in materials, an electron–hole liquid in semiconductors offers the possibility of the direct comparison with experiment of many-body methods of theoretical calculation. However, an electron–hole liquid in a semiconductor also has significant differences from electron–ion metal systems — above all, as a result of the small difference in effective mass between electrons and holes ($\sigma \sim 0.1-1$), which evidently excludes the possibility of spatial ordering in the condensed phase.

At present, there remain a number of unsolved problems in the physics of electron-hole liquids. One is associated with the stability of a dielectric condensed phase of excitons, the existence of which has yet to be experimentally confirmed. This leaves unclear certain aspects of phase transitions in a nonequilibrium electron-hole system and raises questions as to the stability and spectral properties of EHL in narrow-band semiconductors. Also, there has been little success in establishing the mechanism by which an EHL drop interacts with the crystal lattice. What is in no doubt that one of the most promising aspects of the experimental investigation of EHL properties is associated with media with an extremely anisotropic electronic spectrum.

REFERENCES

- 1. Keldysh, L.V. Concluding remarks // Proceedings of the 9th International Conference on the Physics of Semiconductors. Leningrad : Nauka, 1968. P. 1303–1310.
- 2. Pokrovskii, Ya.E. Condensation of non-equilibrium charge carriers in semiconductors // Physica Status Solidi (a). – 1972. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 385–410.
- 3. Rogachev, A.A. Exciton condensation in germanium // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. Berlin : Springer, 1975. P. 127–148.
- 4. Combescot, M. Condensation of excitons in germanium and silicon / M. Combescot, P. Nozieres // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1972. Vol. 5, Iss. 17. P. 2369–2391.
- 5. Brinkman, W.F. Electron-hole liquids in semiconductors / W.F. Brinkman, T.M. Rice // Physical Review B. 1973. Vol. 7, Iss. 4. P. 1508–1523.
- 6. Andryushin, E.A. Equilibrium properties of the electron-hole liquid in semiconductors / E.A. Andryushin, A.P. Silin // Low Temperature Physics. – 1977. – Vol. 3, Iss. 11. – P. 1365–1394. (in Russian)
- 7. Rice, T.M. Quasi-particle properties in an electron-hole liquid // Nuovo Cimento B. – 1974. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 226–233.
- 8. Gell-Mann, M. Correlation energy of an electron gas at high density / M. Gell-Mann, K.A. Brueckner // Physical Review. 1957. Vol. 106, Iss. 2. P. 364–368.
- 9. Vashishta, P. Electron-hole liquid in Ge-Si alloys / P. Vashishta, S.G. Das, K.S. Singwi // Physical Review B. 1976. Vol. 13, Iss. 10. P. 4490–4493.
- Kuramoto, Y. Theory of two-dimensional electron-hole liquids application to layertype semiconductors / Y. Kuramoto, H. Kamimura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 37, Iss. 3. – P. 716–723.
- 11. Andryushin, E.A. Energy of ground state of laminar electron-hole liquid // Solid State Physics. 1976. Vol. 18, Iss. 9. P. 2493–2498. (in Russian)

- Andryushin, E.A. On the theory of the collective phenomena in quasi-two-dimensional semiconductors / E.A. Andryushin, A.P. Silin // Solid State Communications. 1976. Vol. 20, Iss. 5. P. 453–456.
- Combescot, M. Ground state of electron-hole droplets // Physical Review B. 1974. Vol. 10, Iss. 12. – P. 5045–5048.
- 14. Andryushin, E.A. Two-dimensional electron-hole liquid / E.A. Andryushin, A.P. Silin // Solid State Physics. 1976. Vol. 18, Iss. 7. P. 2130–2132. (in Russian)
- Vashishta, P. Ground-state energy calculation of the electron-hole liquid in semiconductors / P. Vashishta, P. Bhattacharyya, K.S. Singwi // Nuovo Cimento B. – 1974. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 172–201.
- 16. Vashishta, P. Thermodynamics of the electron-hole liquid in Ge, Si, and GaAs / P. Vashishta, S.G. Das, K.S. Singwi // Physical Review Letters. 1974. Vol. 33, Iss. 15. P. 911–914.
- 17. Singwi, K.S. Electron correlations at metallic densities. IV / K.S. Singwi et al. // Physical Review B. 1970. Vol. 1, Iss. 3. P. 1044–1053.
- 18. Keldysh, L.V. Electron-hole fluid in polar semiconductors / L.V. Keldysh, A.P. Silin // JETP. 1975. Vol. 42, Iss. 3. P. 535–537.
- 19. Beni, G. Electron-hole liquids in polar semiconductors / G. Beni, T.M. Rice // Physical Review Letters. 1976. Vol. 37, Iss. 13. P. 874–877.
- 20. Lysenko, V.G. Radiative recombination of a non-equilibrium electron-hole plasma in CdS crystals / V.G. Lysenko et al. // JETP. 1975. Vol. 41, Iss. 1. P. 163–168.
- 21. Leheny, R.F. Experimental evidence for the existence of an electron-hole liquid in II–VI compounds / R.F. Leheny, J. Shah // Physical Review Letters. 1976. Vol. 37, Iss. 13. P. 871–874.
- Müller, G.O. Electron-hole liquid in CdS crystals as revealed by non-equilibrium transmission spectroscopy / G.O. Müller et al. // Solid State Communications. 1977. Vol. 21, Iss. 2. P. 217–219.
- Keldysh, L.V. Possible instability of the semimetal state concerning the Coulomb interaction / L.V. Keldysh, Yu.V. Kopaev // Solid State Physics. 1964. Vol. 6, Iss. 9. P. 2791–2798. (in Russian)
- 24. Keldysh, L.V. Collective properties of excitons in semiconductors // Excitons in semiconductors / ed. by B.M. Vul. – Moscow : Nauka, 1971. – Ch. 2. – P. 5–18. (in Russian)
- 25. Keldysh, L.V. Dielectric electron-hole liquid in semiconductors / L.V. Keldysh, A.P. Silin // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. – 1975. – № 8. – P. 33–38. (in Russian)
- Silin, A.P. Dielectric electron-hole liquid in semiconductors // Solid State Physics. 1977. – Vol. 19, Iss. 1. – P. 134–140. (in Russian)
- 27. Klyuchnik, A.V. Two-dimensional dielectric electron-hole liquid / A.V. Klyuchnik, Yu.E. Lozovik // Solid State Physics. –1978. Vol. 20, Iss. 2. C. 625–627. (in Russian)
- Keldysh, L.V. Electron liquid in a superstrong magnetic field / L.V. Keldysh, T.A. Onishchenko // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 59–62.
- 29. Andryushin, E.A. Electron-hole liquid in strongly anisotropic semiconductors and semimetals / E.A. Andryushin et al. // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 4. – P. 185–189.
- Andryushin, E.A. Electron-hole liquid in layered semiconductors / E.A. Andryushin, A.P. Silin // Solid State Physics. – 1977. – Vol. 19, Iss. 5. – P. 1405–1409. (in Russian)
- Andryushin, E.A. Electron-hole liquid and the metal-dielectric phase transition in layered systems / E.A. Andryushyn, L.V. Keldysh, A.P. Silin // JETP. – 1977. – Vol. 46, Iss. 3. – P. 616–621.
- 32. Onishchenko, T.A. Thermodynamics of electron-hole liquid in a super-strong magnetic field // Soviet Physics Doklady. – 1977. – Vol. 235, Iss. 1. – P. 78–81. (in Russian)
- Kulakovskii, V.D. Electron-hole liquid and exciton and biexciton gas in elastically deformed silicon crystals / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev, V.M. Edel'shtein // JETP. – 1978. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 193–199.

- 34. Störmer, H.L. Magnetic field induced polarization of electron-hole drop luminescence / H.L. Störmer, R.W. Martin, J.C. Hensel // Proceedings of the 13th International Conference on the Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. – 1976. – Amsterdam : North-Holland, 1976. – P. 950–953.
- 35. Abrikosov, A.A. Methods of quantum field theory in statistical physics / A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, I.E. Dzyaloshinskii. Moscow : Fizmatlit, 1962. 443 p. (in Russian)
- 36. Brinkman, W.F. Coulomb effects on the gain spectrum of semiconductors / W.F. Brinkman, P.A. Lee // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 4. P. 237–240.
- Rice, T.M. Theory of electron-hole fluid // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.N. Pulkuhn. – Stuttgart : B.G. Teubner, 1974. – P. 23–32.
- Thomas, G.A. Liquid-gas phase diagram of an electron-hole fluid / G.A. Thomas, T.M. Rice, J.C. Hensel // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 33, Iss. 4. – P. 219–222.
- Hammond, R.B. Temperature dependence of the electron-hole-liquid luminescence in Si / R.B. Hammond, T.C. McGill, J.W. Mayer // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, Iss. 8. – P. 3566–3575.
- 40. Dite, A.F. Gas-liquid phase diagram in a nonequilibrium electron-hole system in silicon / A.F. Dite, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP. –1977. Vol. 45, Iss. 3. P. 604–612.
- 41. Mahler, G. Theory of the phase diagram of highly excited semiconductors // Physical Review B. 1975. Vol. 11, Iss. 10. P. 4050–4053.
- 42. Zimmermann, R. Theory of electron-hole plasma in CdS / R. Zimmermann, M. Rösler // Physica Status Solidi (b). 1976. Vol. 75, Iss. 2. P. 633–645.
- 43. Combescot, M. Estimation of the critical temperature of electron-hole droplets in Ge and Si // Physical Review Letters. 1974. Vol. 32, Iss. 1. P. 15–17.
- 44. Norman, G.E. Thermodynamics of a strongly non-ideal plasmas / G.E. Norman, A.N. Starostin // High temperature. 1970. Vol. 8, Iss. 2. P. 381–408.
- 45. Kraeft, W.D. Quantum statistics of an electron-hole plasma / W.D. Kraeft, K. Kilimann, D. Kremp // Physica Status Solidi (b). 1975. Vol. 72, Iss. 2. P. 461–474.
- 46. Ebeling, W. Coexisting phases in an electron-hole plasma / W. Ebeling et al. // Physica Status Solidi (b). 1976. Vol. 78, Iss. 1. P. 241–253.
- 47. Bagaev, V.S. Kinetics of exciton condensation in germanium / V.S. Bagaev et al. // JETP. 1976. Vol. 43, Iss. 4. P. 783–793.
- Reinecke, T.L. Droplet model of electron-hole liquid condensation in semiconductors / T.L. Reinecke, S.C. Ying // Physical Review Letters. – 1975. – Vol. 35, Iss. 5. – P. 311–315.
- Dite, A.F. The kinetics of recombination radiation and the temperature of the electron-hole plasma in silicon / A.F. Dite, V.G. Lysenko, V.B. Timofeev // Physica Status Solidi (b). 1974. Vol. 66, Iss. 1. P. 53–62.
- Asnin, V.M. Biexciton luminescence polarization in uniaxially deformed germanium / V.M. Asnin et al. // JETP Letters. – 1973. – Vol. 18, Iss. 4. – P. 144–146.
- 51. Asnin, V.M. Erratum to "V.M. Asnin et al."// JETP Letters. 1973. Vol. 18, Iss. 4. P 144–146 // JETP Letters. 1973. Vol. 18, Iss. 12. P. 699.
- Asnin, V.M. Polarization of exciton and biexciton luminescence in deformed germanium / V.M. Asnin et al. // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.N. Pulkuhn. – Stuttgart : B.G. Teubner, 1974. – P. 96–100.
- Alekseev, A.S. Polarization of low temperature photoluminescence induced in germanium by deformation / A.S. Alekseev, T.I. Galkina, N.A. Penin // JETP Letters. – 1974. – Vol. 19, Iss. 7. – P. 236–237.
- Pokrovskii, Ya.E. Exciton and electron-hole-drop radiation polarization induced in germanium by uniaxial compression / Ya.E. Pokrovskii, K.I. Svistunova // JETP. – 1975. – Vol. 41, Iss. 6. – P. 1161–1163.

- Thomas, G.A. Electron-hole liquid in germanium under infinite uniaxial compression / G.A. Thomas, Ya.E. Pokrovskii // Physical Review B. –1978. – Vol. 18, Iss. 2. – P. 864– 870.
- Vashishta, P. Electron-hole liquid in many-band systems. I. Ge and Si under large uniaxial strain / P. Vashishta, P. Bhattacharyya, K.S. Singwi // Physical Review B. – 1974. – Vol. 10, Iss. 12. – P. 5108–5126.
- Bir, G.L. Heavy and light excitons and polarization of recombination radiation in deformed germanium / G.L. Bir, G.E. Pikus // Solid State Physics. – 1976. – Vol. 18, Iss. 1. – P. 220–229. (in Russian)
- 58. Alkeev, N.V. Intrinsic radiative recombination in deformed silicon // N.V. Alkeev, A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // Solid State Physics. – 1976. – Vol. 18, Iss. 3. – P. 713– 719. (in Russian)
- Alkeev, N.V. Spectrum and polarization of recombination radiation in deformed silicon / N.V. Alkeev, A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. – 1973. – Vol. 18, Iss. 11. – P. 393–395.
- 60. Pikus, G.E. Polarization of excitonic radiation of silicon under action of magnetic field or uniaxial deformation // Solid State Physics. 1977. Vol. 19, Iss. 6. P. 1653–1664. (in Russian)
- Markiewicz, R.S. Microwave dimensional resonances in large electron-hole drops in germanium / R.S. Markiewicz, J.P. Wolfe, C.D. Jeffries // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 32, Iss. 24. – P. 1357–1360.
- 62. Jeffries, C.D. Strain-confined electron-hole liquid in germanium / C.D. Jeffries, J.P. Wolfe, R.S. Markiewicz // Proceedings of the 13th International Conference on the Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. Amsterdam : North-Holland, 1976. P. 879–888.
- 63. Pokrovskii, Ya.E. Infrared probing of a large electron-hole drop in germanium / Ya.E. Pokrovskii, K.I. Svistunova // JETP Letters. 1976. Vol. 23, Iss. 2. P. 95–97.
- 64. Pokrovskii, Ya.E. Infrared scanning of electron-hole drops in stressed Ge / Ya.E. Pokrovskii, K. Svistunova // Proceedings of the 13th International Conference on the Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. 1976. Amsterdam : North-Holland, 1976. P. 849–852.
- 65. Manenkov, A.A. Observation and determination of the parameters of large electronhole drops in germanium by means of microwave conductivity / A.A. Manenkov et al. // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 3. – P. 122–125.
- 66. Alekseev, A.S. Electron-hole drops in Ge in the field of wave of elastic deformation / A.S. Alekseev, T.I. Galkina // Solid State Physics. – 1976. –Vol. 18, Iss. 7. – P. 2005– 2010. (in Russian)
- 67. Keldysh, L.V. Ultrasound absorption by electron-hole drops in semiconductors / L.V. Keldysh, S.G. Tikhodeev // Solid State Physics. 1977. Vol. 19, Iss. 1. P. 111–117. (in Russian)
- Ashkinadze, B.M. Effect of crystal lattice on the equilibrium shape of electron-hole drops / B.M. Ashkinadze, A.V. Subashiev, I.M. Fishman // JETP Letters. – 1977. – Vol. 26, Iss. 1. – P. 1–3.
- 69. Bagaev, V.S. Dragging of excitons and electron-hole drops by phonon wind / V.S. Bagaev et al. // JETP. 1976. Vol. 43, Iss. 2. P. 362–370.
- Keldysh, L.V. Phonon wind and dimensions of electron-hole drops in semiconductors // JETP Letters. – 1976. – Vol. 23, Iss. 2. – P. 86–89.
- 71. Durandin, A.D. Electron-hole drop motion due to mutual repulsion forces / A.D. Durandin et al. // JETP Letters. 1977. Vol. 26, Iss. 5. P. 272–275.
- 72. Astemirov, T.A. Dispersion of electron-hole droplets in Ge / T.A. Astemirov et al. // JETP Letters. 1977. Vol. 26, Iss. 5. P. 200–203.

- 73. Astemirov, T.A. Flying away electron-hole drops at uniaxial deformation of crystals Ge / T.A. Astemirov et al. // Solid State Physics. 1977. Vol. 19, Iss. 3. P. 937–939. (in Russian)
- 74. Ashkinadze, B.M. Registering of scattering of electron-hole drops in Ge by the method of SHP probing / B.M. Ashkinadze, I.M. Fishman // Physics and Technics of Semiconductors. – 1977. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 301–304. (in Russian)
- 75. Ashkinadze, B.M. Kinetics of emission and scattering of electron-hole drops in Ge / B.M. Ashkinadze, I.M. Fishman // Physics and Technics of Semiconductors. – 1977. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 408–414. (in Russian)
- 76. Asnin, V.M. Circular polarization of recombination of germanium in magnetic field / V.M. Asnin et al. // Solid State Physics. – 1976. – Vol. 18, Iss. 7. – P. 2011–2018. (in Russian)
- Altukhov, P.D. Circular polarization of recombination radiation of silicon in a magnetic field at a high excitation level / P.D. Altukhov, G.E. Pikus, A.A. Rogachev // JETP Letters. 1976. Vol. 23, Iss. 11. P. 582–586.
- Altukhov, P.D. Nonequilibrium orientation of electrons in electron-hole drops in silicon in a magnetic field / P.D. Altukhov, G.E. Pikus, A.A. Rogachev // JETP Letters. – 1977. – Vol. 25, Iss. 3. – P. 141–144.
- 79. Asnin, V.M. Polarization of exciton luminescence in an external magnetic field / V.M. Asnin et al. // JETP. 1976. Vol. 44, Iss. 4. P. 838–843.
- Dite, A.F. Quantum oscillations of the intensity of induced radiation of an electronhole liquid in CdS crystals / A.F. Dite, V.B. Timofeev // JETP Letters. – 1977. – Vol. 25, Iss. 1. – P. 42–46.
- Kaminskii, A.S. Eddy currents in electron-hole drops in germanium / A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 6. – P. 300–303.
- Kaminskii, A.S. Interaction of electron-hole drops in germanium with constant and alternating magnetic fields / A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii, A.E. Zhidkov // JETP. – 1977. – Vol. 45, Iss. 5. – P. 1030–1035.
- Gurnee, M.N. Dependence on plasma density of the conductivity of an electron-hole plasma in germanium at 2 K / M.N. Gurnee, M. Glicksman, P. Won Yu // Solid State Communications. – 1972. – Vol. 11, Iss. 1. – P. 11–14.
- Kaminskii, A.S. Recombination magnetism of electron-hole drops / A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. – 1975. – Vol. 21, Iss. 7. – P. 197–198.
- 85. Wolfe, J.P. Magnetostriction of an electron-hole drop in Ge / J.P. Wolfe et al. // Physica Status Solidi B. Vol. 83, Iss. 1. P. 305–312.
- Kononenko, V.L. Change of carrier density in electron-hole drops in germanium in a magnetic field / V.L. Kononenko, V.N. Murzin // JETP Letters. – 1976. – Vol. 24, Iss. 11. – P. 548–551.
- 87. Kononenko, V.L. On the shape of electron-hole drops in magnetic field / V.L. Kononenko // Solid State Physics. – 1977. – Vol. 19, Iss. 10. – P. 3010–3017. (in Russian)
- Kaminskii, A.S. Deformation of electron-hole drops in a magnetic field // JETP. 1977. – Vol. 46, Iss. 4. – P. 788–790.
- 89. Gavrilenko, V.I. Plasma resonance determination of carrier concentration in electronhole drops in Ge / V.I. Gavrilenko, V.L. Kononenko, V.N. Murzin // Low Temperature Physics. – 1976. – Vol. 18, Iss. 6. – P. 1753–1754. (in Russian)
- Gavrilenko, V.I. Magnetoplasma resonance in electron-hole drops in germanium at submillimeter wavelengths / V.I. Gavrilenko et al. // JETP Letters. – 1976. – Vol. 23, Iss. 12. – P. 645–648.
- 91. Zayats, V.A. Effect of electron-hole drop size in germanium on the absorption and scattering of radiation in the far infrared region of the spectrum / V.A. Zayats et al. // JETP. – 1977. – Vol. 46, Iss. 4. – P. 748–753.

- Gavrilenko, V.I. Experimental observation of magnetodipole resonances in electronhole drops in germanium / V.I. Gavrilenko et al. // JETP Letters. – 1977. – Vol. 26, Iss. 2. – P. 95–99.
- 93. Bragina, T.M. Plasma appearance in system of electron-hole drops at high level of excitation / T.M. Bragina, K.P. Konin, Yu.G. Shreter // Solid State Physics. – 1977. – Vol. 19, Iss. 6. – P. 1872–1874. (in Russian)
- 94. Bragina, T.M. Resonant emission of electron-hole drops at plasma frequency / T.M. Bragina, V.A. Kosobukin, Yu.G. Shreter // JETP Letters. – 1977. – Vol. 25, Iss. 11. – P. 492-494.
- 95. Hylleraas, E.A. Binding energy of the positronium molecule / E.A. Hylleraas, A. Ore // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 8. P. 493–496.
- 96. Ore, A. Structure of the quadrielectron // Physical Review. 1947. Vol. 71, Iss. 12. P. 913.
- Lampert, M.A. Mobile and immobile effective-mass-particle complexes in nonmetallic solids // Physical Review Letters. – 1958. – Vol. 1, Iss. 12. – P. 450–453.
- 98. Moskalenko, S.A. The theory of Mott exciton in alkali halide crystals // Optics and Spectroscopy. 1958. Vol. 5, Iss. 2. P. 147–155. (in Russian)
- 99. Sharma R.R. Binding energy of the excitonic molecule // Physical Review. 1968. Vol. 170, Iss. 3. P. 770–772.
- 100. Sharma, R.R. Binding energy of the positronium molecule // Physical Review. 1968. Vol. 171, Iss. 1. P. 36–42.
- 101. Wehner, R.K. On the excitonic molecule // Solid State Communications. 1969. Vol. 7, Iss. 5. P. 457–458.
- 102. Adamowski, J. Binding energy of the biexcitons in isotropic semiconductors / J. Adamowski, S. Bednarek, M. Suffczynski // Philosophical Magazine. – 1972. – Vol. 26. – P. 143–151.
- 103. Akimoto, O. Binding energy of the excitonic molecule / O Akimoto, E. Hanamura // Solid State Communications. 1972. Vol. 10, Iss. 3. P. 253–255.
- 104. Akimoto, O. Excitonic molecule. I. Calculation of the binding energy / O. Akimoto, E. Hanamura // Journal of the Physical Society of Japan. –1972. – Vol. 33, Iss. 6. – P. 1537–1544.
- 105. Brinkman, W.F. The excitonic molecule / W.F. Brinkman, T.M. Rice, B. Bell // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 1570–1580.
- 106. Hanamura, E. Giant two-photon absorption due to excitonic molecule // Solid State Communications. 1973. Vol. 12, Iss. 9. –P. 951–953.
- 107. Gogolin, A.A. Effect of exciton interaction on exciton spectra / A.A. Gogolin, E.I. Rashba // JETP Letters. 1973. Vol. 17, Iss. 12. P. 478–479.
- 108. Gogolin, A.A. Effect of biexcitons on edge absorption and luminescence // Solid State Physics. 1973. Vol. 15, Iss. 9. P. 2746–2756.
- 109. Rashba, E.I. Giant oscillation strengths related with exciton complexes // Physics and Technics of Semiconductors. 1974. Vol. 8, Iss. 7. P. 11241–1256. (in Russian)
- 110. Proceedings of Oji Seminar on Physics of Highly Excited States in Solids, 1975 / ed. by M. Ueta, Y. Nishina. Berlin : Springer-Verlag, 1976.
- 111. Kulakovskii, V.D. Biexcitons in the emission spectrum of uniaxially deformed silicon / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1977. Vol. 25, Iss. 10. P. 458–461.
- 112. Elliott, R.J. Intensity of optical absorption by excitons // Physical Review. 1957. Vol. 108, Iss. 6. P. 1384–1389.
- 113. Cho, K. Emission line shapes of exciton molecules in direct and indirect gap materials // Optics Communications. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 412–416.
- 114. Insepov, Z.A. Three-particle charged electron-hole complexes in semiconductors / Z.A. Insepov, G.E. Norman // JETP. 1975. Vol. 42, Iss. 4. P. 674–675.

THERMODYNAMICS OF ELECTRON-HOLE LIQUID IN SEMICONDUCTORS*

V.D. Kulakovskii and V.B. Timofeev

1. Introduction

Condensation of excitons into a metallic electron-hole liquid (EHL) predicted by Keldysh (1968) paved the way for a new trend of investigations and up to now it is one of the basic, and most intensively developing branches in solid state physics. Condensation of excitons into the EHL was found to occur in atomic semiconductors Ge and Si (Asnin and Rogachev 1969, Pokrovskii and Svistunova 1969, Vavilov et al. 1969, Bagaev et al. 1969). Already in these pioneering works this phenomenon was demonstrated to be a first-order phase transition. An important feature of the phase transition being considered is that condensation takes place in an electron-hole system (e-h system) which is a nonequilibrium in principle due to the finite lifetime of carriers. The condensed phase is in itself a two-component Fermi liquid where – because of screening effects – excitons lose their individuality, whereas almost free electrons and holes are held by Coulomb forces. The EHL in semiconductors is a unique model object: it is very convenient for experimental checking of various theoretical approximations for the many-body problem. The EHL in semiconductors has made possible in principle modelling the properties of a substance in extreme conditions (strong compression, extreme anisotropy of the electronic spectrum, etc.). Important aspects of condensation of excitons, and the main properties and methods of investigating the EHL in atomic semiconductors Ge an Si are discussed in excellent reviews by Keldysh (1971), Pokrovskii (1972), Jeffries (1975), Bagaev (1975), Voos and Benoit a la Guillaume (1975), Rice (1977), Hensel et al. (1977).

Recently some new directions and trends have appeared in this field. First, the number of semiconductors in which the EHL was found has increased appreciably. We refer primarily to semiconducting compounds, for example, $A_{II}-B_{VI}$, $A_{III}-B_{V}$, etc., which are characterized by a mixed ionic-covalent bonding. In the case of semiconducting compounds vast opportunities arise for varying the parameters to which the EHL stability is sensitive, and which have an appreciable effect on the magnitude of the binding energy, equilibrium density and critical temperature of the condensed phase. Such parameters include the degree of orbital degeneracy

^{*} Electron-Hole Droplets in Semiconductors / ed. by C.D. Jeffries, L.V. Keldysh // Modern Problems in Condensed Matter Sciences / ser. ed. by V.M. Agranovich, A.A. Maradudin. – Amsterdam : North-Holland, 1983. – Vol. 6, Ch. 2. – P. 95–186.

of the energy spectrum, effective masses of carriers, their ratio and anisotropy, dielectric properties of the medium, etc. It turned out that in polar semiconductors the stability of the EHL increases owing to the effects of dynamic screening due to the interaction of charge carriers with polar optical phonons. The EHL detected in polar semiconductors with a direct gap made this problem especially interesting in connection with its possible practical applications in quantum electronics.

In the field of thermodynamic properties of condensation in a nonequilibrium e-h system great attention has been paid to the study of the phase diagram of the gas-liquid transition. Along with thermodynamic peculairities of the condensed phase in itself the problem of complex partial composition of the e-h gas near the condensation threshold was thoroughly investigated as well as the ionization breakdown of excitons. Besides free carriers and excitons, the e-h gas at low temperatures contains free complexes of more complicated structure, i.e., excitonic molecules (bound states of 2 excitons) and excitonic ions, or trions (bound states of an exciton with an electron or a hole). At high concentrations of the gaseous phase the partial fraction of such complicated complexes may turn out to be rather large. The question was: what are the densities at which ionization breakdown of bound states (excitons, excitonic molecules, etc.) occurs due to the screening of the Coulomb interaction, and does this breakdown have any features of a phase transition of the insulator-metal type. The nonequilibrium e-h gas in a semiconductor was expected to be a convenient model system which permits the observation of two critical regions corresponding to gas-liquid and metal-insulator transitions.

The present review consists of two sections. In the first section (sect. 2) the problems are discussed which refer to the stability and properties of the EHL in polar semiconducting compounds. Polar semiconductors with a direct band gap are the object of great attention.

Thermodynamic properties of the EHL and also the state of the e-h gas near the phase boundary are considered in the second section of the present review (sect. 3). In the last few years the above mentioned problems have been reflected in a vast number of references. The authors make the apology if some published works have not been referred to in the present review.

2. Electron-hole liquid in polar semiconductors

2.1. Ground-state energy

One of the main tasks of the EHL theory is the calculation of the dependence of the mean energy per e–h pair in the e–h system $\langle E \rangle$ on the density *n*. The energy minimum $\langle E(n) \rangle_{min} \equiv E_G$ determines the stability of the EHL ground state with respect to the decay into free excitons as well as the equilibrium density n_0 in the condensate. The collective state of the EHL at T = 0 K is stable on the condition that the minimum $\langle E(n) \rangle$ is below the ground excitonic term with the binding energy R (excitonic Rydberg). The gain in energy due to the formation of the collective state is called the binding energy of the EHL, or the work function:

$$\varphi = -E_G - R. \tag{1}$$

The main difficulty in the strict theoretical consideration of the EHL both in covalent and polar semiconductors is connected with the lack of a small parameter in the theory which is typical for Fermi-liquid systems. In fact, the EHL binding energy is of the order of the excitonic Rydberg, the average distance between particles in the condensed phase is of the order of the Bohr radius for the exciton a_{ex} ; accordingly, the EHL density $n_0 \sim a_{ex}^{-3}$. Therefore, at such densities the Fermi momenta of carriers are $k_F \sim 1/a_{ex}$ and the average Coulomb potential and kinetic energies are comparable. Due to the lack of a small parameter the EHL theories are based mainly on appropriate calculation techniques.

The calculation of the EHL energy in semiconductors is made in the effective mass approximation and consists in the averaging of the Hamiltonian over a multi-particle wave function, and calculation of the correlation energy which is determined by the sum of the series in the perturbation theory. The first part of this problem is, as a rule, solved easily, whereas the second one requires the use of some special methods. The Hamiltonian of the electron–hole system includes a sum of the kinetic energy and the Coulomb interaction energy; the latter — without coupling with polar optical vibrations of the medium — is reduced by the high-frequency dielectric constant ε_{∞} . In polar semiconductors the Coulomb interaction is screened dynamically due to binding of carriers with polar optical phonons. In the case of a multi-valley semiconductor with a diamond structure this Hamiltonian is written in the form:

$$\hat{H} = \sum_{m=1}^{\nu_e} \sum_{p,\sigma} E_e^{(m)}(p) a_{p,m\sigma}^{\dagger} a_{p,m\sigma} + \sum_{i,j=1}^{4} \sum_p H_{ij}(p) b_{pi}^{\dagger} b_{pj} + \hat{H}_{int},$$
(2)

where ν_e is the number of equivalent extrema (or valleys) in the conduction band; $E_e^{(m)}(p)$ is the quadratic dispersion law, which is assumed to be equal for all the valleys; $a_{p,m\sigma}^{\dagger}$ is the electron creation operator with the momentum p and spin σ in the *m*th valley. Matrix H_{ij} describes the fourfold degenerate valence band at the point p = 0 (Luttinger and Kohn 1955); b_{pi}^{\dagger} is the hole creation operator with the momentum p. The Hamiltonian of the Coulomb interaction \hat{H}_{int} is:

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{1}{2} \sum_{k} V_k \left(\varrho_k^{\dagger} \varrho_k - 2N \right), \quad V_k = 4\pi e^2 / \varepsilon_{\infty} k^2, \tag{3}$$

where $\varrho_k = \varrho_k^e - \varrho_k^k$ is the operator of density fluctuations with the wave vector *k*:

$$arrho_k^e = \sum_{p\sigma} \sum_{m=1}^{\nu_e} a^{\dagger}_{pm\sigma} a_{p+k,m},$$

 $arrho_k^h = \sum_{p\sigma} \sum_{lpha=1}^4 b^{\dagger}_{p,lpha} b_{p+k,lpha},$

 $\frac{1}{2}N = N_e + N_h$ are the numbers of electrons and holes, assumed to be equal.

The first approximation for the calculation of the ground-state energy in the interacting e-h system described by the Hamiltonian (2) is that of Hartree-Fock (HF) which takes into account the interaction of particles of the same kind. The energy E_{HF} per e-h pair for the ground state of the EHL may be calculated precisely and represented within the framework of this approximation as a sum of the kinetic energy and the exchange energy,

$$E_{HF} = E_{kin} + E_{exc}.$$
 (4)

Thus, for example, for systems with ν_e equivalent valleys in the conduction band and ν_h equivalent nondegenerate valence bands these energies are:

$$E_{kin} = \frac{2.2099}{r_s^2} \left(\frac{m_{ex}}{\nu_e^{2/3} m_{de}} + \frac{m_{ex}}{\nu_e^{2/3} m_{dh}} \right) R,$$
(5)

$$E_{exc} = -\frac{0.9163}{r_{s}} \Big[\nu_{e}^{-1/3} \phi(\tilde{\gamma}_{e}) + \nu_{h}^{-1/3} \phi(\tilde{\gamma}_{h}) \Big] R.$$
(6)

In eqs. (5) and (6) the following reduced units are used. The energies are measured in effective Rydbergs,

$$R = m_{ex}e^4/2\varepsilon_{\infty}^2 = e^2/2a_{ex}\varepsilon_{\infty},$$
(7)

where ε_∞ is the high-frequency dielectric constant, a_{ex} is the effective Bohr radius and the reduced mass is

$$m_{ex}^{-1} = m_{oe}^{-1} + m_{oh}^{-1}.$$
(8)

Optical masses of electrons and holes $m_{oe}(m_{oh})$ and the density of states masses $m_{de}(m_{dh})$ in the case of uniaxial ellipsoids are determined from the expressions:

$$m_{oe,h}^{-1} = \frac{1}{3} \Big(m_{\parallel e,h}^{-1} + 2m_{\perp e,h}^{-1} \Big), \tag{9}$$

$$m_{de,h}^{-1} = \left(m_{\parallel e,h} m_{\perp e,h}^2\right)^{1/3}.$$
(10)

Wave vectors are measured in effective Fermi momentum units:

$$k_{\rm F} = (3\pi^2 n)^{1/3},\tag{11}$$

while the dimensionless parameter r_{s} is determined as

$$r_{s} = \left(3 / 4\pi n\right)^{1/3} a_{ex}^{-1}.$$
 (12)

The function $\phi(\tilde{\gamma})$ is given by:

$$\phi(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^{1/6} \frac{\Theta(1-\tilde{\gamma})}{\left(1-\tilde{\gamma}\right)^{1/2} \arcsin\left[\left(1-\tilde{\gamma}\right)^{1/2}\right]} + \frac{\Theta(\tilde{\gamma}-1)}{\left(\tilde{\gamma}-1\right)^{1/2} \sinh\left[\left(\tilde{\gamma}-1\right)^{1/2}\right]},$$
(13)

where $\tilde{\gamma} = m_{\perp}/m_{\parallel}$, $\Theta(x) = 1$ only in the region $0 \le x \le 1$ and outside this region, $\Theta(x) = 0$.

In the case of a degenerate valence band the energy E'_{HF} in the spherical approximation is $E'_{kin} + E'_{exc}$, where

$$E_{kin}' = \frac{2.2099}{r_s^2} \left[\frac{m_{ex}}{m_{Hh}} \left(1 + \tilde{\tilde{\gamma}}^{3/2} \right)^{2/3} \right] R, \tag{14}$$

$$E'_{exc} = -\frac{0.9163}{r_s} \phi(\tilde{\tilde{\gamma}}) R.$$
⁽¹⁵⁾

The function $\phi(\tilde{\tilde{\gamma}})$ is determined by the expression:

$$\phi(\tilde{\tilde{\gamma}}) = \frac{1}{\left(1 + \tilde{\tilde{\gamma}}^{3/2}\right)^{4/3}} \left[-\frac{3}{16} \left(1 - \tilde{\tilde{\gamma}}^2\right) \ln \frac{1 + \tilde{\tilde{\gamma}}^{1/2}}{1 - \tilde{\tilde{\gamma}}^{1/2}} + \frac{1}{4} \left(1 + \tilde{\tilde{\gamma}}^2 + 3\tilde{\tilde{\gamma}}^{3/2} + 3\tilde{\tilde{\gamma}}^{1/2}\right) + \frac{3}{16} \left(1 - \tilde{\tilde{\gamma}}^2\right) \int_{\tilde{\tilde{\gamma}}^{1/2}}^1 \frac{dx}{x} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \right],$$
(16)

where $\tilde{\tilde{\gamma}} = m_{_{Lh}}/m_{_{Hh}}$ ($m_{_{Lh}}$ and $m_{_{Hh}}$ are the effective masses of light and heavy holes).

The main difficulty in the theory and the related inaccuracy in the determi-. nation of the energy of the EHL ground state arises in calculations of the correlation energy $-E_{cor}$ which is, by definition, the difference between the precise energy of the ground state and the energy of the HF approximation. In the limit, $r_{\rm s} \ll 1$, an expansion may be constructed using a small parameter and, thus, terms of the perturbation theory series may be classified according to the powers of the density, and the main diagrams may be specified which in total correspond to the so-called random phase approximation (RPA). RPA is applicable for the description of phenomena which take place at relatively large distances ($\gg n^{-1/3}$) and correspond to small transfer momenta, much less than the Fermi momentum $(k \ll k_{_F})$. In the case of the EHL, which corresponds to the region of densities $r_{\rm s} \sim 1$, the main contribution to the energy comes from the momenta $k \lesssim k_{\rm F}$ and, therefore, strictly speaking, RPA is hardly applicable for the description of the EHL. Accordingly, in this region of densities several schemes have been developed for the calculation of the correlation energy. These schemes are modifications of the RPA method (see the review by Rice (1977)). The approximate calculation of the EHL correlation energy was made by means of the Hubbard technique (Brinkman and Rice 1973, Beni and Rice 1978) and the Nozières and Pines method (Combescot and Nozières, 1972) as well as by the self-consistent formalism of calculating the ground-state energy which makes allowance for statistical corrections for the local field (Vashishta et al. 1974a).

Within the framework of RPA the correlation energy per e-h pair is determined as follows:

$$E_{cor} = -\frac{1}{n} \int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \operatorname{Im}\left(\frac{\lambda \tilde{V}\Pi}{1 - \lambda \tilde{V}\Pi} - \lambda \tilde{V}\Pi\right),\tag{17}$$

where \tilde{V} is the interaction potential, and the polarization operator $\Pi(k, \omega)$ in the first approximation is $\Pi_{e}^{(0)} + \Pi_{h}^{(0)}$, where $\Pi_{e,h} = \chi_{e,h}^{0}, \chi_{e,h}^{0}$ is the polarizability of noninteracting particles. Within the scope of the Hubbard method (1957) the polarization operator is chosen in the form:

$$\Pi = \frac{\Pi^{(0)}}{1 + f(k)\tilde{V}\Pi^{(0)}}, \quad f(k) = \frac{1}{2(\nu_e + \nu_h)} \cdot \frac{k^2}{k^2 + k_F^2}, \quad (18)$$

which makes it possible to obtain a more correct behaviour for Π for $k \gg k_F$ by means of taking approximately into account the exchange diagrams. Calculations of the correlation energy for the EHL in the Hubbard's, Nozières–Pines and self-consistent formalism approximations yield results which agree well enough with one another.

One of the advantages of the Hubbard method is the relative simplicity of including the interaction of carriers with phonons in this approximation. Keldysh and Silin (1975) were the first to propose the concept of EHL stabilization with respect to the gas of free excitons by the polar electron–phonon interaction. The interaction of electrons (holes) with optical LO phonons, which is mostly significant in polar semiconducting compounds, may be taken into account by adding the term of electron–phonon interaction \hat{H}_{e-n} to the Hamiltonian (2):

$$\hat{H}_{e-p} = \sum_{p,k,\sigma} M(k) (a_k + a_k^{\dagger}) (c_{p+k,\sigma}^{\dagger} c_{p,\sigma} + b_{p+k,\sigma}^{\dagger} b_{p,\sigma}), \qquad (19)$$

where

$$M(k) = \left(\frac{2\pi e^2}{k^2} \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty} \hbar \Omega_{LO}\right)^{1/2}$$
(20)

and $a_k^{\dagger}(a_k)$, $c_{k,\sigma}^{\dagger}(c_{k,\sigma})$, $b_{k\sigma}^{\dagger}(b_{k\sigma})$ are the creation (annihilation) operators for LO phonons, electrons and holes, and ε_0 and Ω_{LO} are the static dielectric constant and the frequency of the LO phonon.

Consider now an e-h system of high density coupled with phonons in more detail. Due to this interaction a lattice part of polarizability connected with optical (LO) phonons is added to the electronic dielectric function (Keldysh and Silin 1975):

$$\chi_{LO}(\omega) = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 - (\varepsilon_0/\varepsilon_{\infty})(\omega^2/\omega_{LO}^2)}.$$
(21)

As a result, the Coulomb interaction turns out to be dynamically screened by the resulting dielectric function:

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = \varepsilon_{\infty} + \chi_{LO}(\omega) + \chi_{e,h}(\mathbf{k},\omega), \qquad (22)$$

where $\chi_{e,h}(k,\omega)$ is the polarizability connected with nonequilibrium carriers — electrons and holes. Dynamic screening of the Coulomb interaction is characterized by elementary excitations which are determined as the roots of eq. (21). In the absence of nonequilibrium carriers ($r_s \rightarrow \infty$) the electronic polarizability $\chi_{e,h} \rightarrow 0$, and the optical phonon $\hbar\Omega_{LO}$ is the only elementary excitation. In this case the energy shift is in itself nothing else than the ordinary polaron shift E_p :

$$E_{p} = -\left[\tilde{\alpha}_{e}\phi\left(\tilde{\gamma}_{e}\right) + \tilde{\alpha}_{h}\phi\left(\tilde{\gamma}_{h}\right)\right]\hbar\Omega_{LO},\tag{23}$$

where $\tilde{\gamma} = m_{\perp}/m_{\parallel}$, and $\phi(\tilde{\gamma})$ is given by eq. (13). Individual polar coupling constants for electrons ($\tilde{\alpha}_{e}$) and holes ($\tilde{\alpha}_{h}$) are determined by a simple substitution of bare density-of-states masses $m_{de,h}$ into the expression for the dimensionless polar coupling constant:

$$\tilde{\alpha}_{e,h} = e^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\infty}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \left(\frac{m_{de,h}}{2\Omega_{LO}} \right)^{1/2}.$$
(24)

If the concentration of nonequilibrium carriers *n* differs from zero, then in the system being considered plasma vibrations arise with the frequency ω_p . As long as $\omega_{p} \ll \Omega_{10}$ plasma and phonon modes practically do not interfere with one another and the Coulomb interaction in this limiting case is considerably screened by the static dielectric value. Thus, in this limit $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m_{ex}\varepsilon_0$, and the energy shift is the sum of the polaron shift E_n and the electron contribution, calculated with the use of the static dielectric constant ε_0 . It should be borne in mind that in the absence of nonequilibrium carriers in the system the polaron shift is already included in the experimentally observed band gap $E_{\rm g}.$ At increasing concentration of nonequilibrium carriers, when $\omega_p \sim \Omega_{LO}$, mixed plasmon-phonon elementary excitations arise. In fig. 1a the spectrum of elementary excitations of the interacting plasmon-phonon system is given as an example; it was calculated for a model direct gap semiconductor with isotropic and equal masses $m_e = m_h$ within the framework of RPA for T=0 ($\hbar\Omega_{LO}=R, \varepsilon_0/\varepsilon_{\infty}=1.5$) (Müller and Zimmermann 1979). The inset in fig. 1a shows the dependence of elementary excitations on the wave vector for $r_s = 2$. The shaded region in fig. la corresponds to the strong damping of mixed modes.

The efficiency of the plasmon–phonon mixing is determined by the polaron constant, or the factor $(1 - \varepsilon_0 / \varepsilon_\infty)$. This mixing determines the additional contribution to the self-energy part and, as a result, the ground-state energy turns out to lie deeper than it follows from the so called ε_0 approximation. It should be pointed out that in the case of polar compounds in calculations of the self-energy part, the bare band masses of carriers should be used but not the polaron masses known from experiment. Polaron $(m_{e,h,\perp,\parallel}^*)$ and bare $(m_{e,h,\perp,\parallel})$ masses of carriers are approximately related to one another as follows:
$$m_i^{lpha} \approx m_i \left(1 + \frac{1}{6} \tilde{\alpha}_i \right).$$
 (25)

Figure 1b shows an example of calculating the ground state enery E_G of a nonequilibrium e-h system for a model one-valley semiconductor ($m_e = 0.25m_h$, $\hbar\Omega_{LO} = R$, $\varepsilon_0 = 1.5\varepsilon_{\infty}$). The energy in this figure is measured in units of the effective excitonic Rydberg and E = 0 corresponds to the polaron band gap. The dashed line shows the calculation within the framework of the ε_0 approximation. It is seen that within the scope of this approximation the EHL is unstable with respect to the decay into excitons. The interaction with longitudinal optical LO phonons decreases considerably the self-energy part as compared to the ε_0 approximation (the solid curve in fig. 1b). The binding energy of the EHL with respect to the exciton term is determined as:

$$\varphi = -E_G - R - E_n. \tag{26}$$

It should, however, be taken into account that the exciton binding energy is also modified due to the interaction with LO phonons. While $R \ll \hbar \Omega_{LO}$ the exciton binding energy retains its hydrogenic value determined by formula (6), where ε_{∞} should be replaced by ε_{0} . When $R \sim \hbar \Omega_{LO}$, phonons provide dynamic screening which should be accompanied by an increase in the exciton binding energy (the solid arrow in fig. 1b). Note that the exact solution of the problem of the exciton binding energy, when $\hbar \Omega_{LO} \approx R$, is still lacking.



Fig. la. Mixed plasmon–phonon excitations at T = 0 and q = 0 calculated within RPA (full curves). Insert: *q* dependence at $r_s = 2$. Dashed curves: without LO coupling.



Fig. lb. Ground-state energy of the model direct band gap semiconductor ($m_e = 0.25m_h$) calculated within RPA (dashed curve — without, full curve — with phonon coupling, $\hbar\Omega_{LO} = R$. $\varepsilon_0 = 1.5\varepsilon_{\infty}$. Arrow indicates ground exciton level (from Müller and Zimmermann (1979)).

The ground-state energy of the EHL in polar semiconductors was calculated by several theoretical groups. Keldysh and Silin (1975) analyzed the variation of the exchange interaction energy in the presence of a strong polar coupling with the lattice in two limiting cases ($\omega_p \gg \Omega_{LO}$) and ($\omega_p \ll \Omega_{LO}$). The authors showed that exchange energies of electrons and holes decreased due to polar electron–phonon interaction in both cases. Thus, the interaction with LO phonons decreases the binding energy of the EHL. However, owing to a stronger decrease in the exciton binding energy scale (proportional to $(\varepsilon_{\infty}/\varepsilon_0)^2$) the binding energy of the EHL with respect to the gas of free excitons increases.

Beni and Rice (1976) as well as Rösler and Zimmermann (1977) proposed to calculate the ground-state energy of the e–h plasma in the polar semiconductor with the use of the plasma pole approximation (PPA) which is a simplified modification of the random phase approximation (RPA). The advantages of PPA include, first of all, its mathematical simplicity and clear physical meaning. Among the disadvantages of this method there is a certain arbitrariness in the choice of parameters, in particular, of those which describe the dispersion of mixed plasmon-phonon modes (Beni and Rice 1978). In the case of polar semiconducting compounds with isotropic and nondegenerate bands the calculation results turn out not to be very sensitive to the choice of these parameters. However, calculation results for the self-energy part are rather sensitive to these parameters in semiconductors with degenerate bands (e.g., in II–VI and III–V compounds with the zinc-blende structure) and a highly anisotropic spectrum. For example, when the ground-state energy of the EHL is calculated in the PPA, the error is up to 20–30% (Beni and Rice 1977). Finally, Beni and Rice (1978) proposed to use the generalized RPA to describe the polarizability of carriers with regard to anisotropy and orbital degeneracy of bands. Their consideration includes the Hubbard correction connected with the exchange interaction at large transfer momenta. The total polarizability within the scope of RPA is obtained by adding the polarizability of carriers to the lattice part. In the limit of low density the calculations made by Beni and Rice (1978) completely correspond to the problem of a weakly interacting polaron. In this limit the main variations in the energy are determined by the polaron shift which is well known for nondegenerate bands and also for the case of a degenerate valence band (Trebin and Rössler 1975, Beni and Rice 1977). The contribution of the Coulomb interaction increases with density as compared to the interaction with the lattice, and in the limit of large densities the lattice contribution becomes negligible. The authors found the generalized RPA to give the best agreement with the experiment when the plasma frequency $\omega_p \gg \Omega_{LO}$.

2.2. Spectroscopic determination of the EHL energy parameters in polar direct-gap semiconductors

Optical spectra are one of the main sources of information about the EHL parameters: its chemical potential per e-h pair, the ground-state energy and the work function, the Fermi energies of carriers, the magnitude of the equilibrium density, etc. The EHL properties near the Fermi surface may be described in terms of the one-particle energy spectrum (Rice 1974):

$$E_i(k) = \hbar^2 k^2 / 2m_i + \operatorname{Re}\Sigma_i(k, E_i(k)).$$
⁽²⁷⁾

Here *i* corresponds to electrons or holes, and Σ is the self-energy part. Farther away from the Fermi surface this concept becomes more and more approximate due to the increase of the imaginary part Im Σ_i . Owing to the short-range effect of the heavily screened Coulomb interaction in the e-h plasma of high density the self-energy part is only weakly dependent on *k* or $E_i(k)$. Therefore, it may be supposed that due to the effects of collective interaction the electron and the hole bands shift practically rigidly. This means that the variation of the effective masses is negligible (\lesssim 10%, Rice 1974) and this variation may be neglected in the first approximation.

In the EHL electrons and holes with momenta from 0 to k_F take part in radiative recombination. Therefore, the width of the EHL radiation spectrum (line L) is determined by the sum of the Fermi energies of electrons and holes $E_{Fe} + E_{Fh}$. Accordingly, the equilibrium density n_0 may be found from the analysis of the recombination line shape. When an electron and a hole with $k = k_F$ recombine a photon of the highest energy is emitted, therefore the "violet" boundary $\hbar\omega_v$ of the EHL radiation line L directly coincides with the chemical potential of the EHL per a e-h pair μ_T :

$$E_g + \mu_L = \hbar \omega_v. \tag{28}$$

The value of the chemical potential $\mu_{\rm L}$ is measured from the gap edge $E_{g}.$ By definition,

$$\mu = \left(N+1\right)E\left(\frac{N+1}{V}\right) - NE\left(\frac{N}{V}\right) = \left\langle E(n)\right\rangle + n\frac{\partial\left\langle E(n)\right\rangle}{\partial n},\tag{29}$$

where *N* is the total number of particles, *V* is the volume. For the equilibrium density $n = n_0$ and T = 0,

$$\left. \frac{\partial \langle E(n) \rangle}{\partial n} \right|_{n=n_0} = 0 \text{ and } \mu_L = \mu(n_0) \equiv E(n_0).$$

If the dependence on the wave vector of the corrections to the kinetic energy of electrons and holes caused by interparticle interactions is neglected, the low-frequency boundary of the EHL radiation spectrum ("the red boundary") $\hbar\omega_r$ may be determined as:

$$\hbar\omega_{r} = \left\langle E(n) \right\rangle + n \frac{\partial \left\langle E(n) \right\rangle}{\partial n} - \left(E_{FE} + E_{Fh} \right) + E_{g}. \tag{30}$$

Within the scope of this approximation the low-frequency boundary of the radiation spectrum characterizes the band gap $E'_g (E'_g = \hbar \omega_r)$ renormalized due to the effects of collective interaction (the so-called shrinkage of the semiconductor energy gap).

In this section a direct gap polar semiconductor CdS is taken as an example to consider optical spectra of radiation, gain, transmission and excitation of the EHL.

2.2.1. Spontaneous radiation spectra

The radiation recombination spectra of the EHL, just as for the e–h plasma in the case of allowed transitions in zero order for q (q is the photon wave vector) are determined by the joint density of states of electrons and holes which take part in the recombination, and by the distribution of electrons and holes with the equilibrium concentration n_0 over the appropriate states. Taking into account that interband transitions are direct ($k_e + k_h \approx 0$), assuming the distribution of electrons to be quasi-equilibrium, and also ignoring the corrections to the density of states due by inter-particle interactions, for the shape of the spontaneous recombination spectrum we can write:

$$I_{sp}(h\nu) \propto \sum_{k} f_{e} f_{h} \delta \left[h\nu - E_{e}(k) - E_{h}(-k) \right].$$
(31)

Here

$$f_{e,h} = \left[1 + \exp{\frac{E_{e,h}(k) - E_{Fe,h}(T)}{kT}}\right]^{-1}$$

255

are the distibution functions, $E_{Fe,h}$ are the chemical potentials or Fermi quasilevels of electrons and holes, respectively. The energy $h\nu$ is measured from the "red" boundary of the radiation spectrum determined in accordance with eq. (30). It is supposed in expression (31) that direct transitions are allowed in the zero order for k, therefore, the transition matrix element is assumed to be constant up to $k \sim kA_{Fe,h}$.

Further on in (31) one should proceed from the summation over k to integration with the allowance made for dispersion laws for electrons and holes, and the character of band degeneracy. Only at T = 0 it is possible to express $I(h\nu)$ in terms of elementary functions. For $T \neq 0$ the shape of the spontaneous spectrum is calculated by numerical integration.



Fig. 2. Recombination emission spectra of the electron–hole plasma observed in various types of CdS crystals at 4.2 K under nanosecond pulse excitation of ~ 5 mW cm⁻². The type of crystals, the size of excitation spot and the size of the opening of crossed slit are: (*a*) platelet crystal, $800 \times 800 \ \mu\text{m}^2$, $800 \times 800 \ \mu\text{m}^2$; (*b*) platelet crystal, $100 \times 100 \ \mu\text{m}^2$, $100 \times 100 \ \mu\text{m}^2$; (*c*) platelet crystal covered with CdSe $800 \times 800 \ \mu\text{m}^2$, $800 \times 800 \ \mu\text{m}^2$; (*d*) block crystal, $800 \times 800 \ \mu\text{m}^2$ (from Yoshida et al. (1980)).

Certain difficulties arise in experimental studies of the spectrum shape for the spontaneous radiative recombination of the e-h plasma in direct-gap semiconductors at low temperatures. They are connected with stimulated radiative recombination which has a considerable effect, if no special precautions are taken; these processes cause great distortion in the actual shape of spontaneous spectra. In order to eliminate the influence of stimulated processes on the shape of spontaneous spectra an experimental procedure was proposed with the use of extremely small excitation spots on the surface of a semiconductor (Lysenko et al. 1974, 1975). The linear dimensions *l* of the excitation region on the crystal are chosen from the condition $\alpha_{max} l < 1$, where α is the gain coefficient of the EHL emission spectrum. Recently another effective method has been proposed (Yoshida et al. 1980) where the influence of stimulated radiation on the shape of spontaneous spectra of the e-h plasma is also eliminated. In this method the surface of the semiconducting plate being investigated was covered – except for a small circular area — with a thin film of another semiconductor with a considerably smaller band gap width and a refractive index close to that of the semiconductor under study. This allows a considerable decrease in the quality Q of the resonator formed by natural rectangular faces of the crystal. This technique was realized successfully with thin CdS crystals covered with a CdSe evaporated film. The influence of stimulated radiation on the shape of spontaneous spectra under conditions of laser excitation of CdS crystals is illustrated qualitatively in fig. 2.

Figure 3 shows the shape of the spontaneous radiation spectrum of CdS e–h plasma measured at various temperatures (5–110 K) and practically constant e–h pair density. At increasing temperature the radiation band broadens mainly due to the smearing of the high-frequency spectrum boundary according to the temperature broadening of the distribution functions of electrons and holes. The approximation of the spectrum shape based on numerical integration of expression (31) is also shown here. The fitting parameter for this approximation is the density n_0 . At high temperatures (T > 30 K) the best agreement between calculated and experimentally measured curves is attained with due regard to corrections for reabsorption. The correction for reabsorption is reduced to multiplication of the expression (31) by a factor $[1 - \exp(-\alpha l_s)]/al_0$, where l_0 is the diffusion length of carriers (in CdS $l_0 \sim 1.5 \ \mu$ m) and α is the absorption coefficient.

The largest discrepancies between the calculation made in terms of direct recombination and the experiment are observed in the region of the "red" boundary of spontaneous spectra (see fig. 3), where the so called "long-wave tails" are observed. These discrepancies are common for all semiconductors with a direct band gap where the radiation of the high density e-h plasma was investigated. The possibility of better approximation of the spontaneous spectra shape was attempted by Hildebrand et al. (1976, 1978) for GaAs, InP and AlAs by assuming that at direct recombination the conservation law for the momentum was not obeyed. However, such an assumption does not seem to be well-grounded enough. Recent observations of the e-h plasma in direct gap GaAlAs under 3-D confinement have demonstrated an excellent fit to the experimental recombination spectra in the wide range of densities in terms of the model with K conservation (Capizzi et al. 1982).



Fig. 3. Recombination emission spectra of CdS crystals at bath temperature $T_b = 5-110$ K. The, dash-dot and dashed lines show the approximation of the shapes of the spectra with and without allowance for reabsorption. The arrows indicate the calculated positions of the maximum of the gain at different temperatures (from Lysenko et al. (1975)).

There exists another viewpoint on the nature of the broadening of radiation spectra (long-wave tails). According to this viewpoint the expression for the density of states D(E) used in the form $D \sim \sqrt{E}$ is too rough an approximation and requires the inclusion of corrections due to inter-particle interactions. These corrections are of a double character: first, the dependence E(k) varies and the dispersion law deviates from the quadratic form; second, the energy levels of the excited states in the Fermi liquid created when an e-h pair recombines — "a hole" in the conductivity band and "an electron" in the valence band — turn out to be broadened due to their finite lifetime connected with the relaxation of these states (Landsberg 1967). The amount of broadening increases with the distance from the Fermi surface to the band extremum. The physical meaning of the damping is connected with Auger processes resulting from three-particle collisions. An attempt may be made to take into account broadening by introducing the effective density of states:

$$D_{ef} = \frac{1}{\pi} \int dE' D(E') \Gamma(E') \Big[\pi (E - E')^2 + \Phi^2 (E') \Big]^{-1}.$$
 (32)

Corrections to *D* due both to the variation of the dispersion law and to the damping of excited states yield a smoother dependence D(E) near the bottom of the band. If in the description of the spontaneous recombination spectrum (the same refers to the shape of gain spectra) we restrict ourselves only to the damping of excited states in the EHL, then in the following form (Martin and Störmer 1977, Kuiakovskii et al. 1978a, Motisuke et al. 1977a,b):

$$\Gamma(E) \sim \Gamma_0 \left[1 - \left(E/E_F \right)^2 \right], \tag{33}$$

assuming that $\Gamma_{oh}/\Gamma_{oe} \sim E_{Fh}/E_{Fe}$. In this case the spectrum shape is approximated by means of two fitting parameters: n_0 and Γ_0 . The values of Γ_0 , as it should be expected, increase with the Fermi energy E_F (Kuiakovskii et al. 1978a). The evaluation of Γ_0 by the formula (Abrikosov et al. 1962):

$$\Gamma_0 = \pi \hbar e^2 k_F^2 / 16\varepsilon r_{scr},\tag{34}$$

where r_{scr} is the screening radius, gives a value which agrees with the experiment up to a factor 2. It should be noted that the introduction of the parameter Γ_0 results only in a slight change in the value of the equilibrium density (of the order of 10–20%).

Brinkman and Lee (1973) noted that the long-wave broadening of radiative recombination spectra of the e–h plasma in direct-gap semiconductors may result partially from the interaction with plasma vibrations. The same viewpoint was developed by Zimmermann and Rösler (1976); they calculated the spectrum shape connected with the plasmon–electron interaction for the EHL in CdS. According to these calculations, the intensity of the satellite radiation associated

with mixed plasmon–phonon modes is about 5% of the intensity of the direct e–h recombination. Recently in recombination spectra of high density e–h plasma in CdS 2 side bands in the low-energy tail have been observed by Saito et al. (1981).

Finally, Aldrich and Silver (1980) analyzed the low-frequency broadening of the radiation spectrum shape for the e–h plasma and they associated the damping value Γ_0 with the scattering of one of the recombining particles. For example, in semiconductors with the valence band degenerate at the Γ point, scattering between the states of light and heavy holes is implied.

2.2.2. Gain spectra

The EHL as a degenerate electron-hole system may be considered in terms of an inverted two-level system for any value of k. Therefore, in the case of direct and allowed (in zero order in k) transitions it is to be characterized by large gain coefficients (negative absorption) with respect to radiative recombination processes. In indirect-gap semiconductors, due to the low probability of radiative transitions, the gain coefficients of the radiative recombination of the degenerate e-h plasma is extremely small and is totally compensated by positive losses caused by free carrier absorption (Dumke 1963). Owing to large gain factors and high efficiency of stimulated radiative recombination the EHL in direct-gap semiconductors is a convenient model for semiconductor quantum electronics (in particular, for semiconductor lasers).

The gain coefficient (or negative absorption) $\alpha(\hbar\omega)$ for the e–h plasma with the density n_0 may be calculated with the use of the known expression for the rates of spontaneous radiative transitions $r_{sp}(\hbar\omega)$ per unit volume, per unit solid angle and per unit energy interval (Lasher and Stern 1964):

$$r_{sp}(\hbar\omega) = \frac{4\kappa e^2\omega}{m_0^2\hbar c} |M|^2 I(\hbar\omega^2 - E'_g), \qquad (35)$$

where κ is the refractive index, $\hbar\omega$ is the emitted photon energy, *I* is given by expression (31), $|M|^2$ is the square of the matrix element of the dipole momentum which may be evaluated from the oscillator strength of excitonic absorption. The gain coefficient $\alpha(\hbar\omega)$ is related to $r_{sn}(\hbar\omega)$ by the equation

$$\alpha(\hbar\omega) = -\frac{\pi^2 c^2 \hbar}{\kappa \omega^2} r_{sp}(\hbar\omega) \left[1 - \exp \frac{\hbar\omega - E'_g - E_{Fe} - E_{Fh}}{kT} \right].$$
(36)

Gain takes place under the condition $E_{Fe} + E_{Fh} > 0$ and is to be observed in the spectral interval of energies E'_g to $(E'_g + E_{Fe} + E_{Fh})$. The violet boundary of the gain spectrum $\hbar\omega_v$ exactly corresponds to the chemical potential per e–h pair in the EHL and is determined by formulae (28)–(29).

The width of the gain spectrum for the EHL is determined by the sum of Fermi energies of electrons and holes and, therefore, by the equilibrium density value.

At increasing temperature and fixed density of e–h pairs in the plasma the gain spectrum narrows due to temperature smearing of the distribution functions for electrons and holes. In this case the high-frequency boundary of the gain spectrum $\hbar\omega_{_{\rm V}}$ shifts to the low-energy side until the gain disappears completely, which occurs at temperatures where $E_{_{Fe}}(T)+E_{_{Fh}}(T)\leqslant 0$. For example, in the case of CdS crystals at densities $n_{_{e,h}}\approx 10^{18}\,{\rm cm}^{-3}$ there is already no gain at temperatures $T>150\,{\rm K}.$



Fig. 4. Recombination spectra of CdS crystals obtained at a power density \sim 3 mW cm⁻² and different linear dimensions *l* of excitation spot: $1 - 4 \mu$ m; $2 - 8.6 \mu$ m; $3 - 13.4 \mu$ m; $4 - 18.2 \mu$ m; $5 - 23 \mu$ m; $6 - 27.7 \mu$ m. The observation was along the *l* direction (see insert) (from Lysenko et al. (1975)).

Consider now the experimental techniques for measuring gain spectra of the e-h plasma under optical pumping of a semiconductor. In one of these techniques the beam of the exciting laser is focussed — by means of crossed slits — onto the crystal surface into a rectangular stripe (Shaklee and Leheny (1971), Altukhov et al. (1972), see the inset to fig. 4). The crossed-slit technique allows the control of one of the linear dimensions of the excitation spot. The radiation intensity *I* from the medium with the gain coefficient α in the direction of the monitored linear dimension may be written down as follows (Shaklee 1975):

$$\alpha l = bI + \ln\left(\beta I + \alpha l\right). \tag{37}$$

In eq. (37) the factor β is connected with the spontaneous recombination in a unit volume, whereas b characterizes saturation of the gain which arises at large densities of stimlated radiation in the crystal bulk. At $bI \ll 1$ the logarithmic term predominates and the intensity varies exponentially with l at a given α . This allows experimental determination of the gain factor. At large *bI* the intensity varies with *l* almost linearly. The development of the stimulated recombination radiation spectrum in the e-h plasma in CdS crystals with increasing linear dimension *l* of the excitation region is shown in fig. 4 (Lysenko et al. 1975). Each of the factors, α , *b*, β , in eq. (37) has its own spectral distribution and depends on the excitation density (Shaklee et al. 1973, Göbel et al. 1977). The studies of the gain spectra carried out by means of this technique for a large number of direct-band semiconducting materials, e.g., CdS, GaAs, GaN, GaSe (Shaklee et al. 1973) revealed sufficiently common properties. The gain spectra measured by this technique for the EHL in CdS crystals under excitation with a pulsed N_2 laser are presented in fig. 5 for the temperatures 5 and 49 K. The gain spectra are shown together with radiative recombination spectra. It can be seen that at helium temperatures the EHL in CdS is characterized by gigantic gains ($\alpha\gtrsim10^3$ cm⁻¹). Therefore, in the region of maximum values of $\alpha(\hbar\omega)$ and on condition that $\alpha l > 1$ (*l* is the excitation spot size on the crystal) radiation from the sample is considerably enhanced. As a result, in the appropriate spectral region close to the maximum of the gain curve, intense narrow peaks of recombination radiation appear which have a superlinear dependence on power density and on the dimensions of the excitation region. From the violet boundary of the gain spectrum the chemical potential was found (see fig. 5) and the binding energy of the EHL for CdS was estimated to be $\varphi \approx 12$ –13 meV (according to measurements made by Lysenko et al. (1974) and Leheny and Shah (1976)). The EHL parameters measured experimentally in CdS are given in table 3.

One of the main drawbacks of the above method is associated with saturation processes at large densities of the stimulated radiation which affect considerably the accuracy of the gain coefficient determination. In this connection the measurement of the gain by transmission with the use of a probing beam is of great interest. This method proposed independenly by several groups of experimentators (Hildebrand et al. 1976, Leheny and Shah 1976, Dite et al. 1976, Müller et al. 1977, Motisuke et al. 1977a,b) is based on the simultaneous action of two laser beams, one of which provides optical pumping of nonequilibrium carriers and the other - probing of the transmission spectrum of that part of the crystal which is occupied by the nonequilibrium e-h plasma. The thickness of the crystal *l* being investigated is chosen so that in the probing region $\alpha l \lesssim$ 1. Under surface excitation conditions the crystal thickness is required to be much less than the diffusion length of nonequilibrium carriers. The method proposed was used successfully for the study of gain spectra of the e-h plasma of high density and the EHL in CdS (Leheny and Shah 1976, Dite et al. 1976), CdSe (Leheny and Shah 1976), ZnO (Skettrup 1977), GaAs (Hildebrand et al. 1976) crystals. The results obtained

with the transmission technique are in good agreement with the measurements of gain spectra made by means of the above nonlinear-optical method.



Fig. 5. Spontaneous emission (solid lines) and gain (dots) spectra of CdS: (a) $T_b = 5$ K, $T_e = 10$ K, $\overline{n} \approx 10^{18}$ cm⁻³; (b) $T_b = 45$ K, $T_e = 50$ K, $\overline{n} \approx 1.5 \times 10^{18}$ cm⁻³. Spectra measured under pulsed laser excitation with delay time ≈ 12 ns and a gate width ≈ 1 ns (from Lysenko et al. (1975)).

As an example we present here transmission spectra of CdS measured by means of the probing beam technique at high concentration of nonequilibrium carriers (see fig. 6). The measurements were made on ultra-pure crystals with the concentration of the residual electrically active impurities about 10^{15} cm⁻³. Thin CdS plates (less than 1 μ m thick) were used and this allowed the observation

of the structure with varying excitation density. Figure 6 shows that at helium temperatures and average concentrations of e–h pairs $\gtrsim 10^{17}$ cm⁻³ nonequilibrium carriers and excitons condense into EHL. Then the spectra (2)–(5) in the lower part of fig. 6 can be understood as the result of superposition of absorption spectra from different parts of the crystal volume that were occupied by excitons and free carriers or EHL. When the liquid phase fills the total volume which the probing beam passes through, the discrete excitonic structure practically totally disappears from the absorption spectrum (spectrum (5) in fig. 6). One of the advantages of this technique is that it is possible to measure simultaneously the gain spectrum and the positive absorption continuum, corresponding to optical transitions between states over the Fermi surfaces of the electron and hole bands of the EHL.



Fig. 6. Emission and transmission spectra of a CdS platelet at different excitation intensities: (1) without excitation; (2) with excitation of 10^4 W cm⁻²; (3) 10^5 W cm⁻²; (4) 10^6 W cm⁻²; (5) 3×10^6 W cm⁻². The gain spectrum (negative absorption, α is the absorption coefficient) was measured by changing the excitation length for 3×10^6 W cm⁻² (from Müller et al. (1977)).

In conclusion of this section it should be noted that the gain spectrum of the EHL (or e–h plasma) observed experimentally in direct-gap semiconductors can poorly be described within the framework of a simple model which ignores the effects of multi-particle interactions (including the effects of the electron–hole scattering). In the gain spectra, just as in the spectra of spontaneous recombination (see sect. 2.2.1), "red tails" are observed which cannot be described within the framework of usual direct allowed interband transitions. Recently a gain spectrum of the degenerate e–h plasma and its temperature dependence for a direct-gap semiconductor has been considered by Haug and Tran Thoai (1980). The authors took into account in their theoretical consideration the collisional broadening of the self-energy spectrum of electrons and holes and also the effect of gain enhancement connected with electron–hole correlations in the plasma. The calculation made is in good agreement with the experimental spectrum of the e–h plasma in GaAs and the 3-D confined e–h plasma in GaAlAs (Capizzi et al. 1982).

2.2.3. Excitation spectra

In fig. 7a excitation spectra of the EHL in Cds crystals are presented, measured at various excitation levels and helium temperatures. In the course of these measurements a narrow region (~0.5 meV) was recorded near the maximum of the recombination radiation spectrum of the EHL. The spectra were investigated by smooth tuning of the dye laser frequency. Excitation spectra have a clearly defined low-frequency boundary which coincides precisely with the "violet" boundary of the gain spectrum in the EHL. Thus, excitation spectra may be used to measure the ground-state energy of the EHL $\hbar\omega_v = E_G$. It is important that the low-frequency boundary of excitation spectra $\hbar\omega_z$ is insensitive to the density of the excitation power, which is the result of the EHL constant density.

The shape of the EHL excitation spectrum may be explained qualitatively as follows. With decreasing photon energy of the exciting light the energy surplus of photoexcited carriers also decreases and, as a result, the effective electron temperature T_{ef} decreases too (Hildebrand et al. 1978, Shah et al. 1976).

Since the EHL density remains approximately constant, this leads to an increase in the resulting gain with decreasing frequency of the exciting light. As $\hbar\omega$ is approaching the spectral region which corresponds to the chemical potential of the EHL, the densities of the generated carriers begin to decrease abruptly. At photon energies $\hbar\omega \sim E_g + \mu_L$ the carriers are excited in the immediate vicinity of the Fermi surfaces of the electron and hole bands of the EHL (see fig. 7b). Such a way of excitation is of great interest since the EHL under such pumping conditions turns out to be minimally overheated with respect to the lattice temperature. This method of excitation was also used for optical pumping of aligned spin momenta of electrons and holes in the EHL in CdS by means of circularly polarized light (Gubarev et al. 1977, 1980).



Fig. 7a. Excitation spectra of CdS at T = 1.4 K and pumping power ≈ 3 MW cm⁻². Solid and dashed lines correspond to wavelengths of 4876 Å and 4890 Å within radiation of EHL.



Fig. 7b. Emission spectra of the EHL at T = 1.4 K and laser excitation at $\lambda_{exc} = 4867$ Å with power 10^{-2} , 2×10^{-2} , 3×10^{-2} , 3×10^{-1} , 1, 3, 5, 10 MW cm⁻² (from Lysenko et al. (1976)).

Table 1

Parameters for polar direct band semiconductors

R is the exciton binding energy, α_0 is the polaron coupling constant, ε_0 and ε_{∞} are the static and high-frequency dielectric constants. The bare masses (without asterisk) are obtained from the polaron masses (with asterisk), $\hbar\Omega_{LO}$ is the LO-phonon energy.

	m_e^*	m _e	$m^*_{h\parallel}$	$m_{h\parallel}$	$m^*_{h_\perp}$	m_{h_\perp}	ε^0	ω ⁸	$\hbar\Omega_{LO}$ (meV)	R (meV)	α_0
CdS	0.205 ^(a)	0.180 ^(h)	5.0 ^(a)	4.38 ^(h)	0.7 ^(a)	0.555 ^(h)	8.6 ^(b)	5.7 ^(b)	36.8 ^(b)	27 ^(b)	1.41 ^(h)
CdSe	$0.13^{(d)}$	$0.116^{(h)}$	2.5 ^(d)	2.25 ^(h)	0.45 ^(d)	0.38 ^(h)	$9.4^{(b)}$	$6.2^{(b)}$	$26.1^{(b)}$	$15^{\left(d\right)}$	1.25 ^(h)
ZnS	0.28 ^(c)	0.25 ^(h)	$1.4^{(c)}$	$1.25^{(h)}$	0.49 ^(c)	$0.41^{(h)}$	8.6 ^(e)	$5.2^{(e)}$	$43.6^{(e)}$	36 ^(f)	$1.34^{(h)}$
ZnO	$0.28^{(g)}$	$0.24^{(h)}$	2.27 ^(h)	1.9 ^(h)	0.79 ^(h)	0.6 ^(h)	8.590	$4.0^{(j)}$	72 ^(k)	59 ⁽ⁱ⁾	$1.84^{(h)}$
	m_e^*	m _e	$m^*_{_{\ell h}}$	m_{eh}	m^*_{hh}	m_{hh}	ε^0	w ⁸	$\hbar\Omega_{LO}$ (meV)	R (meV)	α_0
CdTe	0.097 ^(h)	0.091	0.103 ⁽ⁱ⁾	0.096	1.09 ⁽ⁱ⁾	0.87	10.30	6.9 ^(h)	$21.2^{(k)}$	10 ^(b)	1.21
ZnSe	$0.18^{(m)}$	0.17	$0.149^{(i)}$	0.139	1.27 ⁽ⁱ⁾	1.04	8.80	6.2 ^(h)	30.5 ⁽ⁿ⁾	21(0)	0.99
ZnTe	$0.16^{(p)}$	0.151	0.15 ^(q)	0.141	0.68 ^(q)	0.51	9.9 ^(r)	7.3 ^(h)	25.5 ^(r)	$11^{(s)}$	0.83 ^(h)
GaAs	$0.0665^{(t)}$	0.066	$0.085^{(t)}$	0.084	$0.52^{(t)}$	0.51	$12.35^{(j)}$	$10.48^{(h)}$	36.8 ^(u)	$4.2^{(v)}$	0.278 ^(h)
GaSb	0.047 ^(w)	0.046	$0.045^{(t)}$	0.044	$0.32^{(t)}$	0.31	15.7 ^(x)	$14.4^{(x)}$	29.8 ^(s)	2.8 ^(y)	0.118 ^(h)
InSb	$0.0134^{(t)}$	0.0133	$0.016^{(t)}$	0.015	0.39 ^(t)	0.38	$17.9^{(z)}$	$15.7^{(xx)}$	23.9(yy)		$0.185^{(h)}$
InP	$0.0803^{(t)}$	0.078	0.12 ^(t)	0.11	0.58 ^(t)	0.55	12.6 ^(z)	9.6 ^(xx)	$42.8^{(zz)}$	4 ^(y)	0.442 ^(h)
 (a) Hopfiel (b) Rode (1 (c) Segall ; (d) Dimmo (e) Arguell (f) Wheele (g) Button (h) Beni an 	d and Thoma: .975) .975) and Marple (1' ock and Wheelt ock and Alvele and Alvelazz r and (1972) et al. (1972) d Rice (1978)	; (1961) 965) 2r (1961) (1964)	 0 Lav 0 Str 0 Str 0 Mik ∞ He ∞ 1ay ∞ Roc 	vaetz (1971) zalkowski et al Idman et al. (1 losz and Whee nry et al. (197) tor (1967) \circ et al. (1967) le (1970)	l. (1976) 969) eler (1967) 2)		Stradling (196 Balkansky (196 Nahory and Fa Stradling (197 Mears and Str Sell et al. (197 Robert and Ba Hass and Hena	8) 57 50 51 51 51 51 51 51 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 51 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52 52		(v) Aven and Pl (a) Mitra and N (m) Van Vechte (m) Apel and Pl (z) Lukovsky e	ener (1967) larshall (1964) n (1969) oehler (1971) t al. (1971)

2.3. Experimental observation of the EHL in polar semiconductors

In this section the results of experimental observation of the EHL in various polar semiconducting compounds are considered, and the parameters determined for the EHL are compared with the known theoretical calculations. Polar compounds may be classified into the following groups: (1) semiconductors with a direct gap and simple bands, (2) semiconductors with a direct gap and a degenerate valence band, (3) indirect-gap polar semiconductors.

(1) The first group includes the compounds II–VI with the wurtzite structure (CdS, CdSe, ZnO, ZnS). In these compounds the nearest extrema of the valence band and the conduction band are at the Γ point. The valence P band is split by the crystalline field and by the spin-orbit interaction into three spin-degenerate subbands A, B and C. Band parameters for this class of compounds are shown in table 1. The splitting between the upper subbands A and B is, as a rule, large and exceeds considerably the value of the Fermi energy for holes in the EHL. Therefore, calculations of thermodynamic values for the EHL in such crystals take into account only the upper subband A. An exception is ZnO, where the splitting value between the subbands A and B ($\Delta E_{A-B} \approx 5$ meV) is less than the Fermi energy for the holes; accordingly, in this case in calculations of the EHL parameters the A–B splitting is neglected.

Furthermore, in compounds II–VI with wurtzite structure the static dielectric constant is anisotropic. In order to simplify the calculations the dielectric constant is averaged as follows:

$$\varepsilon_{0}^{-1} = \frac{1}{3} \Big(2\varepsilon_{0\perp}^{-1} + \varepsilon_{0\parallel}^{-1} \Big), \tag{38}$$

where $\varepsilon_{0\perp}$ and $\varepsilon_{0\parallel}$ are the principal values of the dielectric permeability tensor. In those cases, when anisotropy is small, such averaging yields no considerable errors.

Hexagonal semiconductors II–VI are piezoelectrics. The interaction with piezoacoustic vibrations changes the effective mass of the carriers. It was shown for CdS (Mahan and Hopfield 1964) that effective masses change considerably at energies below 1 meV. Since the scale of the EHL characteristic energies is much larger, the influence of polar acoustic vibrations on the EHL thermodynamic properties in most cases of interest may be neglected.

Consider, finally, the exchange splitting between excitons with parallel (antiparallel) spins of electrons and holes, i.e., the splitting between ortho- and paraexcitons. In CdS and CdSe crystals the value of the exchange splitting is small (in CdS, $\Delta E_{exc} \approx 2.1$ meV; Thomas and Hopfield 1961, 1962) and it may be neglected in calculations of the EHL energy properties. Crystals of ZnO are an exception: the exchange splitting in them is large, ≈ 14 meV. The repulsive contribution to the electron–hole energy due to such exchange interactions was evaluated to be $\approx \frac{1}{2}\Delta E_{eyc}$ (Beni and Rice 1978). In this class of compounds the EHL was investigated in CdS, CdSe and ZnO crystals. Experimental and calculated values of parameters for the EHL in these crystals are presented in table 3. For CdS and CdSe compounds theoretical calculations and experimental observations of the ground state energy in the EHL (within 10% accuracy) are in good agreement. The calculation of the chemical potential μ_L and renormalized band gap width E'_g for CdS at the temperatures T = 0, 50, 64 K carried out in the plasma pole approximation (Müller and Zimmermann 1979) is shown in figs. 8a,b. The greatest discrepancies are found between the experimental and theoretical values of equilibrium densities (see table 3). For example, calculations made within the scope of the total RPA give for the equilibrium density in CdS the value $n_0 = 3.9 \times 10^{18}$ cm⁻³ (Rössler and Zimmerman 1977) which exceeds by several times the experimental value n_0 (see table 3). The reason for these discrepancies is still unclear.



Fig. 8. (*a*) Gap shift *G* and chemical potential $\Delta \mu$ of e-h plasma in CdS relative to polaron gap. Dashed line is the Maxwell construction for phase separation; the arrow indicates exciton term. (*b*) Absorption coefficient α and intensity of spontaneous emission I_{sp} of EHL at 50 K (from Müller and Zimmermann (1979)).

The largest disagreements between the experiment and the theory arise in the case of ZnO crystals. It was found by measuring the gain spectrum (Skettrup 1977) that in these crystals the EHL is strongly bound and has a binding energy $\varphi = 22$ meV. However, according to calculations within the scope of the total RPA, the EHL in ZnO crystals is unstable since the EHL ground-state energy is 20 meV higher than the excitonic term. This theoretical result may seem unexpected, especially since in these crystals the valence band may be considered as being

two-fold degenerate by the orbital motion. Nevertheless, it should be borne in mind that in ZnO crystals, in contrast to other II–VI compounds, the polaron shift considerably exceeds the effective Rydberg. Within the scope of the total RPA a tendency was observed (Beni and Rice 1978) according to which the binding energy in the EHL decreases with the increase of the ratio E_p/R . An unexpectedly large instability of the EHL in ZnO crystals may be the result of this tendency. As to experiments of the EHL ground-state energy in these crystals, they apparently need further investigations.

(2) Direct-gap semiconductors with the valence band degenerate at the Γ point include cubic crystals of the compounds II–VI (ZnSe, CdTe, ZnTe, etc.) and III–V (GaAs, InSb, GaSb, InP, etc.) which have the zinc blende structure. The conduction band in these compounds is simple and of s-type symmetry. As compared to semiconductors of the wurtzite stucture, this class of compounds is characterized by a lesser degree of heteropolarity.

From this group of compounds GaAs crystals were studied comprehensively from the experimental point of view. The excitation of the EHL in GaAs was first reported by Bagaev et al. (1972). Note that for these crystals band parameters were measured with the highest accuracy as compared to other semiconducting compounds. Hildebrand and Goebel (1976) investigated gain spectra in GaAs under laser pumping and, from the high-frequency spectrum boundary, they found the ground-state energy of the e–h plasma with the density 3×10^{16} cm⁻³ to be 4 meV below the excitonic term. This result agrees with measurements made by Shah et al. (1976) who analyzed the transformation of the absorption spectra under laser pumping and determined the position of the chemical potential μ with respect to the polaron band gap, which turned out to be equal to $\mu_t = -9$ meV. Recently Hildebrand et al. (1978) have carried out complex investigations of luminescence, gain, transmission and excitation spectra of GaAs. At the same time the authors of this work found that temperature dependences of the chemical potential, Fermi energies of the carriers and equilibrium densities in these crystals contradict the EHL concept. Such a large value of the binding energy in the EHL in GaAs determined experimentally (Hildebrand et al. 1978) differs appreciably from calculation results within the scope of the RPA and ε_0 approximation. These discrepancies might result from the fact that in the above experiments the e-h plasma was heavily overheated and its temperature exceeded the critical value for the EHL in GaAs. Therefore, the value of the binding energy in the EHL evaluated by the position of the chemical potential from the gain spectra may be considerably overestimated. Recently time-resolved spontaneous luminescence and optical gain of high density electron-hole plasma (EHP) in GaAs at 4.2 K have been investigated under picosecond laser pulse excitation by Tanaka et al. (1980). With use of spectral shape analysis Tanaka et al. (1980) obtained the chemical potential and reduced band-gap energy for EHP and found that after picosecond pulse excitation, hot carriers cool down rapidly to 50 K within the first 150 ps, but

thermal equilibrium with the lattice is not attained up to 400 ps. The observed gaseous EHP is considered to exist only in a transient state; due to overheating, the electron-hole liquid state is not realized. A large overheating of the electron-hole system under picosecond laser excitation was observed as well for CdS and CdSe (Yoshida et al. 1980, 1981a,b). In this connection the experiments made by Stopachinskii (1977) are of interest; he carefully measured and analyzed the spectra of spontaneous luminescence for ultra-pure GaAs crystals at relatively low laser pumpings. In this work the bindig energy of the EHL was evaluated to be ~1 meV and the equilibrium density ~10¹⁶ cm⁻³ — these values are in good agreement with the theoretical calculation (see table 3).

For other direct band gap semiconductors with the zinc blende structure, except GaAs, comprehensive complex investigations of the EHL energy parameters are still lacking. For some of them the EHL parameters calculated theoretically and found experimentally are given in table 3.

(3) Among polar semiconductors with indirect-band gap, cubic AgBr crystals hold a special place. This semiconductor with a strong polar bond contains several hole ellipsoids and has a simple conduction band similar to wurtzite compounds II–VI (see table 2). Figure 9 shows calculations of the ground-state energy of the EHL in AgBr made within the framework of various approximations (Beni and Rice 1978). The calculation based on the total RPA (curve in fig. 9) gives the greatest stability of the EHL with respect to the decay into free excitons. The arrows in the figure show the ground-state polaron energy (the upper arrow) and the energy of the lowest excitonic term (the lower arrow). The EHL in AgBr was found experimentally and investigated by Hulin et al. (1977a). The authors analyzed the radiative recombination spectrum of the EHL under pulsed laser pumping and determined the binding energy which turned out to be extraordinarily high ($\varphi \approx 55$ meV), the critical condensation temperature T_c \approx 30 meV, if the exciton binding energy R = 16 meV found by Ascarelli (1969) is used. It should be noted, however, that this experimental value of the exciton binding energy in AgBr seems to be surprisingly small and lies far outside the excitonic Rydberg evaluations R and $R(\varepsilon_{\infty}/\varepsilon_0)^2$. Furthermore, the binding energy of the excitonic molecule in these crystals found experimentally (Pelant et al. 1976) is $\Delta_M \approx 7$ meV. Therefore, for the ratio $\Delta_M / R \approx \frac{7}{16}$ a value is obtained which exceeds appreciably the one that could have been expected in accordance with variational theoretical calculations (Brinkman et al. 1973). It should be borne in mind that any increase in R leads to a corresponding decrease in the EHL binding energy φ and, thus, the agreement with the experiment deteriorates. Beni and Rice (1978) supposed that the differences which exist between the experimental and theoretical values of φ in AgBr are connected with the inter-valley scattering between hole ellipsoids. As to the value of the equilibrium density determined experimentally, $n_0 = 8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, it agrees quite well with theoretical evaluations ($n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) (table 4).

0
le .
Ъb
Н

				Ŀ,	arametei	rs for pola	ır indirect	-gap sem	iconducto	rs			
		$arepsilon_0$ and	R is t 1ε are the are obta	the excito e static ar ined from	n bindin nd high-fi the pola	g energy, a requency d iron masse	the dime lielectric c s (with as	:nsionless onstants. ' terisk), ກົΩ	polar coup The bare m _{Lo} is the LC	ling const asses (wit)-phonon	ant, hout asterisk) energy.		
	$m^*_{e\parallel}$	$m_{e\parallel}$	$m^*_{e^\perp}$	$m_{e^{\perp}}$	$m^*_{_{\ell h}}$	$m_{_{\ell h}}$	m^*_{hh}	$m_{_{hh}}$	ε_0	ω ⁸	$\hbar\Omega_{_{LO}}$ (meV)	α_0	R (meV)
GaP	2.032 ^(a)	$1.781^{(b)}$	$0.254^{(b)}$	0.25	0.163 ^(a)	0.15	0.479 ^(a)	0.46	11.02 ^(a)	9.07 ^(a)	50 ^(a)	0.332 ^(a)	18 ^(a)
													13 ⁽ⁿ⁾
AlAs	2.37	2.0 ^(c)	0.245	$0.24^{(d)}$	0.16	$0.153^{(e)}$	0.67	0.65 ^(e)	10.9 ^(f)	8.5 ^(f)	49.8 ^(f)	0.428	$18\pm10^{\scriptscriptstyle{(g)}}$
SiC	0.647	$0.517^{(e)}$	0.24	$0.184^{(e)}$	0.125	$0.115^{(e)}$	1.2	$0.88^{(e)}$	9.72 ^(b)	$6.52^{(h)}$	$120.5^{(i)}$	1.46	$13.5^{(j)}$
			m_e^*	m_e	$m^*_{h\parallel}$	$m_{_{h\parallel}}$	$m^*_{h_\perp}$	m_{h^\perp}	ε_0	ω ⁸	$\hbar\Omega_{\scriptscriptstyle LO}$ (meV)	α_0	R (meV)
AgBr			0.288	0.221 ^(k)	1.71	1.25 ^(e)	0.79	$0.52^{(e)}$	10.6 ^(m)	4.68 ^(m)	$17.3^{(n)}$	3.35 ^(b)	16 ^(o)
زن	¹⁾ Beni and	Rice (1977	(2		(t)	legems and	d Pearson ((1970)		^(k) Hodby	' et al. (1974)		
IJ	¹⁾ Beni and	Rice (1978	3)		(6)	Lorenz et a	l. (1970)			^(I) Tamura	a and Masumi (1973)	
U U	်Hess et al	(1973)			(ų)	Patrick and	Choyke (1	970)		^(m) Lowne	des and Martin	(1969)	
U)	¹⁾ Stukel an	d Euwema	i (1969)) ()	Choyke and	Patrick (1	971)		^(II) Lowno	les (1972)		
ij	^{•)} Lawaetz (1971)			⊣ (j)	-lartman an	וd Dean (1)	(026		^(o) Ascare	elli (1969)		

V.D. Kulakovskii and V.B. Timofeev

Table 3

Theoretical and experimental ground-state parameters of the electron-hole liquid in polar direct-gap semiconductors.

 E_p is the polaron shift, n_0 is the equilibrium density, E_{p_i} , E_{p_i} are the electron (hole) Fermi energies, ω_p is the plasma frequency, E_c is the ground-state energy, $\varphi = |E_c| - R - E_p$ is the binding energy of the liquid with respect to the free exciton gas,

	nerature	
	ten	5
	citical	「いっこうこう
	the	
		ļ
-	F	4

T _c (K)	64 ^(k) 55 ⁽¹⁾	60 ^(m)			30 ^(k)			79 ^(k)	52 ^(u)				
arphi (meV)	12 ^(b)	13 ^(c)	12()) 2 ^(c)	2 ^(h)		(n) 2(n)				a) 22 ^(p)	
	(a) 1 (a)	13(i)	14(k)		(a) -4 ^(a)	0(i)	5 ^(k)) ^(a) -5 ^(a)	7 ⁽ⁱ⁾	12 ^(k)		a) -216	OK
E_{G} (meV)	-101.2				-47.9			-103.9				-224	
$\frac{\hbar\omega_p}{({\rm meV})}$	84 ^(a)				35.5 ^(a)			88(a)				201 ^(a)	
E _{Fh} (meV)	7.7 ^(a)	4 ^(c)			3.4 ^(a)			17.3 ^(a)	$13^{(u)}$			19.9 ^(a)	
E_{Fe} (meV)	50.7 ^(a)	26 ^(c)			21.0 ^(a)			42.9 ^(a)	32 ^(u)			116.3 ^(a)	
n_0 (cm ⁻³)	$1.5 imes10^{18(b)}$	$1.6\times10^{18(c)}$	$1.4\times10^{18(\mathrm{f})}$	$0.8\times10^{18(g)}$	$4 imes 10^{17(\mathrm{c})}$	$(1{-}3)\times 10^{17(e)}$	$1.7\times10^{17(h)}$	$3.5\times10^{18(\text{u})}$			$10^{18(p)}$	$2\times 10^{19(a)}$	
	$3.9\times10^{18(a)}$	$2.6\times10^{18(i)}$	$5.5\times10^{18(k)}$	$1\times 10^{18(\text{d})}$	$5.4\times10^{17(a)}$	$4.0\times10^{17(i)}$	$0.8\times10^{18(k)}$	$4.9\times10^{18(a)}$	$4.9\times10^{18(i)}$	$8.3\times10^{18(k)}$		$1\times 10^{19(k)}$	
E_p (meV)	73.1 ^(a)				36.7 ^(a)			73.2 ^(a)				186 ^(a)	
	CdS				CdSe			ZnS				ZnO	

'e 3 (contd.)	(18 ^(k)		$34^{(t)}$		20 ^(s)		6.5 ^(k)				a, b)	(q
Tabl	T (K	62 ^(q)							1 ⁽ⁿ⁾	5 ^(o)	$2.24^{(0)}$	6.5 ⁽⁰⁾) shtis (1978) shtis (1980)	kshtis (1980
	(V)		$2-4^{(r)}$		4 ^(t)		$5^{(s)}$:t al. (1978) 77) (1980) ⁻ raniv (1979 as and Kuok as and Kuok	as and Kuoł
	arphi (me		0 ^(a)	0.9 ^(k)	5 ^(a)		3 ^(a)		0.28 ^(a)	1.8 ^(k)	0 ^(a)	1 ^(a)	Hildebrand e kettrup (19 Srodin et al. Aatsko and F aaltrameyun.	saltrameyun
	E_G (meV)		$-32.7^{(a)}$		$-58.8^{(a)}$		$-34.8^{(a)}$		$-10.0^{(a)}$		$-2.3^{(a)}$	$-15.6^{(a)}$		(n)
	$\hbar \omega_p^{}$ (meV)		$29.6^{(a)}$		86.7 ^(a)		36.7 ^(a)		$10.4^{(a)}$		$4.4^{(a)}$	13.2 ^(a)) n (1977)	
	E_{Fh} (meV)		2 ^(a)		7.8 ^(a)	$2^{\left(t ight) }$	$4.3^{(a)}$	2 ^(s)	0.8 ^(a)		0.32 ^(a)	1.0 ^(a)	t et al. (1980 ce (1976) (1977) Zimmerman Shah (1977) 977)	kii (1977)
	$E_{_{Fe}}$ (meV)		15.6 ^(a)		46 ^(a)	21 ^(t)	17.2 ^(a)	10 ^(s)	6.1 ^(a)		2.35 ^(a)	7.6 ^(a)	Korneychuk Beni and Ri Müller et al. Rösler and Leheny and Reinecke (1	Stopachins
	$n_0 \over \mathrm{m}^{-3})$		$1.5 imes 10^{17(\mathrm{r})}$		$10^{18(t)}$		$2.5 imes 10^{17(\mathrm{s})}$		10 ¹⁶⁽ⁿ⁾					(u)
	(C	$1.4 imes 10^{18(q)}$	$2.4 \times 10^{17(a)}$	$0.3\times10^{18(k)}$	$3.2\times10^{18(a)}$		$6.6 imes 10^{17(a)}$		$3.7 imes 10^{16(a)}$	$3.4\times10^{16(k)}$	$4.9 \times 10^{15(a)}$	$6.7 imes 10^{16(a)}$	(1978) (1975) ah (1976) eev (1977) (1978) (1977b)	(1977a)
	E_p (meV)		22.7 ^(a)		32.6 ^(a)		20.5 ^(a)		7.7 ^(a)		2.0 ^(a)	$15.5^{(a)}$	ni and Rice enko et al. (neny and Sh. e and Timof y and Mahr tisuke et al.	tisuke et al.
		PbJ_2	CdTe		ZnSe		ZnTe		GaAs		GaSb	InP	(a) Ber (b) Lys (c) Leh (d) Dith (c) Dith (c) Dal	0M (6)

4	
ble.	Ors
Ta	ıcto
	ndı
	ico
	iem
	ap s
	t Š
	rec
	ndi
	ar i
	pol
	in'
	uid
	liq
	ole
	h-h
	tro
	elec
	ne e
	of tl
	IS (
	nete
	ran
	pai
	ate
	l-st
	oun
	gro
	tal
	nen
	erin
	adx:
	nd e
	lar
	tica
	orel
	the
	of 1
	ist

 E_p is the polaron shift, n_0 is the equilibrium density, E_{E_r} , E_{E_r} are electron (hole) Fermi energies, ω_p is the plasma frequency, E_c is the ground-state energy, φ is the binding energy of the liquid with respect to the free exciton gas ($\varphi = |E_c| - R - E_p$), T_c is the critical temperature.

^(a) Beni and Rice (1978)
 ^(b) Beni and Rice (1976)
 ^(b) Beni and Rice, 1978)
 ^(c) Shah et al. (1977a)
 ^(d) Vashishta et al. (1977)
 ^(g) Hulin et al. (1977b)

^(h) Hulin et al. (1977a)
 ^(h) Müller and Zimmermann (1979)
 ^(h) Bimberg et al. (1978)
 ^(k) Skolnik et al. (1978)



Fig. 9. Ground-state energy plotted against r_s for AgBr: (*a*) pure Coulomb interaction (no phonons); (*b*) LO-phonon coupling included by replacing ε_{∞} with ε_0 , using the polaron effective masses and adding the polaron shift; (*c*) LO-phonon coupling included within the framework of generalized RPA. Upper arrow — the polaron ground-state energy E_p . Lower arrow — the experimental position of lowest excitonic level (from Beni and Rice (1978)).

Consider now the compound GaP, which is a polar semiconductor with an indirect band gap and a degenerate valence band (table 2). This compound has a less degree of polarity as compared to AgBr. Certain difficulties arise in the description of the EHL properties in GaP: they are due to the lack of exact knowledge of band parameters. It concerns primarily the effective masses near band extrema. Thus, the effective masses of light and heavy holes have been measured by means of cyclotron resonance only along the $\langle 111 \rangle$ direction. For the $\langle 100 \rangle$ direction the masses of holes were evaluated theoretically (Lawaetz 1971). The conduction band in GaP has the "camel back" structure; it has 6 valleys since band extrema are situated near the point X. However, the depth of the barrier associated with the "camel back" is not large (about 1 meV), therefore, in the calculations of the EHL ground-state energy the extrema of the conduction band are assumed to coincide with the boundary of the Brillouin zone and thus the conduction band itself has only 3 valleys (Beni and Rice 1977). The EHL in GaP epitaxial films of high purity was found by several groups of experimentators (Shah et al. 1977a, Hulin et al. 1977b, Maaref et al. 1977). When the experimetal shape of the EHL emission spectrum in GaP is analyzed, certain difficulties arise due to the overlapping of bands corresponding to indirect recombination with the participation of various phonons, in particular, TA, LA and TO (energy differences between these phonons are less than the sum of the Fermi energies of carriers in the EHL). In spite of the above difficulties which limit the precision of the experimental analysis of the spectrum, in the case of GaP good agreement between the theory and the experiments is attained for the EHL parameters (see table 4).

Recent communication by Ching-Hwa et al. (1979) on the observation of an EHL with a large binding energy and a high critical temperature ($T_c \sim 90$ K) in the indirect-gap polar semiconductor GaN is of great interest. However, in this compound band parameters are not known well enough. The EHL energy parameters calculated and found experimentally for other indirect polar semiconduct-ing compounds are presented in tables 3 and 4.

In conclusion of this section note that up to the present calculations of the EHL energy parameters made within the scope of the total RPA for several groups of polar semiconducting compounds give results which are in satisfactory agreement with experimental observations. Nevertheless, for some compounds there exist considerable discrepancies between experimental and calculated values for such important characteristics of the EHL as the binding energy and the equilibrium density.

Inaccuracies in the calculations of the EHL binding energy are connected not only with the drawbacks of the calculation technique in itself, but with our still imperfect knowledge of such input parameters important for the theory as effective masses, dielectric constants, exciton binding energies, etc. At the final step of the theoretical calculation two large values are compared — the ground-state energy E_g with the sum of the polaron shift and the exciton binding energy $E_p + R$. Therefore, even a small inaccuracy in the input parameters leads to an appreciable error in the determined difference of these two large values: $\Phi = E_p + R - |E_G|$. For example, with the available precision of experimental parameters required for the theory the typical error in the calculations of E_G is 10–20%. It should also be borne in mind that inaccuracies in the values of dielectric constants have an opposite effect on the calculation results for E_p and R.

In polar semiconducting compounds where the density of the EHL is relatively low, so that the plasmon frequency is much less than LO-phonon frequency, the calculation of the EHL ground-state energy within the scope of the ε_0 approximation yields results which are closer to experiment, as compared to calculations with due regard for the dynamic screening. We refer primarily to III–V compounds, such as GaAs, GaSb, InP, InSb and InAs. Comparing the polarization contribution calculated within the framework of the static (ε_0 approximation) and dynamic screening, Beni and Rice (1978) noted that at $\omega_p \ll \Omega_{LO}$ the polarization contribution calculated to second order within the scope of the static screening leads to a stronger decrease in the ground-state energy as compared to the dynamic screening approximation. Thus, for a certain class of semiconducting compounds with relatively low density of the EHL the ε_0 approximation turns out to be the best.

Finally, it should be noted that a more correct consideration of electron–hole correlations may have an appreciable effect on the values of the binding energy and equilibrium density being calculated. This refers primarily to semiconductors with simple (nondegenerate) bands for which characteristic scales of densities are in the region $r_s \sim 2$.

3. Gas/electron-hole liquid phase diagram

In the present section we discuss temperature properties of the electronhole system in the region of condensation into the electron-hole liquid. The phenomenon of condensation of excitons into drops of the EHL is a first order phase transition (Keldysh 1968) and is described by an appropriate phase diagram. If we neglect the finite lifetime of e-h pairs in the condensed phase (assuming $\tau_t \rightarrow \infty$) and, proceeding from this assumption, consider the e-h system to be in full thermodynamic equilibrium, then the phase diagram of the gas-EHL transition in the coordinates density-temperature (n-T) will have the form shown qualitatively in fig. 10. In the low-temperature part, phase boundaries of this diagram describe two regions: a gaseous region which consists of a weakly ionized excitonic gas at average densities $\overline{n} \leqslant n_g^0$, and a liquid region which consists of the metallic e-h plasma at $\overline{n} \ge n_0$ (n_0 is the equilibrium density of the condensed phase). In the intermediate region of concentrations $n_g^0 < \overline{n} < n_0$ the nonequilibrium e-h system separates into a liquid and a gaseous phase with densities n_0 and n_g^0 independent of \overline{n} at the given temperature. The two-phase region narrows with increasing temperature due to the increase in the density of saturated vapour of the gas and the temperature expansion of the liquid, and disappears completely at the critical temperature of the phase transition T_c . At higher temperatures $(T > T_c)$ the nonequilibrium e-h system remains homogeneous at any \overline{n} .

The electron-hole system in a semiconductor is in principle a nonequilibrium system due to electron-hole recombinations. With due regard for the finite life-time of e-h pairs in the condensed phase the shape of the gas–EHL coexistence curve $n_g^0(T)$ is appreciably modified, whereas the shape of the phase boundary from the liquid side $n_0(T)$ practically does not change in this case.

Condensation in the nonequilibrium e-h system differs from the similar phenomenon in the case of simple liquids by the following important feature. At low temperatures the weakly ionized dielectric gas of excitons is condensed into EHL drops. Near the critical region of the phase diagram bound excitonic states disappear due to the screening of Coulomb interaction, and the e-h gas is completely ionized. This means that along the gas–EHL coexistence curve there is a region where ionization breakdown of excitons was expected to bear the character of a first-order phase transition (of the insulator–metal type) and as such to have a considerable effect on the shape of the gas–EHL phase boundary.





In the consideration of the phase diagram the following characteristic regions may conveniently be isolated:

(1) The equilibrium region from the liquid phase side. In the low-temperature part of this phase boundary the EHL properties are well described within the scope of the phenomenological theory for the quantum Fermi liquid;

(2) The critical region of the phase diagram where the gas and the liquid represent a completely ionized e-h system;

(3) The low-temperature region of the gas phase, where due to the low density, bound excitonic (and molecular) states prevail. In this region the effects are most important which are due to the finite time of the electron–hole recombination;

(4) The region of ionization breakdown of excitons due to the effects of thermoionization and screening of the Coulomb interaction.

3.1. The liquid phase; region of low-temperature expansion

The EHL in semiconductors is a dense e-h system. For example, in Ge and Si having a high degree of orbital degeneracy of the electronic spectrum, equilibrium densities of e-h pairs in the EHL at $T \rightarrow 0$ correspond to the dimensionless parameter $r_s = 0.5$ (Ge) and $r_s = 0.84$ (Si) (see tables 5, 6). Due to a high density, the EHL at low temperatures becomes a strongly degenerate Fermi system and its thermodynamic properties may be described within the framework of the phenomenological theory. The expansion of the free energy of the EHL per e-h pair $F(n_0, T)$ in powers of temperature may be written as follows (Pines and Nozières 1966):

$$F(n_0, T) = E_G(n_0) + ST = E_G(n_0) - \frac{1}{2}\tilde{\kappa}(n_0)kT.$$
(39)

Here the second term is connected with the system entropy which in the case of normal metals is linear in temperature $S = \tilde{\kappa}kT$. Coefficient $\tilde{\kappa}$ in eq. (39) is given by:

$$\tilde{\kappa}(n_0) = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\pi}{3n_0}\right)^{2/3} \left(v_e^{2/3} m_{de} + v_h^{2/3} m_{dh}\right).$$
(40)

Renormalization of masses due to collective interaction effects in the EHL is assumed to be included in density-of-states effective masses m_{de} and m_{dh} . It follows from theoretical calculations (Rice 1977) and experimental studies of magnetoplasma resonance (Kononenko and Murzin 1978) that the changes of the effective masses of carriers in the condensed phase are no more than 5–10%. Furthermore, the free energy may be as well expanded in powers of the density near the equilibrium value n_0 . Limiting oneself to terms of second order one obtains:

$$F(n_0,T) = E_G(n_0^*) + \frac{1}{2} E_G'' \Big|_{n_0 = n_0^*} (n_0 - n_0^*)^2 - \frac{1}{2} \tilde{\kappa}(n_0^*) (kT)^2, \qquad (41)$$

where E''_{G} is the second derivative with respect to n_0 . Minimising *F*, it may easily be found that:

$$n_0(T) = n_0^* \left[1 - \delta_n (kT)^2 \right], \tag{42}$$

where $\delta_n = \frac{1}{2}\tilde{\kappa}/n_0^* E_G''$ and $n_0^* = n_0(0)$. From here it follows that the main corrections to the equilibrium density are quadratic in temperature. Thus, temperature effects of the EHL in a semiconductor and a Fermi liquid in an ordinary metal have a common nature associated with the electron entropy.

From eqs. (39)–(41) there follow corrections — quadratic in temperature — not only in the equilibrium density, but also in the chemical potential μ_L , and the Fermi energy $E_F = E_{Fe} + E_{Fh}$:

$$\mu_{L}(T) = \mu_{L}(0) - \delta_{\mu} E_{F}(0) (kT)^{2},$$

$$E_{F}(T) = E_{F}(0) [1 - \delta_{E} (kT)^{2}],$$
(43)

where

$$\delta_{\mu} = \frac{\tilde{\kappa}}{2E_F}, \quad \delta_E = \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{E_{Fe} E_{Fh}} - \frac{1}{3} \frac{\tilde{\kappa}'}{n_0^* E_G''(0)}$$

The dependences $E_F(T)$, $n_0(T)$ may be found experimentally by studying the shape and energy position of the radiation spectrum of the EHL at various temperatures. In the case of the indirect recombination in the e–h plasma with the emission of a monochromatic phonon $\hbar\Omega$ one may write for the shape of the radiation spectrum:

$$I(\hbar\omega) \sim \iint |M|^2 dE_e dE_h D_e(E_e) D_h(E_h) f_e(E_e) f_h(E_h) \delta(E_e + E_h + E'_g - \hbar\Omega), \quad (44)$$

where M is the matrix element of the transition with a given phonon, E'_{g} is the renormalized indirect gap. For allowed transitions the matrix element M is assumed to be independent of k. In the case of Si the allowed transitions are ones with the emission of LO and TO phonons, for Ge — with emission of LA phonons.

Table 5a

	Ge(4	l-2)	Ge(1-1)
	Т	Е	Т	Е
Ground-state energy, E_G (meV)	5.9 ^(c)	6.0 ^{(d),(e),(f)}	3.08 ^{(c),(k)}	2.98 ^(m)
Density $n_0 (\times 10^{-17} \text{ cm}^{-3})$	1.8 ^(a)	2.38 ^{(d),(e),(f)}	0.11 ^(k)	0.1 ^(e)
	2.2 ^{(b), (c)}	$2.2^{(g)}$ $2.3^{(h),(i)}$		0.274 ^(m)
Binding energy φ (meV)	1,75 ^{(b), (c)}	1.8 ^{(d),(e),(f)}	0.45 ^(k)	0.65 ^(m)
				0.43 ^(l)
Fermi energy of				
electrons, E_F^e (meV),	2.4 ^{(b), (c)}	$2.53^{(d),(e),(f)}$	0.8 ^(k)	0.8 ^{(l),(n)}
holes, E_F^h (meV)	2.4 ^{(b), (c)}	2.53 ^{(d),(e),(f)}	1.9 ^(k)	1.9 ^{(l),(n)}

Ground-state energy and thermodynamic parameters of electron–hole liquid in Ge (T – theory; E – experiment)

Table 5a (contd.)

	(Ge(4	l-2)	Ge(1-1)
	Т		E	Т	Е
Temperature corrections					
δ_E (meV ⁻²)	0.92 ^(c)		0.71 ^(d)	-	-
δ_n (meV ⁻²)	0.98 ^(d)			-	-
δ_{μ} (meV ⁻²)	$1.7^{(c)}$ $2.4^{(d)}$)	2.2 ^(d)	1.4 ^(c)	-
Critical parameters					
$n_c (imes 10^{-17}{ m cm^{-3}})$	0.9 ^(c) 0.8 ^(r)),(S)	0.6 ^(p)	0.042 ^(c)	0.077 ^(m)
T_{c} (K)	6.0 ^(c) 5 ^(r) , 8	3 ^(s)	6.7 ^(p)	2.6 ^(c)	3.5 ^(m)
Compressibility					
χ (10 ⁻³⁵ meV ⁻¹ cm ³)	2 ^(k)		1.9 ^(d)	337 ^(k)	_

^(a) Brinkman and Rice (1973a)

^(b) Bhattacharyya et al. (1974) ^(c) Vashishta et al. (1974b,c) ^(m) Feldman et al. (1977) ^(d) Thomas et al. (1973) ⁽ⁿ⁾ Feldman et al. (1978) ^(e) Thomas et al. (1976) ⁽⁰⁾ Beni and Rice (1978) ^(f) Lo (1974) ^(p) Thomas et al. (1978) ^(g) Martin (1976)

^(h) Murzin et al. (1973)

⁽ⁱ⁾ Betzler et al. (1975)

^(k) Vashishta et al. (1974c)

^(l) Thomas and Pokrovsky (1978)

- ^(r) Reinecke and Ying (1975)

^(s) Combescot (1974a)

Table 5b

List of experimentally measured ground-state energy and thermodynamic parameters in uniaxially compressed Ge under different magnitude of compression P

Axis of compression	P (MPa)	$n_0 (10^{16} \mathrm{cm}^{-3})$	$({ m meV})$	E_F^e (meV)	E_F^h (meV)	n_c (10 ¹⁶ cm ⁻³)	Т _с (К)
	160	2.7 ^(a)	0.65 ^(a)	1.47 ^(a)			3.5 ^(a)
$\langle 111 \rangle$	200	1.3 ^(b)	0.9 ^(b)	0.9 ^(b)	1.7 ^(b)	0.85 ^(b)	3.8 ^(b)
	400	1.1 ^(b)	0.6 ^(b)	0.8 ^(b)	2.0 ^(b)	0.8 ^(b)	3.5 ^(b)
(100)	300	0.75 ^(b)	0.28 ^(b)	0.64 ^(b)	1.6 ^(b)	0.65 ^(b)	3 ^(b)
$\approx \langle 100 \rangle$	500	_	_	_	_		<2.2 ^(b)

^(a) Feldman et al. (1977)

^(b) Timofeev et al. (1982)

Table 6

Ground-state energy a	and thermod	ynamic paramet	ers of electron	-hole liqu	id in Si(T	— theory; E — ex	kperiment	
	Si	i(6-2) 2 = 0	$egin{array}{c} { m Si}(6{ extsf{-1}}) \ P \ \langle 111 angle angle$	$egin{array}{c} { m Si}\left(4{ extsf{-1}} ight) \ P \ \langle 110 angle \end{array}$	Si(2-1) $P \parallel \langle 123 \rangle$	${\mathop{\mathrm{Si}}(2\text{-}1)}{P}\ \langle100 angle$		Si(2-1) potential well
	Τ	E	E	Е	Е	Е	Т	Е
Ground-state energy,	21.97 ^(c)	23 ^(f)	$18.5^{(i)}$	$16.8^{(k)}$	$15.4^{(k)}$	14.8 ^{(i),(o)}	14.7 ^(c)	I
$E_{ m G}$ (meV)	$21^{(d)}$	22.9 ^{(g),(h)}	$18.15^{(j)}$	17.65 ^(j)		$14.95^{(i)}$		
Density, $n_{ m o} imes 10^{18} { m cm}^{-3}$	$3.4^{(a),(d)}$	3.7 ^(e)	1.0 ^{(i),(l)}	0.75 ^(k)	0.55 ^(k)	$0.45^{(0)}$	0.447 ^(c)	0.37 ^(m)
	2.9 ^(b)	$3.0^{(f)}$ $3.33^{(g)}$	$1.13^{(j)}$	0.930		0.6 ^(l) 0.48 ^(j)		0.33 ⁽ⁿ⁾
	3.2 ^(c)	3.5 ^{(h),(i),(j)}						
Binding energy, χ (meV)	5.7 ^(a)	8.21 ^(g)	5.5(i) 5.3(i)	3.8 ^(k)	2.3 ^(k)	2.0 ^{(i),(o)}	1.9 ^(c)	1.5 ⁽ⁿ⁾
	7.21 ^(c)	8.3-8.8 ^(f)	7.2 ⁽¹⁾	$4.8^{(j)}$		2.1 ⁽ⁱ⁾ 0.3 ^(j)		
Fermi energy of								
electrons, E_F^e (meV),	7.46 ^(c)	7.9(g),(h)	3.4 ⁽ⁱ⁾	3.7 ^(k)	4.8 ^(k)	$4.3^{(0)}$	4.2 ^(c)	3.5 ⁽ⁿ⁾
holes, $E_{\scriptscriptstyle F}^h$ (meV)	13.7 ^(c)	$14.4^{(g),(h)}$	$13.6^{(i)}$	$11.8^{(k)}$	9.6 ^(k)	9.1(0)	9.1 ^(c)	7.6 ⁽ⁿ⁾
Temperature corrections, $\delta_i T^2$								
$\delta_{_E}$ (meV $^{-2}$)	0.078 ^(c)	$0.05^{(f),(g)}$	Ι	I	I	I	0.185 ^(c)	I
δ_n (meV ⁻²)	0.1 ^(c)	0.07 ^(f)						
		0.045 ^(h)	I	I	I	I	$0.246^{(c)}$	I

le 6 (contd.)	Si (2-1) potential well	Е		I			I	I			I	y (1979) (1980) 7b) 4a)		
Tab	$\mathop{\mathrm{Si}}_{P} (2\text{-}1)$ $P \ \langle 100 angle$	Т	0.065 ^(c)				0.17 ^(c)	14.3 ^(c)			$0.17^{(b)}$	and Gorle ovskii et al et al. (197 escot (197-		
		Е	I				o) 0.18 ^(j)	14 ⁽ⁱ⁾		I		(n) Wolfe (o) Kulakc (p) Shah 6 (1) Combe		
							0.15	13(0)				1980)		
	$\mathop{\mathrm{Si}}_{P\parallel\langle123 angle}$	Е		Ι			Ι	I			Ι	1) (ukushkin (r (1979) è (1978)		
	$egin{array}{c} { m Si}\left(4{ extsf{-1}} ight) \ P \ \langle 110 ight angle$	Е		I			0.290	$16.4^{()}$			I	l et al. (198 vvskii and K r and Sauei ey and Wolf		
	$egin{array}{c} { m i}(6{ m -}1) \\ \left\ \left< 111 ight> \end{array}$	Е	I				$0.36^{(j)}$	16,90			I	⁽ⁱ⁾ Forche ^(k) Kulakc ⁽ⁱ⁾ Wagne ^(m) Gourlé		
	P S						I	Ι				75)		
	Si (6-2) $P = 0$	Е	0.05 ⁽ⁱ⁾	0.036 ^(g)	$0.013^{(h)}$		2(h),(j) 1.1(p)	8 ^(h) 23 ^(j)	27 ^(p)		0.05 ^(g)	ghtowlers (19 t al. (1976) .977) et al. (1978a)		
							() 1.2	2				and Liç nond e et al. (1 ovskii		
		Т	$0.024^{(c)}$				1.2 ^(c) 0.8 ⁽	20.8 ^(c)	28 ^(q)		$0.032^{(b)}$	(†) Vouk (g) Hamr (†) Dite ((†) Kulak		
			δ_{μ} (meV^{-2})			Critical parameters	$n_c~(imes 10^{18}~{ m cm}^{-3})$	T_c (K)		Compressibility	χ (10 ⁻³⁵ meV ⁻¹ cm ³)	 ^(a) Brinkman and Rice (1973) ^(b) Bhattacharyya et al. (1974) ^(c) Vashishta et al. (1974b) ^(d) Combescot and Nozières (1972) ^(e) Pokrovskii (1972) 		

If the transition is forbidden by symmetry considerations, the appropriate matrix element may be expanded in powers $k_{e,h}$. Limiting oneself to the terms linear in k, one obtains:

$$M = \tilde{M}_e k_e + \tilde{M}_h k_h, \tag{45}$$

where \tilde{M}_e and \tilde{M}_h are corresponding matrix elements. The expression (45) was used in the approximation of the spectrum shape for the forbidden TA component of the EHL in Ge (Benoit à la Guillaume and Voos 1973, Martin 1976). Note that in Si transitions with the emission of a TA phonon are allowed; however, the contribution of the terms linear in *k* turns out to be considerable for them (Voisin et al. 1979).



Fig. 11 (a), (b).



Fig. 11. The emission spectra of free exciton and EHL in Si under pulsed excitation $(\bar{n} \approx 1.5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3})$: (a) T = 5.5 K, solid circles and crosses correspond to delay times 0.1 and 1 μ s, respectively, open circles correspond to DC excitation with $\bar{n} \approx 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. (b) T = 16 K, solid circles, crosses, open circles and squares correspond to $\tau_d = 0.1$, 0.6, 1.6 and 3.2 μ s, respectively. (c) T = 25 K, solid circles, crosses, open circles, squares and triangles and solid traingles and squares correspond to $\tau_d = 0.1$, 0.4, 0.7, 1.2, 1.4, 3.2 and 4.8 μ s. The solid lines are the calculated EHL line-shape with the use of the parameters: (a) $n_0 = 3.35 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, T = 4.5 K; (b) $n_0 = 3.1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, T = 16 (1) and 19 K (2); (c) $n_0 = 2.5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, T = 25 K (from Dite et al. (1977)).

In the case of allowed transitions in expression (44) for $I(\hbar\omega)$ there are two adjustable parameters n_0 and T which can be reliably determined from the condition of the best fit of experimentally measured recombination spectra. Such analysis of the shape of the EHL radiation spectrum (L line) in the region of allowed transitions was performed in Ge (Thomas et al. 1973, Lo 1974) and in Si (Vouk and Lightowlers 1975, Hammond et al. 1976, Dite et al. 1977). In Ge and Si, just as in the case of direct-gap semiconductors it is not possible to describe the low-frequency region of the radiation spectrum by means of expression (44), where "red tail" is observed. Therefore, usually another adjusting parameter Γ is introduced (see sect. 2.2.1) which characterizes the damping of states below Fermi surfaces in electron and hole bands. The introduction of the parameter Γ leads to a slight variation (5%) in the values found for n_0 in the case of Si (Kulakovskii et al. 1978a).

Consider, as an example, experimental investigations of the EHL radiation spectrum shape in unstressed Si crystals shown in fig. 11 for several temperatures*. For each spectrum the approximation of the L-line shape by means of expression (44) is shown. With the increase of *T*, due to the smearing of distribu-

^{*} A detailed analysis of the shape of the radiation spectrum in the e-h liquid in Ge is given in the review article by Hensel et al. (1977).

tion functions of electrons and holes, the high-frequency edge of the EHL line broadens considerably. The chemical potential shifts to lower energies and the linewidth, which is determined by the sum of Fermi energies ($E_{Fe} + E_{Fh}$), decreases. It is seen that the influence of temperature on the thermodynamic parameters of the liquid is relatively large.



Fig. 12. The temperature dependences of equilibrium density, chemical potential and Fermi energy in unstressed Si (from Dite et al. (1977)).

As a result of experimental investigation of the shape of the EHL radiation spectrum in Ge and Si it was found that the corrections for n_0 , E_F and μ_L at $T < \frac{1}{2}T_c$ in Ge (T < 3 K) and in Si (T < 20 K) are quadratic in temperature. The dependences $n_0(T)$, $E_F(T)$ and $\mu_L(T)$ measured for Si in the temperature range $T \leq 25$ K (Dite et al. 1977) are shown in fig. 12. Experimental and theoretically calculated values of coefficients δ_E , δ_n , δ_μ obtained by different authors, are given in tables 5 and 6. Experimental results and theory are seen to be in satisfactory agreement. It should be noted that from δ_μ it is possible in principle to obtain renormalized
effective masses. However, this coefficient is still determined in the experiments with insufficient accuracy (\sim 20%).

By means of the thermal expansion coefficient for the EHL δ_n the local curvature for $E_c(n)$ near n_0 may be determined. In fact, from eqs. (39) and (42) we have:

$$E_G'' = -\tilde{\kappa}/2\delta_n n_0. \tag{46}$$

From here the isothermal compressibility of the EHL $\tilde{\chi}$ may easily be evaluated (Vashishta et al. 1974b):

$$\tilde{\chi} \equiv \left(n_0^3 E''\right)^{-1}.\tag{47}$$

Compressibility values $\tilde{\chi}$ for the EHL in Ge and Si determined with the use of experimentally found thermal expansion coefficients δ_n agree satisfactorily with those calculated theoretically. As would be expected, isothermal compressibility of the EHL in Ge ($\tilde{\chi}$ (Ge) = $4 \cdot 10^{-3}$ cm²/dyne) is two orders higher than that in Si ($\tilde{\chi}$ (Si) = $4 \cdot 10^{-5}$ cm²/dyne). The EHL in Ge is one of the most compressible of the known quantum liquids. Thus, $\tilde{\chi}$ in Ge is 4 orders higher than the compressibility of ³He ($\tilde{\chi} = 4 \cdot 10^{-7}$ cm²/dyne).

3.2. Critical region

In the critical region the gas and the liquid become indistinguishable. At $T > T_c$ the nonequilibrium e-h system no longer separates into phases, and remains homogeneous with respect to density at any concentration of e-h pairs. With density varying isothermally at $T > T_c$, only partial pressures of the e-h system components vary – free carriers, excitons, excitonic molecules, etc.

Phase boundaries near the critical point may be analyzed upon the assumption that in this region of the phase diagram the e-h system retains its metallic properties. Then, by analogy with a metal the free energy may be represented as a sum:

$$F(n,T) = F_0(n,T) + F_{xc}(n,T).$$
(48)

The first term in this expression is the free energy of noninteracting electrons and holes and the second one is the part of the free energy which is connected with the Coulomb (exchange and correlation) interaction. In the first approximation the Coulomb part of the free energy may be supposed to be temperature independent (Thomas et al. 1973):

$$F_{xc}(n,T) = F_{xc}(n,0).$$
 (49)

In fact is, that within RPA the main temperature contribution to F_{xc} is due to the excitation of plasmons. This contribution becomes appreciable at $\hbar\omega_p \lesssim kT$, where ω_p is the plasmon frequency of the EHL. In the case of Ge and Si, $\hbar\omega_p(n_c) \gg kT_c$, namely, in Ge the critical density $n_c = 10^{17}$ cm⁻³ (Thomas et al. 1974), $\hbar\omega_p = 14$ meV, $kT_c \approx 1$ meV; and in Si $n_c \sim 10^{18}$ cm⁻³ (Dite et al. 1977), $\hbar\omega_p \sim 30$ meV and $T_c \sim 3$ meV.

Equilibrium values of the EHL density n_0 and the density of saturated vapours of the e-h gas n_g^0 are found from the equality of chemical potentials and pressures:

$$\mu \left(n_g^0 \right) \Big|_T = \mu \left(n_0 \right) \Big|_T, \tag{50}$$

$$p\left(n_{g}^{0}\right)\Big|_{T} = p\left(n_{0}\right)\Big|_{T},$$
(51)

where $\mu = F + n\partial F/\partial n$, pressure $p = n^2 \partial F/\partial n$, and $F = F_0(n, T) + F_{xc}(n)$. At the critical point:

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{n_c, T_c} = \left. \frac{\partial^2 \mu}{\partial n^2} \right|_{n_c, T_c} = \mathbf{0}.$$
(52)

Critical parameters n_c and T_c calculated by these formulae are versy sensitive to the energy dependence $E_G(n)$ near n_c since they are determined in terms of the third derivative $E_G''(n)$. The critical values of temperature and density calculated by means of RPA (Combescot 1974a) and self-consistent formalism (Vashishta et al. 1974b) for Ge and Si are presented in tables 5 and 6. Note also calculations of the phase diagram near the critical point based on other approaches. Reinecke and Ying (1975) calculated the corrections due to the surface energy δ_L which are temperature dependent (proportional to T^2) and found T_c to be the temperature at which δ_L becomes zero. Droz and Combescot (1975) used the model of the spin-one lattice gas with phenomenological interaction constants and made calculations in the mean field approximation. In both cases the calculated phase diagrams near T_c were close to the universal phase curve for ordinary liquids.

Phase diagrams in the critical region were first and most thorougly measured experimentally in Ge (Thomas et al. 1974, Thomas et al. 1978) and in Si (Dite et al. 1977, Shah et al. 1977b). These studies were based on the analysis of radiation spectra of the gaseous phase and the EHL. The closer one is to the critical point, the larger become the errors in the determination of $n_0(T)$ in the EHL by this technique. These difficulties arise as follows: in the critical region, difference between the densities of the gaseous phase $n_g^0(T)$ and of the EHL $n_0(T)$ becomes small. Therefore, the resultant radiation spectrum is the superposition of two strongly overlapping bands — the gaseous phase and the EHL, which are additionally broadened due to the temperature smearing of the distribution of electrons and holes. Under such overlapping it is very difficult to differentiate line contours for the subsequent analysis of their shapes. The overlapping of emission lines corresponding to the gaseous phase and the EHL in Si crystals is illustrated in fig. 11(b). As the critical point is approached, the overlapping of bands increases. In the immediate vicinity of T_c the bands of the e-h gas and EHL practically fully coincide in the energy scale and they cannot be separated. Therefore, the data on T_c and n_c are obtained by extrapolation experimental dependences $n_0(T)$ and $n_{\sigma}^{0}(T)$ to T_{c} .

Experimental determination of $n_g^0(T)$ is based upon onset measurements of the average density \overline{n} of e-h pairs at which an EHL emission line appears in the spectra. The value \overline{n} is related to the power of the exciting monochromatic light *I* as follows:

$$\overline{n} = \eta \left(1 - \overline{R} \right) \frac{I}{V} \frac{\tau^*}{\hbar \omega},\tag{53}$$

where $I/\hbar\omega$ is the number of incident photons, \overline{R} is the reflection coefficient, τ^* is the lowest value of the lifetimes of e–h pairs or the duration of the pulse excitation, η is the quantum efficiency. The errors in the evaluation of \overline{n} by formula (53) at surface excitation may be up to ≈ 20 to 30% owing to difficulties in the control of diffusion length variations with \overline{n} .



Fig. 13. The phase diagram of the EHL in Ge showing equilibrium phase boundaries (solid lines) obtained from the spectroscopic measurements including trions and excitonic molecules. The dashed lines represent equilibrium gas boundary for $\varphi = 2 \text{ meV}$ (low *n*) and gas phase diagram for simple liquids (near T_c). The measurements of onsets at high density is shown by vertical bars while those at lower density obtained by Timusk (1976) and Lo et al. (1973) are shown by open squares and closed circles, respectively (from Thomas et al. (1978)).

Thomas et al. (1974) used quasi-stationary excitation for the study of the phase diagram in Ge. The shape of the gas EHL coexistence line was constructed with the use of onset measurements of $n_g^0(T)$. For the elimination of errors in the evaluation of absolute values of the gaseous phase density Thomas et al. (1974) fitted the scale of densities $n_g^0(T)$ ($T \gtrsim 5$ K) with the universal phase diagram for ordinary liquids (Guggenheim 1945). Thomas et al. (1978) found that in Ge there

are deviations from the universal phase diagram in the critical region (fig. 13). These deviations were called the Mott distortion (see sect. 3.5). Experimental critical parameters of the phase diagram gas–EHL for Ge are given in table 5.

The phase diagram in Si near T_c was measured by Dite et al. (1977) and Shah et al. (1977b). In order to decrease the error in the determination of \overline{n} Dite et al. (1977) used pulse excitation (with pulse durations shorter than lifetimes of e–h pairs) and performed an independent calibration of \overline{n} at large excitation densities ($\overline{n} > n_0$) by the position and shape of the emission line of the degenerate e–h plasma. In the critical region (T > 23 K) the density of the gas-saturated vapour was determined by the position of the low-energy boundary of the e–h plasma spectrum and, independently, by means of onset evaluations of \overline{n} by formula (53). The phase diagram obtained for Si is shown in fig. 14.



Fig. 14. The experimental phase diagram of the EHL in Si. The solid curves (1) and (2) correspond to gas-phase boundary in the cases of infinite (1) and finite lifetimes of e–h pairs in EHL. The dots C and VDS are the critical points calculated by Combescot (1973) and Vashishta et al. (1974), respectively (from Dite et al. (1977)).

Hensel et al. (1977) paid attention to the fact that critical parameters determined for Ge and Si are related phenomenologically as follows:

$$\frac{n_c(Si)}{n_c(Ge)} \approx \frac{T_c^2(Si)}{T_c^2(Ge)} \approx \zeta,$$

where ζ is the ratio of the appropriate equilibrium densities for T = 0 K. Experimental verification of scaling relations for EHL was discussed by Forchel et al. (1981). The relations are found to be $|E_c|/kT = 11.0 \pm 1.5$, $n_c/n_0 = 0.35 \mp 0.5$ and

 $kT_c/n_0^{1/4} (\varepsilon/\mu)^{1/4} = 1.8 \pm 0.2$, where ε is the background dielectric constant and μ the reduced optical mass (Reinecke et al. 1982).

Note in conclusion that, if the work function for e-h pairs from the condensed phase is known it is possible to evaluate the critical temperature of the phase transition gas–EHL by the following relationship (Landau and Lifschitz 1964):

$$kT_c \sim 0.1(\varphi + R).$$

3.3. Gas phase at low temperature

At low temperatures in the gaseous phase bound excitonic states predominate, and in the emission spectrum in this case an appropriate line of free excitons is observed. If the relaxation time is assumed to be infinite, the density of the excitons at the equilibrium boundary with the EHL may be determined from the expression:

$$n_{ex}^{*} = v_{ex} \left(\frac{M_{ex}kT}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2} \exp(-\phi/kT),$$
(54)

where v_{ex} is the degeneracy factor of the excitonic term, M_{ex} is the excitonic translational mass. In formula (54) ϕ is given by:

$$\phi = \varphi - 2\sigma_L / n_0 R_D, \tag{55}$$

where R_{D} is the EHL drop radius, σ_{L} is the surface tension.

The thermodynamic method for the determination of the binding energy of the EHL is based on expression (54). In the first studies of the EHL in Ge the binding energy φ was determined on the basis of the thermodynamic approximation (54) by means of onset measurements of exciton densities n_{ex}^0 which correspond to the appearance of the EHL emission line in the spectrum (Pokrovskii 1972, Hensel et al. 1973, Lo et al. 1973). Since the drop radius in Ge in the range 1-4 K is relatively large and lies within the limits 1 to 10 μ m (Pokrovskii and Svistunova 1971, Worlock et al. 1974, Bagaev et al. 1976a) the contribution of the surface energy has no large influence on the value φ obtained by thermodynamic method. Nevertheless, the found value $\varphi = 1.5$ meV turned out to be 0.3 meV lower than the "spectroscopic" one obtained by the analysis of luminescence spectra of excitons and the EHL*.

In Si, where the EHL density is considerably higher and the lifetime of e–h pairs in the EHL is two orders shorter than in Ge, the dependence $n_{ex}^0(T)$ measured in the low-temperature part of the phase diagram cannot be described by the exponential law (Pokrovskii 1972). The dependence $n_{ex}^0(T)$ weakens with the temperature decrease and at T < 5 K n_{ex}^0 is almost independent of T. The discre-

^{*} A more exact analysis of thermodynamic data yield a value of φ in agreement with spectroscopic studies; see Westervelt, ch. 3.

pancy between the measured and calculated (even taking into account the surface energy) dependences $n_{ex}^0(T)$ at T < 5-8 K is several orders of magnitude (fig. 14). It means that for Si the chemical potential of the excitonic gas μ_{ex} found from n_{ex}^0 at low temperatures (T < 5 K) is higher than μ_L (Dite et al. 1977). Thus, within the framework of equilibrium thermodynamics it is impossible to describe well enough the gaseous phase in the low-temperature part of the phase diagram.

In order to explain the discrepancies between the experimental and the calculated dependences $n_{ex}^0(T)$ it is necessary to take into account the finite lifetime of e-h pairs in the EHL. The departure of e-h pairs in the EHL drops due to recombination should be compensated by an additional inflow of excitons on the drops (Silver 1975a,b, Bagaev et al. 1976a,b, Westerwelt 1976). To analyze the influence of recombination of e-h pairs let us consider the equation of the particle balance in a drop. Assuming the density and the lifetime of e-h pairs to be independent on the drop radii in the EHL, it may be written (Bagaev et al. 1976a,b):

$$\frac{dN}{dT} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R_D^3 n_0 \right) = 4 \pi R_D^2 \left\{ \alpha_L \left[n_{ex} \left(R_D \right) - n_{ex}^* \right] \upsilon_{ex} - R_D n_0 / 3 \tau_L \right\},$$
(56)

where *N* is the number of e-h pairs in a drop, $n_{ex}(R_D)$ is the concentration of excitons near the drop surface, n_{ex}^* is the thermodynamically equilibrium concentration of excitons, v_{ex} is the velocity of excitons and α_L is the coefficient of exciton sticking to a drop. The first term in eq. (56) describes the inflow of excitons onto a drop and the two other terms — the departure due to evaporation and recombination. At $\tau_L \rightarrow \infty$ it is always advantageous for excitons to condense into one drop with large R_D , since in this case the surface energy per e-h pair and hence the density of the equilibrium excitonic gas are the least. At finite τ_L the drop size and n_{ex} are related by

$$n_{ex}(R_D,T) = n_{ex}^*(T) + n_0 R_D / 3 \upsilon_{ex} \tau_L \alpha_L.$$
(57)

The least density $n_{ex}^{\min}(T)$ at which drops may be formed and the radius of these drops R_D^* may be found from the conditions:

$$\frac{\partial n_{ex}(T, R_D^*)}{\partial R_D} = 0, \quad n_{ex}^{\min}(T) = n_{ex}(T, R_D^*).$$
(58)

Silver (1975a,b) has proposed another approach for the nonequilibrium e–h system with due regard for recombination processes. This approach is based on the thermodynamics of the nonequilibrium process at steady excitation (so-called steady excitation thermodynamics). Within the framework of this approach, by analogy with the usual chemical potential at $\tau \to \infty$, for EHL drops a pseudo-chemical potential is introduced:

$$\tilde{\mu}_{L}(n_{0}, N, T) = kT \ln \left[\exp\left(-\phi/kT\right) + \frac{\upsilon_{ex}n_{0}R_{D}}{3\tau_{L}\alpha_{L}\nu_{ex}} \left(\frac{2\pi\hbar^{2}}{M_{ex}kT}\right)^{3/2} \right].$$
(59)

At $\tau \to \infty$, $\tilde{\mu}_L(n_0, N, T) \to \mu_L(n_0, T)$. At finite τ_L , $\tilde{\mu}_L$ has a minimum at a certain value of $N = N^* = \frac{3}{4}\pi R_D^* n_0$. Stable drops exist only at $N > N^*$ and their chemical potential is equal to the chemical potential of the excitonic gas:

$$\tilde{\mu}(N,T) = \mu_{ex}.$$
(60)

This equation is equivalent to expression (57).

Within the framework of steady excitation thermodynamics at known σ_L , τ_L and n_0 , equilibrium values of N and n_{ex}^0 may be found from $\tilde{\mu}(N, T)$ by means of the Maxwell construction. Owing to the entropy contribution they will be somewhat higher than the minimum value calculated by formulae (58). At not very low temperatures ($T \gtrsim 0.1T_c$) when the evaporation from drops is strong enough, N^* in the drops exceeds 10^3 and the equilibrium values of N and n_{ex}^0 are close to those calculated with the use of expression (58). At $T < 0.1T_c$ the minimum of $\tilde{\mu}$ shifts to the region $N \lesssim 10$. For clusters with such a small number of particles the values σ_L , τ_L and n_0 depend on N (Rose et al. 1979). In particular, the problem of the stability of clusters consisting of several excitons still remains unsolved. In this connection all calculations of n_{ex}^0 and N^* for the drops over the temperature interval $T < 0.1T_c$, where the dependences of σ_L , τ_L and n_0 on N are neglected, should be considered as too rough.

The above theory gives a good description of the equilibrium density of the excitonic gas in Si at T > 10 K. At lower temperatures the measured density of the excitonic gas turns out to be much higher than that obtained by calculations with the use of eqs. (59) and (60). In order to explain higher densities of the gaseous phase in Si at 2–8 K Hammond and Silver (1979) and Voisin et al. (1979) supposed that the sticking coefficient for excitons to drops in Si is far below unity ($\alpha_t \approx 0.05$). It is seen from eqs. (59) and (60) that the decrease of α_t is equivalent to the decrease in the lifetime. The density of the excitonic gas herewith increases, whereas the number of e-h pairs in equilibrium drops decreases. Thus, at T = 5 K, R_p must be of the order of 100 Å ($\sim 2a_w$). However it follows from the evaluation of drop sizes of the EHL in Si with the use of the p-n junction method that the average number of excitons in the drop is about 10^6-10^7 , and R_p is 0.75 $\mu \rm{m}$ (Capizzi et al. 1975). One of the reasons responsible for higher experimental values of n_{ev}^0 and R_{p} may be EHL overheating at low temperatures due to intense phonon generation at recombination of e-h pairs. The temperature of the gaseous phase may be determined by analysis of the excitonic emission line shape. This analysis shows that for large enough samples (>0.5 cm³) T_{ev} remains very close to the bath temperature at stationary excitation up to 100-200 mWand under pulse excitation with 10 ns pulses, up to 1 kW in a pulse. The lattice temperature, T_{ℓ} , apparently, does not exceed T_{ev} .

In Si and Ge, where transitions are indirect and the shape of the EHL radiation lines is the convolution of electron and hole densities of states and corresponding distributions (see eq. (44)), the line shape is hardly sensitive to liquid temperature when $kT_L \ll E_{Fe.b}$. In Si (where $E_{Fe} = 90$ K, $E_{Fh} = 160$ K) T_L may be determined

by fitting the line shape with sufficient accuracy only at $T_L > 8-10$ K (Dite et al. 1977). At lower temperatures the value T_L could be determined in the studies of the EHL in weakly stressed Si crystals (see sect. 3.6), where electrons in split-off ("hot") valleys have $E_{Fe} \sim 2-5$ K. It was found under these conditions (Wagner and Sauer 1979, Kulakovskii and Kukushkin 1980) that in weakly stressed Si crystals T_L reaches 6–7 K at the bath temperature 2 K. The value T_L in nondeformed Si, where n_0 is larger than in stressed Si, would naturally be expected to be at least not below 7 K. The EHL overheating value $T_L - T_\ell$ decreases rapidly with rise of T_ℓ due to a large increase in the heat capacity. At $T_\ell > 10$ K as follows from experiments with nondeformed Si (Dite et al. 1977), $T_L = T_\ell$. The evaluations of the lower limit for T_L in Ge made by Keldysh (1979) give $T_L \sim 1$ K. For Si, where the density is an order higher and the lifetime is two orders shorter than in Ge, the value $T_L = 7-8$ K is not unexpected.

Thus, due to recombination of e-h pairs in the EHL two of conditions inherent in equilibrium thermodynamic systems are broken, namely:

$$\mu_{ex} \neq \mu_L \tag{61}$$

$$T_{ex} \neq T_L. \tag{62}$$

In order to evaluate the gas density under these conditions one can assume that T_{ex} at the interface with the EHL drops is equal to T_L and there is a temperature gradient in the gaseous phase. The values of n_{ex}^0 (2 K) in Si calculated under this assumption coincide with that measured (Dite et al. 1977, Kulakovskii et al. 1978) if it is assumed that $T_L = 6-8$ K in undeformed Si, and $T_L = 4-5$ K in uniaxially stressed Si (for the sticking coefficient $\alpha_L = 1$). Such values of T_L are in agreement with measurements in weakly stressed Si crystals (Wagner and Sauer 1979, Kulakovskii and Kukushkin 1980).

In conclusion of this section consider the problem of the gaseous phase in direct-gap semiconductors, where the lifetime is nanoseconds, i.e., two to three orders shorter than in Si. The effect of recombination of e-h pairs on the density of the gaseous phase in this case is considerably stronger. The problem of a phase transition in the e-h system in direct-gap semiconductors for CdS as an example was considered theoretically by Koch and Haug (1979) with regard to finite and extremely short lifetimes of e-h pairs $(10^{-9}-10^{-10} \text{ s})$. They proceeded from the Focker–Planck equation and calculated the distribution function for clusters, f_N , by the number of bound excitons in them. According to these calculations, the average number of particles in the EHL drops in CdS at low temperatures increases gradually with n_{ev}^0 beginning from N = 1, and at $n_{ev}^0 = 10^{16}$ cm⁻³ reaches 10³. However, probabilities of the existence in the bulk of clusters with any number of e–h pairs from N = 2 to $N = N_{max}$ are of the same order of magnitude. Therefore, the authors concluded that the phase transition in the e-h system in CdS is of second order. The same conclusion may be drawn within the scope of the above "steady excitation" thermodynamics. In fact, the generalized chemical potential $\tilde{\mu}(N)$ calculated upon the assumption that σ_L , τ_L and n_0 are independent of N is in this case a monotonic function of N (see, e.g., Combescot and Combescot 1976).

As noted above, it follows from experimental studies of the gas-EHL phase transition in CdS that a two-phase region in CdS is practically absent. However, at variance with the conclusions drawn by Koch and Haug (1979) the "violet" boundary of the EHL emission band remains invariable at low excitation densities, whereas for very small clusters (N = 1-10) it should shift appreciably to the exciton line FE. At the same time in direct-gap semiconductors, due to very short lifetimes, the heating effects in the e-h system which were not taken into account by Koch and Haug (1979) should be more significant than in Si and Ge. Actually, it follows from experiments that the lowest temperature of the EHL in CdS occurs under laser excitation with the photon energy $\hbar\omega$ close to the value of the chemical potential per e-h pair in a drop, i.e., when "cold" carriers are excited by light. However, even in this case the temperature is too high $T_{_{I}}$ \sim 20–25 K (Gubarev 1980). When the carriers are created by light deep into the band the electronic temperature is still higher (Hildebrand et al. 1978, Yoshida et al. 1980, 1981a,b). At such temperatures evaporation from the drops is not negligible. Consequently, in this case the minimum in the dependence $\tilde{\mu}(N,T)$ occurs at $N \sim 10^3 - 10^4$, and exciton densities in the gaseous phase calculated from the condition $\mu_{ex} = \tilde{\mu}(N,T)$ reach $(1-3) \times 10^{17}$ cm⁻³, i.e., n_{ev}^0 differs from the equilibrium density in the EHL by less than an order. Thus, experimental results for direct-gap semiconductors may be explained at least qualitatively taking into account heating effects in the e-hsystem. In conclusion, note that the e-h plasma density fluctuation in CdS due to nonequilibrium effects have recently been experimentally investigated and satisfactorily explained in the framework of nonequilibrium phase transition by Bohnert et al. (1981).

3.4. Partial composition of the e-h gas at the equilibrium boundary with EHL

In the previous section, in the consideration of the gaseous phase with underformed Si and Ge crystals as an example, only the excitons were discussed, the radiation of which predominates in the spectrum of the gaseous phase. Actually, the partial composition of the gaseous phase is complicated enough. At low temperatures in the nonequilibrium e–h gas — besides excitons the line M appears (fig. 15) between the lines of excitons and the EHL, corresponding to the radiation of excitonic molecules (Kulakovskii and Timofeev 1977). The radiative decay of excitonic molecules is observed in the spectra of pure crystals of Si (2-1) (concentration of residual shallow impurities less than 10^{13} cm⁻³) at sufficiently high densities of pulse or stationary excitation and low temperatures, beginning from applied uniaxial stresses P > 200 MPa (Kulakovskii and Timofeev 1977, Kulakovskii et al. 1978a). In fig. 16 the kinetics of radiation spectra of Si (2-1) are shown under pulse excitation ($\overline{n} = (1.5 \pm 0.6) \times 10^{17}$ cm⁻³ of e–h pairs). The spec-

tra are the superposition of the emission lines corresponding to the radiation of the EHL (L), free excitons (FE) and biexcitons (M)*. With increasing temperature the intensity of the line L decreases, and at T > 11 K it cannot be separated against the background of the line M.



Fig. 15. The emission spectra of free exciton (FE) and excitonic molecules (M) in highly stressed Si at different excitation levels under volume excitation. The bound exciton (BE) emission line is seen at lower excitation levels. In the inset, the dependence of the M-line intensity on that of FE line. The straight line corresponds to a quadratic dependence (from Kulakovskii et al. (1978a)).

^{*} The molecular origin of the line M in recombination spectra of Si(2-1) is confirmed by: (i) quadratic dependence of its intensity on the intensity of the excitonic line (Kulakovskii et al. 1978a); (ii) its kinetic properties under pulse excitation (Kulakovskii and Timofeev 1977); (iii) the temperature dependence of its intensity (Edelstein et al. 1979); (iv) spectrum properties in the conditions when the nonequilibrium e-h gas is placed into a parabolic potential well (Gourley and Wolfe 1978, 1979, Wolfe and Gourley 1979); (v) the behaviour in a magnetic field (Kulakovskii et al. 1979); (vi) experiments under condition of impact ionization of excitonic molecules (Kulakovskii and Timofeev 1980).



Fig. 16. The kinetics of the emission spectra of pure Si crystals, stressed along the $\langle 100 \rangle$ axis at 1.8 K (*a*), and 8 K (*b*) under pulsed excitation corresponding to $\overline{n} \approx 10^{17}$ cm⁻³. Spectra recorded with delay times (μ s) indicated near the curves (from Kulakovskii et al. (1978b, 1980)).



Fig. 17. The emission spectra of EHL, free excitons and excitonic molecules in uniaxially stressed Si $\langle 100 \rangle$ at different temperatures, which are indicated near the curves, under pulsed excitation ($\overline{n} = 10^{17}$ cm⁻³) (from Kulakovskii et al. (1980)).

The evolution of the radiation spectra of Si (2-1) under pulse excitation ($\tilde{n} \sim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) with temperature increasing from 2 to 21 K is presented in fig. 17. The ratio of decay times of lines M ($\tau_{_M}$) and FE ($\tau_{_{ex}}$) is independent of temperature and equals $\tau_{_M}/\tau_{_{ex}} = 0.55 \pm 0.05$.

These results illustrate that in Si (2-1) in the nonequilibrium e-h system with $\tilde{n} \approx (1-2) \times 10^{17}$ cm⁻³ and *T* up to 11 K the separation into the liquid (EHL) and gaseous (excitons and excitonic molecules) phases is observed.

The gas–EHL phase diagram and the partial composition of the gaseous phase in Si (2-1) was investigated by Kulakovskii et al. (1980) (see fig. 18). The density of the liquid phase was determined by analyzing the EHL spectrum shape. The dependence $n_0(T)$ in Si (2-1), as well as in undeformed Si and Ge, may well be described within the scope of the phenomenological theory for the Fermi liquid (appropriate parameters of the EHL in Si (2-1) are given in table 6).

The density of the gaseous phase determined in Si (2-1) from onset measurements considerably exceeds at T < 8 K both the thermodynamic equilibrium density and that calculated with regard to the finite lifetime of e–h pairs in the EHL (upon the assumption $T_L = T_{ex} = T_{\ell}$). The strong "oversaturation" of the gaseous phase in the low-temperature part of the phase diagram may be explained, if one supposes that the minimum temperature of the EHL in Si (2-1) is about 4 K (Kulakovskii et al. 1978a).



Fig. 18. The EHL phase diagram in uniaxially stressed Si $\langle 100 \rangle$. The densities of EHL and gaseous phase are shown by solid and open circles, and those of free exciton, excitonic molecules and free carriers in gaseous phase by open squares, solid and open triangles, respectively. The dot-dashed curve (1) is calculated under equilibrium conditions. The line (2) corresponds to the Mott transition in the plasma screening approximation, n_{cp} and n_{cd} are the critical densities for exciton/e–h plasma transition at T \rightarrow 0 within the framework of plasma and dielectric screening, respectively. The region in which the transformation of exciton into e–h plasma is experimentally observed is shown by horizontal bars (from Kulakovskii et al. (1980)).

The densities of excitonic molecules and free excitons in the gaseous phase at low temperatures may be determined from the analysis of intensities of the corresponding emission lines. As it is seen in fig. 18 along the gas–EHL coexistence boundary in Si (2-1), radiation line intensities of excitons and excitonic molecules turn out to be of the same order. Using the relationships:

$$n_{g} = n_{ex} + 2n_{M}, \quad n_{ex}/n_{M} = \beta_{2}I_{FE}/I_{M}$$
 (65)

where β_2 is the ratio of radiation probabilities of molecules and excitons, Kulakovskii et al. (1980) found concentrations of excitons and excitonic molecules near the condensation threshold at 2 K to be $n_M \sim 2n_{ex} = 2.4 \times 10^{15}$ cm⁻³. The value of β_2 calculated with the use of the variational wave function by Brinkman et al. (1973) is 2.3 (Edelstein 1979).

From fig. 18 it follows that with increasing temperature from 2 K to 12 K, $n_g^0(T)$ increases from 5×10^{15} cm⁻³ to 1.5×10^{17} cm⁻³ (r_s decreases from 7 to 2.7). In this case in the radiation spectra of the gaseous phase the lines of excitons and excitonic molecules still predominate. The increase in temperature causes

the broadening of high-energy wings of the lines M and FE due to the increase in the average kinetic energy of excitons and molecules.

Concentrations of free carriers $n_{e,h}$ in the gaseous phase may be evaluated by studying photoconductivity. It turned out that in Si(2-1) up to the critical region (T ≤ 12 K), $n_{e,h} \ll n_{ex}$ (see fig. 18, Kulakovskii et al. (1980)). For example, at T = 10 K, $n_{e,h} \leq 10^{15}$ cm⁻³, $n_{ex} > 10^{16}$ cm⁻³. In this paper the mobilities of electrons and holes were not measured independently, therefore the values obtained for $n_{e,h}$ give only the order of magnitude.

As to the concentration of trions in the gaseous phase, it is, apparently, not high since it follows from the Saha equations that at $\Delta_T \approx \Delta_M$ the ratios n_T/n_M are as small as $n_{e,h}/n_{ex}$. Experimental observations of trions in Si (2-1) at T > 4 K have not been reported as yet. At 2 K in the spectra of cyclotron resonance of stressed silicon under high excitation two additional lines were observed which were connected with trions, based on their spectral position (Kawabata et al. 1977). According to the evaluations made in this paper, the concentration of trions is 3 to 4 orders lower than that of excitons.

The resultant composition of the gaseous phase in Si (2-1) is illustrated in fig. 18 which shows the full phase diagram. It is seen that up to densities corresponding to $r_s = 2.7 \pm 0.3$ (T < 12.5 K) the gaseous phase consists predominantly of bound states — excitons and excitonic molecules. The ionization breakdown of bound excitonic states in Si (2-1) takes place only near the critical region.

Consider now the partial composition of the gaseous phase in Ge. In the case of unstressed Ge crystals, in spite of intensive investigations, radiative decay of excitonic molecules was not observed reliably. Thomas and Rice (1977) and Thomas et al. (1978) set up a hypothesis that the low energy tail of the free exciton line observed in radiation spectra of nondeformed Ge at large excitation pumpings is connected with the radiative recombination of biexcitons and trions. However, Zhidkov and Pokrovskii (1979) used the impact ionization technique and drew a conclusion that this tail has a different nature and is more likely associated with the radiation of the e–h plasma.

In Ge, just as in Si, in uniaxially compressed crystals upon maximum lifting of orbital degeneracy of the bands the situation is more favourable for the observation of the radiative decay of biexcitons in the spectra. Total lifting of the degeneracy in Ge is realized at compression along the $\langle 111 \rangle$ axis. However, it follows from the available investigations of such crystals at $P \leq 150$ MPa that the binding energy in the EHL in this case remains large enough ($\varphi \gtrsim 0.28R$), and no separate line is observed in the radiation spectra which may be due to excitonic molecules (Feldman et al. 1977, Kukushkin et al. 1980). Kukushkin et al. (1980) noted that in Ge an EHL with lower binding energy may be obtained if crystals are compressed along a nonsymmetrical direction close to the $\langle 100 \rangle$ axis. In this case the electron and hole bands are also nondegenerate and the effective density-of-state mass of holes turns out to be 8 % less than in Ge compressed along the $\langle 111 \rangle$ axis. Besides, the binding energy of excitons (as follows from calculations) in Ge

 $\langle 100 \rangle$ is 0.1 meV higher than in Ge $\langle 111 \rangle$. Under these conditions the binding energy, as in Si $\langle 100 \rangle$, drops down to 0.18 *R* (at *P* > 250 MPa), and in the radiation spectra there appears a new line connected with excitonic molecules, its intensity comparable with the free exciton emission line (Kukushkin et al. 1980). Radiation spectra of Ge compressed along the $\langle 111 \rangle$ axis and the $\langle 1,1,16 \rangle$ axis (deviating from the $\langle 001 \rangle$ axis by an angle 5°) vs excitation level are shown in fig. 19. It is seen that the low-energy tail of the radiation line of free excitons in Ge $\langle 1,1,16 \rangle$, when the excitation increases up to 10 W/cm² turns into a sufficiently resolved line M which lies between those of free excitons on one side and the EHL and bound excitons on the other. The density of the gaseous phase in Ge $\langle 1,1,16 \rangle$ near the condensation threshold at 1.8 K reaches ~ 1 to 2×10^{15} cm⁻³ ($r_s \sim 3$) which is an order of magnitude higher than that in Ge $\langle 111 \rangle$.



Fig. 19. The emission spectra of EHL and free excitons in pure Ge $\langle 111 \rangle$ and EHL, free exciton and excitonic molecule in pure Ge $\langle 1,1,16 \rangle$ at different excitation levels. The curve 5 corresponds to emission spectra of Ge $\langle 111 \rangle$ doped with 10^{13} cm⁻³ shallow impurities (from Kukushkin et al. (1980)).



Fig. 20. The comparison of free exciton and excitonic molecule emission spectra in stressed Si $\langle 100 \rangle$ and Ge $\langle \sim 100 \rangle$, recorded under the same experimental conditions $I_{\rm M}/I_{\rm FE}$ and kT/R (from Kukushkin et al. (1981)).

The energy position of the line M, the nearly quadratic dependence of its intensity on that of the line FE, disappearance of this line at increasing temperature and magnetic field, as well as its behaviour under condition of impact ionization (Kukushkin et al. 1980, Kulakovskii et al. 1981b) give evidence in favour of the interpretation of this line in terms of radiative recombination of biexcitons. The similar origin of the lines M in Si $\langle 100 \rangle$ and in Ge $\langle \sim 100 \rangle$ is confirmed by the coincidence of the emission spectrum of excitons and excitonic molecules in Si $\langle 100 \rangle$ with the radiation spectrum in Ge $\langle \sim 100 \rangle$ recorded at the same ratios $I_{\rm M}/I_{\rm FE}$ and k_0T/R (fig. 20, Kukushkin et al. 1980). It should be pointed out that no adjustable parameters are used in this comparison.

Densities of excitons and excitonic molecules near the critical temperature in Si $\langle 100 \rangle$ and Ge $\langle \sim 100 \rangle$ increases up to $r_s \sim 3$ to 2.5. Ionization of bound states in these crystals occurs only near the critical point for the gas–liquid transition. The same situation apparently takes place also in Ge compressed along the $\langle 111 \rangle$ axis (Balslev and Furneaux 1979).

3.5. Ionization collapse of excitons and the problem of insulator-metal transition

The phenomenon of condensation of the dielectric excitonic gas into the metallic EHL arouses still greater interest in connection with the problem of the metal–insulator transition. In previous sections (see sect. 3.2) it was noted that in undeformed Ge and Si crystals in the vicinity of the critical point on the phase diagram the e-h system is a metallic plasma (the bound states due to Coulomb interaction are absent). At decreasing temperature the gas density decreases along the coexistence curve, and at low enough temperatures the gas consists mainly of excitons. Thus, the transformation of the dielectric gas of excitons into the completely ionized e-h plasma takes place already in the gaseous phase and is, in essence, an insulator-metal transition. It will be recalled that Landau and Zel'dovich as far back as 1943 discussed (for liquid mercury, as an example) the fundamental possibility of a separate existence of two phase transitions in one system (gas-liquid and metal-dielectric) and, in accordance with these transitions, of two critical regions and a triple point. However, up to now there is no experimental evidence about separate observation of both of these transitions in one system.



Fig. 21. Expected phase diagram if a second critical point associated with the metal–insulator transition occurs: (*a*) temperature and density plane; (*b*) temperature and chemical potential plane.

In this connection the nonequilibrium electron–hole system in a semiconductor at low temperatures may be considered as a convenient model for the study of this problem. Based on the evaluations of critical densities n_c in Si and Ge, it was expected that in such a system the above phase transformations may exist separately and the phase diagram may be represented qualitatively as shown in fig. 21.

Consider first the problem connected with the ionization breakdown of excitons. A phase transition between weakly ionized excitonic gas and a strongly ionized e–h plasma was considered by several authors (Norman and Starostin 1970, Ebeling et al. 1976, Rice 1974). They approach this problem by analyzing the ionization equilibrium between excitons and free carriers (electrons and holes) with the use of the Saha equations.

At low densities of electrons and holes the correction to the excitonic Rydberg due to the screening of the Coulomb interaction is determined as follows:

$$\delta_{ex} = -e^2/\varepsilon r_{scr},\tag{66}$$

where r_{scr} is the screening radius:

$$r_{scr}^{-2} = \frac{2e^2 \left(2kT\right)^{1/2}}{\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \left[m_{de}^{3/2} F_{-1/2} \left(\frac{\mu_e}{kT}\right) + m_{de}^{3/2} F_{-1/2} \left(\frac{\mu_h}{kT}\right) \right].$$
(67)

Here $F_{-1/2}(x)$ is the Fermi integral. In the absence of degeneracy which corresponds to the approximation of the Debye screening, the screening radius is:

$$\mathbf{r}_{scr} = \mathbf{r}_{D} = \left(\varepsilon_0 kT / 8\pi n e^2\right)^{1/2}.$$
(68a)

At strong degeneracies of carrier distributions:

$$r_{scr} = r_{TF} = \frac{\hbar\sqrt{\varepsilon_0}}{2e} \left(\frac{\pi}{3n}\right)^{1/6} \frac{1}{\left(m_{de} + m_{dh}\right)^{1/2}}$$
(68b)

($r_{\tau F}$ is the Thomas–Fermi screening radius). Within the scope of the Debye screening of the Coulomb interaction the decrease in the binding energy of excitons δ_{ex} is determined with regard to the quantum correction of the lower order (Ebeling et al. 1976):

$$\delta_{ex} = \frac{e^2}{\varepsilon r_D} \frac{1}{1 + C\Lambda/r_D},\tag{69}$$

where Λ is the length of the De Broglie wave for electrons ($\Lambda = \hbar/(2\pi m_e kT)^{1/2}$) and the numerical coefficient $C \sim 0.1$. The structure of expression (69) is typical for the theory of strongly nonideal electrolytes.

Up to now two criteria are discussed for the evaluation of the critical density at which the ionization catastrophe of excitons takes place. One of them, known in the literature as the Mott criterion (Mott 1967, 1974) was obtained as a result of considering the stability limit of the metallic phase. If one moves from the side of the metallic phase, the critical density \tilde{n}_c for an exciton–plasma transition is

evaluated on the basis of the numerical solution of a two-particle Schrödinger equation with the Coulomb potential statistically screened by free carriers (see, e.g., Rogers et al. (1970)):

$$V(r) = \frac{e^2}{\varepsilon r} \exp\left(-\frac{r}{r_{scr}}\right).$$
(70)

According to this criterion, the exciton binding energy falls to zero at

$$r_{scr}\left(\tilde{n}_{c}\right) = 0.84a_{ex}.\tag{71}$$

For a model semiconductor with simple bands and isotropic and equal masses $m_e = m_h - \text{according to this criterion of plasma screening - the exciton-plasma transition (EP transition) corresponds to <math>r_s = r_s^{cp} = 6.8$, i.e., when the average distance between excitons is almost an order higher than the radius of the Bohr orbit.

The limit of the dielectric state stability may alternatively be evaluated, if the excitonic state is assumed to be the ground state while moving to greater densities from the side of the excitonic phase. Within the framework of this approach the value of the critical density for the exciton-plasma transition at very low temperatures ($kT \ll R$) is determined from the condition of disappearance of the energy gap in the spectrum of one-particle collective excitations in the excitonic system of high density, due to the dielectric screening of the Coulomb interaction (Bisti and Silin 1978). With this approach, excitons remain stable at considerably higher densities – up to $r_s = r_s^{cd} = 1.8$. In other words, excitonic states are stable until the wave functions of excitons overlap. It is of interest to recall that in the case of impurity systems both criteria yield the same result for the critical density ($r_s^{cp} \sim r_s^{cd} \sim 1.7$) (Mott 1974, Hugon and Ghazali 1976). A considerably smaller value for r^{cp} in this case is due to two reasons: firstly, in the impurity system the screening by only one type of carrier is considered (by electrons or holes), and secondly, the effective Bohr radius of excitons with $m_e = m_h$ is equal to two Bohr radii in impurities.

From the comparison of critical densities at which excitons break down, \tilde{n}_{cp} and \tilde{n}_{cd} , with that for the gas–liquid transition n_c in the multi-valley semiconductors Ge and Si, it is seen that

$$ilde{n}_{cp} < ilde{n}_{cd} \lesssim 0.1 n_c$$

i.e., a transition of the metal-dielectric type should occur already in the gaseous phase. Note that the evaluations of critical densities for both transitions metal-dielectric and gas-liquid in the case of mercury give one and the same order of magnitude.

The stability of the excitonic system with respect to full ionization into free electrons and holes may be analyzed with the use of the condition $(\partial n_{ex}/\partial n_e) > 0$. If this condition is broken, the exciton gas becomes totally ionized since any ad-

dition of electrons and holes to the system is accompanied by the decrease in the number of excitons. The exciton-plasma transition in Ge was calculated by Ebeling et al. (1976) with the use of the plasma screening approximation. They found that in Ge such a transition may be first order with critical parameters $T_c = 9$ K and $\tilde{n}_c = 10^{15}$ cm⁻³. These values differ strongly from the critical parameters for the gas-liquid phase transition: $T_c = 6.5$ K and $n_c = 1.2 \times 10^{17}$ cm⁻³.

Such questions as, which of the above screening criteria is realized in the case of the e-h system in semiconductors, and whether the transformation of excitons into an electron-hole plasma will bear the character of a first-order phase transition and reveal any peculiarity along the gas-liquid phase boundary — those questions have stimulated appropriate experimental investigations.

With the aim of checking the hypothesis of the separate existence of two critical regions (gas–EHL and metal–dielectric) Thomas et al. (1978) studied thoroughly the gas–EHL phase boundary in undeformed Ge (Ge (4-2)). Based on spectroscopic measurements the authors found no metal–dielectric phase transition of first order. However, the authors noted that the shape of the phase boundary near the critical region differs appreciably from that observed in the case of simple liquids (fig. 13). The equilibrium line from the gas side turned out to be shifted to lower densities in the vicinity of the critical region as compared with the universal curve (Guggenheim 1945). Such deviations in the shape of the phase diagram were called by Thomas et al. (1978) the Mott distortion.

In radiation spectra of Ge at large enough densities of the gaseous phase $n_g > 10^{16}$ cm⁻³ and T = 5-7 K, a low-energy "red" tail appears in the radiation line of excitons. Thomas et al. (1978) attributed this tail in the emission line of excitons to the radiative recombination of trions, though the observed average density of the gaseous phase was appreciably in excess of the critical concentration \tilde{n}_{cp} calculated within the screening plasma approximation. In the interpretation of the experimental results Thomas et al. (1978) assumed that the quantum correction to δ_{ex} is large enough (constant *C* in expression (69) was supposed to be equal $\frac{1}{6}$) so that excitons disappear at $r_s = 3-5$. It should be noted that there is another viewpoint concerning the nature of low-energy tails of the FE line. Zhid-kov and Pokrovskii (1979) by means of the impact ionization method showed that the low-energy tail near the excitonic line in Ge is most likely to be associated with the radiation of the e–h plasma from those crystal regions, where $\overline{n} > \tilde{n}_c$.

The gaseous phase in the region, where excitons break down and are transformed into the e–h plasma, was investigated in undeformed Si ($T \sim 20-25$ K) (Dite et al. 1977, Shah et al. 1977b). The authors of these works found no peculiarities in the phase diagram in this region (see fig. 14). As in Ge, in Si under high excitation pumping there appeared a "red" tail from the side of lower energies of the exciton line, which may be satisfactorily explained as the radiation of the e–h plasma.

Crystals of Si (2-1) deformed uniaxially along the $\langle 100 \rangle$ axis turned out to be a convenient object for experimental studies of the above problems. The gas–

EHL phase boundary in these crystals is shifted by more than an order to higher densities as compared to unstressed crystals. This allowed in Si (2-1) the use of radiative recombination spectra and also photoconductivity for experimental observation of the partial composition of the gaseous phase (excitons, excitonic molecules, free electrons and holes) up to densities corresponding to $r_s = 2-2.5$ at as low a temperature as 0.1R (Kulakovskii et al. 1980). At the density increase up to $r_s = (2.7 \pm 0.3)$ and T = 12.5 K, the gaseous phase in Si (2-1) consists mainly of excitons and excitonic molecules. The fraction of free carriers (and, apparently, trions) herewith is more than an order less (fig. 18).

Ionization breakdown of excitons in Si (2-1) was investigated by the smearing of the discrete spectrum of excitons and excitonic molecules into a structureless spectrum of the e-h plasma at $T > T_c$ and high excitation pumping (Kulakovskii et al. 1980). In these experiments the density value \tilde{n}_c was estimated when the excitonic gas is totally ionized — it turned out to equal $\overline{n}_c = (1.5-3) \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ at T = (13-21) K ($r_s^c = 2-2.5$). Thus, in Si(2-1) ionization breakdown of excitons occurs near the critical region of gas-EHL phase diagrams (see fig. 18; the critical region is shaded). Transformation of excitons into plasma can be observed at approximately two times lower temperature in Si (6-2) (Dite et al. 1977, Shah et al. 1977b) owing to the appreciably higher gaseous phase density which is realized in these crystals. It will be recalled that within the framework of the model of plasma screening of the Coulomb interaction, ionization breakdown of excitons was expected to occur abruptly and to be accompanied by separation into two regions occupied by weakly and by strongly ionized excitonic gas. However, in Si (2-1) as in Si (6-2), the observed transformation of the discrete excitonic spectrum into the plasma spectrum has a smooth (diffusive) character and does not show any properties inherent in a phase transition of the first order.

Thus, the analysis of the partial composition of the gaseous phase along the phase boundary with the EHL carried out by Kulakovskii et al. (1980) made it possible to find that in Si (2-1) excitonic (and molecular) states retain their individuality up to densities which correspond to the dimensionless parameter $r_s = 2.5$. It is of interest to compare the experimental observations to evaluations available for the exciton-plasma transition. According to Mott's criterion (formula 81), the critical density \tilde{n}_{cn} for Si(2-1) at T = 0 K corresponds to $r_s^{cp} \approx 10$ (shown with an arrow in fig. 18), and lies in the two-phase region. The screening radius increases with temperature, and the critical values of r_s^{cp} are shifted to higher densities. The line of the Mott transition for Si(2-1) in the temperature region 2-20 K calculated by formulae (71) and (67) is shown in fig. 18 (curve 2). It can be seen that at $T \gtrsim 8$ K the boundary density of the gaseous phase, which consists mainly of excitons and excitonic molecules, exceeds the critical density of the exciton-plasma transition. It means that the plasma screening approximation is too rough and does not provide the description of the state of the e-h gas in this region. It is not surprising since critical densities obtained with this approximation lie in the region where the electron-hole gas cannot be considered as weakly interacting. The applicability of the plasma screening approximation is limited to the values $r_s < 1$. It is natural to expect that at $r_s > 2$, corresponding to the experimental situation being considered, the state of the electron–hole gas should be affected appreciably by electron–hole correlations, which are not adequately taken into account within the scope of plasma screening. In this connection it is interesting to note the estimations of the critical density made by Bisti and Silin (1978) with the use of the approximation of the dielectric screening of the Coulomb interaction. It was found by Bisti and Silin that the dielectric gap in the spectrum of one-particle collective excitations of excitons starts disappearing only at $r_s \sim 1.8$ (shown with an arrow in fig. 18), which is close to experimental observations.

In conclusion of the present section, consider the transformation of the discrete excitonic spectrum into the plasma phase with the variation of the density of the nonequilibrium e–h gas, taking a semiconductor with direct gap as an example. General features of this phenomenon were determined most thoroughly in the studies of discrete excitonic absorption and reflection spectra in crystals of GaAs (Shah et al. 1977a, Fehrenbach et al. 1982), GaSe (Frova et al. 1977), CdS (Lysenko and Revenko 1978, Timofeev 1979).

Consider here the results for CdS obtained under pulse laser excitation of nonequilibrium carriers and, synchronized with it, probing of transmission (reflection) spectra in the region of excitonic resonances (Lysenko and Revenko 1978). Transmission spectra of CdS were investigated at T = 1.5 K in $E \parallel C$ and $E \perp C$ polarizations, corresponding respectively to transitions to hydrogen-like excitonic states of the type A and B (Thomas and Hopfield 1961, 1962) upon variation of the nonequilibrium density of e-h pairs in the sample $\overline{n} = 10^{12} - 10^{18}$ cm⁻³. The main results are the same for both polarization and are reduced to the following. At increasing density \overline{n} in transmission (reflection) spectra of CdS the lines, which correspond to excited states of the exciton, disappear successively, beginning with large quantum numbers N_{ev} . Such behaviour of the discrete excitonic spectrum is illustrated in fig. 22 for the B-excitonic series taken as an example. The lines, corresponding to $N_{ev} = 3,4$, broaden with the increase in pumping; they merge with the continuum and disappear against its background at concentrations of nonequilibrium excitations $\overline{n} \sim 10^{15}~{
m cm^{-3}}$ ($r_{s} \sim 20$). The line $N_{ex}=2$ disappears, while broadening, at concentrations $\overline{n} \sim 10^{16}$ cm⁻³ ($r_c \sim 10$). The line, which corresponds to the ground state of the exciton $N_{ex} = 1$, broadens with increasing \overline{n} and becomes an asymmetric band slightly noticeable against the background of the continuum; its half-width is 13 meV (\sim 0.5*R*) at $\overline{n} \sim 10^{18}$ cm⁻³ ($r_s \sim 2$). The common feature for all the investigations of excitonic states is the absence of any appreciable shift of the maxima of appropriate absorption bands in the energy scale with increasing concentration. This means that the decrease in the exciton binding energy due to the screening of the Coulomb interaction at increasing density \overline{n} , and the low-energy shift of the forbidden band gap due to collective interaction effects are of equal magnitude. This result may be explained within the scope of the theory developed with regard to the effects of dynamic screening of the Coulomb interaction (Zimmermann et al. 1978, see also Gay, 1971,1972). In fig. 23 the binding energy R of the exciton and the energy shift of the forbidden band gap vs the density of carriers \overline{n} is illustrated. Circles in this figure correspond to the positions of maxima of excitonic absorption bands measured at various concentrations of nonequilibrium carriers \overline{n} , horizontal lengths denote the error in the determination of concentration, vertical ones — the half-width of excitonic bands. Approximation curves 1–3 which characterize the disappearance of excitonic states with increasing density \overline{n} are calculated in the approximation of static screening of the Coulomb interaction (curves 1 and 2 for T = 80 K and T = 2 K, respectively) and the screening by bound states (curve 3). It is seen that no abrupt disappearance of excitonic levels is observed experimentally in accordance with curve 2 in fig. 23, constructed by the Mott criterion. Bound excitonic states disappear at densities corresponding to $r_s \sim 2$ which agrees with the approximation of the dielectric screening of the Coulomb interaction.



Fig. 22. Transmission spectra of CdS at T = 1.5 K and under different excitation powers: (1) 40; (2) 8.5×10^3 ; (3) 10^5 ; (4) 7×10^5 ; (5) 4×10^6 W cm⁻²; E || C; crystal thickness 0.4 μ m (from Lysenko and Revenko (1978)).



Fig. 23. Dependence of the exciton binding energy *R* and the energy shift of the band boundary on the density of carriers \overline{n} : $\Delta E_G(n) = R - R(n)$; (1) $e^2 q/\varepsilon_0$ (T = 80 K); (2) $0.84a_{ex}q$ (T = 20 K), (3) $R \cdot a_{ex}(\alpha/r_s)$, $\alpha = 3$ (from Lysenko and Revenko (1978)).

Recently it has been found that a dense free exciton gas in strongly uniaxially compressed Ge is a very convenient model object for the investigation of the insulator-metal transition in the high density nonequilibrium e-h system at low temperatures. With respect to the Mott hypothesis the ionization breakdown of excitons due to the screening of Coulomb interaction at some critical density and low temperatures should be accompanied by abrupt changing of the transport electrical properties. With an aim to observe the expected abrupt changing of the photoconductivity due to the ionization breakdown of excitons, the dependence of a short-circuit current on the power of the incident laser light in a nonuniformly compressed Ge under an applied magnetic field has been investigated (Kukushkin et al. 1982). The experimental setup is illustrated in the insert of fig. 24a. Under an uniaxial compression with the use of a triangular plunger a stress confined potential well of the cylindrical symmetry inside the sample volume is produced (Wolfe et al. 1979). In the considered galvanomagnetic experiment with the use of nonuniform compression a motive force acting on excitons or free carriers is due to the gradient of the energy gap, $\nabla_r E_{acc}$. Under the investigation of this photopiezogalvanomagnetic effect the valuable information concerning the exciton ionization breakdown can be obtained. Indeed, nonequilibrium electrons and holes excited at the crystal surface are immediately binding at low temperatures into excitons and start to drift in the direction of the energy gap gradient. The exciton trajectories are not disturbed by the applied magnetic field. The short-circuit current occurs only due to ionization of excitons

into free carriers — electrons and holes. The experimental dependences of the short-circuit current j_s observed by Kukushkin et al. (1982) are shown in fig. 24a. In the high temperature region ($T \ge 20$ K) where excitons are thermally ionized the current smoothly depends on the power of the incident light. At T = 2 K the abrupt gigantic growth (about three orders of magnitude) of j_s is observed under high excitations. When the magnetic field is increased the threshold for j_s shifts to the high excitation side in accordance with decreasing the transverse cross section of the exciton wave function (the magnetic length $a_H \approx 0.8a_{ex}$ when H = 4 T).



Fig. 24. (*a*) The dependence of the short-circuit current j_s (mA) on the pumping power W (mW) of photopiezogalvanomagnetic effect in Ge under nonuniform compression P || $\langle 001 \rangle$ (P = 400 MPa) at T = 2 K (curves "a" and "b"), at T = 20 K (curve "c"), H = 0.7 T (curves "a" and "c") and H = 4 T (curve "b"). The curves a⁺ and a⁻ correspond to the opposite direction of magnetic field. The experimental scheme is shown in the insert (from Kukushkin et al. 1982). (*b*) The LA-phonon assisted emission spectra of Ge nonuniformly compressed in the same way as in (a) at H = 0.7 T and T = 2 K. Spectra are recorded at different excitation powers pointed out by arrows in (a). The spectrum 5' is recorded at point 5 under condition of 15 % modulation of excitation intensity. The lines L and FE correspond to the emission of EHL and free excitons from the bottom of potential well. Line P corresponds to the emission of e–h plasma with the critical density n_c ($r_s \approx 2$) (from Kukushkin et al. 1982).

Simultaneously with the abrupt increasing of the photocurrent a new emission line P appears in the recombination spectra (fig. 24b). This line corresponds to the radiative recombination of e-h plasma with critical density $n_c \approx 7 \times 10^{15}$ cm⁻³ ($r_s \approx 2$). More detailed spectroscopic and electrical measurements show that such exciton "metallization" occurs in the narrow spatial region (0.1 mm) between

the bottom of the potential well and the excited surface (Timofeev et al. 1982, Kukushkin et al. 1983). The occurrence of the maximum for the distribution function of exciton density in the experiment considered is due to the phonon wind from the potential well region occupied by EHL. The measured magnitude of the critical density of the exciton-plasma transition n_c is in agreement with the calculations of the exciton ionization collapse within the framework of the dielectric screening of Coulomb interaction (Bisti and Silin 1978).

3.6. Multi-component mixture of electron-hole liquids

In the previous sections the e–h system in Si and Ge was discussed with the assumption that all electrons (holes) were equivalent. Only in this case the EHL may be considered as one-component from the thermodynamic point of view owing to the local electroneutrality condition. In principle, the densities of electrons $n_e^{i,\sigma}$ from different valleys (*i*) or with different spins (σ) may be different in the EHL. In this case electrons cannot be considered as equivalent and the EHL should be considered as a multi-component mixture of liquids. However, from the experiments on the EHL in undeformed Si and Ge it follows unambiguously that the state with equal $n_e^{i,\sigma}$ is most advantageous, i.e., lowest in energy. Any decrease in the degree of degeneracy lowers the EHL stability. Note that in the Hartree–Fock approximation the state when only one quantum state of electrons is occupied is lower. However, the correlation energy stabilizes the EHL with equal occupancy of valleys (Bagaev et al. 1969). This situation is analogous to the case of ordinary metals, where it is just the correlation energy which stabilizes the paramagnetic state.

Kirczenow and Singwi (1978, 1979a,b, 1980) noticed that the situation may differ qualitatively in weakly deformed Ge and Si crystals when different valleys become nonequivalent and the EHL becomes, in principle, a multi-component system with a sufficiently complicated phase diagram. The nonequilibrium e–h system in stressed multi-valley semiconductors is unique for studying the thermodynamics of the two-component Coulomb Fermi liquid. To our knowledge, the only two-component degenerate Fermi system studied theoretically is a liquid consisting of protons and neutrons in neutron stars (Baym and Pethick 1975).

When considering the EHL in deformed Si and Ge crystals, two cases should be differentiated, depending on the relationship between the lifetime of electrons, τ_{ℓ} , and the time of their inter-valley relaxation τ_{rel} . For $\tau_{rel} \ll \tau_{\ell}$ electrons in various valleys are in the thermal equilibrium, and their chemical potentials are equal. At $\tau_{rel} > \tau_{\ell}$ the thermal equilibrium is established only within the limits of each valley (the energy relaxation time is supposed to be much less than the lifetime). We are interested below in the case when electrons in different valleys are quite independent components. This case may be realized in weakly compressed Si and Ge crystals, when the splitting between the valleys in the conduction band is less than the energy of the least intervalley acoustic phonon ($\hbar\Omega_{\tau_A} \sim 10$ meV

in Ge (Brockhouse and Iyengar 1958) and $\hbar\Omega_{_{TA}} \sim 18$ meV in Si (Dolling 1962)). In this case inter-valley transitions with the phonon emission are impossible, whereas transitions with the phonon absorption do not occur at sufficiently low temperatures. Alkeev et al. (1973) observed the radiation line of "hot" excitons with an electron from the split valley in weakly compressed Si (100). Inter-valley relaxation times of "hot" excitons in pure Si crystals are much in excess of lifetimes of excitons up to conduction band splittings $\Delta E_c = 18$ meV (Kulakovskii et al. 1978b). Radiation lines of "hot" e-h pairs in the EHL were first found in Ge (Chou et al. 1977, Feldmann et al. 1978a) and then in Si (Wagner and Sauer 1979). In Ge the electron inter-valley relaxation time τ_{rel} is strongly dependent on the impurity concentration. The hot carriers in EHL are observed only in the purest crystals with $N_{_D}$ $< 10^{11}$ cm $^{-3}$, where $au_{_{rel}}$ reaches a few microseconds, that is only somewhat less than the lifetime of e–h pairs τ_{ℓ} (Feldman et al. 1979b). In Si (Kulakovskii and Kukushkin, 1980) $\tau_{\it rel}$ is even larger than τ_{ℓ} until the difference in chemical potentials of "hot" and "cold" e-h pairs does not exceed the energy of the least inter-valley phonon (fig. 25). The relaxation time of holes from the split valence band is small both in Si and in Ge.



Fig. 25. (*a*) The emission spectra of pure Si stressed along the $\langle 123 \rangle$ axis under DC excitation at T = 1.8 K. Three pairs of lines L_i and FE_i are due to recombination of electrons from triply split conduction band. (*b*) The emission spectra of pure Si $\langle 100 \rangle$ at pulsed excitation ($\overline{n} \approx 10^{17}$ cm⁻³) at T = 1.8 K and delay times 0 (curve 1) and 0.5 μ s (curve 2); the spectra normalized on the intensity of the line L_i (from Kulakovskii and Kukuskin 1980).

Generally speaking, in the EHL "hot" electrons may relax without the participation of phonons as a result of the electron-electron (e-e) scattering. Such processes in Ge include, for example, transitions of the type

$$\boldsymbol{e}_{\langle 11\overline{1}\rangle} + \boldsymbol{e}_{\langle \overline{1}\overline{1}1\rangle} \to \boldsymbol{e}_{\langle 111\rangle} + \boldsymbol{e}_{\langle \overline{1}\overline{1}\overline{1}\rangle}, \tag{72}$$

where the indices denote the valleys with electrons. The rate of such a process for $\Delta E_c \gg E_{Fe}$ is (Brinkman and Rice 1973):

$$\frac{\partial n_{\langle 11\bar{1}\rangle}}{\partial t} = -4\pi n_{\langle 11\bar{1}\rangle} e_{\langle \bar{1}\bar{1}1\rangle} D(\Delta E_c) I_0^2, \qquad (73)$$

where n_j is the density of electrons in the *j*th valley and $I_0 \sim e^2 / \tilde{\varepsilon} (\pi/a)^2$ is the matrix element of e-e scattering. The value includes the average dielectric constant $\tilde{\varepsilon}$ at large $k \sim \pi/a$, which is considerably less than ε_0 . According to Penn (1962) in Ge, $\tilde{\varepsilon} = 2$. Owing to symmetry consideration it is natural to assume that $n_{(11\bar{1})} \sim n_{(\bar{1}1\bar{1})}$. In this case

$$n_{\langle 11\bar{1}\rangle}(t) = n_{\langle 11\bar{1}\rangle}(0)\tau_{rel}/(t+\tau_{rel}),$$
(74)

where

$$\tau_{rel}^{-1} = 4\pi D I_0^2 n_{(11\bar{1})} (0).$$
(75)

Estimations of τ_{rel} for Ge $\langle 111 \rangle$ by this formula give the value $\tau_{rel} = 2 \ \mu s$ (Chou et al. 1979) which is close to experimental observations in high purity Ge crystals.

From the theoretical point of view the determination of the phase equilibrium in the EHL with two kinds of electrons (i.e., in "cold" and "hot" valleys) and one kind of hole (two-electron EHL) requires the calculation of the free energy, $F(N_e^h)$, N_e^c , N_h , V, T), where N_h , N_e^h and N_e^c are, respectively, numbers of holes, "hot" and "cold" electrons, and V is the volume. Electrons in the appropriate valleys are supposed to be thermalized. The local electroneutrality allows us to eliminate one parameter from *F* since $N_{h} = N_{e}^{c} + N_{e}^{h}$. Therefore, from the thermodynamic point of view the two-electron EHL is two-component. At T = 0 the free energy F is equal to the total energy E. As in the consideration of an ordinary EHL there are no difficulties in the calculation of the kinetic energy E_{kin} and the exchange energy E_{exc} , for which contributions of various particles are additive. The calculation of the correlation energy E_{cor} for the two-electron EHL has in Si and Ge its peculiarities connected, first, with the more complicated real structure of the valence band in weakly compressed crystals and, secondly, with the necessity of modifying the available calculation schemes at low densities of electrons in one of the valleys. Kirczenow and Singwi (1980) made an attempt to eliminate these difficulties, assuming that the sum of the exchange and correlation energies per e-h pair, $E_{y_{r}}$, is sensitive to the resultant density value $n = n_e + n_h$ and is independent in the actual region $r_s = 1-2$ of either the structure of the conduction and valence bands or of the distribution of electrons over the valleys, namely:

$$E_{xc}\left(n_{e}^{c},n_{e}^{h}\right) = E_{xc}\left(n_{e}^{c}+n_{e}^{h}\right) \equiv E_{xc}\left(n\right).$$

$$(76)$$

For $E_{xc}(r_s)$ in Ge $\langle 111 \rangle$ they used the dependences which were calculated by Vashishta et al. (1974c) and Bhattacharyya et al. (1974) for undeformed Ge and for Ge compressed along the $\langle 111 \rangle$ axis. In fact, it follows from the numerical calculations for $E_{cor}(r_s)$ and $E_{exc}(r_s)$ made by Vashishta et al. (1974c) and Bhattacharyya et al. (1974) that these energies are very sensitive to the band structures; however, their sum at varying r_s in the region $r_s = 0.5-2$ for Si, Ge, Si $\langle 100 \rangle$ and Ge $\langle 111 \rangle$ (6, 4, 2 and 1 valleys in the conduction band, respectively) varies by no more than by 3%.

Within the framework of the approximation $E_{vc}(n_{e}^{c}, n_{e}^{h}) = E_{vc}(n)$ Kirczenow and Singwi (1980) determined the region of crystal deformation values and the density ratios for "hot" and "cold" electrons when phase separation in the twoelectron EHL in Ge $\langle 111 \rangle$ should be observed. In calculations of the kinetic energy of holes in Ge crystals with different degrees of deformation the dispersion law in the valence band was determined with use of the kp formalism (Bir and Picus 1974). The variation of the kinetic energies of holes (m_{dh} in Ge decreases by 3 times with increase of deformation) was found to have a considerably stronger effect on the phase diagram than the variation of E_{yc} within the limits of several per cent. Consequently, in the author's opinion, the use of $E_{vc}(n_{e}^{c}, n_{e}^{h})$ of rather an approximate dependence $E_{xc}(n)$ is justified. Note that within the framework of the approximation, $E_{xc}(n_e^c, n_e^h) = E_{xc}(n)$, the exchange-correlation part of the chemical potentials of "cold" and "hot" electrons are identically equal ($\mu_{vc}^c = \mu_{vc}^h$), and for phase separation to be realized the loss in the kinetic energy of holes at increasing $n = n_e^c + n_e^h$ must be compensated by the gain in the exchange-correlation energy. Therefore, the conclusion about the role of E_{kin} obtained by Kirczenow and Singwi is natural. As will be shown below, the situation changes appreciably, if a weak dependence of E_{xc} on n_e^h/n_e^c is included in the consideration which leads to the inequality $\mu_{xc}^c \neq \mu_{xc}^h$.

Under phase equilibrium at fixed pressure *p* and *T* for two phases 1 and 2 this equation is valid:

$$\mu_{c}(2) - \mu_{c}(1) = -\int_{1}^{2} n_{e}^{h} / n_{e}^{c} d\mu_{h}.$$
(77)

Here $\mu_{c,h}$ are the chemical potentials of the cold (hot) e–h pairs. It is seen from this equation that phase separation in the EHL is possible only for nonmonotonic dependence $\mu_h(n_e^h/n_e^c)$. Equilibrium densities may be found by means of the Maxwell construction. For two-electron EHL one can write:

$$\mu_{i} = E_{Fe}^{i} + E_{Fh} + \mu_{xc}^{i}, \tag{78}$$

$$p = p_{0e}^{c} + p_{0e}^{h} + p_{0h} + p_{xc}.$$
(79)

where $E_{Fe,h}^{i}$ are Fermi energies of particles of the kind *i*,

$$p_0^i = \left(\frac{\partial E_{kin}^i}{\partial V}\right)_{N_i}, \qquad p_{xc} = -\left(\frac{\partial E_{xc}}{\partial V}\right)_{N_e^c, N_e^h},\tag{80}$$

$$\mu_{xc}^{i} = \left(\frac{\partial E_{xc}}{\partial N_{e}^{i}}\right)_{V, N_{c}^{iej}}.$$
(81)

At T = 0 it should be assumed p = 0, and from eq. (79) the dependence of the equilibrium density n_0 on n_e^h/n_e^c may be determined. In strongly stressed Ge $\langle 111 \rangle$ where the value m_{dh} is small, the dependence $\mu_h(n_e^h/n_e^c)|_{T=0, p=0}$ for the two-electron EHL is monotonous, and phase separation should be absent. However, in weakly compressed crystals, when $E_{Fh} > \Delta E_v (\Delta E_v$ is the splitting of the valence band), m_{dh} is large enough and is increasing with energy *E*. Due to that, $\mu_h(n_e^h/n_e^c)$ has a region with negative slope. In this case at small ratios n_e^h/n_e^c there is a separation of the two-electron EHL into phases with $n_e^h = 0$ and $n_e^h/n_e^c \sim \frac{1}{2}$ (Kirczenow and Singwi 1978, 1980).



Fig. 26. The region of parameters $v_{h,c}$ and $m_{de,h}$ in which the phase separation in two-electron EHL is expected (shaded). The triangles and squares correspond to the real situation in unstressed and highly stressed crystals of Si and Ge (from Kukushkin and Kulakovskii (1980)).

Since the conditions for phase separation in the EHL are only slightly dependent on the specific choice of $E_{ex}(n)$, this dependence may be approximated by a simple analytical expression, and the region of parameters v_e^h/v_e^c and $m_{de}(v_e^h)^{2/3}/m_{dh}$, where phase separation occurs, may be found (v_e^i is the number of valleys). The

region of these parameters found by Kulakovskii and Kukushkin (1980) for the approximation $E_{xc}(n) = An^{1/4*}$ is shown in fig. 26. It is seen from this figure that the situation is most favourable in weakly compressed Ge $\langle 111 \rangle$, where $v_e^h/v_e^c = 3$. In Si within the scope of the above approximation, phase separation is not possible.

The phase diagram of the two-electron EHL at T > 0 was considered by Kirczenow and Singwi (1980) for Ge $\langle 111 \rangle$ as an example, in the approximation $E_{xc}(n e_e^c, n_e^h) = E_{xc}(n)$. In the high-temperature region it was assumed in this case that the gaseous phase is e-h plasma, and it is described within the framework of the same approximation as the liquid phase. As seen above, calculations of phase diagrams in undeformed Si and Ge within the framework of such approximations yielded results which are in good agreement with experiment. Phase diagrams in Ge $\langle 111 \rangle$ calculated by Kirczenow and Singwi (1980) at deformations corresponding to the splitting of the valence band $\Delta E_v = 1.5$ and 3 meV are shown in fig. 27. The broken line shows the interpolation between low- and high-temperature regions. At $\Delta E_v = 1.5$ meV and T = 2 K, two liquid phases must dissolve in each other, and only at T > 5 K two liquids and one gaseous phase may coexist again. At $\Delta E_v = 3$ meV the behaviour of the nonequilibrium two-electron e-h system is expected to be different. At T < 5 K liquid phases I and II coexist with the gaseous phase.

The drawback of these calculations is the neglect of the weak dependence E_{xc} on the distribution of electrons over the valleys which results in the breakdown of the equality $\mu_{xc}^c = \mu_{xc}^h$, and a considerable variation of the region where phase separation of the two-electron EHL is expected. The correlation energy at T = 0 for the two-electron EHL in Si $\langle 100 \rangle$ and Ge $\langle 111 \rangle$ was calculated by Andryushin et al. (1980) with the use of the Nozières–Pines method (1973) which yields good results in the calculation of E_{cor} in multi-valley semiconductors at equal occupation of valleys. For simplicity of calculations in this work the structure of the valence band was approximated by means of two simple bands. Within the framework of the considered approximations the two-electron EHL – according to calculations made in this work – does not separate into phases either in Si $\langle 100 \rangle$ or in Ge $\langle 111 \rangle$. Quantitative results may be somewhat changed, if the real structure of the valence band is taken into account. Note, however, that the values μ_{xc}^c and μ_{xc}^h found in this work – in contrast to the hypothesis of Kirczenow and Singwi – differ appreciably from each other ($|\mu_{xc}^h| > |\mu_{xc}^c|$).

^{*} The error in this approximation of $E_{xc}(n)$ calculated by Vashishta et al. (1974c) and Bhattacharyya et al. (1974) did not exceed 2% in the region $r_s = 1-1.8$.







Fig. 28. The comparison of the emission spectra of cold and hot e–h pairs in two-electron EHL in Si, stressed along (*a*) the $\langle 100 \rangle$ axes, (*b*) $\langle 110 \rangle$, and (*c*) $\langle 123 \rangle$ at 1.8 K. For convenience of comparison the FE_c and FE_h emission lines are combined. The energy interval between the FE_c and FE_h lines for curves (1) and (4) is equal to 19, 20 and 18 meV respectively for $P \parallel \langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ and $\langle 123 \rangle$. The curves (2) and (3) show the L_h lineshape change when FE_h-FE_c slightly decreases. The approximation of the shape of the lines L_h and L_c in Si $\langle 123 \rangle$ with the use of parameters cited in table 7 is shown by dots. The lines M_{c,h} and BE_c are due to the emission of biexcitons and bound excitons, respectively (from Kukushkin and Kulakovskii (1980)).

Let us now direct our attention to the experimental results obtained for the two-electron EHL in Ge (Chou et al. 1977, Feldman et al. 1978a,b, 1979) and Si (Wagner and Sauer 1979, Kulakovskii and Kukushkin 1980). Chemical potentials μ_h and μ_e in such EHL may be determined by the position of high energy boundary of spectral lines L_h and L_c (fig. 28) respectively, and the densities n_e^h and

 n_e^c – from the approximation of the shape of these lines with the use of expression (44). Chemical potentials μ_{xc}^{h} and μ_{xc}^{c} obtained by Chou et al. (1977) when studying Ge $\langle 111 \rangle$ coincide within the limits of error in their determination. Therefore, the approximation $E_{vc}(n_{e}^{h}, n_{e}^{c}) = E_{vc}(n)$ could be expected to be satisfactory. Feldman et al. (1979) and Bajaj et al. (1981) investigated thoroughly the kinetics of the radiation spectra at pulse excitation at different values of the uniaxial compression; their study was aimed at the observation of the EHL separation in Ge (111). Since the time of inter-valley relaxation in the samples used was less than the lifetimes of e-h pairs, the ratio of average concentrations of "hot" and "cold" electrons in the drops decreased gradually with the increasing delay time after the exciting pulse. If phase separation in the EHL occurred in a certain region of ratios n_e^h/n_e^c , the shape of the radiation line of "hot" e-h pairs in the EHL L_b would retain its shape during a certain time. The first experiments (Chou et al. 1979) were not successful in identifying the phase separation in weakly stressed Ge $\langle 111 \rangle$. However recently Bajaj et al. (1981) based mainly on the investigation of the cold EHL line (L_c) shape came to the conclusion that such a separation occurs. The densities of hot electrons in two phases are equal to $n_e^h(I) \approx 0$ and $n_e^h(II) \approx 0.63 n_e^c$. These values are close to those calculated by Kirczenow and Singwi (1979): $n_{e}^{h}(I) = 0$ and $n_{e}^{h}(II) = 0.5 n_{e}^{c}$. The occurrence of a phase separation was deduced from the fact, that the shape of the line L_c in some interval of delay times is a better fit by the superposition of two lines L₍(I) and L₍(II), corresponding to the two phases with fixed densities rather than that of an emission line of a homogeneous e-h system which monotonically decreases in time. In the case considered the shape of the hot e-h pair emission line was almost constant. More detailed and direct evidence for phase separation in two-electron EHL in Ge (111) are of course desirable.

In Si the separation of radiation lines in the spectrum and the precision of the determination of chemical potentials is considerably better due to the larger scale of characteristic binding energies. Already in the first study of the EHL in weakly compressed crystals of Si (100) (Wagner and Sauer 1979) with $n_e^h/n_e^c \approx 0.5$ the difference between chemical potentials and μ_{xc}^h was found to exceed the experimental error. The EHL with the ratio $n_e^h/n_e^c < 0.2$ investigated by Kulakovskii and Kukushkin (1980) in Si (100), Si (110) and Si (123) is more favourable for studying the problem of possible separation of the EHL into phases. The simplest situation takes place in sufficiently strongly compressed Si (123), when the valence band turns out to be simple $\Delta E_v \sim 2-3E_{Fh}$. At these large ΔE_v the dispersion law for holes is close to quadratic and the errors in the determination of n_e^e , n_e^h and, consequently, E_{Fe}^c , E_{Fe}^h and μ_{xc}^c are small (fig. 28). It is seen from fig. 28 that $\mu_h < \mu_c$, and their difference is about 3 meV larger than the difference in Fermi energies $E_{Fe}^c - E_{Fe}^h$. The same situation takes place in Si (100) and Si (110) (fig. 28).

^{*} At very low ratios n_e^h/n_e^c (≤ 0.05) "hot" electrons in the e-h liquid are nondegenerate ($E_{Fe}^h < 0$). In this case the chemical potential "tears off" from the high-energy boundary of the L_h line, which remains invariable with a further decrease in n_e^h .

Consequently, $\mu_{xc}^c \neq \mu_{xc}^h$. This means that the approximation $E_{xc}(n_e^c, n_e^h) = E_{xc}(n)$ is too rough and the dependence of E_{xc} , not only on $n_e^h + n_e^c$, but on $n_e^c - n_e^h$ as well should be taken into account. This conclusion agrees qualitatively with calculations made by Andryushin et al. (1980). From the smallness of the relative difference $\delta \mu_{xc}/\mu_{xc} = (\mu_{xc}^e - \mu_{xc}^h)/\mu_{xc}^c$ (≤ 0.1) it follows that E_{xc} is weakly dependent on the distribution of electrons over the valleys. Therefore, while appoximating E_{xc} , only the first terms in the Taylor series expansion in the parameter $(n_e^c/v_c - n_e^h/v_h)$ may be taken into account. In this case $\delta \mu_{xc}(n_h \rightarrow 0) \sim E_{xc}(v_c + v_h) - E_{xc}(v_c)$ where v_i in E_{xc} denotes the number of valleys over which electrons are distributed.

From the analysis of the dependence $\mu_{xc}(n, n_e^h/n_e^c)$, it follows that the twophase region shown in fig. 26 should broaden with decreasing $|E_{xc}|$ and, vice versa, decrease with increasing $|E_{xc}|$, as a function of the number of valleys at fixed r_s . If this decrease exceeds 6%, then at any ratios n_e^h/n_e^c separation into two liquid phases should occur in the crystals.

The studies of the two-electron EHL in uniaxially deformed Si allowed the determination of the variation of the average exchange-correlation energy at increasing number of valleys. In table 7 the values of the parameters $n_0, E_{Fe}^c, -R_c - \mu_c, -R_h - \mu_h - E_{Fe}^h$ are presented which were found experimentally for Si $\langle 100 \rangle$, Si $\langle 110 \rangle$ and Si $\langle 123 \rangle$. It is seen from here that — in contrast to calculations made by Combescot (1974) — the exchange-correlation part of the energy increases with the number of valleys. The relative increase in $|E_{xc}|$, Si $\langle 100 \rangle$, Si $\langle 110 \rangle$ and Si $\langle 123 \rangle$ is, respectively, 3.8, 2.3 and 1.5% (Kulakovskii and Kukushkin 1980). This means that in Si the phase separation of the two-electron EHL is impossible.

Table 7

	$P \parallel \langle 123 angle$	$P\parallel\langle 100 angle$		$P\parallel\langle 110 angle$
E_{v} (meV)	25	8.5	12	18.5
$n_0 (imes 10^{-17} { m cm^{-3}})$	5.5	6.0	4.8	7.7
$n_h (imes 10^{-17} \mathrm{cm}^{-3})$	0.16	0.6	0.3	0.2
$ \mu_{xc}^{c} $ (meV)	29.9	31.0	28.6	32.3
$ \mu_{xc}^{c} - \mu_{xc}^{h} $ (meV)	2.4	3.2	2.8	3.0

Electron-hole liquid in stressed Si under variable valence-band splitting

Reference: Kulakovskii and Kukushkin (1980)

Thus, the investigation of the two-electron EHL in Si permitted the determination of the variation of the average exchange-correlation energy in the e–h system in semiconductors at a varying number of valleys. Due to the increase of $|E_{xc}|$ with the number of valleys, phase separation in the two-electron EHL in Si is impossible. Ge $\langle 111 \rangle$ where $v_h/v_c = 3$ is a more preferential object from the point of such phase separation. It should be noted that separation of the two-electron EHL may possibly occur in deformed alloys $\text{Ge}_{1-x}\text{Si}_x$ under conditions also when $v_c = 1$, $v_h = 9$. However, in these alloys the inter-valley relaxation time is very short due to the breaking of the translational symmetry. Under these conditions the chemical potentials of electrons in different valleys must be equal. There is need for additional investigation of the possibility of phase separation in such a two-electron EHL.

4. Conclusion

In recent years there has been considerable progress in understanding the condensation of excitons and nonequilibrium charge carriers into an electronhole liquid in semiconductors. This is evident both in the abundance of experimental data and in the development of theoretical methods of quantitative description of the important effects observed. It is significant that the experimental and theoretical results in a number of the most fundamental problems are in good agreement. Interest in this subject is associated, in particular, with the unique possibility of modelling the properties of materials in extreme conditions since the characteristic energy and density scales of an electron-hole liquid in semiconductor are much less than those of usual atomic liquids. Therefore it is possible to investigate effects which occur in ordinary materials at very high densities, under strong external perturbations, etc. In contrast to an electron gas in metals, an electron-hole liquid in semiconductors offers the possibility of the direct comparison with experiment of different many-body theoretical calculation schemes. However, an electron-hole liquid in a semiconductor also has significant differences from electron-ion metal systems - above all, small difference in effective mass between electrons and holes $(m_e/m_h \sim 0.1 - 1)$, which excludes evidently the possibility of spatial ordering in the condensed phase (solidification of electron-hole gas).

At present, there remains a number of unresolved problems in the thermodynamics of electron–hole liquids. One is associated with the stability of a dielectric condensed phase of excitons, the existence of which has yet to be experimentally confirmed. We would like to point out that spin aligned excitonic gas of high density in uniaxially deformed germanium is a good object for investigation of this problem.

This leaves unclear certain aspects of phase transitions in a nonequilibrium electron-hole system and raises questions as to stability and spectral properties of EHL in direct gap semiconductors. There is no doubt that one of the most promising aspects of the experimental investigation of EHL properties is associated with a medium with an extremely anisotropic electronic spectrum, including two-dimensional and one-dimensional semiconducting systems.
Acknowledgement

The authors wish to express their sincere gratitude to Prof. L.V. Keldysh and Prof. C.D. Jeffries for a careful reading of the manuscript and some useful comments.

REFERENCES

- Abrikosov, A.A. Methods of quantum field theory in statistical physics / A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, I.E. Dzyaloshinskii. Moscow : Fizmatlit, 1962. 443 p. (in Russian)
- Akimoto, O. Binding energy of the excitonic molecule / O. Akimoto, E. Hanamura // Solid State Communications. 1972. Vol. 10, Iss. 3. P. 253–255.
- Alkeev, N.V. Spectrum and polarization of recombination radiation in deformed silicon / N.V. Alkeev, A.S. Kaminskii, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. 1973. Vol. 18, Iss. 11. P. 393–395.
- Aldrich, C.H. Line shapes for electron-hole plasmas in semiconductors. I. The heavy-hole to spin-orbit split-band transitions in electron-hole droplets in Ge / C.H. Aldrich, R.N. Silver // Physical Review B. 1980. Vol. 21, Iss. 2. P. 600–614.
- Altukhov, P.D. Degeneracy of exciton gas following powerful optical excitation in CdS crystal / P.D. Altukhov et al. // JETP Letters. 1972. Vol. 16, Iss. 5. 204–207.
- Andryushin, E.A. Electron-hole liquid in deformed Ge and Si subjected to moderate uniaxial pressures / E.A. Andryushin, O.A. Gel'fond, A.P. Silin // Solid State Physics. 1980. Vol. 22, Iss. 5. C. 827–830.
- Apel, J.R. Study of the shape of cyclotron-resonance lines in indium antimonide using a farinfrared laser / J.R. Apel et al. // Physical Review B. – 1971. – Vol. 4, Iss. 2. – P. 436–451.
- Arguello, C.S. First-order Raman effect in wurtzite-type crystals / C.S. Arguello, D.L. Rosseau, S.P.S. Porto // Physical Review. 1969. Vol. 181, Iss. 3. P. 1351–1363.
- Ascarelli, G. Dynamic piezo-optic study of exciton and polaron states in AgBr // Physical Review. 1969. Vol. 179, Iss. 3. P. 797–815.
- Ashkinadze, B.M. Collective properties of excitons in silicon under uniaxial compression / B.M. Ashkinadze et al. // Semiconductors. 1970. Vol. 4, Iss. 11. P. 2206–2208. (in Russian)
- Asnin, Y.M. Condensation of exciton gas in germanium / Y.M. Asnin, A.A. Rogachev // JETP Letters. 1969. Vol. 9, Iss. 7. P. 248–251.
- Aven, M. Physics and Chemistry of II-VI Compounds / ed. by M. Aven, J.S. Prener. Amsterdam : North-Holland, 1967. – 862 p.
- Bagaev, V.S. Properties of electron-hole drops in germanium crystals // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. 1975. Vol. 73. P. 72–90.
- Bagaev, V.S. Motion of electron-hole drops in germanium / V.S. Bagaev et al. // JETP Letters. 1969. Vol. 10, Iss. 7. P. 195–198.
- Bagaev, V.S. Low-temperature photoluminescence of GaAs under conditions of strong interaction of the non-equilibrium carriers / V.S. Bagaev, L.I. Paduchih, V.B. Stopachinskii // JETP. – 1972. – Vol. 15, Iss. 9. – P. 360–362.
- Bagaev, V.S. Surface tension of electron-hole liquid in germanium / V.S. Bagaev, N.N. Sibeldin, V.A. Tsvetkov // JETP Letters. – 1975. – Vol. 21, № 3. – P. 80–81
- Bagaev, V.S. Kinetics of exciton condensation in germanium / V.S. Bagaev et al. // JETP. 1976. Vol. 43, Iss. 4. P. 783–794.
- Bagaev, V.S. Dragging of excitons and electron-hole drops by phonon wind // V.S. Bagaev et al. // JETP. 1976. Vol. 43, Iss. 2. P. 362–370.

- Bajaj, J. Experimental evidence for phase separation of a two-component electron-hole liquid in (111)-stressed Ge / J. Bajaj, F.-M. Tong, G.K. Wong // Physical Review Letters. 1981. Vol. 46, Iss. 1. P. 61–64.
- Balkanski, M. Optical studies of lattice vibrations in II–VI semiconducting compounds // II-VI Semiconductor Compounds / ed. by D.G. Thomas. New York : Benjamin, 1967. P. 1007-1039.
- Balslev, I. The metal-insulator transition in stressed germanium / I. Balslev, J.E. Furneaux // Solid State Communications. 1979. Vol. 32, Iss. 8. P. 609–612.
- Baltrameyunas, R. Electron-hole drops in ZnSe single crystals / R. Baltrameyunas, E. Kuokshtis // JETP Letters. – 1978. – Vol. 28, Iss. 2. – P. 66–70.
- Baltrameyunas, R. Study of electron-hole drops in ZnTe single crystals / R. Baltrameyunas, E. Kuokshtis // JETP Letters. 1978. Vol. 28, Iss. 9. P. 542–545.
- Baltrameyunas, R. Light amplification by electron-hole drops in ZnSe single crystals / R. Baltrameyunas, E. Kuokshtis // Solid State Physics. 1980. Vol. 22, Iss. 3. P. 666–667. (in Russian)
- Baltrameyunas, R. Edge emission of ZnS single crystal at high excitation / R. Baltrameyunas, E. Kuokshtis // Solid State Physics. – 1980. – Vol. 22, Iss. 4. – P. 1009–1012. (in Russian)
- Baym, G. Neutron stars / G. Baym, C. Pethick // Annual Review of Nuclear Science. 1975. Vol. 25, Iss. 1. P. 27–77.
- Beni, G. Electron-hole liquids in polar semiconductors / G. Beni, T.M. Rice // Physical Review Letters. 1976. Vol. 37, Iss. 13. P. 874–877.
- Beni, G. Electron-hole liquids in GaP / G. Beni, T.M. Rice // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 11–12. P. 871–873.
- Beni, G. Theory of electron-hole liquid in semiconductors / G. Beni, T.M. Rice // Physical Review B. – 1978. – Vol. 18, Iss. 2. – P. 768–785.
- Benoit à la Guillaume, C. Electron-hole drops in pure Ge / C. Benoit à la Guillaume, M. Voos // Physical Review B. 1973. Vol. 7, Iss. 4. P. 1723–1727.
- Betzler, K. Magnetic-field dependent intensity oscillations of the EHD luminescence in pure germanium / K. Betzler, B.G. Zhurkin, A.L. Karuzskii // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 17, Iss. 5. – P. 577–579.
- Bhattacharyya, P. Electron-hole liquid in many-band systems. II. Ge and Si / P. Bhattacharyya et al. // Physical Review B. 1974. Vol. 12, Iss. 10. P. 5127–5133.
- Bimberg, D. Observation of an electron-hole liquid in cubic SiC / D. Bimberg, M.S. Skolnick, W.J. Choyke // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 40, Iss. 1. – P. 56–60.
- Bisti, V.E. Exciton-plasma transition in semiconductors / V.E. Bisti, A.P. Silin // Solid State Physics. 1978. Vol. 20, Iss. 6. P. 1850–1855.
- Bir, G.L. Symmetry and strain-induced effects in semiconductors / G.L. Bir, G.E. Pikus. Jerusalem : Keter Publ. House, 1974. Ch. 7.
- Bohnert, K. Nonequilibrium properties of electron-hole plasma in direct-gap semiconductors / K. Bohnert et al. // Zeitschrift für Physik B. – 1981. – Vol. 42, Iss. 1. – P. 1–11.
- Brinkman, W.F. Coulomb effects on the gain spectrum of semiconductors / W.F. Brinkman, P.A. Lee // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 4. P. 237–240.
- Brinkman, W.F. Electron-hole liquids in semiconductors / W.F. Brinkman, T.M. Rice // Physical Review B. 1973. Vol. 7., Iss. 4. P. 1508–1523.
- Brinkman, W.F. The excitonic molecule / W.F. Brinkman, T.M. Rice, B. Bell // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 4. P. 1570–1580.
- Brockhouse, B.N. Normal modes of germanium by neutron spectrometry / B.N. Brockhouse, P.K. Iyengar // Physical Review. 1958. Vol. 111, Iss. 3. P. 747–754.
- Brodin, M.S. Phase diagram of nonequilibrlum-carrier gas and electron-hole liquid in the straight-band semiconductor PbI₂ / M.S. Brodin, I.V. Blonskii, V.V. Tishchenko // JETP Letters. – 1980. – Vol. 32, Iss. 2. – P. 108–110.

- Button, K.J. Zeeman splitting of anomalous shallow bound states in ZnO / K.J. Button et al. // Physical Review Letters. 1972. Vol. 28, Iss. 25. P. 1637–1639.
- Capizzi, M. Electron-hole drops in silicon / M. Capizzi et al. // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 16, Iss. 6. – P. 709–712.
- Capizzi, M. The e-h plasma in direct-gap GaAlAs under 3D confinement / M. Capizzi et al. // Proceedings of the 16th International Conference on Physics of Semiconductors, Montpellier / ed. by M. Averous. – Amsterdam : North-Holland, 1982. – Part 1. – P. 333–335.
- Ching-Hwa / Ching-Hwa, D. Wang, M. Gershenson // Bulletin of American Physical Society. 1979. Vol. 24. P. 342.
- Chou, H.-h. Recombination luminescence from «hot» carriers in electron-hole droplets in stressed Ge / H.-h. Chou, G.K. Wong, B.J. Feldman // Physical Review Letters. 1977. Vol. 39, Iss. 15. P. 959–962.
- Chou, H.-h. Time-resolved recombination luminescence spectra from «hot» and «cold» carriers in electron-hole droplets in stressed Ge / H.-h. Chou et al. // Journal of Luminescence. 1979. Vol. 18–19, Part 2. P. 573–576.
- Choyke, W.J. Photoluminescence of radiation defects in cubic SiC: localized modes and Jahn–Teller effect / W.J. Choyke, L. Patrick // Physical Review B. 1971. Vol. 4, Iss. 6. P. 1843–1847.
- Combescot, M. Estimation of the critical temperature of electron-hole droplets in Ge and Si // Physical Review Letters. 1974a. Vol. 32, Iss. 1. P. 15–17.
- Combescot, M. Ground state of electron-hole droplets // Physical Review B. 1974b. Vol. 10, Iss. 12. P. 5045–5048.
- Combescot, M. On the condensation of electron-hole droplets / M. Combescot, R. Combescot // Physics Letters A. 1976. Vol. 56, Iss. 3. P. 228–230.
- Combescot, M. Condensation of excitons in germanium and silicon / M. Combescot, P. Nozières // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1972. Vol. 5, Iss. 17. P. 2369–2391.
- Daly, T. Time-resolved luminescence spectra in highly photo-excited CdSe at 1.8 K / T. Daly, H. Mahr // Solid State Communications. 1978. Vol. 25, Iss 5. P. 323–326.
- Dimmock, J.O. Exciton structure and Zeeman effects in cadmium selenide / J.O. Dimmock, R.G. Wheeler // Journal of Applied Physics. 1961. Vol. 32, Iss. 10. P. 2271–2277.
- Dite, A.F. Quantum oscillations of the intensity of induced radiation of an electron-hole liquid in CdS crystals / A.F. Dite, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1977. Vol. 25, Iss. 1. P. 42–46.
- Dite, A.F. Radiative recombination of nonequilibrium electron-hole plasma in CdS crystal / A.F. Dite et al. // Proceedings of the 13th International Conference on Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. – 1976. – Amsterdam : North-Holland, 1976. – P. 958–961.
- Dite, A.F. Gas-liquid phase diagram in a nonequilibrium electron-hole system in silicon / A.F. Dite, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP. 1977. Vol. 45, Iss. 3. P. 604–612.
- Dolling, G. Inelastic scattering of neutrons in solids and liquids / Vienna : International Atomic Energy Agency. 1962. Vol. 2. P. 37.
- Droz, M. Phase diagram for electron-hole droplets / M. Droz, M. Combescot // Physics Letters A. 1975. Vol. 51, Iss. 8. P. 473–474.
- Dumke, W.P. Optical transitions involving impurities in semiconductors // Physical Review. 1963. Vol. 132, Iss. 5. P. 1998–2002.
- Ebeling, W. Theory of bound states and ionization equilibrium in plasmas and solids / W. Ebeling, W. Kraeft, D. Kremp // Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gaselektronik / ed. by R. Rompe, M. Steenback. Berlin : Akademie-Verlag, 1976. Vol. 5. 164 p.
- Fehrenbach, G.W. Non-equilibrium exciton phase in the high density regime of a directgap semiconductor / G.W. Fehrenbach et al. // Proceedings of the 16th International Conference on Physics of Semiconductors, Montpellier / ed. by M. Averous. – Amsterdam : North-Holland, 1982. – Part 1. – P. 303–305.

- Feldman, B.J. Electron-hole droplets in germanium in the high stress limit / B.J. Feldman, H.-h. Chou, G.K. Wong // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 24, Iss. 8. – P. 521–523.
- Feldman, B.J. Density and binding energy of electron-hole droplets in uniformly stressed germanium / B.J. Feldman, H.-h. Chou, G.K. Wong // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 26, Iss. 3. – P. 209–211.
- Feldman, B.J. Density and binding energy of $\alpha 1$ and $\alpha 3$ electrons inside electron-hole droplets / B.J. Feldman, H.-h. Chou, G.K. Wong // Solid State Communications. 1979. Vol. 28, Iss. 4. P. 305–307.
- Forchel, A. Experimental verification of scaling relations for electron-hole liquid condensation / A. Forchel et al. // Physical Review Letters. – 1981. – Vol. 46, Iss. 10. – P. 678–682.
- Frova, A. The electron-hole system in GaSe at high densities / A. Frova et al. // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 1. P. 45–48.
- Gay, J.G. Screening of excitons in semiconductors // Physical Review B. 1971. Vol. 4, Iss. 8. P. 2567–2575.
- Gay, J.G. Errata: Screening of excitons in semiconductors // Physical Review B. 1972. Vol. 6, Iss. 12. P. 4884–4885.
- Gerlach, B. Bound states in electron-exciton collisions // Physica Status Solidi (b). 1974. Vol. 63, Iss. 2. P. 459–463.
- Göbel, E. Wavelength dependence of gain saturation in GaAs lasers / E. Göbel, O. Hildebrand, K. Lohnert // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1977. – Vol. 13, Iss. 10. – P. 848–854.
- Gourley, P.L. Spatial condensation of strain-confined excitons and excitonic molecules into an electron-hole liquid in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 40, Iss. 8. – P. 526–530.
- Gourley, P.L. Thermodynamics of excitonic molecules in silicon / P.L. Gourley, J.P. Wolfe // Physical Review B. 1979. Vol. 20, Iss. 8. P. 3319–3327.
- Gubarev, S. Optical orientation of the carriers in an electron-hole plasma in CdS crystals // Physica Status Solidi (b). 1980. Vol. 100, Iss. 1. P. 93–97.
- Gubarev, S.I. Optical orientation of carriers in a nonequilibrium electron-hole plasma in CdS crystals / S.I. Gubarev et al. // JETP Letters. 1977. Vol. 26, Iss. 6. P. 320–323.
- Guggenheim, E.A. The principle of corresponding states // The Journal of Chemical Physics. 1945. Vol. 13, Iss. 7. P. 253–261.
- Hammond, R.B. Temperature dependence of the electron-hole-liquid luminescence in Si / R.B. Hammond, T.C. McGill, J.W. Mayer // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, Iss. 8. – P. 3566–3575.
- Hammond, R.B. Onsets of the electron-hole-droplet luminescence in Si / R.B. Hammond, R.N. Silver // Physical Review Letters. 1979. Vol. 42, Iss. 8. P. 523–526.
- Hartman, R.L. Magneto-optical properties and recombination rate of the green luminescence in cubic SiC / R.L. Hartman, P.J. Dean // Physical Review B. – 1970. – Vol. 2, Iss. 4. – P. 951–959.
- Hass, M. Infrared lattice reflection spectra of III-V compound semiconductors / M. Hass, B.W. Henvis // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1962. Vol. 23, Iss. 8. P. 1099–1104.
- Haug, H. Gain spectrum of an e-h liquid in direct gap semiconductors / H. Haug, D.B. Tranthoai // Physica Status Solidi (b). – 1980. – Vol. 98, Iss. 2. – P. 581–589.
- Henry, C.H. Study of two-electron transitions of a donor in CdSe / C.H. Henry, K. Nassau, J.W. Shiever // Physical Review B. 1972. Vol. 5, Iss. 2. P. 458–462.
- Hensel, J.C. Evaporation of metallic exciton droplets in optically pumped germanium / J.C. Hensel, T.G. Phillips, T.M. Rice // Physical Review Letters. 1973. Vol. 30, Iss. 6. P. 227–230.

- Hensel, J.C. The electron-hole liquid in semiconductors: experimental aspects / J.C. Hensel, T.G. Phillips, G.A. Thomas // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. – New York : Academic Press, 1977. – P. 87–314.
- Hess, E. Band structure and pseudopotential form factors for AlAs / E. Hess et al.// Physica Status Solidi (b). 1973. Vol. 55, Iss. 1. P. 187–192.
- Hildebrand, O. Investigation on the ground state energy of the electron-hole plasma in GaAs / O. Hildebrand, E.O. Göbel // Proceedings of the 13th International Conference on Physics of Semiconductors, Rome / ed. by F.G. Fumi. 1976. Amsterdam : North-Holland, 1976. P. 942–945.
- Hildebrand, O. Electron-hole plasma in direct-gap semiconductors with low polar coupling: GaAs, InP, and GaSb / O. Hildebrand et al. // Physical Review B. – 1978. –Vol. 17, Iss. 12. – P. 4775–4787.
- Hite, G.E. Excitons and the absorption edge in ZnSe / G.E. Hite et al. // Physical Review. 1967. Vol. 156, Iss. 3. P. 850–859.
- Hodby, J.W. Polaron cyclotron resonance in AgBr at microwave and infrared frequencies / J.W. Hodby, J.G. Crowder, C.C. Bradley // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1974. – Vol. 7, Iss. 17. – P. 3033–3041.
- Hopfield, J.J. Fine structure and magneto-optic effects in the exciton spectrum of cadmium sulfide / J.J. Hopfield, D.G. Thomas // Physical Review. – 1961. – Vol. 122, Iss. 1. – P. 35–52.
- Hubbard, J. The description of collective motions in terms of many-body perturbation theory. II. The correlation energy of a free-electron gas // Proceedings of the Royal Society of London A. Mathematical and Physical Sciences. – 1958. – Vol. 243, Iss. 1234. – P. 336–352.
- Hugon, P.L. Insulating side of the metal-insulator transition in doped semiconductors and the dielectric-constant enhancement / P.L. Hugon, A. Ghazali // Physical Review B. 1976. Vol. 14, Iss. 2. P. 602–605.
- Hulin, D. Electron-hole liquid and biexciton pocket in AgBr / D. Hulin et al. // Physical Review Letters. 1977a. Vol. 39, Iss. 18. P. 1169–1172.
- Hulin, D. Electron-hole liquid in GaP / D. Hulin et al. // Physics Letters A. 1977b. Vol. 61, Iss. 5. P. 349–352.
- Insepov, Z.A. Plasma model of an exciton gas in a semiconductor / Z.A. Insepov, G.E. Norman, L.Y. Shurova // JETP. – 1976. – Vol. 44, Iss. 5. – P. 1028–1032.
- Ilegems, M. Infrared reflection spectra of Ga_{1-x}Al_xAs mixed crystals / M. Ilegems, G.L. Pearson // Physical Review B. 1970. Vol. 1, Iss. 4. P. 1576–1582.
- Jeffries, C.D. Electron-hole condensation in semiconductors // Science. 1975. Vol. 189, Iss. 4207. P. 955–964.
- Kawabata, T. Observation of cyclotron resonance absorptions due to excitonic ion and excitonic molecule ion in silicon / T. Kawabata, K. Muro, S. Narita // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 4. – P. 267–270.
- Keldysh, L.V. Concluding remarks // Proceedings of the 9th International Conference on the Physics of Semiconductors. Leningrad : Nauka, 1968. P. 1303–1310.
- Keldysh, L.V. Collective properties of excitons in semiconductors // Excitons in semiconductors / ed. by B.M. Vul. – Moscow : Nauka, 1971. – Ch. 2. – P. 5–18. (in Russian)
- Keldysh, L.V. Electron-hole fluid in polar semiconductors / L.V. Keldysh, A.P. Silin // JETP. 1975. Vol. 42, Iss. 3. P. 535–537.
- Keldysh, L.V. Private communication. 1979.
- Kirczenow, G. Phase separation of the electron-hole drop in (111)-stressed Ge / G. Kirczenow, K.S. Singwi // Physical Review Letters. – 1978. – Vol. 41, Iss. 5. – P. 326–330.

- Kirczenow, G. Unusual phase diagrams of two-component Coulomb Fermi liquid / G. Kirczenow, K.S. Singwi // Physical Review Letters. – 1979a. – Vol. 42, Iss. 15. – P. 1004–1007.
- Kirczenow, G. Ground-state properties of the electron-hole liquid in Ge under (111) uniaxial stress / G. Kirczenow, K.S. Singwi // Physical Review B. – 1979b. – Vol. 19, Iss. 4. – P. 2117–2123.
- Kirczenow, G. Study of the phase diagrams of the two-component electron-hole liquid in stressed germanium / G. Kirczenow, K.S. Singwi // Physical Review B. – 1979. – Vol. 20, Iss. 10. – P. 4171–4188.
- Korneychuk, V.A. Electron-hole liquid in polar semiconductors / V.A. Korneychuk, M.K. Sheinkeman, A.M. Yaremko // Solid State Physics. 1980. Vol. 22, Iss. 5. P. 1534–1536. (in Russian)
- Koch, S.W. On the electron-hole plasma phase transition in direct and indirect gap semiconductors / S.W. Koch, H. Haug // Physics Letters A. – 1979. – Vol. 74, Iss. 3–4. – P. 250–252.
- Kononenko, V.L. Magnetoplasma resonance in electron-hole drops in germanium / V.L. Kononenko, V.N. Murzin // JETP. – 1978. – Vol. 48, Iss. 1. – P. 61–68.
- Kukushkin, I.V. Radiation of exciton molecules in uniaxially compressed germanium / I.V. Kukushkin, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1980. Vol. 32, Iss. 4. P. 280–284.
- Kukushkin, I.V. The luminescence of the excitonic molecules in uniaxially stressed Ge / I.V. Kukushkin, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Journal of Luminescence. – 1981. – Vol. 24–25, Part 1. – P. 393–396.
- Kukushkin, I.V. Giant photogalvanopiezomagnetic effect in germanium under excitonmetallization conditions / I.V. Kukushkin, V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. – 1982. – Vol. 35, Iss. 9. – P. 451–454.
- Kukushkin, I.V. Exciton-plasma transition in nonuniformly deformed germanium / I.V. Kukushkin et al. // JETP. – 1983. – Vol. 57, Iss. 3. – P. 665–672.
- Kulakovskii, V.D. Exchange-correlation energy in electron-hole liquid with different electron distributions over the valleys in silicon / V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin // JETP. – 1980. – Vol. 52, Iss. 3. – P. 543–549.
- Kulakovskii, V.D. Electron-hole liquid and exciton and biexciton gas in elastically deformed silicon crystals / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev, V.M. Edel'shtein // JETP. – 1978a. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 193–199.
- Kulakovskii, V.D. Interband relaxation and luminescence of "hot" excitons in elastically deformed silicon / V.D. Kulakovskii, Y.B. Levinson, V.B. Timofeev // Solid State Physics. 1978b. Vol. 20, Iss. 2. P. 399–401. (in Russian)
- Kulakovskii, V.D. Diamagnetism of excitons and excitonic molecules in silicon / V.D. Kulakovskii, A.V. Malyavkin, V.B. Timofeev // JETP. – 1979. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 380–384.
- Kulakovskii, V.D. Partial composition of a dense electron-hole system and excitonplasma transition in uniaxially stressed silicon / V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin, V.B. Timofeev // JETP. – 1980. – Vol. 51, Iss. 1. – P. 191–198.
- Kulakovskii, V.D. Biexcitons in the emission spectrum of uniaxially deformed silicon / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1977. Vol. 25, Iss. 10. P. 458–461.
- Kulakovskii, V.D. The excitonic molecule emission in the uniaxially stressed Si with the different electron valley degeneracy / V.D. Kulakovskii, V.B. Timofeev // Solid State Communications. 1980. Vol. 33, Iss. 12. P. 1187–1189.
- Kulakovskii, V.D. The partial composition of a dense electron-hole system and the excitonplasma transformation in uniaxially stressed silicon / V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin, V.B. Timofeev // Journal of the Physical Society of Japan. – 1980. – Vol. 49, Suppl. A. – P. 527–529.
- Kulakovskii, V.D. Excitons and excitonic molecules in uniaxially deformed germanium in a magnetic field / V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin, V.B. Timofeev // JETP. – 1981b. – Vol. 54, Iss. 2. – P. 366–371.

- Landau, L.D. Statistical physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Oxford, New York : Pergamon Press, 1969. 484 p.
- Landau, L.D. On the relation between the liquid and gaseous state of metals / L.D. Landau, Ya.B. Zel'dovich // Acta Phys.-Chim. USSR. 1943. Vol. 18. P. 194.
- Landsberg, P.T. Radiative decay in compound semiconductors // Solid State Electronics. 1967. Vol. 10, Iss. 6. P. 513–537.
- Lasher, G. Spontaneous and stimulated recombination radiation in semiconductors / G. Lasher, F. Stern // Physical Review. 1964. Vol. 133, Iss. 2A. P. A553–A563.
- Lawaet, P. Valence-band parameters in cubic semiconductors // Physical Review B. 1971. Vol. 4, Iss. 10. P. 3460–3467.
- Leheny, R.F. Experimental evidence for the existence of an electron-hole liquid in II-VI compounds / R.F. Leheny, J. Shah // Physical Review Letters. – 1976. – Vol. 37, Iss. 13. – P.871–874.
- Leheny, R.F. Condensation of optically excited carriers in CdS: Determination of an electron-hole-liquid phase diagram / R.F. Leheny, J. Shah // Physical Review Letters. 1977. Vol. 38, Iss. 9. P. 511–514.
- Lo, T.K. Spectroscopic determination of condensation energy and density of electron-hole droplets in pure Ge // Solid State Communications. 1974. Vol. 15, Iss. 8. P. 1231–1234.
- Lo, T.K. New phenomena in exciton condensation in germanium / T.K. Lo, B.J. Feldman, C.D. Jeffries // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 4. P. 224–226.
- Lorenz, M.R. The fundamental absorption edge of AlAs and AlP / M.R. Lorenz et al. // Solid State Communications. 1970. Vol. 8, Iss. 9. P. 693–697.
- Lowndes, R.P. Dielectric dispersion and the structures of ionic lattices / R.P. Lowndes, D.H. Martin // Proceedings of the Royal Society of London A. 1969. Vol. 308, Iss. 1495. P. 473–496.
- Lowndes, R.P. Anharmonicity in the silver and thallium halides: far-infrared dielectric response // Physical Review B. 1972. Vol. 6, Iss. 4. P. 1490–1498.
- Lucovsky, G. Localized effective charges in diatomic crystals / G. Lucovsky, R.M. Martin, E. Burstein // Physical Review B. 1971. Vol. 4, Iss. 4. P. 1367–1374.
- Luttinger, J.M. Motion of electrons and holes in perturbed periodic fields / J.M. Luttinger, W. Kohn // Physical Review. 1955. Vol. 97, Iss. 4. P. 869–883.
- Lysenko, V.G. Exciton spectrum in gas of high density non-equilibrium carriers in CdS crystals / V.G. Lysenko, V.I. Revenko // Solid State Physics. – 1978. – Vol. 20, Iss. 7. – P. 2144–2147. (in Russian)
- Lysenko, V.G. Radiative recombination under conditions of screening of the Coulomb interaction in CdS crystals / V.G. Lysenko et al. // JETP Letters. – 1974. – Vol. 20, Iss. 3. – P. 77–79.
- Lysenko, V.G. Radiative recombination of a nonequilibrium electron-hole plasma in CdS crystals / V.G. Lysenko et al. // JETP. 1975. Vol. 41, Iss. 1. P. 163–168.
- Lysenko, V.G. Condensation of nonequilibrium electron-hole pairs near impurity centers in cadmium sulfide crystals / V.G. Lysenko, V.I. Revenko, V.B. Timofeev // JETP Letters. 1976. Vol. 24, Iss. 3. P. 136–139.
- Maaref, H. Electron-hole liquid in GaP / H. Maaref et al. // Solid State Communications. 1977. Vol. 22, Iss. 9. P. 593–596.
- Mahan, G.D. Piezoelectric polaron effects in CdS / G.D. Mahan, J.J. Hopfield // Physical Review Letters. 1964. Vol. 12, Iss. 10. P. 241–243.
- Martin, R.W. On the mechanism of indirect band to band recombination in germanium electron-hole drops // Solid State Communications. 1976. Vol. 19, Iss. 4. P. 373–376.
- Martin, R.W. On the low energy tail of the electron-hole drop recombination spectrum / R.W. Martin, H.L. Störmer // Solid State Communications. 1977. Vol. 22, Iss. 8. P. 523–526.
- Matsko, M.G. On possibility of creation of electron-hole liquid in CdTe crystals / M.G. Matsko, O.V. Franiv // Solid State Physics. 1979. Vol. 21, Iss. 3. P. 943–946. (in Russian)

- Mears, A.L. Cyclotron resonance and cross-modulation with n-type CdTe at 1 mm and 2 mm wavelength / A.L. Mears, R.A. Stradling // Solid State Communications. 1969. Vol. 7, Iss. 17. P. 1267–1269.
- Miklosz, J.C. Exciton structure and magneto-optical effects in ZnS / J.C. Miklosz, R.G. Wheeler // Physical Review. 1967. Vol. 153, Iss. 3. P. 913–923.
- Mitra, S.S. Trends in the characteristic phonon frequencies of the NaCl-, diamond-, zincblende-, and wurtzite-type crystals / S.S. Mitra, R. Marshall // The Journal of Chemical Physics. – 1964. – Vol. 41, Iss. 10. – P. 3158–3164.
- Motisuke, P. Effect of excited electron states lifetime on gain spectra of EHL in CdS / P. Motisuke, C.A. Argüello, R. Luzzi // Solid State Communications. – 1977a. – Vol. 23, Iss. 9. – P. 617–620.
- Motisuke, P. Effect of exciton condensation on the optical refraction index of CdS / P. Motisuke et al. // Solid State Communications. – 1977b. – Vol. 21, Iss. 4. – P. 397–399.
- Mott, N.F. Electrons in disordered structures // Advances in Physics. 1967. Vol. 16, Iss. 61. P. 49–144.
- Mott, N.F. Metal-insulator transitions. New York : Barnes and Noble, 1974. 278 p.
- Müller, G.O. The electron-hole liquid in polar semiconductors / G.O. Müller, R. Zimmermann // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 165–174.
- Müller, G.O. Electron-hole liquid in CdS crystals as revealed by non-equilibrium transmission spectroscopy / G.O. Müller et al. // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 21, Iss. 2. – P. 217–219.
- Munschy, G. Existence and binding energy of the excitonic ion / G. Munschy, B. Stébé // Physica Status Solidi (b). 1974. Vol. 64, Iss. 1. P. 213–222.
- Murzin, V.N. Influence of magnetic field on absorption and radiation of light by electronhole drops in germanium / V.N. Murzin, V.A. Zayats, V.L. Kononenko // Solid State Physics. – 1973. – Vol. 15, Iss. 12. – P. 3634–3642. (in Russian)
- Nahory, R.E. Oscillatory photoconductivity and energy-band parameters of ZnTe / R.E. Nahory, H.Y. Fan // Physical Review Letters. 1966. Vol. 17, Iss. 5. P. 251–253.
- Norman, G.E. Thermodynamics of a strongly non-ideal plasmas / G.E. Norman, A.N. Starostin // High temperature. 1970. Vol. 8, Iss. 2. P. 381–408.
- Patrick, L. Static dielectric constant of SiC / L. Patrick, W.J. Choyke // Physical Review B. 1970. Vol. 2, Iss. 6. P. 2255–2256.
- Pelant, I. Excitonic molecule in AgBr / I. Pelant, A. Mysyrowicz, C. Benoit à la Guillaume // Physical Review Letters. 1976. Vol. 37, Iss. 25. P. 1708–1711.
- Penn, D.R. Wave-number-dependent dielectric function of semiconductors // Physical Review. 1962. Vol. 128, Iss. 5. P. 2093–2097.
- Pines, D. The theory of quantum liquids: normal Fermi liquids / D. Pines, P. Nozières. New York : Benjamin, Inc., 1966. 355 p.
- Pokrovskii, Ya.E. Condensation of non-equilibrium charge carriers in semiconductors // Physica Status Solidi (a). 1972. Vol. 11, Iss. 2. P. 385–410.
- Pokrovskii, Ya.E. Occurrence of a condensed phase of nonequilibrium carriers in germanium / Ya.E. Pokrovskii, K.I. Svistunova // JETP Letters. – 1969. – Vol. 9, Iss. 7. – P. 261–262.
- Pokrovskii, Ya.E. Light scattering by drops of the condensed phase of nonequilibrium carriers in germanium / Ya.E. Pokrovskii, K.I. Svistunova // JETP Letters. 1971. Vol. 13, Iss. 6. P. 212–214.
- Reinecke, T.L. Electron-hole droplet condensation in semiconductors: CdS // Physical Review B. 1977. Vol. 16, Iss. 6. P. 2653–2656.
- Reinecke, T.L. Droplet model of electron-hole liquid condensation in semiconductors / T.L. Reinecke, S.C. Ying // Physical Review Letters. 1975. Vol. 35, Iss. 5. P. 311–315.
- Reinecke, T.L. Erratum: Droplet model of electron-hole liquid condensation in semiconductors / T.L. Reinecke, S.C. Ying // Physical Review Letters. – 1975. – Vol. 35, Iss. 8. – P. 547E.

- Reinecke, T.L. Systematics and scaling relations / T.L. Reinecke et al. // Proceedings of the 16th International Conference on Physics of Semiconductors, Montpellier / ed. by M. Averous. Amsterdam : North-Holland, 1982. Part 1. P. 315-317.
- Rice, T.M. Theory of electron-hole fluid // Proceedings of the 12th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by M.N. Pulkuhn. – Stuttgart : B.G. Teubner, 1974. – P. 23–32.
- Rice, T.M. The electron-hole liquid in semiconductors: theoretical aspects // Solid State Physics. Advances in research and applications / ed. by H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. New York : Academic Press, 1977. P. 1–86.
- Rode, D.L. Electron mobility in II–VI semiconductors // Physical Review B. 1970. Vol. 2, Iss. 10. P. 4036–4044.
- Robert, J.L. Etude de la mobilite des electrons en k(000) de GaSb a 4,2°K / J.L. Robert, D. Barjow // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. A–B. 1970. Vol. 270, Nº 5B. P. 350 353.
- Rode D.L. Low-field electron transport // Semiconductors and Semimetals / ed. by R.K. Willardson, A.C. Beer. – New York : Academic Press. – 1975. – Vol. 10, Ch. 1. – P. 1–89.
- Rogers, F.J. Bound eigenstates of the static screened Coulomb potential / F.J. Rogers, H.C. Graboske, D.J. Harwood // Physical Review A. – 1970. – Vol. 1, Iss. 6. – P. 1577–1586.
- Rose, J.H. Size effects in small electron-hole drops / J.H Rose et al. // Solid State Communications. – 1979. – Vol. 30, Iss. 11. – P. 697–701.
- Rösler, M. Phase diagram of electron-hole liquids in polar semiconductors / M. Rösler, R. Zimmermann // Physica Status Solidi (b). 1977. Vol. 83, Iss. 1. P. 85–91.
- Saito, H. Contribution of plasmon to optical gain spectra of high density electron-hole plasma in CdS / H. Saito, K. Ohmori, M. Ohishi // Journal of Luminescence. 1981. Vol. 24–25, Part 2. P. 605–608.
- Skolnick, M.S. The electron-hole-liquid in 15R-SiC / M.S. Skolnick, D. Bimberg, W.J. Choyke // Solid State Communications. 1978. Vol. 28, Iss. 10. P. 865–868.
- Segall, B. Intrinsic exciton absorption / B. Segall, S.T.F. Marple // Physics and Chemistry of II–VI Compounds / ed. by M. Aven, J.S. Prener. – Amsterdam : North-Holland, 1967. – Ch. 7. – P. 319–381.
- Sell, D.D. Polariton reflectance and photoluminescence in high-purity GaAs / D.D. Sell et al. // Physical Review B. 1973. Vol. 7, Iss. 10. P. 4568–4586.
- Shah, J. Pump wavelength dependence of hot electron temperature in GaAs / J. Shah et al. // Solid State Communications. 1976. Vol. 18, Iss. 4. P. 487–489.
- Shah, J. Observation of electron-hole liquid in GaP / J. Shah et al. // Physical Review Letters. 1977a. Vol. 38, Iss. 20. P. 1164–1167.
- Shah, J. Investigation of exciton-plasma Mott transition in Si / J. Shah, M. Combescot, A.H. Dayem // Physical Review Letters. 1977b. Vol. 38, Iss. 25. P. 1497–1500.
- Shaklee, K.L. Direct determination of optical gain in semiconductor crystals / K.L. Shaklee, R.F. Leheny // Applied Physics Letters. 1971. Vol. 18, Iss. 11. P. 475–477.
- Shaklee, K.L. Optical gain in semiconductors / K.L. Shaklee, R.E. Nahory, R.F. Leheny // Journal of Luminescence. 1973. Vol. 7. P. 284–309.
- Shaklee, K.L. Experimental studies of excitons at high densities // Excitons at High Density / ed. by H. Haken, S. Nikitine. – Berlin – Heidelberg – CmbH : Springer. – 1975. – Vol. 73. – P. 221–240.
- Silver, R.N. Lifetime, surface tension, and impurity effects in electron-hole condensation // Physical Review B. 1975a. Vol. 11, Iss. 4. P. 1569–1582.
- Silver, R.N. Time-dependent behavior in electron-hole condensation // Physical Review B. 1975b. Vol. 12. Iss. 12. P. 5689–5697.
- Skettrup, T. Experimental evidence for electron-hole liquid in ZnO // Solid State Communications. – 1977. – Vol. 23, Iss. 10. – P. 741–744.
- Staehli, J.L. Electron-hole droplet formation kinetics in pure germanium // Physica Status Solidi (b). 1976. Vol. 75, Iss. 2. P. 451–463.

- Stébé, B. Binding energies of the excitonic molecule ion and of the excitonic ion / B. Stébé, G. Munschy // Solid State Communications. – 1975. – Vol. 17, Iss. 9. – P. 1051–1054.
- Stradling, R.A. Cyclotron resonance from thermally excited holes in ZnTe // Solid State Communications. 1968. Vol. 6, Iss. 9. P. 665–669.
- Stradling, R.A. Quantum transport and infrared spectroscopy of semiconductors in high magnetic fields // Colloques Int. CNRS. 1975. № 242. P. 317–326.
- Stopachinskii, V.V. Low-temperature photoluminescence of gallium arsenide // JETP. 1977. Vol. 45, Iss. 2. P. 310–315.
- Strzalkowski, I. Dielectric constant and its temperature dependence for GaAs, CdTe, and ZnSe / I. Strzalkowski, S. Joshi, C.R. Crowell // Applied Physics Letters. – 1976. – Vol. 28, Iss. 6. – P. 350–352.
- Stukel, D.J. Energy-band structure of aluminum arsenide / D.J. Stukel, R.N. Euwema // Physical Review. 1969. Vol. 188, Iss. 3. P. 1193–1196.
- Tamura, H. Cyclotron resonance of positive holes in AgBr / H. Tamura, T. Masumi // Solid State Communications. 1973. Vol. 12, Iss. 11. P. 1183–1186.
- Tanaka, S. Luminescence of high density electron-hole plasma in GaAs / S. Tanaka et al. // Journal of the Physical Society of Japan. – 1980. – Vol. 49, Iss. 3. – P. 1051–1059.
- Thewalt, M.L.W. Biexcitons in Si / M.L.W. Thewalt, J.A. Rostworowski // Solid State Communications. – 1978. – Vol. 25, Iss. 12. – P. 991–993.
- Thomas, D.G. Optical properties of bound exciton complexes in cadmium sulfide / D.G. Thomas, I.J. Hopfield // Physical Review. 1962. Vol. 128, Iss. 5. P. 2135–2148.
- Thomas, G.A. Electron-hole liquid in germanium under infinite uniaxial compression / G.A. Thomas, Ya.E. Pokrovskii // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 2. P. 864–870.
- Thomas, G.A. Trions, molecules and excitons above the Mott density in Ge / G.A. Thomas, T.M. Rice // Solid State Communications. 1977. Vol. 23, Iss. 6. P. 359–363.
- Thomas, G.A. Temperature-dependent luminescence from the electron-hole liquid in Ge / G.A. Thomas et al. // Physical Review Letters. 1973. Vol. 31, Iss. 6. P. 386–389.
- Thomas, G.A. Liquid-gas phase diagram of an electron-hole fluid / G.A. Thomas, T.M. Rice, J.C. Hensel // Physical Review Letters. 1974. Vol. 33, Iss. 4. P. 219–222.
- Thomas, G.A. Collision broadening in the exciton gas outside the electron-hole droplets in Ge / G.A. Thomas et al. // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, Iss. 4. – P. 1692– 1702.
- Thomas, G.A. Mott distortion of the electron-hole fluid phase diagram / G.A. Thomas, J.B. Mock, M. Capizzi // Physical Review B. 1978. Vol. 18, Iss. 8. P. 4250–4259.
- Timofeev, V.B. Radiative recombination under the conditions of screening of the Coulomb interaction // Bulletin of the Academy of Sciences of the U.S.S.R. Physical series. 1979. Vol. 43, Iss. 6. P. 1233–1239. (in Russian)
- Timofeev, V.B. Spin aligned exciton gas in uniaxitally compressed Ge / V.B. Timofeev, V.D. Kulakovskii, I.V. Kukushkin // Proceedings of the 16th International Conference on Physics of Semiconductors, Montpellier / ed. by M. Averous. – Amsterdam : North-Holland, 1982. – Part 1. – P. 327–332.
- Trebin H.-R. Polarons in the degenerate-band case / H.-R. Trebin, U. Rössler // Physica Status Solidi (b). 1975. Vol. 70, Iss. 2. P. 717–726.
- Vechten van, J.A. Quantum dielectric theory of electronegativity in covalent systems. II. Ionization potentials and interband transition energies // Physical Review. – 1969. – Vol. 187, Iss. 3. – P. 1007–1020.
- Vashishta, P. Ground-state energy calculation of the electron-hole liquid in semiconductors / P. Vashishta, P. Bhattacharyya, K.S. Singwi // Nuovo Cimento B. – 1974a. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 172–201.
- Vashishta, P. Thermodynamics of the electron-hole liquid in Ge, Si, and GaAs / P. Vashishta, S.G. Das, K.S. Singwi // Physical Review Letters. – 1974b. – Vol. 33, Iss. 15. – P. 911–914.

- Vashishta, P. Electron-hole liquid in many-band systems. I. Ge and Si under large uniaxial strain / P. Vashishta, P. Bhattacharyya, K.S. Singwi // Physical Review B. – 1974c. – Vol. 10, Iss. 12. – P. 5108–5126.
- Vashishta, P. Electron hole liquid in gallium phosphide / P. Vashishta et al. // Bulletin of American Physical Society. 1977. Vol. 22. P. 269.
- Vavilov, V.S. Resonant absorption, scattering, and emission of electron-hole drops in germanium in the region of their plasma frequency / V.S. Vavilov, V.A. Zayats, V.N. Murzin // JETP Lett. – 1969. – Vol. 10, Iss. 7. – P. 192–195.
- Voisin, P. Investigations of the nucleation of electron-hole drops in Si / P. Voisin, B. Etienne, M. Voos // Physical Review Letters. – 1979a. – Vol. 42, Iss. 8. P. 526–529.
- Voisin, P. Luminescence lineshape of free excitons and electron-hole drops in Si / P. Voisin, M. Voos, C. Benoit à la Guillaume // Solid State Communications. – 1979b. – Vol. 31, Iss. 11. – P. 901–904.
- Voos, M. Condensation of excitons into electron-hole drops in semiconductors / M. Voos, C. Benoit à la Guillaume // Optical Properties of Solids: New Developments / ed. by B.O. Seraphin. Amsterdam : North-Holland. 1975. Ch. 4. P. 143–186.
- Vouk, M.A. An investigation of the recombination radiation from the electron-hole condensate in intrinsic silicon / M.A. Vouk, E.C. Lightowlers // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1975. – Vol. 8, Iss. 21. – P. 3695–3702.
- Wagner, J. Electron–hole drops in uniaxially stressed silicon / J. Wagner, R. Sauer // Physica Status Solidi (b). 1979. Vol. 94, Iss. 1. P. 69–78.
- Waldman, J. Polaron cyclotron resonance in CdTe / J. Waldman et al. // Physical Review Letters. 1969. Vol. 23, Iss. 18. P. 1033–1037.
- Westervelt, R.M. Nucleation phenomena in electron-hole drop formation in Ge and Si: I. Nucleation Rates // Physica Status Solidi (b). 1976a. Vol. 74, Iss. 2. P. 727–739.
- Westervelt, R.M. Nucleation phenomena in electron–hole drop formation in Ge and Si. II. Application to observable phenomena // Physica Status Solidi (b). 1976b. Vol. 76, Iss. 1. P. 31–43.
- Westervelt, R.M. Nucleation phenomena in electron-hole drop condensation in ultra-pure Ge / R.M. Westervelt et al. // Proceedings of Oji Seminar on Physics of Highly Excited States in Solids, 1975 / ed. by M. Ueta, Y. Nishina. Berlin : Springer-Verlag, 1976. P. 270–287.
- Wheeler, R.G. // Physics of semiconductors: Proceedings of the 7th International Conference, Paris / ed. by M. Hulin. Paris : Dunod, 1964. P. 873.
- Wolfe, J.P. Excitons, electron-hole liquid, and electron-hole plasma in stressed Si / J.P. Wolfe, P.L. Gourley // Proceedings of the 14th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh / ed. by B.L.H. Wilson – London : Institute of Physics, 1979. – P. 367–370.
- Worlock, J.M. Determination of the optical properties and absolute concentrations of electron-hole drops in germanium / J.M. Worlock et al. // Physical Review Letters. – 1974. – Vol. 33, Iss. 13. – P. 771–774.
- Yoshida, H. Time-resolved spectra of spontaneous luminescence from high density electron-hole plasma in CdS / H. Yoshida et al. // Solid State Communications. – 1980. – Vol. 33, Iss. 1. – P. 161–165.
- Yoshida, H. Luminescence and inter-valence band hole relaxation in high density electronhole plasma in CdSe and CdS / H. Yoshida, H. Saito, S. Shionoya // Journal of the Physical Society of Japan. – 1981. – Vol. 50, Iss. 3. – P. 881–888.
- Zimmermann, R. Theory of electron–hole plasma in CdS / R. Zimmermann, M. Rösler // Physica Status Solidi (b). 1976. Vol. 75, Iss. 2. P. 633–645.
- Zimmermann, R. Dynamical screening and self-energy of excitons in the electron–hole plasma / R. Zimmermann et al. // Physica Status Solidi (b). – 1978. – Vol. 90, Iss. 18. – P. 175–187.
- Zhidkov, A.E. Existence of bi-excitons and trions in germanium / A.E. Zhidkov, Ya.E. Pokrovskii // JETP Letters. 1979. Vol. 30, Iss. 8. P. 468–471.

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

И.В. Кукушкин, С.В. Мешков, В.Б. Тимофеев

1. Введение

В полупроводниках квазидвумерные слои пространственного заряда, электронные или дырочные, возникают в каналах на границах раздела (интерфейсах) в гетеропереходах и структурах металл — диэлектрик — полупроводник (МДП) [1]. В таких каналах движение электрона по нормали к границе раздела (*z*-направление) ограничено узкой потенциальной ямой и электронный спектр в этом направлении оказывается дискретным. Электронный газ может считаться двумерным (2D-), если энергетические масштабы, связанные с поперечным квантованием в канале, превышают все другие характерные энергии электронной системы (энергию Ферми E_F , температуру *T*, циклотронную энергию $\hbar \omega_c$ и пр.).

Интерес к 2D-электронным структурам особенно возрос в последние годы и обусловлен не только их разнообразными и эффективными применениями в микроэлектронике, но и открытием в этой области принципиально нового фундаментального явления — квантового эффекта Холла (KЭХ), целочисленного [2] и дробного [3], за которое Клаусу фон Клитцингу присуждена Нобелевская премия по физике в 1985 г. Эти явления (см. обзор [4]) специфичны для двумерных систем, и для их понимания на микроскопическом уровне весьма важно знать устройство энергетического спектра 2D-электронов в поперечном магнитном поле D(E) при учете случайного потенциала, связанного с дефектами в реальных структурах, и эффектов экранирования этого потенциала 2D-электронами.

Энергетический спектр идеального 2D-электронного газа при включении поперечного магнитного поля *H* становится полностью дискретным изза магнитного квантования орбитального движения в плоскости слоя (*x*, *y*):

$$E_N = \hbar \omega_c \left(N + \frac{1}{2} \right);$$

здесь $\omega_c = eH/m_c$ — циклотронная частота, m_c — эффективная масса, N — квантовое число. Плотность состояний (ПС) такой системы представляет собой набор δ -функционных пиков, отстоящих друг от друга на $\hbar\omega_c$.При наличии

^{*} Успехи Физических наук. – 1988. – Т. 155, Вып. 2. – С. 219–264.

в системе электронов они заполняют уровни Ландау, начиная с самого нижнего. Число уровней, на которых имеются электроны, характеризуется фактором заполнения *v*, определяемом как отношение концентрации электронов *n*_s к кратности вырождения уровня Ландау на единицу площади $(2\pi l_H^2)^{-1}$ ($l_H = (\hbar/eH)^{1/2}$ — магнитная длина):

$$v=2\pi l_H^2 n_s=\frac{n_s h}{eH}.$$

В реальных 2D-системах электроны испытывают действие случайного потенциала, связанного с разнообразными дефектами (шероховатости поверхности, заряженные примесные центры вблизи канала и пр.). Взаимодействие со случайным потенциалом снимает вырождение, и уровни Ландау приобретают конечную ширину. Распределение одночастичной плотности состояний определяется характером неоднородностей, а также экранированием создаваемого ими потенциала, которое, в свою очередь, зависит от фактора заполнения v. Исследование ПС в зависимости от величины магнитного поля и заполнения позволяет получить ценную информацию о линейных масштабах и амплитуде неоднородностей в реальных 2D-системах. Эта информация необходима, в частности, для понимания магнитотранспортных свойств 2D-слоев пространственного заряда в широком диапазоне изменений заполнения уровней носителями заряда.

К настоящему времени опробованы разнообразные экспериментальные методы измерения плотности состояний 2D-систем в поперечном магнитном поле. Большая часть эти методов исследует так называемую термодинамическую плотность состояний $D_r(E_r) = dn_s/dE_r$, являющуюся интегральной характеристикой энергетического спектра. Эта величина измерялась по осциллирующим зависимостям термодинамических величин — намагниченности [5], электронной теплоемкости [6], а также с помощью термоактивационной проводимости [7]. Обнаружилось, что вблизи полуцелых заполнений $D_{\tau}(E_{E})$ представляет собой довольно острый пик, ширина которого находится в хорошем соответствии с оценками по подвижности носителей (см. [1]), однако и в промежутке между уровнями Ландау ПС оказывается отнюдь не экспоненциально малой. Этот факт трактовался как некое «плато», на фоне которого возвышаются гауссоподобные пики плотности состояний, и высказывались различные соображения о порождающих его причинах. Объяснить наблюдающуюся картину удается только экранированием случайного потенциала, осциллирующим в зависимости от фактора заполнения v.

Одночастичную плотность состояний D(E) можно исследовать с помощью спектроскопического метода [8], основанного на измерениях спектров люминесценции 2D-электронов. Спектроскопический метод позволяет проследить за тем, как зависит распределение ПС от фактора заполнения, как сказывается на энергетическом спектре экранирование флуктуаций случайного потенциала, а также получить информацию о само́м случайном потенциале — его амплитуде и масштабах.

В настоящем обзоре обсуждается очерченный выше круг вопросов. В нем проанализированы как теоретические аспекты, касающиеся характеристик случайных потенциалов и формируемой ими плотности состояний 2D-систем, так и результаты экспериментальных исследований ПС в поперечном магнитном поле с использованием различных методов.

2. Вопросы теории

Прежде всего рассмотрим ряд вопросов, связанных с самим понятием плотности состояний. В наиболее простом случае идеального ферми-газа задача сводится к нахождению энергетического спектра (т. е. решению уравнения Шрёдингера) для одной частицы в случайном потенциале. При достаточно большой площади системы число состояний, отнесенное к единичному интервалу энергии и единичной площади системы, самоусредняется и является по определению плотностью состояний D(E). Эта величина не зависит от температуры и положения уровня Ферми E_F и связана с концентрацией носителей в 2D-системе n_c интегралом

$$n_{S}(E_{F}) = \int_{0}^{\infty} D(E) \left(\exp \frac{E - E_{F}}{kT} + 1 \right)^{-1} dE.$$
 (2.1)

Термодинамическая плотность состояний $D_T(E_F) = dn_S/dE_F$ равна при T = 0 значению D(E) на уровне Ферми.

При учете межэлектронного взаимодействия энергетический спектр многочастичной системы чрезвычайно усложняется и не имеет, строго говоря, отношения к спектру одной частицы. В этом случае одночастичная плотность состояний при любой температуре определяется как мнимая часть запаздывающей функции Грина, свернутой по всем координатам и усредненной по реализациям случайного потенциала:

$$D(E) = S^{-1}Sp\,\mathrm{Im}\,\hat{G}(E)$$

Эта величина, совпадающая для идеального газа с данным выше определением, при наличии межчастичного взаимодействия параметрически зависит от E_F и T и является основной характеристикой энергетического спектра многочастичных систем. Для вычисления D(E) существует мощный аппарат гриновских функций с диаграммной техникой [9], специально приспособленной для вычислений в магнитном поле [10]. В определенных условиях [11] она допускает и прямое экспериментальное измерение оптическими средствами (применительно к 2*D*-системам см. п. 4).

Связь (2.1) между D(E) и концентрацией n_s остается в силе и при наличии межчастичного взаимодействия для любых значений T и E_F , но вследствие

зависимости D(E) от положения уровня Ферми $D_T(E_F)$ уже не совпадает при нулевой температуре с $D(E_F)$.

Последовательный учет межэлектронного взаимодействия по теории возмущений предполагает малость кулоновской энергии на характерном расстоянии между электронами по сравнению с шириной их энергетического распределения. В магнитном поле параметром слабости взаимодействия обычно считается отношение магнитной длины к боровскому радиусу $a^* = \mathscr{M}^2/me^2$ ($\varkappa -$ диэлектрическая проницаемость среды). На практике отношение l_H/a^* оказывается не малым (≥ 1 для гетероструктур и ≥ 3 для МДПсистем), и эффект межэлектронного взаимодействия может быть существенным. Оно должно, в частности, приводить к уширению уровней Ландау за счет затухания квазичастиц, аналогичного обычному ферми-жидкостному [9] (оно отсутствует на верхнем из заполненных уровней Ландау вследствие энергетического запрета на распад квазичастиц, но на более низких уровнях мало́ только по параметру l_H/a^*).

Строгий учет взаимодействия принципиально важен в проблеме основного состояния двумерной электронной системы при нецелочисленном факторе заполнения. Многочисленные расчеты в этой области, касаться которой мы не будем, выполнены в связи с исследованиями дробного КЭХ [4].

В настоящее время единственной практической основой для количественного рассмотрения двумерных уровней Ландау в случайном потенциале является приближение самосогласованного поля. Самосогласованный потенциал складывается из исходного случайного потенциала и электростатического потенциала, возникающего при пространственном перераспределении электронов, а при расчете уширения уровней и плотности заряда в этом потенциале электроны считаются невзаимодействующими. Неточности метода самосогласованного поля, игнорирующего корреляционные и ферми-жидкостные эффекты, по-видимому, не очень существенны на фоне обычно используемых дополнительных приближений. Отсутствие экспериментальных указаний на заметные перенормировки наблюдаемых физических величин также дает основание для оптимизма.

Ниже изложены известные в настоящее время теоретические результаты, касающиеся одночастичной плотности состояний. Сначала рассмотрены практически важные модели случайных потенциалов. Затем в порядке возрастания сложности рассмотрено уширение уровней в отсутствие межэлектронного взаимодействия, линейное экранирование слабого случайного потенциала и, наконец, нелинейные эффекты, возникающие при ширине уровней, сравнимой с расстоянием между ними. В большинстве теоретических работ обсуждаются вопросы, связанные с одночастичной плотностью состояний D(E), т. е. с шириной и формой уровней Ландау при фиксированном заполнении v. Для термодинамической плотности состояний существуют в основном полукачественные соображения и оценки, рассматриваемые в разделе 2.4. Обсуждая работы, мы будем отдавать предпочтение аналитическим результатам и качественным идеям, проясняющим физическую картину. Работы, посвященные численным реализациям сложных процедур самосогласования, будут практически только перечислены.

2.1. Случайные потенциалы

Пространственные неоднородности реального 2D-канала разнообразны как по физическому происхождению, так и по характеру их вклада в эффективный случайный потенциал. Несовершенства кристаллической структуры и, по-видимому, шероховатости поверхности создают сравнительно короткодействующий потенциал, свойства которого количественно изучены слабо. Одним из наиболее важных, применительно к экспериментальным ситуациям, источником случайного потенциала являются заряженные примесные центры, расположенные в окрестности канала. Их дальнодействующие кулоновские потенциалы, перекрываясь, создают плавный случайный потенциал с большим характерным размером.

Большинство теоретических результатов получено для случайных потенциалов гауссового типа, которыми мы и ограничимся. Помимо простоты их корреляционных свойств, значительно облегчающей расчеты, такие потенциалы актуальны и по чисто физическим причинам, поскольку образуются при наличии большого числа перекрывающихся потенциалов сравнительно слабых рассеивателей, случайно распределенных в пространстве. Например, потенциал, создаваемый в плоскости канала кулоновскими центрами, с хорошей точностью является гауссовым на масштабах порядка или больше расстояния между ними.

Общим свойством гауссовых случайных потенциалов является их симметричность, т. е. равновероятность отклонений вверх и вниз от среднего значения. Потенциалы, создаваемые сильными короткодействующими рассеивателями, шероховатостями поверхности и другими подобными источниками, являются в общем случае негауссовыми и несимметричными, однако это принципиально важно, по-видимому, лишь при изучении подвижности в двумерном канале, циклотронного резонанса и т. п. С точки зрения уширения уровней Ландау эти факторы с достаточной точностью могут моделироваться короткодействующими гауссовыми потенциалами. Симметричность гауссовых потенциалов не является в этом смысле помехой, поскольку в настоящее время имеется весьма небольшое число экспериментов [12, 13], указывающих на асимметрию плотности состояний относительно среднего положения уровней Ландау.

Гауссов случайный потенциал в плоскости канала $U(\mathbf{r})$ с нулевым средним значением полностью задается своим парным коррелятором

$$Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle$$

(r — двумерный радиус-вектор). Фурье-образ коррелятора

$$Q_{\mathbf{k}} \equiv \int Q(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^2 r$$

определяет распределение фурье-компонент потенциала

$$\langle U_{\mathbf{k}}U_{\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^2 \,\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')Q_{\mathbf{k}}, \quad U_{\mathbf{k}} \equiv \int U(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})d^2r$$

Важной характеристикой случайного потенциала является его дисперсия, т. е. среднеквадратичное значение Г:

$$\Gamma^{2} = \left\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\right\rangle = \int Q_{\mathbf{k}} \frac{d^{2}k}{\left(2\pi\right)^{2}}.$$
(2.2)

Математически гауссов случайный потенциал определяется как потенциал, вероятность произвольной флуктуации которого *u*(*r*) пропорциональна

$$\exp\left(-\int U(\mathbf{r})Q^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')d^2rd^2r'\right)$$

где $Q^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — оператор, обратный к $Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, т. е. имеющий фурье-образ $Q_{\mathbf{k}}^{-1}$.

Хаотически распределенные в пространстве рассеиватели с концентрацией $n(\mathbf{R})$ ($\mathbf{R} \equiv {\mathbf{r}, z}$) — трехмерный радиус-вектор) создают случайный потенциал с коррелятором

$$\langle U(\mathbf{R})U(\mathbf{R}')\rangle = \int V(\mathbf{R},\mathbf{R}_0)V(\mathbf{R}',\mathbf{R}_0)n(\mathbf{R}_0)d^3R_0 - \\ - \left(\int V(\mathbf{R},\mathbf{R}_0)n(\mathbf{R}_0)d^3R_0\right) \left(\int V(\mathbf{R}',\mathbf{R}_0)n(\mathbf{R}_0)d^3R_0\right),$$
(2.3)

где $V(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ — потенциал, создаваемый в точке **R** рассеивателем, расположенным в точке **R**₀. При однородном вдоль плоскости распределении рассеивателей n(z)

$$Q_{\mathbf{k}} = \int \left| \int V(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} \right|^2 n(z_0) dz_0.$$

Подчеркнем, что характерный пространственный масштаб корреляций потенциала определяется только свойствами рассеивателей и не зависит от их концентрации. Однако от нее зависит, в какой мере случайный потенциал действительно является гауссовым.

Опишем теперь актуальные двумерные случайные потенциалы. Наиболее прост и удобен в применении (благодаря отсутствию расходимости на длинных волнах и быстрому убыванию на коротких) потенциал с гауссовой формой коррелятора:

$$Q(\mathbf{r}) = \Gamma^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2d^2}\right), \quad Q_{\mathbf{k}} = 2\pi d^2 \Gamma^2 \exp\left(-\frac{k^2 d^2}{2}\right).$$
(2.4)

Этот чисто модельный потенциал может быть представлен согласно (2.3) как созданный случайно распределенными рассеивателями с потенциалом $V(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \sim \exp\left[-\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\right)^2 / d^2\right]$. Можно надеяться, что коррелятор (2.4) при

соответствующем выборе параметров способен описать эффективный потенциал, создаваемый шероховатостями поверхности. Часто используемый потенциал «белый шум» представляет собой гауссов потенциал с коррелятором

$$Q(\mathbf{r}) = \omega \delta(\mathbf{r}), \quad Q_{\mathbf{k}} = \omega = const$$

и может рассматриваться как предел потенциала (2.3) с малой корреляционной длиной, но большой дисперсией:

$$d \rightarrow 0$$
, $(2\pi)^{1/2} \Gamma d \rightarrow \omega$.

Потенциалы, создаваемые хаотически расположенными заряженными центрами, обычно имеют в большом диапазоне длин волн степенное поведение коррелятора Q_k . Подробности этой зависимости определяются распределением примесей в перпендикулярном каналу направлении n(z), неоднородностью в этом же направлении диэлектрической проницаемости вещества $\varkappa(z)$, наличием металлического электрода (затвора) и т. п. (вдоль плоскости канала все предполагается однородным). С учетом этих факторов в общем виде коррелятор случайного потенциала, создаваемого в плоскости канала z = 0,

$$Q_{\mathbf{k}}=\int G_{\mathbf{k}}^{2}(0,\boldsymbol{z}_{0})n(\boldsymbol{z}_{0})d\boldsymbol{z}_{0},$$

выражается через функцию Грина $G_{\mathbf{k}}(z,z_{\scriptscriptstyle 0})$ уравнения Пуассона, т. е. решение уравнения

$$\varkappa(z)\left(\frac{d^2G}{dz^2}-k^2G\right)+\frac{dG}{dz}\frac{d\varkappa(z)}{dz}=-4\pi\delta(z-z_0),$$

убывающее при $z \to \pm \infty$. Наличие проводящего электрода формально отвечает обращению $\varkappa(z)$ в бесконечность при соответствующем значении z.

Из разнообразных примеров полупроводниковых систем, где реализуются двумерные каналы, перечислим только наиболее простые и типичные случаи. Равномерно распределенные в однородной среде однозарядные центры с концентрацией n_3 создают в плоскости канала z = 0случайный потенциал с коррелятором

$$Q_{k} = \frac{4\pi^{2}e^{4}n_{3}}{\varkappa^{2}k^{3}}.$$
 (2.5)

Такие же центры, распределенные непосредственно в плоскости канала с двумерной концентрацией *n*₂, дают коррелятор

$$Q_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi^2 e^4 n_2}{\varkappa^2 k^2}$$
(2.6)

с меньшим содержанием длинноволновых гармоник и бо́льшим — коротковолновых. В обоих случаях дисперсия потенциала (2.2) оказывается бесконечной, но для коррелятора (2.5) интеграл (2.2) имеет степенную расходимость на нижнем пределе, а для коррелятора (2.6) — логарифмическую расходимость на обоих пределах.

Для гетероструктур характерно наличие вблизи канала лишенного зарядов слоя (спейсера) толщиной *h*, что приводит к экспоненциальному спаданию коррелятора в области коротких волн:

$$Q_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi^2 e^4 n_3}{\varkappa^2 k^3} \exp(-2kh), \quad Q_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi^2 e^4 n_2}{\varkappa^2 k^2} \exp(-2kh).$$

К примерно такому же эффекту должен приводить учет конечной толщины канала.

Для МДП-систем характерно заметное различие диэлектрических постоянных полупроводника \varkappa_s и диэлектрика \varkappa_d (в котором преимущественно расположены заряды), а также наличие экранирующего металлического электрода. В этом случае корреляторы (2.5), (2.6) приобретают вид

$$Q_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2 e^4 n_3}{\overline{\varkappa}^2 k^3} \frac{1 - 4kh \exp(-2kh) - \exp(-4kh)}{\left[1 - \left(\varkappa_s - \varkappa_d\right) \left(\varkappa_s + \varkappa_d\right)^{-1} \exp(-2kh)\right]^2},$$
(2.7a)

$$Q_{k} = \frac{4\pi^{2}e^{4}n_{2}}{\bar{\varkappa}^{2}k^{2}} \left[\frac{1 - \exp(-2kh)}{1 - (\varkappa_{s} - \varkappa_{d})(\varkappa_{s} + \varkappa_{d})^{-1}\exp(-2kh)} \right]^{2},$$
(2.76)

где $\bar{\varkappa} = (\varkappa_s + \varkappa_d)/2$, h — толщина диэлектрика, n_s — концентрация зарядов в диэлектрике. Исчезают расходимости на коротких волнах, и дисперсия (2.2) потенциала пространственно распределенных зарядов (2.7а) оказывается конечной (применительно к параметрам кремния $\varkappa_s = 11,5$, $\varkappa_d = 3,9$, $\Gamma \approx 4,1$ (10^{-10} см⁻² $n_s h$)^{1/2} мэВ. Подобное же влияние на потенциал оказывает корреляция в расположении примесей.

2.2. Невзаимодействующие электроны

Одночастичная постановка задачи об уширении уровней Ландау является, по-видимому, простейшей из возможных и к настоящему времени всесторонне исследована. Условия применимости такой постановки к реальным системам довольно жестки. Для пренебрежения межэлектронным взаимодействием требуется не только малость параметра $l_H/a^* \ll 1$, но и слабость экранирования случайного потенциала, возможная только при целочисленном факторе заполнения *v* (см. раздел 2.3). Кроме того, необходима малость уширения уровней по сравнению с расстоянием между ними, в противном случае (см. раздел 2.4) даже при целочисленном *v* экранирование потенциала существенно. Несмотря на то, что перечисленные требования обычно не выполняются, вопрос о форме и ширине уровня Ландау и его

зависимости от характера случайного потенциала представляет определенный интерес и в одночастичном приближении.

В отсутствие межэлектронного взаимодействия теория возмущений для электронной гриновской функции описывается последовательностью однониточных, т. е. не содержащих петель, диаграмм со всевозможными примесными линиями. В предположении малого уширения уровней гриновские функции нулевого приближения можно считать принадлежащими одному уровню. Возникающие при пересечении примесных линий фазовые множители делают суммирование диаграмм в общем виде затруднительным, и все расчеты основаны на тех или иных дополнительных предположениях.

Наиболее ранние в этом направлении работы Андо [14–16] основаны на практически никак не аргументированном отбрасывании неудобных диаграмм с пересекающимися примесными линиями. Получающееся в результате так называемое самосогласованное борновское приближение дает полуэллиптическую форму пика плотности состояний. Для *N*-го уровня плотность состояний

$$2\pi l_{H}^{2} D(E) = \left(2\pi\Gamma_{N}\right)^{-1} \left[1 - \left(\frac{E}{2\Gamma_{N}}\right)^{2}\right]^{1/2}, \quad |E| < 2\Gamma_{N}, \quad (2.8)$$

отлична от нуля в конечном интервале энергий, а вне его обращается в нуль. Ширина Г_м выражается через коррелятор случайного потенциала:

$$\Gamma_{N}^{2} = \int Q_{\mathbf{k}} \exp\left(-\frac{k^{2} l_{H}^{2}}{2}\right) \left[L_{N}\left(\frac{k^{2} l_{H}^{2}}{2}\right)\right]^{2} \frac{d^{2} k}{\left(2\pi\right)^{2}} = \int Q(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{r^{2}}{2 l_{H}^{2}}\right) \left[L_{N}\left(\frac{r^{2}}{2 l_{H}^{2}}\right)\right]^{2} \frac{d^{2} r}{2\pi l_{H}^{2}}, \quad (2.9)$$

где $L_{\!\scriptscriptstyle N}-$ полином Лагерра. За начало отсчета принята энергия неуширенного N-го уровня Ландау.

Физически нереальные обрывы плотности состояний (2.8) явно указывают на грубость самосогласованного борновского приближения. Действительная форма уровня зависит от соотношения характерного пространственного масштаба случайного потенциала d (для корреляторов, подобных (2.4)) и магнитной длины l_{H} , а также от номера уровня N. Мы перечислим результаты, получающиеся в различных предельных случаях.

1) В пределе плавного потенциала $d \gg l_{_H}$ интегралы в диаграммах набираются в области малых импульсов и фазовые множители можно не учитывать. Суммирование диаграмм становится в этом случае тривиальным и дает гауссову форму уровня:

$$2\pi l_H^2 D(E) = \frac{\Gamma_N^{-1}}{\left(2\pi\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{E^2}{2\Gamma_N^2}\right).$$

Этот результат был получен Герхардсом [17, 18] методом кумулянтного разложения. Хиками и Брезан [19, 20] продвинулись дальше, получив несколь-

ко первых членов разложения *D*(*E*) по обратным степеням корреляционной длины *d*. Однако их результаты фактически находятся за пределами применимости приближения невзаимодействующих электронов (см. раздел 2.3).

2) В обратном предельном случае $d \ll l_H$ для высоких уровней Ландау $N \gg 1$ возникает другое упрощение [21]: фазовые множители становятся быстро осциллирующими, и диаграммы, содержащие их, могут быть отброшены. Таким образом, самосогласованное борновское приближение оказывается в данном пределе вполне обоснованным и приводит к результату (2.8) с шириной

$$\Gamma_N^2 = \int Q(r) (2\pi l_H^2)^{-1} d^2 r = \frac{\omega}{2\pi l_H^2}, \qquad (2.10)$$

одинаковой для всех уровней и выражающейся через интенсивность белого шума ω. Стремление формы уровня к полуэллиптической с возрастанием номера уровня при короткодействующем случайном потенциале было продемонстрировано в численных работах Андо [22–24].

3) В пределе белого шума $d \gg l_{_H}$ для основного уровня Ландау N = 0 Вегнером [25], а затем Брезаном и др. [26] получено точное аналитическое решение:

$$2\pi l_{H}^{2} D(E) = 2(\pi^{3/2} \gamma)^{-1} \exp\left(\frac{E}{\gamma}\right)^{2} \left[1 + \left(2\pi^{-1/2} \int_{0}^{E/\gamma} \exp x^{2} dx\right)^{2}\right]^{-1}, \quad \gamma^{2} = \frac{\omega}{2\pi l_{H}^{2}}, \quad (2.11)$$

 γ совпадает с шириной уровня (2.10).

4) Экспоненциальные (лифшицевские) хвосты плотности состояний D(E) в области $\hbar\omega_c \gg |E| \gg \Gamma_N$ исследовались только в пределе белого шума [27–29]. Они имеют принципиальное значение для случая $d \ll l_H$, $N \gg 1$, в котором «сердцевина» уровня имеет корневые обрывы плотности состояний при $|E| = 2\Gamma_N$. Метод оптимальной флуктуации дает

$$2\pi l_{H}^{2}D(E) = C_{N}E^{2}\gamma_{N}^{-3}\exp\left(-rac{E^{2}}{\gamma_{N}^{2}}
ight), \gamma_{N}^{2} = rac{\omega}{2\pi l_{H}^{2}}rac{(2N-1)!!}{(2N)!!}.$$

Для численного коэффициента C_N в предэкспоненте получено значение для основного уровня $C_0 = \pi/\sqrt{2}$ [28], согласующееся с точным решением (2.11) (в [27] приводится вдвое меньшее значение), и асимптотика высоких номеров $N \gg 1$ [29].

Резюмируя перечисленные результаты, отметим, что выражение (2.9) как в пределе $d \gg l_{H}$, так и в обратном пределе дает правильное значение среднеквадратичной ширины уровня Ландау (форма пика плотности состояний при этом существенно зависит от соотношения d и l_{H}). Поэтому выражение (2.9) можно считать по меньшей мере хорошей интерполяционной формулой для произвольного гауссова потенциала.

Интересное свойство этой зависимости состоит в том, что вследствие равенства $L_N(0) = 1$ ширина всех уровней Ландау оказывается одинаковой как в пределе плавного потенциала, так и в обратном пределе белого шума. Это можно проиллюстрировать явным выражением для Γ_N при гауссовой форме коррелятора (2.4)

$$\Gamma_N^2 = \frac{\Gamma^2 d^2}{d^2 + l_H^2} \left(\frac{d^2 - l_H^2}{d^2 + l_H^2} \right)^N P_N \left(\frac{d^4 - l_H^4}{d^4 + l_H^4} \right),$$

где P_N — полином Лежандра. Для плавного потенциала $d \gg l_H$ отмеченный факт представляется естественным, поскольку может быть описан как эффект независимого локального смещения по энергии больших участков системы. Ширина уровней Γ_N при этом совпадает с дисперсией случайного потенциала $\Gamma = (\langle U^2(\mathbf{r}) \rangle)^{1/2}$. В пределе белого шума $d \ll l_H$ совпадение уширений различных уровней гораздо менее тривиально и пока не имеет простого физического толкования.

В пределе $d \ll l_{H}$ существует (см., например, [22, 30]) простая связь ширины уровней (2.9) с подвижностью μ электронов в том же канале в отсутствие магнитного поля, вычисленной в борновском приближении:

$$\Gamma_N = \hbar \omega_c \left(\frac{\pi \mu H}{2}\right)^{-1/2},$$

но эта связь является, по-видимому, формальным следствием совпадения входящих в выражения для Γ и μ интегралов.

2.3. Линейное экранирование

В приближении линейного отклика экранирующие свойства 2D-электронного газа описываются его статической диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$. Эта функция, как обычно, показывает, во сколько раз уменьшаются за счет поляризации 2D-системы различные (двумерные) гармоники внешнего потенциала. Линейное экранирование не изменяет гауссова характера случайного потенциала: коррелятор $\tilde{Q}_{\mathbf{k}}$ самосогласованного потенциала факторами, делением на диэлектрическую проницаемость $\tilde{Q}_{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}/\tilde{\varkappa}^2(\mathbf{k})$.

В отсутствие магнитного поля зависимость $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ хорошо известна (см., например, [4]). При температуре, малой по сравнению с $E_{_F}$,

$$\tilde{\varkappa}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 + \frac{2g_{v}}{ka^{*}}, & k \leq 2k_{F}, \\ 1 + \frac{2g_{v}}{ka^{*}} \left\{ 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{2k_{F}}{k} \right)^{2} \right]^{1/2} \right\}, & k > 2k_{F}, \end{cases}$$
(2.12)

345

где $2g_v$ — полная кратность спинового и долинного вырождения, $k_F = = \hbar^{-1} (2mE_F)^{1/2}$ — фермиевский импульс.

Изменения, возникающие при включении магнитного поля, видны уже в приближении Томаса — Ферми, справедливом в длинноволновом пределе. Получающееся выражение (см. [4]),

$$\tilde{\varkappa}\left(\mathbf{k}\right) = 1 + \frac{2\pi e^2}{\varkappa k} \frac{dn_s}{dE_F},\tag{2.13}$$

означает, что диэлектрическая проницаемость осциллирует с фактором заполнения так же, как термодинамическая плотность состояний $D_T(E_F) = dn_S/dE_F$. В приближении невзаимодействующих электронов δ -функционный характер пиков ПС приводит при нулевой температуре к обращению $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ в бесконечность для всех значений n_S , за исключением отвечающих целочисленному заполнению уровней Ландау (при этих значениях n_S экранирование отсутствует $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k}) \equiv 0$).

Более последовательный расчет $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ требует вычисления поляризуемости электронного газа в приближении случайных фаз. Для двумерных систем в магнитном поле такой расчет в полном объеме в настоящее время не выполнен, но наиболее важная при нецелочисленном заполнении часть $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$, связанная с переходами внутри *N*-го частично заполненного уровня, получена Лаббе [31]:

$$\tilde{\varkappa}(\mathbf{k}) = 1 + \frac{e^2}{\varkappa k l_H^2} \frac{\nu'(1-\nu')}{T} L_N\left(\frac{k^2 l_H^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{k^2 l_H^2}{2}\right), \qquad (2.14)$$

где v' отсчитывается от ближайшего целочисленного значения, L_N — полином Лаггера. Обратим внимание, что при $T \to 0$ обращение $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ в бесконечность имеет место для всех \mathbf{k} (из (2.13) это следует формально только для $k \to 0$). Для применимости результата (2.14) требуется малость получающегося самосогласованного потенциала по сравнению с T, а при низкой температуре — малость флуктуации электронной концентрации при экранировании по сравнению со средней концентрацией экранирующих носителей $v'(1-v')/2\pi l_{H}^2$.

Рассмотрим отдельно линейное экранирование при целочисленном факторе заполнения, когда 2D-система является с точки зрения спектра возбуждений диэлектриком. Наличие щели в спектре приводит в двумерном случае к отсутствию экранирования при $k \rightarrow 0$, однако при конечных k экранирование может оказаться вполне заметным, поскольку щель в «ди-электрике» невелика.

Вычисление диэлектрической проницаемости $\varkappa(\mathbf{k})$ двумерного канала в приближении случайных фаз включает суммирование матричных элементов перехода с каждого заполненного уровня на каждый пустой. Это суммирование обрезается быстрым убыванием матричных элементов с рас-

стоянием между уровнями. На рис. 1 приведены в обезразмеренном виде зависимости $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ для различного числа заполненных уровней (до номера N_F включительно) в двумерном канале бесконечно малой толщины. Для сравнения там же приведена зависимость $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$ для того же канала в отсутствие магнитного поля, дающаяся выражением (2.12) с $k_F = \left[2(N_F+1)\right]^{1/2} l_H^{-1}$. Видно, что диэлектрический характер экранирования сказывается только в длинноволновой области $kl_H \ll (N_F+1)^{-1/2}$, где вместо расходимость :

$$\tilde{\varkappa}(\mathbf{k}) = 1 + 2g_V(N_F + 1)\frac{kl_H^2}{a^*}.$$
 (2.15)

В области длин вол
н порядка размера орбиты на верхнем из заполненных уровней Ланда
у $kl_{_H}\approx (N_{_F}+1)^{-1/2}$ диэлектрическая проницаемость максимальна и равна

$$\tilde{\varkappa}(\mathbf{k}) \approx 1 + 2g_V (N_F + 1)^{1/2} \frac{l_H}{a^*}.$$

Для более коротких вол
н $\tilde{\varkappa}({\bf k})$ довольно близка к (2.12) (особенно при больших
 $N_{\scriptscriptstyle F}$).



Рис. 1. Зависимость статической диэлектрической проницаемости двумерной (2D) электронной системы от волнового вектора без магнитного поля (1) и при полном заполнении четырех (2) и одного (3) нижних уровней Ландау.

Длинноволновая асимптотика (2.15) легко может быть получена на основе представлений о смещении ларморовских орбит локальным электрическим полем, использованных при исследовании распределения тока в режиме квантового эффекта Холла [32]. Уменьшение неоднородного уширения уровней Ландау за счет линейного экранирования зависит от характерного масштаба d пространственной корреляции потенциала. Оно исчезает в пределе плавного потенциала $d \gg l_{H}$, но при реальных значениях параметров оказывается значительным. Во всяком случае, оно не менее сильно, чем эффекты, учитываемые в разложениях по магнитной длине в одноуровневом приближении. Например, для гауссовой формы коррелятора (2.4) можно получить следующее разложение ширины уровня по магнитной длине:

$$\Gamma_{N}^{2} = \Gamma^{2} \left[1 - 2\left(N_{F} + 1\right) \left(\frac{l_{H}}{d}\right)^{2} - 2\pi^{1/2} g_{V} \left(N_{F} + 1\right) \frac{l_{H}^{2}}{da^{*}} - 12g_{V}^{2} \left(N_{F} + 1\right)^{2} \frac{l_{H}^{4}}{\left(da^{*}\right)^{2}} \right].$$

Видно, что первый член разложения, следующий из выражения (2.9) для невзаимодействующих электронов, имеет ту же степень по l_{H} , что и второй, связанный с поляризационным экранированием (третий член имеет то же происхождение), который является главным по степени обратной корреляционной длины d^{-1} . Таким образом, учет экранирования принципиально важен даже при расчете уширения уровней слабым случайным потенциалом, и игнорирующие его асимптотики [19, 20] не имеют большого смысла.

Оценим экранирующее действие 2D-системы при целочисленном заполнении. Ограничиться линейным экранированием можно только в МДП-системах, поскольку без экранирования проводящим электродом заряженные примеси вблизи канала даже при незначительной их концентрации создают крупномасштабный потенциал с бесконечной дисперсией Γ (см. раздел 2.1). При толщине диэлектрика $h = 2,0 \cdot 10^{-5}$ см и концентрации заряженных примесей в нем $n_3 \sim 10^{15}$ см⁻³ дисперсия потенциала составляет $\Gamma \approx 6$ мэВ, т. е. равна межуровневому расстоянию $\hbar \omega_c$ при H = 10 Тл. Дисперсия экранированного потенциала (2.7а) с $\tilde{\varkappa}(\mathbf{k})$, приведенной на рис. 1, при заполнении только нижнего уровня Ландау $N_F = 0$ оказывается меньше примерно вдвое. Таким образом, на применимость линейного экранирования, т. е. на малость дисперсии Γ по сравнению с $\hbar \omega_c$, в полях H < 10 Тл вполне можно рассчитывать.

2.4. Нелинейное экранирование

Принципиальная важность нелинейных эффектов в экранировании случайного потенциала большой амплитуды связана с тем, что именно они отвечают за зависимость энергетического спектра от степени заполнения носителями уровней Ландау. Основной механизм нелинейности заключается в том, что число эффективно участвующих в экранировании, т. е. способных к перемещению вдоль плоскости, носителей заряда само зависит от уширения уровней Ландау. Носители возникают на хвостах верхнего из заполненных или нижнего из пустых уровней при пересечении ими уровня Ферми *E*_{*x*}. При

увеличении ширины уровня увеличивается число экранирующих носителей, что способствует уменьшению ширины уровня, поэтому ширина уровня определяется самосогласованно и зависит от положения невозмущенных уровней относительно химпотенциала.

Наиболее распространенный подход к нелинейному экранированию, инициированный работой Андо [33], основан на самосогласованном борновском приближении (см. раздел 2.2), исправленном с учетом экранирования [34–37]. Рассмотрены разнообразные модели случайных потенциалов, но не исследована термодинамическая плотность состояний. При последовательном применении этот подход дает разумные значения для ширины уровней, хотя корневые обрывы плотности состояний могут проявиться в виде неаналитичностей на вычисляемых зависимостях ширины уровней от заполнения (это происходит, по-видимому, в расчетах [35]). Гудмундсоном и Герхардсом [38] был развит интересный, хотя и несколько искусственный подход, в котором пространственные флуктуации потенциала и концентрации заменяются чисто статистическими. Эта работа специально посвящена исследованию термодинамической плотности состояний, но может служить лишь качественной иллюстрацией процесса возникновения «плато» в $D_T(E_F)$ за счет осцилляции ширины уровней.

Перечисленные подходы требуют численных расчетов, результаты которых [33–37] мало полезны для создания ясной физической картины и выявления качественных закономерностей. Значительное продвижение в исследовании нелинейного экранирования применительно к крупномасштабному потенциалу было сделано на основе методов, развитых в теории легированных полупроводников [39]. К двумерным системам эти методы применили Гергель и Сурис [40] (без магнитного поля), Лурьи [41], Шкловский и Эфрос [42]. В этих работах рассматривается потенциал, создаваемый кулоновскими центрами, разбросанными в плоскости канала [40, 41] или во всем объеме [40, 42], при малой концентрации электронов в канале [40] и при заполнении, близком к целочисленному значению [41, 42]. Хотя применительно к реальным системам используемые допущения требуют, по-видимому, очень сильных магнитных полей (см. ниже), получающаяся картина, несомненно, отражает некоторые существенные особенности устройства самосогласованного потенциала и плотности состояний в области сильных магнитных полей. Ниже мы опишем эту картину, пренебрегая для простоты спиновым и долинным вырождением уровней Ландау.

В условиях, когда характерный пространственный масштаб случайного потенциала велик по сравнению с магнитной длиной $l_{_H}$, можно говорить о локальном положении уровней Ландау $E_{_N}(r)$ и их флуктуациях в плоскости канала, отслеживающих самосогласованный потенциал $\tilde{U}(\mathbf{r})$. Крупномасштабный потенциал локально сдвигает дно двумерного канала и с ним все уровни Ландау как целое,

$$E_{N}\left(\mathbf{r}
ight) = \widetilde{U}\left(\mathbf{r}
ight) + \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{c}.$$

Пусть в отсутствие неоднородностей химпотенциал проходил между уровнями N_F и (N_F + 1), т. е. уровни с $N < N_F$ были заполнены, а уровни с $N > (N_F + 1)$ пусты. При наличии флуктуации в одних местах может произойти опускание пустого уровня Ландау (N_F + 1) ниже химпотенциала E_F , в других — поднятие заполненного уровня N_F выше E_F . На уровне (N_F + 1) при этом в соответствующих местах появляются электроны, на уровне N_F — дырки. Создаваемый ими электростатический потенциал компенсирует флуктуацию внешнего потенциала, приближая локальное положение соответствующего уровня Ландау к E_F . В пределе сильного магнитного поля обменные и корреляционные эффекты кулоновского взаимодействия несущественны, и экранирование носит пороговый характер. Это означает, что в тех местах, где на уровне N_F имеются дырки, его высота $E_{(N_F)}(\mathbf{r})$ в точности равна E_F , в результате N-й уровень Ландау оказывается «зажатым» в промежутке

$$E_{F} - \hbar\omega_{c} \left(N_{F} - N + 1\right) \leq E_{N} \left(\mathbf{r}\right) \leq E_{F} - \hbar\omega_{c} \left(N_{F} - N\right).$$
(2.16)

Точный вид плотности состояний D(E) требует, даже в приближении порогового экранирования, численных расчетов. Тем не менее, некоторые качественные зависимости могут быть поняты на основе наглядных масштабных соображений [42]. Ниже мы воспользуемся несколько более общим способом рассуждений, близким к [40]. Рассмотрим ситуацию с фиксированным значением концентрации n_s при заполнении, близком к целочисленному, т. е. при малой разности $\delta n_{_S} = n_{_S} - \left[\left(N_{_F} + 1 \right) / \left(2 \pi l_{_H}^2 \right) \right] \ll \left(2 \pi l_{_H}^2 \right)^{-1}$, и будем искать положение E_F . Рассмотрим сначала случай положительных δn_s , когда экранирующими носителями являются электроны на уровне (N_F + 1) и их концентрация $\delta n_{\rm c}$. Взяв случайный потенциал, описывающийся коррелятором Q_k, включим его не сразу, а постепенно, начиная с самых длинноволновых его фурье-гармоник до некоторого $k_{\max}.$ При малых k_{\max} экранирование будет полным, причем для экранирования плоской волны $U(\mathbf{r}) = \exp{(i\mathbf{kr})}$ нужно изменение концентрации $\delta n_s(\mathbf{r}) = (\varkappa k/2\pi e^3) \exp(i\mathbf{kr})$. По этой причине характерная флуктуация концентрации при идеальном экранировании гармоник от k=0 до $k=k_{\max}$ включительно равна

$$\delta n_{S}(k_{\max}) \sim \left[\int_{0}^{k_{\max}} Q_{k} \left(\frac{\varkappa}{2\pi e^{2}}\right)^{2} k \frac{dk}{2\pi}\right]^{1/2}$$

Экранирование является идеальным при условии, что локальная концентрация электронов $n_s(\mathbf{r})$ нигде не обращается в нуль. При малых k_{\max} добавка к концентрации $\delta n_s(\mathbf{r})$ также мала, и количество областей, полностью оголя-

ющихся в результате локального уменьшения $n_s(\mathbf{r})$, незначительно. Однако с добавлением все более коротковолновых гармоник флуктуации концентрации $\delta n_s(\mathbf{r})$ растут и при некотором значении $k_{\max} = L^{-1}$, определяющемся уравнением

$$\delta n_s^2 \sim \int_0^{L^{-1}} Q_k \left(\frac{\vec{z}k}{2\pi e^2}\right)^2 k \frac{dk}{2\pi}, \qquad (2.17)$$

сравниваются со средней концентрацией δn_s . Это означает, что экранирование уже заметно неидеальное и распределение $n_s(\mathbf{r})$ электронов по плоскости имеет лишенные заряда области размера L и того же масштаба области с увеличенной, грубо говоря, вдвое концентрацией электронов. Гармоники $k > L^{-1}$ экранируются слабо и, следовательно, именно они отвечают за уширение уровней, которое можно, игнорируя негауссовость получающегося потенциала, оценить как

$$\Gamma^{2} \sim \int_{L^{-1}}^{l_{H^{-1}}} Q_{\mathbf{k}} k \frac{dk}{(2\pi)^{2}}.$$
 (2.18)

Верхним пределом положена обратная магнитная длина, поскольку (см. раздел 2.2) более коротковолновые гармоники потенциала неэффективны в уширении уровней. Выражение (2.18) и уравнение (2.17) определяют характерный пространственный масштаб L и амплитуду Γ флуктуаций самосогласованного потенциала.

Положение уровня Ферми E_F определяется следующими соображениями. В отсутствие примесей он совпадает с частично заполненным уровнем Ландау N_F , а при наличии флуктуаций самосогласованного потенциала с амплитудой Γ он сдвигается на нижнюю границу флуктуаций этого уровня $E_{N_F+1}(\mathbf{r})$:

$$E_F = \hbar\omega_c \left(N_F + \frac{3}{2}\right) - \Gamma , \qquad (2.19a)$$

поскольку электроны занимают самые выгодные места. Те же рассуждения можно повторить при отрицательных δn_s , когда экранирующими носителями являются дырки с концентрацией $\delta n_s \ll (2\pi l_H^2)^{-1}$ на почти заполненном уровне N_F . В этом случае получаются те же выражения (2.18), (2.19) для L и Γ , но с химпотенциалом, проходящим по верхней границе флуктуаций уровня Ландау $E_{N_r}(\mathbf{r})$:

$$E_F = \hbar\omega_c \left(N_F + \frac{1}{2} \right) + \Gamma.$$
(2.196)

Изложенный способ рассуждений непосредственно применим лишь при заполнении, не слишком близком к целочисленному, поскольку предполагается, что получающееся уширение уровней Ландау Γ мало́ по сравнению с расстоянием между уровнями $\hbar \omega_c$ и химпотенциал находится вблизи уровня

 N_{F} (при $\delta n_{S} < 0$) или ($N_{F} + 1$) (при $\delta n_{S} > 0$). В общем случае следует считать, что экранирующие носители имеются на обоих уровнях и в (2.17) фигурирует их суммарная концентрация δn_{S} . В области целочисленных заполнений $\delta n_{S} = 0$ длина экранирования определяется условием (2.18) равенства ширины уровней расстоянию между ними $\hbar \omega_{c}$. Выражение (2.17) дает при этом оценку для суммарной концентрации экранирующих носителей обоих знаков.

Приведенные выражения дают возможность судить о качественном виде зависимости ширины уровней Г и положения E_F от концентрации n_S при произвольном крупномасштабном потенциале. Рассмотрим теперь конкретные задачи о различных распределениях заряженных примесей, что сводится к подстановке соответствующих корреляторов в уравнения (2.17) и (2.18). Для потенциала равномерно распределенных в пространстве зарядов (2.5) интегрирование в (2.18) можно (в предположении $l_H \ll L$) продлить до бесконечности и получить

$$L \sim \frac{n_{3} \delta n_{s}^{-2}}{4\pi}, \quad \Gamma \sim \frac{e^{2} n_{3}}{2 \bar{\varkappa} \delta n_{s}}$$
(2.20)

(при условии $\Gamma \ll \hbar \omega_c$). Этот случай, как следует из результатов [42], поддается в пределе порогового экранирования обезразмериванию, связывающему положение химпотенциала с концентрацией универсальной зависимостью

$$E_F = \hbar\omega_c \left(N_F + 1 + \Phi \left(\frac{\delta n_s a^*}{n_s l_H^2} \right) \right), \qquad (2.21)$$

где Ф (*x*) — безразмерная нечетная функция, требующая численного расчета. Из (2.20) следует асимптотическое поведение этой функции при больших значениях аргумента:

$$\frac{1}{2} - \left| \Phi(x) \right| \sim \left| x \right|^{-1}.$$

Несколько сложнее обстоит дело с плоским распределением зарядов, поскольку интеграл (2.18) для уширения уровней с коррелятором (2.6) логарифмически расходится на верхнем пределе и в результат явно входит магнитная длина l_{μ} :

$$L \sim \left(\frac{n_2}{4\pi}\right)^{1/2} \delta n_s^{-1}, \quad \Gamma \sim \frac{e^2}{\overline{\varkappa}} \left(2\pi n_2 \ln \frac{n_2^{1/2}}{\delta n_s l_H}\right)^{1/2}.$$

Положение химпотенциала определяется формулами (2.19). Естественно, что обезразмерить зависимость $E_{\rm F}$ от $n_{\rm S}$ в этом случае не удается.

Термодинамическая плотность состояний, следующая из (2.20) или (2.21), имеет степенную расходимость вблизи каждого уровня Ландау,

$$D_T(E_F) \sim \frac{e^2 n_3}{\overline{\varkappa} (\Delta E_F)^2},$$

где $\Delta E_{\rm \scriptscriptstyle F}-$ расстояние от $E_{\rm \scriptscriptstyle F}$ до ближайшего уровня Ландау. Минимальное значение

$$D_{T}\left(E_{F}\right) \sim \frac{e^{2}n_{3}}{\overline{\varkappa}\left(\hbar\omega_{c}\right)^{2}} \sim \frac{n_{3}l_{H}^{2}}{a^{*}\hbar\omega_{c}}$$

отвечает положению E_F посередине между уровнями Ландау, т. е. при $\Delta E_F \approx \hbar \omega_c/2$. При двумерном распределении примесей $D_T(E_F)$ экспоненциально убывает с удалением E_F от уровня Ландау,

$$D_T(E_F) \sim \frac{\Delta E_F \overline{\varkappa}^2}{e^4 l_H n_2^{1/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_F^2 \overline{\varkappa}^2}{n_2 e^4}\right),$$

и посередине между уровнями оказывается экспоненциально малой [42]:

$$D_{T}(E_{F}) \sim \frac{(a^{*})^{2}}{l_{H}^{5} \hbar \omega_{c} n_{2}^{1/2}} \exp\left(-\frac{(a^{*})^{2}}{n_{2} l_{H}^{4}}\right).$$
(2.22)

Условия применимости приведенных оценок проанализируем для объемного распределения зарядов. Эти условия, помимо обычного требования слабости межэлектронного взаимодействия $l_H/a^* \ll 1$, заключаются в следующем.

1. Масштаб экранирования L должен быть велик по сравнению:

а) с расстоянием между примесями $n_3L^3\gg 1$ (чтобы потенциал можно было считать гауссовым),

б) с магнитной длиной l_{H} (точнее — с размером орбиты на участвующих в экранировании уровнях).

2. Концентрация экранирующих носителей в (2.17) должна быть малой по сравнению:

а) с полным числом мест на уровне $\delta n_{_S} \ll \left(2\pi l_{_H}^2
ight)^{-1}$,

б) с характерным значением, при котором корреляционные сдвиги энергий сравниваются с шириной уровней $(e^2/\bar{z})\delta n_s^{1/2} \ll \Gamma$.

Оптимальным с точки зрения применимости теории к реальным системам является целочисленное заполнение, когда E_F находится точно посередине между уровнями, а ширина уровней максимальна $\Gamma \sim \hbar \omega_c$. В этих условиях все перечисленные требования сводятся к ограничениям на величину магнитного поля, но наиболее жестким оказывается, в принципе, условие 2. а), которое может быть, согласно (2.20), переписано в виде

$$l_{H}^{4}n_{3} \ll a^{*}. \tag{2.23}$$

Задача о плоском распределении примесей более сложна для оценок, но, по-видимому, с точностью до логарифмического коэффициента достаточно, чтобы показатель экспоненты в (2.22) был велик по сравнению с единицей:

$$l_{H}^{4}n_{2} \ll (a^{*})^{2}.$$
 (2.24)

353

Поскольку численные коэффициенты в приведенных оценках неизвестны, неравенства (2.23), (2.24) следует понимать не как количественный критерий, а скорее как качественное требование достаточной силы магнитного поля для существования хотя бы вблизи целочисленных заполнений области применимости концепции порогового экранирования.

Наличие проводящего электрода добавляет к перечисленным выше требование малости масштаба экранирования по сравнению с расстоянием до электрода $L \ll h$, сводящееся к ограничению на магнитное поле сверху. Нарушение этого требования означает, что существенно экранирование случайного потенциала электродом. В обратном пределе $L \gg h$ двумерный канал вообще не принимает участия в экранировании.

Весьма интересный вопрос о форме пика одночастичной плотности состояний в условиях нелинейного экранирования до сих пор детально не рассматривался. Самосогласованные расчеты [33–37] для этого вообще непригодны, поскольку в любом случае дают только полуэллиптическую форму пиков. Качественные соображения [41] в рамках порогового экранирования свидетельствуют о том, что каждый уровень Ландау $E_N(\mathbf{r})$ может иметь повышенную вероятность находиться на краях промежутка (2.16), а не в своем исходном положении без случайного потенциала. Для выяснения вопроса необходимо численное моделирование, приближенное к реальной ситуации. В настоящее время все экспериментальные данные укладываются в традиционное описание одночастичной плотности состояний совокупностью колоколообразных пиков, отвечающих уширенным уровням Ландау.

3. Экспериментальные методы исследования термодинамической плотности состояний

Практически все методы, претендующие на определение термодинамической ПС, основаны на осциллирующем изменении полной энергии (E), химического потенциала (E_F) и магнитного момента (M) системы 2D-электронов при вариации магнитного поля. Поэтому рассмотрим, как осциллируют указанные величины в простейшем случае — в идеальной системе невзаимодействующих 2D-электронов при T = 0 и $n_s = \text{const}$ [43]. В такой модельной системе, как уже отмечалось, энергетический спектр электронов представляет собой набор δ -функций, разделенных циклотронной щелью (спином и неэквивалентностью электронных долин для простоты пока пренебрежем). Если величина магнитного поля столь велика, что концентрация 2D-электронов n_s меньше, чем емкость уровня Ландау eH/h (т. е. v < 1), то все электроны будут находиться в основном состоянии, на нижнем уровне, и в этом случае для полной энергии, химического потенциала и магнитного момента будем иметь

0 < v < 1:

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega_{c}Sn_{s},$$

$$M = -\frac{dE}{dH} = -\frac{1}{2}\frac{e\hbar}{m}Sn_{s},$$

$$E_{F} = \frac{1}{S}\frac{dE}{dn_{s}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{c};$$
(3.1)

здесь S — площадь 2D-системы, m — эффективная масса электронов.

Если при $n_s = \text{const}$ уменьшать магнитное поле (т. е. увеличивать v), то при 1 < v < 2 часть электронов будет находиться на нижайшем уровне Ландау, а остальные — на первом возбужденном с N = 1. При этом

l < v < 2:

$$E = S \frac{eH}{h} \frac{\hbar\omega_c}{2} + \frac{3}{2} \hbar\omega_c S \left(n_s - \frac{eH}{h} \right) = \frac{3}{2} \hbar\omega_c S n_s - \hbar\omega_c S \frac{eH}{h},$$

$$M = -\frac{1}{2} S n_s \frac{\hbar e}{m} \left(3 - \frac{4}{\nu} \right),$$

$$E_F = \frac{3}{2} \hbar\omega_c.$$
(3.2)

В общем случае при
 $k < \nu < (k+1)$ (k-целое число) легко показать, что

$$E = (2k+1)Sn_{s}\frac{\hbar\omega_{c}}{2} - k(k+1)\frac{\hbar\omega_{c}}{2}S\frac{eH}{h},$$

$$M = -\frac{1}{2}Sn_{s}\frac{\hbar e}{m}[(2k+1)-2k(k+1)v^{-1}],$$

$$E_{F} = \frac{1}{2}(2k+1)\hbar\omega_{c}.$$
(3.3)

Качественный вид зависимостей M(H) и $E_F(H)$, которые получаются из приведенных формул, представлен на рис. 2. Видно, что при целых значениях v происходят скачки как величины химического потенциала, так и магнитного момента. Из формул легко видеть, что скачки E_F отвечают величине энергетической щели $\hbar\omega_c$, а магнитный момент каждый раз меняется от значения $-(1/2) Sn_S c\hbar/m$ до величины противоположного знака $(1/2) Sn_S c\hbar/m$. Конечно, в реальной 2D-системе наличие несовершенств и конечной температуры ($T \neq 0$) приводит к тому, что указанные скачки размываются и уменьшаются по амплитуде. Кроме того, учет спиновых и междолинных расщеплений, которые имеются в энергетическом спектре реальных систем 2D-электронов, приводит к дополнительным скачкам химического потенциала. При этом при значениях v, когда полностью заполнены оба спиновых подуровня Ландау, скачки магнитного момента составляют $Sn_se\hbar/m$, а при значениях *v*, когда один спиновый подуровень Ландау заполнен, а другой пустой, скачок *M* составляет $Sn_sg_e\hbar/m_0$, где $g_e - g$ -фактор 2D-электронов, m_0 — масса свободного электрона. Рассмотренные осцилляции магнитного момента и химического потенциала системы 2D-электронов можно наблюдать в экспериментах по измерению намагниченности *M* [5] и контактной разности потенциалов V_K [44]. В опытах по теплоемкости c_T [6] и электроемкости C_e [45, 46] 2D-электронов первопричиной наблюдавшихся явлений также является осцилляция химического потенциала в магнитном поле. Рассмотрим по отдельности все отмеченные экспериментальные методы, которые используются для определения термодинамической ПС 2D-электронов в перпендикулярном магнитном поле.



Рис. 2. Качественная картина осциллирующего поведения магнитного момента M и химического потенциала E_F идеального 2D-электронного газа при фиксированной концентрации $n_{\rm s}$ в магнитном поле, T=0.

3.1. Осцилляции магнитного момента

Измерения намагниченности системы 2D-электронов были впервые осуществлены в работе [5]. В этих опытах образцы закреплялись на тонкой нити, ось которой была перпендикулярна магнитному полю и нормали к 2D-слою. Магнитное поле в эксперименте было отклонено на некоторый малый угол от нормали к 2D-слою, параллельно которой должен быть направлен возникающий магнитный момент (*M*) системы 2D-электронов. Величина вращающего момента в этих условиях определяется векторным

произведением [**MH**] и, следовательно, зависит от полного магнитного момента системы 2D-электронов. Осциллирующая от магнитного поля часть намагниченности измерялась с помощью высокочувствительного крутильного магнитометра. Детальное описание конструкционных особенностей этой техники, а также дифференциального емкостного метода измерений углов поворота магнитного момента при плавных развертках магнитного поля можно найти в [5, 47–49].



Рис. 3. Осциллирующая зависимость нормированной величины намагниченности 2Dэлектронов в GaAs—AlGaAs-гетероструктурах в магнитном поле [5]. *а* — Гетероструктура, содержащая 140 идентичных квантовых ям; концентрация 2D-электронов в ямах $n_s = 5,4 \cdot 10^{11}$ см⁻², электронная подвижность $\mu = 8 \cdot 10^4$ см²/В·с. δ — Одиночный гетеропереход, $n_s = 3,7 \cdot 10^{11}$ см⁻², $\mu = 2,85 \cdot 10^5$ см²/В·с; на вставке вверху изображена геометрия эксперимента; штриховой и пунктирной линиями показана аппроксимация в рамках предположений о гауссовой форме пика ПС на уровне Ландау при различных значениях ширины уровня.

В работах [5, 47–49] использовались различные 2D-электронные системы: сверхрешетка GaAs—AlGaAs, содержащая около 100 квантовых ям с 2D-электронами (подвижность которых была невысока и составляла $\sim 5 \times 10^4$ см²/В·с), а также одиночный гетеропереход GaAs—AlGaAs с большой подвижностью электронов. В обоих случаях вместо скачкообразного изменения магнитного момента при целочисленных значениях фактора заполнения наблюдалось довольно плавное изменение намагниченности 2D-систем (рис. 3) от *H*. При этом величина амплитуды изменения *M* была существенно меньше (почти в пять раз) теоретического значения $M_0 = n_s S\hbar e/m$

(см. (3.3)). Указанные особенности означают, что в условиях КЭХ уровни Ландау сильно уширены и существенно перекрываются, так что даже в сильном магнитном поле ($\mu H \gg 1$) в щелях между уровнями Ландау плотность состояний оказывается не мала, а составляет заметную часть от величины ПС в нулевом магнитном поле: $D_0 = m/\pi\hbar^2$.

Для определения ПС экспериментальная зависимость $M_e(H)$ сравнивалась с теоретической зависимостью $M_t(H)$, которая получалась путем дифференцирования по магнитному полю выражения

$$E = \int \varepsilon D(\varepsilon, \Gamma) f(\varepsilon, E_F, T) d\varepsilon, \qquad (3.4)$$

где $f(\varepsilon, E_{_F}, T)$ — фермиевское распределение.

В этом выражении считалось, что каждый пик ПС описывается гауссовой функцией

$$D(\varepsilon,\Gamma) = \frac{eH}{h} \sum_{j} D_{j}(\varepsilon), D_{j}(\varepsilon) = \pi^{-1/2} \Gamma^{-1} \exp\left|-\frac{(\varepsilon - E_{j})}{2\Gamma^{2}}\right|, \quad (3.5)$$

 $(E_j$ — энергии неуширенных уровней Ландау). Параметр Γ считался зависящим от магнитного поля. Наилучшее согласие получалось при $\Gamma = A H^{1/2}$, где постоянная A зависит (но не очень сильно) от качества структуры и уменьшается с увеличением μ .

Резюмируя, необходимо отметить, что в экспериментах по намагниченности 2D-электронных систем не удается прямым образом определить плотность состояний. Наиболее уязвимым местом метода является предположение о том, что подгоночный параметр Γ монотонно зависит от H и не зависит от фактора заполнения. Как следует из прямых экспериментов и теоретических соображений [33, 42], это предположение не выполняется, поэтому количественное описание ПС, выполненное в работах [5, 47–49], оказывается довольно грубым. Подчеркнем, однако, что именно в этих экспериментах были получены одни из первых указаний на то, что в условиях КЭХ уровни Ландау сильно перекрываются и в щелях между уровнями ПС не мала даже в очень сильном магнитном поле (т. е. при $\mu H \gg 1$).

3.2. Осцилляции контактной разности потенциалов и тока через затвор

Метод контактной разности потенциалов, который применялся в работах [44, 50–52] для изучения плотности состояний 2D-электронов, является, по существу, классическим методом Кельвина, использующимся для определения работы выхода электрона из вещества. Этот экспериментальный прием основан на измерении разности потенциалов $V_{\rm K}$ между 2D-каналом электронов (концентрация которых постоянна) и металлическим затвором при вариации магнитного поля. Если магнитное поле не влияет на свойства

затвора, а химический потенциал 2D-электронов осциллирует в магнитном поле в соответствии с (3.3), то измеряемая разность потенциалов V_{κ} (в условиях термодинамического равновесия, необходимого для постоянства электрохимического потенциала) должна отражать осцилляции уровня Ферми 2D-электронов в магнитном поле.

Следует отметить, что на возможность применения метода контактной разности потенциалов для изучения энергетического спектра электронов в магнитном поле было указано в 1956 г. в работах [53, 54]. Однако эксперименты, выполненные на примере металлов (Ве), привели к негативному результату: осцилляции контактной разности потенциалов, обусловленные изменениями химпотенциала электронов в магнитном поле, не наблюдались, хотя чувствительность измерительной установки существенно превышала ожидаемые значения изменения V_{κ} [55]. Отсутствие этого эффекта в металлах было объяснено в работе [56] тем, что в этом случае сжимаемость металла определяется электронами, и осцилляции контактной разности потенциалов не отвечают осцилляциям химического потенциала, а полностью компенсируются эффектом магнитострикции. В полуметаллах, где объемная концентрация электронов на 3-4 порядка меньше, чем в нормальных металлах, можно было ожидать, что эффекты магнитострикции не будут оказывать заметного влияния и осцилляции V_к будут проявляться. Однако, как было установлено в работе [56], и в полуметаллах осцилляции контактной разности потенциалов также оказываются полностью скомпенсированными. Поэтому наблюдение осцилляции напряжения, измеренного между металлическим затвором и 2D-каналом в кремниевых МДП-структурах [44], явилось, по-видимому, первым экспериментальным наблюдением осцилляции контактной разности потенциалов металлической системы в магнитном поле. Помимо кремниевых МДП-структур, осцилляции V_к наблюдались также в гетеропереходах GaAs—AlGaAs [57, 58]).

В экспериментах [44, 50–52], выполненных на Si-МДП-структурах, измерения $V_{\rm K}$ производились с помощью электрометра с большим входным сопротивлением (~10¹⁴ Ом), которое было необходимо для того, чтобы за время измерений зависимости $V_{\rm K}(H)$ заряд на МДП-структуре не изменялся более, чем на 0,1 %. На зависимостях

$$V_{K}(H)\Big|_{n_{S}=const}$$

были обнаружены скачки контактной разности потенциалов, которые были наиболее значительны при целочисленных значениях v = 4, 8, 12, ..., отвечающих полному заполнению уровней Ландау. Поскольку величина скачка химического потенциала при v = 4, 8, 12, ... в идеальном случае приблизительно равна $\hbar \omega_c$ (см. рис. 2), то изменение ΔV_K должно составлять $\hbar \omega_c/e$. Однако в эксперименте величина скачка ΔV_K была почти в пять раз меньше указанного значения, что свидетельствовало о значительном уширении уровней Ландау по сравнению с идеальным случаем. Параметры энергети-
ческого спектра 2D-электронов определялись авторами [50] по наилучшему совпадению измеренной зависимости $\Delta V_{K}(H)$ и зависимости $E_{F}(H)/e$, полученной путем численного решения уравнения:

$$n_{s} = \frac{eH}{h} \sum_{j} \int_{0}^{\infty} D_{j} \left(\varepsilon, E_{F}\right) \left(1 + \exp \frac{\varepsilon - E_{F}(H)}{kT}\right)^{-1} d\varepsilon.$$
(3.6)

В этом уравнении, возникающем из условия постоянства концентрации 2D-электронов в магнитном поле, содержатся функции $D_j(\varepsilon)$, описывающие энергетическое распределение плотности состояний на уровнях Ландау. Отсюда и проистекает возможность изучения ПС методом контактной разности потенциалов. Следует, однако, заметить, что при определении плотности состояний указанным методом используются несколько предположений и подгоночных параметров. Перечислим их:

1. Считается, что $\Delta V_{\kappa}(H) \equiv \Delta E_{F}(H)$, хотя это равенство может не выполняться из-за эффектов компенсации, связанных, например, с магнитострикцией [56].

2. Считается, что энергетические распределения плотности состояний на двух соседних уровнях Ландау описываются гауссовым распределением с шириной Г, которая является подгоночным параметром и совпадает для соседних подуровней.

3. Подгоночным параметром является также величина энергетической щели Δv , отвечающая данному фактору заполнения *v*.

4. Поскольку экспериментальная зависимость $\Delta V_{K}(H)$ описывается в некоторой области изменения магнитного поля в условиях, когда изменяется v, то, как следует из работы [8], а также из выводов авторов [50], подгоночные параметры Δv и Γ не являются постоянными величинами, а могут сильно изменяться по неизвестным законам $\Delta v(H)$ и $\Gamma(H)$.

Указанные сложности метода контактной разности потенциалов снижают надежность полученных количественных результатов, но вместе с тем нельзя не отметить, что этим методом удалось обнаружить усиление междолинного и спинового расщеплений [50].

Эксперименты по изучению контактной разности потенциалов непосредственно связаны с методом изучения ПС, основанном на измерениях тока, текущего в цепи 2D-канал — затвор при развертке магнитного поля. Эта методика была предложена в работе [59] для исследования ПС в гетероструктуре GaAs — AlGaAs. При изменении магнитного поля из-за осцилляций химического потенциала 2D-электронов и связанных с ними осцилляций контактной разности потенциалов по цепи затвор — 2D-канал может перемещаться заряд. Величина этого заряда должна осциллировать в полном соответствии с осцилляциями контактной разности потенциалов. Величину заряда можно определить с помощью измерений тока по цепи затвор — 2D-канал, замкнутых через нагрузочное сопротивление. Ток в этом случае равен

$$I(H) = Se \frac{dn_s}{dt} = Se \frac{dn_s}{dH} \frac{dH}{dt}, \qquad (3.7)$$

где S — площадь 2D-электронного канала, dH/dt — скорость развертки магнитного поля. Как видно из (3.7), измерения тока затвора I(H) также содержат информацию о плотности состояний.

3.3. Осцилляции электронной теплоемкости

Один из методов определения плотности состояний 2D-электронов в поперечном квантующем магнитном поле основан на измерениях электронной теплоемкости, которая по определению есть

$$c_{T} = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT} \int_{0}^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon, E_{F}) d\varepsilon , \qquad (3.8)$$

где *E* — внутренняя энергия электронной системы. При изменении температуры электроны перераспределяются вблизи фермиевской поверхности. В связи с этим теплоемкость электронов оказывается пропорциональной ПС на уровне Ферми, как видно из выражения (3.8). Существенно подчеркнуть, что вклад в теплоемкость дают как протяженные, так и локализованные электронные состояния.

Расчет теплоемкости 2D-электронных систем выполнен в работе [60], где молчаливо предполагалась одноэлектронная природа ПС на уровнях Ландау и гауссовый характер распределения D(E). В этой работе проанализированы внутриуровневый и межуровневый вклады в теплоемкость. Вклад от нескольких уровней Ландау приводит к осциллирующему поведению электронной теплоемкости при изменении фактора заполнения, так что минимумы в осциллирующей зависимости $c_T(v)$ возникают при целочисленных v, а максимумы — при полуцелых. В противоположность этому внутриуровневый вклад в теплоемкость проявляется в возникновении узких пиков при целых v. Причем эти пики проявляются только при условии $kT \sim \hbar \omega_c$ (т. е. в области относительно высоких температур в сравнении с щелями в спектре).

Электронный вклад в теплоемкость намного слабее фононного. В этом состоит главная трудность экспериментов, ставящих целью обнаружить осцилляции теплоемкости 2D-электронов при изменении поперечного квантующего магнитного поля. Эти сложности, тем не менее, удалось преодолеть благодаря использованию многослойных гетероструктур с большим числом идентичных квантовых ям, содержащих 2D-электронный газ. Так, в работах [5, 59] для этих целей использовалась GaAs—AlGaAs-гетероструктура, содержащая около 100 квантовых ям (полное число 2D-электронов составляло порядка 10¹³). Измерения электронной теплоемкости ведутся с использованием стандартной техники тепловых импульсов, разогревающих систему адиабатически. Детали этой экспериментальной техники можно найти в [6, 61].

Рис. 4 иллюстрирует осцилляции температуры при изменении магнитного поля, измеренные в многослойной гетероструктуре с квантовыми ямами [61]. Изменения температуры контролируются по вариации сопротивления Au — Ge детектора (шкала ординат на рис. 4), так как величина сигнала сопротивления ΔR пропорциональна изменению температуры образца ΔT .



Рис. 4. Осцилляции электронной температуры 2D-электронного газа в многослойной GaAs—AlGaAs-гетероструктуре, содержащей 94 слоя, как функция магнитного поля [6]. Тепловой импульс увеличивает температуру образца на величину ΔT . Штриховой линией показано, как возрастает температура решетки.

Максимумы осцилляций температуры при развертке магнитного поля полностью коррелируют с возникновением минимумов в спектрах шубни-ковских осцилляций магнитопроводимости $\sigma_{xx}(H)$ и плато в зависимостях холловского сопротивления $\rho_{xy}(H)$, измеренных на той же структуре. Такая жесткая корреляция в осциллирующем поведении температуры и магнитотранспортных коэффициентов убеждает, что наблюдаемые в описанных экспериментах осцилляции температуры обусловлены исключительно электронной теплоемкостью.

С помощью измеренных осциллирующих зависимостей температуры $\Delta T(H)$, связанных с электронной теплоемкостью, делается затем попытка определить плотность состояний. С этой целью рассчитывается осциллирующее поведение электронной теплоемкости $c_T^{el}(H)$ (рис. 5). При расчетах используются определенные предположения о форме ПС на уровнях Ландау,

ширине пика ПС Γ и величине постоянного фона ПС под уровнями D (Γ и D — подгоночные параметры). Если в условиях эксперимента при импульсном адиабатическом разогреве образцу сообщается тепло ΔQ , то электронная теплоемкость связана с результирующим изменением температуры ΔT , которое непосредственно измеряется, с помощью следующего выражения:

$$\boldsymbol{c}_{T}^{el}(T,H,\Gamma) = \frac{\Delta Q}{\Delta T} - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\Delta T} \Big[\left(T + \Delta T\right)^{4} - T^{4} \Big], \tag{3.9}$$

где теплоемкость решетки — $c_T^L = \alpha T^3$ и предполагается, что $c_T^{el}(T + \Delta T) \sim c_T^{el}(T)$. Наилучшее согласие рассчитанных осцилляции с экспериментом достигается в рамках предположений о том, что на уровнях Ландау ширина пика ПС $\Gamma \sim H^{1/2}$, а в щелях спектра имеется конечная величина фоновой ПС (см. рис. 5). Таким образом, видно, что с помощью данного метода ПС состояний измеряется не непосредственно, а с использованием нескольких подгоночных параметров и априорных предположений о форме контура ПС на уровнях Ландау и наличии постоянного фона ПС, природа которого в рамках метода не раскрывается.



Рис. 5. Осцилляции электронной теплоемкости, построенные из осциллирующей зависимости электронной температуры, показанной на рис. 4 [6]. Кривая 1 — эксперимент, 2-4 — расчет при значениях параметра Γ = 0,35 мэВ·H^{1/2}, Γ = 0,75 мэВ, Γ = 1,5 мэВ соответственно.

3.4. Осцилляции магнитоемкости

Электроемкость системы металл — диэлектрик — полупроводник (МДП) складывается не только из толщины диэлектрика (h) и толщины 2D-канала z_0 , но также зависит от плотности состояний электронов [62]. Действительно, если при изменении напряжения на затворе δV_g концентрация 2D-электронов изменяется на величину δn_g , то в условиях термодинамического равновесия из постоянства электрохимического потенциала следует равенство $e\delta V_g = \delta E_F$, где δE_F — изменение химического потенциала 2D-электронов, отвечающее вариации δn_g . Поэтому для электроемкости имеем [62]:

$$C_e = \frac{dq}{dV_g} = Se \frac{\delta n_s}{\delta E_F/e} = Se^2 \frac{dn_s}{dE_F} = Se^2 D_T (E_F)$$

Таким образом, полная величина обратной электроемкости определяется суммой трех слагаемых:

$$C_e^{-1} = \frac{h}{S\varkappa_0\varkappa_d} + \frac{\gamma Z_0}{S\varkappa_0\varkappa_S} + \left(Se^2 D_T \left(E_F\right)\right)^{-1},\tag{3.10}$$

где
 $\varkappa_{_{\! 0}},\varkappa_{_{\! d}},\varkappa_{_{\! S}}-$ диэлектрические проницаемости вакуума, ди
электрика и полупроводника, *S* — площадь системы, *D*_т — термодинамическая плотность состояний 2D-электронов, γ — численный коэффициент, равный 0,5–0,7 [62]. Важно, что при изменении магнитного поля первые два члена остаются постоянными и, следовательно, вариации электроемкости в магнитном поле прямо связаны с изменением плотности состояний на поверхности Ферми от Н. Следует отметить, что характерная величина третьего слагаемого формулы (3.10) при H = 0 обычно составляет лишь $\sim 10^{-3}$ от первого, поэтому измерения требуют большой аккуратности и применения мостовой емкостной схемы [45, 63], в которой при изменении напряжения, пропорционального разности емкостей, необходимо контролировать сдвиг фаз и частотную зависимость. Магнитоемкостной метод отказывает при целочисленном заполнении уровней Ландау при низких температурах и больших магнитных полях (т. е. в условиях КЭХ). Дело в том, что в режиме квантового эффекта Холла диагональная проводимость σ_{w} системы 2D-электронов становится экспоненциально малой, и сигнал напряжения, измеряемый в мостовой схеме, перестает быть пропорциональным разности емкостей и определяется величиной σ_w . Условие того, что в магнитоемкостном методе измеряется чисто емкостной сигнал, имеет вид

$$\sigma_{xx} \gg \frac{\omega \left(C_e^0\right)^2}{\Delta C_e},\tag{3.11}$$

где C_e^0 — электроемкость, не зависящая от H и определяемая двумя первыми слагаемыми уравнения (3.10), ΔC_e — изменение емкости, возникающее от вариации D_τ (третий член уравнения (3.10). Условие (3.11) оказывается

очень сильным и делает практически невозможным определение D_T в режиме КЭХ. Действительно, поскольку в эксперименте $C_e^0 \sim 10^{-9} \, \Phi$; $\Delta C_e \sim 10^{-12} \, \Phi$, $\omega \sim 10^2 \, \Gamma$ ц, то требуется, чтобы $\sigma_{xx}^{-1} \ll 10^4 \, \text{Om}$, в то время как в условиях КЭХ при $T = 2 \, \text{K}$, $H = 5 \, \text{Tr}$, $\sigma_{xx}^{-1} \gg 10^9 - 10^{13} \, \text{Om}$ [64, 65]. Как видно из этих оценок, удовлетворить неравенству (3.11) можно лишь в условиях, далеких от режима КЭХ. Сложность измерения абсолютной величины емкости в условиях КЭХ также заключается в том, что при этом длина перетекания [66] $L_n = (\sigma_{xx} S/\omega C_e)^{1/2}$ становится очень маленькой и, как следствие, лишь часть площади 2D-электронной системы (вблизи контактов сток и исток) оказывается задействованной. Поэтому в формуле (3.10) в третьем слагаемом должна фигурировать эффективная площадь $S^* < S$. В связи с этим сильное уменьшение измеряемой емкости в условиях КЭХ может быть связано не с уменьшением D_T , а с уменьшением S^* . При этом в измерениях ΔC_e не должно происходить сдвига фазы, поскольку проводимость через эффективную площадку S^* будет существенно больше, чем σ_{xx}^{\Box} (σ_{xx}^{\Box} — проводимость системы 2D-электронов на квадрат площади).

В первых магнитоемкостных экспериментах, выполненных в работах [45, 46], была осуществлена попытка определить величину D_T между уровнями Ландау при целых v в GaAs— AlGaAs гетероструктурах. Однако при $T \approx 1,3$ К чисто емкостной сигнал удавалось измерить лишь при H < 1,6 Тл. В работе [63] авторы применили магнитоемкостной метод при полуцелых v, когда $\sigma_{xx}^{-1} \sim h/e^2 \sim 10^4$ Ом, и получили, что ширина уровней Ландау Γ , определяемая из величины магнитоемкости при полуцелых v, изменяется пропорционально $H^{1/2}$ в соответствии с теорией короткодействующих рассеивателей [22, 30] и зависит от подвижности 2D-электронов, что также согласуется с результатом этой теории.

Таким образом, магнитоемкостной метод оказался очень эффективным инструментом для определения плотности состояний системы 2D-электронов непосредственно на уровнях Ландау (при полуцелых v). В наиболее интересном режиме квантового эффекта Холла (область целочисленных v) этот метод, по-видимому, сталкивается с непреодолимыми сложностями.

3.5. Термоактивационная магнитопроводимость

Идея метода определения плотности состояний 2D-электронов из анализа термоактивационной магнитопроводимости [7] основана на утверждении, что электронные состояния в щелях между уровнями Ландау являются локализованными, а протяженные состояния сосредоточены в узкой области вблизи уровней Ландау. В рамках этого утверждения при полном заполнении очередного подуровня Ландау (т. е. при $n_s = n_s^0 = veH/h$, v целое число) уровень Ферми оказывается в щели энергетического спектра (посредине между уровнями Ландау; см. вставку на рис. 6). Магнитопроводимость σ_w в этом случае достигает минимума (σ_w^{min}) и отличается от нуля (при не очень низких температурах) за счет термоактивации электронов и дырок с уровня Ферми в зоны подвижных состояний:

$$\sigma_{_{\chi\chi}}^{\min} \sim \exp\left(-\frac{W}{kT}\right),$$
(3.12)

где W — энергия активации, равная половине величины энергетической щели. При изменении концентрации n_s на величину Δn_s от значения n_s^0 уровень Ферми перемещается от середины энергетической щели к одному из уровней Ландау на ΔE_F , что приводит к уменьшению энергии активации на ΔE_F . Поэтому, следя за изменением энергии активации при вариациии n_s в окрестности n_s^0 , можно определить зависимость ΔE_F от Δn_s и путем ее дифференцирования найти плотность состояний 2D-электронов в щелях энергетического спектра (см. рис. 6).



Рис. 6. Плотность состояний в функции энергии, восстановленная с помощью метода термоактивационной проводимости [7]. Результат получен на GaAs—AlGaAs-гетероструктуре, подвижность 2D-электронов в канале $\mu = 1,9 \cdot 10^5$ см²/В·с. Вставка качественно иллюстрирует распределение одночастичной ПС в условиях, близких к целочисленному заполнению уровней. Заштрихована область локализованных состояний.

Следует заметить, что метод термоактивационной магнитопроводимости может претендовать на правильное определение величины $D_T(E_F) = dn_S/dE_F$ лишь в узкой области вблизи целочисленного заполнения уровней Ландау (т. е. в условиях КЭХ, поэтому методы термоактивационной проводимости и магнитоемкости взаимно дополняют друг друга). Как было показано в работе [67], именно в этой области при описании температурной зависимости σ_{xx} необходимо учитывать электронный $\sigma_{xx}^e \sim \exp[-(W - \Delta E_F)/\kappa T]$ и дырочный $\sigma_{xx}^h \sim \exp[-(W + \Delta E_F)/\kappa T]$ вклады в магнитопроводимость. Поэтому температурная зависимость магнитопроводимости описывается выражением [67]

$$\sigma_{xx}(\Delta n_s) \sim \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) \operatorname{ch}\frac{\Delta E_F}{kT}.$$
 (3.13)

Только в этом случае дифференцирование зависимости $\Delta E_F(\Delta n_S)$, найденной из (3.13), дает правильное значение плотности состояний D_T строго в середине энергетической щели.

Из анализа термоактивационной магнитопроводимости были получены следующие выводы [7, 67, 68]:

1) в середине энергетической щели плотность состояний слабо зависит от энергии;

2) величина D_T в щелях энергетического спектра не экспоненциально мала, а составляет заметную часть по сравнению с D_0 (см. рис. 6) и слабо уменьшается по мере увеличения параметров μ и H.

Наиболее уязвимыми местами метода термоактивационной магнитопроводимости являются:

1) предположение, что плотность состояний D(E) не зависит от Δn_s и T;

2) предположение, что пороги подвижности, отделяющие локализованные и подвижные состояния, не изменяются при вариациях Δn_s ;

3) применимость метода ограничена довольно узким температурным интервалом;

4) в условиях КЭХ реализуется сильно неоднородное протекание измерительного тока (шнурование), поэтому измеряемая плотность состояний может характеризовать лишь часть системы 2D-электронов, по которой течет ток.

Вместе с тем нельзя не отметить, что именно методом термоактивационной магнитопроводимости была впервые обнаружена неэкспоненциальная малость плотности состояний 2D-электронов между уровнями Ландау в сильном магнитном поле [69].

3.6. Другие методы

Помимо перечисленных методов экспериментального исследования плотности состояний 2D-электронов в перпендикулярном магнитном поле, необходимо отметить другие приемы, которые также использовались для этих целей. В работе [70] использовался метод, основанный на изучении нелинейных характеристик кремниевых МДП-структур, который физически эквивалентен методу термоактивационной магнитопроводимости, но имеет преимущество, заключающееся в том, что в эксперименте удается зафиксировать распределение тока в МДП-структуре и в этих условиях изучать плотность состояний. Перспективным методом является также исследование резонансного туннелирования носителей заряда через тонкий слой диэлектрика в кремниевых МДП-структурах [71]. Кроме того, несомненный интерес представляют эксперименты по циклотронному резонансу [72, 73]. Последним достижением в этой области является наблюдение осцилляций ширины линий циклотронного резонанса при изменении фактора заполнения, обнаруженные в условиях, когда фактор заполнения зафиксирован, а изменяется частота излучения в далеком ИК диапазоне [74].

4. Спектроскопический метод исследования одночастичной плотности состояний

Теперь рассмотрим спектроскопический метод определения ПС 2Dэлектронов в поперечном магнитном поле, который основан на измерениях спектров люминесценции, связанной с излучательной рекомбинацией двумерных электронов с неравновесными фотовозбужденными дырками на примере Si (001) МДП-структур [8, 75, 76]. Существенно, что этим методом измеряется энергетическое распределение одночастичной $\Pi C - D(E)$ при фиксированном заполнении уровня Ландау электронами, тогда как с помощью методов, описанных в предыдущем параграфе (см. п. 3), изучается термодинамическая плотность состояний $D_{\tau}(E_{E}) \equiv dn_{s}/dE_{E}$. При учете межэлектронного взаимодействия и эффектов экранирования случайного потенциала $D(E_{\rm F}) \neq dn_{\rm s}/dE_{\rm F}$. В рамках спектроскопического метода удается проследить, как перераспределяется одночастичная ПС при изменении заполнения квантовых состояний в результате экранирования крупномасштабных составляющих случайного потенциала. Спектроскопический метод является не только эффективным инструментом изучения тонкой структуры уровней Ландау — спинового и долинно-орбитального расщеплений, но и с его помощью удается исследовать непосредственно случайный потенциал, а именно: оценить его амплитуду и линейные масштабы.

4.1. Излучательная рекомбинация 2D-электронов в кремниевых МДП-структурах

Инверсионный слой пространственного заряда в кремниевых МДПструктурах является традиционной квазидвумерной системой, где свойства 2D-электронного газа исследовались наиболее всесторонне. В этих структурах кристалл Si имеет плоскую границу раздела с тонкой (10⁻⁵ см) пленкой диэлектрика SiO₂, на противоположную поверхность которой наносится металлический электрод-затвор (рис. 7). Напряжение V_g , приложенное между затвором и границей раздела, создает в SiO₂ однородное электрическое поле, а в Si, у границы раздела Si-SiO₂, — объемный заряд и удерживающую его потенциальную яму. Со стороны диэлектрика яма ограничена высоким потенциальным барьером (~ 2 эВ) и имеет форму, близкую к треугольной.



Рис. 7. МДП-структура: схематический разрез и изгибы энергетических зон вблизи границы раздела окисел — полупроводник. *а* — Схематический разрез; *1* — полупроводник р-типа, *2* — окисел (диэлектрик); *3* — металлический электрод — затвор; *4* — низкоомные электроды (сток-исток); *5* — инверсионный канал. *б* — Схема энергетических зон в отсутствие фотовозбуждения; *E*_c и E_v — дно зоны проводимости и потолок валентной зоны в полупроводнике; слева от канала показан ход дна зоны проводимости в окисле; *ζ* — уровень Ферми в полупроводнике; *с*_m — в металле; *V*_g — потенциал на затворе; *d* — ширина области обеднения; точки — ионизованные акцепторы, + : дырки на акцепторах; заштрихована область вырожденного электронного газа. *в* — Схема энергетических зон при фотовозбуждении; *ζ*_e — квазиуровень Ферми электронов, *hv* — энергии фотона при рекомбинации.

В равновесных условиях при достаточно большом $V_{\rm g}$ дно ямы опускается ниже уровня химического потенциала в объеме кристалла. Тогда тонкий приповерхностный слой (~ 30—50 Å), ограниченный стенками ямы, заполняется электронами-носителями инверсного знака по отношению к носителям в объеме (дыркам). Таким образом, у поверхности р-Si при $V_{\sigma}>0$ возникает инверсионный слой пространственного заряда. Канал заполняется носителями через встроенные электроды (сток — исток) либо с помощью подсветки. Инверсионный слой отделен от объема кристалла областью обеднения, в которой носители отсутствуют, и поэтому эта область является изолятором. В области обеднения находятся ионизированные мелкие примеси, заряд которых тот же по знаку, что и заряд носителей в канале. При малых $V_{\rm g}$ экранирование внешнего электрического поля происходит лишь за счет формирования слоя обеднения с толщиной слоя $L_{_D} = n_{_d}/N_{_A} \sim 1$ мкм $(n_d -$ поверхностная плотность заряда в обедненном слое, $N_a -$ объемная концентрация акцепторных центров). Когда изгиб зон (см. рис. 7) сравнивается с шириной запрещенной зоны E_{σ} и возникает 2D-канал, то дальнейшее увеличение V_g не меняет распределение зарядов в обедненном слое. Результирующую картину распределения зарядов и поля вблизи интерфейса Si—SiO, можно восстановить с помощью анализа осцилляций магнитопроводимости Шубникова — де Гааза [76].

В условиях стационарного фотовозбуждения, генерирующего неравновесные электронно-дырочные пары вблизи границы раздела Si-SiO, картина распределения зарядов и электрического поля радикально изменяется (см. рис. 7, в) [76]. Прежде всего, в условиях фотовозбуждения система в целом является принципиально неравновесной. В этом случае возникает квазиравновесный аккумуляционный 2D-электронный канал, заряд которого практически полностью экранирует электрическое поле затвора за интерфейсом в глубине полупроводника. Поэтому слой обеднения исчезает и, следовательно, непосредственно за 2D-аккумуляционным каналом существуют нейтральные акцепторы, содержащие дырки. Поскольку волновая функция 2Dэлектронов в направлении нормали к интерфейсу $z \parallel [001]$ имеет конечную протяженность ($\psi(z) \sim z \exp{(-bz/2)}$, где $b^{-1} \approx 10$ Å), то существует отличная от нуля вероятность их излучательной рекомбинации с инжектированными дырками. Однако эта рекомбинация является непрямой как в импульсном, так и в координатном пространстве, поэтому ее интенсивность должна быть чрезвычайно слабой в сравнении со всеми другими излучательными каналами в объеме полупроводника. Именно такая слабая по интенсивности линия люминесценции, 2D,, на 2–3 порядка слабее соответствующих линий излучения из объема, и наблюдается в эксперименте. На рис. 8 приведены спектры излучения, полученные при фиксированной подсветке аргоновым лазером с плотностью мощности $W_0 \approx 10^{-3} \, {\rm Bt/cm^2}$ и различных напряжениях на затворе, варьирующих концентрацию 2D-электронов n_c, которая независимо контролировалась по шубниковским осцилляциям проводимости в тех же условиях.



Рис. 8. ТО-фононные компоненты спектра излучения, измеренные в Si (100)-МДП-структуре при T = 1,6 К и плотности мощности $W = 10^{-3}$ Вт/см² и различных положительных напряжениях на затворе в условиях, когда образовывался 2D-канал электронов [76]. Концентрация 2D-электронов измерялась одновременно по осцилляциям магнитопроводимости и указана на спектрах в ед. 10^{11} см⁻². Линия BE —излучение экситонов, связанных на боре, линия $2D_e$ отвечает излучательной рекомбинации 2D-электронов. На вставке показаны схема энергетических зон в условиях фотовозбуждения (слой обеднения отсутствует) и процесс рекомбинации 2D-электрона с дыркой на нейтральном акцепторе.

Не касаясь деталей механизма рекомбинации, который описан в [76], остановимся сначала на основных свойствах линии 2D в отсутствие магнитного поля (см. рис. 8). Прежде всего, эта линия возникает в спектрах только при лазерной подсветке и напряжениях на затворе $V_{g} > V_{T} (V_{T} -$ пороговое напряжение, соответствующее возникновению 2D-канала). Форма 2D_-линии представляет собой ступенчатую функцию энергии в прямом соответствии с тем, что ПС 2D-электронов при H = 0 не зависит от *E*. Ширина 2D₂-линии линейно увеличивается с ростом концентрации электронов n_s , а фиолетовая граница ее спектра практически не зависит от напряжения на затворе. При рекомбинации 2D-электронов с фотовозбужденными дырками при участии ТО- и ТА-фононов вероятность рекомбинации не зависит от энергии рекомбинирующих частиц (матричные элементы $M_{_{TO}}, M_{_{TA}} pprox$ const), а фононные реплики 2D₂-линии наблюдаются в соответствующих областях спектра. ТО- и ТА-фононные компоненты 2D_e-линии поляризованы в 2D-плоскости, так как только две из шести электронных долин на осях (001) заселены 2Dэлектронами. Очень слабое излучение линии 2D₂ удается наблюдать и в бесфононной области спектра благодаря передаче импульса, близкого к бриллюэновскому, примесному центру или поверхности.

В режиме сильной локализации 2D-электронов на флуктуациях случайного потенциала (область малых концентраций) $2D_e$ -линия сильно уширена и перестает быть поляризованной. Ее ширина в этом случае отражает амплитуду флуктуаций случайного потенциала. Скорость рекомбинации 2Dэлектронов с фотовозбужденными дырками очень медленная (~10³ c⁻¹), поэтому при таких скоростях 2D-электронная и дырочная подсистемы находятся в тепловом равновесии с решеткой. Спектр излучения $2D_e$ -линии представляет собой свертку функций распределения 2D-электронов и фотовозбужденных дырок

$$I(\hbar\omega) \sim \int_{0}^{\infty} F_{e}(E) F_{h}(\hbar\omega - E) dE,$$

$$F_{e(h)} = f_{e(h)} D_{e(h)},$$
(4.1)

где $f_{e(h)}$, $D_{e(h)}$ — функции распределения и плотности состояний электронов и дырок. Поскольку ширина распределения дырок, установленная экспериментально [77], оказывается достаточно узкой и не превышает 0,8 мэВ, спектр $2D_e$ -линии с достаточно большой точностью передает энергетическое распределение одночастичной плотности состояний 2D-электронов.

Теперь рассмотрим основные свойства 2D_e-линии в поперечном магнитном поле. В этом случае 2D,-линия расщепляется в соответствии с числом заполненных уровней Ландау (рис. 9). Например, спектр 3 на рис. 9 соответствует при заданной величине магнитного поля полному заполнению четырех уровней Ландау. В соответствии с этим заполнением наблюдаются четыре эквидистантные линии, равноотстоящие на величину циклотронной энергии $\hbar \omega_c = 4$ мэВ. Для демонстрации двумерности электронной системы используется известная процедура поворота магнитного поля от нормали к 2D-слою. При угле отклонения $\varphi = 60^{\circ}$ и фиксированных n_s и H фактор заполнения возрастает ровно вдвое и под поверхностью Ферми число уровней Ландау удваивается (см. нижнюю часть рис. 9). С помощью известной процедуры построения веера уровней Ландау по положению линий излучения в спектре, измеренных при $n_s = \text{const}$ в различных магнитных полях и в условиях целочисленного заполнения, нетрудно определить положение уровня размерного квантования *E*₀ и энергию Ферми Е_г. Это построение показано в верхней части рис. 9. ТО-фононная компонента 2D₂-линии в поперечном магнитном поле поляризована практически полностью в направлении Н. Наконец, при температурах, когда парамагнитное расщепление дырок $g_{_{h}}\mu_{_{B}}H\gg kT$ и заселено самое нижнее их состояние с проекцией углового момента $J_z = -3/2$, в спектрах рекомбинации участвуют 2D-электроны только с проекцией спина $S_z = +1/2$. В этом случае оптические переходы для электронов с проекцией спина

 $S_z = -1/2$ запрещены. Это означает, что в спектрах проявляется излучение, соответствующее факторам заполнения *v*, удовлетворяющим условию (2 + 4k) < v < (4 + 4k).



Рис. 9. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов с фотовозбужденными дырками (линии 2D_e) [76]. Измерены для образца № 1 при $W = 10^{-3}$ Вт/см², T = 1,6 К, $n_s = 2,7 \cdot 10^{12}$ см⁻² в условиях, когда магнитное поле H = 0 (спектр 2), H = 7 Тл и перпендикулярно 2D-слою (спектр 3), H = 7 Тл и поле наклонено по отношению к нормали на угол 60° (спектр 4). Спектр 1 получен в условиях, когда $n_s = 0$ ($V_g < V_T$). Линия *BE* отвечает излучению экситонов, связанных на атомах бора, $\hbar\omega_c$ — циклотронное расщепление. В верхней части рисунка показан веер уровней Ландау (спектральное положение линий), построенный при $n_s = 2,7 \cdot 10^{12}$ см⁻² в условиях целого заполнения четырех, пяти и семи уровней. Экстраполяции к $H \rightarrow 0$ определяют положения дна размерно квантованной зоны E_0 и энергии Ферми E_x .

На рис. 10 показано, как изменяются спектральные положения линий рекомбинации при вариации концентрации n_s (или фактора заполнения v) и фиксированном *H*. Кроме того, показаны измеренные зависимости (темные квадраты) положения дна зоны E_0 и энергии Ферми E_F при изменении n_s .



Рис. 10. Зависимость спектрального положения линий излучения 2D-электронов от концентрации n_s . Измерена для образца № 3 при $W = 10^{-3}$ Вт/см², T = 1,6 К, H = 7 Тл. Темные квадраты отвечают энергетическому положению энергии Ферми и дна зоны E_0 , измеренным для разных n_s по вееру уровней Ландау в условиях целого заполнения. Область 2 < v < 4 более крупно показана на вставке. Наблюдаемое расщепление линий связано с неэквивалентностью электронных долин.

Из рисунка, прежде всего, видно, что в поперечном H = 7 Тл наблюдается серия уровней Ландау, расщепление между которыми равно $\hbar \omega_c$. Спектральное положение линий, отвечающих уровням Ландау в глубине, под поверхностью Ферми, линейно зависит от n_s и отвечает изменению положения дна зоны $E_0(n_s)$. Вблизи поверхности Ферми, в области нечетных целых v, наблюдаются две линии излучения, отвечающие рекомбинации 2D-электронов из различных долин (подробно показано на вставке к этому рисунку, см. также раздел 4.2). Интересно изучить, как проявляется на зависимости спектрального положения линий рекомбинации эффект квантования холловского сопротивления [2], связанный с тем, что при целых значениях v уровень Ферми оказывается в области локализованных состояний, в щели между уровнями Ландау. Как видно из рис. 10, в эксперименте наблюдается

пиннинг спектрального положения линии $2D_e$ при полуцелых v, а при целочисленном заполнении он отсутствует. Эти факты легко объяснить тем, что при целых v ПС на уровне Ферми невелика и величина E_F сильно изменяется при вариациях n_s , тогда как при полуцелых v величина $D(E_F)$ велика и изменения E_F малы.

Уже из указанных свойств излучательной рекомбинации 2D-электронов с фотовозбужденными дырками видно, что метод оптической спектроскопии открывает новые возможности для изучения энергетического спектра системы 2D-электронов и его изменений от магнитного поля, фактора заполнения уровней Ландау, температуры и качества структуры. В следующем разделе будет показано, как этот метод используется для определения величины спинового и междолинного расщеплений и исследования осциллирующего поведения этих величин в зависимости от фактора заполнения.

4.2. Осцилляции спинового и междолинного расщеплений в энергетическом спектре 2D-электронов

В системе 2D-электронов на поверхности (100) кремния из-за наличия двух эквивалентных электронных долин и спина имеется четырехкратное вырождение энергетического спектра электронов [1]. Однако в самых ранних экспериментах [78] было обнаружено, что указанное вырождение снимается в перпендикулярном магнитном поле и энергетический спектр 2D-электронов становится полностью дискретным. Это проявляется, например, в осцилляциях Шубникова — де Гааза, когда при заполнении каждого из четырех подуровней Ландау (т. е. при значениях фактора заполнения *v* = 1, 2, 3, 4) наблюдаются минимумы магнитопроводимости, связанные с тем, что уровень Ферми попадает в область локализованных состояний в щелях между квантовыми подуровнями. Для определения величин спинового и междолинного расщеплений применялись разнообразные экспериментальные методы, основанные на изучении особенностей магнитопроводимости в наклонных полях *H*, термоактивационный магнитопроводимости (см. [1]), контактной разности потенциала [50]. Однако во всех указанных работах величина расщепления измерялась косвенным образом с использованием подгоночных параметров и предположений, требующих специального обоснования.

Применение метода оптической спектроскопии позволяет прямым образом измерить величины спинового и междолинного расщеплений как энергетический интервал между соответствующими линиями в спектрах излучательной рекомбинации.

4.2.1. Междолинное расщепление ΔE_v

В ряде работ [79–83] междолинное расщепление вычислялось без привлечения эффектов межэлектронного (е–е) взаимодействия и полученная величина ΔE_v^0 определялась полем затвора. В этих теориях междолинное расщепление возникает из-за неэквивалентности двух электронных долин по отношению к направлению вектора электрического поля и имеет электростатическую природу. С другой стороны, в работах [84–85] отмечалось, что междолинное расщепление в перпендикулярном поле *H* должно значительно увеличиваться за счет вклада ΔE_v^* , возникающего из-за взаимодействия 2D-электронов. Таким образом, полная величина междолинного расщепления ΔE_v складывается из ΔE_v^0 и ΔE_v^* , причем вклады ΔE_v^0 и ΔE_v^* по-разному зависят от *H*, *v* и *N* [1].



Рис. 11. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов, измеренные на образце № 2 при H = 7 Тл, T = 1,6 К, $W = 10^{-3}$ Вт/см² и различных v: 3,1; 3,25 и 3,5. ΔE_v отвечает величине междолинного расщепления. На вставке показана зависимость $\sigma_{xx}(v)$, измеренная одновременно при тех же параметрах H, T, W.

В спектре рекомбинации 2D-электронов при v = 3,0 и T = 1,5 К (H = 7 Тл) наблюдается одна линия, связанная с рекомбинацией 2D-электронов из нижней электронной долины, имеющих спин $S_z = +1/2$ и принадлежащих основному уровню Ландау (N = 0) (как уже отмечалось, при низких температурах в рекомбинации участвуют лишь дырки из основного состояния с $j_z = -3/2$ и оптические переходы с участием электронов со спином $S_z = -1/2$

запрещены). При v > 3 начинает заполняться следующая электронная долина и в спектре рекомбинации появляется новая линия (см. рис. 11), относительная интенсивность которой пропорциональна отклонению v от 3. Энергетический интервал между линиями отвечает междолинному расщеплению ΔE_v . Методы оптической спектроскопии в этом случае позволяют не только прямым способом определить ΔE_v , но и измерить зависимость $\Delta E_v(v)$ [86].

На рис. 12 показаны зависимости $\Delta E_{v}(v)$, измеренные при H = 7 Тл, T = 1,6 К. Видно, что величина ΔE_{ν} сильно осциллирует при изменении v и достигает максимума при целых нечетных $v = v^* = 3, 5, ...,$ причем абсолютное значение ΔE_{v} , измеренное методом оптической спектроскопии, существенно превышает соответствующие значения, полученные другими методами (см. [17, 18]). Кроме того, видно, что ΔE_v уменьшается при отклонении *v* от *v*^{*} по мере заполнения очередной долины. Такое поведение отвечает механизму долинного расщепления, основанному на е-е-взаимодействии, и противоречит концепции неперенормированного ΔE_v^* . Действительно, согласно [84], усиление ΔE_v возникает из-за того, что 2D-электронам из различных долин, имеющим разные квантовые числа, не запрещается принципом Паули располагаться близко друг к другу, благодаря чему и возникает дополнительное кулоновское отталкивание, которое приводит к увеличению ΔE_v^0 на ΔE_v^* . При равном заполнении долинных подуровней Ландау (т. е. при целых четных $v = v^0 = 2, 4, 6...$) вклад ΔE_v^* обращается в нуль и ΔE_{ν} достигает минимума, поэтому штриховая кривая на рис. 12 отвечает зависимости неперенормированного междолинного расщепления ΔE_{v}^{0} от n_s . Измеренная функция $\Delta E_v^0(n_s)$ оказалась универсальной и не зависела от магнитного поля [86]. Напротив, как видно из рис. 12, вклад ΔE_v^* сильно зависит от *H* и номера квантового уровня *N*.



Рис. 12. Зависимость междолинного расщепления ΔE_v от фактора заполнения v, измеренная при H=7 Тл, T=1,6 К.

4.2.2. Спиновое расщепление ΔE_s

Как уже отмечалось, при низких температурах и сильных магнитных полях в спектрах рекомбинации проявляется лишь одна спиновая компонента 2D-электронов с проекцией спина $S_z = +1/2$ и отсутствует излучение электронов с $S_z = -1/2$. Это связано с тем, что из-за эффекта Зеемана уровень дырок расщепляется на квартет и при низких температурах за время жизни все неравновесные дырки оказываются в основном состоянии с $j_z = -3/2$. Оптические переходы с участием электронов, имеющих $S_z = -1/2$, и дырок с $j_z = -3/2$ запрещены правилами отбора, и соответствующее излучение не наблюдается. Для того чтобы наблюдать рекомбинацию 2D-электронов с $S_z = -1/2$ (и, следовательно, определить спиновое расщепление $\Delta E_S \equiv g_e \mu_B H$, необходимо повысить температуру, чтобы появилась заметная доля дырок с $j_z = -1/2$.



Рис. 13. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов, измеренные на образце № 2 при H = 6 Тл, v = 2,5, $W = 10^{-3}$ Вт/см² и температурах 1,6 К (спектр 1) и 3,3 К (2). Величина $\Delta \hbar \omega$ определяется спиновым расщеплением ΔE_s . На схеме показаны расщепления уровней электронов и дырок в магнитном поле и возможные оптические переходы. На вставке представлена температурная зависимость отношения интенсивностей линий I_{\uparrow} .

При H = 6 Тл, v = 2,5 и T = 1,6 К в спектре излучения наблюдается лишь одна линия, отвечающая рекомбинации 2D-электронов из нижней долины и имеющих $S_z = +1/2$, с дырками $j_z = -3/2$. При повышении температуры до 3,3 К в низкоэнергетической части спектра появляется дополнительная линия излучения (см. рис. 13), обусловленная рекомбинацией электронов, имеющих $S_z = -1/2$, с дырками $j_z = -1/2$ [77]. Интенсивность этого излучения экспоненциально уменьшается с понижением температуры (см. вставку на рис. 13), что позволяет определять *g*-фактор дырок, участвующих в рекомбинации. Энергетический интервал между линиями на рис. 13 (спектр 2) определяется спиновым расщеплением 2D-электронов. Измеренный таким образом *g*-фактор 2D-электронов при H = 6 Тл, v = 2,5 и T = 3,3 К оказался равным $g_e = 8,6$, что существенно больше объемного значения $g^0 = 2$. Такое усиление g, для 2D-электронов, так же как и в случае с междолинным расщеплением, несомненно, обусловлено эффектами е-е-взаимодействия [36]. Этот вывод подтверждается зависимостью $g_a(v)$, представленной на рис. 14, которая получена при H = 6 Тл. Видно, что g-фактор 2D-электронов сильно осциллирует от v, достигая максимальных значений при v = 2, 6, 10 ... и минимальных ($g^0 = 2$) при равном заполнении спиновых компонент (т. е. при $v = 4, 8, 12, \ldots$).



Рис. 14. Зависимость *g*-фактора 2D-электронов от фактора заполнения v и концентрации n_{s} , измеренная при H = 6 Тл и T = 1,6-3,3 К.

Таким образом, методом оптической спектроскопии прямым образом измеряются величины спинового и междолинного расщеплений. В результате обнаружены очень сильно осциллирующие зависимости этих расщеплений от фактора заполнения *v*.

4.3. Осцилляции плотности состояний 2D-электронов в поперечном магнитном поле

Эффекты экранирования случайного потенциала, связанного с дефектами, проявляются наиболее ярко в осциллирующем поведении ширины линий рекомбинационного излучения на уровнях Ландау при изменении их заполнения, а также в особенностях температурного поведения спектров рекомбинации. Эти эффекты целесообразно рассмотреть отдельно.

4.3.1. Осцилляции ширины уровней Ландау при изменении фактора заполнения

На рис. 15 приведены записи спектров, отвечающих заполнениям нижайшего уровня Ландау: v = 2,5; 3; 3,5 и 4,0. Дублетный характер спектра при v = 3,5 связан с долинно-орбитальным расщеплением ΔE_v . При v = 3,5нижнее по энергии состояние, соответствующее проекции $S_z = +1/2$, заполнено полностью, а верхнее, отщепленное на величину ΔE_v и с той же проекцией спина, заселено электронами наполовину. Поэтому интенсивность коротковолновой компоненты дублета, соответствующей верхнему отщепленному состоянию, вдвое слабее длинноволновой (на рис. 15 контуры компонент этого дублета показаны штриховой линией).

Сопоставляя спектры рекомбинации на рис. 15, легко увидеть, что ширины линий немонотонно зависят от заполнения электронных состояний: при полном заполнении (целочисленных v) линии оказываются намного шире, чем в условиях полуцелого заполнения. Качественно аналогичное поведение при вариации v демонстрируют спектры рекомбинации, когда полностью заполнены несколько уровней Ландау и изменяется населенность самого верхнего по энергии уровня. На рис. 16 приведены записи спектров, измеренных при полном заполнении двух нижайших уровней Ландау (N = 0; 1) и разных заполнениях верхнего, N = 3, уровня. И в этом случае ширины всех линий в спектре немонотонно зависят от v: при целочисленных vлинии заметно шире, чем при полуцелом заполнении. Помимо этого видно, что при заполнении нескольких уровней Ландау ширины линий монотонно возрастают с уменьшением квантового номера N.

Осциллирующее поведение ширины линий рекомбинации в зависимости от *v* при работе с одним и с несколькими уровнями Ландау иллюстрирует рис. 17, *a*, *б*. Эти осцилляции имеют наибольший размах при работе с одним (нижайшим) уровнем Ландау. При заполнении нескольких уровней Ландау осцилляции имеют тот же характер, но их глубина тем меньше, чем глубже под уровнем Ферми квантовое состояние (чем меньше *N*). Обнаруженные осцилляции ширин линий в спектрах рекомбинации являются прямым следствием осциллирующего поведения ширин пиков плотности состояний на уровнях Ландау в зависимости от концентрации электронов. Природа этого явления, несомненно, связана с экранированием случайного потенциала.



Рис. 15. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов, полученные на образце № 1 при H = 7 Тл, T = 1,6 К и $W = 10^{-3}$ Вт/см² для различных заполнений основного уровня Ландау (N = 0).

Обсудим этот вопрос более подробно. При целочисленном *v* уровень Ферми оказывается строго посредине щели энергетического спектра. Электроны целиком заполняют уровни Ландау, и поэтому экранирование в этом случае носит ослабленный характер. В отсутствие экранирования уровни Ландау «отслеживают» потенциальный рельеф, обусловленный длиннопериодными флуктуациями. Если считать, что эти флуктуации связаны с заряженными дефектами в слое диэлектрика SiO₂, то неравновесные дырки, с которыми рекомбинируют 2D-электроны, испытывают действие этих флуктуаций слабее, поскольку значительно удалены от интерфейса Si — SiO, (≥10² Å). Тогда естественно заключить, что ширина линии излучения при целочисленном заполнении определяется амплитудой таких флуктуаций заряда в диэлектрике, поскольку в рекомбинации участвуют все электроны, распределенные по энергии в пределах данного уровня в соответствии с потенциальным рельефом [77]. Существенно, что найденные ширины линий при полном заполнении нижайшего уровня Ландау для нескольких МДПструктур практически совпадают с ширинами линий ΔE , измеренными в

режиме сильной локализации при *H* = 0, которые также отражают амплитуду крупномасштабных флуктуаций [76].



Рис. 16. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов, измеренные при H=7 Тл, T=1,6 К и $W=10^{-3}$ Вт/см² для различных заполнений уровня Ландау с N=2.

Полезно обратить внимание, что в случае циклотронного резонанса (ЦР), в отличие от рассматриваемого здесь метода люминесценции, крупномасштабные флуктуации случайного потенциала при $d > l_{H}$ не дают вклада в ширину линии ЦР.

При полуцелом заполнении уровень Ферми совпадает с пиком плотности состояний (максимумом линии в спектре рекомбинации). В этой области энергетического спектра электронные состояния протяженные. Теперь электроны наиболее эффективно экранируют крупномасштабные флуктуации случайного потенциала, и, как следствие, потенциальный рельеф, связанный с ним, окажется сглаженным. Благодаря этому ширина пика люминесценции должна сузиться в полном соответствии с экспериментом (см. рис. 15).



Рис. 17. Зависимости ширины уровней Ландау Γ от фактора заполнения *v*, измеренные на образце N^o 1 при H = 7 Тл, T = 1,6 К для уровней Ландау с номерами N = 0 (*a*) и N = 2 (*б*).

Конечная ширина пика ПС в описанных условиях должна определяться мелкомасштабными случайными рассеивателями, которые остаются незаэкранированными. Наблюдаемые в эксперименте ширины пиков люминесценции при полуцелых v имеют существенно бо́льшую величину $\Gamma \approx 0,8$ мэВ (см. рис. 17), чем можно было бы ожидать при действии короткопериодных рассеивателей для данных H и μ [1, 22, 30]. На самом деле минимальная величина Γ в этих экспериментах определяется энергетическим распределением неравновесных дырок, с которыми рекомбинируют электроны. Если учесть уширение, связанное с дырками, то окажется [77], что истинная ширина пиков люминесценции при полуцелых v, отражающих ширины пиков плотности состояний на уровнях Ландау, должна быть много у́же. Это означает, что истинный размах осцилляции ширины пика плотности состояний при изменении v примерно втрое больше, чем экспериментально наблюдаемый (см. рис. 17).

Осцилляции Г при изменении заполнения были предсказаны в работах [33, 34, 41]. Природа осцилляций связывалась с периодическим изменением радиуса экранирования. Аналитические выражения для Г в этих работах не приведены.

Недавно Шкловским и Эфросом была построена теория нелинейного экранирования потенциала заряженных центров, которые случайно распре-

делены в объеме с концентрацией n_z, двумерными электронами [42]. Потенциал центров принимается кулоновским, а для описания экранирования рассматриваются флуктуации зарядов на размерах *L*. При целочисленном заполнении уровней Ландау экранирование отсутствует. Экранирование появляется при отклонении концентрации 2D-электронов n_s от n_s^0 , соответствующей целочисленному заполнению ($\delta n_s = n_s - n_s^0$). Если на масштабе L число дополнительных электронов в плоскости $\delta n_s L^2$ равно флуктуации числа заряженных центров в объеме $(n_r L^3)^{1/2}$, то на всех длинах больше L случайный потенциал полностью экранируется электронами. При изменении числа электронов δn_s изменяется длина экранирования, и в этом смысле масштаб L является радиусом нелинейного экранирования. В работе [42] найдена зависимость положения уровня Ферми и ширины пика плотности состояний на уровне Ландау от концентрации электронов в магнитном поле. Важное следствие теории нелинейного экранирования состоит в том, что в щелях между уровнями Ландау плотность состояний не мала экспоненциально, как это ожидается в случае короткодействующего потенциала [1, 22, 30], а также в случае, если заряженные центры находятся в 2D-плоскости [40]. Это обстоятельство связано с тем, что заряженные центры в объеме играют более важную роль, чем поверхностные, поскольку при уменьшении $\delta n_{\rm s}$ в создание случайного потенциала вовлекаются новые центры в слое толщины *L*, которая быстро растет.

Теория [42] качественно объясняет основные экспериментальные результаты, связанные с осцилляциями плотности состояний при изменении концентрации электронов, которые обнаружены по спектрам люминесценции. Из [42], в частности, следует, что когда амплитуда крупномасштабных флуктуаций оказывается порядка соответствующей щели в энергетическом спектре ($\hbar\omega_c$, ΔE_s или ΔE_v), в экранировании станут участвовать два соседних подуровня Ландау, в результате ширина пика плотности состояний перестает расти и оказывается ограниченной сверху величиной щели. Из эксперимента следует (см. рис. 17), что при полном заполнении уровня Ландау (v = 4) ширина линии люминесценции существенно больше, чем при v = 3, в соответствии с тем, что энергетическая щель при v = 4 ($\hbar\omega_c \approx 4$ мэВ) существенно больше, чем при v = 3 ($\Delta E_v \approx 1,5$ мэВ [86]). Пользуясь формулами теории [42] и параметрами исследованных МДП-структур, можно оценить амплитуду и линейный масштаб флуктуации случайного потенциала (см. п. 4.4).

4.3.2. Температурная зависимость ширины уровней Ландау

Как уже отмечалось, если в системе 2D-электронов в перпендикулярном магнитном поле полностью заполнены N уровней Ландау, то в этом случае электроны распределены равномерно по площади системы и экранирование отсутствует. Экранирование возникает, если ввести в систему некоторое число дополнительных электронов (или дырок) δn_s . Рождение электронов и

дырок можно обеспечить не только изменением n_s или H, но и повышением температуры при постоянных значениях n_s и H. Таким образом, в эксперименте следует ожидать сужения линий излучения, отвечающих целочисленному заполнению уровней Ландау (т. е. при $n_s = veH/h$, v — целое число) при повышении температуры. Поскольку концентрации термоактивированных электронов и дырок равны

$$\delta n_e = \delta n_h \sim \exp\left(-\frac{\hbar\omega_c}{2kT}\right),\tag{4.2}$$

то для наблюдения указанного эффекта необходимо, чтобы в эксперименте величины $\hbar \omega_c$ и kT были сравнимы.



Рис. 18. Спектры излучательной рекомбинации 2D-электронов, измеренные на образце № 1 при $n_s = 4,9 \cdot 10^{11}$ см⁻², $\mu = 2,6 \cdot 10^4$ см²/В·с, $W = 10^{-3}$ Вт/см² и различных значениях *H* и *T*: H = 0, T = 1,5 К (спектр 1), H = 2,5 Тл (v = 8,0), T = 1,5 К (спектр 2) и H = 2,5 Тл, T = 3,5 К (спектр 3).

На рис. 18 представлены спектры излучения, полученные при $n_s \sim 4,9 \cdot 10^{11}$ см⁻², $\mu = 2,6 \cdot 10^4$ см²/В·с в магнитном поле H = 0 (спектр 1) и H = 2,5 Тл (спектр 2) при температуре T = 1,5 К. Прежде всего, видно, что, несмотря на то, что параметр μH существенно превышает 1 (в эксперименте $\mu H = 6,5$), картина уровней Ландау в спектре излучения не проявляется. Это связано с тем, что ширина уровней (которую можно определить по вы-

сокоэнергетическому краю линии $2D_e$) практически равна циклотронному расщеплению. Указанное свойство оказывается общим для всех исследованных структур: при малых магнитных полях ширина пиков люминесценции оказывалась близкой к величине $\hbar\omega_e$, а по мере роста *H*, когда $\hbar\omega_e$ подходит ближе к величине амплитуды флуктуации случайного потенциала *Q*, величина Г стремится к насыщению и уровни Ландау хорошо разрешаются. Такая зависимость Г(*H*) согласуется с теорией нелинейного экранирования крупномасштабных флуктуации случайного потенциала [42].

Спектр 3 на рис. 18 отвечает случаю высоких температур (T = 3,5 K). Из этого спектра отчетливо видно, как сужаются уровни Ландау при повышении температуры, когда появляются электроны и дырки на подуровнях. Температурное заполнение вышележащего уровня сопровождается появлением дополнительной линии излучения, сдвинутой в сторону больших энергий на величину $\hbar \omega_c$ (см. рис. 18, спектр 3).

Таким образом, изменения ширины уровней Ландау от фактора заполнения и температуры объясняются экранированием крупномасштабных флуктуации случайного потенциала дефектов и качественно согласуются с выводами теории [42].

4.3.3. Ширина пика люминесценции при полуцелом заполнении уровня Ландау

При полуцелых заполнениях квантовых состояний крупномасштабные флуктуации потенциала заэкранированы и ширина пика плотности состояний сужается и становится минимальной — Γ_{\min} . Если определяющим станет взаимодействие с короткодействующими рассеивателями, то согласно теории [1, 22, 30] величина Γ_{\min} должна зависеть от единственного параметра H/μ . Поэтому интересно проследить, как изменяется ширина пика плотности состояний, которую можно найти из анализа линии люминесценции, при вариациях параметра H/μ .

Зависимость ширины пика плотности состояний при полуцелом заполнении от параметра H/μ представлена в координатах $\Gamma^2_{\min} \div (H/\mu)$ на вставке в рис. 19. Экспериментальные точки, представленные на этом графике, были получены для разных структур, а также для различных квантовых чисел N(показаны различными значками). Тем не менее, все они хорошо описываются универсальной зависимостью от параметра H/μ , которую можно аппроксимировать прямой. Такое поведение указывает на то, что при полуцелых v ширина пика плотности состояний связана с процессами рассеяния на мелкомасштабных флуктуациях. Кроме того, из данных наблюдений следует, что ширины пиков не зависят от номера квантового состояния. Абсолютные значения Γ_{\min} , найденные в эксперименте для заданных H и μ , близко подходят к величинам, вычисленным в работах [1, 22, 30].

В области малых значений параметра H/μ (вставка к рис. 19) экспериментальная зависимость $\Gamma^2_{\min}(H/\mu)$ заметно отступает от линейного закона

и при $(H/\mu) \rightarrow 0$ симметричная линия люминесценции имеет конечную ширину. Эта величина связана непосредственно с шириной энергетического распределения неравновесных дырок ($\approx 0,8$ мэВ [77]).



Рис. 19. *а* — Зависимости ширины *N*-го уровня Ландау Γ_N^{\max} , измеренные при целом заполнении *N* уровней в различных магнитных полях для двух структур (светлые и темные значки) от параметра $(2N + 1)H^{-1}$; разные номера *N* — различные значки: *N* = 0 (кружки), *N* = 1 (квадратики), *N* = 2 (треугольники), *N* = 3 (ромбики). *б* — Зависимости Γ_N^{\max} (кружки) и Γ_N^{\min} (квадратики) от номера уровня Ландау *N*, измеренные при *H* = 7 Тл и *T* = 1,6 К для этих же структур; на вставке показана зависимость от параметра *H*/ μ , измеренная для четырех различных структур (значки разной формы) и различных номеров *N* (значки разного цвета).

4.4. Определение амплитуды и пространственного масштаба случайного потенциала дефектов

Как уже отмечалось в п. 4.3, при целочисленном заполнении уровней Ландау и при условии, что ширина уровней много меньше энергии щели ($\Gamma \ll \hbar \omega_c$), плотность состояний в пределах одного уровня отражает энергетическое распределение крупномасштабных флуктуаций случайного потенциала и, следовательно, из ширины линий рекомбинации в спектре люминесценции можно определить амплитуду флуктуаций *Q*. Однако нужно иметь в виду, что электроны локализуются на флуктуациях случайного потенциала, если масштаб флуктуаций *d* превышает циклотронный радиус

электрона $l_H(2N + 1)^{1/2}$, где l_H — магнитная длина [1]. Поэтому только при выполнении условий $d \gg l_H(2N + 1)^{1/2}$ и $\hbar \omega_c \gg Q$ ширина уровня Ландау будет равна амплитуде флуктуаций. В более общем случае, когда $d \ge l_H(2N + 1)^{1/2}$, ширина Γ меньше, чем Q, и зависит от отношения $d^2/(2N + 1)l_H^2$ по закону [19, 20, 22–24]

$$\Gamma = Q \left[1 + \frac{l_H^2 \left(4N + 2 \right)}{d^2} \right]^{-1/2}.$$
(4.3)

Выражение (4.3) получено для основного уровня Ландау в работах [19, 20], а для более высоких номеров *N* — в работах [22–24]. Используя формулу (4.3), можно из анализа спектров люминесценции определить параметры d и Q для разных структур. При этом надо иметь в виду, что формула (4.3) получена без учета эффектов экранирования и поэтому справедлива, вопервых, при целочисленном заполнении и, во-вторых, при $\hbar \omega_c > Q$, т. е. когда в спектре излучения хорошо разрешена структура уровней Ландау. На рис. 19, a показана зависимость Γ^{-2} (H, N) в координатах Γ^{-2} от (2N + 1) H^{-1} для двух структур. На этих зависимостях стоят точки, полученные для разных номеров *N*, и все они хорошо описываются единой прямой. Наклон этой прямой в указанных координатах позволяет определить величину *d*, а точка пересечения прямой с осью ординат — величину *Q*. Характерно, что для двух структур разного качества параметры d и Q получились различными, причем для структуры более плохого качества (судя по величине максимальной подвижности) амплитуда флуктуаций *Q* оказалась большей, а масштаб *d* — меньшим. Масштаб длиннопериодных флуктуаций случайного потенциала дефектов может быть оценен независимо из других измерений. Если при H = const сравнивать, как соотносятся ширины уровней Ландау при целом (Г_{мах}) и полуцелом (Г_{міл}) заполнениях по мере увеличения квантового номера N, то можно надеяться обнаружить сближение величин Г_{тах} и Г_{тір}. Действительно, с ростом *N* циклотронный радиус увеличивается. Поэтому для циклотронных орбит $l_{_H}(2N+1)^{_{1/2}} > d$ флуктуации потенциала с линейным размером dуже станут мелкомасштабными. Как следствие, должна исчезнуть разница между Г_{тах} и Г_{тіп}.

На рис. 19, б для двух структур (тех же, что на рис. 19, *a*) показано, как в поле 7 Тл изменяются величины Γ_{\max} и Γ_{\min} при увеличении номера *N*. Рост $\Gamma_{\min}(N)$ объясняется уменьшением подвижности 2D-электронов при увеличении n_s . Видно, что при возрастании *N* значения Γ_{\max} и Γ_{\min} сближаются и сравниваются при $N = N_{\kappa\rho}$. Можно считать, что при этом значении квантового номера сравниваются масштаб флуктуаций *d* и циклотронный радиус электрона $l_H (2N_{\kappa\rho} + 1)^{1/2}$, откуда легко оценить величину *d*. Из сопоставления величин *d* следует, что разные методы дают близкие значения для масштаба крупнопериодных флуктуаций потенциала во всех исследованных структурах [77]. Кроме того, амплитуды флуктуаций ΔE , полученные при H = 0, и

значения Q, измеренные по зависимости Γ от H, хорошо соответствуют друг другу [77].

Один из наиболее существенных вопросов, который может возникать в методе определения параметров *Q* и *d*, связан с тем, что длиннопериодная часть рельефа зоны проводимости вблизи интерфейса может частично повторяться и в глубине полупроводника, т. е. в той области, где находятся неравновесные дырки. Действительно, система 2D-электронов хорошо экранирует внешнее электрическое поле, которое возникает от полного заряда системы, но знакопеременная часть длиннопериодных флуктуаций заряда экранируется плохо. В работе [77] было показано, что уширение уровней дырок из-за флуктуаций потенциала с линейными масштабами d < 500 Å незначительное и не может повлиять на интерпретацию, а также сильно изменить оцененные в рамках спектроскопического метода значения. К такому же заключению можно прийти и из качественных соображений. Предположим, что флуктуации потенциала в валентной зоне, где расположены неравновесные дырки, были бы существенны. Это означает, что измеренная в оптике ширина линий люминесценции была бы существенно меньше фактической ширины уровней Ландау Г. Вместе с тем, как следует из представлений о нелинейном экранировании, величина Γ не может превышать $\hbar \omega_c$, и, следовательно, в оптике все наблюдаемые ширины линий при целом заполнении всегда были бы много меньше $\hbar \omega_c$, что противоречит эксперименту (см. рис. 18). Поэтому следует заключить, что реальные величины *d* в исследованных структурах оказываются не слишком большими, так что такие флуктуации случайного потенциала не сильно воздействуют на валентную зону, где расположены дырки. С другой стороны, также ясно, что флуктуации потенциала с масштабами >10³ Å почти полностью передаются в рельефе валентной зоны на расстояниях от интерфейса z = 100 Å. Поэтому такие масштабы флуктуаций в рассматриваемом методе люминесценции практически не должны проявляться.

Таким образом, применение методов оптической спектроскопии не только позволило установить влияние длиннопериодных флуктуаций случайного потенциала дефектов в осцилляциях ширины уровней Ландау, но и впервые дало возможность определить амплитуду и масштаб этих флуктуаций по зависимостям ширины пиков Ландау от магнитного поля и квантового номера.

4.5. Определение абсолютной величины плотности состояний

Как уже отмечалось выше (раздел 3), в условиях целочисленного заполнения уровней Ландау (когда наблюдается квантовый эффект Холла [2]) использовались разнообразные методы, с помощью которых определялась термодинамическая ПС. Все они приводили к общему заключению: в

щелях энергетического спектра величина плотности состояний не мала, а составляет значительную часть от ПС при H = 0. Авторы работ [6, 61] дают следующее объяснение этому результату: плотность состояний 2D-электронов представляет собой суперпозицию узких гауссовых пиков на уровнях Ландау и фоновой ПС, не зависящей от энергии. Такое формальное объяснение выглядит мало убедительным и, по существу, является попыткой вернуться к «модели резервуара» [87], ранее предложенной для объяснения квантового эффекта Холла, а затем отклоненной как недостаточная для описания КЭХ. Нам представляется более естественным объяснение, основанное на том, что ширины уровней Ландау осциллируют в зависимости от *v*. Согласно этому объяснению при целочисленном заполнении уровни Ландау сильно уширены за счет крупномасштабных флуктуаций случайного потенциала и, как следствие, ПС между уровнями оказывается большой. При полуцелом заполнении, когда уровень Ферми оказывается в области протяженных состояний и крупномасштабные флуктуации заэкранированы, уровни Ландау сильно сужаются и ПС на уровне Ферми оказывается очень большой, а в щелях между уровнями Ландау — экспоненциально малой.

Интересно количественно сопоставить величины ПС 2D-электронов, которые измеряются в совершенно различных экспериментах — с помощью магнитооптики и термоактивационной магнитопроводимости. Следует прежде всего иметь в виду, что эти два метода определяют разные величины. Если оптическая спектроскопия 2D-электронов дает возможность изучать всю зависимость D(E) и позволяет определять величину $D(E_F)$, то во всех остальных экспериментах определяется термодинамическая ПС — т. е. величина dn_S/dE_F , которая в общем случае не равна значению $D(E_F)$. Вместе с тем, можно ожидать, что в случае, когда E_F оказывается в минимуме D(E), значения $D(E_F)$ и dn_S/dE_F будут близки [38], поэтому их следует сравнивать именно при целочисленных v.

Обратимся теперь к вопросу о количественном определении ПС по спектрам излучательной рекомбинации [76, 77]. Этот метод основан на сопоставлении спектра излучения, измеренного в магнитном поле при полном заполнении N уровней Ландау, со спектром излучения, измеренным при той же концентрации n_s и H = 0. Для определения постоянной, связывающей интенсивность и ПС, вспомним, что при H = 0 форма линии $2D_e$ представляет собой ступенчатую функцию энергии, отражающую постоянство ПС 2D-электронов при H = 0: $D = 2\hbar/\pi m = D_0$. Это обстоятельство позволяет прокалибровать шкалу интенсивностей в абсолютных значениях ПС и уже затем производить количественное определение функции D(E) и величины $D(E_F)$, сравнивая спектр излучения, полученный в магнитном поле, со спектром, измеренным при той же концентрации 2D-электронов и H = 0. При сопоставлении спектров требуется, чтобы их интегральные интенсивности совпадали, так как величина n_s в обоих случаях одинакова.



Рис. 20. Спектры рекомбинации 2D-электронов, измеренные на образце № 2 при H = 0 (спектр 1) и H = 7 Тл (спектр 2) и при $W = 10^{-3}$ Вт/см², T = 1,6 К, $n_s = 1,35 \cdot 10^{12}$ см⁻², $\mu = 1,6 \cdot 10^4$ см²/В·с (*a*), энергетическое распределение плотности состояний на уровнях Ландау (штриховые линии) и суммарная зависимость D(E) (сплошные), полученные из контуров спектров (б). Точками показана зависимость величины dn_s/dE_F , измеренная одновременно при указанных параметрах методом термоактивационной магнитопроводимости.

На рис. 20 в качестве примера показано, как из спектров излучения, полученных для $n_s = 1,36 \cdot 10^{12}$ см⁻², T = 1,6 К при H = 0 (спектр 1 на рис. 20, a) и H = 7 Тл (v = 8, спектр 2), можно количественно определить величину плотности состояний и ее зависимость от энергии, а также значение $D(E_F)$ (см. рис. 20, δ). Отметим, что в этих условиях не возникает дополнительных сложностей, связанных с междолинным и спиновым расщеплениями, поскольку при низких температурах наблюдается излучение только одной спиновой компоненты электронов, а междолинное расщепление практически равно нулю: $\Delta E_v = 0,3$ мэВ [86]. На рис. 20, δ пунктиром показаны контуры уровней Ландау, которые при свертке с функцией $F_h(E)$ (измеренной отдельно при $\mu H = 50$, когда $\Gamma_{\min} \rightarrow 0$) точно описывают спектр излучения 2 на рис. 20, a. Штрихпунктирной кривой на рис. 20, δ показан следующий незаполненный уровень Ландау, сплошной — суммарная плотность состояний в щелях между уровнями. Видно, что величина $D(E_F)$ при указанных условиях (H = 7 Тл, v = 8, $\mu H = 11$) равна $D(E_F) = 0,32D_0$.

Одновременно на этих же структурах мы измеряли величину термодинамической плотности состояний методом активационной магнитопроводимости (см. п. 3.5). Поскольку нас интересовало значение термодинамической ПС строго посредине между уровнями Ландау (так как только в области минимума D(E) значения $D(E_F)$ и dn_S/dE_F должны быть близки), то для определения этой величины, как было показано в [67], необходимо учитывать как электронный, так и дырочный вклады в магнитопроводимость. При этом температурная зависимость магнитопроводимости, измеренная в области минимума, описывается выражением (3.13). В условиях, представленных на рис. 20, когда из магнитооптических измерений получается значение $D(E_F) = 0,32D_0$, величина ПС, определенная из анализа термоактивационной магнитопроводимости, оказалась несколько меньшей и равной $dn_S/dE_F = 0,25D_0$ (изменение dn_S/dE_F от E_F также показано на рис. 20, δ).

Таким образом, величины $D(E_F)$ и dn_S/dE_F , определенные в условиях полного заполнения уровней Ландау с помощью совершенно разных экспериментальных методов, достаточно хорошо согласуются между собой. Небольшое расхождение найденных значений можно объяснить несколькими причинами, но более важно, что при изменении параметров μ , H или структуры величи́ны $D(E_F)$ и dn_S/dE_F (при целых v) изменяются одинаковым образом [77].

Поведение плотности состояний между уровнями Ландау в зависимости от магнитного поля следует представлять себе следующим образом: в области магнитных полей, когда $\mu H > 1$, но величина циклотронного расщепления меньше амплитуды крупномасштабных флуктуаций случайного потенциала, $\hbar \omega_c < Q$, из-за эффектов нелинейного экранирования ширина уровней Г оказывается порядка $\hbar \omega_c$ и ПС в щелях спектра составляет заметную часть от D_0 . До тех пор, пока выполняется это условие, величина плотности состояний в щели уменьшается с ростом магнитного поля не экспоненциально, а более слабо, например, степенным образом [42]. Когда же магнитное поле достигнет такой величины, что $\hbar \omega_c \ge Q$, ширина Г насыщается и стремится к Q, а ПС в щелях экспоненциально уменьшается с ростом магнитного поля. На этом пути можно оценивать величину амплитуды флуктуаций случайного потенциала не только оптическими методами, но и, например, с помощью термоактивационной магнитопроводимости.

5. Заключение

В настоящем обзоре рассмотрены основные теоретические концепции, применяющиеся для описания плотности состояний 2D-систем в магнитном поле, и экспериментальные методики ее измерения. Рассмотренная область исследований, так же как и весь комплекс проблем, связанных с квантовым эффектом Холла, еще далека от завершенности и непрерывно развивается. Вместе с тем, можно констатировать, что определенный уровень понимания устройства энергетического спектра реальных 2D-систем и определяющих его механизмов на нынешнем этапе достигнут. Заканчивая обзор, уместно очертить круг вопросов, наиболее принципиальных и перспективных для будущих исследований. Такими вопросами являются, на наш взгляд, поведение плотности состояний в области дробных заполнений и его связь с дробным КЭХ, продвижение в область сильных магнитных полей с целью лучшего выявления свойств случайного потенциала, строгое вычисление коэффициента линейного экранирования, расчет и экспериментальное выделение ферми-жидкостных эффектов, детальное исследование формы пиков одночастичной плотности состояний.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Ando, T. Electronic properties of two-dimensional systems / T. Ando, A.B. Fowler, F. Stern // Reviews of Modern Physics. 1982. Vol. 54, Iss. 2. P. 437–672.
- 2. Klitzing von, K. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance / K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Physical Review Letters. 1980. Vol. 45, Iss. 6. P. 494–497.
- 3. Tsui, D.C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard // Physical Review Letters. 1982. Vol. 48, Iss. 22. P. 1559–1562.
- 4. Рашба, Э.И. Квантовый эффект Холла / Э.И. Рашба, В.Б. Тимофеев // ФТП. 1986. Т. 20, № 6. – С. 977–1024.
- 5. Eisenstein, J.P. Density of states and de Haas–van Alphen effect in two-dimensional electron systems / J.P. Eisenstein et al. // Physical Review Letters. 1985. Vol. 55, Iss. 8. P. 875–878.
- 6. Gornik, E. Specific heat of two-dimensional electrons in GaAs-GaAlAs multilayers / E. Gornik et al. // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54, Iss. 16. P. 1820–1823.
- 7. Stahl, E. Density of states of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field / E. Stahl et al. // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1985. Vol. 18, Iss. 26. P. L783–L787.
- 8. Кукушкин, И.В. Прямое определение плотности состояний двумерных электронов в поперечном магнитном поле / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 43, № 8. – С. 387–390.
- Абрикосов, А.А. Методы квантовой теории поля в статистической физике / А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. – Москва : Физматлит, 1962. – 443 с.

- 10. Левинсон, И.Б. Градиентно-инвариантная диаграммная техника в магнитном поле / И.Б. Левинсон, А.Ю. Матулис, Л.М. Щербаков // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 2. С. 859–866.
- Бонч-Бруевич, В.Л. К теории сильно легированных полупроводников. Междузонные переходы / В.Л. Бонч-Бруевич, Р. Розман // ФТТ. – 1963. – Т. 5, № 10. – С. 2890–2901.
- 12. Furneaux, J.E. Effects of interface charge on the quantum Hall-effect / J.E. Furneaux, T.L. Reinecke // Physical Review B. 1986. Vol. 33, Iss. 10. P. 6897–6908.
- Haug, R.J. Analysis of the asymmetry in Shubnikov-de Haas oscillations of two-dimensional systems / R.J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog // Physical Review B. – 1987. – Vol. 35, Iss. 11. – P. 5933–5935.
- Ando, T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. II. Single-site approximation under strong fields // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 36, Iss. 6. – P. 1521–1529.
- Ando, T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. III. Many-site approximation // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 37, Iss. 3. – P. 622–630.
- Ando, T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 37, Iss. 5. – P. 1233–1237.
- 17. Gerhardts, R.R. Path-integral approach to the two-dimensional magneto-conductivity problem. I. General formulation of the approach // Zeitschrift für Physik B. Condensed Matter and Quanta. 1975. Vol. 21, Iss. 3. P. 275–283.
- 18. Gerhardts, R.R. Cumulant approach to the two-dimensional magneto-conductivity problem // Surface Science. 1976. Vol. 58, Iss. 1. P. 227–234.
- Hikami, S. Anderson localization in a spatially correlated random potential under a strong magnetic field / S. Hikami, E. Brézin // Journal de Physique. – 1985. – Vol. 46, Iss. 12. – P. 2021–2029.
- Hikami, S. Localization in a strong magnetic field and the quantized Hall effect / S. Hikami, E. Brézin // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1-2. – P. 262–266.
- 21. Benedict, K.A. An exactly solvable model of the disordered two-dimensional electron gas in a strong magnetic field / K.A. Benedict, J.T. Chalker // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1986. Vol. 19, Iss. 19. P. 3587–3604.
- Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. I. Case of short-range scatterers // Journal of the Physical Society of Japan. – 1983. – Vol. 52, Iss. 5. – P. 1740–1749.
- Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. II. Long-range scatterers and response functions // Journal of the Physical Society of Japan. – 1984. – Vol. 53, Iss. 9. – P. 3101–3111.
- 24. Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. III. Impurity-concentration dependence and level-mixing effects // Journal of the Physical Society of Japan. 1984. Vol. 53, Iss. 9. P. 3126–3135.
- 25. Wegner, F. Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential superfield representation for interacting systems // Zeitschrift für Physik B. Condensed Matter. 1983. Vol. 51, Iss. 4. P. 279–285.
- 26. Brézin, E. Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities / E. Brézin, D.J. Gross, C. Itzykson // Nuclear Physics, Section B. – 1984. – Vol. 235, Iss. 1. – P. 24–44.
- Иоффе, Л.Б. Флуктуационные уровни и циклотронный резонанс в случайном потенциале / Л.Б. Иоффе, А.И. Ларкин // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, № 3. – С. 1048– 1057.

- 28. Affleck, I. Density of states in a uniform magnetic field and a white noise potential // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1984. Vol. 17, Iss. 13. P. 2323–2332.
- 29. Benedict, K.A. The fate of the Lifshitz tails of high Landau levels // Nuclear Physics, Section B. 1987. Vol. 280. P. 549–560.
- Ando, T. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields / T. Ando, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 36, Iss. 4. – P. 959–967.
- 31. Labbé, J. Dielectric constant of a two-dimensional electron gas with a partially occupied Landau level // Physical Review B. 1987. Vol. 35, Iss. 3. P. 1373–1379.
- MacDonald, A.H. Hall voltage and current distributions in an ideal two-dimensional system / A.H. MacDonald, T.M. Rice, W.F. Brinkman // Physical Review B. – 1983. – Vol. 28, Iss. 6. – P. 3648–3650.
- Ando, T. Screening effect and quantum transport in a silicon inversion layer in strong magnetic fields // Journal of the Physical Society of Japan. – 1977. – Vol. 43, Iss. 5. – P. 1616–1626.
- 34. Ando, T. Landau-level broadening in GaAs / AlGaAs heterojunctions / T. Ando, Y. Murayama // Journal of the Physical Society of Japan. –1985. – Vol. 54, Iss. 4. – P. 1519– 1527.
- 35. Cai, W. Screening effect on the Landau-level broadening for electrons in GaAs-Ga_{1-x}Al_xAs heterojunctions / W. Cai, C.S. Ting // Physical Review B. 1986. Vol. 33, Iss. 6. P. 3967–3972.
- Ando, T. Theory of oscillatory g factor in an MOS inversion layer under strong magnetic fields / T. Ando, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. 1974. Vol. 37, Iss. 4. P. 1044–1052.
- Murayama, Y. Theory of magnetoconductivity in a two-dimensional electron-gas system: self-consistent screening model / Y. Murayama, T. Ando // Physical Review B. 1987. Vol. 35, Iss. 5. P. 2252–2266.
- 38. Gerhardts, R.R. Statistical model for inhomogeneities in a two-dimensional electron gas implying a background density of states between Landau levels / R.R. Gerhardts, V. Gudmundsson // Physical Review B. – 1986. – Vol. 34, Iss. 4. – P. 2999–3002.
- 39. Шкловский, Б.И. Электронные свойства легированных полупроводников / Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос. – Москва : Наука, 1982. – 416 с.
- Гергель, В.А. Теория поверхностных состояний и проводимости в структурах металл-диэлектрик-полупроводник / В.А. Гергель, Р.А. Сурис // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84, № 2. – С. 719–736.
- 41. Luryi, S. Percolation approach to the quantum Hall effect // High Magnetic Fields in Semiconductor Physics / ed. by G. Landwehr. Berlin : Springer, 1986. P. 16–27.
- 42. Шкловский, Б.И. Осцилляции плотности состояний двумерных электронов в поперечном магнитном поле / Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44, № 11. – С. 520–522.
- Peierls, R. Zur theorie des diamagnetismus von leitungselektronen. II. Starke magnetfelder // Zeitschrift f
 ür Physik. – 1933. – Vol. 81, Iss. 3–4. – P. 186–194.
- 44. Пудалов, В.М. Измерение заряда инверсионного слоя МДП-структуры в квантующем магнитном поле / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский, В.С. Эдельман // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 39, № 10. – С. 474–477.
- 45. Smith, T.P. Direct measurement of the density of states of a two-dimensional electron gas / T.P. Smith et al. // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 4. P. 2696–2699.
- 46. Goldberg, B.B. AC conductivity of (AlGa) As–GaAs heterostructures and silicon MOS-FETS in the quantum Hall regime / B.B. Goldberg et al. // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 180–186.
- 47. Eisenstein, J.P. Magnetization and density of states of the 2D electron gas in GaAs/ AlGaAs heterostructures / J.P. Eisenstein et al. // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 271–276.
- Eisenstein, J.P. High precision de Haas-van Alphen measurements on a two-dimensional electron gas / J.P. Eisenstein et al. // Superlattices and Microstructures. 1985. Vol. 1, Iss. 1. P. 11–14.
- Eisenstein, J.P. High-precision torsional magnetometer: application to two-dimensional electron systems // Applied Physics Letters. 1985. Vol. 46, Iss. 7. P. 695–696.
- 50. Пудалов, В.М. Осцилляции химического потенциала и энергетический спектр электронов инверсионного слоя на поверхности Si в магнитном поле / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский, В.С. Эдельман // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89, № 5. – С. 1870– 1882.
- Pudalov, V.M. Hysteresis phenomena in charging of Si MOSFET in quantizing magnetic field / V.M. Pudalov, S.G. Semenchinsky, V.S. Edelman // Solid State Communications. 1984. Vol. 51, Iss. 9. P. 713–717.
- 52. Пудалов, В.М. Долинное расщепление в спектре электронов Si-инверсионного слоя / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский, В.С. Эдельман // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41, № 6. С. 265–267.
- 53. Лифшиц, И.М. К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах / И.М. Лифшиц, А.М. Косевич // ЖЭТФ. 1955. Т. 29, № 6. С. 730–742.
- 54. Каганов, М.И. О возможности наблюдения изменения химического потенциала электронов металла в магнитном поле / М.И. Каганов, И.М. Лифшиц, Н.Д. Синельников // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 32, № 3. – С. 605–607.
- 55. Алексеевский, Н.Е. Фаза магнитопробойных осцилляций сопротивления и термо ЭДС бериллия / Н.Е. Алексеевский, В.И. Нижанковский // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 83, № 3. – С. 1163–1169.
- 56. Алексеевский, Н.Е. Осцилляции химического потенциала и уравнение состояния бериллия / Н.Е. Алексеевский, В.И. Нижанковский // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 88, № 5. – С. 1771–1779.
- 57. Нижанковский, В.И. Исследование влияния магнитного поля на химический потенциал электронов в висмуте и гетеропереходе GaAs—Al_xGa_{1-x}As / В.И. Нижанковский и др. // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 90, № 4. – С. 1326–1335.
- 58. Zeller, R.T. Floating-gate technique applied to two-dimensional systems / R.T. Zeller et al. // Physical Review B. 1986. Vol. 33, Iss. 2. P. 1529–1532.
- Weiss, D. Density of states of Landau levels from activated transport and capacitance experiments / D. Weiss, K. von Klitzing, V. Mosser // Two-Dimensional Systems: Physics and New Devices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin : Springer. – 1986. – P. 204–217.
- Zawadzki, W. Magnetization, specific heat, magneto-thermal effect and thermoelectric power of two-dimensional electron gas in a quantizing magnetic field / W. Zawadzki, R. Lassnig / Surface Science. – 1984. – Vol. 142, Iss. 1–3. – P. 225–235.
- 61. Lassnig, R. Density of states of Landau levels from specific heat and magnetization experiments / R. Lassnig, E. Gornik // Two-Dimensional Systems: Physics and New Devices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. Berlin : Springer. 1986. P. 218–227.
- 62. Stern, F. Self-consistent results for *n*-type Si inversion layers // Physical Review B. 1972. Vol. 5, Iss. 12. P. 4891–4899.
- 63. Mosser, V. Density of states of GaAs–AlGaAs heterostructures deduced from temperature dependent magnetocapacitance measurements / V. Mosser et al. // Solid State Communications. – 1986. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 5–7.

- 64. Tsui, D.C. Zero-resistance state of two-dimensional electrons in a quantizing magnetic field / D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard // Physical Review B. – 1982. – Vol. 25, Iss. 2. – P. 1405–1407.
- 65. Klitzing von, K. The fine-structure constant α. A contribution of semiconductor physics to the determination of α // Festkörperprobleme. 1981. Vol. 21. P. 1–23.
- 66. Долгополов, В.Т. О частотной зависимости квантового эффекта Холла / В.Т. Долгополов, С.И. Дорожкин // Поверхность. – 1985. – № 2. – С. 5–7.
- 67. Гаврилов, М.Г. Плотность состояний в щелях энергетического спектра двумерных электронов в поперечном магнитном поле / М.Г. Гаврилов, И.В. Кукушкин // Письма в ЖЭТФ. 1986. – Т. 43, № 2. – С. 79–82.
- 68. Weiss, D. Density of states in Landau level tails of GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterostructures / D. Weiss et al. // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 285–291.
- 69. Tausendfreund, B. Analysis of quantized Hall resistance at finite temperatures / B. Tausendfreund, K. von Klitzing // Surface Science. 1984. Vol. 142, Iss. 1–3. P. 220–224.
- 70. Шашкин А.А. Шнурование холловского тока в двумерной электронной системе при нелинейных условиях в квантующем магнитном поле / А.А. Шашкин, В.Т. Долгополов, С.И. Дорожкин // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 91, № 5. – С. 1897–1904.
- 71. Hartstein, A. Density of states in silicon inversion layers in high magnetic fields from resonant tunneling measurements / A. Hartstein, R.H. Koch // Proceedings of the 18th International Conference on the Physics of Semiconductors, Stockholm / ed. by O. Engstrom – Singapore : World Scientific, 1986. – P. 481–484.
- 72. Lassnig, R. Landau level width and cyclotron resonance in 2D system / R. Lassnig et al. // Proceedings of the 18th International Conference on the Physics of Semiconductors, Stockholm / ed. by O. Engstrom – Singapore : World Scientific, 1986. – P. 593–596.
- Englert, T. Oscillations of the cyclotron resonance linewidth with Landau level filling factor in GaAs/AlGaAs heterostructures / T. Englert et al. // Physica B+C. – 1982. – Vol. 117–118, Part II. – P. 631–633.
- Heitman, D. Cyclotron-resonance oscillations in InAs quantum wells / D. Heitman, M. Ziesmann, L.L. Chang // Physical Review B. – 1986. – Vol. 34, Iss. 10. – P. 7463–7466.
- 75. Кукушкин, И.В. Излучательная рекомбинация двумерных электронов с фотовозбужденными дырками в кремниевых МДП-структурах / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 40, № 10. – С. 413–416.
- 76. Кукушкин, И.В. Излучательная рекомбинация двумерных электронов с неравновесными дырками в кремниевых структурах металл-диэлектрик-полупроводник / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 92, № 1. – С. 258–278.
- 77. Кукушкин, И.В. Плотность состояний двумерных электронов в поперечном магнитном поле и экранирование случайного потенциала / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93, № 3. – С. 1088–1109.
- 78. Fowler, A.B. Magneto-oscillatory conductance in silicon surfaces / A.B. Fowler et al. // Physical Review Letters. 1966. Vol. 16, Iss. 20. P. 901–903.
- 79. Kümmel, R. Theory of valley-splitting in surface quantum states of silicon MOS-FETS // Zeitschrift für Physik B. Condensed Matter and Quanta. – 1975. – Vol. 22, Iss. 3. – P. 223–230.
- Ohkawa, F.J. Theory of valley splitting in an n-channel (100) inversion layer of Si I. Formulation by extended zone effective mass theory / F.J. Ohkawa, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1977. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 907–916.
- Ohkawa, F.J. Theory of valley splitting in an n-channel (100) inversion layer of Si II. Electric break through / F.J. Ohkawa, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1977. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 917–924.

- Sham, L.J. Effective-mass approximation in the presence of an interface / L.J. Sham, M. Nakayama // Physical Review B. – 1979. –Vol. 20, Iss. 2. – P. 734–747.
- 83. Sham, L.J. Effect of interface on the effective mass approximation / L.J. Sham, M. Nakayama // Surface Science. – 1978. – Vol. 73. – P. 272–280.
- 84. Ohkawa, F.J. Theory of valley splitting in an n-channel (100) inversion layer of Si III. Enhancement of splittings by many-body effects / F.J. Ohkawa, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1977. – Vol. 43, Iss. 3. – P. 925–932.
- Rauh, H. Theory of the temperature dependence of the enhanced valley splitting in surface states of silicon MOSFETs / H. Rauh, R. Kümmel // Surface Science. – 1980. – Vol. 98, Iss. 1–3. – P. 370–377.
- 86. Кукушкин, И.В. Междолинное расщепление в энергетическом спектре двумерных электронов на поверхности (100) кремния // Письма в ЖЭТФ. – 1987. – Т. 45, № 5. – С. 222–225.
- Baraff, G.A. Explanation of quantized-Hall-resistance plateaus in heterojunction inversion layers / G.A. Baraff, D.C. Tsui // Physical Review B. 1981. Vol. 24, Iss. 4. P. 2274–2277.

КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА*

Рашба Э. И., Тимофеев В. Б.

Дан обзор современного состояния экспериментальных и теоретических исследований по квантовому эффекту Холла, целочисленному и дробному.

1. Введение

Наиболее ярким событием в физике полупроводников за последнее время явилось открытие фон Клитцингом, Дорда и Пеппером [1] квантования холловского сопротивления, которое получило название квантового эффекта Холла (КЭХ). Два года спустя Тсуй, Штермер и Госсард [2] обнаружили дробный КЭХ (ДКЭХ). После этого явление, открытое Клитцингом и др. [1],** стали обычно называть обыкновенным или целочисленным КЭХ (ЦКЭХ). КЭХ наблюдается в двумерных (2*D*) электронных и дырочных слоях пространственного заряда в структурах металл—диэлектрик—полупроводник (МДП) и в гетеропереходах с модулированным легированием.

Сущность явления состоит в том, что в низкотемпературной ($T \sim 1$ K) холловской проводимости $\sigma_H 2D$ -электронного газа в сильном магнитном поле H, измеренной в зависимости от H или N_s — концентрации 2D-носителей, обнаруживается ряд плато. Это явление показано на рис. 1 на примере зависимости холловского сопротивления R_H от N_s ; в области плато $R_H = \sigma_H^{-1}$. На плато

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}.\tag{1}$$

Здесь *е* и $h = 2\pi\hbar$ — мировые постоянные (*е* — элементарный заряд, \hbar — постоянная Планка), а ν — фактор заполнения, т. е.

$$\nu = \frac{N_s}{N_I},\tag{2}$$

где

$$N_L = \frac{1}{2\pi\lambda^2} = \frac{eH}{ch} = \frac{H}{\Phi_0}$$
(3)

— число состояний на уровне Ландау в расчете на единицу поверхности [3], *с* — скорость света, $\lambda = (c\hbar/eH)^{1/2}$ — магнитная длина, а

$$\Phi_0 = ch/e \tag{4}$$

— квант магнитного потока. Замечательная особенность состоит в том, что фактор *v*, определенный по формуле (1), оказывается равным

^{*} Физика и техника полупроводников. – 1986. – Т. 20. Вып. 6. – С. 977–1024.

^{**} За открытое явление Клаусу фон Клитцингу присуждена Нобелевская премия по физике, 1985 г.

$$\nu = q/p, \tag{5}$$

где q и p — целые. Для ЦКЭХ p = 1, для ДКЭХ p > 1. Равенство (5) соблюдается с огромной точностью; уже в первом эксперименте [1] равенство ν целому числу было установлено с точностью до пяти знаков. Выполнение соотношения (2) контролируется независимыми экспериментами. Всем плато σ_{H} отвечают глубокие провалы в диагональных компонентах тензора проводимости $\sigma_{xx} \ll \sigma_{H}$ и тензора сопротивления $\rho_{xx} \ll \rho_{H}$ (рис. 1).



Рис. 1. Квантовый эффект Холла в Si-МДП структуре. Зависимость холловского сопротивления $R_{\!_H}$ и удельного сопротивления $\rho_{_{xx}}~(\approx\!\!R_{\!_x})$ от напряжения $V_{\!_G}$ на затворе в прямоугольной МДП структуре. Напряжение $V_{\!_G}$ пропорционально $N_{\!_x}$. Поле H=18.9 Тл, T=1.5 К [1].

Открытие Клитцинга и др. [1] является исключительным событием, по-видимому, не имеющим прямого прецедента в истории физики. Выдающиеся экспериментальные открытия прошлого обычно состояли в обнаружении явлений, новизна которых ощущалась уже на качественном уровне. Напротив, в данном случае было открыто... число, коэффициент пропорциональности: холловская проводимость «грязной» МДП структуры оказалась кратной мировой постоянной e^2/h .

Для идеального электронного газа формулу (1) легко получить. Действительно, плотность холловского тока $\mathbf{j}_{H} = eN_{s}\mathbf{v}_{H}$, где $v_{H} = cE/H - холловская скорость,$ $<math>\mathbf{E} -$ электрическое поле. Учитывая, что $\mathbf{j}_{\mu} = \sigma_{\mu}E$, получаем обычное соотношение

$$\sigma_{H} = ecN_{s}/H \tag{6}$$

и далее (1). Однако этот формальный вывод не объясняет КЭХ, а скорее подчеркивает трудности, связанные с его объяснением. Действительно, согласно (6), $\sigma_H \propto N_s$ при H = const и $\sigma_H \propto H^{-1}$ при $N_s = \text{const}$, т. е. в обоих случаях плато отсутствуют. В условиях ЦКЭХ плато возникают вследствие захвата подавляю-

щей части носителей на дефекты, так что возрастание N_s не приводит к росту концентрации электронов, переносящих холловский ток (п. II.1). Но для захваченных носителей $v_H = 0$, поэтому естественно было бы включить в N_s только свободные носители, что противоречит формулам (1) и (2), отражающим экспериментальные результаты.

Величина $h/e^2 \approx 25.812$ кОм как единица сопротивления, выраженная через мировые постоянные, вошла в теорию твердого тела еще до открытия КЭХ. Она была введена Личарделло и Таулессом [4] для 2D-систем и Таулессом [5] для проволок как предельное сопротивление, при котором еще сохраняется металлическая проводимость (в [4] в смысле моттовской минимальной металлической проводимости [6]). Однако если в [4], и особенно в [5], e^2/h играло роль масштаба проводимости, то в КЭХ вследствие (1) и (5) оно приобрело роль «кванта проводимости». Именно в этом смысле принято говорить о квантовании σ_H

Открытие КЭХ затронуло широкий круг физиков: экспериментаторов, работающих в области физики полупроводников, метрологов, а также теоретиков специалистов в области теории твердого тела и теории поля. Последнее особенно симптоматично, так как показывает, что интерпретация КЭХ принадлежит к числу фундаментальных проблем. Сейчас ясно, что физические механизмы, ответственные за ЦКЭХ и ДКЭХ, в значительной мере различны: в первом случае определяющим является влияние случайного потенциала, во втором — межэлектронное взаимодействие. Поэтому, за исключением раздела I, являющегося вводным, настоящий обзор включает две части, посвященные ЦКЭХ и ДКЭХ соответственно.

По мере развития работ появилось много хороших обзоров, включающих КЭХ или целиком посвященных ему [7–18]. Из них только немногие [10, 12, 14–16] охватывают проблему в целом. Большинство обзоров посвящено ЦКЭХ [7–9, 11], некоторые — ДКЭХ [17, 19], ряд из них относится только к теории. Из-за быстрого развития исследований обзоры быстро устаревают. Мы стремились, соблюдая разумную пропорцию, изложить основной круг вопросов целиком. Но мы вполне подготовлены к тому, что ко времени выхода из печати наш обзор также частично устареет.

2. Двумерный электронный газ

2.1. Системы с 2D-носителями

Существует несколько типов систем, в которых электронный (дырочный) газ ведет себя как двумерный [8, 9].

а. Инверсионные и аккумуляционные слои в кремниевых МДП структурах (Si-МДПС). Типичной 2D-системой является инверсионный электронный канал в Si-МДПС. В них ЦКЭХ был обнаружен впервые [4]. В Si-МДПС кристалл Si имеет плоскую границу раздела с тонкой (~10⁻⁵ см) пленкой диэлектрика SiO₂, на противоположную поверхность которой наносится металлический электродзатвор (рис. 2). Напряжение V_{g} , приложенное между затвором и границей раздела, создает в SiO₂ однородное электрическое поле, а в Si у границы раздела

 ${\rm Si/SiO}_2$ — объемный заряд и удерживающую его потенциальную яму. Со стороны диэлектрика яма ограничена потенциальным барьером высотой около 2 эВ. По форме она близка к треугольной (рис. 2). В равновесных условиях при достаточно большом $V_{_G}$ дно ямы опускается ниже уровня химического потенциала ζ в объеме кристалла. Тогда тонкий приповерхностный слой ($\approx 30-50$ Å), ограниченный стенками ямы, заполняется электронами — носителями противоположного (инверсного) знака по отношению к носителям в объеме (дыркам). Таким образом, у поверхности p-Si при $V_G>0$ возникает инверсионный слой: n-канал (у поверхности n-Si при $V_G<0$ —p-канал). Канал заполняется носителями через встроенные электроды (исток и сток)—s и d. При противоположном знаке V_G у поверхности образуется аккумуляционный (обогащенный) слой; если V_G достаточно велико, то носители в этом слое вырождены. Если встроенные электроды отсутствуют, то потенциальную яму вблизи границы раздела можно заполнить с помощью подсветки.



Рис. 2. МДП структура.

а — схематический разрез: 1 — полупроводник *р*-типа, 2 — окисел (диэлектрик), 3 — металлический затвор, 4 — низкоомные электроды (исток–сток), 5 — инверсионный *n*-канал;

 δ — схема энергетических зон вблизи границы раздела окисел – полупроводник; ε_{c} и ε_{v} — дно зоны проводимости и потолок валентной зоны в полупроводнике. Слева от канала показан ход дна зоны проводимости в окисле; ζ — уровень Ферми в полупроводнике, ζ_{M} — в металле, V_{G} – потенциал на затворе, d — ширина области обеднения. Точки — акцепторы (светлые — нейтральные, черные — ионизированные). Заштрихованная область — вырожденный электронный газ в канале.

Инверсионный слой отделен от объема кристалла областью обеднения (толщиной $d \sim 1$ мкм). В ней носители отсутствуют, и поэтому эта область является изолятором. В области обеднения находятся ионизированные мелкие примеси, заряд которых тот же по знаку, что и заряд носителей в канале.

В Si-МДПС плотность 2D-носителей легко варьировать в пределах $N_s \ll 10^{13}$ см⁻² (ограничение связано с пробоем диэлектрика), изменяя V_{G} . Обычно из-за несовершенства пленки SiO₂ и границы раздела Si/SiO₂ плотность локализованных состояний относительно велика. Поэтому при гелиевых температурах даже в лучших структурах при $N_s \ll (1 \div 2) \cdot 10^{11}$ см⁻² все носители локализованы.

Случайный потенциал, связанный с заряженными примесями (ионы щелочных металлов в SiO₂) и структурными несовершенствами, играет определяющую роль в рассеянии 2*D*-носителей при низких температурах и ограничивает их подвижность. Известные в литературе рекордные величины электронной подвижности в Si-МДПС при *T* = 4.2 К не превышают $\mu_e \approx (4 \div 5) \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{B} \cdot \text{c}$ [20, 21].

б. Двумерные слои носителей заряда в гетероструктурах (ГС). Значительно большей величины подвижности 2D-носителей удается достигнуть в ГС — на границе раздела двух полупроводников с близкими периодами кристаллической решетки, но различной шириной запрещенной зоны — щели ε_g . Наиболее изученной и широко эксплуатируемой системой такого типа является гетероструктура GaAs/AlGaAs (далее — GaAs-ГС). Щель ε_g в сплаве Al_xGa_{1-x}As больше, чем в GaAs, и возрастает с концентрацией *x*. При типичных значениях $x \approx 0.3$ разность щелей $\Delta \varepsilon_g$ составляет ≈ 0.4 эВ, а отношение скачков потенциала ε_b у краев зоны проводимости и валентной зоны $\approx 3: 2$ [22].

Из легированного сплава AlGaAs носители туннелируют в относительно чистый GaAs, в результате чего химические потенциалы по обе стороны барьера выравниваются. Из-за переноса заряда на границе раздела возникает сильное поле ($E \sim 10^5$ В/см), изгибающее зоны (рис. 3). В потенциальной яме, образующейся в GaAs, возникает слой 2*D*-носителей заряда *n*- или *p*-типа (на контакте с *n*-AlGaAs : Si или *p*-AlGaAs : Be соответственно).



Рис. 3. Гетероструктура. *а* – схематический разрез; *б* – схема энергетических зон вблизи гетероперехода. Точки – доноры (светлые – нейтральные, черные – ионизированные).

Техника молекулярно-пучковой эпитаксии и модулированного легирования позволяет создавать структуры с резким (порядка постоянной решетки) гетеропереходом, а также пространственно отдалять носители в канале от ионизированных примесей в области обеднения AlGaAs-сплава. Это достигается наращиванием нелегированной прослойки («спейсера») толщиной 100—300 Å [23]. Таким путем получены ГС с рекордными величинами подвижности μ при гелиевых температурах: в *n*-канале $\mu_e \gtrsim 4 \cdot 10^6$ см²/В · с [24], в *p*-канале $\mu_h \gtrsim 2.5 \times \times 10^5$ см²/В · с [25]. Именно в GaAs-ГС с большой подвижностью 2*D*-носителей был открыт ДКЭХ [2].

В ГС в отличие от Si-МДПС величиной N_s удается управлять в сравнительно небольших пределах (в 2–3 раза) с помощью подсветки или приложения напряжения к специально встроенному затвору с целью дополнительного изгиба зон.

К числу других систем, где возникают 2*D*-слои пространственного заряда, относятся бикристаллы, содержащие плоскость двойникования (например, бикристаллы Ge [26], InSb [27]), а также сколотые поверхности (Ge [28], InAs [29]). В этих системах пространственный заряд возникает из-за оборванных валентных связей на границе раздела, а его знак определяется электронным сродством. В них не удается управлять плотностью 2*D*-носителей, а на границах раздела, как правило, много структурных дефектов. В таких структурах КЭХ мало исследован.

2.2. Энергетический спектр 2D-носителей

Ограниченная протяженность потенциальной ямы в направлении, нормальном к границе раздела Si/SiO₂ или к ГС, приводит к размерному квантованию в этом направлении (ось *z* на рис. 2 и 3). В плоскости (*xy*) энергетический спектр носителей остается непрерывным и при малых значениях волнового вектора \mathbf{k} — квадратичным [8, 9]:

$$\varepsilon_i(\mathbf{k}) = \varepsilon_i^0 + \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_x^2}{m_x} + \frac{k_y^2}{m_y} \right). \tag{7}$$

Каждое значение энергии ε_i^0 является дном соответствующей электрической подзоны. Так как система несимметрична относительно отражения в плоскости *ху*, $\varepsilon_i(\mathbf{k})$ содержит линейные по \mathbf{k} члены [30] вида $\alpha \nu [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{k}] (\boldsymbol{\nu} -$ орт оси $z, \boldsymbol{\sigma} -$ матрицы Паули). Они обнаружены экспериментально (анализ данных см. в [31]). Эти члены, как и эффекты непараболичности, не оказывают существенного влияния на КЭХ и поэтому далее не рассматриваются.

Энергетический спектр ε_i^0 в условиях размерного квантования рассчитывался в ряде работ для Si-МДПС и GaAs-ГС и изучался экспериментально. При H = 0он известен с удовлетворительной точностью [8, 9].

Спектр границы раздела Si/SiO₂ осложняется наличием шести долин в 3*D*спектре Si. Электрическое квантование частично снимает это вырождение, так что при $\nu \parallel$ (001) электронный терм ($\mathbf{k} = 0$) расщепляется на два уровня: нижний вырожден двухкратно, верхний — четырехкратно (без учета спина). Поэтому существуют две серии размерно квантованных состояний в *n*-канале. Нижнее состояние соответствует двум электронным долинам с тяжелой массой $m_h \approx m_0$ (m_0 — масса свободного электрона) в направлении *z* и легкой массой $m_i \approx 0.2 m_0$, изотропной в плоскости (*xy*) \parallel [001] (рис. 4). Вырождение нижнего уровня $\varepsilon_0(m_h)$ снимается долинно-орбитальным взаимодействием на поверхности ε_{v0} . Применительно к Si-МДПС нас будут интересовать только случай $\nu \parallel$ (001) и область концентраций $N_s \leqslant 5 \cdot 10^{12}$ см⁻², когда заполняются только две нижние подзоны с малой поперечной массой m_l [происходящие из уровня $\varepsilon_0(m_h)$].



Рис. 4. Энергетический спектр электронов в инверсионном слое Si-МДПС; ориентация границы раздела [001]. В центре — спектр размерного квантования энергии для электронов с тяжелой массой m_h в направлении z [уровни $\varepsilon_0(m_h)$ и $\varepsilon_1(m_h)$] и легкой массой m_l в этом направлении [уровень $\varepsilon_0(m_l)$]. Схематически показаны волновые функции соответствующих состояний. Справа — схема электронных долин в Si. Слева — плотность состояний 2D-электронов при H = 0 и $H \neq 0$. На вставке показана тонкая структура уровней Ландау.

В *n*-канале в GaAs-ГС существует одна серия размерно квантованных подзон с массой $m_e^* \approx 0.07 m_0$. Спектр размерного квантования в *p*-слоях Si-МДПС и GaAs-ГС осложняется четырехкратным вырождением экстремума валентной зоны. Размерное квантование снимает орбитальное вырождение, и возникают две серии подзон, которые условно можно сопоставить с тяжелыми и легкими дырками.

В поле Н || *z* спектр в каждой электронной подзоне дискретен:

$$\varepsilon_{nsv} = \varepsilon^0 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + sg\mu_B H + v\varepsilon_{v0} \tag{8}$$

где n — квантовое число Ландау, $s = \pm 1/2$ — спиновое число, g — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора, $v = \pm 1/2$ — долинно-орбитальное квантовое число, ω_c — циклотронная частота [32, 33]. Критерий двумерности системы состоит в том, что в наклонном поле **H** ω_c зависит только от H_z . Напротив, g зависит от полного **H**. Степень вырождения каждого уровня равна N_LS , S — площадь слоя. Согласно (8), у электрона не остается ни одного непрерывного квантового числа: в этом смысле говорят, что система является нуль-мерной.

В инверсионном *n*-канале в Si каждый уровень Ландау имеет квартетную структуру, связанную с долинно-орбитальным и спиновым расщеплением. При полном заполнении квартета *g*-фактор в канале равен $n_e \approx 2$. При неполном заполнении величина *g*-фактора в силу обменно-корреляционных взаимодействий зависит от *v* [8, 9].

Для интерпретации КЭХ очень существенно, каково распределение плотности состояний $D(\varepsilon)$ в 2*D*-спектре при учете случайного потенциала и локализованы ли возникающие состояния.

Согласно (8), при $H \neq 0$ в идеальном 2*D*-слое $D(\varepsilon)$ является системой δ -функций. Случайный потенциал (неоднородности, примеси и др.) снимает вырождение уровней Ландау. Плотность состояний при рассеянии на точечных примесях вычислялась в ряде работ [10, 34–36]. Если $\omega_c \tau \gg 1$ (τ — время свободного пробега при H = 0), а случайный потенциал является знакопеременным, то каждая δ -функция размывается в узкий пик с экспоненциально спадающими хвостами, которые для различных уровней Ландау практически не перекрываются (рис. 5, *a*). Ширина каждого пика Г имеет масштаб

$$\Gamma \approx \left(\hbar\omega_c \frac{\hbar}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sc}\left(\frac{H}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
(9)

При учете экранирования Γ зависит от ζ [37].

 $D(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \zeta$ можно определять с помощью измерения термодинамических величин (намагниченности [38], электронной теплоемкости [39]), магнитоемкостных измерений [40], анализа формы плато [41], а также путем изучения активационной проводимости [42, 43] (см. далее) и температурной зависимости наклона плато [44]. Эти эксперименты привели к общему заключению: между пиками $D(\varepsilon)$ плотность состояний близка к постоянной и составляет заметную часть от значения при H = 0. Экспериментально установлено [38], что $\Gamma \sim H^{\frac{1}{2}}$ в согласии с (9), однако по величине в несколько раз превосходит теоретические оценки.

Знание $D(\varepsilon)$ еще не решает вопроса о поведении волновых функций, которое является определяющим в проблеме существования электропроводности и ее механизмов. Квантовые состояния могут быть локализованными и протяженными: волновые функции локализованных состояний затухают, а протяженных не затухают на бесконечности. В этом смысле последние аналогичны блоховским функциям идеального кристалла, но отличаются от них своим детальным видом из-за сильного влияния потенциала дефектов и магнитного поля.

Известно, что даже короткодействующий (но не δ -функционный) потенциал изолированной примеси независимо от его знака отщепляет от уровня Ландау бесконечное число уровней, соответствующих локализованным состояниям [45]. Поэтому несомненно, что состояния на хвостах плотности D(arepsilon) локализованы и в целом тем сильнее, чем меньше $D(\varepsilon)$. Однако наряду с локализованными состояниями должны существовать и протяженные состояния. На их наличие прямо указывает эксперимент, так как только они способны обеспечить наблюдаемый холловский ток. Их существование подтверждается и теоретическими аргументами: первый из них был приведен Гальпериным [46] (см. также пп. 3.2.3 и 3.2.5). В бесконечном образце при $\omega_c au \gg 1$ протяженные состояния существуют на каждом уровне Ландау и располагаются при одной энергии $\varepsilon_{\mathrm{ext}}$ в области максимума $D(\varepsilon)$. Длина локализации $L(\varepsilon)$ растет, когда $\varepsilon \to \varepsilon_{ext}$; эта зависимость схематически показана на рис. 5, б. Состояния, для которых $L(\varepsilon)$ сравнимо с размером образца, проявляются как протяженные. Области локализованных состояний называются щелями подвижности, а их границы ε_r с областями протяженных состояний — краями или порогами подвижности. Выше предполагалось, что T = 0.



Рис. 5. Зависимость плотности состояний и длины локализации от энергии. a -рассчитанная и измеренная плотность состояний $D(\varepsilon)$ в Si-МДПС. Оба максимума $D(\varepsilon)$ (1) являются суперпозицией парциальных плотностей (2), отвечающих подуровням тонкой структуры (показана сверху). Все парциальные плотности вычислены по формуле $D(\varepsilon) = \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \Gamma \right]^{-1} \exp\left[-2(\varepsilon/\Gamma)^2 \right]$, в каждом случае энергия ε отсчитывается от соответствующего уровня. Ширина уровня $\Gamma = \hbar \omega_c (2c/\pi \mu H)^{\frac{1}{2}}$ [8, 9]. Использованы $\mu = 1.4 \text{ м}^2/\text{B} \cdot \text{с и } H = 6.7 \text{ Гл, от$ $вечающие условиям эксперимента. Точки — экспериментально измеренное <math>D(\varepsilon)$ [47], D_0 — плотность состояний при H = 0; δ — качественный вид зависимости длины локализации L от энергии ε ; 2w — ширина щели подвижности. Остальные обозначения разъяснены в тексте.

При $T \neq 0$ состояния, исходно локализованные, вносят вклад в проводимость за счет термически активированных процессов. В результате эти состояния приобретают конечное время жизни, что приводит к постепенному разрушению локализации. Для состояния с длиной локализации $L(\varepsilon)$ это происходит, когда $L(\varepsilon)$ примерно сравнивается с длиной потери фазовой когерентности $L_{\varphi}: L(\varepsilon) \sim L_{\varphi}$. Не уточняя этого понятия [48], отметим только, что L_{φ} убывает с ростом *T*. Состояния с $L(\varepsilon) > L_{\varphi}$ переносят ток, и поэтому щель подвижности с ростом *T* несколько сужается.

Теперь можно разъяснить суть метода измерения $D(\varepsilon)$ по активационной проводимости [42, 43] — наиболее прямого метода определения плотности локализованных состояний в области хвостов $D(\varepsilon)$. Если ζ лежит в щели подвижности между квантовыми уровнями, то σ_{xx} определяется числом носителей, заброшенных с уровня Ферми на края подвижности ближайших верхнего и нижнего квантовых уровней. Если ζ отсчитывается от средней точки между уровнями, то активационная проводимость [47]

$$\sigma_{xx}(\zeta, T) \circ \exp(-w/T) \operatorname{ch}(\zeta/T), \tag{10}$$

где w — половина щели подвижности. При изменении N_s на ΔN_s уровень Ферми сдвигается на $\Delta \zeta = \Delta N_s / D(\zeta)$, причем ΔN_s измеряется непосредственно, а $\Delta \zeta$ — по $\Delta \sigma_{xx}$. По ним определяется $D(\zeta)$. Найденное таким образом $D(\varepsilon)$ для Si-МДПС показано на рис. 5, *а*. Видно, что на широком плато между пиками $D(\varepsilon)$ велико: оно составляет значительную долю от D_0 — значения D при H = 0.

Результаты аналогичны полученным на GaAs-ГС [42, 43], а также на InGaAs/ InP-ГС [44]. В [42, 43] наблюдалось убывание *D* с ростом μ , однако почти отсутствовала зависимость *D* от *H*. В области параметров, исследованной в [47], наблюдалась зависимость $D \propto (\mu H)^{-\nu_2}$. Интерпретация этих результатов пока отсутствует. По-видимому, для их объяснения должны быть привлечены крупномасштабные флуктуации потенциала.

2.3. Методы гальваномагнитных измерений

Материальные уравнения, связывающие плотность тока **j** с электрическим полем **E**, для 2*D*-систем имеют вид

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \, \mathbf{E} = \hat{\rho} \mathbf{j},\tag{11}$$

или в компонентах

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y, E_x = \rho_{xx}j_x + \rho_{xy}j_y,$$

$$j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y, E_y = \rho_{yx}j_x + \rho_{yy}j_y.$$
(12)

Здесь $\hat{\sigma}$ и $\hat{\rho}$ — тензоры удельной проводимости и сопротивления,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \, \rho_{xx} = \rho_{yy}, \, \sigma_{yx} = -\sigma_{xy}, \, \rho_{yx} = -\rho_{xy}. \tag{13}$$

Два первых равенства следуют из кубической симметрии кристаллов (Si, GaAs), а два последних — из соотношений Онсагера ([49], § 21). Знак холловских компонент σ_{xy} и ρ_{xy} определяется знаком носителей.

Как и во *Введении*, мы будем использовать обозначения $\sigma_{\!_H}$ и $\rho_{\!_H}$ для их абсолютных величин.

Из равенства $\hat{\sigma}\hat{\rho} = \hat{1}$ следует

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \ \rho_{xy} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}.$$
 (14)

В 2*D*-системах сопротивление *R* квадрата с ребром *L*, вычисляемое по формуле $\rho L/L$, совпадает с удельным сопротивлением ρ . Поэтому размерность ρ обычно записывается как Ом/ \Box .

В условиях КЭХ $\sigma_{xx} \ll \sigma_{H}$, и в пределе

$$\sigma_{xx} = \rho_{xx} = 0, \ \sigma_H = \rho_H^{-1}.$$
(15)

Такой необычный вид материальных уравнений обязывает применять специальные методы для надежного измерения малых значений σ_{xx} и малых девиаций σ_{xy} от квантованных значений. Распределение тока по сечению в таких измерениях является неоднородным (п. 3.3). Важный факт состоит в том, что эта неоднородность практически не влияет на точность квантования σ_{xy} .

Остановимся теперь на методах гальваномагнитных измерений и геометрии 2D-структур с контактами. Измерения выполняются на структурах с встроенными электродами, обеспечивающими омический контакт с 2D-слоем носителей заряда (рис. 6). Используются структуры прямоугольной (холловский мост) и кольцевой (диск Корбино) форм. Диск Корбино применяют для прямых измерений диагональной компоненты магнитопроводимости:

$$\sigma_{xx} = \left(I_{sd}/2\pi V_{sd}\right) \ln\left(R_2/R_1\right). \tag{16}$$

При расстоянии между электродами $L \ll R_1, R_2 \sigma_{xx} = (L/2\pi R) (I_{sd}/V_{sd})$ (рис. 6).

В структурах с геометрией холловского моста измеряют компоненты ρ_{ij} . Если распределение полевого тока I_{sd} однородно, то диагональная компонента удельного сопротивления равна

$$\rho_{xx} = \left(V_{P_i P_j} / I_{sd} \right) \left(W / L_{P_i P_j} \right) = R_{P_i P_j} \left(W / L_{P_i P_j} \right), \tag{17}$$

а холловская

$$\rho_H = V_H / I_{sd} = R_H, \ V_H = V_{P_2 P_2'}. \tag{18}$$

Здесь W — ширина канала, V_{pp} , — напряжение между потенциальными контактами (рис. 6). При работе с холловским мостом важно поддерживать постоянной величину тока I_{sd} , при работе с диском Корбино — величину напряжения V_{sd} , а также вести измерения в линейном режиме.

Существенные различия в симметрии структур, имеющих кольцевую и прямоугольную геометрии, проявляются в распределении потенциала в 2*D*-слое. В диске Корбино в квантовом режиме ($\sigma_{xx} \rightarrow 0$, диссипация в 2*D*-слое отсутствует) эквипотенциали имеют вид окружностей, концентричных областям истока и стока. Поэтому у контактов бездиссипативное протекание тока не нарушается. В геометрии холловского моста картина вблизи контактов сток–исток иная. При $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ вдали от контактов эквипотенциали параллельны линиям тока ($\mathbf{j} \perp \mathbf{E}$), а вблизи контактов ток пересекает эквипотенциальные линии (см. п. 3.3). Поэтому в области контактов происходит диссипация энергии. Это подтверждается обнаружением циклотронного излучения из приконтактных областей сток исток [50].



Рис. 6. Схема прямоугольной (а) и кольцевой (б) структур для гальваномагнитных измерений.

В общем случае измеряемое холловское сопротивление R_H^{\exp} в структурах с геометрией холловского моста всегда меньше теоретического значения $R_H^{\rm th}$ для бесконечно длинного образца ($L \gg W$): $R_H^{\exp} = GR_H^{\rm th}$, G < 1. Фактор G зависит от холловского угла Θ (tg $\Theta = \sigma_H / \sigma_{xx}$) и отношения L/W. Из расчетов и экспериментов следует [7], что в режиме КЭХ при типичных значениях $\sigma_H / \sigma_{xx} \sim 10^6$ погрешность в величине R_H в области плато (1 - G) $\lesssim 10^{-7}$, если холловские контакты размещены строго посередине между стоком и истоком и L/W > 2. Вне плато, а также при несимметричном размещении контактов погрешность заметно возрастает.

3. Целочисленный квантовый эффект Холла (КЭХ)

3.1. Экспериментальное описание КЭХ и его качественная интерпретация

Структуру, которую можно интерпретировать как плато, на зависимости $\rho_{xy}(N_s)$ впервые наблюдали Энглерт и Клитцинг [51], а на зависимости $\sigma_{xy}(H)$ — Вакабаяси и Каваджи [52] на Si-МДПС. Однако в этих работах нет сведений о точном значении (h/e^2) σ_{H} на плато, т. е. о величине, которая определила научную значимость последующих результатов. Выразительные плато на зависимостях $\rho_{H}(N_s)$ в Si-МДПС обнаружили Клитцинг и др. [1]. В этой пионерской работе продемонстрировано, что холловское сопротивление для $\nu=4$ согласуется с $h/4e^2$ с точностью $\approx 3 \cdot 10^{-6}$.

Тсуй и Госсард [53] первыми наблюдали квантование в 2D n-канале GaAs-ГС. Целочисленное квантование $\sigma_{xy}(N_s)$ при H = const наблюдали Нарита и др. [54] в полевом транзисторе на GaAs-ГС. К настоящему моменту ЦКЭХ наблюдался в разнообразных 2D-системах: *p*-канале в GaAs-ГС [55] и Si-МДПС [56], *n*-канале в InSb-МДПС [57] и бикристалле *p*-InSb [58], а также на 2D *n*-каналах в гетеропереходах InGaAs/InP [59], InAs/GaSb [60] и InAs/AlSb [61]. В этом разделе рассмотрены основные экспериментальные факты, связанные с ЦКХЭ. Типичные зависимости $\rho_{xy}(N_s)$ и $\rho_{xx}(N_s)$ на *n*-канале Si-МДПС [1], где выразительным плато ρ_{xy} отвечают широкие и глубокие минимумы ρ_{xx} , приведены на рис. 1. Такие зависимости прослежены до H = 21 Тл [62]. При $T \neq 0$ плато имеют конечный наклон ($d\rho_{xy}/dN_s \neq 0$). В однородных структурах при условиях, близких к равновесным, минимум производной в области плато ($d\rho_{xy}/dN_s$)_{min} соответствует минимуму ρ_{xx} . Именно здесь различие между измеряемым и квантованным значениями ρ_{yy} минимально.

При понижении *T* наклон плато уменьшается, а его ширина растет. На рис. 7 показана зависимость $\rho_{xy}(H)$ для *n*-канала GaAs-ГС. Поражают большая протяженность плато и их совершенство. Несмотря на то, что в GaAs спиновое расщепление мало́ (*g*-фактор электрона $g_e \approx -0.4$), в зависимостях $\rho_{xy}(H)$ разрешаются все плато. Точность квантования ρ_{xy} на плато $\nu = 2$ составляет $\Delta \rho_{xy} / \rho_{xy} \lesssim 6 \cdot 10^{-8}$ в интервале $H \sim 1$ Тл [63].



Рис. 7. Зависимость холловского сопротивления ρ_H от H для гетероструктуры GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As; T = 8 мК [63].

При $T \lesssim 100$ мК вблизи середины плато ρ_{xx} настолько мало́, что установить удается только его верхнюю границу $\rho_{xx} \lesssim 10^{-7}$ Ом/ \Box (т. е. $\rho_{xx}/\rho_H \lesssim 10^{-11}$) [12]. В пересчете на объем 2*D*-слоя такая величина ρ_{xx} меньше известных величин сопротивления нормальных металлов при таких же *T*. Оценки величины ρ_{xx} в минимумах шубниковских осцилляций были получены с помощью релаксационных измерений намагниченности 2*D*-электронов в GaAs-ГС в режиме КЭХ [64]. Согласно этим оценкам, $\rho_{xx} \sim 10^{-10}$ Ом/ \Box при T = 0.4 К (в этих экспериментах минимальное ρ_{xx} , доступное измерению, было на 3 порядка ниже, чем в прямых измерениях). Измеренное ρ_{xx} отвечает трехмерному $\rho_{xx} \sim 10^{-16}$ Ом/см.

Качественное объяснение ЦКЭХ основывается на структуре энергетического спектра, описанной в конце п. І.2 (рис. 4). Уровень Ферми ζ перемещается при изменении N_s и H. При этом диссипативная σ_{xx} и недиссипативная σ_{xy} компоненты $\hat{\sigma}$ должны демонстрировать различное поведение. Хорошо известная причина состоит в том, что в бесконечном образце σ_{xx} определяется только электронами на уровне Ферми, а σ_H — электронами во всех заполненных состояниях (см., например, [65]). Поэтому когда ζ находится в щели подвижности, то $\sigma_{xx} = 0$ при T = 0. Согласно (15), при этом $\rho_{xx} = 0$ и ток протекает без диссипации. При $T \neq 0$ проводимость σ_{xx} отлична от нуля, но экспоненциально мала, так как определяется либо активационным возбуждением электронов и дырок в протяженные

состояния, принадлежащие соседним уровням Ландау, либо прыжками с переменной длиной [63]. Этим объясняются глубокие провалы в σ_{xx} и ρ_{xx} при $T \to 0$. Напротив, $\sigma_{H} \neq 0$ даже при T = 0, так как за счет дрейфа носителей в скрещенных полях **E** и **H** в нее вносят вклад протяженные состояния на всех уровнях Ландау, расположенных ниже ζ . На квантово-механическом языке дрейф возникает вследствие примешивания полем **E** к волновым функциям данного уровня Ландау волновых функций соседних уровней (т. е. виртуального, а не реального перехода на них). Так как при изменении ζ в пределах щели подвижности заполнение протяженных состояний остается практически неизменным ($T \to 0$), неизменным остается и σ_{H} , чем объясняется образование плато на зависимостях $\sigma_{H}(N_{c})$ и $\sigma_{H}(H)$. Но вопрос об абсолютной величине σ_{H} остается открытым.

Когда ζ проходит через протяженные состояния, положение кардинально меняется, так как вероятность диссипативных переходов теряет экспоненциальную малость. Величину σ_{xx} можно грубо оценить, если интерпретировать уширение спектра, вызванное локализацией, как столкновительное уширение $\sim \hbar/\tau$, связанное с конечным временем пробега τ (к этому сводятся самосогласованные расчеты транспортных коэффициентов [66]). Тогда носителям можно приписать фермиевский импульс $k_F \sim N_s^{1/2}$ и, поскольку локализационные эффекты велики, подчинить его критерию Иоффе-Регеля $k_F l \sim 1$ (l — длина свободного пробега). При таких предположениях формула Друде дает

$$\sigma_{xx} = N_s e^2 \tau / m \sim e^2 k_F (k_F / m) \tau \sim (e^2 / h) k_F l \sim e^2 / h.$$
(19)

Следовательно, по порядку величины $\sigma_{xx} \sim \sigma_H$ что находится в согласии с экспериментом. В этой же области σ_H быстро изменяется, так как возрастает или убывает количество протяженных состояний под уровнем Ферми.

Итак, эта схема описывает все основные качественные черты ЦКЭХ. Необъясненным остается только тот поразительный факт, что σ_H в области плато с высокой точностью равно qe^2/h , как будто все состояния в условиях полного заполнения уровня Ландау являются протяженными, несмотря на локализацию. В п. 3.2 будет показано, что теория объясняет этот факт.

Описанная схема указывает путь непосредственного экспериментального измерения отношения числа протяженных и локализованных состояний $N_{\rm ext}/N_{\rm loc}$. Действительно, согласно (3), $N_{\rm L} \propto H$, поэтому $N_{\rm ext}/N_{\rm loc}$ равно отношению ширины участка между плато к ширине плато в шкале H. Например, на рис. 7 это отношение составляет около 3 %.

Для объяснения ЦКЭХ предлагалась также «теория резервуара». Резервуаром являются примеси, расположенные слева от гетероперехода (рис. 3), которые обмениваются электронами с каналом путем их туннелирования через потенциальный барьер. Если плотность состояний в канале $D(\varepsilon)$ есть сумма δ -функций, то из условий термодинамического равновесия следует, что ν будет оставаться целочисленным в некоторых диапазонах изменения H [67]. Тогда $N_s/N_L = \nu = \text{const}$ и $\sigma_H = \text{const}$ [согласно (3) и (6)]. Теории резервуара недостаточно для описания ЦКЭХ, так как она не объясняет строгого квантования σ_H , приводит к слишком узким плато, накладывает слишком жесткие ограничения на $D(\varepsilon)$ и практически не применима к МДПС, в которых N_s фиксируется потенциалом затвора.

3.2. Теория целочисленного КЭХ

Главный вопрос, на который должна ответить теория ЦКЭХ, состоит в следующем: почему в условиях КЭХ проводимость σ_H кратна e^2/h ? Учитывая огромную точность, с которой этот факт установлен экспериментально, ответ должен основываться на фундаментальных законах, а не на приближенных или модельных расчетах. Дело в том, что погрешность, вносимая любыми модельными предположениями, значительно превышает 10^{-7} — экспериментально достигнутый предел точности.

Второй вопрос касается физических механизмов, лежащих в основе ЦКЭХ. Здесь наряду с фундаментальными принципами необходимы простые физические модели. Особенно существенны они для понимания того, каким образом в условиях, когда значительная (или даже подавляющая) часть носителей локализована (пп. 2.2 и 3.1), носители, остающиеся нелокализованными, приобретают способность поддерживать «полное» холловское напряжение, т. е. такое же, как все электроны при отсутствии локализации.

Существуют три подхода, которые могут претендовать на строгость (см. пп. 3.2.1—3.2.3).

3.2.1. Формула Кубо [68]

Она является общим выражением для тока как линейного отклика на внешнее пространственно однородное поле Е₀. Правильная формула для проводимости на плато $\sigma_{\mu} = q e^2 / h$ была получена из формулы Кубо Андо и др. [66] еще до экспериментального открытия КЭХ, а затем в ряде других работ [69–72]. Достоинство этого метода состоит в том, что q автоматически возникает в теории как полное число всех заполненных уровней Ландау, точнее подуровней, возникающих с учетом спинового и долинного расщепления. Недостаток состоит в том, что расчеты выполняются в одноэлектронном приближении, причем действующее поле **E** (**r**) отождествляется с **E**₀. В действительности же случайный потенциал в 2*D*-слое, в особенности его крупномасштабные флуктуации [11], вызывая перераспределение электронов, нарушают однородность электрического поля, и поэтому $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{E}_{_0}$ (значимость этого факта ясна из теории протекания [73]). Строгий подход требует учета различия $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и \mathbf{E}_{0} , а это заставляет включить в теорию межэлектронное взаимодействие. Теория, сформулированная таким образом, является последовательной, так как в ней рассматривается отклик взаимодействующей системы на внешнее поле Е,, которое однородно. Хотя вычисление тензора $\hat{\sigma}$ на столь общей основе является невозможным, квантование $\sigma_{\!\scriptscriptstyle H}$ на плато, к счастью, может быть доказано, как показали Ниу и др. [74]. К их доказательству мы вернемся в п. 4.2.2. Здесь отметим только формулу, полученную в одноэлектронном приближении Стржеда [65]. Холловская проводимость $\sigma_{H} = \sigma_{H}^{I} + \sigma_{H}^{II}$, причем

$$\sigma_{H}^{\mathrm{II}} = ec\partial N_{s}(\varepsilon) / \partial H \Big|_{\varepsilon = \zeta}, \tag{20}$$

где $N_s(\varepsilon)$ — концентрация электронов с энергией $\varepsilon \leq \zeta$. Когда ζ находится в щели плотности состояний, из (20) и (3) следует $\sigma_H^{II} = q e^2 / h$. При этом слагаемое σ_H^{II}

исчезает вместе с σ_{xx} . Рассматриваемая ситуация является бездиссипативной, а формула (20) — термодинамической.

3.2.2. Мысленные эксперименты

Аргументация, носящая общий характер, впервые предложена Лафлином [75]. Она основывается на двух положениях: калибровочной инвариантности и на том, что каждый уровень Ландау расщепляется на делокализованные и локализованные состояния и уровень Ферми лежит внутри щели подвижности.



Рис. 8. Схемы мысленных экспериментов.

Рассмотрим 2*D*-слой в геометрии рис. 8, *а*. Примем калибровку Ландау $A_x = -Hy$ для вектора-потенциала поля **H**. Прибавим к A_x пространственно однородное слагаемое δA , которое включается адиабатически медленно; оно не изменяет **H**. Соответствующий член в гамильтониане каждого из носителей имеет вид

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}Hy - \frac{e}{c}\delta A\right)^2,$$
(21)

и слагаемое с δA может быть уничтожено преобразованием

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\chi}, \ \chi = (e/\hbar c) x \delta A.$$
 (22)

При большом *L* можно воспользоваться периодическими граничными условиями

$$\psi(\mathbf{0},\mathbf{y}) = \psi(L,\mathbf{y}). \tag{23}$$

Преобразование (22) является калибровочным, если выполнено (23). Минимальное δA , удовлетворяющее этому условию, равно

$$\left(\delta A\right)_{\min} = \Phi_0 / L,\tag{24}$$

где Φ_0 — квант магнитного потока [формула (4)]. Таким образом, калибровочная инвариантность, т. е. независимость энергетического спектра от δA , должна иметь место при δA , кратном (δA)_{min}. В работе Лафлина [75] вместо прямоугольного образца (рис. 8, *a*) рассматривается лента (рис. 8, б). Тогда условие (24) обеспечивает непрерывность ψ (x, y) и ему отвечает калибровочный поток^{*} $\delta \Phi = \Phi_0$. Воспользовавшись известным соотношением ([3], § 115)

$$\delta \mathcal{H} = -\frac{1}{c} \int j \delta \mathbf{A} d\tau, \ d\tau = dx dy dz, \tag{25}$$

где $\delta \mathcal{H}$ — вариация полной энергии, с учетом (24) получаем

$$I = \frac{c}{L} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A} = \frac{c}{\Phi_0} \left(\delta \mathcal{H} \right)_{\min}.$$
 (26)

В (25) интегрирование производится по объему 2D-слоя. Поэтому формула (26) для полного тока *I* справедлива независимо от распределения **j** (*x*, *y*) по сечению.

Остается вычислить ($\delta \mathcal{H}$)_{min}. Вклад от носителей, находящихся в локализованных состояниях, равен нулю, так как их волновые функции быстро затухают и равны нулю при x = 0, L. Поэтому для них преобразование (22) всегда является калибровочным. Влияние δA на делокализованные состояния можно понять из (21). Так как δA входит в комбинации $Hy - \delta A$, то δA возмущает ψ -функции этих состояний так, что стремится сдвинуть их в направлении оси у. За этим можно проследить по точным решениям для свободных электронов, когда случайный потенциал $U(x, y) = 0,^{**}$ а при $U \neq 0$ — по анализу численных решений [76]. Вследствие калибровочной инвариантности энергетический спектр совпадает с исходным, когда $\delta A = (\delta A)_{min}$. Можно предположить по аналогии со свободными носителями, что при этом на каждом уровне Ландау одно состояние и, следовательно, один носитель выходят за край образца, и одновременно одно состояние и один носитель входят в него через противоположный край. Если ζ находится в щели подвижности, то при $T \rightarrow 0$ диссипация отсутствует, и энергия, связанная с переносом носителя через образец, равна $eV_{_{H}}(V_{_{H}}-$ холловская разность потенциалов). Поэтому если ζ находится между делокализованными состояниями, принадлежащими q-му и (q + 1)-му квантовым уровням, то $(\delta \mathcal{H})_{min} = q e V_{\mu}$ и

$$I = \frac{c}{\Phi_0} q e V_H = q \left(e^2 / h \right) V_{H^{\sigma} H} = q \left(e^2 / h \right).$$
(27)

Если отказаться от сделанного выше предположения, то из калибровочной инвариантности следует только, что в результате прохождения кванта потока Φ_0 система возвращается в исходное состояние, и единственным результатом может быть только перенос нескольких электронов с одного края образца на другой. Тогда снова приходим к формуле (27), в которой, однако, *q* не связано с числом заполненных уровней.

В этих рассуждениях предполагается, что области, где процессы идут недиссипативно и диссипативно, пространственно разделены: это — внутрен-

^{*} Под калибровочным понимается поток, не изменяющий **H** в образце. Поэтому влияние этого потока на систему является эффектом Ааронова–Бома.

^{**} Смещение вдоль у легко понять классически. Потенциалу δA отвечает электрическое поле $\mathbf{E} = -\delta \dot{\mathbf{A}}/c$, создающее холловскую скорость $\dot{y} = v_{_H} = H\delta \dot{A}$. Смещение $\Delta y = H(\delta A)_{_{\min}} = \lambda^2 (2\pi/L)$ равно расстоянию между максимумами соседних осцилляторных ψ -функций Ландау (т. е. функций, аргументы которых различаются на $\Delta k_x = 2\pi/L$).

няя область и края образца. К первой применимо (26), а во второй происходит восстановление теплового равновесия после прохождения калибровочного потока. Особенность аргументов Лафлина состоит в том, что они претендуют на обоснование формулы (27) в условиях, когда ζ находится в щели подвижности, даже если при этом $D(\zeta) \neq 0$. Это существенно в связи с экспериментальными результатами, рассмотренными в п. 2.2.

Другой мысленный эксперимент основывается на рассуждении Вайдома и Кларка [77]. В нем используются материальные уравнения $\sigma_H \neq 0$, $\sigma_{xx} = 0$ и формула (3). Рассмотрим геометрию диска Корбино (рис. 8, ϵ). При $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ тангенциальное поле $\mathbf{E}(t)$ у наружного электрода выражается по закону Фарадея через магнитный поток Φ

$$2\pi RE(t) = (1/c)(d\Phi/dt).$$
(28)

и вследствие dQ = Idt, где Q — накапливаемый заряд, для σ_{μ} получается

$$\sigma_{H} = cdQ/d\Phi = cd(qN_{L})/dH = qe^{2}/h, \qquad (29)$$

если ζ лежит в щели плотности состояний. Формула (29) дает независимый метод измерения σ_{μ} , как $\sigma_{\mu} = cdQ/d\Phi$.

Убедительность выводов, основанных на обоих мысленных экспериментах, особенно втором, связана с тем, что в них не используются микроскопические модели. Оборотная сторона состоит в том, что они не способствуют прояснению физических механизмов.

3.2.3. Ренормгруппа

Два разных явления — квантование $\sigma_H \neq 0$ в 2*D*-электронном газе в сильном магнитном поле ($\omega_c \tau \gg 1$) и слабая локализация в этой же системе при H = 0 — должны быть описаны единым образом. Слабая локализация в 2*D*-системах [78, 79] (обзор см. в [48]) проявляется в том, что проводимость $\sigma(L)$ квадрата с ребром *L* падает с ростом ребра, когда *L* превышает *l* — длину свободного пробега. Слабая локализация является квантовым явлением и вызвана интерференцией рассеянных волн. Сначала убывание σ происходит медленно, поправки пропорциональны $\ln(L/l)$; при больших *L* ожидается экспоненциальное убывание. Математически зависимость $\sigma(L)$ определяется уравнением

$$d\sigma(L)/d\xi = \beta[\sigma(L)], \ \xi = (L/l), \tag{30}$$

которым описывается ренормировка σ при изменении L. Основной предпосылкой теории является зависимость функции Гелл-Манна—Лоу β исключительно от σ . Явный вид этой функции неизвестен; вычисляются только ее асимптотики. Начальное условие для (30): при $L \sim l$ проводимость равна значению, определяемому из кинетического уравнения.

Решающий шаг был сделан Пруйскеном и др. [80, 81]. В [80] было показано, что в лагранжиан теории поля, которая может быть поставлена в соответствие проблеме невзаимодействующих электронов в случайном поле в условиях $H \neq 0$, T = 0, независимо входят два «заряда» — σ_{xx} и σ_{xy} . Очень существенно, что в коэффициент при σ_{xy} входит интеграл, являющийся топологическим инвариантом.

Он принимает только целочисленные значения q, и само $\sigma_{_{xy}}$ входит в теорию только в комбинации $\exp\left\{2\pi i q \left(h/e^2\right)\sigma_{_{xy}}\right\}$. Последнее выражение периодично по $\sigma_{_{xy}}$ с периодом e^2/h . Наличие двух перенормирующихся величин («зарядов») позволило Хмельницкому [82] записать систему двух уравнений ренормгруппы, обобщающую (30), в которой функции Гелл-Манна—Лоу периодичны по $\sigma_{_{xy}}$, и предложить фазовый портрет системы на ($\sigma_{_{xx}}\sigma_{_{xy}}$)-плоскости. Так как ренормировка не может быть выполнена в явном виде, конструирование фазового портрета является экстраполяцией. Он представлен на рис. 9. Сходная картина была предложена Ливайном и Либби [83] и Пруйскеном [84, 85]. На рис. 9, *а* показана сетка сепаратрис, между которыми проходят траектории. Ход траекторий, схематически показанный на рис. 9, *б*, несет в себе основное содержание скейлинговой теории ЦКЭХ. Теория претендует на универсальность фазового портрета.



Рис. 9. Фазовый портрет на плоскости ($\sigma_{xx}\sigma_{xy}$) в теории КЭХ в рамках двухзарядного скейлинга [82]. *a* — расположение сепаратрис; δ — ход интегральных кривых.

За начало каждой траектории должна быть выбрана точка, соответствующая пространственному масштабу $L \sim l$, где $\hat{\sigma}$ может быть оценено по формуле Друде

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_s \tau / m}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \ \sigma_H = \frac{e^2 N_s \tau}{m} \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2}.$$
(31)

Если $N_s \sim N_L$, то $e^2 N_s \tau/m \sim (e^2/h)\,\omega_{\rm c} \tau$, т. е. в начальных точках $\sigma_{_{xx}} \lesssim e^2/h$ при всех $\omega_{\rm c} \tau$. Только если $\nu = N_s/N_L \gg 1$, начальная точка может уйти далеко вправо.

Основные утверждения таковы ($T \to 0$). Вся картина периодична по σ_{xy} с периодом e^2/h . Единственные точки, в которых при $L \to \infty$ могут оканчиваться траектории общего вида, это устойчивые узлы A. Точкам окончания траекторий отвечают квантованные значения $\sigma_H = q(e^2/h)$. В этой теории строгость квантования обеспечивается существованием упомянутого выше топологического инварианта. Система имеет полуустойчивые точки — седла C, в которых оканчиваются траектории с $\sigma_H = (e^2/h) (q + 1/2)$; в них σ_{xx} достигает максимума $\sigma_{xy} \sim e^2/h$. Система попадает в одну из точек C, когда ζ находится в особой точке спектра, отвечающей сингулярному протяженному состоянию [81]. Сколь угодно близко от седел проходят траектории, ведущие к двум соседним квантованным значениям σ_{xy} . Приближенный расчет для σ_{xx} в точке *C* дает $\sigma_{yx} \approx (1, 4/\pi) (e^2/h)$ [86].

Итак, при $T \to 0$ зависимость $\sigma_H(H)$ должна превращаться в систему плоских ступеней с переходными областями, ширина которых стремится к нулю, а $\sigma_{xx} \sim e^2/h$ должно быть отлично от нуля лишь в этих бесконечно сужающихся переходных областях. Слабая локализация (при H = 0) вписывается в эту картину. Соответствующая ей траектория — прямая $\sigma_{xy} = 0$, она приводит в локализованное состояние. Вопрос о том, как при $H \to 0$ исчезают протяженные состояния, обсуждается в п. 3.2.5.

Подход, основанный на методе ренормгруппы, является формализованным. Поэтому особенно желательно отыскать пути сравнения выводов, следующих из него, с экспериментом, например, экспериментального нахождения формы сепаратрис. Изменение *L* в реальных экспериментах, по-видимому, невозможно. Но при *T* ≠ 0 траектории останавливаются обычно не на *L*, а на меньшей длине $L_{\rm эф\phi} < L$, на которой вследствие неупругих соударений теряется фазовая когерентность. Длина $L_{\rm эф\phi}$ зависит от *T*, *H*, *N*_s и других величин. Изменяя их, можно строить фазовые портреты на $\sigma_{xx}\sigma_{xy}$ -плоскости. По ним можно судить о том, подтверждается ли картина скейлинга в целом, и если да, то каковы форма и свойства сепаратрис *AC* (рис. 9, *a*).

Недавняя работа Вея и др. [87] целиком посвящена экспериментальной проверке скейлинга в режиме ЦКЭХ. Использовался электронный канал InGaAs/InP-ГС. Предполагая, что неупругое рассеяние формирует $L_{a\phi\phi}$, авторы строят фазовый портрет, используя результаты измерений $\sigma_{xx}(T)$ и $\sigma_{xy}(T)$ (рис. 10). Штриховые линии отвечают области 4.2–10 К, в которой уменьшение T сопровождается обычным ростом осцилляций Шубникова–де-Гааза вследствие изменения фермиевского распределения. Скейлинговая область, где определяющей является зависимость $L_{a\phi\phi}(T)$, лежит ниже по T (0.5–4.2 К). Ей отвечают участки фазовых траекторий, показанные сплошными линиями. Они при $T \rightarrow 0$ (и, следовательно, при $L_{a\phi\phi} \rightarrow \infty$) устремляются к точкам (0, e^2/h) (0, $2e^2/h$) и (0, $3e^2/h$). Для проверки скейлинга особенно существенно, что в области $e^2/h < \sigma_{xy} < 2e^2/h$ траектории располагаются симметрично относительно линии $\sigma_{xy} = 3/2$ (e^2/h). Результаты Вея и др. [87] согласуются с картиной двухзарядного скейлинга.

Возможность нахождения формы сепаратрис *AC* по экспериментальным данным в значительной мере зависит от того, являются ли сепаратрисы устойчивыми (притягивающими) или нет. В первом случае точки окончания траекторий будут располагаться вблизи сепаратрис, выписывая их форму, которая должна быть периодична по σ_{xy} . Интересно, под каким углом γ сепаратрисы *AC* подходят к оси σ_{xy} . Возможны $\gamma = 0$ [83–85], $0 < \gamma < \pi/2$ [82] и $\gamma = \pi/2$. Хмельницкий [82] впервые проанализировал с такой позиции экспериментальные данные, основываясь на результатах [88] по Si-МДПС. Из них следует, что сtg $\gamma \approx 0.3$, а сепаратриса *AC* притягивающая. Однако противоречия между результатами различных авторов [44, 87–90], полученными в области малых σ_{xx} , не позволяют сейчас остановиться на определенном выводе. Дилемма такова: либо картина скейлинга в этой области неверна, либо имеющиеся данные недостаточно достоверны для ее проверки.



Рис. 10. Фазовый портрет на плоскости ($\sigma_{xx}\sigma_{xy}$), полученный экспериментально на InGaAs/InPгетероструктуре [87]. Кривые построены по зависимостям $\sigma_{xx}(T)$ и $\sigma_{xy}(T)$ в интервале температур от 10 до 0.5 К. Скейлинговое поведение обнаруживается в низкотемпературной области (сплошные линии).

Недавно Андо [91] выдвинул возражения против картины двухзарядного скейлинга, основываясь на численном расчете для конечных систем. Для каждого значения энергии ε вычислялось σ_{xx} через число Таулесса [92] и σ_{xy} по формуле Кубо. Оказалось, что результаты для $\sigma_{xx}(\varepsilon, L)$ и $\sigma_{xy}(\varepsilon, L)$ укладываются на $\sigma_{xx}\sigma_{xy}$ -плоскости на одну кривую, похожую на полуэллипс. Каждому ε на этой кривой отвечает точка, медленно перемещающаяся вдоль кривой с ростом L. Наличие такой жесткой связи между σ_{xx} и σ_{xy} не в духе концепции двухзарядного скейлинга, согласно которой можно было бы ожидать независимости σ_{xx} и σ_{xy} (при наличии двух параметров — ε и L). Предположение, что кривая, найденная в [91], является сепаратрисой AC (рис. 9), причем траектории аномально быстро притягиваются к ней, к сожалению, не решает проблему, так как кривые для уровней n = 0 и n = 1 сильно различаются между собой, что в рамках сделанного предположения означает отсутствие периодичности по σ_{xy} . Путь решения возникшей проблемы пока не ясен.

Выше кратко обсуждены несколько теорий ЦКЭХ. Они дают формальное описание КЭХ, но ни одна из них не дает простого ответа на вопрос, сформулированный во втором абзаце п.3.2. Между тем получить его очень желательно для качественного понимания явления, и здесь могут оказаться полезными конкретные модели. Существуют две предельные ситуации — δ -функционные примеси и плавный квазиклассический потенциал. Первая модель была реше-

на Пранже [93] применительно к изолированной примеси. Было показано, что убывание холловского тока, связанное с образованием одного локального состояния, компенсируется приростом тока, который переносится остальными электронами. Вывод согласуется с результатами, следующими из формулы Кубо, но расчет ничего не добавляет к пониманию физического механизма. Более плодотворна модель плавного потенциала.

3.2.4. Квазиклассическое приближение

Оно было использовано в ряде работ (см., например, [69, 72, 94-96]). Мы ограничимся оценками, основанными на геометрическом подходе Иорданского [94]. Если потенциал U(r) квазиклассический, то в 2D-системе существует единственное значение энергии, при котором возникает протекание. Хорошо известная картина напоминает шахматную доску, на которой темным клеткам отвечает U > 0, светлым — U < 0, а протекание происходит по демаркационным линиям. Картина изменяется в конечном электрическом поле Е || у. Области локализации «электронов» и «дырок», окруженные линией $U - E_V = \text{const}$, сохраняются, но они уже не заполняют всю плоскость: между ними возникают узкие «ленты», в которых размещаются изоэнергетические траектории, инфинитные в холловском направлении (т. е. \perp E). Очевидно, что линий, инфинитных в Eнаправлении, быть не может из-за сохранения энергии и финитности U (поэтому $\sigma_{_{\rm XX}}=0$). Схема вывода такова. Ширина каналов $l_{_E}$ определяется условием $l_{E} |\partial U / \partial \mathbf{n}| = e |\mathbf{E}| L (\mathbf{n} - \text{нормаль к эквипотенциали}). Здесь левая часть — перепад U$ на ширине канала, а правая — перепад потенциала поля Е на шаге структуры L. В квазиклассическом пределе, когда $\lambda(H) \ll L$, скорость дрейфа центров орбит Ландау в направлении, перпендикулярном $\partial U/\partial \mathbf{n}$, равна $v_{\mu} = (c/eH)|dU/\partial \mathbf{n}|$ [97]. Поэтому проводимость

$$\sigma_{H} = e v_{H} l_{E} N_{s} / L |E| = e c N_{s} / H,$$

что при $\nu=q$, т. е. $N_{s}=qN_{L}$, дает $\sigma_{_{H}}=q(e^{2}/h)$.

Резюмируем возникшую картину формирования холловского тока. Скорость холловского дрейфа v_H не зависит от **E**: она определяется величиной $\nabla U(r)$. При **E** = 0 есть единственная открытая траектория, которая при **E** \neq 0 и распадается на систему лент шириной ∞ |**E**|. В слабом поле **E** ток переносит небольшая доля электронов — те из них, которые находятся вблизи уровня поотекания. Это рассмотрение показывает, как случайный потенциал может увеличить эффективную v_H . Полуклассическое рассмотрение не учитывает эффекты когерентности, существенные в КЭХ; тем более интересно провести аналогию между одним уровнем протекания и одной энергией существования протяженных состояний (пп. 3.2.3 и 3.2.5). В сильных полях $eE \sim |\partial U/\partial \mathbf{n}|$ исчезают замкнутые траектории, а с ними и локализация.

3.2.5. Протяженные состояния и краевые токи

Выше предполагалось, что холловский ток является поверхностным, т. е. распределен по всей площади 2*D*-слоя. Между тем в последнее время активно обсуждается точка зрения, что этот ток является краевым, т. е. течет вдоль 1*D*-края этого слоя. Этот вопрос нуждается в специальном рассмотрении. Мы обсудим его, а затем остановимся на некоторых проблемах, связанных с протяженными состояниями.

К краевым токам в теории ЦКЭХ приходят двумя путями, причем рассматривается только предельный случай $\sigma_{yy} = 0$.

Первую группу аргументов легче всего понять, исходя из (20). Когда ζ находится в щели плотности состояний, изменение N_s может происходить исключительно за счет изменения N_L . Но из-за наличия щели и сохранения числа квантовых состояний N_L изменяется при изменении H только благодаря приходу уровней с краев образца. На расстоянии $\sim \lambda(H)$ от края Γ энергия квантовых состояний быстро возрастает вследствие граничного условия $\psi_{\Gamma} = 0$ для волновой функции; обычный закон квантования $\varepsilon_n = \hbar \omega_c (n+1/2)$ у края сильно нарушен. Применяя (25) к состоянию n, локализованному у края, легко получить

$$I_n = -c \left(\partial \varepsilon_n / \partial \Phi \right), \tag{32}$$

где I_n — ток, текущий вдоль касательной к Г. Если работать в геометрии Корбино и пропустить вдоль оси симметрии квант калибровочного потока $\delta \Phi = \Phi_0$, то для внутренних состояний $I_n = -c \, \delta \varepsilon_n / \delta \Phi = 0$, а для краевых $I_n \sim e \omega_c$. Существование тока I_n было отмечено Гальпериным [46]. Если принять, что разность потенциалов на электродах V_H совпадает с разностью химических потенциалов у двух границ слоя, то алгебраическая сумма поверхностных токов дает полный холловский ток с квантованным значением σ_{xy} . Возможность обнаружения краевых токов по осцилляциям магнитной восприимчивости обсуждалась в [98].

Вторая группа аргументов основывается на формальном преобразовании формулы Кубо. После интегрирования тока по всей площади слоя, которое производится для исключения диамагнитных токов, холловский ток удается выразить в виде интеграла по контуру Г.

Роль краевых токов в КЭХ явилась в последнее время предметом дискуссии. Утверждается, что весь холловский ток является краевым [84, 85, 99] либо, что он является смешанным, но квантуется за счет краевой компоненты [100]. В [84, 85] особо подчеркивается, что в противоположность диамагнетизму в КЭХ реальным является краевой ток, а фиктивным — поверхностный. Напротив, в работах [72, 95, 101] как реальный рассматривается поверхностный ток, а сведение его к краевому расценивается как результат формальных операций. Поскольку холловский ток является макроскопическим транспортным током, вопрос о его распределении вполне реален (в отличие от токов намагничивания) и может быть решен экспериментально. Поэтому вопрос о выяснении его локализации должен ставиться конкретно: применительно к определенным экспериментальным ситуациям. При этом надо иметь в виду, что материальные уравнения (15) являются предельно вырожденными, что может создавать неопределенность в ответах. Например, полная холловская ЭДС V_{μ} не зависит от распределения тока по сечению, и поэтому распределение тока в таких экспериментах не может быть найдено. Оно может зависеть при одинаковой геометрии образца от способа возбуждения тока.

Отличительной чертой КЭХ является недиссипативность, поэтому токи должны протекать вне диссипативных областей. Поэтому мы считаем, что токи являются поверхностными и материальные уравнения (15) верны, причем они должны рассматриваться как предел уравнений с $\sigma_{yy} \rightarrow 0$. Краевые холловские

токи с глубиной проникновения $\sim \lambda$ могут возбуждаться, но будут затухать, так как на этом масштабе состояния, принадлежащие различным зонам Ландау, вырождены по энергии [46], и поэтому на краю должна существовать диссипация [75]. Из формул, в которых выполнено интегрирование по площади слоя, выводов о распределении тока, естественно, получать нельзя. Между тем оба мысленных эксперимента (п. 3.2.2) основываются на прохождении холловского тока по поверхности, два «берега» которой не соединены между собой никаким «краем». Мы не будем повторять аргументы в пользу существования поверхностного тока, которые содержатся в [46, 102]. В заключение отметим, что протекание полевого тока вдали от краев, свидетельствующее о наличии протяженных состояний, уже установлено экспериментами Эберта и др. [103], Зенга и др. [104], Сайчела и др. [105], выполненными на слабо неоднородных образцах, и что второй мысленный эксперимент допускает экспериментальную реализацию. Фактическое распределение плотности тока должно определяться для каждой конкретной геометрии эксперимента путем решения уравнений Максвелла совместно с материальными уравнениями (15) (п. 3.3).

Поверхностные токи возможны лишь при наличии протяженных состояний (пп. 2.2 и 2.3). Недавно Аоки и Андо [106–109] численными методами исследовали поведение длины локализации $L(\varepsilon)$ в сильных магнитных полях при $\varepsilon \to \varepsilon_{\text{ext}}$. Было показано, что локализация экспоненциальная и на каждом уровне Ландау $L(\varepsilon)$ расходится только при одном ε ; на рис. 5, δ качественно показана полученная зависимость [106]. Она аппроксимируется законом $L(\varepsilon) \infty |\varepsilon - \varepsilon_{\text{ext}}|^{-s}$, критический индекс $s \leq 2$ для уровня Ландау n = 0 (согласно Хиками [110], $s \approx 1.9$) и s ≤ 4 для n = 1 [111, 112]. Хотя *s* является одинаковым для рассеивателей размером $d \ll \lambda$ и $d \gg \lambda$, в первом случае $L(\varepsilon)$ заметно больше, чем во втором. Поэтому в образцах с рассеивателями, имеющими существенно различные пространственные масштабы, в промежуточной области температур может наблюдаться частичная локализация; в таком духе интерпретированы экспериментальные результаты [113].

Остановимся еще на том, что происходит с протяженными состояниями при уменьшении $\omega_c \tau$. При $\omega_c \tau \to 0$ их быть не должно [78]. Но они не могут просто исчезнуть. Естественно считать, что по мере уменьшения $\omega_c \tau$, когда провалы в $D(\varepsilon)$ замываются, энергия протяженных состояний возрастает и они последовательно выходят на уровень Ферми [46]. Тогда каждому прохождению протяженного состояния через ζ должен отвечать скачок σ_H на e^2/h . Так как теория подобия претендует на применимость при всех значениях $\omega_c \tau$, то перенормированную кривую $\sigma_H(H)$ можно приближенно представить себе как асимметричную ступенчатую пирамиду (рис. 11), вписанную в кривую Друде $\sigma_H(H)$ [формула (31)] [114]. Середины скачков должны попадать на полуцелые значения $(h/e^2)\sigma_H$; каждому скачку отвечает пик σ_{xx} . Выражая в (31) N_s через ζ , согласно $N_s = m\zeta/h\hbar$, и записывая условия выхода уровня q-го протяженного состояния (один на каждый уровень Ландау) на уровень Ферми ζ

$$\sigma_{H} = \frac{e^{2}}{h} \frac{\zeta}{\hbar\omega_{c}} \frac{1}{1 + (\omega_{c}\tau)^{-2}} = \frac{e^{2}}{h} (q + \frac{1}{2}), \ \varepsilon_{q} = \zeta ,$$
(33)

получаем [114, 115]

$$\varepsilon_{q} = \hbar\omega_{c} \left(q + \frac{1}{2} \right) \left[1 + \left(\omega_{c} \tau \right)^{-2} \right].$$
(34)



Рис. 11. Зависимость компонент тензора проводимости от *H* в условиях КЭХ. Сплошная линия — лоренцева кривая. С уменьшением магнитного поля при каждом скачке σ_{xy} одно протяженное состояние входит под уровень Ферми (*H* справа от максимума лоренцевой кривой) или выходит из-под него (*H* слева от максимума).

Итак, если двигаться от квантового предела в сторону уменьшения H, число заполненных уровней Ландау (и протяженных состояний) растет, пока выполняется неравенство $\omega_c \tau \gtrsim 1$. Появлению нового уровня отвечает всплеск σ_{xx} — осцилляция Шубникова–де-Гааза. Максимальное число уровней ~ $\zeta \tau/\hbar$. При дальнейшем убывании $\omega_c \tau$ уровни по одному уходят за уровень Ферми; каждому событию должен отвечать всплеск на кривой σ_{xx} . Эти осцилляции предсказаны в [114], но еще не наблюдались экспериментально; последняя из них отвечает $\omega_c^{-1} \sim \zeta \tau^2/\hbar$. Между добавочными максимумами σ_{xx} должны существовать низкополевые плато σ_{xy} . После выхода последнего протяженного состояния наступает слабая локализация [48].

3.2.6. Почему КЭХ является свойством 2D-систем?

Полезно в виде краткого резюме выделить те свойства 2*D*-систем, которые ответственны за ЦКЭХ.

Размерное квантование в направлении *z* делает спектр электронов двумерным. Благодаря этому в результате последующего магнитного квантования спектр становится нуль-мерным, т. е. дискретным с бесконечной кратностью вырождения (п. 3.2.3). Чтобы создать цельную картину, удобно обобщить задачу, рассмотрев 2*D*-кристалл с периодическим потенциалом *U*(*x*, *y*). Элементарная ячейка выбирается так, что магнитный поток Φ через нее равен $\Phi = \Phi_0 \times$ рациональное число. Потенциал *U* снимает вырождение, но щели в спектре сохраняются, а важно именно это. На рис. 12 схематически показаны два предельных случая: *U*(*x*, *y*) $\ll \hbar \omega_c$ и *U*(*x*, *y*) $\gg \hbar \omega_c$. В первом случае каждый уровень Ландау распадается на несколько подзон (рис. 12, *a*). Когда одна или несколько подзон заполнены (ζ в положениях 1, 2 или 3), то $\sigma_H = (e^2/h) s$ (*s* – целое).Таким образом,

2D-кристалл, не имеющий частично заполненных зон (точнее — подзон), является не диэлектриком, а холловским проводником с квантованным σ_H [116]. Это происходит в результате смешивания электрическим полем различных уровней Ландау. Во втором случае исходная 2D-зона распадается на подзоны под действием поля **H** (рис. 12, б). Когда ζ находится в положении 1 или 2, то $\sigma_H \neq 0$, и мы снова встречаемся с холловским проводником без частично заполненных подзон. Только если заполнены все подзоны (позиция 3), то s = 0 и $\sigma_H = 0$, так как вклад от отдельных подзон полностью сокращается [116]; складывается обычная диэлектрическая ситуация. Плато возникают вследствие того, что в несовершенном кристалле с 2D-спектром в каждой подзоне токонесущими являются состояния вблизи определенной энергии, величина σ_H остается неизменной (т. е. квантованной), пока сохраняются щели.



Рис. 12. Спектр 2*D*-системы при наличии периодического потенциала и магнитного поля. *а* — расщепление уровня Ландау в слабом периодическом потенциале, *б* — расщепление 2*D*-зоны при наложении магнитного поля.

В 3*D*-случае спектр, за исключением обычных диэлектрических щелей, является сплошным. Поэтому ситуации, изображенные на рис. 12, не возникают (за исключением случая 3, рис. 12, δ), и ζ все время находится в непрерывном спектре. При этом $\sigma_{\mu} \neq 0$ и непрерывно меняется с изменением ζ .

Особый случай возникает, если зона трехмерна, но ее ширина в направлении k_z мала в сравнении с $\hbar\omega_c$. Такая система ведет себя как квазидвумерная, и в ней возможно квантование σ_H . К таким квазидвумерным системам относятся сверхрешетки с квантовыми ямами. ЦКЭХ на такой сверхрешетке недавно наблюдался [117].

3.3. Распределение поля и тока

Материальные уравнения (15) приводят к нетривиальной картине распределения **E**(**r**) и **j**(**r**). Обычно надо рассматривать не предельную систему (15), а вводить конечное σ_{xx} , полагая $\eta = \sigma_{xx}/\sigma_H \ll 1$. Но некоторые заключения удобно делать непосредственно, исходя из (15). Хотя V_H практически не зависит от пространственного распределения **E** и **j**, выявление этих зависимостей важно для понимания механизма КЭХ, условий пробоя КЭХ, погрешности в экспериментальном измерении e^2/h и т. д.

Рассмотрим образец произвольной формы (рис. 13, *a*) с токовыми (*s* и *d*) и холловскими (*A* и *B*) контактами; протекающий ток *I*. Контакты *s* и *d* считаем

идеальными, поэтому на каждом из них потенциал $\varphi = \text{const}$ и **E** параллельно нормали **n** к контакту. На свободных краях (**jn**) = 0 и вследствие (15) **E** || **n**; следовательно, $\varphi = \text{const}$. Но так как $V_H \neq 0$, это возможно лишь при наличии скачков φ на краях контактов.



Рис. 13. Распределение поля **E** и плотности тока **j** в режиме КЭХ. a – поле на поверхности холловского проводника произвольной формы; δ – линии тока (эквипотенциали) в прямоугольном холловском проводнике.

Распределение Е вдоль края образца показано стрелками на рис. 13, а. Сингулярными являются точки *a*′и *b*, в которых φ терпит разрыв. При обращении **H** сингулярности переместятся в точки *а* и *b*'. Из рис. 13, *а* видно, что V_{sd} равно разности потенциалов между свободными краями образца, т. е. $V_{sd} = V_{H}$. В условиях КЭХ экспериментально наблюдались выполнение этого равенства [118-120] и отсутствие разности потенциалов между зондами А-А' либо В-В' [51, 53]. Поскольку $V_{_{\!H}}$ квантовано, то квантовано и $V_{_{\!sd}}$. Квантование сопротивления при пропускании тока через измерительные (точечные) контакты, например, через пару А-В (рис. 13, а), наблюдали Фэнг и Стайлс [120], а квантование проводимости — Пауэлл и др. [121]. Сопротивление любой пары граничных измерительных контактов в режиме КЭХ квантовано независимо от формы и размера контактов, а также их расположения на краях образца [120, 122]. При наличии на идеальном холловском проводнике ($\sigma_{_{xx}}=0$) системы контактов есть возможность коммутировать их так, что результирующее сопротивление будет заданной рациональной дробью $(h/e^2)(k/m)$ (k, m — целые). Это может оказаться полезным при конструировании электрических цепей, содержащих контакты обычных и холловских проводников.

Феноменологическая теория распределения **E**(**r**) и **j**(**r**) строится с η (**r**) = const \ll 1. Уравнения div **j** = 0 и rot **E** = 0 совместно с (13) приводят к уравнению $\Delta \varphi = 0$. Его решение для прямоугольного образца получено Рэнделом и Гирвином [123]. На свободных ребрах вблизи углов возникают сингулярности

Е типа $y^{(\eta-1)}$ (у — координата вдоль ребра). Ход эквипотенциалей согласуется с предложенным ранее [124] (рис. 13, δ). Аналитический вид особенности потенциала φ нашли Усов и Улинич [125]; в полярных координатах

$$\varphi(\mathbf{r},\theta) = \varphi_s - \frac{I}{\sigma_{xx}} \mathbf{r}^s \sin(\theta s), \ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}s\right) = \eta.$$
(35)

Она приводит к особенности в **E**, которая согласуется с полученной в [123], причем $I/\sigma_H = V_{sd}$. Строгий результат [125] для точечных контактов при $\eta = 0$: $I = \sigma_H \sigma_{\varphi} (\sigma_{\varphi} -$ скачок потенциала на крае образца при прохождении через токовый контакт). Он получается из уравнений (15). Для этого достаточно приравнять ток, втекающий в точку *A*, полному току через контур, показанный штриховой линией на рис. 13, *a*. Так как формула (35) в пределе $\eta \to 0$ дает такое же соотношение между током через сингулярную угловую точку и скачком потенциала на ней, то сингулярный конец протяженного контакта ведет себя как точечный контакт.

Таким образом, феноменологическая теория дает резко неоднородное распределение тока вблизи контакта, причиной которого является закорачивающее действие контакта. Но это закорачивание при $\eta = 0$ не изменяет V_H . Для сильно вытянутых образцов ($L \gg 2W$) распределение тока в их средней части однородно по сечению (рис. 13, δ) [123].

Однако имеется ряд причин, по которым $\eta = \eta$ (**r**), т. е. не является константой. Некоторые из них должны проявляться даже в идеально однородных образцах. Объемный заряд, сосредоточенный в канале, создает неоднородное электрическое поле. Так, в геометрии рис. 13, *б* в средней части образца даже при выполнении условия $L \gg W$ холловское поле $E_x = E_x(x)$. Это поле наиболее актуально в ГС, где компенсирующий заряд удален от канала. Но в неоднородном электрическом поле плотность состояний отличается от N_L (3): возникает поправка $N_L (mc^2/eH^2) dE/dx$. Поэтому даже для целочисленного ν и $L/2W \rightarrow \infty$ плотность поверхностного заряда $\sigma = \sigma(x)$. Согласование зависимостей $E_x(x)$ и $\sigma(x)$ приводит к уравнению, имеющему симметричные решения для E_x : $E_x(x) = E_x(2W - x)$. Это обеспечивает существование симметричных решений для тока $j_y(x)$. Минимум j_y достигается в середине образца. Возрастание тока к краям образца происходит на масштабе $\sim (2W\nu e^2/\hbar\omega_c)^{1/2}$ [126]. Учет неоднородности **H**, создаваемой магнитным полем тока, усиливает концентрацию j_y у краев образца [127].

В работе Эберта и др. [103], в которой изучалось распределение потенциала $\varphi(x)$, неоднородность $j_y(x)$ вызывалась небольшой пространственной неоднородностью образца: $\eta = \eta(x)$, которая создавалась искусственно. Для этого в систему, содержащую GaAs-ГС, вводился затвор, наклоненный по отношению к каналу. Это обеспечивало перепад концентрации ≈ 2 % на ширине капала. Распределение регистрировалось системой зондов (рис. 14). В результате было установлено, что в слабых полях H, когда КЭХ отсутствует, ток j_y распределен однородно; в режиме КЭХ распределение $j_y(x)$ крайне неоднородно, значительная часть тока (\approx 90 %) течет между парой контактов вдали от границ образца; неоднородность распределения тока возрастает с ростом dN_s/dx . Эксперимент показал, что в условиях КЭХ $j_y(x)$ максимально там, где минимально σ_{xx} . Это понятно, так как эффективная проводимость $\sigma_{xx} = \sigma_{xx} + \sigma_H^2/\sigma_{xx} \approx \sigma_H^2/\sigma_{xx}$.

 $\sigma_{_{xx}}(\zeta)$ в области плато $\sigma_{_H}$ является экспоненциально сильной, столь же сильной является и зависимость $\sigma_{_{xx}}$ от x. В эксперименте [103] перемещение минимума $\sigma_{_{xx}}$ осуществлялось изменением H. Из рис. 14 ясно видно, что $\varphi(x)$ значительно перераспределяется, но только в пределах плато $V_{_{4-8}}$. Аналогичная картина была обнаружена Зенгом и др. [104]. Модельные расчеты для МДП структуры, в которой неоднородность концентрации в канале создается самим потенциалом $\varphi(x)$, выполнены в [128]. Полученная картина сходна с приведенной на рис. 14.



Рис. 14. Зависимость холловских напряжений от магнитного поля в режиме КЭХ. Данные для GaAs-ГС при $\nu = 4$. Напряжения между встроенными электродами, показанными на вставке, *V*, мВ: 1 - 4 - 5, 2 - 4 - 6, 3 - 4 - 7, 4 - 4 - 8.

Как и следовало ожидать, эксперименты [103, 104] не дают свидетельств в пользу существования краевых токов; это особо отмечается в [104].

3.4. Пробой квантового эффекта Холла

Пробой КЭХ обнаружен в результате исследований вольт-амперных характеристик $V_x = f(I_{sd})$ в области целочисленного квантования [129, 130]. Этот нелинейный магнитотранспортный эффект состоит в разрушении бездиссипативного протекания тока. Было обнаружено, что при критических плотностях полевого тока $j_{sd} > j_{th}$ диссипация в режиме КЭХ пороговым образом возрастает. Это проявляется в драматическом увеличении сопротивления ρ_{xx} и проводимости σ_{xy} . Иногда наблюдается также предпороговый рост σ_{xx} [129].

На рис. 15 приведена типичная зависимость напряжения V_x от плотности тока j_{sd} . Уровень Ферми расположен в центре щели между уровнями Ландау n = 0 и n = 1 [130]. При увеличении тока на 1 % выше пороговой величины $j_{th} \approx 0.56$ А/м электрическое поле E_x возрастает на 4 порядка. Вблизи порога пробоя отчетливо виден гистерезис.

При исследовании пробоя КЭХ установлено, что наибольшая величина j_{th} достигается в минимумах ρ_{xx} . Согласно [131], она не зависит от числа заполненных магнитных подзон. При увеличении *H* величина j_{th} возрастает [50]. С ростом температуры порог размывается и j_{th} уменьшается [131]. При пробое обнаружены большая неоднородность тока, сильный гистерезис и токовые неустойчивости (колебания тока и напряжения типа «белого» шума) [130].

Пробой КЭХ исследован на различных структурах (Si-МДПС и ГС) прямоугольной и кольцевой геометрий. При одинаковых условиях в кольцевых структурах пробой КЭХ наступает при существенно бо́льших (примерно на порядок) величинах *j*_{th}, чем в холловских мостах. Это дает основание для предположения, что механизмы пробоя в этих структурах различны. Естественной причиной этих различий может являться наличие в холловских мостах, у краев контактов, сингулярностей поля **E** и связанных с ними диссипативных процессов (п. 3.3). В дисках Корбино сингулярности **E** отсутствуют.



Рис. 15. Пробой квантового эффекта Холла[129]. Вольт-амперная характеристика, измеренная на GaAs–Al_{0.28}Ga_{0.72}As-гетероструктуре при H = 4.7 Тл и T = 1.4 К. На вставке показаны геометрия структуры и шубниковские осцилляции $\rho_{xx}(H)$. Для пунктирной кривой шкала E_x (В/см) увеличена в 5 · 10⁴ раза.

Общепринятая точка зрения на природу пробоя КЭХ сейчас отсутствует. Наиболее вероятными представляются три следующих механизма.

1) Фононный механизм: переход между электронными уровнями с испусканием или поглощением фононов. В [132] проанализированы переходы между разными уровнями Ландау. Выполнение законов сохранения происходит за счет наклона зон в холловском поле E_{μ} . Интенсивность этого процесса (типа черенковского) возрастает при приближении v_{μ} к скорости звука v_s как $\exp[-B/(v_{\mu} - v_s)^2]$. Хотя по величине j_{th} на порядок превышает экспериментальное значение [132], возможно, именно этот механизм реализуется в GaAs-ГС в геометрии Корбино, где пробой наблюдался [131] при $v_{\mu} \approx 1.3 \cdot 10^5$ см/с, что сравнимо с $v_s \approx 2.5 \cdot 10^5$ см/с. В [133] рассматриваются переходы внутри одного уровня Ландау, а выполнение законов сохранения обеспечивается плавным случайным потенциалом. Теория способна объяснить возникновение пробоя при $v_H < v_s$ как результат эффективного сужения образца из-за существования участков, не заполненных носителями. Прямое экспериментальное подтверждение обоих этих механизмов состояло бы в детектировании неравновесных фононов.

2) Инжекция горячих электронов из приконтактных областей [134]. Она возможна в холловских мостах из-за наличия сингулярностей поля **E** и плотности тока (п. 3.3). Согласно [134], горячие носители проникают во всю рабочую область; для GaAs-ГС их эффективная диффузионная длина ~6·10³ мкм. Их присутствие в рабочем канале детектировалось по шумам, значительно превышающим тепловые. По данным этих же авторов, изучавших холловские мосты с различным отношением L/W, j_{th} почти не зависит от E_H . Поэтому в данном случае фононный механизм пробоя исключен.

3) Перегревная неустойчивость [129, 135], связанная с нарушением баланса между энергией, полученной и отдаваемой электронами. Активационные забросы электронов в проводящие состояния на соседнем уровне Ландау могут привести к *S*-образности вольт-амперной характеристики [135]. Такая характеристика может объяснить резкость переключения, гистерезис, возникновение неустойчивости и шумов. Она может возникать как в кольцевой, так и в прямоугольной геометрии.

В литературе обсуждаются еще два механизма пробоя.

4) Возрастание числа протяженных состояний при увеличении поля E_H [131]. Такая перестройка спектра обсуждалась в п. 3.2.4 (см. также [95, 96]). Вызванное ею движение края подвижности приводит к его сближению с уровнем Ферми ζ . Пробой наступает, когда расстояние между ними становится сравнимо с *T*. Хотя эта модель качественно объясняет зависимость j_{th} от ζ и от *T*, а также наличие предпробойных токов, количественные оценки отсутствуют.

5) Эффект Зинера: туннелирование носителей между ближайшими заполненным и свободным уровнями Ландау [130]. Этот механизм действует, когда холловское поле E_{H} столь велико, что носитель набирает энергию, равную $\hbar\omega_{c}$, на расстояниях порядка магнитной длины λ . Для *n*-канала GaAs-ГС при H = 10 Тл такое туннелирование возникает, если $j_{th} \ge 0.6$ А/см, что почти на 2 порядка превосходит экспериментальные значения критических токов.

Исследования пробоя КЭХ актуальны в связи с прецизионными измерениями величины e^2/h и созданием квантового эталона сопротивления. Повышение точности связано с увеличением тока. Однако из-за пробоя КЭХ на масштаб тока возникают ограничения сверху. При прецизионных измерениях в режиме КЭХ оптимальные величины тока обычно не превышают 10 мкА в прямоугольных Si-МДПС и 25 мкА в *n*-каналах прямоугольных GaAs-ГС.

3.5. Метрологические приложения КЭХ

Клитцинг н др. [1] первыми продемонстрировали, что квантование холловского сопротивления можно использовать для прецизионного измерения зоммерфельдовской постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Наряду с эффектом Джозефсона, позволяющим определять отношение *e*/ħ, квантовый эффект Холла — новый яркий пример использования явления, обнаруженного в физике твердого тела, для определения универсальной мировой константы.

В квантовой электродинамике все величины могут быть выражены в виде разложения по степеням α . Поэтому повышение точности измерения постоянной Зоммерфельда α имеет принципиальное значение. Любые изменения в величине α неизбежно затрагивают величину других фундаментальных констант (например, гиромагнитного отношения, заряда электрона, постоянной Планка).

Квантовое холловское сопротивление $R_{\!_H},$ выраженное в системе СИ, и α связаны соотношением

$$R_{H} = \frac{\mu_{0}c}{2\alpha q} \approx \frac{25812.8...}{q} \text{ Om},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/м — магнитная проницаемость вакуума, $c = (299792458 \pm 1.2)$ м/с — скорость света в вакууме, q — целое число.



Рис. 16. Форма плато КЭХ с высоким разрешением [57]. Плато $\nu = 2$ для GaAs–Al_{0.3}Ga_{0.7}As-гетероструктуры; H = 8.2 Тл, T = 1.5 К; $I_{sd} = 13$ мкА.

Исследования Клитцинга и др. [1, 136] на Si-МДПС, где была достигнута точность определения величины h/qe^2 порядка 10^{-6} , стимулировали последующие работы, направленные на повышение измерительной точности. Результаты прецизионных измерений квантованных значений холловского сопротивления R_H приведены в табл. 1. Измерения абсолютных величин R_H ведутся по балансной схеме, причем опорное сопротивление калибруется в абсолютных единицах Ом. На рис. 16 показано, насколько уплощенным является холловское плато: относительная вариация ρ_{xy} составляет $\approx 6 \cdot 10^{-8}$ [57]. Это обеспечивает настолько же низкую относительную погрешность при измерении R_H . В данном случае плато имеет «неправильную» *U*-образную форму. Это тем не менее не влияет на точность квантования ρ_{xy} . Такие искажения формы плато часто встречаются, их обычно объясняют неоднородностью образцов.

Из данных табл. 1 для e^2/h и известного значения *с* следует $\alpha^{-1} = 137.035968$ (23). Достигнутая точность близко подходит к рекордному результату (но пока не превосходит его), полученному из сравнения экспериментально найденного отношения спинового н орбитального магнитных моментов электрона с расчетом этого отношения методами квантовой электродинамики [137].

Прецизионность абсолютных измерений α методом КЭХ ограничена неточностью эталона Ома в системе СИ ($\approx 10^{-7}$). По отношению к другим единицам в системе СИ (Ампер и Вольт) единица Ома устанавливается наиболее точно, так как определяется с помощью расчетного конденсатора Лампарда–Томпсона [138].

Таблица 1

Тип 2 <i>D</i> -структуры	q	<i>Н</i> , Тл	<i>Т</i> , К	$\frac{h}{4e^2}$, Ом	Литература
GaAs-ГС	1	8	1.5	6453.2044 ± 0.0023	[139, 140]
	2	8-9	4.2	6453.2005 ± 0.001	[141]
	2	8	1.5	6453.2009 ± 0.0007	[142]
Si-МДПС {	4	14	1.4	6453.198 ± 0.009	[136]
	4.8	10.5	0.5	6453.2005 ± 0.0022	[143]

Результаты прецизионных измерений величины *h/e*² по КЭХ

Обсуждается возможность использования КЭХ для создания абсолютного стандарта сопротивления. Точность относительных измерений холловского сопротивления уже сейчас достигает $1.7-10^{-8}$ [89, 144]. Однако пока не известны принципиальные ограничения на воспроизводимость абсолютной величины такого квантового резистора. Квантовый эталон сопротивления может стать удобным опорным сопротивлением благодаря относительной простоте воспроизведения. В целом прогресс метрологических приложений КЭХ зависит от установления физических причин, ограничивающих точность квантования холловского сопротивления в реальных 2D-системах.

4. Дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ)

Из пп. 3.1–3.4 следует, что основные свойства целочисленного КЭХ объясняются без привлечения взаимодействия между носителями. Действительно, энергетические щели в спектре, которые обнаруживаются в условиях ЦКЭХ (циклотронные, зеемановские, долинно-орбитальные), имеют одноэлектронное происхождение. Естественно предполагать, что эффекты межэлектронного взаимодействия проявятся наиболее ярко, когда взаимодействие электронов, принадлежащих одному уровню Ландау ($\sim e^2/\varkappa\lambda$, $\varkappa -$ диэлектрическая проницаемость), будет в минимальной степени ослаблено поляризацией других состояний. Это имеет место, когда $\nu \lesssim 1$ (низкие концентрации) и $e^2/\varkappa\lambda \ll \hbar\omega_c$ (сильное поле *H*). Последнее неравенство одновременно указывает на то, что необходимы температуры, низкие по сравнению с теми, при которых проявляется ЦКЭХ. Наконец, нужны совершенные образцы, в которых $e^2/\varkappa\lambda$ значительно превышает квантовую неопределенность в энергии \hbar/τ , связанную с рассеянием электронов на дефектах. Именно в этих условиях был обнаружен ДКЭХ.
4.1. Основные экспериментальные факты и физические механизмы

Первое экспериментальное наблюдение ДКЭХ принадлежит Тсую и др. [2]. При исследовании *n*-канала в высокосовершенной GaAs-ГС ($\mu \approx 10^5$ см²/В·с) авторы [2] обнаружили плато в $\rho_{xy}(H)$ и минимумы в $\rho_{xx}(H)$ при $\nu = 1/3$ и 2/3. На рис. 17 показано, как при понижении температуры на фоне типичной картины целочисленного квантования ρ_H в области $\nu < 1$ возникают новые особенности при $\nu = 1/3$ и 2/3. На рис. 17 отчетливо видно, и это является общим правилом, что минимумы в ρ_{xx} проявляются раньше, чем формируется соответствующее плато в ρ_{xy} . На структурах более высокого качества ($\mu \gtrsim 5 \cdot 10^5$ см²/В·с) при T = 140 мК было продемонстрировано, что точность, с которой квантуется $\rho_H u$ фиксируется положение минимума ρ_{xx} при $\nu = 1/3$, не хуже 10^{-4} , а сама величина $\rho_{xx}^{\min} < 1$ Ом/ \Box [145].



Рис. 17. Дробный квантовый эффект Холла в GaAs-ГС [2]. a — образец с $N_s = 1.23 \cdot 10^{11}$ см⁻² и $\mu_e = 9 \cdot 10^4$ см²/В·с; на вставке — геометрия холловского моста; δ — образец с $N_s = 3.06 \cdot 10^{11}$ см⁻² и $\mu_e = 4 \cdot 10^5$ см²/В·с.

Обнаруженное явление не ограничивается значениями $\nu = 1/3$ и 2/3. В последующих исследованиях, выполненных на разнообразных по совершенству GaAs-ГС ($\mu = 10^5 - 3 \cdot 10^6$ см²/В·с), наблюдались квантование $\rho_{xy}(H)$ и минимумы в $\rho_{xx}(H)$ и при других дробных значениях ν . Согласно обзору Тсуя [12], перечень таких значений ν , попадающих в область $\nu < 1$, содержит $\nu = 1/3$, 2/3, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 2/7, 3/7, 4/7, 4/9 и 5/9 (при $\nu = 4/9$, 5/9 и 1/5 наблюдались только особенности в производной $d\rho_{xx}/dH$). Обнаруженные дроби соответствуют значениям $\nu = q/p$, где q — целое, а p — нечетное целое число. С ростом p особенности в ρ_{xy} и ρ_{xx} становятся менее выраженными. В результате уменьшается точность, с которой идентифицируется дробь. В диапазоне $1 < \nu < 2$ (верхний спиновый подуровень) наблюдаются те же значения дробной части ν , хотя и с различиями в деталях [146]. Наблюдение ДКЭХ при $1 < \nu < 2$ показывает, что для возникновения этого явления не имеют принципиально важного значения направление спиновой ориентации электронов, а при $\nu > 2$ — принадлежность электронов только к низшему уровню Ландау.

ДКЭХ наблюдался и в других 2*D*-системах: в *p*-каналах GaAs-ГС [55, 147–149], в *n*-канале в Si-МДПС [20, 21, 150].

Было установлено, что беспорядок, связанный с присутствием значительных концентраций дефектов, разрушает ДКЭХ. Поэтому во всех случаях ДКЭХ наблюдался только на совершенных структурах, отличающихся большой подвижностью носителей заряда: для *n*- и *p*-каналов GaAs-ГС при $\mu_e > 10^5$ см²/В·с и $\mu_h > 3 \cdot 10^4$ см²/В·с, для *n*-каналов Si-МДПС при $\mu_e > 3 \cdot 10^4$ см²/В·с.

ДКЭХ естественно связать с возникновением новых электронных фаз во взаимодействующей системе носителей. Чтобы обеспечить бездиссипативное протекание тока ($\rho_{xx} \rightarrow 0$) и устойчивость электронных фаз при фиксированных факторах заполнения $\nu = q/p$, нужно предположить наличие в энергетическом спектре системы щелей $\Delta(\nu)$. В условиях ДКЭХ, как и в случае ЦКЭХ, величину щелей удается определить экспериментально по активационной зависимости $\rho_{yy}(T)$ [или $\sigma_w(T)$] в минимумах при соответствующих дробных ν . Измеренные значения $2w = \Delta$ при дробных ν (w — энергия активации) оказались существенно меньше, чем $\hbar \omega_c$, $g \mu_{\rm B} H$ и $\Delta_{\rm so}$. С ростом *р* масштаб *w* уменьшается. При фиксированном Н возрастание беспорядка (уменьшение подвижности) приводит к уменьшению w [151, 152]. С ростом Н щели расширяются. На n-канале Si-МДПС при фиксированном μ_{e} наблюдалось возрастание щели пропорционально обратной магнитной длине: $\Delta(\nu) \mid_{\mu = \text{const}} \infty \lambda^{-1} \infty H^{\frac{1}{2}}$ [152]. Этот результат полностью согласуется с представлением о том, что возникновение электронной фазы, ответственной за ДКЭХ, связано с кулоновским взаимодействием носителей. На n-канале GaAs-ГС наблюдалась более сложная, но также сублинейная зависимость от Н [153].

В области ДКЭХ, как и при целочисленном КЭХ, вольт-амперные характеристики линейны при $I_{sd} \! \rightarrow \! 0.$ Однако из-за малости щелей ограничения на величину полевого тока в условиях ДКЭХ ($I_{sd} \! < \! 10^2$ нА) являются более жесткими.

На основании изложенных экспериментальных данных можно сделать следующие основные заключения.

1. ДКЭХ не связан со специальным типом 2*D*-системы: его существование является общей закономерностью.

2. Так как рассеяние на дефектах разрушает ДКЭХ, он является собственным эффектом и связан с межэлектронным взаимодействием.

3. Это взаимодействие порождает в энергетическом спектре новые щели, которые отсутствуют в невзаимодействующем электронном газе.

4. В случае ДКЭХ имеет место «правило нечетных знаменателей»: в перечисленных выше дробях *p* нечетное. Некоторые выводы, как и экспериментальные факты, нуждаются в специальных комментариях, которые позволяют создать качественную картину ДКЭХ (см., например, [10]).

Межэлектронное взаимодействие, снимая вырождение уровня Ландау, изменяет энергетический спектр. Он неизвестен, и его существенные черты должны быть определены из экспериментальных данных. Рассмотрим $\varepsilon = \varepsilon$ (*N*) — энергию основного состояния системы в функции полного числа частиц *N* при *T* = 0 и фиксированном *H*. При значениях *N*, отвечающих дробно квантованным значениям $\nu_{fq} = q/p$, на кривой $\varepsilon(N)$ следует ожидать «излома вниз» (cusp) (рис. 18). Действительно, $d\varepsilon/dN = \zeta$ (ζ — энергия Ферми), и излом означает, что ζ изменяется скачком при прохождении *N* через значение N_{fq} . Скачок производной $d\varepsilon/dN$ в точке N_{fq} означает наличие щели Δ в плотности состояний:

$$\Delta = \left(d\varepsilon/dN \right)_{-} - \left(d\varepsilon/dN \right)_{+}, \tag{36}$$

т. е. изменение N вблизи точки N_{fq} приводит к рождению элементарных возбуждений — квазичастиц при $N > N_{fq}$ и дырок при $N < N_{fq}$. Энергия рождения пары квазичастица–дырка равна Δ . Наличие скачка ζ фиксирует равновесное значение $\nu = \nu_{fq}$.

Подобная картина не имеет ничего общего с обычным упругим сжатием или расширением электронной фазы: оно отвечало бы на кривой $\varepsilon(N)$ не излому, а плавному минимуму. Сжимаемость $\gamma \simeq (d^2 \varepsilon / d\nu^2)^{-1}$, и в точке излома $\gamma \to 0$. Поэтому электронная фаза является несжимаемой и в ее спектре отсутствуют бесщелевые (звуковые) возбуждения.

В этих условиях легко вычислить j_H . Действительно, в системе координат, движущейся с холловской скоростью $\mathbf{v}_H = c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]/H^2$, электрическое поле равно нулю. Примеси движутся со скоростью ($-\mathbf{v}_H$), и если она мала, то при $\Delta > 0$ диссипация отсутствует, а электроны покоятся. В лабораторной системе электроны имеют скорость \mathbf{v}_H , что обеспечивает значение $\sigma_H = \nu e^2/h$.



Рис. 18. Качественный ход зависимости энергии взаимодействующих электронов от полного числа электронов. Излом вниз (cusp) при $N = N_{la}$ отвечает образованию несжимаемой жидкости.

Зависимость $\varepsilon(N)$ типа приведенной на рис. 18, фиксирующая ν_{fq} , не обеспечивает сама по себе возникновения плато в ρ_{xy} вблизи точек ν_{fq} . Действительно,

при $N \neq N_{fq}$ образуются квазичастицы или дырки, которые могут вносить дополнительный вклад в σ_{H} . Чтобы ликвидировать этот вклад, достаточно ввести в рассмотрение неизбежно присутствующие примеси. Не разрушая щель, они должны захватывать квазичастицы (дырки), тем самым исключая их из процессов переноса.

В чисто двумерной модели масштаб щели Δ определяется единственным энергетическим масштабом, существующим в теории, — характерной энергией взаимодействия электронов $e^2/\varkappa\lambda$. Поэтому $\Delta(\nu) = \overline{\Delta}(\nu)e^2/\varkappa\lambda$, где $\overline{\Delta}(\nu)$ — безразмерная щель. В полях $H \sim 10^5$ Э $\Delta < \hbar \omega_c$, $g\mu_B H$. Это неравенство объясняет, почему ДКЭХ существует в более низкотемпературной области, чем ЦКЭХ. Обычно эти неравенства считают сильными и ограничиваются рассмотрением электронов, принадлежащих одному уровню Ландау; это приближение будет применяться всюду далее. Двумерная модель означает пренебрежение толщиной канала z_0 в пределе $z_0 \ll \lambda$. Однако надо иметь в виду, что, согласно [154, 155], заметные поправки к Δ возникают начиная с $z_0 \sim 0.1\lambda$.

Интересно обсудить возможную микроструктуру электронной фазы, обладающей описанными свойствами. Рациональные значения $\nu = q/p$ были первоначально приписаны образованию структуры типа волн зарядовой плотности (B3П), для которых классическим пределом при $\nu < 1$ является вигнеровский кристалл. Это представлялось тем более вероятным, что в приближении Хартри-Фока была доказана неустойчивость однородной фазы по отношению к образованию ВЗП [156], а образование вигнеровского кристалла в сильном поле *Н* облегчается [157]. Однако для ВЗП нарушена непрерывная группа трансляций, и поэтому в ней должны быть длинноволновые голдстоуновские моды с частотой $\omega \to 0$, нарушающие бездиссипативность тока при $T \to 0$. Представляется также естественным, что ВЗП будут «пиннинговаться» примесями и потому не должны обнаруживать омического поведения при полях $E \rightarrow 0$, что находится в противоречии с экспериментом. Кроме того, для ВЗП численные расчеты [158, 159] не привели к «излому вниз» даже в наиболее характерной точке $\nu = 1/3$. Поэтому с теоретической точки зрения следует восстановить непрерывную группу. Это можно сделать, предположив, что электронная фаза является сильно коррелированной жидкостью, к которой неприменимы аргументы, основанные на методе Хартри-Фока. Такая модель была предложена Лафлином [160], связавшим с помощью пробной функции нечетность *р* с принципом Паули, и Иошиокой и др. [161] на основе численных расчетов для небольшого числа частиц.

Работа Лафлина [160] является основой жидкостной микроскопической теории ДКЭХ при $\nu = 1/p$ (*p* нечетное). Значительное количество последующих теоретических работ основывается на ней и целиком посвящено теории систем, удовлетворяющих правилу нечетного знаменателя.

Между тем в литературе время от времени появляются сообщения о наблюдении особенностей в ρ_{xx} , которые могут быть приписаны четным знаменателям, например: $\nu = 5/2$ для электрон-дырочной системы в GaSb/InAs-ГС [60]*,

^{*} В GaSb/InAs-ГС возникают два слоя пространственного заряда — электронный и дырочный, которые разделены интерфейсом. Эта система существенно отличается от монополярных 2D-слоев и требует отдельного изучения.

 $\nu=3/4$ [162] и $\nu=3/2$ [146] для *n*-канала в GaAs-ГС. Достоверность этих данных не подтверждалась. Однако недавно было сообщено [163], что для GaAs-ГС при $2<\nu<4$, т. е. для следующего орбитального состояния, дробная часть ν , отвечающих минимумам ρ_{xx} с высокой точностью равна 1/4, 1/2 и 3/4. В ρ_{xy} также наблюдается структура, но она не имеет вида четко выраженных плато. Эти данные нуждаются в дальнейшей проверке, так как в других исследованиях в этой же области дробных ν наблюдались только нечетные знаменатели (например, $\nu=8/3$, 7/3 [164, 165]). Но если они будут подтверждены, то это явится опровержением недавнего вывода [166] о том, что теория [160] с небольшими изменениями применима к высшим уровням Ландау.

4.2. Теория ДКЭХ

Теория ДКЭХ, в основе которой должно лежать описание новой электронной фазы, возникающей из электронного газа, частично заполняющего ($\nu < 1$) уровень Ландау (первоначально бесконечнократно вырожденный), в результате сильных межэлектронных корреляций по необходимости сложна. Она включает в себя сейчас полуфеноменологическую теорию, основанную на формуле Кубо, позволяющую получить дробное квантование σ_H , не апеллируя к детальной структуре квантовых состояний и элементарных возбуждений, и микроскопическую теорию, претендующую на разработку систематики элементарных возбуждений и численное нахождение параметров теории (таких, как щели в спектре). Далее в основных чертах обрисованы оба этих направления. Однако начать целесообразно с разъяснения факта, являющегося первопричиной дробного квантования σ_H : вырождения основного состояния системы.

4.2.1. Вырождение основного состояния

Утверждение состоит в следующем: состояние с $\nu = 1/p$ (*p* нечетное) *p*-кратно вырождено. Оно было сформулировано в общем виде Андерсоном [167]. Аргументация основывается в значительной мере на гипотезе существования прасостояний (parent states), а именно: предполагается, что волновая функция основного состояния системы взаимодействующих электронов получается из слэтеровского детерминанта, построенного из соответствующих состояний невзаимодействующих электронов, при адиабатическом включении взаимодействия.

Проиллюстрируем ситуацию на примере аксиальной калибровки векторапотенциала однородного поля **H**. Собственные функции низшего уровня Ландау классифицируются по проекции углового момента *m*:

$$\psi_{m} = \left(2^{m+1}\pi m!\right)^{-\frac{1}{2}} z^{m} \exp\left(-\frac{1}{4}|z|^{2}\right), \tag{37}$$

комплексная координата z = x + iy измерена в единицах λ . При $\nu = 1/3$ многоэлектронные прафункции естественно построить так, чтобы в наборе { ψ_m }, из которого строится детерминант, последовательные значения *m* отличались на 3. Три возможных набора:

$$\Psi_1 = \{0, 3, 6, \ldots\}, \Psi_2 = \{1, 4, 7, \ldots\}, \Psi_3 = \{2, 5, 8, \ldots\}.$$
(38)

Эти функции между собой ортогональны и образуют три основных состояния. При больших $|z| \gg 1$ все Ψ_i обеспечивают одинаковую однородную концентрацию электронов $N_s = N_L/3$. Это легко понять, если учесть, что все функции ψ_m имеют ширину порядка 1, а расстояние между максимумами соседних функций Δz_m убывает как $|\Delta z_m| \circ m^{-\nu_2}$. Поэтому вдали от точки z = 0 все три состояния физически тождественны: они описывают три вакуума с пространственно однородной концентрацией (в этом смысле — жидкость). Вблизи z = 0 концентрации $N_s = N_s(z)$. При этом для функции Ψ_2 полный избыточный заряд отсутствует, а для Ψ_1 и Ψ_3 он равен $\pm e/3$ [168]. Операция T_{ν_3} сдвига всех m_i на ± 1 переводит Ψ_2 в Ψ_1 и Ψ_3 , т. е. она преобразует друг в друга вакуумы и одновременно рождает в точке z = 0 квазичастицу или дырку с зарядом $\pm e/3$, локализованным на масштабе $\sim \lambda$. Так на языке прафункций осуществляются преобразования $T_{1/2}$.

Преобразования $T_{1/p}$ имеют ясный геометрический смысл, если выразить их в терминах магнитных трансляций [169, § 60]. Определяем комплексные магнитные трансляции \hat{t}_{\perp} :

$$\hat{t}_{\pm} = \left(\partial_x \pm i\partial_y\right) \mp \frac{1}{2} \left(x \pm iy\right), \tag{39}$$

на функциях (37) получаем [168]

$$\hat{t}_{+} \left\{ z^{m} e^{-|z|^{2}/4} \right\} = -z^{m+1} e^{-|z|^{2}/4},$$

$$\hat{t}_{-} \left\{ z^{m} e^{-|z|^{2}/4} \right\} = \left(2 \frac{d}{dz} z^{m} \right) e^{-|z|^{2}/4}.$$

$$(40)$$

Повышая и понижая степень z, операторы \hat{t}_+ и \hat{t}_- переводят Ψ_2 соответственно в Ψ_3 и Ψ_1 . Это свойство является общим и справедливо для прафункций и для точных волновых функций.

Возникновение элементарных возбуждений с дробным зарядом является обычным фактом при вырожденном вакууме. Применительно к рассматриваемой системе возникновение дробных зарядов можно понять из следующих модельных соображений. В функциях Ψ_i можно создать элементарное возбуждение — квазичастицу или дырку, уменьшив (увеличив) в одном месте расстояние между последовательными *m* до 2 (до 4). Если в функции Ψ_i создать в разных точках некоторого участка три одинаковых возбуждения, то слева и справа от этого возмущенного участка будет один и тот же вакуум V_i [т. е. вакуум со строго такой же последовательностью номеров, как в (38)]. При этом, как можно убедиться простым подсчетом, на три возбуждения будет вставлен (или вынут) один электрон. Следовательно, заряд каждого элементарного возбуждения (которое в данном случае имеет форму кольца) равен $\pm e/3$. При произвольном *p* заряд равен *e/p*.

Предполагается, что при включении взаимодействия *p* правакуумов перейдут в *p* вакуумов *V_i*, а заряды элементарных возбуждений останутся неизменными. Первое предположение лежит в основе расчетов, выполненных в [170].

Вырождение основного состояния, *p*-кратное при нечетном *p*, находится в согласии с результатами численных расчетов [161, 171] и данными работы [172]. Су [171] приведены симметрийные аргументы, показывающие, что при $\nu = q/p$ *p*-кратное вырождение является минимальным, совместимым с условиями симметрии [во всяком случае в базисе (37)]. Мы не будем их воспроизводить,

ограничившись менее строгими, но более наглядными соображениями, приведенными выше.

Гипотеза прасостояний была привлечена выше исключительно для того, чтобы сделать существование нескольких взаимно вырожденных вакуумов максимально наглядным. В то время как вырождение вакуума является, по-видимому, реальным фактом, гипотеза прафункций уязвима для критики [173, 174]. Наиболее серьезное возражение основывается на том, что построение детерминантных функций Ψ_i по формулам типа (38) навязывает системе скрытый дальний порядок [174], который в жидкой фазе должен отсутствовать.

Вырождение основного состояния позволяет совместить рассуждения, основанные на калибровочной инвариантности (п. 3.2.2), с существованием ДКЭХ, как это отметили Тао и Ву [175]. Действительно, при $\nu = q/p$ в результате прохождения калибровочного кванта потока Φ_0 система может изменить вакуумное состояние, перейдя из V_j в V_{j+1} . Тогда при *p*-кратном вырождении вакуума система вернется в исходное состояние лишь после прохождения калибровочного потока $p\Phi_0$. Если при этом переносится *q* электронов, то $\sigma_H = (q/p) (e^2/h) = \nu e^2/h$, что находится в согласии с экспериментом.

p-Кратное вырождение основного состояния при $\nu = q/p$ присуще не только несжимаемой жидкости, как это было недавно показано Холдейном [176] (очевидно, например, что оно имеет место и для вигнеровского кристалла). Это, однако, не уменьшает значения *p*-кратного вырождения для теории несжимаемой жидкости.

Резюме этого раздела таково: σ_H квантуется в рациональных дробях (и это квантование является точным), потому что степень вырождения квантового состояния (в данном случае вакуума) является всегда целочисленной.

4.2.2. Формула Кубо

Вернемся к выводу КЭХ из формулы Кубо (ср. п. 3.2 1). Общий подход был найден Ниу, Таулессом и Ву [74], которым удалось сформулировать проблему КЭХ (т. е. физическую транспортную проблему) в терминах топологии и тем самым выявить геометрическую природу квантования холловской проводимости.

Холловская проводимость прямоугольной пластины размерами $L_{\rm l}, L_{\rm 2}$ определяется формулой

$$\sigma_{H} = \frac{ie^{2}\hbar}{L_{1}L_{2}} \sum_{n<0} \frac{\left\langle 0|v_{1}|n\right\rangle \left\langle n|v_{2}|0\right\rangle - \left\langle 0|v_{2}|n\right\rangle \left\langle n|v_{1}|0\right\rangle}{\left(E_{0} - E_{n}\right)^{2}},\tag{41}$$

где $\Psi_0 = |0\rangle$ — основное состояние системы, а $\Psi_n = |n\rangle$ — ее возбужденные состояния. Поле **H** || *z*, *v*₁ *u v*₂ — компоненты оператора скорости в *ху*-плоскости. Дальнейшее доказательство основано на предположении, что проводимость формируется локально и не зависит от граничных условий.

Тогда значения волновых функций Ψ на противоположных краях можно, как обычно, связать между собой с помощью трансляций (магнитных [160], так как $H \neq 0$), введя в условия связей фазовые множители. В калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$:

$$\Psi(\mathbf{x}_i + L_1) = \mathbf{e}^{i\alpha} \mathbf{e}^{i\mathbf{y}_i L_1/\lambda^2} \Psi(\mathbf{x}_i), \ \Psi(\mathbf{y}_i + L_2) = \mathbf{e}^{i\beta} \Psi(\mathbf{y}_i), \tag{42}$$

 x_i, y_i — координаты *i*-го электрона, α и β — произвольные фазы. Если основное состояние при всех значениях α и β не вырождено и отделено от возбужденных состояний щелью, то (с учетом сделанного выше предположения) σ_H , вычисленное по (41), не зависит от выбора фаз α и β . Это утверждение будет явно использовано в дальнейшем. Удобно преобразовать все Ψ согласно

$$\tilde{\Psi} = \exp\left(-i\alpha \sum_{i} x_{i}/L_{1}\right) \exp\left(-i\beta \sum_{i} y_{i}/L_{2}\right) \Psi;$$
(43)

центр образца в точке x = y = 0. Тогда (41) приводится к компактному выражению

$$\sigma_{H} = \frac{ie^{2}}{\hbar} \left\{ \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \alpha} \middle| \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \beta} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \beta} \middle| \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \alpha} \right\rangle \right\}.$$
(44)

Для этого нужно записать производные $\partial \tilde{\Psi}_i / \partial \alpha$ и $\partial \tilde{\Psi}_i / \partial \beta$ в виде разложения в ряд по $\tilde{\Psi}_j$ совершенно аналогично известному разложению для $\partial u_{nk} / \partial \mathbf{k}$ в теории блоховского электрона. Используя независимость σ_H от α и β , (44) можно переписать в форме

$$\sigma_{H} = \frac{e^{2}}{h} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\alpha d\beta}{2\pi i} \Biggl\{ \Biggl\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \beta} \Biggl| \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \alpha} \Biggr\rangle - \Biggl\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \alpha} \Biggl| \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \beta} \Biggr\rangle \Biggr\},\tag{45}$$

или

$$\sigma_{H} = \frac{e^{2}}{h} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\alpha d\beta}{2\pi i} \operatorname{rot} \mathbf{C} = \frac{e^{2}}{h} \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{C} d\mathbf{l}.$$
 (46)

Вектор С определяется его компонентами

$$C_{\gamma} = \frac{1}{2i} \left\{ \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \gamma} \middle| \tilde{\Psi}_{0} \right\rangle - \left\langle \tilde{\Psi}_{0} \middle| \frac{\partial \tilde{\Psi}_{0}}{\partial \gamma} \right\rangle \right\}, \gamma = \alpha, \beta.$$
(47)

В формуле для С, можно опустить тильду и воспользоваться периодичностью граничных условий (42) по α и β , вследствие чего значения Ψ на противоположных сторонах квадрата могут различаться только на фазу $\vartheta(\alpha)$ или $\vartheta(\beta)$ (не зависящую от **r**).

Поэтому $\sigma_{H} = (e^{2}/h)(\vartheta/2\pi)$, где ϑ — полный набег фазы при обходе контура. Благодаря наличию щели Ψ_{0} однозначно, и $\vartheta = 2\pi q$ (q — целое), а

$$\sigma_{\rm H} = q e^2 / h. \tag{48}$$

Итак, получено условие квантования, отвечающее ЦКЭХ.

Аналог формулы (45) был ранее получен [116] для невзаимодействующих электронов в 2*D* периодическом потенциале в условиях, когда на элементарную ячейку приходится рациональное число квантов потока Φ_0 и заполнено целое число зон, образующихся при расщеплении уровня Ландау в периодическом поле. Роль $\tilde{\Psi}$ играл периодический фактор u_k блоховской функции, а роль α и β — компоненты квазиимпульса k (ср. п. 3.2.6). Формула (48) в этом случае имеет самостоятельное значение: из нее следует, что в условиях пиннинга ВЗП одночастичная проводимость в периодическом поле ВЗП не может привести к ДКЭХ [177, 178].

Особое значение имеет формула (45), в которой заключен глубокий смысл, а именно: Аврон и др. [179] показали, что для 2*D*-систем интеграл (45) является то-

пологическим инвариантом. Это означает, что его величина остается неизменной при включении случайного потенциала, если только при этом в спектре сохраняется щель. Доказательство формулы (48), данное в [74], справедливо при наличии как беспорядка, так и межэлектронного взаимодействия. В этом смысле оно является общим: единственное условие состоит в наличии щели в плотности состояний.

Из п. 4.2.1 ясно, что дробное квантование σ_H возникает при вырождении основного состояния. Различные вакуумные состояния дают одинаковый ток. Поэтому обобщение формулы (45) сводится к ее усреднению: делению на степень вырождения *p* и суммированию по вакуумам *V_i*. Дальнейшее преобразование основывается на анализе прасостояний. При $\nu = 1/p$ они являются детерминантными функциями, которые в калибровке Ландау строятся из линейных комбинаций одночастичных функций, в которых последовательные значения k_y различаются на $\Delta k_y = (2\pi/L_2)p$. Взаимное преобразование *p* наборов (и, следовательно, *p* прасостояний) осуществляется изменением β на величину, кратную 2π . Это позволяет получить окончательную формулу в виде

$$\sigma_{H} = \frac{e^{2}}{hp} \int_{0}^{2\pi} d\alpha \int_{0}^{2\pi p} \frac{d\beta}{2\pi i} \left\{ \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta} \middle| \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \alpha} \middle| \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta} \right\rangle \right\},\tag{49}$$

Где $\tilde{\Psi}$ — волновая функция одного из состояний V_i ; при интегрировании по β она последовательно превращается в волновые функции всех других вакуумов V_i . Если на уровне Ферми есть щель, то интеграл в (49) равен целому числу по тем же причинам, что и аналогичный интеграл в (45). Его легко вычислить, так как, будучи топологическим инвариантом, он сохраняет свою величину в отсутствие беспорядка. Но в этом случае переход в систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ и поэтому электроны покоятся, позволяет вычислить плотность тока $j_H = eN_L v_H/p$ в лабораторной системе. В результате из (49) следует

$$\sigma_{H} = e^{2}/hp \tag{50}$$

для ДКЭХ без детализации типа взаимодействия, беспорядка и др.

Итак, метод Ниу и др. [74] приводит к условию квантования для ЦКЭХ и ДКЭХ на основе единого подхода. Точность квантования обеспечивается тем, что выражение для σ_H является 2D топологическим инвариантом, а условием справедливости доказательства является наличие щели на уровне Ферми. Столь общий подход не позволяет отдавать предпочтения ни нечетным, ни четным значениям *p*. Выбор между ними является задачей микротеории.

4.2.3. Микроскопическая теория

Аргументация, приведенная в п. 4.2.2, является в значительной мере феноменологической. Она не раскрывает микроструктуры макроскопического квантового состояния, ответственного за ДКЭХ. В ней четко выявляется роль вырождения основного состояния, но отсутствует другой, столь же важный аспект явления — образование несжимаемой фазы (жидкости).

Взаимодействие замагниченных 2*D*-электронов первоначально рассматривалось методом Хартри–Фока. В этом приближении однородное состояние оказалось неустойчивым [156] по отношению к образованию ВЗП (ср. п. 4.1). Этот подход, по-видимому, оправдан при $\nu \leq 0.1$.

Другой подход основывается на рассмотрении взаимодействия небольшого числа частиц — аналитическом [180, 181] или численном [161]. Последняя работа показала, что минимуму энергии при $\nu = 1/3$ отвечает непериодическое распределение электронной плотности, а работа [181] явилась стартовой для Лафлина при построении выдвинутой им концепции несжимаемой жидкости [160]*.

Теория Лафлина целиком основывается на предложенной в [160] пробной волновой функции многоэлектронной системы:

$$\Psi = \prod_{j < k} f\left(z_j - z_k\right) \exp\left(-\frac{1}{4\lambda^2} \sum_i \left|z_i\right|^2\right), \ f(z) = z^p.$$
(51)

Она оказалась удачной. Экспоненциальный фактор диктуется формулой (37), а для предэкспоненциального используется подстановка Джастрова — произведение парных функций. Степенная форма *f* следует из (37), так как только однородный по *z* полином является собственной функцией углового момента. Это же свойство обеспечивает принадлежность ψ основному уровню Ландау. Степень *n* выбирается целой и нечетной, чтобы ψ удовлетворяло принципу Паули. Хотя формально при заданном *p* функция (51) полностью определена, распределение электронной плотности в состоянии ψ и его энергия не могут быть вычислены аналитически из-за большого числа аргументов. Лафлин [160] решает эти вопросы, поднимая степенной множитель в показатель экспоненты и интерпретируя весь показатель как энергию логарифмической 2*D*-плазмы на однородном нейтрализующем фоне. Приближенная теория такой плазмы развита в [183], и Лафлин этим путем сделал основные качественные выводы о свойствах ψ и получил численные оценки для основных величин. Не излагая этот метод, отметим только, что, согласно [160], состояние является жидким при *p* \leq 70.

С первого взгляда из (51) не ясно даже, является ли $|\psi|^2$ в среднем однородным в пространстве, и если да, то чему равна средняя плотность. Ее проще всего найти, используя связь между магнитным потоком и числом узлов ψ -функции, отмеченную в [10]. Пусть электрон *j* описывает замкнутый контур *C* на *z*-плоскости. Тогда интеграл от фазы волновой функции

$$i - \int_{(C)} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \sum_{(C)} \int_{(C)} dz_j \ln(z_j - z_i).$$
(52)

Левая часть — обычный набор фазы при движении в магнитном поле [с вектором-потенциалом A(r)], который следует из калибровочных соображений. Правая часть следует из (51); вклад в нее вносят только электроны, находящиеся внутри *C*. Из (52) следует

$$|e|H/c\hbar = 2\pi N_s,\tag{53}$$

или

$$N_{s} = \frac{1}{2\pi\lambda^{2}} \frac{1}{p} = \frac{N_{L}}{p}, \quad \nu = \frac{1}{p}.$$
(54)

Возможность рассматривать щель Δ ≠ 0 в несжимаемой жидкости как реликт щели в спектре ВЗП, возникающей вследствие условий магнитной симметрии и выживающей при плавлении ВЗП, обсуждалась Дзялошинским [182].

Из последней формулы видно, что в теории Лафлина *p* определяет *v*. Поэтому правило нечетных знаменателей связывается с принципом Паули.

Конечно, в точной волновой функции присутствуют только нули первого порядка, существование которых следует из принципа Паули. Наличие нулей *p*-го порядка в (51) отвечает слиянию *p* пространственно близких простых нулей. Такая конфигурация может интерпретироваться как эффект короткодействующего потенциала. С такой точки зрения теория Лафлина интерпретировалась и конкретизировалась в ряде последующих работ [184–186].

Следующим является вопрос о введении элементарных возбуждений. Лафлин [160] для этой цели использует операторы (39), создавая дырку или квазичастицу в точке z_0 . Для дырки это сводится к домножению ψ на произведение факторов ($z_j - z_0$). Без численных расчетов невозможно определить, насколько правильным получается распределение электронной плотности, но величину заряда возникающего дефекта определить легко. Нужно только, согласно [187], записать для дырки с зарядом e^* уравнение, аналогичное (52),

$$i\frac{e^{\prime}}{\hbar c}\int_{(C)}\mathbf{A}d\mathbf{l}=\sum_{j}\int_{(C)}dz_{0}\ln(z_{j}-z_{0}).$$
(55)

Из него с учетом (53) и (54) следует

$$\boldsymbol{e}^* = |\boldsymbol{e}|/\boldsymbol{p}.\tag{56}$$

Таким образом, элементарными возбуждениями являются дробные заряды $e^* = \pm e/p$. Их физический смысл обсуждался в п. 4.2.1.



Рис. 19. Зависимость энергии (в расчете на электрон) для несжимаемой жидкости и волны зарядовой плотности от ν [188]. Расчеты выполнены для GaAs-ГС, $N_{\rm s} = 10^{11}$ см⁻². Энергии отсчитаны от энергии вигнеровского кристалла ε_{cl} ; ε_{WC}^{Hr} и ε_{WC}^{c} – энергии ВЗП в приближении Хартри–Фока и с учетом корреляций; ε_{L} – энергия жидкости согласно [189]. Кресты – энергия жидкости согласно [160].

Величина энергии в расчете на одну частицу ε_0 и величина щели Δ могут быть найдены только путем численных расчетов, которые производятся различными методами. Из общих соображений ясно только, что все энергии имеют порядок $e^{2}/\varkappa\lambda$. Поэтому $e^{2}/\varkappa\lambda$ удобно принять за единицу энергии. Расчеты ε_0 для $1 \leq p \leq 20$ проведены Левескье и др. [189]. Для p = 3 ими получено $\varepsilon_0 = -0.4100$. Улучшенные расчеты энергии ВЗП позволили Лэму и Гирвину [188], использовав результаты [189], сравнить энергию конкурирующих фаз — жидкости и ВЗП (рис. 19). Для фаз с $\nu = 1/p$ критическое значение $\nu = \nu_{cr}$ немного больше, чем 1/7. Излом вниз (рис. 18), необходимый для несжимаемости жидкости (п. 4.1), получен в расчетах Су [171] при $\nu = 1/3$ и $\nu = 2/5$. Последние данные для Δ (1/3) получены Морфом и Гальпериным [190]: безразмерная щель $\overline{\Delta}$ (1/3) = 0.099. Результаты других расчетов для этой величины: 0.056 [102], 0.11 [191] и 0.105 [155]. С ростом p щели сужаются.

Теория Лафлина [160] применима к $\nu = 1/p$. Для $\nu = 1-1/p$ она может быть также применена с учетом электронно-дырочной симметрии (в пределе $e^2/\varkappa\lambda \ll \hbar\omega_c$). Столь же важно построение теории для $\nu = q/p$ с произвольным q. Холдейном [184] предложена иерархическая схема, согласно которой состояния q/p с 1 < q < p формируются из новых поколений элементарных возбуждений подобно тому, как состояние (51) формируется из электронов. Каждое новое поколение элементарных возбуждений формируется на фоне «вакуума», образованного предыдущим поколением, аналогично частицам с зарядом $\pm 1/3$ на фоне вакуума $\nu = 1/3$. Особенность состоит только в том, что, в то время как электроны являются фермионами, квазичастицы Лафлина рассматриваются в [184] как бозоны. Это можно понять, исходя из формул (40), согласно которым рождение дырок и частиц происходит при неизменном числе электронов. Это значит, что \hat{t}_+ и \hat{t}_- биквадратны по фермионным операторам и потому могут быть эквивалентны бозонным операторам. Квазичастицы следующих поколений также рассматриваются как бозоны. Это позволяет записать цепочку уравнений:

$$N_{L} = pN_{s} + \alpha_{1}N^{(1)},$$

$$N_{s} = r_{1}N^{(1)} + \alpha_{2}N^{(2)},$$

$$N^{(1)} = r_{2}N^{(2)} + \alpha_{3}N^{(3)},$$

$$\dots$$

$$N^{(k-1)} = r_{k}N^{(k)};$$
(57)

 $p \ge 1$ нечетное, все $r_j \ne 0$ четные, $\alpha_j = \pm 1$. Первое уравнение показывает, что $N^{(1)}$ частиц ($\alpha_1 = -1$) или дырок ($\alpha_1 = +1$) компенсирует дисбаланс между концентрацией электронов N_s и концентрацией несжимаемой жидкости N_L/p . Второе уравнение имеет такой же смысл, но уже в следующем поколении и с той разницей, что в формуле, аналогичной (51), нечетное p заменено на четное r_1 . Очередное плато в σ_H возникает, когда система обрывается, как это демонстрирует последнее уравнение в (57). Решение системы (57) приводит к цепной дроби для $\nu = N_s/N_L$:

$$\nu^{-1} = p + \frac{\alpha_1}{r_1 + \frac{\alpha_2}{r_2 + \frac{\alpha_3}{r_3 + \dots}}}, \quad \nu < 1.$$
(58)

Эта дробь может быть оборвана на любом звене. При этом она приводит к $\nu = q'/p'$ с нечетными p'; для каждого ν имеется единственное представление в виде дроби типа (58). Новая жидкость $[p, \alpha_1 r_1 \dots \alpha_j r_j]$ не возникает до образования предшествующей $[p, \alpha_1 r_1 \dots \alpha_{j-1} r_{j-1}]$. Поскольку при $\nu \to 0$ энергетически наиболее выгодным является вигнеровский кристалл, то дробь должна оборваться на том звене, в котором образование новой жидкости является энергетически невыгодным в сравнении с ВЗП. Жидкости $\nu = q/p$ приписываются элементарные возбуждения с зарядом $e^*(\nu) = \pm e/p$; такой выбор можно интерпретировать по аналогии с п. 4.2.1.

Иерархическая схема является гипотезой, нуждающейся в экспериментальной проверке. В первую очередь целесообразна качественная проверка схемы, состоящая в контроле порядка, в котором соответствующие состояния проявляются экспериментально при понижении *Т*. Это существенно, так как различные подходы в теории иерархических схем приводят к одинаковой систематике [184, 192, 19].

Количественные характеристики при расчетах основываются на дополнительных предположениях, а в экспериментах они искажены из-за присутствия примесей и конечности ширины канала.

Согласно [192], безразмерная щель для образования пары ($e_i^*, -e_i^*$) равна

$$\overline{\Delta}(\nu_j) \approx A(1/p_j)^{\frac{5}{2}} (p_j/p_{j-1})^{\frac{1}{2}}, \ \nu_j = q_j/p_j$$
(59)

с A, близким к 1 (далее принято A = 1.2), ν_j — факторы заполнения для последовательности жидкостей (57).

Кроме двухчастичных, спектр жидкости содержит также коллективные одночастичные возбуждения. Они рассмотрены Гирвином и др. [191] по аналогии с феймановской теорией спектра сверхтекучего гелия. Факторизуя в одномодовом приближении динамический структурный фактор $S(\mathbf{k},\omega) = S(\mathbf{k})\delta(\omega - \Delta(\mathbf{k}))$, авторы [191] получили для энергии возбуждений $\Delta(\mathbf{k})$ кривые с $\Delta(\mathbf{k}=0) \neq 0$ и минимумом, при $k \sim \lambda^{-1}$. Углубление минимума для $\nu = 1/5$ по сравнению с $\nu = 1/3$ рассматривается как предвестник фазового перехода в состояние ВЗП при $\nu_{cr}^{-1} \approx 6.5$ (в согласии с [188]). При $k > \lambda^{-1}$ коллективные возбуждения являются экситонами, построенными из квазичастицы и дырки, и сшивание результатов [191] и [193] позволяет найти $\Delta = \Delta (k \to \infty)$. Последнее равенство следует из того, что $k\lambda^2$ является расстоянием между квазиэлектроном и дыркой, как в обычном диамагнитном экситоне [194, 195]. Получаемое $\Delta (1/3) \approx 0.11$ согласуется с другими данными.

Обширная литература посвящена статистике квазичастиц. Так как их размер не мал ($\sim\lambda$ и растет с номером поколения), речь может идти только о перестановке достаточно удаленных друг от друга частиц. В разных работах они рассматривались как бозоны [184], фермионы [102] и частицы с дробной статистикой — энионы (anyon) [192]. Последняя возможна в 2*D*-пространстве [196] и к ней естественным образом приводит рассмотрение систем с дробным ν [187]. В дробной статистике перестановка двух частиц сопровождается появлением фактора $e^{i\theta}$, где $\theta = \pi \nu$. Применительно к ДКЭХ специальный анализ [19, 187] показал, что различные описания в основном эквивалентны, хотя дробная статистика в известных отношениях является наиболее естественной. Мы останавливаемся здесь на этом вопросе, носящем преимущественно аппаратный характер, потому что Тао и Ву [197] связали его с правилом нечетных знаменателей, а именно: на основе дробной статистики ими были приведены аргументы в пользу того, что при $\nu = q/p$ (p четное) в кристалле не может одновременно присутствовать более 2p квазичастиц (дырок).

Это утверждение позволяет по-новому взглянуть на правило нечетных знаменателей. Аналитические и численные расчеты свидетельствуют о том, что при четном *p*, по-видимому, может образовываться жидкость [хотя она и не описывается формулой (51)], и в ее спектре должна быть щель (ссылки см. в [197]). В этих условиях отсутствие плато в σ_{μ} при четных p является загадочным. Тао и Ву [197] предложили объяснение, носящее фундаментальный характер: невозможность образования макроскопического числа квазичастиц с их последующим прилипанием исключает обычный механизм образования плато (п. 4.1). Отметим, однако, что отсутствие квазичастичных возбуждений делает энергетический спектр такой системы весьма неясным. Тао и Ву [175] предложили и другое объяснение правила нечетных знаменателей — бесконечное вырождение основного состояния при четных р. Расчеты Су [171] показали, что при четном р степень вырождения основного состояния превышает р; но вопрос о бесконечном вырождении остается открытым. Наконец, опыты Николса и др. [163], поставившие под сомнение правило нечетных знаменателей, требуют значительного усовершенствования: необходимо установить, можно ли добиться получения плато на кривых $\sigma_{_H}$ в точках с четными p, в которых $\rho_{_{XX}}$ минимально. Ответ на этот вопрос существенно повлияет на развитие теории.

4.2.4. Ренормгруппа

Остановимся на ренормгрупповом подходе к проблеме ДКЭХ, имеющем целью обобщение схемы, развитой применительно к теории ЦКЭХ (п. 3.2.3) с учетом межчастичного взаимодействия. Обобщение фазового портрета рис. 9 предложено в работе Лафлина и др. [198]. Рис. 20, являющийся упрощенным вариантом их диаграммы, схематичен, тем не менее он демонстрирует новые элементы, позволяющие качественно описать ДКЭХ. Портрет отражает иерархическую схему.



Рис. 20. Фазовый портрет на плоскости ($\sigma_{xx}\sigma_{xy}$) в теории дробного КЭХ.

Каждая ступень иерархии осуществляется включением неустойчивого узла (квадрата) и системы расположенных ниже его (на одной горизонтали) седел — кружков. Квадрат отвечает фазовому переходу, в результате которого исчезает ДКЭХ. Если исходная точка ($\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0$) лежит выше сепаратрис, выходящих из квадрата (сильный беспорядок), то система не может выйти в состояния, соответствующие ДКЭХ при $\nu = 1/3$ и 2/3. Но при меньших σ_{xx}^0 (более совершенные структуры) есть большая область, из которой система неизбежно выходит в эти состояния. Ниже расположены особые точки, порождающие следующее поколение. Оно должно проявиться в еще более совершенных образцах.

Фазовые портреты для ЦКЭХ и ДКЭХ основываются на гипотезе скейлинга и не имеют строгого теоретического обоснования. Тем не менее анализ экспериментальных данных на их основе должен быть очень полезным: он позволит проверить гипотезу скейлинга и попутно может явиться удобным способом систематизации результатов эксперимента.

4.2.5. Возрождение решеточных моделей

В п. 4.1 пояснялось, почему были отвергнуты решеточные модели ДКЭХ. Однако в самое последнее время интерес к ним возродился, но на новом уровне, позволяющем снять или смягчить выдвинутые ранее возражения. Поскольку имеющиеся материалы носят предварительный характер и крайне лаконичны, мы лишь наметим возникшие пути.

Стимулом для одной линии послужил результат Маки и Зотоса [199], которые обнаружили в корреляционной энергии треугольной вигнеровской решетки отрицательный вклад, связанный с соизмеримостью ($\nu = 1/3$). Однако вычисленный ими вклад был столь малым, что ему первоначально не придавали значения. Кивельсон и др. [200] недавно развили квазиклассический подход, выяснив, что определяющий вклад в корреляционную энергию вносят большие циклические перестановки, являющиеся наиболее важным классом подбарьерных флуктуаций. Вклады от многочисленных путей при интерференции суммируются (а не гасятся) лишь при рациональных значениях *v*; в результате в энергии возникает излом вниз типа $|\delta \nu| \ln(|\delta \nu|)$. Существует фазовый переход по плотности, такой, что при $\nu < \nu_{cr}$ система ведет себя как классический вигнеровский кристалл, а при $\nu > \nu_{cr}$ доминируют гигантские квантовые флуктуации. Предполагается, что квантовый режим существует при факторах заполнения $\nu = 1/3, 1/5, 2/5, 2/7, 1/4, 3/7$ и 4/9. В спектре возбуждений отсутствует звуковая ветвь. Причину этого можно увидеть в разрушении флуктуациями дальнего порядка; следствием должно явиться исчезновение пиннинга. Элементарные возбуждения имеют дробный заряд.

Другая линия связана с пробной функцией, предложенной Чуем и др. [201], которая обеспечивает несколько более низкую энергию системы, чем функция Лафлина (51). В [202] с нею сопоставляется образ волновой функции кристалла при конечной температуре. Координации ближайших соседей в ней и в функции Лафлина близки между собой, но поведение их на больших расстояниях совершенно различно. Отсутствие дальнего порядка снимает проблемы, связанные с теоремой Голдстоуна, и поэтому в спектре элементарных возбуждений имеется щель ($\overline{\Delta} = 0.076$). Чуем [202] были проведены также численные расчеты для 16

частиц в квадратном ящике при $\nu = 1/3$. Это самая большая система, для которой проведен точный расчет (в пределах уровня n = 0). Основной результат — наличие сильного пика в структурном факторе $S(\mathbf{k})$ при $k \approx 2/\lambda$; в жидкости Лафлина пик отсутствует. Еще один важный вывод состоит в том, что энергия основного состояния ε_0 мало чувствительна к ограничению размеров системы в отличие от щели, для которой получено значение $\overline{\Delta} \approx 0.04$.

Келер [203] полагает, что формированию упорядочения типа ВЗП способствует электрон-фононное взаимодействие.

Естественно рассматривать работы [200, 201] не как альтернативу теории несжимаемой жидкости, а как другой подход к теории жидкой фазы, позволяющий с новой точки зрения изучить корреляционные функции частиц на малых и промежуточных расстояниях. Дальний порядок должен отсутствовать — это следует из отсутствия пиннинга. Но существование квазикристаллической координации на промежуточных расстояниях в пределах нескольких координационных сфер является вполне возможным. В ближайшем будущем неорешеточные модели, понимаемые в таком смысле, могут занять заметное место в теории ДКЭХ.

4.3. Анализ экспериментальных данных

Для ДКЭХ сравнение теории и эксперимента ограничивается сейчас возможностью систематизации экспериментального материала в рамках иерархической модели и сравнением величин вычисленных и измеренных щелей, созданных кулоновским взаимодействием.

а. Иерархическая схема и наблюдаемые семейства. В теории [184] последовательность состояний строго детерминирована: новая жидкость не возникает до появления предшествующей ей жидкости (п. 4.2.3). В идеальной 2*D*-системе иерархическая последовательность должна оборваться на том состоянии, которое с энергетической точки зрения невыгодно в сравнении с ВЗП. В реальных 2*D*-системах длина последовательности ограничивается также беспорядком, разрушающим ДКЭХ. Согласно (59), щели сужаются при уменьшении дробного заряда 1/*p* (в ед. *е*). Поэтому иерархическая цепь последовательного образования фаз с возрастающим *p* соответствует возникновению каждой фазы *v* при тем более низкой температуре, чем меньше соответствующее ей $\Delta(\nu)$. Каждая жидкость характеризуется соответствующим ей значением *v*. Дроби, надежно идентифицированные экспериментально по минимумам ρ_{xx} и плато ρ_{xy} , подчеркнуты.

В табл. 2 представлено несколько первых поколений жидкостей. В пределах каждого столбца расположено одно семейство. Для всех столбцов материнским является состояние $\nu = 1$. Исключение составляют столбцы, начинающиеся с 5/7 и 2/7. Они возникли в результате разветвления семейств, как это показано стрелками в табл. 2. При таком ветвлении, как видно из табл. 2, возникают фазы со строго определенными числителями *q*. Симметрия в расположении семейств является следствием электронно-дырочной симметрии. Каждое из семейств описывается сериальной формулой: они приведены внизу табл. 2.

Таблица 2

			<u>2/3</u>		<u>1/3</u>			
	<u>4/5</u>		<u>3/5</u>		<u>2/5</u>		<u>1/5</u>	
6/7		5/7	<u>4/7</u>		<u>3/7</u>	<u>2/7</u>		1/7
	7/9		<u>5/9</u>		<u>4/9</u>		2/9	
9/11		8/11	6/11		5/11	3/11		2/11
	¥	¥	¥		¥	*	¥	
	$\frac{3k+1}{4k+1}$	$\frac{3k-1}{4k-1}$	$\frac{k\!+\!1}{2k\!+\!1}$		$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{k}{4k-1}$	$\frac{k}{4k+1}$	
	$\nu_{\infty} = 3/4$			$\nu_{\infty} = 1/2$	$\nu_{\infty} = 1/4$			

Иерархия состояний несжимаемых жидкостей

В них $k \ge 1$. Далее для экспериментально наблюдаемых жидкостей приведены параметры, определяющие генезис жидкости $[p, \alpha_{1}, r_{1}, \dots, \alpha_{j}, r_{j}]$ по схеме Холдейна (п. 4.2.3): $\nu = 1/3$ [3], $\nu = 2/3$ [1,2]; $\nu = 1/5$ [5]; $\nu = 2/5$ [3, $\overline{2}$], $\nu = 3/5$ [1,2, $\overline{2}$], $\nu = 4/5$ [1,4]; $\nu = 2/7$ [3,2], $\nu = 3/7$ [3, $\overline{2}$, $\overline{2}$], $\nu = 4/7$ [1,2, $\overline{2}$, $\overline{2}$]; $\nu = 4/9$ [3, $\overline{2}$, $\overline{2}$, $\overline{2}$], $\nu = 5/9$ [1,2, $\overline{2}$, $\overline{2}$, $\overline{2}$]. Черта над цифрой, отвечающей очередному r, означает, что соответствующее $\alpha = -1$.

Экспериментальных данных пока недостаточно, чтобы провести исчерпывающее сравнение с иерархической схемой. Однако можно утверждать, что основные экспериментальные результаты по ДКЭХ при $\nu < 1$ не противоречат теории. Наиболее длинные иерархические цепи паблюдались в *n*-GaAs-ГС. В Si-МДПС найденные дробные ν соответствуют состояниям в начале цепей.

Остановимся на самых длинных цепях, экспериментально обнаруженных в *n*-канале GaAs-ГС (см. рис. 21 [204]). Они образуют в табл. 2 центральные столбцы. Вся иерархия состояний вплоть до p = 9 в обеих цепях одновременно видна в ДКЭХ при $T \approx 100$ мК. В согласии с теорией состояния с p = 7 и 9 появляются после предшествующих состояний с $\nu = 3$ и 5 и только при более низких температурах. Обе цепи сходятся к общему пределу $\nu_{\infty} = \nu (k \to \infty) = 1/2$. Широкий минимум в зависимости $\rho_{xx}(H)$ при $\nu \approx 1/2$ (рис. 21) может иметь происхождение, связанное с неразрешенной структурой, отвечающей высшим поколениям. При таком толковании наблюдение особенности при четном ν не противоречит правилу нечетных знаменателей. В табл. 2 приведены две другие пары семейств, сходящихся к 3/4 и 1/4. Они пока не наблюдались экспериментально.

Недавно в GaAs-ГС температурное поведение минимумов ρ_{xx} в области ДКЭХ при $\nu > 1$ изучено более детально [165]. На примере двух пар последовательных состояний $\nu = 4/3$ (аналог 1/3), 7/5 (аналог 2/5) и $\nu = 3$ (аналог 1), 8/3 (аналог

2/3) показано, что при очень сильном охлаждении минимумы ρ_{xx} , отвечающие дочерним состояниям 7/5 и 8/3, исчезают на фоне глубоких и расширяющихся минимумов материнских состояний 4/3 и 3. Основное утверждение этой работы состоит в том, что отдельные поколения иерархических цепей вследствие наличия беспорядка наблюдаются лишь в конечном температурном интервале. Качественно этот результат можно истолковать следующим образом. Новые состояния в иерархии конструируются из квазичастиц материнских состояний.



Рис. 21. Особенности в $\rho_{xx}(H)$ и $\rho_{xy}(H)$, соответствующие сериальным множествам [204]. Измерения выполнены на *n*-канале GaAs-ГС с $N_s = 1.5 \cdot 10^{11}$ см⁻², $\mu_e = 5 \cdot 10^5$ см²/В·с при T = 90 мК.

Поэтому если при сильном охлаждении все квазичастицы определенного поколения оказываются локализованными на дефектах, то формирование дочернего состояния становится невозможным. Таким образом, при наличии беспорядка ограничения на температуру, при которой проявляется ДКЭХ, существуют и снизу, и сверху. С одной стороны, она должна быть не слишком низкой, чтобы в достаточной мере делокализовать квазичастицы материнского состояния, а, с другой стороны, температура должна быть в несколько раз меньше щели в спектре дочернего состояния. Двоякой является и роль концентрации дефектов. Их должно быть достаточно для проявления плато в ρ_{xy} и соответствующего минимума в ρ_{xx} , но в то же время не слишком много, чтобы не воспрепятствовать образованию жидкости следующего поколения. Очевидно, что теория иерархий нуждается в развитии с учетом наличия беспорядка.

б. Кулоновские щели и роль беспорядка. Величины кулоновских щелей в режиме ДКЭХ экспериментально определяются по активационной зависимости проводимости в минимумах σ_{xx} (или ρ_{xx}). Зависимость от температуры связана с тепловым возбуждением пар квазичастица–дырка. Энергия активации *w* в отсутствие беспорядка равна $w = \Delta/2$ (Δ – щель) (п. 4.2.3). В реальных структурах (с беспорядком и при $T \neq 0$) щель подвижности меньше Δ (рис. 5, δ), поэтому $w < \Delta/2$.

Таблица 3

			-	-		-			
ν		Канал	2 <i>D</i> -система	<i>μ</i> , м²/В · с	<i>Н</i> , Тл	<i>w</i> , K	w	\overline{W}_{∞}	Литература
1/3 {	n	GaAs-ГС	110	14.6	2.7	0.013		[205]	
	n	То же	45	18.5	3.2	0.014	_	[145]	
	р	GaAs-ГС	_	24	1	0.004	_	[25]	
	n	Si-МДПС	2.5	20	2.6	0.0068	0.018	[152]	
1/3		$rac{ar{\Delta}}{2}$ (теория) — 0.028 [102]; 0.034 [166]; 0.05 [192]; 0.055 [191]							
	2/7	n	GaAs-ГС	110	7.4	0.9	0.0062		[205]
		n	То же	105	14.0	1.4	0.0075	_	[162]
2/7		n	» »	100	12.0	1.2	0.0065	_	[151]
2/3		n	» »	60	9.6	0.5	0.003	_	[145]
		р	GaAs-ГС	-	23	1	0.004	_	[25]
	l	n	Si-МДПС	3.5	20	2.7	0.0071	0.014	[152]
	(n	GaAs-ГС	105	6.9	0.25	0.0017	_	[162]
4/3	n	Si-МДПС	3.5	15	2.2	0.0065	0.013	[152]	
	l	n	То же	-	8.3	0.6	0.0024	_	[206]
5/3		n	GaAs-ГС	105	5.5	0.09	0.0007	_	[162]
1/5		$\overline{rac{ar{\Delta}}{2}}$ (теория) — 0.007 [102]; 0.0098 [166]; 0.012 [191]; 0.014 [192]							
	(n	GaAs-ГС	50	24.3	1	0.0038	_	[151]
2/5 {	n	То же	50	28	2.5	0.009	_	[153]	
	l	n	» »	50	14	1.4	0.007	_	[153]
	ſ	n	GaAs-ГС	50	16.7	0.5	0.0022	_	[151]
3/5	{	n	То же	50	28	2.5	0.009	_	[153]
	l	n	» »	50	14	1.4	0.007	_	[153]
4/5		n	Si-МДПС	3.5	20	1.1	0.0029	0.006	[152]
6/5		n	Si-МДПС	3.5	20	0.8	0.0024	0.005	[152]

Первые измерения w в режиме ДКЭХ, а также наблюдения влияния беспорядка на w выполнены в *n*-канале GaAs-ГС [146, 152]. В гетероструктурах плотностью 2*D*-электронов сложно управлять, в связи с этим трудно проследить за зависимостью w от μ при постоянном *H* или от *H* при фиксированном μ . Поэтому данные о w, полученные на образцах, различающихся значениями N_s и μ (а значит, измеренные при разных *H*), имеют большой разброс (табл. 3). Но если сравнивать значения w, измеренные в близких магнитных полях, то обнаруживается общая закономерность: w возрастают с ростом μ . На эту закономерность впервые обращено внимание в [145].

В работе [152] прослежено влияние беспорядка на величину активационных щелей в условиях ДКЭХ в Si-МДПС. Энергия активации w была определена при различных ν в одной и той же структуре при фиксированных значениях H и

других параметров (например, μ_e). В результате w, измеренные для различных ν , удалось описать простой формулой, в которой зависимости от H и μ разделены (рис. 22):

$$w(\nu) \approx \overline{w}_{\infty}(\nu) (1 - \mu_0/\mu) (e^2/\varkappa \lambda).$$
(60)

Здесь $\overline{w}_{\infty}(\nu) = \overline{\Delta}/2$ (в ед. $e^2/\varkappa\lambda$), а μ_0 имеет смысл минимальной подвижности, необходимой для наблюдения ДКЭХ. Можно ожидать, что ДКЭХ разрушается, когда ширина уровней Г (п. I.2) сравнивается с величиной щели Δ . Оценивая Г, согласно (9), как $\Gamma \approx \hbar\omega_0 \sqrt{c/\mu H}$, а $\Delta(1/3) \approx 0.1 e^2/\varkappa\lambda$, для μ_0 получаем

$$\mu_0 \approx (h/e)^3 (\varkappa/m)^2,$$
 (61)

m — эффективная масса. Оценки μ_0 по формуле (61) близки к экспериментальным значениям в Si-МДПС, *n*- и *p*-каналах GaAs-ГС. В [152] найдено, что μ_0 возрастает с увеличением знаменателя *p* (рис. 22).



Рис. 22. Зависимость энергии активации сопротивления ρ_{xx} от подвижности в условиях ДКЭХ [152]. Энергии активации w определены по температурной зависимости ρ_{xx} в области максимумов, соответствующих $\nu = 4/3$ и 4/5 на Si-МДПС. 1, 2 — различные образцы.

В табл. 3 помещены измеренные значения $w(\nu)$ и вычисленные значения $\overline{\Delta}/2$ для разных 2*D*-систем [а также обезразмеренные $\overline{w} = w(\varkappa \lambda/e^2)$]. В *n*- и *p*-каналах

GaAs-ГС значения *w* близки при одинаковых *v*. Экспериментальные величины *w* в Si-МДПС и GaAs-ГС различаются примерно в 2 раза (по-видимому, из-за различия в *x*). При фиксированном *p* щели в пределах экспериментальной точности не зависят от *q* [в согласии с (59)].

Как видно из табл. 3, экспериментально определенные $\overline{w}(\nu)$ заметно меньше теоретически вычисленных значений $\overline{\Delta}/2$ примерно в 2–3 раза. Однако такое расхождение не является удивительным, если учесть упрощенность теоретического подхода и неточность экспериментальной методики определения *w*. Результаты различных теоретических расчетов различаются примерно вдвое даже для идеальной 2*D*-модели. Учет конечной ширины канала должен заметно уменьшить Δ [154, 149]. К такому же результату должен привести учет беспорядка, как это подтверждают численные расчеты [207, 208]. Величина $w(\nu)$ экспериментально определялась до сих пор исключительно по активационной зависимости проводимости. Однако точность этого метода быстро падает при уменьшении $w(\nu)$, так как при понижении температуры активационная проводимость маскируется прыжковой проводимостью (с переменной длиной прыжка). Поэтому необходимы независимые методы измерения Δ , например, по форме края поглощения электромагнитного излучения.

5. Заключение

Обзор, несмотря на значительный объем, не является исчерпывающим. Он не затрагивает многие явления в условиях КЭХ: термоэдс, теплоемкость, магнитную восприимчивость, оптику, циклотронный резонанс, прыжковую проводимость, специфические эффекты когерентности. За пределами обзора остались также форма плато и частотные эффекты. Мы не имели возможности их охватить и не стремились к этому, несмотря на то что они важны и интересны. Свою основную задачу мы видели в том, чтобы, оставаясь в рамках «сердцевины» КЭХ, обсудить основные экспериментальные факты (в их макроскопическом и микроскопическом аспектах) и порожденные ими теоретические концепции. Хотя продвижение в понимании природы КЭХ очень велико, многие важные вопросы пока остаются дискуссионными. Поэтому мы постарались отразить и сопоставить различные, иногда конкурирующие точки зрения. Но мы не стремились к библиографической полноте, и поэтому цитируем только те источники, на которые фактически опирались при работе над обзором.

Резюме может быть сформулировано следующим образом.

1. КЭХ является специфическим 2*D*-эффектом, связанным с наличием щелей в спектре электронов в магнитном поле.

2. Точность квантования проводимости σ_H при T = 0 обеспечивается тем, что в двумерных системах она может быть представлена как топологический инвариант, который не зависит от хаотического потенциала дефектов, пока не происходит захлопывания щелей в энергетическом спектре. В некоторых теориях это ограничение смягчено. 3. ЦКЭХ по своей природе является одноэлектронным эффектом. Он связан с особой структурой спектра 2*D*-электрона в случайном поле: почти все состояния локализованы, протяженные состояния переносят ток только в холловском направлении.

4. ДКЭХ возникает вследствие межэлектронного взаимодействия, формирующего несжимаемые электронные фазы со щелью в спектре элементарных возбуждений. Плотности этих фаз квантованы вследствие вырождения основного состояния системы.

5. Сейчас неизвестны принципиальные ограничения на точность квантования σ_{μ} .

Электроника проводящих двумерных слоев, интенсивно развивающаяся на протяжении двух последних десятилетий, приобрела статус фундаментальной дисциплины и оказалась предметом общего интереса физиков, подарив миру квантовый эффект Холла, целочисленный и дробный. Он внес в физику макроскопических квантовых явлений новый тип квантования — топологическое квантование макроскопических потоков — и новый физический объект — несжимаемую жидкость с квантованной плотностью. К настоящему времени достигнут впечатляющий прогресс в экспериментальном изучении и интерпретации этих явлений и, по-видимому, сформулированы основные положения теории. Поразительно, что открытие и интерпретация этого круга явлений были основаны практически целиком на экспериментальных фактах, полученных путем изучения магнитотранспорта.

Достигнутые успехи не исчерпывают проблему. Напротив, они создали фундамент новой области физики конденсированного состояния, разработка которой потребует вовлечения разнообразных экспериментальных методик. КЭХ органически связан со многими разделами физики твердого тела. Для целочисленного КЭХ это прежде всего физика неупорядоченных систем сложного типа с несколькими пространственными масштабами неоднородностей. Это также физика систем с большими временами релаксации: медленное пространственное перемещение носителей заряда и гигантские времена затухания недиссипативных токов при $T \to 0$. Центральные проблемы в области дробного КЭХ: микроструктура электронных фаз, спектр их элементарных возбуждений, а также влияние случайного потенциала на формирование и устойчивость этих фаз. Интересные явления ожидаются при продвижении в область малых концентраций, где теория предсказывает образование волн зарядовой плотности и в пределе — классического вигнеровского кристалла. Кристаллизация несжимаемой жидкости в такие фазы должна сопровождаться интересными особенностями. Но самое интересное предсказать невозможно, как невозможно было предсказать открытие квантового эффекта Холла.

При работе над обзором мы постоянно обсуждали возникавшие вопросы с Ю.А. Бычковым и Д.Е. Хмельницким, которые прочитали рукопись и сделали много полезных замечаний. Мы пользуемся случаем выразить им глубокую благодарность. Мы очень благодарны также И.В. Кукушкину за обсуждение и техническую помощь.

ДРОБНЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ (Дополнение к обзору)

С момента открытия в 1982 году явления дробного квантования холловского сопротивления теоретиками дискутировалась принципиальная возможность существования дробного квантования кондактанса в отсутствии квантующего магнитного поля, поперечного плоскости с двумерным электронным газом. Несмотря на то, что рассматривались различные возможные сценарии этого явления в отсутствии магнитного поля (см. например, работу Холдейна [1], где в качестве объекта анализировались модели решеток с уплощенными энергетическими зонами, напоминающими уровни Ландау), тем не менее, дробные квантовые состояния без магнитного поля долгое время экспериментально обнаружить не удавалось. Прорыв в этой очень интересной области, возможно, перспективной для технологии и технических приложений, произошел совсем недавно, в начале 2019 года, и это достижение связано с публикацией [2].



Рис. 23. Рисунок демонстрирует поведение кондактанса в GaAs-гетероструктуре с вертикальным расщепленным затвором в функции асимметрии и ширины удерживающего потенциала (конфайнмента). На вставке к рисунку (*a*) справа схематически проиллюстрировано расположение вертикальных расщепленных затворов (показаны в красном цвете); поперечно-связывающий затворы, изолирующий слой полиметил-метакрилата толщиной 300 нм показан серым цветом и расположен между расщепленными затворами и верхним затвором в оранжевом цвете. Рисунок (*a*) демонстрирует квантование кондактанса при дробных значениях 2/3, 3/5, 1/2 и 2/5. Рисунки (*b*) и (*c*) демонстрируют в увеличенном виде квантование кондактанса при дробных значениях 1/6 и 1/2 соответственно. Из статьи: «Zero-Magnetic Field Fractional Quantum States». Кumar S., Pepper M., Holmes S. N., Montagu H., Gul Y., Ritchie D. A. and Farrer I. Phys. Rev. Lett. 122, 086803 (2019).

В этой пионерской работе продемонстрировано, что дробные значения кондактанса с нечетными и четными знаменателями обнаруживаютсяэкспериментально в отсутствии квантующего магнитного поля в условиях, когда в квазиодномерном квантовом проводе с электронным газом невысокой плотности ($< 6 \cdot 10^{10}$ см⁻²), создаваемой и контролируемой в GaAs-гетероструктуре управляющим вертикальным затвором, разрешена релаксация во втором измерении. Авторы статьи [2] предполагают, что в исследуемой системе (схема расположения «расщепленного» затвора и расположенного под ним квазиодномерного электронного канала показана на вставке к рис. 23) в результате такой релаксации возникает зигзагообразная сеть электронов с круговыми траекториями, обеспечивающими циклические токи, что сопровождается понижением энергии в исследуемой электронной системе.

Явление дробного квантования кондактанса наблюдалось в условиях симметричного и асимметричного конфайнментов, но сам эффект усиливался по мере увеличения асимметрии удерживающего потенциала, что сопровождалось уплощением конфайнмента и возникновением новых дробных квантовых состояний. Авторы обнаружили, что включение магнитного поля, параллельного плоскости электронной системы, приводит к появлению дробных квантовых состояний с четными знаменателями. Как полагают авторы, это может служить указанием на возможное спаривание электронов. Обнаруженные новые квантовые состояния существенны как для фундаментальной физики полупроводниковых наноструктур, так и для возможных технологических приложений.

Резюмируя изложенное выше, подчеркнем, что при очень небольших плотностях носителей, согласно работе [2], взаимодействие носителей заряда приводит к сильно коррелированному движению электронов и дробному поведению их кондактанса в отсутствии магнитного поля, что принципиально отличает этот эффект от ранее обнаруженного явления дробного квантования эффекта Холла [3]. Авторы предполагают, что обнаружение дробных кондактансов с четными знаменателями, в частности ¼, имеющих не абелевскую природу, открывает новые возможности и перспективы в квантовых информационных и вычислительных технологиях.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Klitzing von, K. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance / K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Physical Review Letters. 1980. Vol. 45, Iss. 6. P. 494–497.
- 2. Tsui, D.C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard // Physical Review Letters. 1982. Vol. 48, Iss. 22. P. 1559–1562.
- 3. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Москва : Наука, 1974. 752 с.
- 4. Licciardello, D.C. Constancy of minimum metallic conductivity in two dimensions / D.C. Licciardello, D.J. Thouless // Physical Review Letters. 1975. Vol. 35, Iss. 21. P. 1475–1478.
- 5. Thouless, D.J. Maximum metallic resistance in thin wires // Physical Review Letters. 1977. Vol. 39, Iss. 18. P. 1167–1169.
- 6. Mott, N.F. Conduction in non-crystalline systems IV. Anderson localization in a disordered lattice // Philosophical Magazine. – 1970. – Vol. 22, Iss. 175. – P. 7–29.
- 7. Klitzing von, K. The fine-structure constant α . A contribution of semiconductor physics to the determination of α // Festkörperprobleme. 1981. Vol. 21. P. 1–23.
- 8. Ando, T. Electronic properties of two-dimensional systems / T. Ando et al. // Reviews of Modern Physics. 1982. Vol. 54, Iss. 2. P. 437–672.
- 9. Андо, Т. Электронные свойства двумерных систем / Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн. Москва : Мир, 1985. 416 с.
- 10. Halperin, B.I. Theory of the quantized Hall conductance // Helvetica Physica Acta. 1983. Vol. 56. P. 75–102.
- Пудалов, В.М. Инверсионные слои носителей заряда в квантующем магнитном поле. Квантовый эффект Холла / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский // Поверхность: Физика, химия, механика. – 1984. – Т. 4 – С. 5–28.
- 12. Tsui, D.C. Quantum Hall effect: fractional quantization // Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by J.D. Chadi, W.A. Harrison – New York : Springer, 1985. – P. 247–254.
- Klitzing von, K. The quantum Hall Effect / K. von Klitzing, G. Ebert // Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices / ed. byG. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – P. 242–251.
- 14. Laughlin, R.B. The gauge argument for accurate quantization of the hall conductance // Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – P. 272–278.
- Laughlin, R.B. Fractional Quantization of the Hall Effect // Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – P. 279–287.
- Hajdu, J. Fractional quantization of the Hall effect questions and answers / J. Hajdu, R.B. Laughlin // Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – P. 288–291.
- Gossard, A.C. Fractional quantization of the Hall effect // Two-Dimensional Systems, Heterostructures, and Superlattices / ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – P. 262–271.
- Hajdu, J. Quantum transport phenomena in semiconductors in high magnetic fields / J. Hajdu, G. Landwehr // Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and Their Applications / ed. by F. Herlach. – Berlin – Heidelberg : Springer, 1985. – P. 17–112.

- Laughlin, R.B. Quasiparticle aggregation in the fractional quantum Hall heterostructures // Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by J.D. Chadi, W.A. Harrison. – New York : Springer, 1985. – P. 255–266.
- 20. Пудалов, В.М. Дробное квантование холловского сопротивления в кремниевых структурах / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 3. С. 143–145.
- Гаврилов, М.Г. Дробный квантовый эффект Холла двумерной электронной системы в кремниевой МДП структуре // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 9. С. 420–422.
- Miller, R.C. Energy-gap discontinuities and effective masses for GaAs-Al_xGa_{1-x}As quantum wells / R.C. Miller, D.A. Kleinman, A.C. Gossard // Physical Review B. 1984. Vol. 29, Iss. 12. P. 7085–7087.
- 23. Witkowski, L.C. High mobilities in Al_xGa_{1-x}As-GaAs heterojunctions / L.C. Witkowski et al. // Applied Physics Letters. 1980. Vol. 37, Iss. 11. P. 1033–1035.
- Weimann, G. Molecular beam epitaxial growth and transport properties of modulationdoped AlGaAs-GaAs heterostructures / G. Weimann, W. Schlapp // Applied Physics Letters. – 1985. – Vol. 46, Iss. 4. – P. 411–413.
- 25. Mendez, E.E. Two-dimensional holes at high magnetic fields // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 561–572.
- Landwehr, G. Quantum magneto-transport in p-type inversion layers of germanium bicrystals / G. Landwehr, S. Uchida // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 719–726.
- Herrmann, R. On the barrier height in grain boundaries of InSb bicrystals / R. Herrmann, G. Nachtwei, W. Kraak // Physica Status Solidi (a). 1984. Vol. 83, Iss. 2. P. K207–K210.
- Заварицкая, Э.И. Электропроводность чистых поверхностей германия внутренней и свободной // Материалы полупроводниковой электроники : (Темат. сб.). – Ленинград, 1984. – С. 99–183.
- 29. Tsui, D.C. Electron tunneling and capacitance studies of a quantized surface accumulation layer // Physical Review B. 1973. Vol. 8, Iss. 6. P. 2657–2669.
- Ohkawa, F.G. Quantized surface states of a narrow-gap semiconductor / F.G. Ohkawa, Y.J. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. 1974. Vol. 37, Iss. 5. P. 1325–1333.
- 31. Бычков, Ю.А. Спектр двумерного электронного газа в инверсионных слоях / Ю.А. Бычков, Э.И. Рашба // УФН. – 1985. – Т. 146, № 3. – С. 531–534.
- Köhler, H. Quantitative determination of the valley splitting in n-type inverted silicon (100) MOSFET surfaces / H. Köhler, M. Roos // Physica Status Solidi (b). – 1979. – Vol. 91, Iss. 1. – P. 233–241.
- Nicholas, R.J. An investigation of the valley splitting in n-channel silicon (100) inversion layers / R.J. Nicholas, K. von Klitzing, T. Englert // Solid State Communications. 1980. Vol. 34, Iss. 1. P. 51–55.
- 34. Иоффе, Л.Б. Флуктуационные уровни и циклотронный резонанс в случайном потенциале / Л.Б. Иоффе, А.И. Ларкин // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81, № 3. – С. 1048–1057.
- Wegner, F. Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential superfield representation for interacting systems // Zeitschrift f
 ür Physik B. Condensed Matter. – 1983. – Vol. 51, Iss. 4. – P. 279–285.
- 36. Brezin, E. Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities / E. Brezin, D.J. Gross, C. Itzykson // Nuclear Physics, Section B. – 1984. – Vol. 235, Iss. 1. – P. 24–44.
- Ando, T. Landau-level broadening in GaAs/AlGaAs heterojunctions / T. Ando, Y. Murayama // Journal of the Physical Society of Japan. – 1985. – Vol. 54, Iss. 4. – P. 1519– 1527.

- 38. Eisenstein, J.P. Magnetization and density of states of the 2D electron gas in GaAs/ AlGaAs heterostructures / J.P. Eisenstein et al. // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 271–276.
- 39. Gornik, E. Landau level density of states through specific heat in GaAs/GaAlAs multilayers / E. Gornik et al. // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 277–284.
- 40. Smith, T.P. Magnetocapacitance measurements in GaAsheterostructures / T.P. Smith et al. // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 304–310.
- Pudalov, V.M. Density of states for a two-dimensional electron Landau band in Si MOSFET / V.M. Pudalov, S.G. Semenchinsky // Solid State Communications. – 1985. – Vol. 55, Iss. 7. – P. 593–596.
- 42. Weiss, D. Density of states in Landau level tails of GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterostructures / D. Weiss et al. // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 285–291.
- Stahl, E. Density of states of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field / E. Stahl et al. // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1985. – Vol. 18, Iss. 26. – P. L783–L787.
- 44. Wei, H.P. Temperature dependence of the quantized Hall effect / H.P. Wei et al. // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 10. P. 7016–7019.
- 45. Баскин, Э.М. Двумерная электрон-примесная система в сильном магнитном поле / Э.М. Баскин, Л.И. Магарилл, М.В. Энтин // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 2(8). С. 723–734.
- 46. Halperin, B.I. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential // Physical Review B. 1982. Vol. 25, Iss. 4. P. 2185–2190.
- 47. Гаврилов, М.Г. Плотность состояний в щелях энергетического спектра двумерных электронов в поперечном магнитном поле / М.Г. Гаврилов, И.В. Кукушкин // Письма в ЖЭТФ. 1986. – Т. 43, № 2. – С. 79–82.
- 48. Altshuler, B.L. Coherent effects in disordered conductors / B.L. Altshuler et al. // Quantum theory of solids / ed. by I.M. Lifshits. Moscow : MIR, 1982. P. 130–237.
- 49. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Москва : Наука, 1957. – 432 с.
- 50. Klitzing von, K. Energy dissipation processes in the quantum Hall regime / K. von Klitzing et al. // Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by J.D. Chadi, W.A. Harrison. New York : Springer, 1985. P. 271–274.
- 51. Englert, T. Analysis of ρ_{xx} minima in surface quantum oscillations on (100) *n*-type silicon inversion layers / T. Englert, K. von Klitzing // Surface Science. 1978. Vol. 73. P. 70–80.
- Wakabayashi, J. Hall conductivity in n-type silicon inversion layers under strong magnetic fields / J. Wakabayashi, S. Kawaji // Surface Science. 1980. Vol. 98, Iss. 1–3. P. 299–307.
- 53. Tsui, D.C. Resistance standard using quantization of the Hall resistance of GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures / D.C. Tsui, A.C. Gossard // Applied Physics Letters. – 1981. – Vol. 38, Iss. 7. – P. 550–552.
- 54. Narita, S. Galvanomagnetic study of 2-dimensional electron gas in Al_xGa_{1-x}As/GaAs heterojunction FET / S. Narita et al. // Japanese Journal of Applied Physics. 1981. Vol. 20, Iss. 6. P. L443–L446.
- 55. Störmer, H.L. Fractional quantization of the Hall effect / H.L. Störmer et al. // Physical Review Letters. 1983. Vol. 50, Iss. 24. P. 1953–1956.
- 56. Гусев, Г.М. Свойства двумерного дырочного газа у поверхности кремния в сверхсильных магнитных полях // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 39, № 9. – С. 446–449.
- 57. Klitzing von, K. Precision determination of h/e² and the fine-structure constant from magneto-transport measurements on 2D electronic systems / K. von Klitzing et al. //

Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics / ed. by G. Landwehr. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1983. – P. 1–10.

- Herrmann, R. Quantized Hall effect in the n-inversion layer in InSb grain boundaries / R. Herrmann, W. Kraak, M. Glinski // Physica Status Solidi (b). – 1984. –Vol. 125, Iss. 1. – P. K85–K88.
- Guldner, Y. The quantum Hall effect in modulation doped In_{0.53}Ga_{0.47}As-InP heterojunctions / Y. Guldner et al. // Journal de Physique Lettres. – 1982. – Vol. 43, Iss. 16. – P. 613–616.
- 60. Mendez, E.E. Quantized Hall effect in single quantum wells of InAs / E.E. Mendez et al. // Surface Science. 1984. Vol. 142, Iss. 1–3. P. 215–219.
- 61. Chang, C.A. Quantum wells of InAs between AlSb / C.A. Chang et al. // Surface Science. 1984. Vol. 142, Iss. 1–3. P. 598–602.
- 62. Герасимов, Н.П. Ультраквантовый предел холловской проводимости двумерного электронного газа на поверхности кремния // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 2. С. 73–75.
- 63. Klitzing von, K. The quantum Hall effect / K. von Klitzing, G. Ebert // Physica B+C. 1983. Vol. 117–118, Part 2. P. 682–687.
- 64. Haavasoja, T. Magnetization measurements on a two-dimensional electron system / T. Haavasoja et al. // Surface Science. 1984. Vol. 142, Iss. 1–3. P. 294–297.
- 65. Streda, P. Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1982. Vol. 15, Iss. 22. P. L717–L721.
- Ando, T. Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system / T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura // Journal of the Physical Society of Japan. – 1975. – Vol. 39, Iss. 2. – P. 279–288.
- Baraff, G.A. Explanation of quantized-Hall-resistance plateaus in heterojunction inversion layers / G.A. Baraff, D.C. Tsui // Physical Review B. – 1981. – Vol. 24, Iss. 4. – P. 2274–2277.
- Kubo, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems // Journal of the Physical Society of Japan. – 1957. – Vol. 12, Iss. 6. – P. 570–586.
- 69. Aoki, H. Effect of localization on the hall conductivity in the two-dimensional system in strong magnetic fields / H. Aoki, T. Ando // Solid State Communications. 1981. Vol. 38, Iss. 11. P. 1079–1082.
- Thouless, D.J. Localisation and the two-dimensional Hall effect // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1981. – Vol. 14, Iss. 23. – P. 3475–3480.
- 71. Усов, Н.А. К теории квантового эффекта Холла в квазидвумерной электрон-примесной системе / Н.А. Усов, Ф.Р. Улинич // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86, № 2. – С. 644–657.
- 72. Апенко, С.М. О квантовании холловской проводимости двумерного электронного газа в сильном магнитном поле / С.М. Апенко, Ю.Е. Лозовик // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89, № 2(8). – Р. 573–588.
- 73. Шкловский, Б.И. Электронные свойства легированных полупроводников / Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос. – Москва : Наука, 1979. – 416 с.
- 74. Niu, Q. Quantized Hall conductance as a topological invariant / Q. Niu, D.J. Thouless, Y.-S. Wu // Physical Review B. – 1985. – Vol. 31, Iss. 6. – P. 3372–3377.
- Laughlin, R.B. Quantized Hall conductivity in two dimensions // Physical Review B. 1981. – Vol. 23, Iss. 10. – P. 5632–5633.
- 76. Aoki, H. Gauge invariance and the quantized Hall effect in two-dimensional systems // Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics / ed. by G. Landwehr. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1983. – P. 11–22.
- Widom, A. Thermodynamic equations for gate charge storage on a field effect transistor / A. Widom, T.D. Clark // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1982. – Vol. 15, Iss. 12. – P. L181–L182.

- Abrahams, E. Scaling theory of localization: absence of quantum diffusion in two dimensions / E. Abrahams et al. // Physical Review Letters. – 1979. – Vol. 42, Iss. 10. – P. 673–676.
- 79. Горьков, Л.П. Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале / Л.П. Горьков, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, № 4. С. 248–252.
- 80. Pruisken, A.M.M. On localization in the theory of the quantized Hall effect: a twodimensional realization of the θ -vacuum // Nuclear Physics, Section B. – 1984. – Vol. 235, Iss. 2. – P. 277–298.
- Levine, H. Electron delocalization by a magnetic field in two dimensions / H. Levine, S.B. Libby, A.M.M. Pruisken // Physical Review Letters. – 1983. – Vol. 51, Iss. 20. – P. 1915–1918.
- 82. Хмельницкий, Д.Е. О квантовании холловской проводимости // Письма в ЖЭТФ. 1983. – Т. 38, № 9. – С. 454–458.
- 83. Levine, H. Renormalization of the θ angle, the quantum Hall effect and the strong CP problem / H. Levine, S.B. Libby // Physics Letters B. 1985. Vol. 150, Iss. 1–3. P. 182–186.
- Pruisken, A.M.M. Localization and the integral quantum Hall effect // Localization, Interaction, and Transport Phenomena / ed. by B. Kramer, G. Bergmann, Y. Bruynseraede – Berlin, Heidelberg : Springer, 1985. – P. 188–207.
- 85. Pruisken, A.M.M. Dilute instanton gas as the precursor to the integral quantum Hall effect // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 4. P. 2636–2639.
- Hikami, S. Borel-Padé analysis for the two-dimensional electron in a random potential under a strong magnetic field // Physical Review B. – 1984. – Vol. 29, Iss. 6. – P. 3726–3729.
- 87. Wei, H.P. An experimental test of two-parameter scaling of integral quantum Hall effect / H.P. Wei et al. // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 238–242.
- 88. Пудалов, В.М. Взаимосвязь компонентов тензора магнитосопротивления в условиях квантового эффекта Холла / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 38, № 4. – С. 173–174.
- 89. Cage, M.E. Temperature dependence of the quantum Hall resistance / M.E. Cage et al. // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 4. P. 2286–2288.
- 90. Пудалов, В.М. Универсальность взаимосвязи компонент тензора сопротивления в целочисленном квантовом эффекте Холла / В.М. Пудалов и др. // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89, № 3(9). – С. 1094–1097.
- 91. Ando, T. Universal scaling relation of conductivities in quantized Landau levels // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 243–248.
- 92. Edwards, J.T. Numerical studies of localization in disordered systems / J.T. Edwards, D.J. Thouless // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1972. – Vol. 5, Iss. 8. – P. 807–820.
- 93. Prange, R.E. Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant // Physical Review B. 1981. Vol. 23, Iss. 9. P. 4802–4805.
- 94. Iordansky, S.V. On the conductivity of two dimensional electrons in a strong magnetic field // Solid State Communications. 1982. Vol. 43, Iss. 1. P. 1–3.
- Kazarinov, R.F. Quantum percolation and quantization of Hall resistance in twodimensional electron gas / R.F. Kazarinov, S. Luryi // Physical Review B. – 1982. – Vol. 25, Iss. 12. – P. 7626–7630.
- 96. Trugman, S.A. Localization, percolation, and the quantum Hall effect // Physical Review B. 1983. Vol. 27, Iss. 12. P. 7539–7546.
- Kubo, R. Quantum theory of galvanomagnetic effect at extremely strong magnetic fields / R. Kubo, S.J. Miyake, N. Hashitsume // Solid State Physics – Advances in Research and Applications. – 1965. – Vol. 17C. – P. 269–364.

- 98. Azbel, M.Y. de Haas-van Alphen, quantized hall and Meissner effects // Solid State Communications. 1985. Vol. 53, Iss. 2. P. 147–150.
- 99. Smrěka, L. The role of edge currents in quantised Hall effect // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1984. Vol. 17, Iss. 2. P. L63–L68.
- 100. MacDonald, A.H. Quantized Hall effect and edge currents / A.H. MacDonald, P. Streda // Physical Review B. 1984. Vol. 29, Iss. 4. P. 1616–1619.
- 101. Giuliani, G.F. Quantization of the Hall conductance in a two-dimensional electron gas / G.F. Giuliani, J.J. Quinn, S.C. Ying // Physical Review B. – 1983. – Vol. 28, Iss. 6. – P. 2969–2978.
- 102. Laughlin, R.B. Primitive and composite ground states in the fractional quantum Hall effect // Surface Science. 1984. Vol. 142, Iss. 1–3. P. 163–172.
- 103. Ebert, G. Hall potential distribution in quantum Hall experiments / G. Ebert, K. von Klitzing, G. Weimann // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1985. – Vol. 18, Iss. 10. – P. L257–L260.
- 104. Zheng, H.Z. Distribution of the quantized Hall potential in GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures / H.Z. Zheng, D.C. Tsui, A.M. Chang // Physical Review B. – 1985. – Vol. 32, Iss. 8. – P. 5506–5509.
- 105. Sichel, E.K. Equipotential distribution in the quantum Hall effect / E.K. Sichel, H.H. Sample, J.P. Salerno // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 10. P. 6975–6977.
- 106. Aoki, H. Gauge transformation study of two-dimensional localisation in magnetic fields // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1983. – Vol. 16, Iss. 10. – P. 1893– 1900.
- 107. Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields.I. Case of short-range scatterers // Journal of the Physical Society of Japan. – 1983. – Vol. 52, Iss. 5. – P. 1740–1749.
- 108. Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. II. Long-range scatterers and response functions // Journal of the Physical Society of Japan. – 1984. – Vol. 53, Iss. 9. – P. 3101–3111.
- 109. Ando, T. Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. III. Impurity-concentration dependence and level-mixing effects // Journal of the Physical Society of Japan. – 1984. – Vol. 53, Iss. 9. – P. 3126–3135.
- 110. Hikami, S. Localization length and inverse participation ratio of two-dimensional electron in the quantized Hall effect // Progress of Theoretical Physics. 1986. Vol. 6, Iss. 6. P. 1210–1221.
- 111. Aoki, H. Critical localization in two-dimensional Landau quantization / H. Aoki, T. Ando // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54, Iss. 8. P. 831–834.
- 112. Ando, T. Finite-size scaling study of localization in Landau levels / T. Ando, H. Aoki // Journal of the Physical Society of Japan. – 1985. – Vol. 54, Iss. 6. – P. 2238–2249.
- 113. Пудалов, В.М. Нелинейные явления в квантовом эффекте Холла / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, № 4. С. 1431–1445.
- 114. Khmelnitskii, D.E. Quantum Hall effect and additional oscillations of conductivity in weak magnetic fields // Physics Letters A. 1984. Vol. 106, Iss. 4. P. 182–183.
- 115. Laughlin, R.B. Levitation of extended-state bands in a strong magnetic field // Physical Review Letters. 1984. Vol. 52, Iss. 25. P. 2304.
- 116. Thouless, D.J. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential / D.J. Thouless et al. // Physical Review Letters. 1982. Vol. 49, Iss. 6. P. 405–408.
- 117. Störmer, H.L. Quantization of the Hall effect in an anisotropic three-dimensional electronic system / H.L. Störmer et al. // Physical Review Letters. 1986. Vol. 56, Iss. 1. P. 85–88.
- 118. Wakabayashi, J.-I. Hall Effect in Silicon MOS Inversion Layers Under Strong Magnetic Fields / J.-I. Wakabayashi, S. Kawaji // Journal of the Physical Society of Japan. – 1978. – Vol. 44, Iss. 6. – P. 1839–1849.

- 119. Wakabayashi, J.-I. Hall Current Measurement under Strong Magnetic Fields for Silicon MOS Inversion Layers / J.-I. Wakabayashi, S. Kawaji // Journal of the Physical Society of Japan. – 1980. – Vol. 48, Iss. 1. – P. 333–334.
- 120.Fang, F.F. Quantized magnetoresistance in two-dimensional electron systems / F.F. Fang, P.J. Stiles // Physical Review B. 1983. Vol. 27, Iss. 10. P. 6487–6488.
- 121. Powell, T.G. Two-terminal conductance of the quantised Hall resistor / T.G. Powell, C.C. Dean, M. Pepper // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1984. – Vol. 17, Iss. 13. – P. L359–L364.
- 122. Fang, F.F. Quantized magnetoresistance in multiply connected perimeters in twodimensional systems / F.F. Fang, P.J. Stiles // Physical Review B. – 1984. – Vol. 29, Iss. 6. – P. 3749–3751.
- 123. Rendell, R.W. Hall voltage dependence on inversion-layer geometry in the quantum Hall effect regime / R.W. Rendell, S.M. Girvin // Physical Review B. – 1981. – Vol. 23, Iss. 12. – P. 6610–6614.
- 124. Wick, R.F. Solution of the field problem of the germanium gyrator // Journal of Applied Physics. 1954. Vol. 25, Iss. 6. P. 741–756.
- 125. Усов, Н.А. К электродинамике идеальных холловских проводников / Н.А. Усов, Ф.Р. Улинич // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 40, № 7. – С. 741–756.
- 126. MacDonald, A.H. Hall voltage and current distributions in an ideal two-dimensional system / A.H. MacDonald, T.M. Rice, W.F. Brinkman // Physical Review B. – 1983. – Vol. 28, Iss. 6. – P. 3648–3650.
- 127. Riess, J. Small correction to the quantization of Hall conductance due to currentcurrent interactions and charge redistribution // Physical Review B. – 1985. – Vol. 31, Iss. 12. – P. 8265–8268.
- 128. Пудалов, В.М. Распределение тока в двумерном электронном слое в режиме квантования холловского сопротивления / В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42, № 5. С. 188–190.
- 129. Ebert, G. Two-dimensional magneto-quantum transport on GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures under non-ohmic conditions / G. Ebert et al. // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1983. – Vol. 16, Iss. 28. – P. 5441–5448.
- 130. Cage, M.E. Dissipation and dynamic nonlinear behavior in the quantum Hall regime / M.E. Cage et al. // Physical Review Letters. 1983. Vol. 51, Iss. 15. P. 1374–1377.
- 131. Störmer, H.L. Breakdown of the integral quantum Hall quantization / H.L. Störmer et al. // Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by J.D. Chadi, W.A. Harrison. New York: Springer, 1985. P. 267–270.
- 132. Heinonen, O. Electron-phonon interactions and the breakdown of the dissipationless quantum Hall effect / O. Heinonen, P.L. Taylor, S.M. Girvin // Physical Review B. – 1984. – Vol. 30, Iss. 6. – P. 3016–3019.
- 133. Středa, P. Critical non-dissipative current of quantum Hall regime / P. Streda, K. von Klitzing // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1984. – Vol. 17, Iss. 19. – P. L483– L486.
- 134. Yoshihiro, K. Non-equilibrium electrons in the quantum Hall effect regime / K. Yoshihiro et al. // Surface Science. 1986. Vol. 170, Iss. 1–2. P. 193–201.
- 135. Komiyama, S. Breakdown of the quantum Hall effect due to electron heating / S. Komiyama et al. // Solid State Communications. 1985. Vol. 54, Iss. 6. P. 479-484.
- 136. Braun, E. Experimental-determination of h/e² by the quantized Hall resistance in MOSFETs / E. Braun, E. Staben, K. von Klitzing // PTB-Mitteilungen. – 1980. – Vol. 90, Iss. 5. – P. 350–351.
- 137. Dyckvan, R.S. Electron magnetic moment from geonium spectra / R.S. van Dyck, P.B. Schwinberg, H.G. Dehmelt // Atomic Physics 7 / ed. by D. Kleppner, F.M. Pipkin – Boston, MA : Springer, 1981. – P. 340–372.

- 138. Thompson, A.M. A new theorem in electrostatics and its application to calculable standards of capacitance / A.M. Thompson, D.G. Lampard // Nature. 1956. Vol. 177, Iss. 4515. P. 888.
- 139. Cage, M.E. Status of the NBS-NRL determination of the fine-structure constant using the quantized Hall resistance effect / M.E. Cage et al. // Precision Measurement and Fundamental Constants II / ed. by B.N. Taylor, W.D. Phillips. – Gaithersburg : Natl. Bur. Stand. – 1984, Spec. Publ. 617. – P. 539–541.
- 140. Gossard, A.C. A resistance standard using the quantized Hall resistance of GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures / A.C. Gossard, D.C. Tsui // Precision Measurement and Fundamental Constants II / ed. by B.N. Taylor, W.D. Phillips. – Gaithersburg : Natl. Bur. Stand. – 1984, Spec. Publ. 617, P. 549–551.
- 141. Tsui, D.C. Determination of the fine-structure constant using GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures / D.C. Tsui et al. // Physical Review Letters. – 1982. – Vol. 48, Iss. 1. – P. 3–6.
- 142. Bliek, L. Measurements of the quantized hall resistance h /2e² with a reproducibility of 10⁻⁸ and its application for a novel determination of the Ohm / L. Bliek et al. // PTB-Mitteilungen. 1983. Vol. 93, Iss. 1. P. 21–23.
- 143. Yoshihiro, K. Quantized hall resistivity in Si-MOSFETsmeasured at liq. ³He temperatures / K. Yoshihiro et al. // Journal of the Physical Society of Japan. – 1982. – Vol. 51, Iss. 1. – P. 5–6.
- 144. Kinoshita, J. Precision measurement of quantum Hall effect in silicon MOS *n*-inversion layers / J. Kinoshita et al. // Proceedings of the International Symposium on the Foundations of Quantum Mechanics / ed. by S. Makefuchi Tokyo, Japan,1983. P. 339-345.
- 145. Tsui, D.C. Observation of a fractional quantum number / D.C. Tsui et al. // Physical Review B. 1983. Vol. 28, Iss. 4. P. 2274–2275.
- 146. Clark, R.G. Electron concentration dependent fractional quantisation in a two dimensional system / R.G. Clark et al. // Solid State Communications. – 1985. – Vol. 56, Iss. 2. – P. 173–176.
- 147. Störmer, H.L. Energy structure and quantized Hall effect of two-dimensional holes / H.L. Störmer et al. // Physical Review Letters. 1983. Vol. 51, Iss. 2. P. 126–129.
- 148. Chang, L.L. Fractional Hall quantization of two-dimensional holes in GaAs-GaAlAs heterostructures / L.L. Chang et al. // Proceedings of the 17th International Conference on the Physics of Semiconductors / ed. by J.D. Chadi, W.A. Harrison. New York : Springer, 1985. P. 299–302.
- 149. Mendez, E.E. Fractional quantum Hall effect in a two-dimensional hole system / E.E. Mendez et al. // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 2. P. 1087–1089.
- 150. Кукушкин, И.В. Аномалии магнитотранспортных свойств двумерного электронного газа в кремниевых структурах металл – диэлектрик – полупроводник в сильных магнитных полях / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев, П.А. Черемных // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 87, № 11. – С. 2223–2233.
- 151. Chang, A.M. Fractional quantum Hall effect at low temperatures / A.M. Chang et al. // Physical Review B. 1983. Vol. 28, Iss. 10. P. 6133–6136.
- 152. Кукушкин, И.В. Энергетические щели и роль беспорядка в условиях дробного квантования холловского сопротивления в кремниевых структурах металл – диэлектрик – полупроводник / И.В. Кукушкин, В.Б. Тимофеев // ЖЭТФ. – 1985.– Т. 89, № 11. – С. 1692–1701.
- 153. Boebinger, G.S. Magnetic Field dependence of activation energies in the fractional quantum Hall effect / G.S. Boebinger et al. // Physical Review Letters. 1985. Vol. 55, Iss. 15. P. 1606–1609.
- 154. MacDonald, A.H. Inversion-layer width, electron-electron interactions, and the fractional quantum Hall effect / A.H. MacDonald, G.C. Aers // Physical Review B. – 1984. – Vol. 29, Iss. 10. – P. 5976–5978.

- 155.Haldane, F.D.M. Finite-size studies of the incompressible state of the fractionally quantized Hall effect and its excitations / F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi // Physical Review Letters. 1985. Vol. 54, Iss. 3. P. 237–240.
- 156. Fukuyama, H. Two-dimensional electron gas in a strong magnetic field / H. Fukuyama, P.M. Platzman, P.W. Anderson // Physical Review B. – 1979. – Vol. 19, Iss. 10. – P. 5211–5217.
- 157. Лозовик, Ю.Е. Кристаллизация двумерного электронного газа в магнитном поле / Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22, № 1. С. 26–28.
- 158. Yoshioka, D. Charge density wave state of two-dimensional electrons in strong magnetic fields / D. Yoshioka, H. Fukuyama // Journal of the Physical Society of Japan. – 1979. – Vol. 47, Iss. 2. – P. 394–402.
- 159. Yoshioka, D. Ground-state energy of a two-dimensional charge-density-wave state in a strong magnetic field / D. Yoshioka, P.A. Lee // Physical Review B. 1983. Vol. 27, Iss. 8. P. 4986–4996.
- 160. Laughlin, R.B. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations // Physical Review Letters. – 1983. – Vol. 50, Iss. 18. – P. 1395–1398.
- 161. Yoshioka, D. Ground state of two-dimensional electrons in strong magnetic fields and ¹/₃ quantized Hall effect / D. Yoshioka, B.I. Halperin, P.A. Lee // Physical Review Letters. – 1983. – Vol. 50, Iss. 16. – P. 1219–1222.
- 162. Ebert, G. Fractional quantum Hall effect at filling factors up to $\nu = 3 / \text{G}$. Ebert et al. // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1984. Vol. 17, Iss. 29. P. L775–L779.
- 163. Clark, R.G. Odd and even fractionally quantized states in GaAs-GaAlAsheterojunctions / R.G. Clark et al. // Surface Science. – 1986. – Vol. 170, Iss. 1–2. – P. 141–147.
- 164. Mendez, E.E. Fractionally quantized Hall effect in two-dimensional systems of extreme electron concentration / E.E. Mendez et al. // Physical Review B. – 1984. – Vol. 30, Iss. 12. – P. 7310–7312.
- 165. Boebinger, G.S. Competition between neighboring minima in the fractional quantum Hall effect / G.S. Boebinger et al. // Physical Review B. – 1985. – Vol. 32, Iss. 6. – P. 4268–4271.
- 166. MacDonald, A.H. Laughlin states in higher Landau levels // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 6. P. 3550–3553.
- 167. Anderson, P.W. Remarks on the Laughlin theory of the fractionally quantized Hall effect // Physical Review B. 1983. Vol. 28, Iss. 4. P. 2264–2265.
- 168. Бычков, Ю.А. Корреляционные функции двумерного газа с рациональной плотностью и геометрический смысл лафлиновских операторов квазичастиц / Ю.А. Бычков, Э.И. Рашба // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, № 1. С. 346–351.
- 169. Лифшиц, Е.М. Статистическая физика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Москва : Наука, 1978. Ч. 2. 448 с.
- 170. Tao, R. Fractional quantization of Hall conductance / R. Tao, D.J. Thouless // Physical Review B. 1983. Vol. 28, Iss. 2. P. 1142–1144.
- 171. Su, W.P. Ground-state degeneracy and fractionally charged excitations in the anomalous quantum Hall effect // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 2. P. 1069–1072.
- 172. Haldane, F.D.M. Periodic Laughlin-Jastrow wave functions for the fractional quantized Hall effect / F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi // Physical Review B. – 1985. – Vol. 31, Iss. 4. – P. 2529–2531.
- 173. Giuliani, G.F. Breakdown of the random-phase approximation in the fractional-quantum Hall effect regime / G.F. Giuliani, J.J. Quinn // Physical Review B. – 1985. – Vol. 31, Iss. 6. – P. 3451–3455.
- 174. Thouless, D.J. Long-range order and the fractional quantum Hall effect // Physical Review B. 1985. Vol. 31, Iss. 12. P. 8305–8307.

- 175. Tao, R. Gauge invariance and fractional quantum Hall effect / R. Tao, Y.-S. Wu // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 2. P. 1097–1098.
- 176. Haldane, F.D.M. Many-particle translational symmetries of two-dimensional electrons at rational Landau-level filling // Physical Review Letters. – 1985. – Vol. 55, Iss. 20. – P. 2095–2098.
- 177. Yoshioka, D. Hall conductivity of two-dimensional electrons in a periodic potential // Physical Review B. 1983. Vol. 27, Iss. 6. P. 3637–3645.
- 178. Бычков, Ю.А. Квантовый эффект Холла, связанный волнами зарядовой плотности / Ю.А. Бычков, Э.И. Рашба // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 4. С. 195–198.
- 179. Avron, J.E. Homotopy and quantization in condensed matter physics / J.E. Avron, R. Seiler, B. Simon // Physical Review Letters. 1983. Vol. 51, Iss. 1. P. 51–53.
- 180. Бычков, Ю.А. Двумерные электроны в сильном магнитном поле / Ю.А. Бычков, С.В. Иорданский, Г.М. Элиашберг // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33, № 3. С. 152–155.
- 181. Бычков, Ю.А. Квантовая механика двумерной системы электронов в сильном магнитном поле / Ю.А. Бычков, С.В. Иорданский, Г.М. Элиашберг // Поверхность. 1982. Т. 10. С. 33–44.
- 182. Дзялошинский, И.Е. Дробный квантовый эффект Холла с точки зрения магнитной симметрии // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 39, № 3. – С. 137–138.
- 183. Caillol, J.M. A Monte Carlo study of the classical two-dimensional one-component plasma / J.M. Caillol et al. // Journal of Statistical Physics. – 1982. – Vol. 28, Iss. 2. – P. 325–349.
- 184. Haldane, F.D.M. Fractional quantization of the Hall effect: a hierarchy of incompressible quantum fluid states // Physical Review Letters. – 1983. – Vol. 51, Iss. 7. – P. 605– 608.
- 185. Trugman, S.A. Exact results for the fractional quantum Hall effect with general interactions / S.A. Trugman, S. Kivelson // Physical Review B. – 1985. – Vol. 31, Iss. 8. – P. 5280–5284.
- 186. Покровский, В.Л. Примеси и межэлектронное взаимодействие в квантовом эффекте Холла / В.Л. Покровский, А.Л. Талапов // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 42, № 2. – С. 68–71.
- 187. Arovas, D. Fractional statistics and the quantum Hall effect / D. Arovas, J.R. Schrieffer, F. Wilczek // Physical Review Letters. – 1984. – Vol. 53, Iss. 7. – P. 722–723.
- 188. Lam, P.K. Liquid-solid transition and the fractional quantum Hall effect / P.K. Lam, S.M. Girvin // Physical Review B. 1984. Vol. 30, Iss. 1. P. 473–475.
- 189. Levesque, D. Crystallization of the incompressible quantum-fluid state of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field / D. Levesque, J.J. Weis, A.H. Mac-Donald // Physical Review B. – 1984. – Vol. 30, Iss. 2. – P. 1056–1058.
- 190. Morf, R. Monte Carlo evaluation of trial wave-functions for the fractional quantized Hall effect – disk geometry / R. Morf, B.I. Halperin // Physical Review B. – 1986. – Vol. 33, Iss. 4. – P. 2221–2246.
- 191. Girvin, S.M. Collective-excitation gap in the fractional quantum Hall effect / S.M. Girvin, A.H. MacDonald, P.M. Platzman // Physical Review Letters. – 1985. – Vol. 54, Iss. 6. – P. 581–583.
- 192. Halperin, B.I. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states // Physical Review Letters. 1984. Vol. 52, Iss. 18. P. 1583–1586.
- 193. Laughlin, R.B. Excitons in the fractional quantum Hall effect // Physica B. 1984. Vol. 126 B-C, Iss. 1–3. P. 254–259.
- 194. Elliott, R.J. Theory of fine structure on the absorption edge in semiconductors / R.J. Elliott, R. Loudon // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 1959. – Vol. 8. – P. 382–388.

- 195. Горьков, Л.П. К теории экситона Мотта в сильном магнитном поле / Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский // ЖЭТФ. 1967. Т. 53, № 2. С. 717–722.
- 196. Wilczek, F. Quantum mechanics of fractional-spin particles // Physical Review Letters. 1982. Vol. 49, Iss. 14. P. 957–959.
- 197. Tao, R. Fractional statistics and fractional quantized Hall effect / R. Tao, Y.-S. Wu // Physical Review B. 1985. Vol. 31, Iss. 10. P. 6859–6860.
- 198. Laughlin, R.B. Scaling of conductivities in the fractional quantum Hall effect / R.B. Laughlin et al. // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 2. P. 1311–1314.
- 199. Maki, K. Static and dynamic properties of a two-dimensional Wigner crystal in a strong magnetic field / K. Maki, X. Zotos // Physical Review B. 1983. Vol. 28, Iss. 8. P. 4349–4356.
- 200. Kivelson, S. Cooperativeringexchange theory of the fractional quantized Hall effect / S. Kivelson et al. // Physical Review Letters. 1986. Vol. 56, Iss. 8. P. 873–876.
- 201. Chui, S.T. Solid versus fluid, and the interplay between fluctuations, correlations, and exchange in the fractional quantized Hall effect / S.T. Chui, T.M. Hakim, K.B. Ma // Physical Review B. 1986. Vol. 33, Iss. 10. P. 7110-7121.
- 202. Chui, S.T. Computer renormalization-group calculation for the fractionally quantized Hall effect // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 2. P. 1436–1438.
- 203. Kohler, H. Wigner magneto-quantum crystals from transverse charge density waves in quasi-two-dimensional space charge layers // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1985. Vol. 18, Iss. 24. P. 4671–4676.
- 204. Chang, A.M. Higher-order states in the multiple-series, fractional, quantum Hall effect / A.M. Chang et al. // Physical Review Letters. 1984. Vol. 53, Iss. 10. P. 997–1000.
- 205. Pudalov, V.M. Plateau study of the 4/3 fractional quantum Hall effect in Si MOSFETs / V.M. Pudalov, S.G. Semenchinsky // Solid State Communications. 1984. Vol. 52, Iss. 6. P. 567–569.
- 206. Kawaji, S. Activation energies of the 1/3 and 2/3 fractional quantum Hall effect in GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterostructures / S. Kawaji, J. Wakabayashi // Journal of the Physical Society of Japan. 1984. Vol. 53, Iss. 6. P. 1915–1918.
- 207. Zhang, F.C. Effect of a charged impurity on the fractional quantum Hall effect: exact numerical treatment of finite systems / F.C. Zhang et al. // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 10. P. 6920–6923.
- 208. Rezayi, E.H. Incompressible states of the fractionally quantized Hall effect in the presence of impurities: a finite-size study / E.H. Rezayi, F.D.M. Haldane // Physical Review B. 1985. Vol. 32, Iss. 10. P. 6924–6927.

Список литературы к Дополнению

- 1. Haldane, F.D.M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensedmatter realization of the «parity anomaly» // Physical Review Letters. – 1988. – Vol. 61, Iss. 18. – P. 2015–2018.
- 2. Kumar, S. Zero-magnetic field fractional quantum states / S. Kumar et al. // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122, Iss. 8. P. 086803.
- 3. Tsui, D.C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard // Physical Review Letters. 1982. Vol. 48, Iss. 22. P. 1559–1562.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение
G.A. Thomas, V.B. Timofeev A review of $N = 1$ to ∞ particle complexes in semiconductors
V.B. Timofeev Free many particle electron-hole complexes in an indirect gap semiconductor
В.Д. Кулаковский, В.Г. Лысенко, В.Б. Тимофеев Экситонные молекулы в полупроводниках73
В.Д. Кулаковский, Г.Е. Пикус, В.Б. Тимофеев Многоэкситонные комплексы в полупроводниках137
Ya.E. Pokrovskii and V.B. Timofeev Condensation of excitons and electron–hole liquids in semiconductors197
V.D. Kulakovskii and V.B. Timofeev Thermodynamics of electron–hole liquid in semiconductors
И.В. Кукушкин, С.В. Мешков, В.Б. Тимофеев Плотность состояний двумерных электронов в поперечном магнитном поле
Э.И. Рашба, В.Б. Тимофеев Квантовый эффект Холла
Научное издание

Электронные и электронно-дырочные корреляционные явления в объемных полупроводниках и наноструктурах

Тематический цикл обзоров TOM 1

Ответственный за выпуск О. Левченко Главный редактор Б. Николаев Научный редактор А. Горбунов Верстка, подготовка фото, набор текста Е. Николаева

Подписано в печать ???.03.2020. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «PT Serif». П.л. 29,5. Печать офсетная. Тираж 100. Зак. №

