

В.Б. ШИКИН
Ю.П. МОНАРХА

ДВУМЕРНЫЕ
ЗАРЯЖЕННЫЕ
СИСТЕМЫ
В ГЕЛИИ

ББК 22.37
Ш 57
УДК 538.941

Серия издается с 1948 г.

Шиккин В.Б., Монарх Ю.П. Двумерные заряженные системы в гелии. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — (Совр. пробл. физики). — ISBN 5-02-014224-7. — 160 с.

Обсуждаются физические причины, приводящие к локализации зарядов вблизи поверхности гелия. Исследован спектр поверхностных заряженных состояний в различных внешних полях. Детально изучены взаимодействие электронов с колебаниями свободной поверхности гелия и вклад этого взаимодействия в различные кинетические характеристики электронной системы над гелием. Дано описание коллективных явлений на заряженной поверхности гелия, наиболее фундаментальным из которых является вигнеровская кристаллизация в двумерной заряженной системе над гелием. Предлагается введение в физику двумерных заряженных систем в различных полупроводниковых структурах. Все разделы книги сопровождаются обсуждением экспериментальной информации, находящейся, как правило, в хорошем согласии с предсказанными теории.

Для научных работников, а также аспирантов и студентов, специализирующихся в области твердого тела.

Табл. 1. Ил. 84. Библиогр. 295 наим.

Редактор
член корреспондент АН СССР Л.П. Пытловский

1604110000-126
III 053 (02)-89 87-89

ISBN 5-02-014224-7

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Список принятых сокращений и обозначений	6
Глава 1. Структура заряженных комплексов в гелии	7
§ 1. Положительные ионы (катионы)	7
§ 2. Отрицательные ионы (анионы)	13
Глава 2. Ионные и электронные состояния вблизи плоской поверхности гелия	18
§ 3. Поверхностные ионные состояния	18
§ 4. Поверхностные электронные состояния над плоской границей гелия . .	20
§ 5. Поверхностные электронные состояния в присутствии прижимающего электрического поля	25
§ 6. Спектр поверхностных электронов (ПЭ) при наличии магнитного поля . .	31
§ 7. Поверхностные электроны над гелиевой пленкой	34
Глава 3. Взаимодействие электронов с поверхностными возбуждениями жидкого гелия	37
§ 8. Понятие о рипплонах	37
§ 9. Теория электрон-рипплонного рассеяния	39
§ 10. Релаксация импульса и подвижность поверхностных электронов . .	45
§ 11. Скорость релаксации энергии поверхностных электронов	51
§ 12. Нелинейная вольт-амперная характеристика	54
§ 13. Эффективная масса поверхностных электронов в неравновесных условиях	64
§ 14. Кинетические явления при взаимодействии электронных пузырьков со свободной поверхностью жидкого гелия	66
Глава 4. Деформационные явления	70
§ 15. Деформационная локализация отдельного электрона	70
§ 16. Отделенные многоэлектронные луксы	81
§ 17. Неустойчивость и реконструкция поверхности гелия. Луночный хрусталь	87
Глава 5. Коллективные эффекты. Кулоновская кристаллизация	100
§ 18. Двумерные плазмы	100
§ 19. Вигнеровская кристаллизация двумерного электронного газа над идеально плоской поверхностью	105
§ 20. Электронный кристалл над реальной поверхностью гелия	111
Глава 6. Двумерные заряженные системы в полупроводниках	126
§ 21. Основные характеристики 2-d-электронной системы в кванционном слое на основе кремния	127
§ 22. Заряженные слои в полупроводниках с узкой щелью, гетероструктурами	141
Список литературы	151

ПРЕДИСЛОВИЕ

Заряженные частицы в плотном гелии (твердом, жидким или газообразном), как правило, представляют собой различные сложные комплексы, состоящие из собственно заряженной частицы и окружающей области гелия, взаимодействующей с зарядом. Эти комплексы, получившие название гелиевых ионов, открыли новые экспериментальные возможности и позволили наблюдать большое число различных, часто очень красивых эффектов. Экспериментальные и теоретические исследования гелиевых ионов за относительно короткое время (за последние двадцать лет) составили целое направление в физике гелия.

Одной из перспективных задач в этой области оказалось изучение взаимодействия заряженных частиц со свободной поверхностью гелия и границей расслоения растворов ^3He – ^4He . Кроме различных эффектов, расширяющих наши представления о свойствах квантовых жидкостей и их поверхности, на этом пути удалось создать двумерные заряженные системы, обладающие рядом уникальных свойств в смысле чистоты и слабости взаимодействия с жидкой подложкой, идеально приспособленные для изучения различных классических коллективных эффектов кулоновского происхождения в двумерных системах низкой плотности. Именно здесь были впервые обнаружены специфические двумерные плазменные колебания, детально изучена интересная разновидность этих колебаний – так называемые краевые магнетоплазмоны, заложены основы физики коллективной автолокализации (многозёлётронные пузырьки и лунки на поверхности жидкого гелия), даны прекрасные примеры прямого наблюдения различных эффектов потери устойчивости заряженной поверхности жидкости. Особенno следует отметить экспериментальное доказательство существования предсказанной почти полвека тому назад кулоновской (ви-гнеровской) кристаллизации электронного газа низкой плотности и успешное исследование различных свойств этого кристалла (детали фазовой диаграммы, температурная зависимость модуля сдвига, теплоемкость кристалла и т.д.). Перечисленные достижения определили повышенный интерес к изучению свойств заряженной поверхности гелия и заметный прогресс в освоении этой тематики. Немаловажным обстоятельством, стимулирующим развитие работ с электронами над гелием, является существенная взаимодополняемость этих исследований с параллельными работами в области изучения 2 – d -заряженных систем в различных полупроводниковых устройствах – обширной деятельностью, известной своими фундаментальными достижениями и разнообразными приложениями в микрозелектронике.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

Целью данной книги является систематическое описание различных физических явлений, происходящих на заряженной поверхности гелия. Отдельные части этой программы изложены в ряде интересных обзоров, написанных авторами, активно участвовавшими в изучении свойств заряженной поверхности гелия [П1]–[П8]. Однако картина в целом пока не обсуждалась. При отборе материала предпочтение отдавалось эффектам, интерпретация которых к настоящему времени (т.е. к концу 1987 г.) является общепринятой. Для удобства изложения, а также для полноты описания поведения заряженных частиц вблизи свободной поверхности гелия книга содержит необходимую информацию о структуре и основных динамических характеристиках гелиевых ионов в объеме жидкого гелия (глава 1). Кроме того, глава 6 посвящена краткому обзору свойств двумерных заряженных систем в полупроводниках.

Основное физическое содержание книги не требует знаний, выходящих за рамки стандартных курсов квантовой механики, статистической физики и физической кинетики. Дополнительные сведения читатель может почерпнуть в соответствующих томах известного курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица.

Настоящая книга не является исчерпывающей монографией по теории двумерных заряженных систем. Многие интересные явления не удалось обсудить по причинам, связанным с ограниченностью объема книги и личными наклонностями авторов. В результате наиболее полно представленной оказалась тематика, касающаяся описания различных особенностей в поведении двумерных заряженных систем на поверхности жидкого гелия, обусловленных "мягкостью" жидкой подложки. Именно эти особенности наряду с уникальной чистотой выделяют двумерную заряженную систему над гелием из других возможных 2 – d -заряженных систем, что и определило, в конечном итоге, успех в решении ряда фундаментальных проблем физики двумерных явлений.

Авторы глубоко признательны Ф. Вильямсу, С. Граймсу, М. Коулу, Ю.З. Ковдре, П. Лейдереру, Ф. Платцману, А.С. Рыбалко, М. Сайто, Х. Фукуюме, М.С. Хайкину, В.С. Эдельману за стимулирующие дискуссии и сотрудничество. Мы благодарны также Л.П. Питаевскому и В.С. Эдельману, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

* * *

- П1. Cole M.W. // Rev. Mod. Phys. – 1974. – V. 46. – P. 451.
- П2. Шикин В.Б., Монарха Ю.П. //ФНТ. – 1975. – Т. 1. – С. 957.
- П3. Crandall R.S. // Surf. Sci. – 1976. – V. 58. – P. 266.
- П4. Grimes C.C., Adams G. // Surf. Sci. – 1980. – V. 98. – P. 1.
- П5. Эдельман В.С. // УФН. – 1980. – Т. 130. – С. 675.
- П6. Williams F.J.B. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – P. 371.
- П7. Монарха Ю.П., Шикин В.Б. // ФНТ. – 1982. – Т. 8. – С. 563.
- П8. Platzmann P. // Surf. Sci. – 1986. – V. 170. – P. 55.

ПЭ	– поверхностные электроны
ЦР	– циклотронный резонанс
ВЧ	– высокая частота
ВК	– вигнеровский кристалл
ВАХ	– вольт-амперная характеристика
МДП	– металл – диэлектрик – полупроводник
2 – d -система	– двумерная система
e, m	– заряд и масса свободного электрона
n_s	– поверхностная концентрация электронов
E_1	– напряженность внешнего прижимающего электрического поля
α, ρ, ϵ	– коэффициент поверхностного натяжения, плотность и диэлектрическая проницаемость жидкого гелия
$\xi(r)$	– смещение свободной поверхности жидкого гелия
$\nu, \tilde{\nu}$	– импульсная и энергетическая частоты столкновения

ГЛАВА I

СТРУКТУРА ЗАРЯЖЕННЫХ КОМПЛЕКСОВ В ГЕЛИИ

В однородном гелии наблюдаются, по крайней мере, три качественно разных ионных комплекса: положительные ионы, отрицательные ионы и заряженные вихревые кольца. Каждый из этих комплексов заслуживает специального внимания. Ниже мы обсудим свойства первых двух комплексов.

§ 1. Положительные ионы (катионы)

1.1. Положительными ионами или катионами в жидком гелии обычно называют заряженные частицы с затравочной массой порядка массы атома гелия. Для описания различных свойств таких частиц в жидком гелии существенным оказывается учет поляризационного взаимодействия заряда с окружающим гелием. Это обстоятельство, впервые отмеченное Аткинсоном [1], позволило ему предложить простую модель катиона в виде заряда, окруженного сферой затвердевшего гелия. Радиус сферы оценивается следующим образом. Электрическое поле точечного заряда $E = e/r^2$ вызывает в окружающей жидкости избыточное давление P_α поляризационного происхождения:

$$P_\alpha = \alpha_0 e^2 / (2v_4 r^4), \quad r > a, \quad (1.1)$$

спадающее на расстоянии степенным образом. Здесь α_0 – поляризуемость атома, v_4 – эффективный объем на один атом жидкости, r – расстояние до центра иона, a – межатомное расстояние.

Учитывая теперь, что при давлении $P_s = 25$ атм жидкий гелий затвердевает, из равенства $P_\alpha(r) = P_s$ находим радиус затвердевания R_+ :

$$R_+^4 = \alpha_0 e^2 / (2v_4 P_s). \quad (1.2)$$

Макроскопическое определение радиуса R_+ (1.2) имеет смысл при выполнении неравенства $R_+ \gg a$. Числовые оценки R_+ с использованием значений $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$, $v_4 \approx a^3$ дают для R_+ величину $R_+ \approx (6 \div 7) \text{ \AA}$ при $a \approx 3,5 \text{ \AA}$. Другими словами, неравенство $R_+ > a$ действительно выполняется, но с малым запасом.

Эффективная масса M_+ катиона в модели Аткинсона складывается из массы твердого ядра радиуса R_+ , массы от избыточной плотности жидкости вокруг ядра и присоединенной массы. В результате M_+ имеет масштаб $M_+ \approx (60 \div 80)m_4$, где m_4 – масса атома ${}^4\text{He}$.

Специфика жидкого гелия в модели Аткинсона проявляется в том, что для гелия существует конечное, сравнительно малое по величине давление

затвердевания P_s . В результате даже малой поляризуемости достаточно для образования квазимакроскопической области радиуса R_+ затвердевшего гелия вокруг положительного заряда, вызывающей резкое возрастание эффективной массы катиона и уменьшение его подвижности.

Простота и физическая наглядность модели Аткинсона привели к тому, что авторы последующих работ все наблюдаемые свойства катионов пытались объяснить в рамках модели твердого шарика. Наиболее полно соответствующая теория изложена в обзоре Архипова [2]. Однако к настоящему времени накопилось достаточно число фактов, не укладывающихся в рамки модели Аткинсона и требующих для своего объяснения более последовательного, чем в указанной модели, учета взаимодействия зарядов с жидким гелием. (Примеры такого несоответствия будут обсуждаться ниже.) Тем не менее модель Аткинсона сохраняет свою актуальность в качестве исходного приближения, позволяющего оценивать масштаб различных эффектов.

При более последовательном описании свойств катиона в качестве основных его характеристик следует назвать зону избыточного давления P_α (1.1) и величину эффективной массы M_+ , полученную экспериментально*. Резонансная методика измерения M_+ [4, 5]**) дает значение

$$M_+ = (45 \pm 2)m_4, \quad (1.3)$$

заметно отличающееся от оценки M_+ в модели Аткинсона. Что касается радиуса R_+ , то в последовательной теории он не играет универсальной роли и, в принципе, может вообще не использоваться.

1.2. Подвижность гелиевых ионов при низких температурах имеет конечное значение в основном за счет одночастичных столкновений с тепловыми и примесными возбуждениями гелия. Формальной основой для расчета подвижности в подобных условиях является решение соответствующего кинетического уравнения или более общие построения, использующие формализм Кубо. Учитывая, что основные экспериментальные факты находят свое объяснение в рамках кинетической теории, в дальнейшем мы ограничимся изложением следствий именно такого рассмотрения.

Классическая теория подвижности ионов в газах, созданная трудами Максвелла, Больцмана, Ланжевена, Чемпена – Энскога, Кихары и других ученых, содержит исчерпывающие рекомендации, относящиеся к методам решения кинетического уравнения (по этому поводу можно рекомендовать, например, обзор Смирнова [6]). Тем не менее современные авторы снова и снова обращаются к задаче определения подвижности, упрощая ее решение и уточняя границы применимости. В связи с этим имеет смысл записать без вывода общее выражение для подвижности μ тяжелой частицы M в газе возбуждений массы m , имеющих закон дисперсии $\epsilon(p)$, распределение по энергиям $n(\epsilon)$ и импульс $p = mv$, составив, например,

* Строгий теоретический расчет величины M_+ пока что отсутствует, хотя попытки его осуществления уже имеются [3].

**) Обсуждение этой методики будет приведено ниже, в § 3, посвященном поверхностным ионным состояниям.

на работу Дэвиса и Дагонье [7],

$$\frac{e}{\mu} = - \frac{m^2}{3} \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \int \frac{\partial n}{\partial e} \sigma_{tr}(v) v^3 dv,$$

$$\sigma_{tr} = \int \sigma(v, \theta) (1 - \cos \theta) d\Omega,$$
(1.4)

где σ_{tr} – транспортное сечение рассеяния.

Авторы [7] показали, что определение (1.4) законно не только при выполнении неравенства

$$\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \ll 1,$$
(1.5)

но и в более сложных случаях (например, в вырожденных растворах ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$), когда малым параметром теории оказывается величина

$$\left(\frac{m\epsilon_F}{MT} \right)^{1/2} \ll 1,$$
(1.6)

где ϵ_F – энергия Ферми, T – температура.

Соответствующее и, по-видимому, наиболее простое определение подвижности в терминах волновых чисел, удобное для вычисления фононной подвижности ионов, содержится в работе Бейма, Баррера, Петтика [8]:

$$\frac{e}{\mu} = - \frac{\hbar^2}{6\pi^2} \int dq q^4 \frac{\partial n}{\partial q} \sigma_{tr}(q).$$
(1.7)

Таким образом, задача теории сводится, по существу, к определению транспортного сечения рассеяния возбуждений данного сорта на гелиевых ионах и последующему интегрированию выражений (1.4) либо (1.7).

Фононная подвижность положительных ионов в области температур $T \lesssim 0,5$ К определяется в основном столкновениями катиона с длинноволновыми фононами. В самом деле, радиус катиона составляет $R_+ \approx 6$ Å, длина волны λ_{ph} теплового фона в области температур $T \lesssim 0,5$ К при скорости звука в ${}^4\text{He}$, равной $c_0 = 237$ м·с⁻¹, имеет порядок $\lambda_{ph} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ см, т.е. $R_+ \ll \lambda_{ph}$. В подобных условиях сечение рассеяния длинноволновых фононов на катионе имеет вид $\sigma_{tr} \sim q^4$ (рэлеевское рассеяние; см. [9, с. 421]),

$$\sigma_{tr}(q) = \frac{11 + 2\delta^2 - 4\delta}{9(1 + \delta)^2} R_+^6 q^4, \quad \delta = \frac{\rho_I}{\rho_s}.$$
(1.8)

Здесь ρ_I и ρ_s – плотности жидкости и твердой сферы.

Фононная подвижность катионов μ_{ph}^+ , полученная из (1.7) и (1.8), оказывается пропорциональной T^{-8} :

$$\frac{e}{\mu_{ph}^+} = \frac{2\zeta(8)8!}{27\pi} \frac{(11 - 4\delta + 2\delta^2)}{(1 + \delta)^2} \hbar R_+^6 \left(\frac{T}{\hbar c_0} \right)^8,$$
(1.9)

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Четыре степени температуры в μ_{ph}^+ происходят от сечения рассеяния, три – от числа фононов в жидким ге-

лии при низких температурах и одна степень характеризует передачу импульса от фононов иону.

Наиболее четкие экспериментальные сведения о фононной подвижности катионов получены в работе Шварца и Старка [10]. Нужно сказать, что наблюдение фононной подвижности катионов в чистом виде оказывается довольно сложной экспериментальной задачей. Со стороны высоких температур эта подвижность сменяется ротонной, а в области низких температур становится заметным и влияние остаточных примесей. Результаты измерений подвижности μ^+ вместе с предполагаемыми вкладами в $\mu^+(T)$ от ротонов, фононов и примесных возбуждений приведены на рис. 1.1. Количественная обработка данных на рис. 1.1 позволяет заключить, что

$$\mu_{ph}^+ \propto T^{-\alpha}, \quad \alpha = 7.5 \pm 1, \quad R_+ \approx 5 \text{ Å},$$

т.е. температурная зависимость μ_{ph}^+ близка к расчетной, но числовое значение R_+ меньше, чем это следует из модели Аткинса. Подобное несоответствие вполне допустимо, так как константа пропорциональности в зависимости $\sigma_{tr}(q)$ (1.8) весьма условна. Так, например, отказавшись от модели твердого шарика и учитывая лишь существование зоны уплотнения вокруг затравочного заряда, можно получить сечение рассеяния длинноволновых фононов на катионе в следующем виде:

$$\sigma_{tr}(\omega) = 4\pi\Lambda^2 \omega^4, \quad \Lambda = \int_0^\infty \left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(r)} \right] r^2 dr,$$
(1.10)

где c_0 и $c(r)$ – невозмущенная и локальная (зависящая вблизи центра катиона от координат) скорости звука.

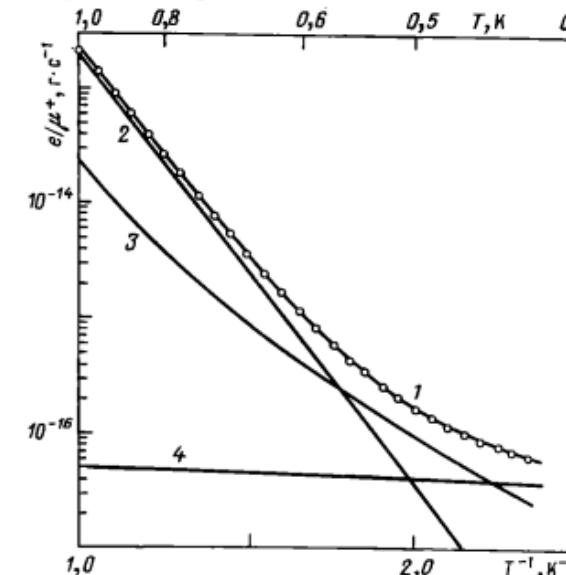


Рис. 1.1. Температурная зависимость обратной величины подвижности [10]: 1 – экспериментальные точки; 2 – вклад ротонов; 3 – вклад фононов; 4 – предполагаемый вклад остаточных примесей

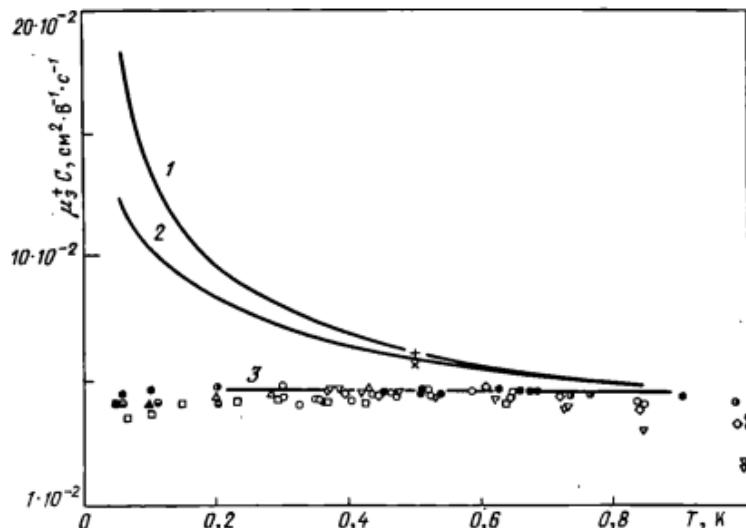


Рис.1.2. Температурная зависимость примесной подвижности катионов [11]. Сплошные линии: 1 – подвижность в модели Аткинса с геометрическим сечением рассеяния радиуса $R_+ \sim 7 \text{ \AA}$; 2 – та же модель с квантовыми поправками к сечению рассеяния; 3 – определение μ_3^+ из (1.14). Экспериментальные точки для $\mu_3^+ C$ получены в растворах ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ с разной плотностью ${}^3\text{He}$ (от 10^{-3} до 10%); $C = n_3/n_4$

Никаких попыток использования числового значения константы из (1.10) для интерпретации структуры катиона на малых расстояниях пока что не предпринималось.

1.3. Подвижность массивной твердой сферы в большемановском газе примесных возбуждений должна иметь температурную зависимость*) $\mu_3 \propto T^{-1/2}$. Это предсказание, справедливое для гелиевых ионов в рамках модели Аткинса, находится в качественном противоречии с наблюдениями. В случае катионов примесная подвижность μ_3^+ в широком интервале температур не зависит от T . Этот факт наглядно иллюстрируется графиками температурной зависимости $\mu_3^+(T)$, полученными в [11, 12] и приведенными на рис. 1.2.

Основной причиной непригодности модели твердых шаров для описания взаимодействия катиона с мало энергичными примесными возбуждениями является наличие вокруг положительного иона зоны повышенного давления, спадающего на расстоянии степенным образом. Набор параметров возникающей задачи рассеяния оказывается таким, что основной вклад в сечение рассеяния тепловых примесных возбуждений на катио-

не вносят "хвосты" этого избыточного давления на расстояниях, заметно превышающих радиус Аткинса.

Для количественного описания взаимодействия катиона с примесными возбуждениями следует иметь в виду, что атомы ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, находясь в окрестности затравочного заряда, испытывают влияние двух сил: поляризационного притяжения к центру катиона и отталкивания за счет избыточного давления вблизи катиона. Для атомов ${}^4\text{He}$ эти силы компенсируют друг друга, в результате чего в окрестности исходного заряда возникает стационарная область повышенной плотности растворителя. Что касается атомов ${}^3\text{He}$, имеющих одинаковую с атомами ${}^4\text{He}$ поляризуемость, но несколько больший эффективный объем ($v_3/v_4 \approx 1.27$ [13]), то для них сила отталкивания превосходит силу притяжения. Разность сил, а с ней и взаимодействие между катионами и примесным возбуждением $V_3^+(r)$, оказываются отличными от нуля. С учетом определения давления (1.1) в окрестности катиона взаимодействие V_3^+ , носящее характер отталкивания, выглядит так:

$$V_3^+(r) = \frac{\beta^2}{r^4}, \quad \beta^2 = \frac{\alpha_0 e^2}{2} \left(\frac{v_3}{v_4} - 1 \right). \quad (1.11)$$

Макроскопический характер определения энергии V_3^+ (использовано определение давления в жидкости и т.д.) приводит к необходимости ограничения энергии налетающих примесных возбуждений со стороны больших значений. Подходящим критерием для этого является требование

$$r_{\min} > R_+,$$

где R_+ – радиус Аткинса, а r_{\min} – минимальное расстояние, на которое приближается примесное возбуждение к центру катиона при лобовом столкновении

$$V_3^+(r_{\min}) \sim T, \quad r_{\min}^4 \approx \frac{\beta^2}{T}. \quad (1.12)$$

Для температур $T \lesssim 1 \text{ K}$ величина r_{\min} , следующая из приведенного равенства, имеет оценку $r_{\min} \gtrsim 9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, т.е. неравенство $r_{\min} > R_+$ действительно выполняется. Следовательно, задачу о рассеянии на катионе примесных возбуждений с энергией, меньшей 1 К, можно решать как задачу о рассеянии на чисто степенном потенциале без учета структуры ядра катиона. Это обстоятельство впервые отмечено в работе Есельсона и др. [11] и независимо Бовли и Лекнером [14].

Квантовая нерелятивистская теория рассеяния на потенциале $V(r) \propto r^{-4}$ разработана достаточно полно [15]. Соответствующие асимптотики транспортного сечения рассеяния примесных возбуждений на потенциале $V(r)$ (1.11) выглядят так:

$$\sigma_{tr}(q) = \begin{cases} 8\pi f_0/3q, & qf_0 \gg 1, \\ 4\pi f_0^2 (1 - 16/15 \pi qf_0), & qf_0 \ll 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $f_0^2 = 3m_3\beta^2\hbar^{-2}$; q и m_3 – волновое число примесного возбуждения и его масса.

Подставляя квазиклассическую асимптотику $\sigma_{tr}(q)$ (1.13) в (1.4), находим [11, 16]

$$\mu_3^+ = \frac{e}{5.32n_3\beta\sqrt{m_3}}, \quad (1.14)$$

где n_3 – концентрация примесных атомов в растворе, β определено (1.11). Подвижность (1.14) не зависит от температуры. Этот результат для взаимной диффузии двух газов, взаимодействующих между собой со знаком отталкивания по закону $V(r) \propto r^{-4}$, был известен еще Максвеллу (см. [16]). С учетом конкретного значения β подвижность (1.14) хорошо описывает экспериментальные данные не только в смысле правильной температурной зависимости, но и по абсолютной величине без привлечения подгоночных параметров. Сравнение расчетных и экспериментальных значений примесной подвижности μ_3^+ , выполненное в [11], приведено на рис. 1.2.

§ 2. Отрицательные ионы (анионы)

2.1. Оригинальной, а в свое время и неожиданной, оказалась структура отрицательных ионов в жидком гелии, возникающих при введении в гелий какой-нибудь легкой частицы (например, электрона, который наиболее устойчив и доступен в экспериментальной практике). Такие частицы создаются в гелии пузырек, локализуясь внутри сферической полости (Феррел [17], Карери и др. [18]).

Образование пузырьков становится возможным благодаря стечению ряда обстоятельств. Во-первых, отдельный атом гелия, являясь устойчивой квантовой системой, не присоединяет к себе избыточного электрона на расстояниях порядка боровской орбиты. По этой причине свободный электрон, искусственно введенный в плотный гелий и вынужденный двигаться на межатомных расстояниях вблизи отталкивающих его отдельных атомов, обладает большой энергией нулевых колебаний V_0 . В оптической модели, широко используемой в настоящее время для описания взаимодействия электронов с плотным гелием, эта энергия оценивается следующим выражением:

$$V_0 = \frac{2\pi\hbar^2 f_0}{m} n, \quad (2.1)$$

где n – плотность гелия, m – масса электрона, f_0 – эффективная длина рассеяния электрона на атоме гелия. Числовое значение f_0 выбирается таким, чтобы величина V_0 , следующая из (2.1) при $n \approx 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, совпадала с экспериментально измеряемой работой внедрения электрона в жидкий гелий $V_0 \approx 1.0 \text{ эВ}$ ^{*)}. Отсюда $f_0 \approx 0.62 \text{ \AA}$. Еще одно свойство гелия, способствующее образованию пузырьков, – малая величина поверхностного натяжения на границе жидкости – пар жидкого гелия. Вследствие

этого полная энергия образования пузырька W , допускающая простую оценку, оказывается намного меньше, чем V_0 , так что электрону действительно выгодно локализоваться, создавая тем самым пузырек.

Оценка параметров аниона, выполненная впервые Феррелом [17] и несколько позднее – Карери, Фазоли и Гаэта [18]^{*)}, элементарна и в то же время достаточно точна вследствие квазимакроскопичности возникающего комплекса (формально – ввиду малости параметра $m/m_4 \ll 1$). Речь идет о минимизации полной энергии аниона

$$W = (\pi^2 \hbar^2 / 2m R_-^2) + 4\pi\alpha R_-^2$$

по радиусу R_- ; здесь m – масса свободного электрона, α – коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности гелия. В результате получаем

$$R_-^4 = (\pi\hbar^2 / 8m\alpha), \quad (2.2)$$

после чего энергия W принимает вид

$$W = 4\pi\hbar(\pi\alpha/2m)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Числовое значение R_- в жидком ${}^4\text{He}$ при $\alpha = 0.36 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-2}$ оказывается порядка $R_- \approx 18 \text{ \AA}$. При этом энергия W из (2.3) имеет масштаб $W \approx 0.1 \text{ эВ}$, т.е. $W \ll V_0$. Таким образом, локализация электрона явно выгодна.

Следует отметить, что в обычных условиях, когда внешнее давление отсутствует, поляризационные силы, играющие основную роль в формировании катионов, практически "неощущимы" при образовании пузырька благодаря хорошо выраженному неравенству $R_- \gg R_+$.

Пренебрегая поляризацией гелия вокруг аниона и учитывая малость массы электрона, легко приходим к выводу, что эффективная масса аниона M_- должна совпадать с его присоединенной гидродинамической массой

$$M_- = 2/3 \pi R_- \rho \quad (2.4)$$

(ρ – плотность гелия).

Резонансное измерение M_- дает следующий результат [5]:

$$M_- = (243 \pm 5)m_4, \quad (2.5)$$

что соответствует значению R_- :

$$R_- = (1.74 \pm 0.02) \cdot 10^{-7} \text{ см}. \quad (2.6)$$

Согласие между теоретическими (2.2) и экспериментальными (2.6) зна-

^{*)} Возможность образования легкими частицами (электронами, позитронами и т.д.), введенными в гелий, локализованных состояний внутри пустого пузырька была впервые отмечена Феррелом [17] в связи с особенностями поведения орто- и пара-позитрония в жидком гелии. Однако исчерпывающее доказательство существования пузырьков стало возможным лишь при введении в гелий электронов [18]. В настоящее время возникновение заряженных пузырьков наблюдается и в других неполярных жидкостях: неоне и водороде [21]. Интересно отметить, что введение в плотный газообразный гелий позитронов приводит к возникновению не пузырьков, а кластеров [22]. Здесь же уместно обратить внимание на зависимость величины и даже знака длины f_0 из (2.1) от энергии электронов, взаимодействующих с водородом [23].

^{*)} Экспериментальное определение величины V_0 было выполнено разными авторами. Первые опубликованные данные о V_0 принадлежат Соммеру [19].

чениями R_- следует признать вполне удовлетворительным. Это соответствие можно улучшить, решив задачу о локализации электрона более тщательно. Авторы [20], осуществившие эту программу, нашли теоретическое значение R_- равным 17,0 Å.

2.2. На первый взгляд, фононная подвижность анионов при низких температурах $T < 1$ К (там, где $\lambda_{ph} > R_-$) должна иметь температурную зависимость, аналогичную катионной, т.е. $\mu_{ph}^- \sim T^{-8}$, и речь может идти лишь об изменении числовой константы в (1.9) с учетом значения радиуса аниона $R_- \approx 18$ Å. Эксперименты Шварца и Старка [24] опровергли это, казалось бы, естественное предположение. Результаты измерений, приведенные на рис. 1.3, свидетельствуют о наличии сильной особенности в температурной зависимости $\mu_{ph}^-(T)$ в окрестности $T = 0,3 \div 0,5$ К, где произведение $\mu_{ph}^- T^3$ не зависит от температуры. И только с понижением температуры в область $T < 0,2$ К намечается тенденция к появлению зависимости $\mu_{ph}^- \sim T^{-8}$.

Изящное количественное объяснение этой особенности в температурной зависимости μ_{ph}^- , свободное от подгоночных параметров, было дано

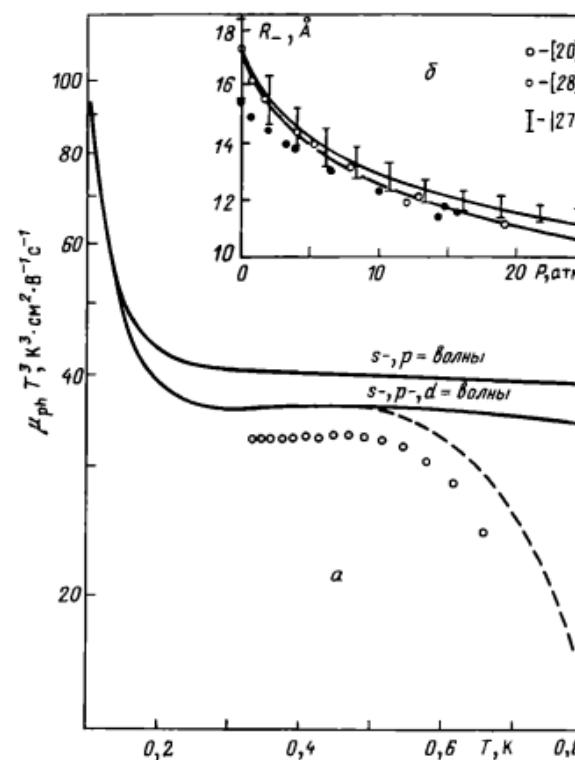


Рис. 1.3. а – Температурная зависимость подвижности анионов в чистом ${}^4\text{He}$. Сплошные линии – теория [8], кружки – эксперимент [24].
б (врезка) – Зависимость радиуса аниона R_- от внешнего давления [27]

в работе Бейма и др. [8]. Оказалось, что теория фононной подвижности аниона должна строиться с учетом существования собственных колебаний поверхности пузырька и возможности резонансного рассеяния тепловых фононов на этих собственных колебаниях. Справедливости ради нужно отметить, что вычисление спектра собственных колебаний поверхности аниона было выполнено ранее другими авторами [25]. Однако лишь авторы работы [24] и вслед за ними Бейм и др. [8] обратили внимание на то обстоятельство, что порядок основной частоты собственных колебаний аниона совпадает с частотой тепловых фононов при $T \sim 0,4$ К, и, следовательно, должно возникать резонансное рассеяние подобных фононов на анионе.

Спектр колебаний поверхности заряженного пузырька возникает, как и в классической задаче о колебаниях несжимаемой капли, из уравнения баланса всех давлений на поверхности деформированного пузыря. Единственной величиной, нуждающейся в специальном определении, является электронное давление на поверхности аниона

$$P_i = \Pi_{ik} n_k, \quad \Pi_{ik} = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_i \partial x_k} + \text{к.с.} \right). \quad (2.7)$$

Здесь Π_{ik} – тензор потока импульса для электрона, локализованного внутри пузырька, n_k – нормаль к поверхности аниона. Предполагается, что волновая функция ψ электрона в пузырьке успевает адабатически подстраиваться к малым деформациям поверхности.

Собирая вместе все добавки к давлению на колеблющейся поверхности: электронную составляющую, добавку за счет сил поверхностного натяжения и гидродинамическую часть давлений, учитывающую нестационарность задачи, находим из условия равенства нулю суммы всех давлений следующий спектр колебаний поверхности аниона:

$$\omega_0^2 = 8\alpha/\rho R_-^3, \\ \omega_l^2 = \frac{\alpha}{\rho R_-^3} (l+1)(4\pi s_l + l^2 + l + 2), \quad s_l = \frac{j'_l}{j_l} - \frac{j''_0}{2j'_0}, \quad l \geq 2, \quad (2.8)$$

α – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность гелия, $j_l(x)$ – сферические функции Бесселя. Основная частота ω_0 , соответствующая радиальным колебаниям пузырька, для $\alpha \approx 0,36 \cdot 10^{-7}$ Дж · см⁻² и $R_- = 18$ Å по порядку величины равна $\omega_0 \approx 10^{10} \div 10^{11}$ с⁻¹, т.е. действительно находится в области фоновых частот с энергией порядка 0,3–0,5 К. Сечение рассеяния таких фононов при наличии одной резонансной частоты ω_0 имеет хорошо известный вид [26]:

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi R_-^2}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + q^2 R_-^2}, \quad (2.9)$$

где q – волновое число фонона, $qR_- \ll 1$.

В более общем случае нескольких собственных частот в сечении появляются резонансные пики, отвечающие другим резонансам. Количественная зависимость $\sigma(q)$ для аниона, рассчитанная в [8], приведена на рис. 1.4. Соответствующая подвижность аниона, следующая из (1.7) с привлечением

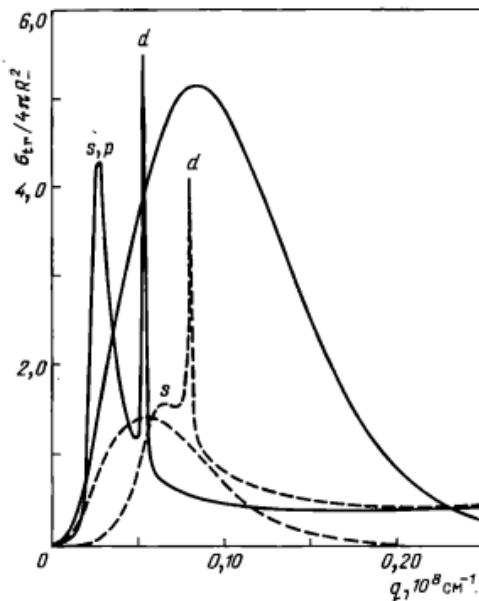


Рис. 1.4. Транспортное сечение рассеяния фононов на анионе в чистом ^3He в зависимости от волнового числа фононов — сплошная линия. Температурный фактор $q^4 \delta n(q)/\partial q$, входящий в определение ϵ/μ (1.7), дан в произвольных единицах для $T = 0,5 \text{ K}$ [8]. Штриховой линией изображены соответствующие величины при наличии внешнего давления $P = 24,78 \text{ atm}$ [27]

числовых значений $\sigma(q)$ (см. рис. 1.4), изображена на рис. 1.3, *a*, вместе с экспериментальными точками. Учитывая отсутствие в теории подгоночных параметров, необходимо признать, что соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями $\mu_{ph}(T)$ очень хорошее.

Для полноты картины имеет смысл привести результаты исследования влияния внешнего давления P на фоновую подвижность анионов, полученные Остермайером [27]. Внешнее давление уменьшает радиус пузырька и, следовательно, увеличивает значение частот его собственных колебаний. В результате область резонансного рассеяния фононов анионом смещается в сторону более высоких температур. Количественные изменения, происходящие с резонансным сечением рассеяния фононов на анионе при наложении внешнего давления, представлены также на рис. 1.4. Зависимость радиуса аниона от внешнего давления, следующая из экспериментальных данных по фоновой подвижности анионов, приведена на рис. 1.3, *b*. На том же рисунке приведены результаты других экспериментов по установлению зависимости R_- от P , а также результаты теоретического расчета [20]. Совпадение различных экспериментальных данных между собой и соответствие их расчетным значениям $R_-(P)$ можно считать хорошим.

ГЛАВА 2

ИОННЫЕ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГЕЛИЯ

Переходя к обсуждению свойств заряженных частиц вблизи свободной поверхности жидкого гелия, отметим прежде всего, что эта деятельность возникла около двадцати лет тому назад в связи с естественным расширением круга исследований свойств гелиевых ионов. Однако скоро выяснилось, что двухмерные заряженные системы на поверхности жидкого гелия обладают рядом нетривиальных свойств, заслуживающих специального внимания.

Следует отметить, что вблизи границы жидкого гелия возможно существование двух типов заряженных поверхностных состояний: ионных — под поверхностью жидкого гелия либо на границе расслоения раствора ^3He — ^4He и электронных — над поверхностью гелия. Оба варианта реализованы экспериментально и в настоящее время широко исследуются. К описанию поверхностных заряженных состояний, как ионных, так и электронных, мы теперь приступаем.

§ 3. Поверхностные ионные состояния

Рассмотрим заряженную частицу на некотором расстоянии z под свободной поверхностью жидкого гелия. Пусть ось Oz направлена в глубь газовой фазы, начало координат лежит на свободной поверхности гелия. В указанных условиях на заряженную частицу действует сила поляризационного происхождения F , именуемая в электростатике силой изображения:

$$F = \left(\frac{e}{2z} \right)^2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon(\epsilon + 1)}, \quad (3.1)$$

здесь e — заряд частицы, ϵ — диэлектрическая проницаемость гелия, имеющая для жидких ^4He и ^3He соответственно следующие значения: $\epsilon_4 \approx 1,057$ и $\epsilon_3 \approx 1,043$. Положительный знак силы (3.1) отвечает отталкиванию частицы в глубь жидкой фазы. Компенсируя действие этой силы внешним электрическим полем E_1 , прижимающим ион данного знака к поверхности гелия, можно фиксировать положение иона на любой заданной глубине z_0 от поверхности (вид соответствующей потенциальной энергии приведен на рис. 2.1, *a*). Значение z_0 определяется очевидной формулой

$$z_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E_1} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon(\epsilon + 1)} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

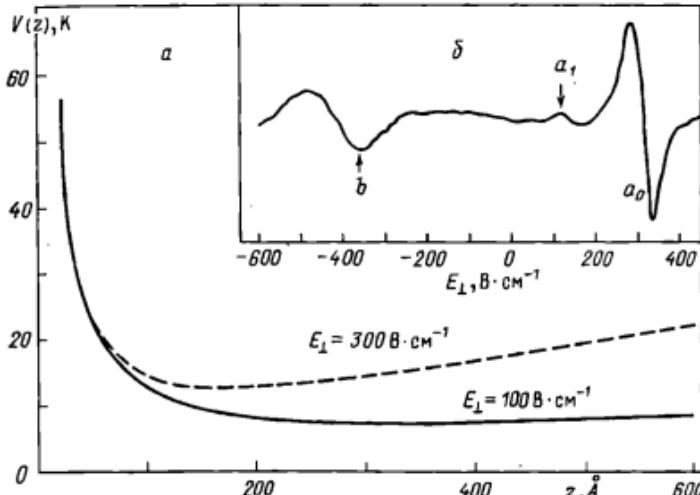


Рис. 2.1. а – Потенциальная энергия $V(z)$ для гелиевого иона вблизи границы пар – жидкость.

б (врезка) – Резонансное поглощение ВЧ полем гелиевыми ионами, прижатыми к поверхности полем E_{\perp} . Здесь – a_0 , a_1 – первая и вторая гармоники для катионов, b – первая гармоника для аниона [5]

Если в объеме жидкого гелия имеется определенное число ионов N , то при наличии прижимающего поля

$$E_{\perp} > 4\pi Ne/S, \quad (3.3)$$

где S – площадь свободной поверхности гелия, все ионы собираются в плоскости $z = z_0$ и образуют двумерную ионную систему с поверхностной плотностью $n_s = N/S$.

Характерным параметром, определяющим степень локализации ионов вблизи плоскости $z = z_0$, является частота ω_i ионных колебаний относительно этой плоскости*) (Шикин [4])

$$\omega_i^2 = \frac{1}{2M_i} \frac{e^2(\epsilon - 1)}{z_0^3(\epsilon + 1)}, \quad (3.4)$$

где M_i – эффективная масса катиона или аниона.

Критерием двумерности классической ионной системы, расположенной в плоскости $z = z_0$, является требование малости амплитуды тепловых

*) В общем случае задача о движении сферического заряженного тела вблизи границы жидкость – пар содержит наряду с электростатическими еще и гидродинамические силы изображения. Дополнительная кинетическая энергия жидкости, возмущенной движением сферы радиуса R вблизи плоской границы, равна

$$\delta W = \frac{1}{3} \frac{2}{3} R^3 z_0^{-3} M v^2,$$

где M – присоединенная масса сферы, v – скорость ее центра инерции. Добавка δW мала по сравнению с $W = \frac{1}{2} M v^2$ в мерах $R^3/z_0^3 \ll 1$. Для нашего случая, когда $z_0 \approx 200$ Å, $R \approx 6$ Å, это отношение имеет порядок $10^{-3} - 10^{-4}$, т.е. $\delta W \ll W$, и гидродинамические силы изображения можно не учитывать.

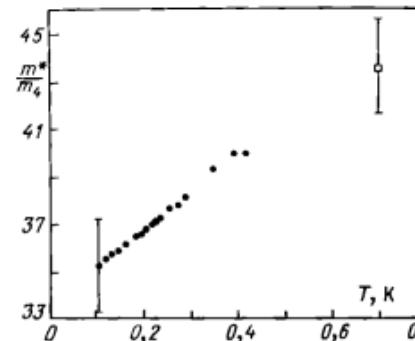


Рис. 2.2. Температурная зависимость эффективной массы катиона [29]

колебаний ξ_T отдельного иона по сравнению с расстоянием r_s между ионами:

$$\xi_T \ll r_s, \quad r_s^{-2} = n_s, \quad \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 \xi_T^2 \sim T. \quad (3.5)$$

В случае ионной системы в гелии неравенство (3.5) имеет место для типичных гелиевых температур всегда, если выполнено требование (3.3).

Следует отметить, что экспериментальное определение частоты ω_i дает прямую информацию об эффективной массе гелиевых ионов. Соответствующие эксперименты осуществлены Пуатрено и Вильямсом [5]. Типичная резонансная кривая поглощения ионами высокочастотного (ВЧ) поля приведена на рис. 2.1, б. В результате были получены следующие значения эффективных масс:

$$M_+ = (45 \pm 2) m_4, \quad M_- = (243 \pm 5) m_4. \quad (3.6)$$

Эти значения хорошо коррелируют с теоретическими оценками M_+ и M_- , приведенными выше, в гл. 1. Однако более поздние данные об эффективной массе катионов, полученные в [29] при обработке данных о плазменных резонансах в двумерной ионной системе, свидетельствуют о сильной температурной зависимости M_+ (изображена на рис. 2.2). Причины подобной зависимости пока не ясны.

§ 4. Поверхностные электронные состояния над плоской границей гелия

4.1. Приступая к описанию свойств поверхностных электронов в гелии, поясним прежде всего физические причины, определяющие возникновение подобных состояний. Как уже отмечалось выше, в § 2, свободные электроны обладают отрицательным сродством к жидкому гелию. Другими словами, энергия внедрения электрона в жидкый гелий V_0 положительна и, что важно, весьма велика по сравнению с характерными гелиевыми температурами. Это означает, что свободный электрон, подведененный к поверхности жидкого гелия и имеющий кинетическую энергию меньше, чем V_0 , не может проникнуть в глубь жидкости и должен остаться в газовой фазе. С другой стороны, находясь в вакууме вблизи диэлектрической границы, электрон притягивается к ней силами изображения. В результате возникает

одномерная потенциальная яма, в которой при достаточно низких температурах электрон может локализоваться (рис. 2.3).

Характерной особенностью связанных электронных состояний над гелием является относительно небольшая величина энергии связи, что обусловлено малой поляризуемостью жидкого гелия. В результате, как будет видно ниже, электроны "висят" над свободной поверхностью гелия на макроскопическом расстоянии порядка 10^{-6} см. Очевидно также, что квантовая природа жидкого гелия не играет особой роли в формировании электронных состояний, за исключением свойства оставаться жидким до абсолютного нуля. При этом свободная поверхность является атомно гладкой вплоть до самых низких температур, а ее тепловые возбуждения имеют хорошо известную структуру. В подобных условиях поверхностные электроны над гелием обладают рекордной для двумерных систем подвижностью, что весьма существенно при исследовании коллективных явлений кулоновского происхождения.

Практический метод создания ПЭ в жидком гелии сравнительно прост и надежен. Со стороны жидкой фазы к свободной поверхности подводится металлическая пластина плоского конденсатора, заряженная положительно, и включается источник электронов, расположенный в газообразной фазе (см. рис. 2.3). В этом случае равновесная концентрация электронов n_s на поверхности определяется условием обращения в нуль полного электрического поля в газообразной фазе: $E_1 = 2\pi e n_s$. Изменяя величину напряженности прижимающего электрического поля E_\perp , можно легко менять электронную концентрацию n_s в большом интервале значений: $10^5 - 10^9 \text{ см}^{-2}$. Двумерную электронную плазму часто характеризуют безразмерным параметром $\Gamma = \pi^{1/2} e^2 n_s^{1/2} / T$, равным отношению потенциальной энергии взаимодействия между электронами к кинетической энергии (энергия Ферми $\epsilon_F = \pi \hbar^2 n_s / m$ в данном случае даже при $n_s \approx 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ оказывается очень малой, $\epsilon_F \lesssim 10^{-2} \text{ K}$). В рассматриваемой системе этот параметр можно изменять практически от нуля до значений порядка 10^2 и более, перекрывая при этом области слабой и сильной связи электронов по кулоновской энергии их взаимодействия (горячая и холодная плазма).

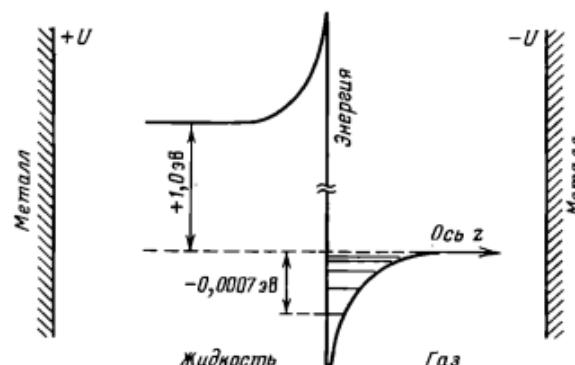


Рис. 2.3. Схематическое расположение поверхностных электронных уровней вблизи поверхности гелия

Задача о поверхностных электронных состояниях над плоской границей оказывается более разнообразной по сравнению со случаем поверхностных ионов (см. § 3) благодаря влиянию многих внешних факторов на структуру этих состояний. Ниже обсуждаются разные варианты такого влияния, представляющие практический интерес.

4.2. В отсутствие внешних полей потенциальная энергия электрона над поверхностью гелия формируется потенциалом силы изображения, аналогичной силе F из (3.1), но имеющей знак притяжения,

$$V(z) = -\frac{\Lambda}{z}, \quad \Lambda = \frac{e^2(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)}, \quad (4.1)$$

и ступенькой $V_0 \approx 1$ эВ, расположенной при $z = 0$, ось Oz направлена по нормали к поверхности гелия. Газовой фазе отвечает $z > 0$ (см. рис. 2.3). Энергия внедрения V_0 , играющая важную роль в формировании поверхностных электронных состояний, имеет то же происхождение, что и энергия V_0 из (2.1). В этом смысле электронные пузырьки в объеме жидкого гелия и поверхностные электронные состояния являются двумя наблюдаемыми следствиями отрицательного сродства электронов к жидкому гелию.

Поскольку потенциальный барьер V_0 очень высок (по сравнению с масштабом энергий локализованного электрона), можно воспользоваться в нулевом приближении пределом $V_0 \rightarrow \infty$ и учесть наличие этого барьера с помощью простого граничного условия для волновой функции электрона $\psi|_{z=0} = 0$ ^{*}). В этом предельном случае задача о спектре поверхностного электрона сводится к нерелятивистской задаче о спектре атома водорода. В самом деле, волновое уравнение для электрона в поле положительного ядра для состояний с равным нулю орбитальным моментом выглядит следующим образом:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + V(r) \psi = E \psi, \quad V(r) = \frac{e^2}{r},$$

$$\psi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Здесь m – масса электрона.

Полагая $\psi = \chi(r)/r$, имеем для χ уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + V(r) \chi = E \chi,$$

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(\infty) \rightarrow 0,$$

в точности совпадающее с уравнением для электрона вблизи поверхности гелия, если произвести замену $e^2 \rightarrow \Lambda$. В результате дискретная часть спектра $\Delta_l^{(0)}$ поверхностных электронов в приближении $V_0 \rightarrow \infty$ имеет

* Аналогичное граничное условие используется в гораздо более жестких условиях, а именно при расчете параметров электронного пузырька (см. определения (2.2), (2.3), (2.7) – (2.9)). Конечные результаты таких расчетов хорошо коррелируют с реально наблюдаемыми свойствами пузырьков.

водородоподобный вид [30, 31]:

$$\epsilon_l(k) = \Delta_l^{(0)} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.2)$$

$$\Delta_l^{(0)} = -\Delta/l^2, \quad \Delta = m\Lambda^2/2\hbar^2, \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

$\epsilon_l(k)$ – закон дисперсии поверхностных электронов, k – двумерный волновой вектор электрона вдоль поверхности гелия. При этом волновые функции основного и первых возбужденных состояний таковы:

$$\psi_l(r, z) = f_l(z) e^{ikr}, \quad (4.3)$$

$$f_1(z) = 2\gamma^{3/2} z \exp(-\gamma z).$$

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^{3/2} z \exp\left(\frac{-\gamma z}{2}\right) \left(1 - \frac{\gamma z}{2}\right),$$

$$f_3(z) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma^{3/2} z \exp\left(\frac{-\gamma z}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \gamma z + \frac{2}{27} \gamma^2 z^2\right),$$

$$\gamma = m\Lambda/\hbar^2.$$

Результаты (4.2) и (4.3) подтверждают разумность сделанных упрощений. В самом деле, благодаря малости $\epsilon - 1$ ($\epsilon_4 - 1 \approx 0,0572$ и $\epsilon_3 - 1 = 0,0428$ для $T < 1,5$ К [32]) энергия связи электрона в основном состоянии имеет масштаб $|\Delta_1^{(0)}| \approx 8$ К $\ll V_0$. Другими словами, энергия локализации электрона существенно меньше V_0 , что оправдывает учет потенциального барьера простым граничным условием $\psi|_{z=0} = 0$. Очевидно также, что среднее положение $\langle z \rangle$ локализованного электрона над жидкой поверхностью заметно превосходит межатомные расстояния в жидком гелии (для ${}^4\text{He}$ имеем $\langle z_1 \rangle = 3/2\gamma = 114$ Å, $\langle z_2 \rangle = 456$ Å, $\langle z_3 \rangle = 1026$ Å). В результате неточность классического определения потенциальной энергии $V(z)$ (4.1) на межатомных расстояниях вблизи поверхности гелия также не очень существенна.

Учитывая сказанное, естественно ожидать, что определение $\epsilon_l(k)$ (4.2) достаточно хорошо описывает реальный спектр. Так, для частот перехода из основного состояния $l = 1$ в возбужденные с $l = 2$ и 3 из определения спектра (4.2) имеем $\Delta_2^{(0)} - \Delta_1^{(0)} = \Delta_1^{(0)} = 119,2$ ГГц, $\Delta_{13}^{(0)} = 141,3$ ГГц. В то же время первые измерения Граймса и др. [33, 34] дали соответственно $\Delta_{12} = 125,9 \pm 0,2$ и $\Delta_{13} = 148,6 \pm 0,3$ ГГц.

Более точное рассмотрение, принимающее во внимание конечность барьера V_0 и искажение потенциала $V(z)$ (4.1) на малых расстояниях, было проведено рядом авторов [34–38]. Для описания конечных (несингулярных) сил изображения обычно используются различные модельные потенциалы. В частности, для устранения расходности $V(z)$ на поверхности гелия в [34] применяется известный в теории поверхности металлов [39] прием сдвигки начала отсчета (плоскости изображения) в глубь жидкого гелия на некоторое расстояние z^* , так что эффективная потен-

циальная энергия электрона принимает вид

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\Lambda}{z + z^*}, & z \geq 0, \\ V_0, & z < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

С помощью метода, развитого в [37], в первом порядке теории возмущений в [34] было получено следующее выражение для собственной энергии электрона в l -м состоянии:

$$\Delta_l = \Delta_l^{(0)} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[z^* - \left(\frac{\hbar^2}{2mV_0} \right)^{1/2} \right] \left(\frac{df_l}{dz} \right)_{z=0}^2. \quad (4.5)$$

Из сопоставления с Δ_{12} для ${}^4\text{He}$ при $V_0 = 1$ эВ в [34] было найдено значение $z^* = 1,04$ Å, а в [40] для ${}^3\text{He}$ при $V_0 = 0,9$ эВ – значение $z^* = 1,25$ Å. Расчетные значения Δ_{13} , следующие из (4.5), для электронов над ${}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}$ с указанными значениями z^* собраны в таблице. Очевидно, что полученные расчетные значения Δ_{13} хорошо согласуются с экспериментом.

Таблица

Тип границы	Экспериментальные значения Δ_{1l} , ГГц	Водородоподобный спектр $\Delta_{1l}^{(0)}$, ГГц	Теоретические значения Δ_{1l} , ГГц
${}^4\text{He}$	$125,9 \pm 0,2$ [34]	119,2	125,95
	$148,6 \pm 0,3$ [34]	141,3	148,75
${}^3\text{He}$	$69,8 \pm 0,15$ [40, 41]	67,6	$70,9 \pm 0,4$
	$83,15 \pm 0,25$ [40, 41]	80,1	$83,7 \pm 0,4$

В [38] для потенциала вида (4.4) было получено точное решение *) уравнения Шредингера через вырожденные гипергеометрические функции и найдены собственные значения энергии для поверхностных электронных состояний с $l = 1, 2$ и 3 в зависимости от параметра z^* , который, как и в [34], подбирался из условия равенства частоты Δ_{12} ее экспериментальному значению для ${}^4\text{He}$ (в отсутствие прижимающего поля) и оказался равным $z^* = 1,01$ Å.

Отметим также работу [42], в которой с использованием функции Грина продольного самосогласованного поля, описывающей кулоновское взаимодействие вблизи границы раздела сред с пространственной дисперсией, вычислен потенциал силы изображения точечного заряда, находящегося над поверхностью жидкого гелия, и показано, что при правильном выборе асимптотики диэлектрической проницаемости $\epsilon(k) = 1 + c/k^4$ при

*) Детали этого решения будут обсуждены ниже, в параграфе об электронном спектре над пленкой гелия.

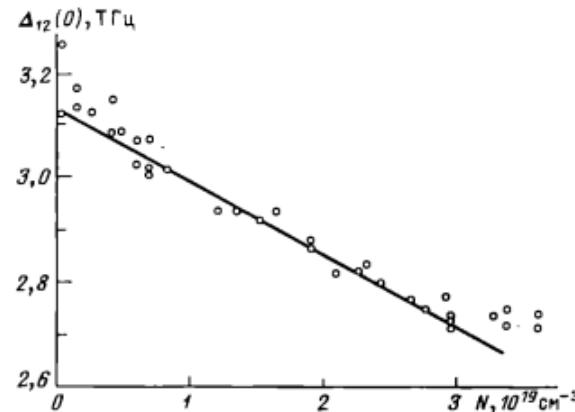


Рис. 2.4. Зависимость частоты перехода 1–2 для электронов над твердым водородом в функции от плотности молекул водорода в газовой фазе. К значениям частоты добавлена поправка, учитывающая температурную зависимость диэлектрической проницаемости водорода (из [23]).

$k \rightarrow \infty$ (здесь k – волновое число) эффекты пространственной дисперсии обеспечивают непрерывность (конечность) как потенциала $V(z)$, так и силы электростатического притяжения $F = -\partial V/\partial z$ на границе жидкость – пар. Этот потенциал с большой точностью аппроксимируется модельным потенциалом (4.4), чем и объясняется успех феноменологических теорий [34, 38] в описании поверхностных электронных состояний.

Интересно, что при изучении перехода 1 – 2 для электронов над твердым водородом наблюдается зависимость частоты Δ_{12} от плотности N газообразного водорода [23]. В данном случае $\langle z_1 \rangle = 25 \text{ \AA} < N^{-1/3}$. Что касается $\langle z_2 \rangle \approx 100 \text{ \AA}$, то для малых плотностей $\langle z_2 \rangle < N^{-1/3}$, а затем, с ростом N , возникает ситуация $\langle z_2 \rangle > N^{-1/3}$. В этих условиях возбужденное состояние меняет свою энергию, причем масштаб изменения может быть оценен в рамках оптического приближения (см. определение V_0 (2.1)). Разность энергий оказывается зависящей от N , что и наблюдается экспериментально (рис. 2.4). Интригующим обстоятельством является уменьшение Δ_{12} с ростом N – факт, означающий, что в данных условиях длина рассеяния оказывается отрицательной при взаимодействии электронов с газообразным водородом и положительной – для взаимодействия с твердым водородом.

§ 5. Поверхностные электронные состояния в присутствии прижимающего электрического поля

Как уже отмечалось выше, реальные эксперименты с поверхностными электронами над гелием всегда осуществляются в присутствии электрического поля E_\perp , нормального к поверхности гелия и прижимающего электроны к этой поверхности. Наличие E_\perp необходимо для существования на поверхности гелия конечной равновесной плотности электронов. Кроме того,

интересно прямое влияние E_\perp на дискретную часть электронного спектра.

В связи с указанными соображениями возникает необходимость расчета штарк-эффекта для электронных поверхностных состояний в поле E_\perp . Интересной особенностью этой задачи является существование линейного по полю эффекта в отличие от обычной ситуации, когда штарк-эффект квадратичен по электрическому полю. Существенно также, что уже слабое поле заметно деформирует структуру поверхностных электронных состояний с номерами $l > 1$. В результате первый порядок теории возмущений имеет очень узкую область применимости, и для расчета штарк-эффекта на поверхностных электронных уровнях в реальной области электрических полей необходимо либо точно решать задачу (что пока не сделано аналитически), либо учитывать ряд теории возмущений, либо использовать вариационную процедуру. В конкретных расчетах штарк-эффекта для электронных состояний над гелием, выполненных Граймсом и др. [34], был выбран третий путь. Опуская детали этих расчетов приведем конечные результаты для зависимости энергии переходов 1–2 и 1–3 от величины E_\perp , а также соответствующую экспериментальную информацию из [34] (рис. 2.5, 2.6).

В пределе сильных прижимающих полей E_\perp общая задача о спектре электрона в яме вида

$$V(z) = \begin{cases} -\Lambda/z + eE_\perp z, & z \geq 0, \\ \infty, & z \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

заметно упрощается, так как в этом случае можно пренебречь слагаемым

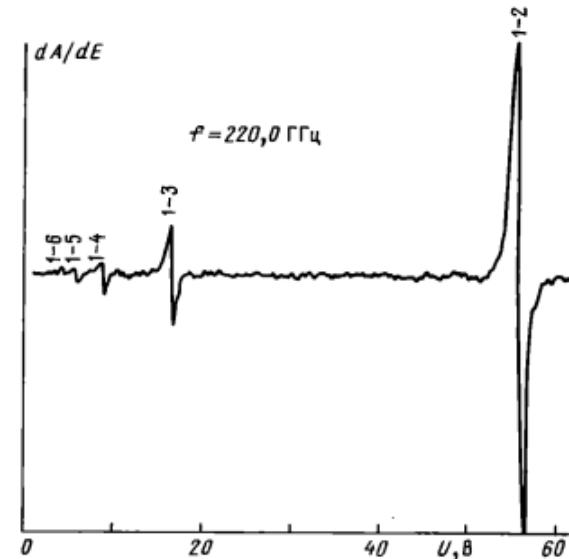


Рис. 2.5. Электронные переходы между поверхностными уровнями в системе электронов над ${}^4\text{He}$ [34]. Внешняя частота фиксирована и равна $f = 220 \text{ ГГц}$, а расстояние между уровнями меняется с изменением прижимающего поля $E_\perp = U/d$. Величина U отложена вдоль оси абсцисс (U – разность потенциалов на пластинках конденсатора, d – расстояние между ними)

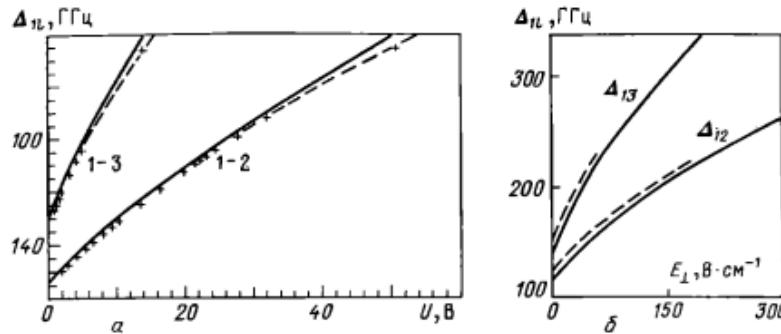


Рис. 2.6. а – Переходы 1–2 и 1–3 для электронов над ${}^4\text{He}$ в зависимости от напряженности E_\perp . Эксперимент – точки [34], сплошные линии – вариационный расчет [34]. штриховые – расчет [38].

б – Расчет частот переходов 1–2 и 1–3 в квазиклассическом приближении. Штриховыми линиями воспроизведена теоретическая часть рис. 2.6.а (Габович и др. [43])

$-\Lambda/z$. В результате волновое уравнение сводится к уравнению Эйри. Соответствующие значения Δ_l и волновые функции электрона при этом принимают вид

$$f_l(z) = \text{const} \cdot \Phi \left(\left(z - \frac{\Delta_l}{F} \right) \gamma_F \right), \quad (5.2)$$

$$\Delta_l = \xi_l \frac{F}{\gamma_F}, \quad \gamma_F = \left(\frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad F = eE_\perp, \quad \xi_l |_{l \gg 1} \propto l^{2/3}, \quad (5.3)$$

где $\Phi(x)$ – функция Эйри, $-\xi_l$ – аргументы ее нулей ($\xi_1 = 2,238$, $\xi_2 = 4,088$, $\xi_3 = 5,521$), $F = eE_\perp$, Δ_l – дискретная часть спектра электрона во внешнем поле, определяемая из условия $f_l(z)|_0 = 0$.

Критерием справедливости (5.2) – (5.3) является неравенство

$$\Lambda \gamma_F \ll \Delta_l, \quad (5.4)$$

которое для основного состояния выполняется при $E_\perp \gtrsim 3000 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$.

В отсутствие точного решения задачи о спектре электронов в поле E_\perp общее представление о его влиянии на электронный спектр можно получить в квазиклассическом приближении. Для задачи о спектре поверхностных электронов в электрическом поле квазиклассическое условие квантования Бора – Зоммерфельда имеет вид (Габович и др. [43])

$$\int\limits_0^z ds [2m(\Delta_l - eE_\perp s + \Lambda/s)]^{1/2} = \pi \hbar l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.5)$$

где

$$\tilde{z} = \frac{\Delta_l}{2eE_\perp} - \left(\frac{\Delta_l^2}{4e^2E_\perp^2} + \frac{\Lambda}{eE_\perp} \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

Интеграл (5.5) выражается через полные эллиптические интегралы первого

и второго рода, что позволяет без труда исследовать свойства Δ_l при произвольном соотношении между параметрами задачи Λ и E_\perp .

В области слабых полей из (5.5) находим линейные и квадратичные по E_\perp поправки к спектру электронов [43] :

$$\Delta_l = \Delta_l^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{eE_\perp l^2}{\gamma} - \frac{7}{16} \left(\frac{eE_\perp}{\gamma} \right)^2 \frac{l^6}{|\Delta_l^{(0)}|}, \quad (5.7)$$

здесь $\gamma^{-1} = \hbar^2 / (m\Lambda)$ – эффективный радиус Бора из (4.3). Оценки показывают, что выражение (5.7) при $l \gg 1$ справедливо при напряженностях поля $E_\perp < 10 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$.

В пределе сильных полей (см. (5.4)) из (5.5) получаем

$$\Delta_l \approx \left(\frac{3\pi l}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/3} (eE_\perp)^{2/3}. \quad (5.8)$$

С другой стороны, как указывалось выше, в сильном прижимающем поле, когда можно пренебречь слабыми, порядка $\epsilon = 1$ силами изображения в гелии, задача решается точно, поскольку уравнение Шредингера сводится к уравнению Эйри. Сравнивая между собой выражения (5.3) и (5.8), видим, что спектр в квазиклассическом приближении с удовлетворительной точностью (погрешность 15 % для $l = 1$; 8% для $l = 2$ и 5% для $l = 3$) согласуется с точным спектром электронов в сильных полях. На рис. 2.6, б сплошными кривыми представлены вычисленные на основе трансцендентного уравнения (5.5) зависимости частот переходов между уровнями 1–2, 1–3 от E_\perp . Здесь же штриховыми линиями показаны результаты численных расчетов [38], с большой точностью совпадающие с экспериментальными данными [34]. Как видим, во всем диапазоне прижимающих полей квазиклассическое приближение без единого подгоночного параметра и при довольно грубой аппроксимации потенциала ($z^* \rightarrow 0$, $V_0 \rightarrow \infty$) вполне удовлетворительно согласуется с вариационными вычислениями [38] и с экспериментом [34]. Имеющееся расхождение легко устраивается, если квазиклассические кривые Δ_{1l} совместить с точными значениями частот в точке $E_\perp = 0$, что соответствует эффективному учету конечности z^* и V_0 .

Полезная интерполяционная формула, определяющая параметры поверхностного электронного состояния на основном уровне в зависимости от напряженности прижимающего поля E_\perp , может быть получена, как это делается в теории поверхностных состояний, с помощью пробной волновой функции вида $f_1(z)$ (4.3) :

$$f_1(z) = 2\gamma_s^{3/2} z \exp(-\gamma_s z), \quad (5.9)$$

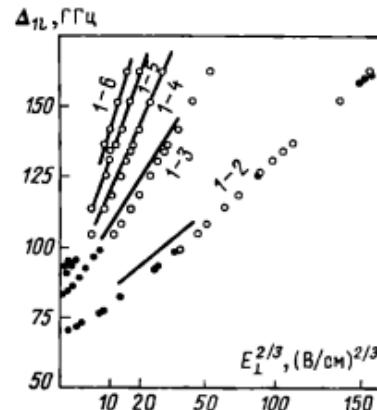
где величина γ_s является вариационным параметром:

$$\gamma_s = \frac{\gamma_1}{3} \left[\frac{\gamma}{\gamma_1} + \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^6} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^6} \right)^{1/3} \right], \quad (5.10)$$

$$\gamma_1 = (\gamma^3 + 27\gamma_F^3/2)^{1/3}, \quad \gamma_F = 3mE_\perp/2\hbar^2.$$

В предельном случае $E_\perp \rightarrow 0$ величина γ_s стремится к значению γ из (4.3). Если же $E_\perp > 0$, то определение γ_s дает представление о влиянии E_\perp на

Рис. 2.7. Расчетные и измеренные значения частот переходов для электронов над ${}^3\text{He}$ [40]: точки – результаты измерений по нелинейности проводимости на частоте 17 МГц; кружки – измерения по нелинейности поглощения при циклотронном резонансе на частоте 18,5 ГГц. Отчетливо видна зависимость $\Delta_{1l} \propto E_{\perp}^{2/3}$, следующая из квазиклассического определения спектра (5.8)



степень локализации электрона над гелием в условиях конечного прижимающего поля. Подобное приближение достаточно эффективно при использовании волновых функций поверхностного электрона в разного рода интегральных вычислениях.

Заканчивая обсуждение задачи о влиянии электрического поля на спектр поверхности электронов, обратим внимание на работы Володина и Эдельмана [40], содержащих первое сообщение о локализации электронов над ${}^3\text{He}$ и обширные данные о поведении электронов на этих уровнях (см., например, рис. 2.7). Кроме того, интересна работа Ламберта и Ричардса [44], дающая в настоящее время наиболее полную информацию об электронных переходах над ${}^4\text{He}$ (рис. 2.8, приведенный в [44]).

Несколько слов о заселенности дискретных электронных уровней вблизи границы жидкого гелия. Очевидно, что наличие этих уровней является необходимым условием локализации электронов вблизи границы жидкого гелия. Однако при конечных температурах доля электронов на поверхностных уровнях в нулевом прижимающем поле E_{\perp} может оказаться небольшой. Это связано с тем, что спектр поверхностных электронов (ПЭ) (4.2)

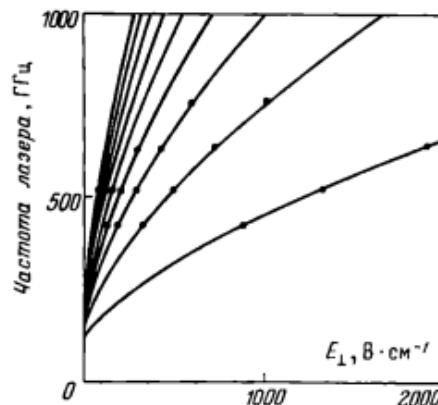


Рис. 2.8. Частоты переходов из основного состояния в одно из возбужденных в функции от E_{\perp} , скорректированные на плавность перехода от газовой к жидкой фазе в духе формулы (4.4). Точки на рисунке отвечают наблюдаемым электронным переходам, экстраполированным к нулевой плотности поверхностного заряда [44]

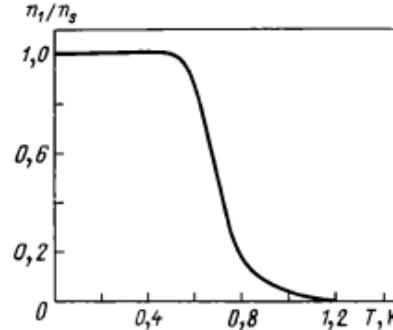


Рис. 2.9. Коэффициент заполнения электронами основного поверхностного состояния в отсутствие прижимающего поля и конечном объеме газовой фазы (Крэндл. Вильямс [45])

имеет точку сгущения, а число состояний непрерывного спектра очень велико.

Для того чтобы избежать "утечки" электронов в вакуум, необходимо либо учесть ограниченность размера системы по вертикали, либо, что более естественно, ввести в задачу прижимающее электрическое поле, удерживающее электроны вблизи поверхности гелия. Расчет заселенности поверхностных уровней для первой из указанных возможностей был выполнен Крэндлом и Вильямсом [45]. Полагая вакуумный промежуток над поверхностью гелия равным 1 см, авторы [45] нашли, что для температур $T \approx 1$ К доля электронов на основном уровне очень мала (зависимость n_1/n_s от T , полученная в [45], представлена на рис. 2.9), при $T = 2$ К она оказывается порядка 10^{-4} . Вместе с тем уже слабое прижимающее поле E_{\perp} радикально меняет ситуацию (Шикин, Монарха [46]).

Если газ поверхностных электронов является больцмановским, то доля n_l электронов на l -м уровне при наличии прижимающего поля определяется соотношением

$$n_l/n_s = (1 + \delta)^{-1}, \quad \delta = \chi \exp(-\Delta/T), \quad (5.11)$$

$$\chi = m^{1/2} T^{3/2} (2\pi)^{-1/2} (heE_{\perp})^{-1}, \quad (5.12)$$

где n_s – полная поверхностная плотность электронов, Δ из (4.2).

В области $\delta \gg 1$ все электроны испаряются на квазиклассические уровни, т.е. $n_l/n_s \rightarrow 0$. Если же $\delta \ll 1$, то практически все электроны "оседают" на основной уровень, $n_l/n_s \rightarrow 1$.

В условиях $2\pi e n_s \rightarrow E_{\perp}$ задача о распределении электронов вблизи границы гелия должна решаться заново: Монарха, Соколов [47], Черникова [48]. При этом, например, в случае $\delta \gg 1$ распределение электронов над гелием описывается выражением [48]

$$n(z) = \frac{T}{2\pi e^2 (z + z_0)^2}, \quad z_0 = \frac{T}{2\pi e^2 n_s}. \quad (5.13)$$

Функция $n(z)$ здесь ведет себя степенным образом.

§ 6. Спектр поверхностных электронов (ПЭ) при наличии магнитного поля

6.1. В постоянном магнитном поле H , нормальному к поверхности гелия, для калибровки векторного потенциала в цилиндрической системе координат r, θ, z : $A_\theta = \frac{1}{2} H r, A_r = A_z = 0$ – волновая функция основного состояния электрона с нулевым значением момента в направлении магнитного поля есть

$$\psi(r, z) = \varphi(r) f_i(z), \quad (6.1)$$

где

$$\varphi^2(r) = \frac{1}{\pi l_H^2} \exp\left(-\frac{r^2}{l_H^2}\right), \quad l_H^2 = \frac{c\hbar}{2eH},$$

c – скорость света. В этом состоянии электрон является полностью локализованным (в направлении оси z электрон локализуется силами изображения, а в плоскости $z = 0$ – магнитным полем; при этом полагается, что вырождение в магнитной задаче снимается сопутствующими деформационными явлениями, природа которых обсуждается ниже). Спектр электрона при его движении вдоль поверхности гелия в поле H_1 имеет эквидистантный вид, причем расстояние между уровнями равно циклотронной частоте

$$\omega_c = eH_1/mc, \quad (6.2)$$

где m – масса электрона при его движении вдоль поверхности гелия.

Наблюдение циклотронного резонанса (ЦР) дает богатую информацию о свойствах поверхностных электронов при их движении вдоль поверхности гелия: эффективной массе m^* , величине взаимодействия между электронами и тепловыми возбуждениями на поверхности гелия, заселенности поверхностных уровней и т.д. Приведем для примера качественное описание формы линии циклотронного резонанса из работы Эдельмана [49]. С этой целью заметим, что поведение квазиклассических трехмерных электронов отличается от локализованных, двумерных, во всяком случае, в двух важных пунктах. Во-первых, квазисвободные электроны в среднем находятся дальше от поверхности гелия и потому слабее взаимодействуют с тепловыми колебаниями этой поверхности. Во-вторых, определение циклотронной частоты $\omega_c = eH/(mc)$ для квазисвободных электронов не зависит от направления магнитного поля по отношению к поверхности гелия. Следовательно, пик циклотронного резонанса для квазиклассических электронов будет более узким, чем для поверхностных, и не будет смещаться (отличие от пика для поверхностных электронов) при изменении угла между направлением магнитного поля и нормалью к поверхности гелия. Заселенность уровней в этом эксперименте можно варьировать, разогревая газ электронов ВЧ-полем. Различные варианты формы линии циклотронного резонанса, содержащей вклады от поверхностных и квазиклассических электронов, приведены на рис. 2.10.

6.2. Интересно влияние на спектр поверхностных электронов магнитного поля, параллельного поверхности гелия. Для того чтобы иметь возможность ориентироваться в возникшем наборе параметров, полезно обсудить

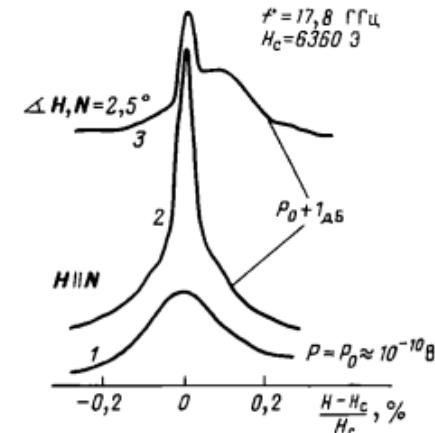


Рис. 2.10. Варианты формы линии ЦР: 1 – нет разогрева, поле H нормально поверхности гелия; 2 – есть разогрев, поле H нормально поверхности гелия (появился узкий пик, отвечающий резонансу на квазисвободных электронах); 3 – есть разогрев и поле H наклонено к поверхности гелия. Максимумы линий квазисвободных и поверхностных электронов "разошлись". H_c – резонансное поле (Эдельман [49])

вначале задачу о магнитных поверхностных уровнях. Эти уровни, понятие о которых появилось впервые в работе И. Лифшица и Косевича в связи с эффектом де Гааза – ван Альфена в тонких пленках [50], были обнаружены экспериментально Хайкиным [51] по осцилляциям импеданса в слабом поле H_{\parallel} , параллельном поверхности металла. Соответствующая интерпретация предложена Ни и Прангом [52]. В квазиклассическом приближении положение дискретных магнитных уровней для траекторий, одна из поворотных точек которых лежит на границе образца, определяется следующим выражением:

$$\epsilon_l(p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3} \left[\frac{p_y^2}{2m} (l \hbar \omega_c)^2 \right]^{1/3}, \quad (6.3)$$

$$H \parallel Ox, \quad l \gg 1.$$

Полное решение уравнения Шредингера для электрона в магнитном поле вблизи границы раздела может быть выражено через функцию параболического цилиндра $D_l(z/l_H - \tilde{z} \operatorname{sign} \tilde{z})$. Уровни энергии определяются из граничного условия обращения волновой функции электрона в нуль на поверхности раздела, что эквивалентно требованию

$$D_l(-\tilde{z} \operatorname{sign} \tilde{z}) = 0, \quad \tilde{z} = |z_0|/l_H, \quad (6.4)$$

здесь $z_0 = -cp_y/(eH)$ – координата центра вращения электрона.

Детальное исследование уравнения (6.4) в разных предельных случаях (имеется в виду положение ларморовской орбиты электрона по отношению к границе образца) содержится, например, в работе Канера и др. [53]. Мы опускаем соответствующие комментарии, отсылая читателя за подробностями к [53].

Переход к задаче о спектре электронов над гелием в скрещенных электрическом и магнитном полях теперь не вызывает труда. Этот переход осуществляется с помощью замены

$$z \rightarrow z - cE_1/m\omega_c^2. \quad (6.5)$$

Таким образом, спектр поверхностных электронов в скрещенных полях имеет вид

$$\epsilon_l(p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(k_y + \frac{eE_1}{\hbar\omega_c} \right) (l \hbar\omega_c)^2 \right]^{1/3}. \quad (6.6)$$

В предельных случаях $H \rightarrow 0$ при $E_1 \neq 0$ или $E_1 \rightarrow 0$ при $H \neq 0$ определение (6.6) переходит в правильные квазиклассические асимптотики собственных значений для функции Эйри или функции параболического цилиндра вблизи границы раздела.

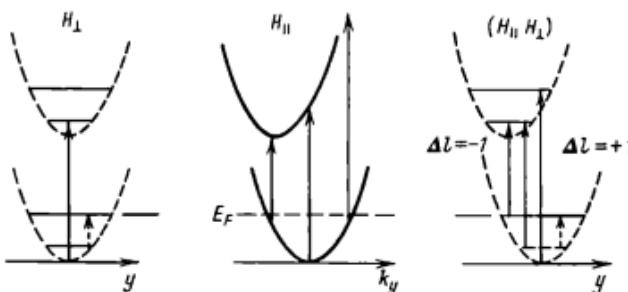
Следует подчеркнуть, что переход (6.5) и спектр (6.6) имеют отношение к задаче об электронном спектре над гелием лишь в случае достаточно сильного прижимающего поля, когда влиянием на спектр сил изображения можно пренебречь по сравнению с влиянием внешнего электрического поля. Конкретно для гелия речь идет о полях $E_1 > 3000 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$.

Наиболее изученным с экспериментальной точки зрения в настоящее время является предельный случай слабого магнитного поля H_{\parallel} , когда $\hbar\omega_c < \Delta_l$ (Граймс и др. [54, 55]). В этом варианте влияние магнитного поля H_{\parallel} сводится, в основном, к сдвигу спектра свободных электронов относительно начала координат в k -пространстве на определенную величину, зависящую от номера уровня l [55],

$$\begin{aligned} \epsilon_l(k_x, k_y) &= \Delta_l + \delta_l + \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{1}{2m} \left(\hbar k_y + \frac{e}{c} H_{\parallel} z_H \right)^2, \\ z_H &= \int_0^\infty f_l^2 z dz, \quad z_H^2 = \int_0^\infty f_l^2 z^2 dz, \\ \delta_l &= \frac{1}{2m} \left(\frac{eH}{c} \right)^2 [z_H^2 - (z_H)^2], \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $f_l(z)$ – точные z -компоненты волновых функций электрона, Δ_l – соответствующая дискретная часть спектра.

Результат (6.7) противоречит, на первый взгляд, общему выражению для ϵ_l (6.6), где имеется свободный член, пропорциональный k_y^2 , и дополнительные слагаемые, содержащие k_y в другой степени. Однако в случае достаточно слабого магнитного поля и конечного значения электрического



ис. 2.11. Схема электронных переходов между дискретными уровнями при наложении магнитного поля H , наклонного к поверхности гелия

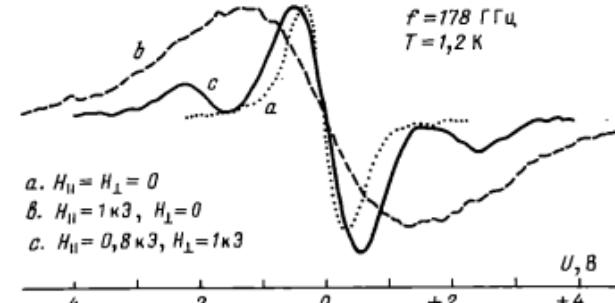


Рис. 2.12. Влияние магнитного поля на переход 1–2 при конечной плотности электронов ($n_g = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$). В случае b наблюдается заметное уширение линии, связанное с коллективными явлениями в двумерной электронной системе. В случае c появляются сателлиты, отстоящие от основной линии на расстоянии большем соответствующей циклотронной частоты примерно на 10–15% (Зипфель и др. [55])

поля разложение последнего слагаемого в ϵ_l (6.6) по k_y приводит к появлению линейного по k_y члена, который можно объединить с k_y^2 в комбинацию, аналогичную последней скобке в (6.7).

Изменение в спектре поверхностных электронов при наложении слабого магнитного поля H_{\parallel} , параллельного поверхности гелия, отвечающее определению ϵ_l (6.7), представлено схематически на рис. 2.11. Экспериментально наблюдаемые линии поглощения приобретают при этом форму, полученную в [55] и изображенную на рис. 2.12. Соответствующие теоретические расчеты формы линии для перехода 1–2 в функции от магнитного поля, параллельного поверхности гелия, были выполнены Эндо [56].

Очень интересной является информация, следующая из анализа ширины линии электронных переходов в магнитном поле (рис. 2.12). Эта информация позволяет судить о коллективных явлениях в системе поверхностных электронов.

§ 7. Поверхностные электроны над гелиевой пленкой

Интересным физическим объектом является система ПЭ над гелиевой пленкой, покрывающей твердую подложку. В этом случае из-за большой величины диэлектрической проницаемости подложки ϵ_d можно существенно изменять спектр электронных состояний, варьируя толщину гелиевой пленки d . Для ПЭ над пленкой обычно хорошо выполняется неравенство $d \gg \langle z_1 \rangle$. В этом пределе, разлагая потенциал сил изображения, соответствующий подложке, по параметру z/d , получим [46] (вакуум $z \geq 0$, пленка $0 \geq z \geq -d$, подложка $z \leq -d$)

$$V(z) = -\frac{\Lambda}{z} - \frac{\Lambda_1}{d} + F_d z, \quad z > 0, \quad (7.1)$$

где Λ из (4.1),

$$\Lambda_1 = \frac{e^2 \epsilon (\epsilon_d - \epsilon)}{(1 + \epsilon)^2 (\epsilon_d + \epsilon)}, \quad F_d = \frac{\Lambda_1}{d^2}.$$

Отсюда видно, что действие подложки на ПЭ в некотором смысле эквива-

лентно внешнему электрическому полю с напряженностью $E_d = F_d/e$. Разница заключается лишь в наличии большой отрицательной добавки к потенциальной энергии электрона Λ_1/d , существенно увеличивающей энергию связи электронов. Для характерных $d \approx 3 \cdot 10^{-6}$ см эта энергия связи оказывается порядка 140 К и существенно превышает энергию связи электрона над массивным гелием $\Delta \approx 8$ К. Поэтому при выключении внешнего электрического поля электроны уходят с поверхности жидкости на стенки сосуда, всегда покрытые гелиевой пленкой.

Эффективное поле подложки сильно зависит от толщины пленки, $E_d \propto d^{-2}$. Поэтому при уменьшении толщины пленки от значения $d = 10^{-5}$ см до значения $d = 10^{-6}$ см напряженность этого поля увеличивается в интервале $(3 \cdot 10^2 \div 3 \cdot 10^4)$ В · см⁻¹. Очевидно, что подобное поле относится к разряду сильных. Следовательно, волновая функция электронов, локализованных на пленке гелия, будет иметь вид (5.2) с заменой F на F_d из (7.1). Соответствующий спектр

$$\Delta_l = -\frac{\Lambda_1}{d} + \zeta_l \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^{1/3} F_d^{2/3}. \quad (7.2)$$

Область применимости разложения (7.1) $d \gg \langle z_1 \rangle$ с учетом явного вида $\langle z_1 \rangle$ из (5.2) выглядит так:

$$d \gg \left(\frac{\hbar^2}{2mF_d} \right)^{1/3} \quad (7.3)$$

Это дает ограничение снизу на величину d :

$$d \gg d^*, \quad d^* = \frac{\hbar^2}{2m\Lambda_1} \approx 10^{-7} \text{ см}, \quad \text{если } \epsilon_d \geq 10.$$

В теории электронных состояний, локализованных над пленкой гелия, существует еще один подход, точность которого растет с уменьшением толщины пленки. Речь идет о ситуации, в которой основную роль играет взаимодействие электрона с твердой подложкой, причем разложение этого взаимодействия по степеням z/d , использованное в (7.1), теперь не производится. Другими словами, речь идет о решении волнового уравнения для потенциала

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\Lambda_1}{z+d}, & z \geq 0, \\ V_0, & z < 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

с граничными условиями, отвечающими обращению волновой функции электрона в нуль на свободной поверхности пленки, либо более сложными условиями, учитывающими возможное проникновение волновой функции в пленку гелия.

Волновое уравнение

$$f'' + \left(\Delta_l + \frac{\Lambda^*}{z+d} \right) f = 0 \quad (7.5)$$

с помощью замены переменных сводится к частному случаю уравнения Уиттекера [57], решение которого выражается через конфлюзные гипергеометрические функции (функции Куммера). С учетом этого обстоятельства были подробно исследованы две задачи, касающиеся свойств электронов над гелием.

а) Роль малых, но конечных d в формировании спектра и волновых функций над жидким полупространством (см. определение $V(z)$ (4.4) и комментарии, следующие за этой формулой, при этом $d = z^*$). Авторы [38] показали, что, имея набор волновых функций и собственных значений, следующих из уравнения (7.5) с $z^* \equiv d = 1,01 \text{ \AA}$, и используя далее вариационную процедуру определения спектра поверхностных электронов в прижимающем электрическом поле E_1 , можно получить расчетные данные, более адекватные действительности, чем это следовало из расчетов [34]. Характер этих улучшений представлен на рис. 2.6, а.

б) Электронный спектр над тонкой пленкой. Эта задача на основе уравнения (7.5) исследовалась в работах [43, 58]. В первой из этих работ получена асимптотика для спектра электронов на пленке гелия, нанесенной на металлическую подложку:

$$\Delta_l \approx \frac{e^2}{32 a_0} \left[l - \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2d}{a_0} \right)^{1/2} \right]^{-2}, \quad l > 1, \quad (7.6)$$

$$a_0 = \hbar^2/me^2.$$

Спектры (7.2) и (7.6) дополняют друг друга. Первое из определений справедливо, главным образом, для основного состояния электрона над пленкой гелия. Что касается выражения (7.6), то оно дает представление о возбужденных состояниях такого электрона.

Имеет смысл отметить, что граничное условие обращения в нуль волновой функции электрона на свободной поверхности пленки гелия, использованное при получении результатов (7.2), (7.6), является для данной задачи идеализированным. Уже в случае электрона над массивным гелием это условие имеет точность, равную примерно 5 %. Что касается электрона над тонкой пленкой, где эффективная прижимающая сила значительно мощнее, то здесь вероятность проникновения электрона в толщу пленки становится достаточно заметной. Казалось бы, что это обстоятельство должно приводить к тунNELльному пробою и прохождению электрона в пленку. Однако этому процессу мешает граничное условие обращения волновой функции электрона в нуль на поверхности твердой подложки (если она не металлическая). Подробности решения соответствующей задачи приведены в [58].

Наличие твердой подложки оказывается не только на энергии связи поверхностных электронов, но и на характере их взаимодействия между собой [59, 60]. В частности, для металлической подложки перенормировка взаимодействия может изменить его тип (переход от кулоновского взаимодействия к диполь-дипольному).

Интересные возможности появляются при нанесении на поверхность твердой подложки различных периодических возмущений, создающих для двумерной электронной системы дополнительный периодический потенциал. Детали этой задачи обсуждались авторами [61, 62].

ГЛАВА 3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

§ 8. Понятие о риплонах

Электроны, локализованные над свободной поверхностью жидкого гелия, взаимодействуют с атомами газообразного гелия и с поверхностными возбуждениями границы жидкость – пар (риплонами). Плотность газовых атомов экспоненциально падает с уменьшением температуры, и в области $T < 0,5$ К влияние газа на различные свойства поверхностных электронов практически отсутствует. Что касается риплонов, то их взаимодействие с поверхностными электронами определяет в области достаточно низких температур основной канал, связывающий электронную подсистему с термостатом. Кроме того, наличие электрон-риплонного взаимодействия оказывается благоприятным обстоятельством в проблеме регистрации фазового перехода жидкость – кристалл в двумерных электронных системах на поверхности гелия. В связи с этим информация о свойствах риплонов и структуре электрон-риплонного взаимодействия составляет одну из существенных частей теории поверхностных электронных состояний над гелием.

Капиллярные волны, или риплоны, хорошо известны в классической гидродинамике еще со времен Рэлея. Речь идет о колебаниях формы свободной поверхности жидкости со спектром $\omega(q)$, который формируется гравитационными или какими-либо другими сторонними силами и силами поверхностного натяжения

$$\omega^2(q) = \frac{\alpha}{\rho} (\kappa^2 + q^2) q \operatorname{th}(qd). \quad (8.1)$$

Здесь

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{\alpha} (g + f),$$

κ – волновое число риплона, g – ускорение силы тяжести, α и ρ – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкого гелия, d – толщина слоя жидкого гелия, f – константа Ван-дер-Ваальса, соответствующая силам притяжения, действующим на гелиевые атомы со стороны подложки ($f \propto d^{-4}$).

Коротковолновый участок спектра поверхностных возбуждений жидкого гелия, в отличие от спектра объемных возбуждений, практически не изучен. Имеется лишь ряд теоретических гипотез. Например, анализируя

температурную зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкого гелия при $T > 0,65$ К, Реут и Фишер [63] высказали предположение о наличии у риплонов ротонного участка спектра

$$\hbar\omega_r(q) \approx \Delta_r + \frac{\hbar^2(q - q_0)^2}{2m_r} \quad (8.2)$$

с параметрами

$$\Delta_r \approx 1,95 \text{ К}, \quad q_0 \gtrsim 3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}, \quad q_0 m_r^{1/2} \approx 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{-1}. \quad (8.3)$$

Однако это предположение, следующее из данных о зависимости $\alpha(T)$, является неоднозначным. Есть соображения, что минимум в спектре поверхностных возбуждений может появиться лишь при значительно больших энергиях [64]. При этом расхождение между теорией и экспериментом в вопросе о температурной зависимости поверхностного натяжения объясняется существенным отличием риплонного спектра от капиллярной асимптотики в области значений $q_0 \gtrsim 0,5 \text{ \AA}^{-1}$. В силу сказанного любые другие независимые результаты, несущие информацию о коротковолновом участке риплонного спектра, представляют несомненный интерес. В этом смысле определенные надежды возлагаются и на исследование свойств ПЭ в гелии.

В дальнейшем нам понадобится представление смещений $\xi(r)$ поверхности гелия из равновесного плоского положения через операторы рождения a_q^+ и уничтожения a_q соответствующих возбуждений. Для этого запишем гамильтониан поверхностных колебаний с точностью до слагаемых, квадратичных по смещению поверхности гелия, в виде:

$$\hat{H} = \frac{\rho}{2} \int v^2(r) d^2r dz + \int F(r - r') \xi(r') \xi(r) d^2r d^2r', \quad (8.4)$$

где $v(r)$ – локальная скорость жидкой фазы, связанная с гидродинамическим потенциалом Φ_s соотношением $v = \nabla \Phi_s$; F – некоторый структурный фактор. Гидродинамический потенциал находится из уравнения Лапласа с обычными граничными условиями

$$\Delta \Phi_s = 0, \quad \left. \xi = \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0, \quad \dot{\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt}.$$

Свободной поверхности жидкости отвечает $z = 0$. Твердая подложка находится на глубине $z = -d$.

Если ввести фурье-преобразование:

$$\xi(r) = \sum_q \xi_q \exp(iqr)$$

и аналогично – для Φ_s , то решение гидродинамических уравнений можно записать в следующей форме:

$$\Phi_{s,q} = \xi_q \frac{\operatorname{ch}[q(z + d)]}{q \operatorname{sh}(qd)}, \quad q = |q|.$$

Зная распределение $\Phi_s(r, z)$, гамильтониан поверхностных возбуждений можно представить в виде

$$\hat{H}_\xi = \frac{1}{2} \sum_q m_q (|\dot{\xi}_q|^2 + \omega_q^2 |\xi_q|^2). \quad (8.5)$$

где

$$\omega_q^2 = 2F_q \frac{q \operatorname{th}(qd)}{\rho}, \quad m_q = \frac{\rho S}{q \operatorname{th}(qd)},$$

F_q – фурье-компоненты структурного фактора, S – площадь поверхности гелия. Если обычным образом ввести операторы рождения и уничтожения, приводящие гамильтониан риплонов к стандартному виду, то нетрудно получить следующее выражение:

$$\xi_q = Q_q (a_q + a_{-q}^\dagger), \quad (8.6)$$

где

$$Q_q = \left(\frac{\hbar q \operatorname{th}(qd)}{2\rho\omega_q} \right)^{1/2}$$

Как уже отмечалось выше, при понижении температуры плотность гелиевого газа уменьшается с экспоненциальной скоростью. В то же время число риплонов

$$n_q = \left(\exp \frac{\hbar\omega_q}{T} - 1 \right)^{-1}, \quad (8.7)$$

имеющих волновой вектор порядка электронного, $q \sim k_T \ll q_T$ (здесь k_T и q_T – волновые векторы тепловых электронов и риплонов), изменяется прямо пропорционально температуре $n_q \approx T/\hbar\omega_q$. При $T = 0,5$ К для электронов $k_T \sim 10^5$ см⁻¹, а для риплонов $q_T \approx 10^7$ см⁻¹. Неравенство $k_T \ll q_T$ хорошо выполняется вплоть до температур $T \sim 10^{-2}$ К. Поэтому при достаточно низких температурах (реально это оказываются температуры $T \lesssim 0,8$ К) динамические свойства ПЭ определяются их взаимодействием с длинноволновыми риплонами.

§ 9. Теория электрон-риплонного рассеяния

Описание электрон-риплонного рассеяния и подвижности ПЭ оказалось довольно сложной и интересной проблемой. Достаточно сказать, что разные авторы [35, 65–67] получали совершенно различные результаты несмогря на то, что все они исходили из практически одного и того же гамильтониана системы. Причем подвижность ПЭ в этих теориях порой отличалась на несколько порядков. В дальнейшем благодаря подробному анализу электрон-риплонного рассеяния в рамках адиабатического принципа Борна – Оппенгеймера [68] было установлено, что две из перечисленных выше работ ([35] и [67]) являются ошибочными. Первая из них [35] вообще не учитывает того обстоятельства, что электронные состояния адиабатически подстраиваются к длинноволновым колебаниям границы жидкость – пар, а вторая [67], использующая адиабатическое приближение, содержит непоследовательный метод расчета матричных элементов оператора рассеяния. В настоящее время теория рассеяния ПЭ на длинноволновых риплонах, построенная в работах [66] и [68], является общепринятой и подтверждается экспериментально. Для описания рассеяния ПЭ на коротковолновых риплонах потребовалось дополнительное исследование [69].

Гамильтониан рассматриваемой системы состоит из гамильтониана свободных риплонов \hat{H}_ξ и гамильтониана ПЭ над искаженной поверхностью гелия \hat{H}_e :

$$\hat{H}_e = \hat{K}_e + V_0 \tau(z - \xi) + V_e + F_\perp z, \quad (9.1)$$

где

$$V_e = -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^3 R' \frac{\tau(z' - \xi')}{|R' - R|^4},$$

\hat{K}_e – оператор кинетической энергии электрона; $R = \{z, r\}$, $\xi(r)$ – смещение поверхности гелия из равновесного плоского положения, $\xi' = \xi(r')$ функция $\tau(z)$ описывает распределение гелиевых атомов на границе жидкость – пар. Согласно [70]

$$\tau(z) = \left[1 + \exp\left(\frac{z}{z^*}\right) \right]^{-1}, \quad z^* \approx 0,60 \text{ \AA}. \quad (9.2)$$

В пределе $z^* \rightarrow 0$ функция $\tau(z)$ переходит в ступенчатую функцию. Второе слагаемое в электронном гамильтониане (9.1) описывает движение барьера V_0 , а третье – движение поляризационного потенциала.

В адиабатическом подходе волновая функция системы ищется в виде произведения

$$\psi_{n,s} = \chi_s(R, \xi) \Phi_{n,s}(\xi) \quad (9.3)$$

(индекс s относится к электронному состоянию; вектор n условно обозначает набор чисел заполнения $\{n_q\}$, который при заданном значении s определяет состояние рипловой системы). При этом электронная волновая функция явным образом зависит от риплонных координат. Как обычно, уравнение Шредингера разделяется на два уравнения, если можно преобречь неадиабатическими слагаемыми в гамильтониане, которые действуют на волновую функцию системы следующим образом:

$$\hat{H}_{NA} \psi_{n,s} = [\hat{H}_\xi, \chi_s] \Phi_{n,s}. \quad (9.4)$$

Здесь квадратные скобки означают коммутатор операторов.

Согласно адиабатическому принципу к рассеянию электронов приводят только неадиабатические слагаемые \hat{H}_{NA} , матричные элементы которых определяют амплитуду вероятности соответствующих электронных переходов. Основная трудность при вычислении этих матричных элементов заключается в определении волновых функций χ_s , которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{H}_e \chi_s = \epsilon_s \chi_s. \quad (9.4a)$$

Здесь \hat{H}_e из (9.1) явно зависит от риплонных координат. В общем случае это очень сложная задача. Разумное приближение для волновой функции χ_s удается построить только для длинноволновых и коротковолновых риплонов. К счастью, только эти два предельных случая и оказываются интересными в теории проводимости ПЭ.

При взаимодействии с длинноволновыми риплонами $q \langle z \rangle < 1$ можно надеяться, что электронная волновая функция χ_s над искаженной поверх-

нностью будет близка к функции

$$\chi_{l,k}^{(0)} = f_l(z - \xi) \exp(ikr), \quad (9.5)$$

получающейся простым унитарным преобразованием из волновой функции свободных ПЭ:

$$|\psi_{n,s}^{(0)}\rangle = e^{-ik_z\xi} |l,k\rangle |n\rangle, \quad (9.6)$$

$|l,k\rangle$, $|n\rangle$ – кет-векторы состояний свободных электрона и риплонов.

Несмотря на то что собственные значения энергии $\epsilon_{l,k}^{(0)}$, соответствующие волновым функциям $\chi_{l,k}^{(0)}$, не зависят от риплонных координат и совпадают со спектром ПЭ над плоской поверхностью, функции $\chi_{l,k}^{(0)}$ из (9.5) в длинноволновом пределе $q(z) \ll 1$ гораздо лучше удовлетворяют адиабатическому уравнению (9.4a), чем невозмущенные волновые функции, так как гамильтониан $\hat{H}_A^{(0)}$ (здесь $\hat{H}_A^{(0)}$ определяется условием $\hat{H}_A^{(0)}\chi_s^{(0)} = \epsilon_s^{(0)}\chi_s^{(0)}$) включает в себя как возмущение, связанное с движением очень высокого потенциального барьера V_0 , так и большую часть поляризационного взаимодействия. Более того, ниже будет показано, что использование в качестве нулевого приближения теории возмущений волновых функций из плоской задачи приводит к расходности этого ряда в длинноволновом пределе. Более точный вид $\chi_{l,k}$ можно найти с использованием теории возмущений, в которой в качестве нулевого приближения используются функции $\chi_{l,k}^{(0)}$.

Обозначим через $\delta\hat{H}$ ту часть гамильтониана (9.1), которая недиагональна в базисе функций (9.5). Матричные элементы $\delta\hat{H}$ по известным формулам определят поправки к функции $\chi_{l,k}^{(0)}$. Таким образом, ответ можно выразить через матричные элементы некоторых операторов в базисе волновых функций $\chi_{l,k}^{(0)}$. Однако гораздо удобнее, когда в конечном ответе фигурируют матричные элементы по электронным состояниям над плоской поверхностью $|l,k\rangle$. Для этой цели используем унитарное преобразование

$$|\tilde{\psi}\rangle = e^{ik_z\xi} |\psi\rangle, \quad \tilde{H} = e^{ik_z\xi} \hat{H} e^{-ik_z\xi}, \quad (9.7)$$

в результате которого $|\tilde{\chi}_{l,k}^{(0)}\rangle = |l,k\rangle$, и вся параметрическая зависимость от ξ переходит в гамильтониан $\delta\tilde{H}$.

Окончательное выражение для матричных элементов неадиабатических слагаемых \hat{H}_{NA} в линейном приближении по ξ имеет следующий вид [68]:

$$\begin{aligned} \langle n'l'k' | H_{NA} | nlk \rangle &= \frac{E_\xi(n') - E_\xi(n)}{\epsilon_{lk} - \epsilon_{l'k'}} \langle n'l'k' | \delta\tilde{H} | nlk \rangle + \\ &+ \langle n'l'k' | -p_z \dot{\xi} + p_z^2/2M_\xi | nlk \rangle, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где

$$\delta\tilde{H} = \delta\tilde{V}_e + eE_1 \dot{\xi} + \delta\tilde{K}_e, \quad M_\xi^{-1} = \sum_q \frac{q \operatorname{th}(qd)}{\rho S}, \quad (9.9)$$

$$\delta\tilde{K}_e = -\frac{1}{2m} [p_z(p_r \nabla \xi) + p_z(\nabla \xi p_r)], \quad (9.10)$$

$E_\xi(n)$ – энергия риплонной системы в состоянии n , p_z и p_r – проекции оператора электронного импульса, $\delta\tilde{V}_e$ – искажение поляризационного потенциала в новом представлении (9.7):

$$\delta\tilde{V}_e = -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^3 R_1 \frac{[\tau(z_1 - \xi_1 + \xi) - \tau(z_1)]}{|R_1 - R|^4}, \quad \xi_1 = \xi(r_1). \quad (9.11)$$

В формуле (9.7) следует воспользоваться предельным переходом $z^* \rightarrow 0$ (z^* из (9.2)), в результате которого в линейном приближении по параметру ξ/z из (9.11) имеем

$$\delta\tilde{V}_e = -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^2 r_1 \frac{\xi(r_1) - \xi(r)}{[(r_1 - r)^2 + z^2]^2}. \quad (9.12)$$

Уже из этой формулы видно, что в длинноволновом пределе поляризационное взаимодействие сильно ослабляется.

В теории рассеяния выполняется закон сохранения энергии $E_\xi(n') - E_\xi(n) = \epsilon_s - \epsilon_{s'}$. В этом случае матричные элементы \hat{H}_{NA} совпадают с матричными элементами оператора $\hat{V} = \delta\tilde{H} - p_z \dot{\xi}$ в невозмущенном базисе $|l,k,n\rangle$. Если рассматривать электронные переходы только на основном поверхностном уровне ($l' = l = 1$), то ситуация еще более упрощается: $\hat{V} = \delta\tilde{V}_e + F\xi$. Отсюда в линейном приближении по ξ для гамильтониана внутри поверхностного уровня ($l' = l$) следует выражение, совпадающее с полученным в [66]:

$$\hat{V} = \sum_q V_q(z) e^{iqr}, \quad (9.13)$$

где

$$V_q(z) = \frac{q\Lambda}{z} \left[\frac{1}{qz} - K_1(qz) \right] + F, \quad (9.14)$$

$K_1(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Наличие характерного множителя $x^{-1} - K_1(x)$, с которым поляризационное взаимодействие входит в оператор рассеяния, отражает факт адиабатического подстраивания электронных состояний к длинноволновым колебаниям границы жидкость – пар, в результате которого в пределе $qz < 1$ поляризационное рассеяние сильно ослабляется ($K_1(x) \approx x^{-1}$ при $x < 1$). В теории [35] отсутствовало слагаемое $1/qz$ в поляризационной части электрон-риплонного рассеяния (9.14), что приводило к сильному рассеянию ПЭ на длинноволновых риплонах.

Большим преимуществом электрон-риплонной системы является возможность изменять величину электрон-риплонного рассеяния, меняя напряженность прижимающего электрического поля E_1 , входящего в (9.14): $F = eE_1$. Для характерных гелиевых температур $T \approx 0,5$ К два слагаемых в операторе рассеяния (9.14) становятся равными по величине при $E_1 \approx 300$ В · см⁻¹.

С общетеоретической точки зрения представляется интересным выяснить, насколько результат изложенного здесь адиабатического подхода отличается от результата традиционной теории возмущений. К сожалению,

теория Коула [35], который придерживается традиционной схемы, не учитывает важные общие свойства связанных электронных состояний и потенциальной энергии электрона $U(z, \xi) = V_0\tau(z - \xi) + V_\epsilon(z, \xi) + Fz$, входящей в определение \hat{K}_e из (9.1). Например, из (9.1) непросто увидеть, что прижимающее электрическое поле приводит к потенциальному взаимодействию вида $F \cdot \xi$. Чтобы явно учесть свойства $U(z, 0)$ и $|l\rangle$, представим потенциал возмущений $\delta U = U(z, \xi) - U(z, 0)$ в следующем виде:

$$\delta U = U(z - \xi, 0) - U(z, 0) + V_\epsilon(z, \xi) - V_\epsilon(z - \xi, 0) + F\xi. \quad (9.15)$$

Здесь мы прибавили и вычли $U(z - \xi, 0)$. Запись в такой форме позволяет учесть важные свойства связанных электронных состояний. Дело в том, что два первых слагаемых из (9.15) в линейном приближении по ξ не приводят к рассеянию внутри поверхностного уровня l , так как $\langle |l| \partial U(z, 0) / \partial z | l \rangle = 0$ согласно общим свойствам одномерного движения в квантовой механике.

Считая смещения поверхности гелия достаточно малыми, $\xi \ll \kappa_0^{-1}$, где $\kappa_0^{-1} = \hbar/(2mV_0)^{1/2}$ – глубина затухания электронной волновой функции в жидкой фазе гелия, для оператора рассеяния вида (9.13) нетрудно получить новое определение величины $V_q(z)$:

$$V_q(z) = \frac{q\Lambda}{z} \left[\frac{1}{qz} - K_1(qz) \right] + F - \frac{\partial U(z, 0)}{\partial z}. \quad (9.16)$$

Сравнивая (9.16) с результатом адиабатической теории возмущений, мы приходим к выводу, что для рассеяния внутри поверхностного уровня ($l' = l$) матричные элементы оператора рассеяния у обоих подходов одинаковы. Однако матричные элементы между уровнями переходов у операторов $\delta \hat{K}_e$ из (9.10) и оператора $-\partial U / \partial z$ из (9.16) существенно различны. В адиабатической теории они стремятся к нулю при $q \rightarrow 0$, а в обычной теории возмущений – не зависят от q и очень велики. Кроме того, следует отметить, что адиабатическая теория справедлива для длинноволновых риплонов $q \ll k(\gamma\xi)^{-1}$ при любых значениях потенциальной ступеньки V_0 и $\xi \ll \gamma^{-1} \approx 100 \text{ \AA}$. В то же время обычная теория возмущений ограничена более жестким условием $\xi \ll \kappa_0^{-1} \approx 2 \text{ \AA}$, которое может нарушаться для длинноволновых возмущений поверхности.

Условия применимости адиабатического приближения, $v_z \gg \xi$ и $M_\xi \gg m$ (где $v_z = p_z/m$), имеют простой физический смысл и хорошо выполняются для системы ПЭ и риплонов с любыми значениями q . Однако при описании рассеяния на коротковолновых риплонах нет оснований использовать приближение (9.5) для электронной волновой функции над искаженной поверхностью гелия, так как при $q \gtrsim k(\gamma\xi)^{-1}$ становится очень большим возмущение оператора кинетической энергии $\delta \hat{K}_e$ из (9.10). Более того, можно надеяться, что для коротковолновых смещений поверхности гелия адиабатическая волновая функция будет близка к волновой функции ПЭ над плоской поверхностью. В этом случае адиабатическая теория возмущений должна давать тот же результат, что и обычная теория возмущений. Что касается условия $\xi \ll \kappa_0^{-1}$, то для коротковолновых риплонов оно вполне приемлемо и, следовательно, можно пользоваться результатом (9.16).

Ниже нам понадобится и квадратичная по ξ поправка $\delta U^{(2)}$ к оператору рассеяния. Согласно (9.15) ее можно записать в виде

$$\delta U^{(2)} = \sum_{qq'} \xi_q \xi_{q'} W_{qq'} e^{i(q+q')r}, \quad (9.17)$$

где

$$W_{qq'} = \frac{\Lambda s^2}{z} \left[\frac{1}{s^2 z^2} - \frac{1}{2} K_2(|s|z) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(z, 0)}{\partial z^2}, \quad s = q + q'.$$

В отличие от первой производной в (9.16) среднее значение величины $\frac{1}{2} \partial^2 U / \partial z^2$ не равно нулю и существенно превосходит матричные элементы поляризационного слагаемого. Поэтому для коротковолновых риплонов $W_{qq'} \approx W_{00}$. При вычислении $\partial^2 U / \partial z^2$ можно пренебречь также членом V_ϵ по сравнению со ступенькой $V_0\tau(z - \xi)$ в меру малости параметра $\gamma\kappa_0^{-1} |\ln(\gamma\kappa_0^{-1})|$. В результате согласно [69] получаем

$$\langle l' | W_{00} | l \rangle = \kappa_0 F_{l'l}, \quad F_{l'l} = V_0 f_l(0) f_{l'}(0). \quad (9.18)$$

Значение $f_l(0)$ можно вычислить, используя модель электронного потенциала над поверхностью гелия из (4.4). Если, следя [37], положить $V_0 = 0,97 \text{ эВ}$ и $z^* = 0,91 \text{ \AA}$ и использовать экспериментальные данные [34] для разности энергий поверхностных уровней, то $f_l(0)$ можно оценить следующим образом:

$$f_l(0) = (-1)^{l+1} l^{-3/2} f_1(0), \quad f_1(0) \approx 56,6 \text{ см}^{-1/2}.$$

Если же, согласно [38], взять несколько другие параметры модели ($V_0 \approx 1 \text{ эВ}$ и $z^* = 1,01 \text{ \AA}$), то приведенная выше оценка несколько меняется: $f_1(0) \approx 59,7 \text{ см}^{-1/2}$.

Следует отметить еще один простой метод расчета $f_1(0)$. В пределе $V_0 \rightarrow \infty$ и $z^* \rightarrow 0$ произведение $\kappa_0 f_1(0)$ остается конечной величиной, равной $f'_1(0)$. Эта производная согласно (4.3) легко вычисляется и оказывается равной $2\gamma^{3/2}$. Используя это обстоятельство, можно получить довольно простую формулу:

$$f_1(0) = 2\gamma^{3/2} \kappa_0^{-1}.$$

Для $V_0 = 1 \text{ эВ}$ значение $\kappa_0^{-1} = 1,95 \cdot 10^{-8} \text{ см}$; при этом $f_1(0) \approx 58,8 \text{ см}^{-1/2}$, что находится в пределах точности модели (4.4).

Интересно отметить, что матричные элементы $W_{qq'}$ из (9.18) для коротковолновых риплонов очень слабо зависят от напряженности прижимающего поля E_\perp , только в меру зависимости $\gamma(E_\perp)$, в соответствии с формулой (5.10).

Как будет показано ниже, коротковолновые риплоны могут участвовать лишь в двухквантowych процессах рассеяния. При этом члены второго порядка теории возмущений от линейных слагаемых в операторе рассеяния (9.16) много меньше членов первого порядка теории возмущений от оператора (9.17) из-за того, что электронные энергии $\epsilon(q)$ при $q \sim 10^7 - 10^8 \text{ см}^{-1}$ оказываются порядка $100 \text{ K} \gg T$.

§ 10. Релаксация импульса и подвижность поверхностных электронов

10.1. Электрон-риплонное взаимодействие приводит к рассеянию электронов, которое сопровождается поглощением или излучением риплонов. Рассмотрим сначала однориплонные процессы рассеяния. Из закона сохранения энергии

$$\epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \epsilon(\mathbf{k}) \pm \hbar\omega_q = 0,$$

записанного с учетом закона сохранения импульса, следует, что в однориплонных процессах участвуют лишь длинноволновые риплоны с $q \leq 2k$. Энергии соответствующих возбуждений очень малы, $\hbar\omega_q \lesssim 10^{-2}$ К. Поэтому при описании этих процессов можно воспользоваться гамильтонианом (9.8), (9.14), полученным для длинноволновых риплонов в рамках адиабатического подхода. Дальнейшие вычисления импульсной частоты столкновений электронов проводятся стандартными методами, развитыми в теории полупроводников, с небольшими поправками на двумерность задачи и специфический характер закона дисперсии риплонов. При этом импульсная частота столкновений, характеризующая скорость релаксации импульса ПЭ в результате электрон-риплонного рассеяния, определяется формулой [66]:

$$\nu = \frac{m}{2\pi\hbar^3} \int_0^{2\pi} d\theta | <1| V_q | 1> |^2 Q_q^2 (2n_q + 1)(1 - \cos\theta), \quad (10.1)$$

здесь $q = 2k \sin\theta/2$, величина n_q определена в (8.7) Q_q из (8.6), θ – угол между векторами \mathbf{k} и $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$.

Используя конкретный вид функции $V_q(z)$ из (9.14), вычислим ее среднее значение на основном поверхностном уровне, описываемом волновой функцией типа (5.9) [71]

$$\langle 1 | V_q | 1 \rangle = 2^{-1} \Lambda q^2 \varphi(q/2\gamma) + eE_{\perp}, \quad (10.2)$$

где

$$\varphi(y) = \begin{cases} -\frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right), & y < 1, \\ -\frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{(y^2-1)^{3/2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right), & y > 1. \end{cases}$$

Импульсная частота столкновений электронов $\nu(k)$ как функция волнового числа k определяет их подвижность μ в слабом электрическом поле, параллельном поверхности гелия и имеющем частоту ω :

$$\mu = \frac{e}{m} \int_0^{\infty} \frac{x\nu(\tilde{x}) e^{-x} dx}{\omega^2 + \nu^2(\tilde{x})}, \quad \tilde{x} = \frac{(2mTx)^{1/2}}{\hbar}. \quad (10.3)$$

В квазистатическом пределе, $\omega \ll \nu$, и при $E_{\perp} \ll 300$ В · см⁻¹ результат численного расчета μ по формулам (10.1) и (10.3) приведен на рис. 3.1, a. Отметим, что подвижность примерно обратно пропорциональна T вплоть

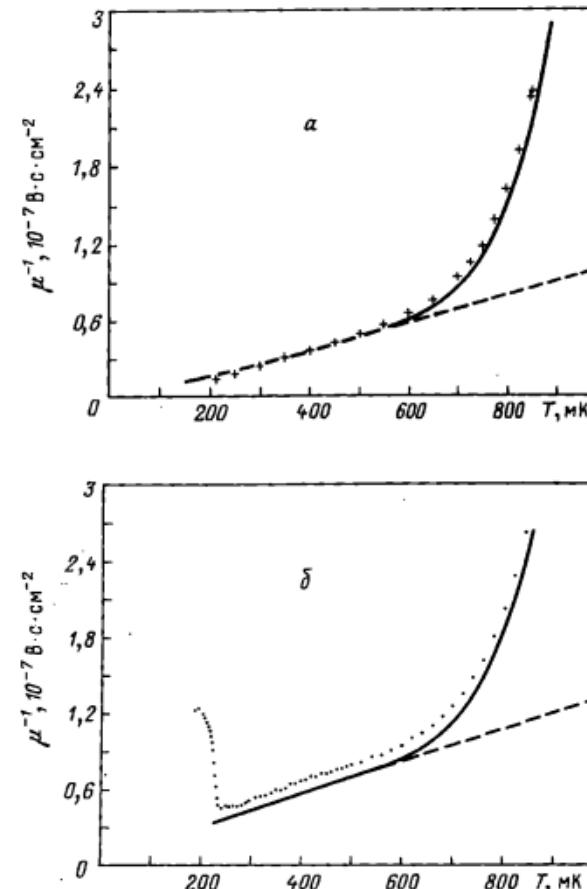


Рис. 3.1. *α* – Обратная подвижность в функции от T в предельном случае слабых прижимающих полей. Штриховая линия – теория [71]. Плотность электронов $n_s = 0.53 \cdot 10^8$ см⁻² (Мейрот и др. [75]).

β – Эксперимент, аналогичный рис. 3.1, a, с несколькою увеличенной плотностью $n_s = 1.05 \cdot 10^8$ см⁻². Скачок подвижности в окрестности $T = 200$ мК отвечает возникновению вигнеровского кристалла [75].

до 0,3 К. Это обусловлено тем, что сложная функция $\varphi(y)$ из (10.2) в широком интервале значений $y \lesssim 1$ численно близка к $1/(3y)$. Подставляя эту интерполяцию $\varphi(y)$ в (10.2) и (10.3), нетрудно получить следующую приближенную формулу:

$$\mu_0 = \frac{9\alpha e \hbar^3}{m^2 \Lambda^2 \gamma^2 T}, \quad \omega = 0. \quad (10.4)$$

Отсюда следует, что μ_0 практически не зависит от электронной температуры T_e .

В пределе сильных прижимающих полей, $E_{\perp} \gg 300 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, когда можно пренебречь поляризационным слагаемым в гамильтониане рассеяния, подвижность электронов имеет вид

$$\mu_F = \frac{8\alpha\hbar e}{mF^2} \left(\frac{T_e}{T} \right), \quad F = eE_{\perp}, \quad \omega = 0. \quad (10.5)$$

В отсутствие разогрева $T = T_e$ она не зависит от температуры и убывает с ростом E_{\perp} по закону $\mu \propto E_{\perp}^{-2}$ [65, 66].

Получить аналитическое выражение для проводимости ПЭ при произвольных прижимающих полях можно лишь в высокочастотном пределе $T \gg \omega \gg \nu$ [72]. В этом случае импульсная частота столкновений $\nu(k)$ из знаменателя выражения (10.3) переходит в числитель, и в результате этого усреднение по больцмановской функции распределения легко производится. Окончательное выражение для высокочастотного времени релаксации τ_{ac} имеет вид

$$\tau_{ac}^{-1} = \frac{1}{4\alpha\hbar} [e^2 E_{\perp}^2 + 4c_1 \gamma T e E_{\perp} + 4c_2 \gamma^2 T^2], \quad (10.6)$$

$$c_1 = -0,65 + \ln P, \quad c_2 = 14,55 + 12,1 \ln P + 3 \ln^2 P, \quad P = \Lambda \gamma / 2T.$$

Приведенные выше формулы для подвижности ПЭ получены в пренебрежении межэлектронным взаимодействием. В то же время эксперименты, как правило, проводятся в условиях, когда автокорреляционное время для электронной скорости $\tau_{ee} = \nu_{ee}^{-1}$ (ν_{ee} – частота межэлектронных столкновений) значительно меньше времени релаксации импульса на риппонах $t = \nu^{-1}$. В этих условиях, $\nu_{ee} \gg \nu$, вид функции распределения носителей по импульсам p определяется межэлектронными столкновениями, $\hat{S}_{ee}\{f\} = 0$ (S_{ee} – интеграл столкновений). Таким образом, $f(p) = f^{(0)}(\epsilon - \mu u)$, где $f^{(0)}(\epsilon)$ – равновесная функция распределения по энергии ϵ , u – дрейфовая скорость ПЭ. Соответствующее выражение для подвижности несколько видоизменяется по сравнению с формулой (10.3) [73]:

$$\mu(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\bar{\nu}}{\omega^2 + \bar{\nu}^2}, \quad \bar{\nu}(T) = \int_0^{\infty} x \nu(x) e^{-x} dx, \quad (10.7)$$

где \bar{x} определяется (10.3). В общем случае формулы (10.7) и (10.3) совпадают только в пределе $\omega \gg \nu$. При этом $(\bar{\nu})^{-1}$ совпадает с определением высокочастотного времени релаксации τ_{ac} . Одноэлектронное приближение и формула (10.7) могут дать одинаковые результаты в случае, когда частота столкновений ν не зависит от энергии носителей. Это условие приближенно выполняется для поляризационного потенциала рассеяния ($\varphi(y) = 1/(3y)$), т.е. при $E_{\perp} \ll 300 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. В обратном предельном случае ($E_{\perp} > 300 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$) $\nu = F^2/4\alpha\hbar$, а подвижность оказывается ровно в два раза меньше одноэлектронного приближения (10.5). Это обусловлено заметной зависимостью ν от энергии носителя в пределе сильных прижимающих полей, $\nu \propto \epsilon^{-1}$.

Впервые влияние электрон-риппонного взаимодействия на подвижность поверхностных электронов было обнаружено в экспериментах [74, 77].

Измерения [75], осуществленные позднее, показали, что соответствие с теорией наблюдается, во всяком случае, до температуры $T = 0,2 \text{ К}$ (см. рис. 3.1). При более низких температурах возникает кристаллизация электронной системы (см. гл. 5).

Влияние прижимающего поля на подвижность ПЭ было впервые обнаружено в экспериментах [76] по ширине плазменных резонансов (рис. 3.2). Значение подвижности в [76] ровно в два раза меньше, чем в одноэлектронной теории (10.5), что согласуется с результатом (10.7), полученным в пределе $\nu_{ee} \gg \nu$. Рис. 3.2 четко демонстрирует независимость этой части подвижности электронов от температуры, что также подтверждает теоретические предсказания. На рис. 3.3 приведены данные [77] о подвижности ПЭ в сильном прижимающем поле E_{\perp} для электронов над растворами ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$.

10.2. Информацию об импульсной частоте столкновений несет также и ширина циклотронного резонанса ПЭ. В классической теории формы

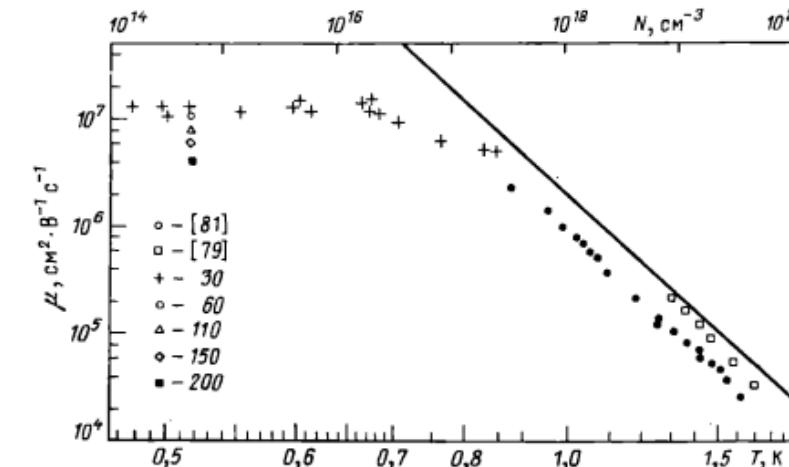


Рис. 3.2. Электронная подвижность в функции от температуры для разных прижимающих полей E_{\perp} (в $\text{В} \cdot \text{см}^{-1}$) (Граймс и др. [76]).

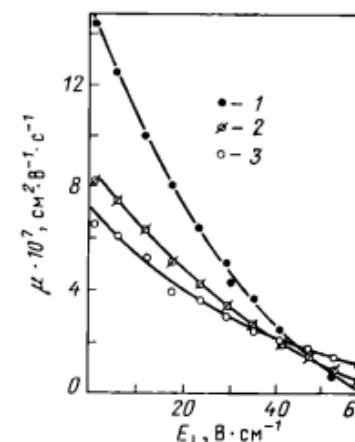


Рис. 3.3. Электронная подвижность μ в функции от E_{\perp} при $T = 0,3 \text{ К}$ для чистого ${}^4\text{He}$ и его растворов: 1 – чистый ${}^4\text{He}$, 2 – концентрация раствора $c = 5 \cdot 10^{-4}$, 3 – $c = 10^{-3}$ [77].

линии циклотронного резонанса для электронов на поверхности гелия скорость энергетических потерь $W(\omega)$ имеет вид [66]

$$W(\omega) = e^2 E_{\parallel}^2 \frac{n_s}{m} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x} \nu(\tilde{x}) dx}{(\omega - \omega_c)^2 + \nu^2(\tilde{x})}. \quad (10.8)$$

Если ширину линии $\Delta\omega$ определить следующим образом:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{W(\omega)}{W(\omega_c)},$$

то для нее, используя (10.8), легко получается выражение [78]

$$\Delta\omega = \left[\int_0^{\infty} dx \frac{x e^{-x}}{\nu(\tilde{x})} \right]^{-1}, \quad (10.9)$$

совпадающее с определением импульсной частоты столкновений в теории подвижности электронов $\mu = e/(mv)$.

В пределе $\nu_{ee} \gg \nu$ выражение для скорости энергетических потерь имеет несколько иной вид:

$$W(\omega) = e^2 E_{\parallel}^2 \frac{\bar{\nu}}{(\omega - \omega_c)^2 + \bar{\nu}^2}, \quad (10.10)$$

где $\bar{\nu}$ из (10.7). В этом случае ширина линии $\Delta\omega = \bar{\nu}$.

Первые экспериментальные исследования циклотронного резонанса ПЭ [79] проводились при $T > 1$ К, когда $\Delta\omega$ определяется столкновениями с атомами газа. Несколько позже Эдельманом [41] были выполнены обширные низкотемпературные исследования циклотронного резонанса. Несмотря на условие $\hbar\omega_c \geq T$, в пределе $E_1 \gg 300$ В · см⁻¹ данные [41] описываются зависимостью $\Delta\omega \propto E_1^2$.

10.3. Продолжая обсуждение возможных источников информации об импульсной частоте столкновений, следует обратить внимание на ширину линий в оптических переходах электронов между дискретными поверхностными состояниями. Эта задача, имеющая большую литературу в теории оптических свойств полупроводников (см., например, книгу Давыдова [80]) и в теории инверсионных слоев, сравнительно мало (но на хорошем уровне) разработана в случае электронов над гелием. По существу, можно назвать лишь две работы: [34] и [56], в которых производились соответствующие вычисления. При этом в первой из указанных работ учитывалось влияние на ширину линий лишь количественной плотности газовых атомов. Что касается работы [56], то здесь принималось во внимание и электрон-риплонное взаимодействие.

Полное решение задачи о форме линии какого-либо оптического перехода является большой самостоятельной задачей. Ситуация оказывается наиболее простой в том случае, когда внешняя частота ω превышает расстояние между соответствующими уровнями Δ_1 и Δ_2 на малое значение $\hbar\delta\omega = \Delta_2 - \Delta_1 - \hbar\omega \ll \Delta_2 - \Delta_1$. В этом случае в теории возникает возможность использовать так называемое самосогласованное борновское

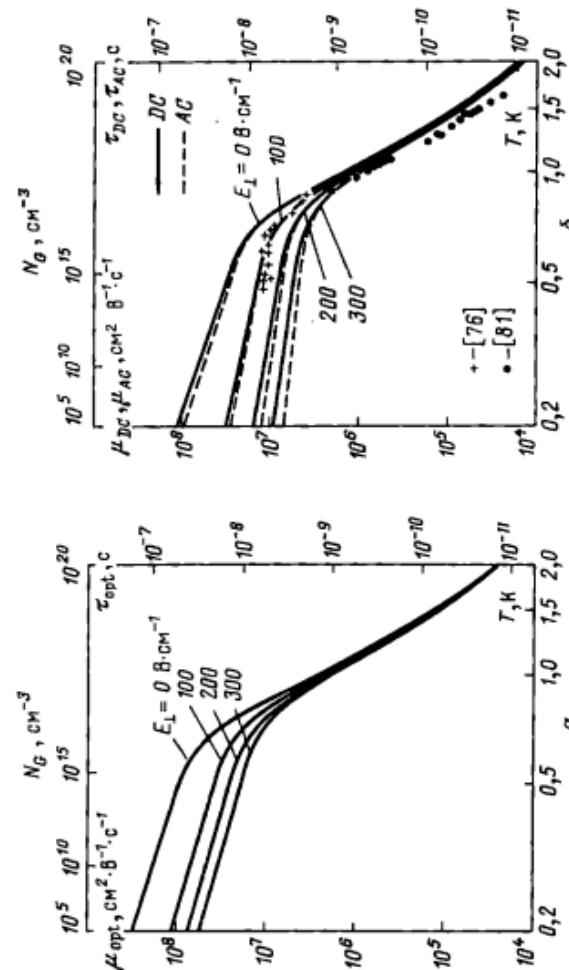


Рис. 3.4. *a* – Эффектная подвижность μ_{opt} , характеризующая ширину оптического перехода 1–2 с учетом взаимодействия электронов с газовыми атомами и колебаниями поверхности жидкого гелия (Андо [56]).

b – Статическая μ_{DC} и высокочастотная μ_{AC} подвижности поверхности электронов, рассчитанные в тех же предположениях о взаимодействии электронов и с газовыми атомами, что и на рис. 3.4, *a* (Андо [56]). Экспериментальные точки соответствуют изображенным на рис. 3.2

приближение либо, как это сделано в [80, с. 376], процедуру расцепления уравнений для функции Грина в ближнем порядке, обеспечивающем конечность ширины линии оптического перехода. Ситуация напоминает задачу о циклотронном резонансе, обсуждавшуюся выше, где, несмотря на наличие в расчете высокой частоты ω , ширина линии определяется статистическое значение импульсной частоты столкновений.

В указанных предположениях ширина $\Delta\omega$ линии оптического перехода оказывается равной

$$\begin{aligned}\Delta\omega(k) = & \frac{2\pi}{N\hbar^2} \sum_{l,q} |V_l(k, q)|^2 \{ (n_q + 1) \delta [\epsilon_l(k) - \epsilon_l(k + q) - \omega_q] + \\ & + n_q \delta [\epsilon_l(k) - \epsilon_l(k + q) + \omega_q] \},\end{aligned}\quad (10.11)$$

где $|V_l(k, q)|^2$ – квадрат матричного элемента, определяющий масштаб взаимодействия электрона с соответствующим возмущением, $\epsilon_l(k)$ – закон дисперсии поверхностных электронов (4.2), ω_q – закон дисперсии поверхностных колебаний или газовых атомов. Это выражение для $\Delta\omega_k$ близко по своей структуре к определению $\nu(k)$ (10.1), что в конечном счете и позволяет говорить о ширине линии (10.11) как об источнике информации относительно импульсной частоты столкновений.

Опуская детали расчета, выполненные для электронных переходов над гелием в [56], приведем конечные результаты, определяющие поведение ширины линии для перехода 1–2 в функции от плотности газовых атомов и напряженности прижимающего поля E_1 . На рис. 3.4, а из [56] представлено поведение полуширины линии 1–2, рассчитанной в условиях присутствия газовых атомов и $E_1 \neq 0$. Рис. 3.4, б из этой же работы иллюстрирует для сравнения поведение импульсной частоты столкновений, рассчитанной в тех же условиях и при тех же предположениях о структуре электрон-риплонного взаимодействия. Здесь же нанесены экспериментальные данные из [76] и [81].

Заканчивая дискуссию о свойствах электрон-риплонного взаимодействия и его влияния на подвижность электронов, можно сказать, что практически все имеющиеся к настоящему времени экспериментальные данные, полученные в условиях, допускающих однозелектронную трактовку процессов импульсной релаксации, находятся в соответствии с теоретическими представлениями, изложенными выше.

§ 11. Скорость релаксации энергии поверхностных электронов

Импульсная частота столкновений электронов вполне определяет их подвижность только в квазиравновесных условиях, пока ведущее электрическое поле E_\parallel не разогревает электронный газ ($T_e = T$). Для учета нелинейных по E_\parallel эффектов нужна информация о так называемой энергетической частоте столкновений ν , характеризующей скорость диссипации энергии в электронной системе.

Кинетическое уравнение для функции распределения двумерных ПЭ ($f(p) = f_0(\epsilon) + f_1 p/p$) с учетом только однориплонных процессов рассеяния

имеет вид

$$\frac{1}{2} eE_\parallel \frac{\partial}{\partial \epsilon} (v f_1) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\epsilon \tilde{\nu} \left(f_0 + T \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \right], \quad (11.1)$$

$$f_1(\epsilon) = - \frac{eE_\parallel}{\nu(\epsilon)} v \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon},$$

где $\nu(\epsilon)$ – определяется формулой (10.1), а $\tilde{\nu}(\epsilon)$ – энергетическая частота столкновений:

$$\tilde{\nu}(\epsilon) = \frac{1}{2\pi\hbar^3 T} \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{m\hbar\omega_q}{p} \right)^2 |<1| V_q |1>|^2 (2n_q + 1), \quad (11.2)$$

$$\epsilon = p^2/2m, \quad p = \hbar k, \quad q = 2k \sin \theta/2, \quad v = p/m.$$

Если считать, что симметричная часть функции распределения f_0 имеет больцмановский вид с некоторой эффективной температурой T_e , что можно обосновать в приближении частичного или полного контроля (частота электрон-электронных столкновений много больше энергетической электрон-риплонной частоты столкновений), то средняя энергия, передаваемая одним электроном системе риплонов в единицу времени, оказывается равной

$$P(T_e) = \tilde{\nu}(T_e)(T_e - T), \quad (11.3)$$

где

$$\tilde{\nu}(T_e) = \int_0^\infty x \tilde{\nu}(\epsilon) e^{-x} dx, \quad (11.4)$$

$\tilde{\nu}(\epsilon)$ определено (11.2), $\tilde{\epsilon} = xT_e$.

Как уже отмечалось выше, в однориплонных процессах рассеяния электронов участвуют лишь длинноволновые риплоны с $q \leq 2k$, характерные энергии $\hbar\omega_q$ которых очень малы. Поэтому и энергетическая частота столкновений ν , определяемая этими процессами, оказывается довольно малой. Действительно, для упрощенного поляризационного потенциала $\varphi(y) \approx \approx 1/(3y)$, используя определение $\tilde{\nu}$ (11.4), можно получить следующее выражение:

$$\tilde{\nu}_1(T_e) = \frac{8\sqrt{2}m^{5/2}\Lambda^2\gamma^2T_e^{1/2}}{\sqrt{\pi}9\rho\hbar^4} \left(1 + \pi^{1/2} \frac{E_1}{E_0} + \frac{E_1^2}{E_0^2} \right), \quad (11.5)$$

$$E_0 = 2\gamma\Lambda(2mT_e)^{1/2}/(3e\hbar).$$

В слабых прижимающих полях, $E_1 \ll E_0$, при $T_e \sim T \approx 1$ К числовая оценка величины $\tilde{\nu}_1$ действительно оказывается малой: $\tilde{\nu}_1 \sim 10^4$ с⁻¹.

Значительно больший вклад в энергетическую частоту столкновений могут дать двухриплонные процессы рассеяния [69]. Действительно, рассмотрим процесс излучения электроном двух риплонов. В этом случае из

закона сохранения энергии

$$\epsilon_k - \epsilon_{k'} = \hbar\omega_q + \hbar\omega_{q-s}$$

и закона сохранения импульса $k = k' + q + q'$, записанных в виде одного уравнения

$$2(\epsilon_s \epsilon_k)^{1/2} \cos \theta - \epsilon_s = \hbar\omega_q + \hbar\omega_{q-s} \quad (11.6)$$

(здесь $s = q + q'$ — суммарный импульс излучаемой пары, θ — угол между векторами k и s), следует, что электрон может излучить два коротковолновых риплонов ($q \approx q' \sim 10^7 \div 10^8 \text{ см}^{-1}$) с малым суммарным импульсом $s = |q + q'| \sim k \ll q$. Иными словами, два коротковолновых возбуждения излучаются электроном в строго противоположных направлениях (в меру $s \ll q$).

Вычислим теперь вклад таких процессов в энергетическую частоту столкновений. Для рассматриваемых процессов рассеяния интересующая нас величина $P(\epsilon)$ (скорость потерь энергии электроном) определяется известной формулой:

$$P(\epsilon) = \sum_{n'k'} (E_\xi(n') - E_\xi(n)) W(n, k \rightarrow n', k'), \quad (11.7)$$

где $E_\xi(n)$ — энергия риплонной системы в состоянии n ; $\epsilon = \hbar^2 k^2 / (2m)$ — энергия носителя; $W(n, k \rightarrow n', k')$ — вероятность перехода в единицу времени для процесса, указанного в круглых скобках:

$$W(n, k \rightarrow n', k') = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n', k' | V | n, k \rangle|^2 \delta(E_{n'k'} - E_{nk}), \quad (11.8)$$

$E_{n,k}$ — полная энергия системы в состоянии $|n, k\rangle$; $l = l' = 1$. В эту формулу в качестве потенциала рассеяния V следует подставлять выражение (9.17). В рассматриваемом случае можно оставить только процессы излучения риплонов, так как в процессах рассеяния риплона из состояния q в состояние q' разность энергий $\hbar\omega_q - \hbar\omega_{q'}$ мала в меру $s \ll q$. Процессы поглощения двух риплонов мы также опускаем, так как они дают малый вклад в условиях сильного разогрева электронного газа $T_e \gg T$, а при $T_e \sim T$ приводят к появлению характерной разности ($T_e - T$) в выражении для скорости энергетических потерь. В этом приближении выражение для $P(\epsilon)$ можно привести к виду

$$P(\epsilon) = \frac{4\pi}{\hbar} \kappa_0^2 F_{11}^2 \sum_{qs} Q_q^2 Q_{q-s}^2 (\hbar\omega_q + \hbar\omega_{q-s})(n_q + 1) \times \\ \times (n_{q-s} + 1) \delta(\epsilon_{k+s} - \epsilon_k + \hbar\omega_q + \hbar\omega_{q-s}), \quad (11.9)$$

$$F_{11} = V_0 f_1^2(0).$$

Замечая, что $s \sim k \ll q$, и переходя в (11.9) от суммирования к интегрированию, в результате вычислений получаем [69]

$$P(\epsilon) = 2\kappa_0^2 F_{11}^2 m \pi^{-1} \hbar^{-2} \int_0^\infty dq q \omega_q Q_q^4 (n_q + 1) \theta(\epsilon - 2\hbar\omega_q). \quad (11.10)$$

Наличие θ -функции в подынтегральном выражении означает, что излучение двух риплонов происходит только в том случае, если энергия электронов превышает энергию излучаемой пары $2\hbar\omega_q$.

Используя (11.10), можно вычислить среднюю энергию, теряемую ПЭ в единицу времени $P(T_e) = \sum f^{(0)}(\epsilon) P(\epsilon)$. В пределе $T_e \gg T$ величина $P(T_e) = \tilde{\nu}(T_e) T_e$, где

$$\tilde{\nu}(T_e) = \kappa_0^2 F_{11}^2 m 2^{-1} \pi^{-1} \rho^{-2} T_e^{-1} \int_0^\infty dq q^3 \omega_q^{-1} \times \\ \times \exp(-2\hbar\omega_q/T_e). \quad (11.11)$$

Эта формула для энергетической частоты столкновений ПЭ позволяет извлекать экспериментальную информацию о коротковолновом участке риплонного спектра, который пока неизвестен. Полагая, что и в коротковолновой области $\omega_q \propto q^{3/2}$, имеем

$$\tilde{\nu}_\alpha(T_e) = \kappa_0^2 F_{11}^2 m T_e^{2/3} \Gamma(5/3) 6^{-1} 2^{-2/3} \pi^{-1} \rho^{-2/3} \alpha^{-4/3} \hbar^{-5/3}. \quad (11.12)$$

Если же, следуя [63], допустить наличие у поверхностных возбуждений ротонного участка с $\Delta_r \sim 2 \text{ К}$, то ротонный вклад в энергетическую частоту столкновений будет содержать дополнительный экспоненциальный множитель $\exp(-2\hbar\Delta_r/T_e)$.

Даже без учета поверхностных ротонов, вклад которых в энергетическую частоту столкновений оказывается существенным лишь при $T_e \sim 2\Delta_r$, значение величины $\tilde{\nu}$ из (11.12) оказывается много больше, чем в одноквантовых процессах (11.5). Действительно, для F_{11} из (9.18) при $T_e \sim 1 \text{ К}$ согласно (11.12) имеем $\tilde{\nu}_\alpha \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$, что на два порядка больше, чем $\tilde{\nu}$ из (11.5). Этот результат подтверждается экспериментами [41, 82], в которых измерялась скорость энергетических потерь ПЭ в неравновесных условиях, $T_e > T$. Кроме количественного соответствия теоретических и экспериментальных оценок следует отметить, что в [41] энергетическая частота столкновений почти не зависит от напряженности прижимающего поля E_{11} , что согласуется с (11.12).

§ 12. Нелинейная вольт-амперная характеристика

Как мы уже выяснили, скорость энергетической релаксации ПЭ в гелии при низких температурах очень мала. Поэтому можно ожидать, что уже в достаточно слабых ведущих полях должны наблюдаться сильный разогрев электронного газа и усложнение вольт-амперной характеристики (ВАХ). Первые указания на это обстоятельство содержатся в работах Крэндла [83, 84] и Шикина, Монархи [66]. Дальнейшее изучение этой проблемы связано с деятельностью Монархи, Соколова [85, 73, 69, 47] и Сайто, Аоки [86–89].

12.1. Разогрев электронов, находящихся на основном поверхностном уровне, в случае слабых прижимающих полей не приводит к существенному изменению подвижности электронов. Это следует из приближенной формулы (10.4), которая, как отмечалось выше, не зависит от T_e . Более точные числовые расчеты зависимости $\mu(T_e)$ приведены на рис. 3.5, из которого

следует, что при $T_e > 0,5$ К подвижность электронов слабо меняется как функция эффективной температуры T_e . Значение ведущего электрического поля E_{\parallel} , разогревающего ПЭ до некоторой температуры T_e , определяется уравнением баланса энергии

$$(eE_{\parallel})^2 = m(T_e - T)\tilde{\nu}(T_e)v(T_e). \quad (12.1)$$

Это соотношение неявным образом определяет зависимость $T_e(E_{\parallel})$.

Используя уравнение баланса энергии, можно ввести характерное электрическое поле E_{\parallel}^0 ,

$$E_{\parallel}^{(0)} = e^{-1}(mTv(T)\tilde{\nu}(T))^{1/2},$$

разделяющее области слабого и сильного разогрева ПЭ внешним ведущим полем. Полученные ранее оценки для импульсной и энергетической частот

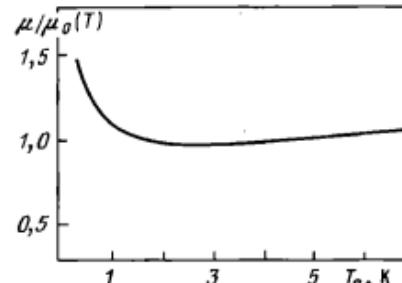


Рис. 3.5. Зависимость подвижности электронов на основном уровне от эффективной температуры. Подвижность $\mu_0(T)$ определена (10.4) [47]

столкновений показывают, что при $T \approx 0,5$ К существенный разогрев электронов будет происходить в условиях $E_{\parallel} > E_{\parallel}^{(0)} \approx 10^{-3}$ В · см⁻¹. Если бы мы в энергетической частоте столкновений ограничились только одиориплонными процессами рассеяния, то эта оценка была бы еще на порядок меньше.

При наличии сильного прижимающего поля $E_1 > E_0$ (здесь E_0 определяется (11.5)) подвижность электронов на основном поверхностном уровне зависит от электронной температуры — см. формулу (10.5). Сильное прижимающее поле уменьшает подвижность ПЭ, а разогрев ведущим полем может ее увеличить до значения, определяемого поляризационным рассеянием. Таким образом, в пределе $E_1 \gg E_0$ имеется довольно значительная область температур, в которой должен наблюдаться рост подвижности ПЭ при увеличении амплитуды ведущего поля. Это обстоятельство можно использовать для получения информации о коротковолновом участке спектра поверхностных возбуждений жидкого гелия, так как зависимость $\tilde{\nu}(T_e)$ определяется конкретным видом этого спектра. К сожалению, расчет зависимости $\mu(E_{\parallel})$ даже для относительно простого случая удается выполнить лишь численно.

При проведении соответствующих расчетов использовались две модели коротковолнового спектра риплонов.

1. Спектр риплонов не содержит ротонного минимума и в коротковолновой области совпадает со своей длинноволновой асимптотикой $\omega_q \sim q^{3/2}$.

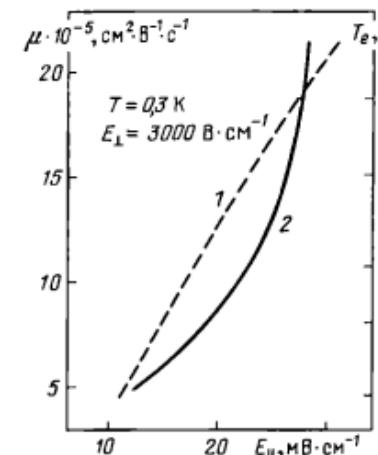


Рис. 3.6. Зависимость подвижности ПЭ от напряженности ведущего электрического поля E_{\parallel} в предположении, что риплонный спектр не имеет ротонного участка (кривая 1) либо имеет его (кривая 2) [85]. Параметры гипотетического ротонного участка взяты из [63]

2. Кроме капиллярной ветви, спектр поверхностных возбуждений содержит ротонную ветвь; чтобы обе эти ветви не пересекались, предполагается, что капиллярная ветвь спектра и левый участок ротонной ветви ($q < q_0$) имеют одинаковые предельные значения энергии и волнового вектора.

Результаты соответствующих расчетов [85] представлены на рис. 3.6. Если спектр коротковолновых риплонов совпадает со своей длинноволновой асимптотикой, то зависимость $\mu(E_{\parallel})$ является плавной (кривая 1) и в достаточно большом интервале полей E_{\parallel} близка к линейной ($T_e \gg T$). Для второй модели риплонного спектра соответствующая зависимость $\mu(E_{\parallel})$ оказывается более резкой (кривая 2). На рисунке специально показан лишь тот участок кривой $\mu(E_{\parallel})$, для которого вклад ротонного участка спектра в величину $\tilde{\nu}$ существен ($T_e \geq 2\Delta_r$). Электронными переходами на следующие поверхностные уровни в рассматриваемом случае можно пренебречь, так как для $E_1 \geq 3000$ В · см⁻¹ разность энергий первых двух уровней составляет примерно 30 К.

Вернемся опять к пределу слабых прижимающих полей $E_1 \ll E_1^{(0)}$. Вывод о независимости подвижности ПЭ от электронной температуры в этом случае справедлив лишь до тех пор, пока T_e меньше разности энергий между основным и первым возбужденным уровнем. С увеличением напряженности ведущего поля эффективная электронная температура возрастает, и при некотором ее значении должно происходить испарение электронов с основного поверхностного уровня в область квазинепрерывного спектра. Элементарный анализ уравнения баланса энергии показывает, что испарение ПЭ при достаточно низких температурах жидкого гелия должно приводить к неустойчивости токового состояния электронного газа. Появление неустойчивости связано с тем, что по мере ухода электронов от поверхности жидкости в объем газовой фазы их подвижность, а следовательно, и энергия, отбираемая у внешнего поля в единицу времени, возрастает, в то время как скорость энергетических потерь, определяемая излучением риплонов, падает.

Для теоретического исследования эффектов "испарения" ПЭ в греющем ведущем электрическом поле необходимо обобщить приведенную в предыдущем параграфе технику вычислений, считая возможными электронные переходы между различными поверхностными уровнями.

В рассматриваемом случае кинетическое уравнение для функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f_{l,k}}{\partial t} + \frac{eE_{\parallel}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k} f_{l,k} = \hat{S} f_{l,k}, \quad (12.2)$$

здесь \hat{S} – интеграл столкновений. Приведенные выше оценки показывают, что в рассматриваемой системе выполняется неравенство $\tilde{\nu} \ll \nu$, обеспечивающее слабость анизотропии функции распределения. Ниже при решении кинетического уравнения (12.2) мы будем использовать математический аппарат приближения полного контроля, когда электрон-электронные столкновения формируют вид функции распределения $\hat{S}_{ee} \{f_{l,k}\} = 0$. При этом функция распределения ПЭ представляет собой так называемую сдвинутую ферми-функцию (в данном случае больцмановскую)

$$f_{l,k} = \text{const} \cdot \exp \left(- \frac{\epsilon_{l,k} - \hbar k u}{T_e} \right), \quad (12.3)$$

параметры которой (средняя скорость u и температура T_e) определяются взаимодействием электронов с риплонами. Мы не будем особенно заботиться об обосновании приближения полного контроля. Дело в том, что согласно [90] это приближение широко используется даже в случаях, когда полный контроль не реализуется, так как целый класс результатов вообще не зависит от степени контроля, а математический аппарат этого приближения весьма удобен.

Два неизвестных параметра T_e и u , так же как и в теории горячих электронов в полупроводниках [90], определяются из условия разрешимости кинетического уравнения в приближении (12.3). Для нахождения T_e и u следует домножить уравнение (12.2) последовательно на $\hbar k$ и $\epsilon_{l,k}$ и просуммировать по всем l и k . В результате возникают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \epsilon \rangle - eE_{\parallel} \langle v \rangle &= \sum_{l,k} \epsilon_{l,k} \hat{S} f_{l,k}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle p \rangle - eE_{\parallel} &= \sum_{l,k} \hbar k \hat{S} f_{l,k}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

В дальнейшем будем полагать, что температура электронного газа стационарна, т.е. $\frac{\partial}{\partial t} \langle \epsilon \rangle = 0$. Это справедливо при достаточно низких частотах внешнего поля $\omega \ll \tilde{\nu}$, когда внешнее поле можно считать постоянным, и при достаточно высоких частотах $\omega \gg \tilde{\nu}$, когда температура электрона не успевает следить за изменением внешнего поля.

Считая анизотропию функции распределения слабой, из (12.4) можно получить уравнения для u и T_e :

$$\begin{aligned} eE_{\parallel} u &= (T_e - T) \tilde{\nu}, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{eE_{\parallel}}{m} - \nu u, \end{aligned} \quad (12.5)$$

где ν и $\tilde{\nu}$ определяются формулами [73], обобщающими определения ν (10.1) и $\tilde{\nu}$ (11.11), приведенные выше. При заданном значении T_e уравнение для u решается элементарно:

$$u = \frac{eE_{\parallel}}{m} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right). \quad (12.6)$$

Используя это соотношение, уравнение баланса энергии, определяющее эффективную температуру как функцию напряженности ведущего поля, можно записать следующим образом:

$$e^2 E_{\parallel}^2 = \frac{m(T_e - T) \tilde{\nu}(T_e) [\omega^2 + \nu^2(T_e)]}{\nu(T_e)}. \quad (12.7)$$

В стационарном случае, $\omega = 0$, величина E_{\parallel} в этой формуле совпадает с напряженностью ведущего поля, а для быстропеременного – она равна $E_{\parallel}^{(0)} / \sqrt{2}$, где $E_{\parallel}^{(0)}$ – амплитуда сигнала.

Как уже отмечалось выше, энергетическая частота столкновений ПЭ существенно зависит от конкретного вида закона дисперсии коротковолновых риплонов. В данном случае, как и в случае сильных прижимающих полей, мы будем рассматривать две возможные модели спектра коротковолновых риплонов: модель *A* – ротонный участок отсутствует, $\omega_q \sim q^{3/2}$; модель *B* – спектр риплонов имеет ротонный минимум с параметрами, указанными в (8.3).

Результаты числовых расчетов зависимости подвижности электронов μ от напряженности ведущего поля E_{\parallel} при $T = 0,6$ К, $E_1 = 10$ В · см⁻¹ и $\omega = 0$ представлены на рис. 3.7 (кривые A_1 , B_1) [73]. При наличии ротонного участка спектра поверхностных возбуждений (кривая B_1) неустойчивость токового состояния (т.е. точка с $d\mu/dE_{\parallel} \rightarrow \infty$) возникает в несколько больших ведущих полях, чем в случае A_1 , но зато проявляется значительно резче. С увеличением напряженности прижимающего поля критическое значение ведущего поля, при котором низкотемпературное токовое состояние становится неустойчивым ($E_{\parallel} = E_{k1}$), увеличивается, а при уменьшении температуры гелия – падает.

Таким образом, при увеличении амплитуды ведущего поля E_{\parallel} подвижность ПЭ монотонно возрастает, пока E_{\parallel} не достигнет критического значения E_{k1} . При $E_{\parallel} = E_{k1}$ подвижность и эффективная электронная температура испытывает скачок и при дальнейшем увеличении E_{\parallel} изменяется вдоль так называемой высокотемпературной ветви (на рис. 3.7 она не показана). Возможность появления устойчивой высокотемпературной ветви обусловлена тем, что при рассеянии на атомах гелиевого газа частота ν возрастает с увеличением T_e : $\nu \sim T_e^{1/2}$. В стационарном случае

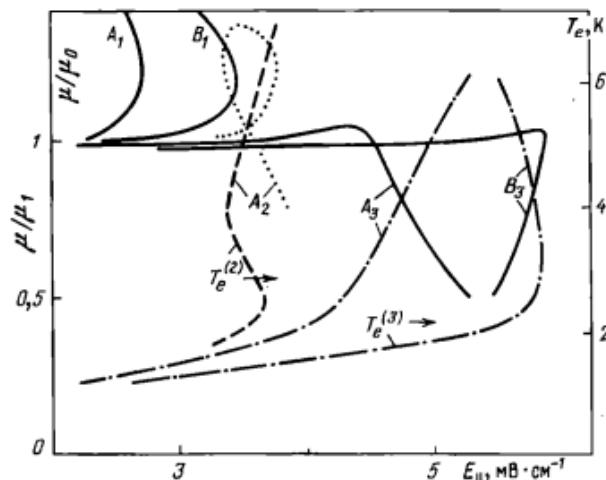


Рис. 3.7. Зависимость подвижности μ и электронной температуры T_e от напряженности ведущего поля E_{\parallel} при тех же предположениях относительно риппленного спектра, что и на рис. 3.6, но в пределе слабых прижимающих полей [73]:

A_1, B_1 – поле E_{\parallel} стационарно, $E_{\perp} = 10 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $T = 0.6 \text{ К}$, подвижность μ отнесена к μ_0 из (10.4);

A_2 – поле E_{\parallel} переменно, $E_{\perp} = 5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $T = 0.6 \text{ К}$.

$$\frac{\omega}{\nu_0} = 0.5, \quad \nu_0 = e m^{-1} \mu_0^{-1}, \quad \mu_1 = \frac{e}{m} \frac{\nu_0}{\omega^2 + \nu_0^2};$$

A_3, B_3 – поле E_{\parallel} переменно, $E_{\perp} = 5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, $T = 0.6 \text{ К}$, $\omega/\nu_0 = 0.7$.

В случаях A_2, A_3, B_3 подвижность μ отнесена к μ_1 ,

($\omega = 0$) высокотемпературная ветвь не рассчитывалась, так как при очень больших $T_e \sim 100 \text{ К}$ теряют силу использовавшиеся нами приближения для описания электрон-риппленного рассеяния. Неустойчивость токового состояния сопровождается гистерезисом на зависимостях $\mu(E_{\parallel})$ и $T_e(E_{\parallel})$, так как переход на низкотемпературную ветвь происходит при полях $E_{\parallel} = E_{k2}$ меньших, чем переход на высокотемпературные $E_{k1} > E_{k2}$.

В типичных экспериментах с ПЭ для получения информации о их подвижности используется быстропеременное внешнее электрическое поле $\omega \gg \tilde{\nu}$. В этом случае теоретические результаты сильно зависят от соотношения между частотой переменного поля ω и импульсной частотой электрон-риппленных столкновений $\nu_0 = e/(m\mu_0)$ (здесь μ_0 – подвижность электронов на основном поверхностном уровне, для определенности μ_0 дается формулой (10.4)). На рис. 3.7 приведены зависимости эффективной подвижности электронов μ в относительных единицах и их температуры T_e от амплитуды ведущего поля E_{\parallel} для $\omega/\nu_0 = 0.5$, при вычислении которых закон дисперсии коротковолновых риппленов полагается равным длинноволновой асимптотике (кривые A_2). Характерным отличием этих кривых от стационарного случая является то, что при наступлении неустойчивости подвижность изменяется скачком вниз (уменьшается). Это связано с тем, что для высокотемпературной ветви высоко-

частотная подвижность электронов очень мала:

$$\mu(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\nu(T_e)}{\omega^2 + \nu^2(T_e)} \approx \frac{e}{m} \frac{\nu(T_e)}{\omega^2}, \quad \omega \gg \nu(T_e). \quad (12.8)$$

С увеличением частоты переменного поля неустойчивость может исчезнуть. Например, при $\omega/\nu_0 = 0.7$, $T = 0.6 \text{ К}$ и $E_{\perp} = 5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ зависимость $\mu(E_{\parallel})$ для капиллярного спектра (кривая A_3) не имеет неустойчивого участка (см. рис. 3.7). При тех же условиях на кривой B_3 (рипплоны имеют ротонный минимум) такой участок присутствует.

Прежде чем сравнивать теоретические расчеты с экспериментальными данными, следует напомнить, что расчеты проводились в условиях, когда внешнее прижимающее поле E_{\perp} существенно превышало собственное поле электронного слоя $2\pi e n_s$. В то же время все имеющиеся к настоящему времени экспериментальные зависимости относятся к случаю, когда над поверхностью гелия внешнее поле полностью скомпенсировано полем электронов $E_{\perp} = 2\pi e n_s$. В последнем случае нелинейность должна проявляться в несколько меньших ведущих полях, так как "испарение" электронов при полной компенсации внешнего поля облегчается.

Впервые "испарение" электронов с поверхностных уровней под действием внешнего сигнала наблюдалось при изучении циклотронного резонанса [49]. При увеличении амплитуды сигнала вначале широкая резонансная кривая вдруг резко начинала сужаться (см. рис. 2.10). Независимость положения узкого пика циклотронного резонанса от наклона магнитного поля к поверхности гелия свидетельствовала о том, что электроны стали "трехмерными", т.е. перешли с поверхностных уровней в объем газовой фазы. "Испарение" ПЭ проявилось при $E_{\parallel} \approx 1 \text{ мВ} \cdot \text{см}^{-1}$, что неплохо согласуется с теоретическими оценками. Резкое уменьшение частоты столкновений ПЭ при увеличении амплитуды ведущего поля наблюдалось также в условиях фото- и плазмонного резонансов [40, 76]. В условиях $\omega \gg \tilde{\nu}$, $T = 0.6 \text{ К}$ и $E_{\perp} = 40 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ экспериментально измеренное значение критического значения ведущего поля равно $E_{\parallel}^k \approx 8 \text{ мВ} \cdot \text{см}^{-1}$ [76], а соответствующая теоретическая оценка $E_{\parallel}^k \approx 5.7 \div 7 \text{ мВ} \cdot \text{см}^{-1}$.

Непосредственные измерения зависимости эффективной подвижности ПЭ $\mu(\omega, E_{\parallel})$ в быстропеременном ведущем поле были выполнены в работе [91]. Тенденция к появлению неустойчивости токового состояния ПЭ с уменьшением температуры жидкого гелия хорошо видна из рис. 3.8. На нем изображена зависимость эффективной подвижности (в произвольных единицах) от амплитуды ведущего поля при различных температурах. Из-за того, что прижимающее поле E_{\perp} здесь в два раза больше, чем в теоретических расчетах (см. рис. 3.7), неустойчивость начинается при несколько меньших температурах: $T \lesssim 0.5 \text{ К}$. Хорошо видно, что экспериментальная кривая 2 (рис. 3.8, а) имеет структуру, близкую к рассчитанной теоретически. Резкое падение эффективной подвижности соответствует "испарению" электронов с основного поверхностного уровня, где $\omega < \nu$, в объем газовой фазы, где рассеяние электронов является слабым, $\omega \gg \nu$, а высокочастотная подвижность электронов (10.8) мала. С увеличением прижимающего поля E_{\perp} тенденция к неустойчивости уменьшается, что наглядно видно из экспериментального графика, приведенного на рис. 3.8, б,

а максимум кривой $\mu(E_{\parallel})$ сдвигается в область больших ведущих полей, что также соответствует теоретическим расчетам. Сравнение экспериментальных графиков с теоретическими оказывается не в пользу гипотезы [63] о наличии ротонного участка спектра у коротковолновых риплонов с $\Delta_r = 2$ К. В этом случае неустойчивость токового состояния электронного газа должна быть значительно резче, чем это наблюдается экспериментально. Вероятно, ротонный минимум у риплонов расположен при значительно больших энергиях, чем это предполагалось в [63].

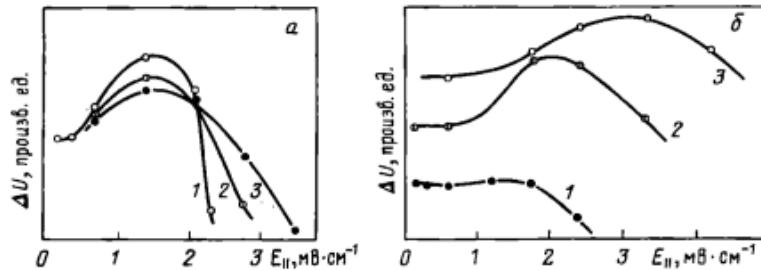


Рис. 3.8. Потери ВЧ-энергии в ячейке с поверхностными электронами в функции от E_{\parallel} . Потери $\Delta U \propto \tau(1 + \omega^2 \tau^2)^{-1}$ и при фиксированной частоте ω проходят через максимум как функция τ . В данном случае время τ является существенной функцией E_{\parallel} , пробегая значения от $\omega t < 1$, до $\omega t > 1$ [91].

а – Значение E_{\perp} фиксировано и равно $10 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. T – переменна и равна (в К): 0,51 (1); 0,54 (2); 0,60 (3). Внешняя частота $f = \omega/2\pi = 14,7 \text{ МГц}$.

б – Фиксированы значения $T = 0,49 \text{ К}$ и внешней частоты $f = 14,7 \text{ МГц}$. Поле E_{\perp} принимает три значения (в $\text{В} \cdot \text{см}^{-1}$): 30 (1); 40 (2); 50 (3)

12.2. Теория горячих электронов на поверхности жидкого гелия в стационарном случае ($\omega = 0$) была рассмотрена также в работах Сайто и Аоки [86–89]. К сожалению, эти работы содержат два существенных недостатка. Во-первых, при расчете энергетической частоты столкновений ПЭ не учитывались процессы излучения двух коротковолновых риплонов, вклад которых на два порядка превышает вклад однориплонных процессов. А во-вторых, при расчете импульсной частоты использовалась низкотемпературная асимптотика поляризационного рассеяния, которая в случае горячих электронов приводит к качественно неправильным результатам (подвижность электронов на основном поверхностном уровне сильно уменьшается с ростом T_e). Основной результат работы [87] приведен на рис. 3.9. Хорошо видно, что лишь в сильных прижимающих полях $E_{\perp} > 50 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ критическое поле E_{k1} достигает величины $\approx 1 \text{ мВ} \cdot \text{см}^{-1}$, и то благодаря завышенному значению импульсной частоты столкновений (при больших T_e). В этих условиях теория [85], учитывающая двухриплонные процессы рассеяния, дает примерно в пять раз большее значение E_{k1} . Из рис. 3.9 хорошо видно, что перед началом неустойчивости подвижность ПЭ заметно уменьшается с ростом ведущего поля. В экспериментах же наблюдается, скорее, другая картина (подвижность немного возрастает). Это есть следствие использования в [87] низкотемпературной асимптотики $v(e)$ в области значений T_e , где она неприменима.

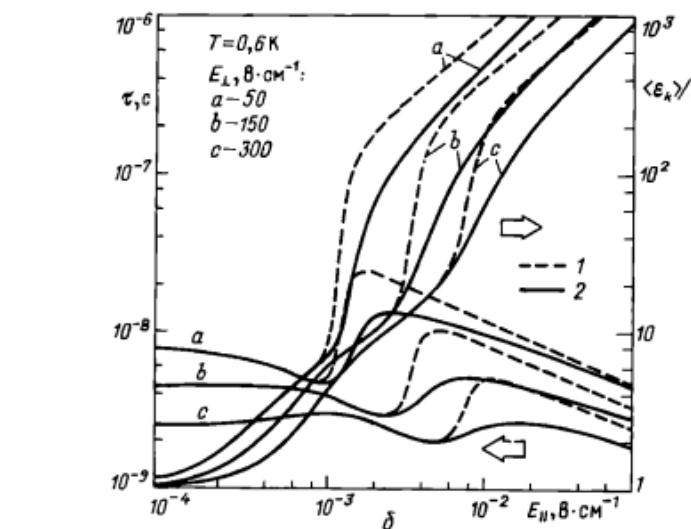
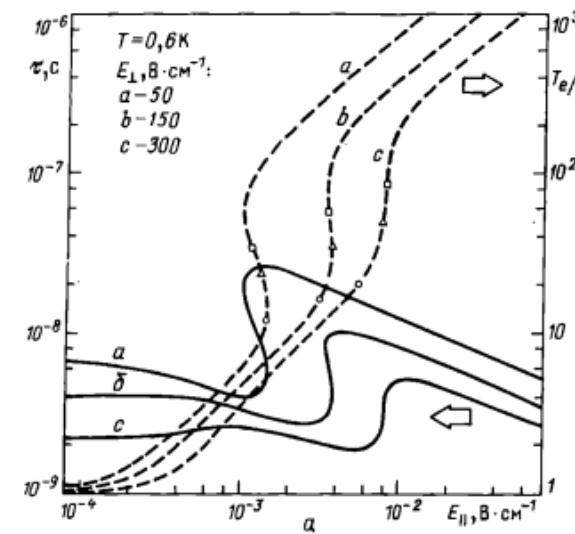


Рис. 3.9. а – Время столкновения и эффективная температура T_e в функции от ведущего электрического поля [87].

б – Та же задача, решенная без использования приближения эффективной температуры. На графиках представлены зависимости времени релаксации τ и средней энергии $\langle \epsilon_k \rangle$ электронного газа от E_{\parallel} . Варианты (1) и (2) различаются граничными условиями для $f_l(z)|_{z=0}$ [88].

Несмотря на отмеченные недостатки, работы [86–88] оказываются интересными с точки зрения сравнения приближений, используемых при описании нелинейных явлений в проводимости ПЭ.

Изложение аналитических деталей решения кинетического уравнения из [86] довольно затруднительно ввиду громоздкости вычислений. Конечные результаты этих, в основном численных, расчетов из [88] для импульсного времени релаксации τ и средней энергии электронов $\langle \epsilon_k \rangle / T$ в функции от температуры среды, напряженности прижимающего E_1 и ведущего электрических полей приведены на графиках рис. 3.9, б. Для сравнения полезно иметь в виду графики τ и T_e/T (рис. 3.9, а), полученные Сайто и Аоки [87] при тех же значениях внешних параметров и сохранившемся без изменений взаимодействии с газовыми атомами гелия и риплонами, в приближении эффективной температуры T_e .

Информация, представленная на рис. 3.9, позволяет наглядно увидеть, что T_e -приближение оказывается довольно хорошей аппроксимацией, исключая область резкой немонотонности. В области S-образного поведения τ и $\langle \epsilon \rangle$ величина τ , рассчитанная самосогласованным образом, остается однозначной функцией поля E_{\parallel} , в то время как в T_e -приближении эта зависимость неоднозначна. Такая разница имеет физический смысл и отвечает различным приближениям по плотности поверхностных электронов. Дело в том [88], что самосогласованное решение уравнения Больцмана в приближении Фоккера–Планка возможно лишь при наличии в системе электрон-риплонного и газового взаимодействий. Что касается кулоновского взаимодействия между электронами, то оно не может быть включено в схему фоккер-планковского приближения и поэтому должно считаться слабым. В то же время приближение эффективной температуры, предполагающее сильную "максвеллизацию" функции распределения,

работает лучше в условиях сильного кулоновского взаимодействия. Поэтому разница в поведении τ на участке сильной немонотонности может иметь реальный смысл и проявляться при варьировании n_s .

Здесь же следует упомянуть и работу [89] о поведении формы линии циклотронного резонанса в условиях эксперимента [41]. С учетом замечаний, сделанных выше, абсолютные значения параметров формы линии, представленной на рис. 3.10, неточны. Однако динамика разогрева электронной системы с ростом амплитуды ведущего поля и влияние этого разогрева на форму линии ЦР иллюстрируется достаточно хорошо.

§ 13. Эффективная масса поверхностных электронов в неравновесных условиях

Важную информацию об энергетической частоте столкновений дают исследования эффективной массы ПЭ m^* в неравновесных условиях. Довольно точные измерения m^* как функции мощности, поглощаемой ПЭ, были получены при изучении сдвига положения циклотронного резонанса [41]. Эти эксперименты показывают, что электрон-риплонное взаимодействие несколько уменьшает циклотронную массу электронов (примерно на 3–5%). С увеличением амплитуды сигнала наблюдается нелинейное изменение эффективной массы. При теоретическом описании этого эффекта мы будем следовать работе [92].

Свое рассмотрение мы ограничим классическим пределом $T_e > \hbar\omega_c$, так как нас в дальнейшем будет интересовать существенно неравновесная ситуация. В этом случае задача определения эффективной массой ПЭ сводится к нахождению закона дисперсии ПЭ, взаимодействующих с риплонами, $\epsilon(k)$. Действительно, циклотронная масса может быть представлена в виде

$$m^* = \partial S / \partial \epsilon, \quad \Delta m = m^* - m, \quad (13.1)$$

где $S(\epsilon)$ – площадь кривой в пространстве импульсов, определяемой уравнением $\epsilon(k) = \text{const} = \epsilon$. Расчет $\epsilon(k)$ ввиду слабости электрон-риплонного взаимодействия можно проводить по теории возмущений. Он оказывается весьма сложным, если необходимо учитывать электронные переходы на более высокие поверхностные уровни (такая ситуация реализуется в пределе слабых прижимающих полей). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением предела сильных прижимающих полей $E_1 > 100 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, поскольку в этом случае вплоть до больших T_e можно пренебречь возможностью ухода электрона с основного поверхностного уровня. Следует отметить также, что эксперименты [41] выполнены именно в этом пределе сильных прижимающих полей.

Во втором порядке теории возмущений по электрон-риплонному взаимодействию имеем

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{l, q} \frac{(2n_q + 1) | \langle l | V_q | 1 \rangle |^2}{q^2 + 2kq + 2m\Delta_{l1}/\hbar^2}, \quad (13.2)$$

здесь V_q – фурье-компоненты потенциала (12.9); $\Delta_{l1} = \Delta_l - \Delta_1$. Характерные значения волнового вектора q в сумме (13.2), дающие основной

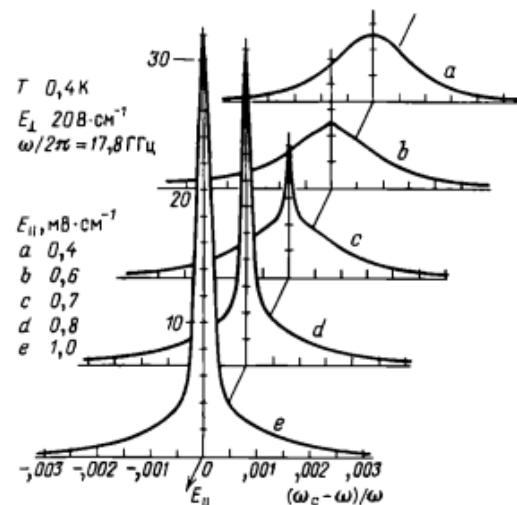


Рис. 3.10. Влияние разогрева электронного газа на форму линии ЦР. Расчет выполнен в работе Сайто, Аоки [89]. Соответствующие экспериментальные данные представлены на рис. 2.10

вклад в эффективную массу ПЭ, оказываются длинноволновыми ($q \sim 2k$, $\hbar\omega_q \ll T$). В этом случае можно воспользоваться приближением $n_q \approx \approx T/\hbar\omega_q$. При вычислении матричных элементов ($|V_q|$) волновые функции первых двух уровней ($l = 1, 2$) будут определяться вариационным методом, а для более высоких уровней ($l > 2$) мы будем использовать аппроксимацию функциями Эйри. Для $l = 1$ искомый матричный элемент совпадает с выражением (10.2), в котором параметр γ_s , определяющий затухание волновой функции ПЭ в глубь газовой фазы, согласно (5.10) зависит от напряженности прижимающего поля E_1 .

Вычисляя вклад в (13.2) слагаемых с $l > 1$, который становится существенным при больших ϵ , можно использовать высокотемпературную аппроксимацию поляризационного потенциала в операторе электрон-риплонного рассеяния ($\varphi(y) \approx 1/3y$) и разложить (13.2) в ряд по параметру ϵ/Δ_{11} (при $E_1 = 300 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ величина $\Delta_{21} = 13 \text{ К}$). Результаты числовых расчетов по формулам (13.1) и (13.2) представлены на рис. 3.11 [92]. Вычисления проводились для двух различных значений прижимающего поля E_1 : 300 и 1000 $\text{В} \cdot \text{см}^{-1}$ (соответствующие этим полям кривые помечены на рисунке цифрами 1 и 2). Штриховыми кривыми представлены результаты расчета, проведенного с учетом двухриплонных процессов рассеяния. При этом спектр коротковолновых риплонов полагается равным длинноволновой асимптотике. Из рис. 3.11 следует, что при малых мощностях P сдвиг массы ПЭ является отрицательным. При увеличении P сдвиг массы уменьшается по абсолютной величине и при некотором значении меняет знак. Характерной особенностью этих кривых является то, что они в большом интервале значений P практически не зависят от величины напряженности прижимающего поля E_1 . Это является очевидным следствием обсуждавшегося выше результата: $\tilde{\nu}(E_1) \approx \text{const}$.

Напомним, что приведенный расчет справедлив только в условиях $\hbar\omega_c \ll T_e$. В экспериментах [41] ситуация оказывается "полукvantовой": $\hbar\omega_c \sim T \sim 0,5 \text{ К}$. Экспериментальные данные [41], полученные в интервале полей $E_1 = 590 \div 1100 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, приведены на том же рисунке. На-

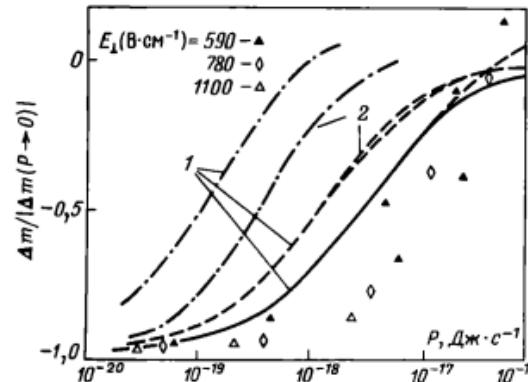


Рис. 3.11. Зависимость циклотронной массы поверхности электронов от степени разогрева электронной системы. Эксперимент Эдельмана [41], расчет [92]. Комментарий – в тексте

бллюдается качественное сходство между теоретическим расчетом и экспериментальными данными (рост Δm с увеличением P ; независимость результата от E_1 , переход Δm через нуль в области $P \approx (10^{-17} \div 10^{-16}) \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1}$).

В то же время имеется небольшое количественное различие, которое может быть обусловлено многими причинами: во-первых, квантовыми эффектами, во-вторых, отличием закона дисперсии ω_q в коротковолновой области от длинноволновой асимптотики и, в-третьих, недостаточно точным определением величины $f_1(0)$ ($\tilde{\nu} \sim f_1^4(0)$). С целью иллюстрации возможного влияния квантовых эффектов на результат [41] мы приведем результаты расчета, учитывающего нулевые колебания (заменим $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ на величину $\epsilon + \hbar\omega_c/2$). При этом мы будем исходить из того, что при малых $T_e < \hbar\omega_c$ для Δm должен возникать квантовый результат [93]. Результаты такого расчета представлены на рис. 3.11 сплошными кривыми. Видно, что они гораздо ближе к экспериментальным данным.

Для сравнения на рис. 3.11 штрихпунктирными линиями приведены результаты расчета величины сдвига массы ПЭ (с той же квантовой поправкой и для тех же прижимающих полей) в пренебрежении вкладом двухриплонных процессов излучения $\tilde{\nu}$ (в духе работ [86, 87]). Видно, что эти кривые лежат на полтора-два порядка левее (по мощности P) как экспериментальных данных, так и расчета, основанного на учете двухриплонных процессов рассеяния. Кроме того, наблюдается сильная зависимость этого результата (в тех же относительных единицах) от величины прижимающего поля E_1 , что также противоречит экспериментальным данным. Таким образом, результаты эксперимента [41] однозначно свидетельствуют в пользу теории, в которой энергетическая частота столкновений ПЭ определяется процессами спонтанного излучения пар коротковолновых риплонов.

§ 14. Кинетические явления при взаимодействии электронных пузырьков со свободной поверхностью жидкого гелия

Кинетические эффекты, обусловленные взаимодействием гелиевых ионов со свободной поверхностью жидкого гелия, не столь многочисленны, как в случае электрона. Тем не менее существует ряд примеров подобного рода, заслуживающих специального внимания.

14.1. Подвижность отрицательных ионов вблизи свободной поверхности. Используя сведения об объемной подвижности ионов, изложенные в гл. 1, можно получить некоторые интересные результаты и относительно подвижности ионов вблизи границы раздела [31].

Поднимем отрицательный ион на конечное расстояние z_0 от свободной поверхности жидкого гелия. Ожидаемое изменение подвижности при этом имеет следующее происхождение. На свободной поверхности гелия полное давление равно нулю. Это шунтирующее действие поверхности должно проявляться и в глубине жидкости на расстояниях порядка длины волны характерных тепловых фонаров. Таким образом, если поднять ион в слой глубиной порядка характерной длины фонаров и помнить, что торможение иона происходит в основном за счет резонансного рассея-

Рис. 3.12. Фоновая подвижность аниона вблизи свободной поверхности гелия (2) и контрольная фоновая подвижность в объеме жидкого гелия (1) [31]

ния фононов на собственных колебаниях пузырька^{*)}, то можно ожидать, что шунтирующее действие поверхности, уменьшающее амплитуду давления в фононных волнах, приведет к изменению величины подвижности отрицательных ионов по сравнению с объемом. А так как при низких температурах характерные длины фононов заметно превосходят размеры ионов, то влияние поверхности на подвижность ионов начинаетказываться на расстоянии, много большем размездов самих ионов.

Пусть падающий на свободную поверхность фонон имеет потенциал

$$\varphi_0 = \frac{P_0}{i\omega\rho} e^{i(\omega t - qr)}.$$

Тогда давление в данной точке жидкости на глубине z_0 от поверхности имеет вид

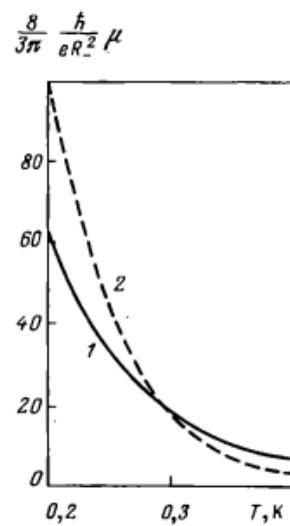
$$P(t) = P_0 2i \sin(qz_0 \cos\theta) e^{i\omega t}, \quad (14.1)$$

где θ – угол между нормалью к поверхности и направлением волнового вектора фонона q . Множитель $\sin(qz_0 \cos\theta)$ в определении P (14.1) содержит интересующий нас эффект уменьшения фононного давления на поверхности пузырька.

Опуская детали расчета подвижности пузырька, движущегося вдоль поверхности гелия на глубине z_0 , определяемой выражением (3.2), приведем конечные результаты для этой подвижности, полученные в работе [31] и изображенные на рис. 3.12. Кривая 1 на рис. 3.12 отвечает объемной подвижности аниона из [8]. Кривая 2 соответствует подвижности аниона, движущегося на глубине $z_0 = 10^{-6}$ см от поверхности гелия.

14.2. Туннелирование электронов из пузырьков в вакуум. Задача подробно исследована теоретически и экспериментально [18, 94, 99] и ставится следующим образом. Как отмечалось в гл. 2, гелиевые ионы, прижатые со стороны жидкой фазы к свободной поверхности гелия, локализуются вблизи этой поверхности на расстоянии z_0 (3.2), определяемом конкуренцией сил отталкивания поляризационного происхождения и поля E_1 . Типичное расстояние $z_0 \approx 10^{-6}$ см. Находясь на этом стационарном среднем расстоянии от поверхности гелия, гелиевые ионы, в част-

^{*)} Заметим, что, хотя сечение рассеяния σ уменьшается вблизи поверхности, оно все же остается резонансно большим. Поэтому возможные добавки к полному сечению рассеяния, связанные с наличием на свободной поверхности жидкого гелия поверхностных фононов, несущественны. Эти добавки не могут изменить резонансной части рассеяния, так как поверхностные колебания происходят в условиях $\operatorname{div} v = 0$, т.е. $P = \text{const}$.



ности заряженные пузырьки, могут за счет флукутационных колебаний около положения равновесия дополнительно сближаться со свободной поверхностью гелия. В подобных условиях появляется конечная вероятность туннелирования электронов из локализованного пузырькового состояния в одно из вакуумных состояний со сплошным спектром. Наблюдаемой величиной при этом является температурная зависимость электронного тока j_s через поверхность жидкого гелия. Квазиклассическая теория этого явления, предложенная Шоппи и Рейфилдом [98], содержит следующие конечные результаты. Если исходное число анионов вблизи поверхности гелия фиксировано и равно N_0 (способ приготовления такого состояния несуществен), то полный ток j_s через поверхность гелия описывается выражением

$$j_s = P_0 N_0 \exp(-P_0 t). \quad (14.2)$$

Здесь P_0 – усредненная вероятность прохождения электрона из пузырька радиуса R_- сквозь барьер – основная характеристика задачи, хорошо измеряемая экспериментально и допускающая сравнительно четкое теоретическое определение. В данной работе показано, что

$$P_0 = \int_0^\infty \Phi(z) n(z, T) dz / \int_0^\infty n(z, T) dz, \quad (14.3)$$

где

$$n(z, T) = \exp \left[-\frac{V(z)}{T} \right], \quad V(z) = \frac{\Lambda}{z} + eE_1 z,$$

λ определена (4.1). Комбинация $\Phi(z)n(z, T)$ (где $\Phi(z)$ – вероятность

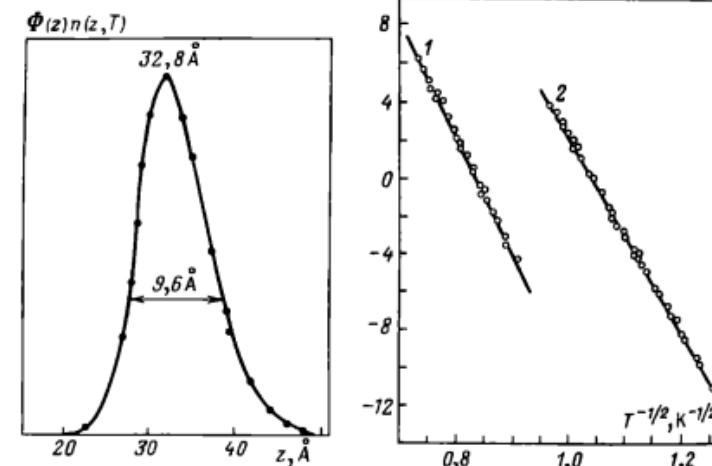


Рис. 3.13. Дивергенция туннельного тока $\Phi(z)n(z, T)$ в функции расстояния z от свободной границы жидкого гелия: $T = 1$ К, $R_- \approx 25$ Å [98]

Рис. 3.14. Зависимость $\ln(P_0/\gamma)$ от $T^{-1/2}$: 1 – ${}^4\text{He}$, $R_- = 24,8$ Å; 2 – ${}^3\text{He}$, $R_- = 30,1$ Å; точки – эксперимент [98]

туннелирования из пузырька, $n(z, T)$ – вероятность сближения пузырька со свободной границей), обладает острым максимумом, как это следует из рис. 3.13. Координатная зависимость $\Phi(z)n(zT)$ приведена на этом рисунке для параметров ${}^4\text{He}$, $T = 1$ К и одного из значений радиуса пузырька R_- , фигурирующего в расчете в качестве свободного параметра. Наличие в подынтегральном выражении для P_0 (14.3) перевальной точки позволяет найти значение P_0 с хорошей точностью.

Функциональная зависимость $\ln P_0/\gamma \approx T^{-1/2}$, следующая из определения (14.3) (где γ – подходящая обезразмеривающая константа), четко подтверждается экспериментом [98], см. рис. 3.14. Однако числовое значение радиуса R_- , полученное из сравнения теории с экспериментом ($R_- \approx 24,8$ Å для ${}^4\text{He}$ и $R_- \approx 30,1$ Å для ${}^3\text{He}$), значительно отличается от значения $R \approx 18$ Å для ${}^4\text{He}$, следующего из других независимых методов определения R_- (например, из экспериментов по определению эффективной массы пузырька, описанных в гл. 1).

В связи с указанным парадоксом в работе Коула и Клейна [99] предпринята попытка более последовательного расчета величины туннельного тока из электронных пузырьков. В частности, в этой работе были учтены с определенной степенью точности структура границ как электронного пузырька, так и плоской границы жидкость–пар, а также поляризационные добавки к энергии взаимодействия электрона с жидким гелием. Однако и в более строгом варианте теории расхождение между величиной R_- , следующей из обработки экспериментальных данных по туннелированию электронов из пузырьков [9], и из других независимых методов, устранить не удалось. Авторы [99] предполагают, что это расхождение может быть объяснено в теории, учитывающей деформацию пузырька в свободной поверхности гелия в процессе их сближения.

ГЛАВА 4

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Деформационные явления на заряженной поверхности гелия весьма разнообразны и существенны. Именно они определяют во многом специфику поведения двумерной электронной системы над гелием по сравнению с другими возможными двумерными заряженными системами (например, инверсионными слоями в полупроводниках). Существенно также, что основные деформационные эффекты хорошо наблюдаются.

Обсуждаемые задачи содержат, по крайней мере, три характерных масштаба, имеющих размерность длины. Речь идет о длине локализации l_ξ отдельного электрона в плоскости пар–жидкость, капиллярной длине k^{-1} и размерах L электронной подсистемы. На каждом из указанных масштабов имеются своеобразные явления, заслуживающие специального внимания. Данная глава содержит информацию об этих эффектах в порядке возрастания степени сложности их описания: одноэлектронные и многоэлектронные лунки на разных подложках, неустойчивость и реконструкция заряженной поверхности гелия и т.д. Следует сказать, что и следующая глава (гл. 5), посвященная описанию явления кулоновской кристаллизации в двумерной электронной системе на поверхности жидкого гелия, также содержит красивые деформационные эффекты, которые в настоящее время дают основную экспериментальную информацию о возникновении двумерной электронной решетки над гелием. Однако в целом деформационные эффекты в задаче о кулоновской кристаллизации носят сопутствующий характер, определяя лишь некую специфику в проявлении тех или иных фундаментальных свойств, характерных для двумерного электронного кристалла.

§ 15. Деформационная локализация отдельного электрона

15.1. Наиболее простым деформационным эффектом является локализация отдельного поверхностного электрона в плоскости пар–жидкость [100, 101]. Речь идет о своеобразном поляронном эффекте, в котором предполагаемая локализация электрона приводит к возникновению локального давления P_e на поверхность жидкого гелия. Действие этого давления вызывает локальную деформацию поверхности гелия $\xi(r)$ в окрестности локализованного электрона. В свою очередь наличие этой деформации приводит к появлению дополнительной энергии $eE_1\xi(r)$, удерживающей электрон в локализованном состоянии. Здесь E_1 – напряженность прижимающего электрического поля, r – двумерный радиус в плоскости пар–жидкость.

Для получения количественной информации о возможности деформационной локализации поверхностного электрона запишем полную избыточную энергию W , связанную с возникновением комплекса "электрон + + самосогласованная деформация гелия", (называемого в литературе поверхностным анионом или просто лункой [101]):

$$W = \int d^2r \left\{ \alpha \left[\sqrt{1 + (\nabla \xi)^2} - 1 + \frac{\kappa^2}{2} \xi^2 \right] + eE_\perp \varphi^2 \xi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \varphi)^2 \right\}, \quad (15.1)$$

$$\kappa^2 = \rho g / \alpha, \quad \int \varphi^2 d^2r = 1.$$

Здесь $\xi(r)$ – самосогласованная деформация поверхности гелия, ρ и α – плотность и коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение силы тяжести, κ – так называемая капиллярная постоянная жидкого гелия, $\varphi^2(r)$ – квадрат электронной волновой функции, описывающей его локализацию вдоль поверхности гелия.

Деформационная часть энергии записана в общем виде, справедливом для больших локальных значений $\nabla \xi$. Однако в широком интервале внешних параметров задачи выполняется неравенство

$$\nabla \xi \ll 1, \quad (15.2)$$

позволяющее привести выражение (15.1) для W к виду

$$W = \int d^2r \left\{ \frac{\alpha}{2} [(\nabla \xi)^2 + \kappa^2 \xi^2] + eE_\perp \varphi^2 \xi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \varphi)^2 \right\}. \quad (15.3)$$

Слагаемое $(\nabla \xi)^2 + \kappa^2 \xi^2$ в (15.3) учитывает деформационный вклад в энергию W , последнее слагаемое определяет вклад нулевых колебаний электрона в самосогласованной яме $eE_\perp \xi$, и, наконец, член $eE_\perp \varphi^2$ характеризует взаимодействие между деформационной и электронной частями задачи. Это единственное слагаемое, понижающее полную энергию W .

Имея в виду вариационное определение параметров электронной лунки, положим

$$\varphi^2(r) = \frac{1}{\pi l_\xi^2} \exp \left(-\frac{r^2}{l_\xi^2} \right), \quad (15.4)$$

где l_ξ – пока неопределенный параметр. Решая далее уравнение механического равновесия, следующее из (15.3),

$$\nabla^2 \xi - \kappa^2 \xi = eE_\perp \alpha^{-1} \varphi^2(r).$$

и используя явный вид $\varphi^2(r)$, можно привести выражение для W к следующей форме:

$$W = \frac{e^2 E_\perp^2}{8\pi\alpha} \exp \left(-\frac{\kappa^2 l_\xi^2}{2} \right) E_i \left(-\frac{\kappa^2 l_\xi^2}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2ml_\xi^2}. \quad (15.5)$$

Здесь $E_i(x)$ – интегральная показательная функция. Определяя теперь величину l_ξ из уравнения $\partial W / \partial l_\xi = 0$, находим в итоге (предполагает-

ся, что $k l_\xi \ll 1$) [101]:

$$l_\xi^2 = \frac{4\pi\alpha\hbar^2}{me^2 E_\perp^2}, \quad \xi(r) \approx \begin{cases} -\frac{eE_\perp}{2\pi\alpha} \ln \frac{1}{k l_\xi}, & r \rightarrow 0, \\ -\frac{eE_\perp}{2\pi\alpha} K_0(kr), & kr > 1. \end{cases} \quad (15.6)$$

$K_0(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента. Выражение (15.5) для W при этом упрощается:

$$W = -\frac{e^2 E_\perp^2}{4\pi\alpha} \left(\ln \frac{2^{1/2} \gamma_0^{-1/2}}{k l_\xi} - \frac{1}{2} \right), \quad \gamma_0 \approx 1.87. \quad (15.7)$$

Очевидно, что величина W (15.7) отрицательна, если $k l_\xi \ll 1$, что и предполагалось при выводе соотношений (15.6). Таким образом, в области низких температур, там, где $|W| \gg T$, образование лунки энергетически выгодно, если $k l_\xi \ll 1$. В развернутом виде неравенство $|W| \gg T$ накладывает определенные требования снизу на минимальную напряженность прижимающего поля:

$$E_\perp \gg E_\perp^{\min}, \quad \text{для } T \lesssim 0.1 \text{ К} \quad E_\perp^{\min} \gtrsim 1000 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}. \quad (15.8)$$

Еще одно ограничение (15.2), использованное выше, согласно (15.6) сводится к неравенству

$$\frac{m(eE_\perp)^4}{4\pi^3 \alpha^3 \hbar^2} < 1, \quad (15.9)$$

ограничивающему область применимости линеаризованной теории электронной лунки со стороны больших прижимающих полей. Практически неравенство (15.9) начинает нарушаться лишь в области $E_\perp > 10^5 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$.

Объем лунки, определяемый соотношением

$$v_\xi = 2\pi \int_0^\infty \xi(r) r dr = \frac{eE_\perp}{\alpha k^2}, \quad (15.10)$$

достигает огромной величины (по сравнению с объемом аниона в глубине жидкости $v_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ см}^3$). Так, при $E_\perp \approx 3000 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ имеем $v_\xi \approx 10^{-10} \text{ см}^3$ и $v_\xi/v_0 \approx 10^9 \div 10^{10}$. Интересно также сопоставить между собой присоединенные массы этих образований. Конкретное сравнение масс будет сделано ниже, после вычисления поля скоростей, возникающих вокруг движущегося вдоль границы жидкость–пар поверхностного аниона. Здесь же мы только укажем, что оно не сводится к отношению объемов.

15.2. Следует отметить, что поверхностные анионы появляются автоматически при наличии сильного магнитного поля H , нормального к поверхности гелия. В предельном случае, когда магнитная длина l_H (6.1) много меньше длины l_ξ (15.6), волновая функция основного состояния поверхностного электрона известна точно. Она совпадает с $\varphi(r)$ из (6.1) с равной нулю проекцией момента на ось z . В этом пределе энер-

гия связи лунки

$$W \approx -\frac{e^2 E_\perp^2}{4\pi\alpha} \ln \left(\frac{1,1}{kl_H} \right) \quad (15.11)$$

отрицательна и снимает вырождение по положительным значениям проекции момента на направление магнитного поля.

В случае промежуточных значений H_\perp , когда соотношение между l_H и l_ξ произвольно, для оценки радиуса локализации электрона в деформационной лунке можно пользоваться следующей вариационной формулой:

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{2l_\xi^2} + \left(\frac{1}{4l_\xi^4} + \frac{1}{l_H^4} \right)^{1/2}. \quad (15.12)$$

Здесь l_H из (6.1), l_ξ из (15.6). Локализация поверхностных электронов магнитным полем H при наличии поля E_\perp сопровождается деформацией поверхности, по-прежнему определяемой формулами (15.6), в которых l_ξ следует заменить на l из (15.12).

Задача о локализации электрона в магнитном поле заслуживает специального обсуждения по двум причинам. Во-первых, наличие статической самосогласованной деформации поверхности гелия под локализованным электроном приводит к интересному наблюдаемому эффекту – сдвигу циклотронной частоты. Во-вторых, в предельном случае достаточно сильного магнитного поля, когда $l_H \ll l_\xi$, задача о магнитном поверхностном анионе допускает последовательное решение без использования вариационного метода или гармонического приближения.

Рассмотрим вначале классический вариант решения задачи о ЦР в гармоническом приближении, дающем для ожидаемого сдвига циклотронной частоты деформационного происхождения оценку сверху. В этом приближении дополнительная потенциальная энергия электрона $V(r) = eE_\perp \xi(r)$ представляется в виде

$$V \approx eE_\perp \xi(0) + \frac{1}{2} eE_\perp \xi_0'' r^2, \quad \xi_0'' = eE_\perp / (2\pi\alpha l^2), \quad (15.13)$$

где $\xi(r)$ определена (15.6), l – (15.12). В результате задача о движении электрона в деформационном потенциале при наличии магнитного поля сводится к осцилляторной задаче в магнитном поле [93, 102]. Резонансная частота электрона сдвинута относительно циклотронной частоты ω_c в область более высоких частот на величину

$$\delta\omega_c = \omega_\xi^2/\omega_c, \quad \omega_\xi^2 = e^2 E_\perp^2 / (2\pi\alpha m l^2), \quad \omega_\xi \ll \omega_c, \quad (15.14)$$

или с учетом $l^2 \approx l_H^2 = 2\hbar/eH$ имеем окончательно

$$\delta\omega_c = e^2 E_\perp^2 / (4\pi\alpha\hbar). \quad (15.15)$$

В указанном предельном случае $l_H \ll l_\xi$ появляется возможность решения задачи о сдвиге $\delta\omega_c$ без использования гармонического приближения (Ченг, Платцман [103]). Речь идет о теории возмущений, нулевым приближением которой является совокупность состояний электрона в магнитном поле над плоской поверхностью гелия (1.25), а возмущающей энергией – выражение $eE_\perp \xi(r)$, где $\xi(r)$ – точное значение самосогласованной деформации свободной поверхности гелия под локализованным

электроном, имеющим магнитную длину локализации. Соответствующие матричные элементы, определяющие сдвиг δE_0 основного и первого δE_1 возбужденного уровней, можно вычислить до конца [103, 93]. В результате для сдвига циклотронной частоты статического происхождения $\hbar\delta\omega_c = \delta E_1 - \delta F_0$ получаем выражение

$$\delta\omega_c = e^2 E_\perp^2 / (8\pi\alpha\hbar). \quad (15.16)$$

Результат (15.16) для $\delta\omega_c$ имеет структуру, аналогичную (15.15), но числовой коэффициент – вдвое меньше.

Сдвиг $\delta\omega_c$ ЦР, ожидаемого, согласно (15.16), масштаба наблюдается экспериментально (Эдельман [41], подробнее см. ниже).

Следует отметить, что вопрос о сдвиге $\delta\omega_c$ ЦР уже обсуждался выше, в § 13 (гл. 3). Речь шла о перенормировке циклотронной массы электрона динамического происхождения. В отличие от эффектов, описанных в § 13, сдвиг $\delta\omega_c$ (15.16) можно назвать статическим, обусловленным возникновением стационарной локальной деформации поверхности гелия в окрестности замагниченного электрона. Естественно попытаться развить формализм, позволяющий единообразно учитывать различные "каналы" влияния электрон-риплонного взаимодействия на форму линии ЦР. Усилия такого рода были предприняты рядом авторов [104–108] с привлечением методов квантовой теории многих тел.

В серии работ Сайто [104–106] с использованием известного формализма Фейнмана интегрирования по траекториям подробно изучена задача о циклотронном резонансе для одного электрона, взаимодействующего с тепловыми колебаниями поверхности жидкого гелия. Конечные результаты для актуального предела

$$\tilde{\Gamma} = W_0/T \ll 1, \quad W_0 = e^2 E_\perp^2 / (4\pi\alpha) \quad (15.17)$$

(комбинация W_0 возникает в задаче о лунке, см. определение W (15.7)) сдвиг частоты $\delta\omega_c$ и ширина линии ЦР $\Delta\omega_c$ выглядят следующим образом:

$$\delta\omega_c = W_0 \left(1 + \frac{2T}{\hbar\omega_c} \right) / 2, \quad (15.18)$$

$$\Delta\omega_c = \pi(2W_0 T)^{1/2} / (4\hbar). \quad (15.19)$$

Комментируя результаты (15.18)–(15.19), можно сказать, что статическая часть сдвига циклотронной массы, следующая из более общего формализма [104–106], совпадает с соответствующим сдвигом из (15.16). Сравнение теории [104–106] с экспериментальными данными [41] представлено на рис. 4.1. Следует отметить, что эксперимент ставился в условиях $E_\perp = 2\pi n_s$. В связи с этим применимость однозелектронных результатов ограничена требованием $e^2 n_s^{1/2} / T \ll 1$, так что реально однозелектронная теория может претендовать на описание экспериментальных данных в области $E_\perp \ll 0,5 \text{ кВ} \cdot \text{см}^{-1}$, где и наблюдается по отношению к величине сдвига линии ЦР хорошее соответствие между теорией и экспериментом (независимость сдвига от температуры и напряженности магнитного поля, правильное поведение сдвига в функции от E_\perp).

Работы Дыкмана [107–108], касающиеся этой же проблемы и полученные с помощью метода моментов, содержат ряд утверждений, качественно

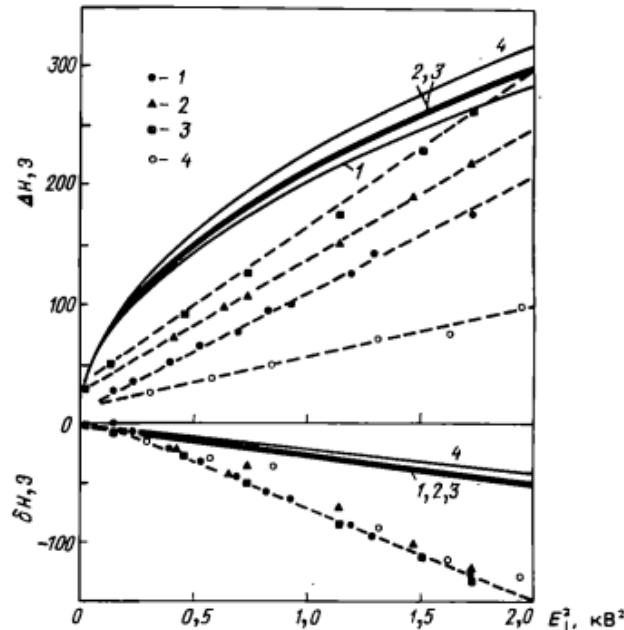


Рис. 4.1. Рассчитанные значения (слошные линии) сдвига линии ЦР (в нижней части) и ширины линии ЦР (в верхней части), выполненные Сайто [105] для экспериментальных условий [41] (точки и штриховые линии): 18,5 ГГц, 0,4 К (1); 18,5 ГГц, 0,62 К (2); 18,5 ГГц, 0,74 К (3); 37,7 ГГц, 0,4 К (4)

не совпадающих с определениями из [104–106]. Так, характерная константа связи в данной задаче имеет структуру

$$\Gamma^* = \frac{W_0}{\hbar\omega(q_H)}, \quad \omega^2(q_H) = \frac{\alpha}{\rho} l_H^{-3}, \quad (15.20)$$

отличную от (15.17). Одним из следствий такого переопределения константы связи является вывод о том, что набор параметров, отвечающих экспериментам Эдельмана, относится к пределу сильной связи, $\Gamma^* \gg 1$. Однако конечные результаты [107–108]

$$\delta\omega_c = W_0(1 + T/\hbar\omega_c), \quad (15.21)$$

$$\Delta\omega_c = (W_0 T)^{1/2}/\hbar \quad (15.22)$$

имеют структуру, аналогичную (15.18)–(15.19).

15.3. Своеобразно возникновение однозарядных лунок на поверхности тонкой гелиевой пленки (Монарха [109]). В этом случае, формально напоминающему задачу о локализации электрона над жидким полупространством, необходимо ввести два новых понятия: а) величину эффективной силы F , прижимающей электрон к поверхности пленки, б) эффективное значение капиллярной постоянной, учитывающей наличие ван-дер-ваальсовых сил.

Дополнительная сила, прижимающая электрон к поверхности гелиевой пленки, возникает за счет поляризационного взаимодействия электрона с веществом подложки (это определение F дублирует для удобства определение F из (7.1)):

$$F = \Lambda_1/d^2, \quad \Lambda_1 = e^2 \epsilon (\epsilon_d - \epsilon)/[(1 + \epsilon)^2 (\epsilon_d + \epsilon)], \quad (15.23)$$

здесь d – толщина пленки под электронами, ϵ_d – диэлектрическая проницаемость подложки.

Эффективная капиллярная постоянная пленки имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\rho}{\alpha} (g + \tilde{g}), \quad \tilde{g} = \frac{\partial G}{\partial d}, \\ G &= -\frac{G_0}{d^3} \left(1 + \frac{d}{\tilde{d}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (15.24)$$

где G_0 и \tilde{d} – константы, характеризующие вещество подложки. Так, например, для подложки из фторида кальция [110, 111]

$$\tilde{d} \approx 165 \text{ \AA}, \quad G_0 = 2,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1}. \quad (15.25)$$

В области $d \ll \tilde{d}$ величина $\tilde{g} \gg g$ и капиллярная постоянная имеет, в основном, ван-дер-ваальсовское происхождение.

Таким образом, переход к случаю пленки в приведенных выше определениях сводится к заменам

$$eE_1 \rightarrow eE_1 + F = F^*, \quad \kappa \rightarrow \tilde{\kappa}. \quad (15.26)$$

В области $d < \tilde{d}$ величина $G \propto d^{-3}$. В результате параметр $\tilde{\kappa}l_\xi$ практически не зависит от d . Оценки показывают, что даже для металлической подложки $\tilde{\kappa}l_\xi \approx 0,16$, т.е. условие $\tilde{\kappa}l_\xi < 1$ выполняется, хотя и не с таким запасом, как в случае электрона над жидким полупространством.

Оценка энергии связи и максимального прогиба поверхности в области толщин пленки $d \approx 10^{-6}$ см выглядит так [109]:

$$W \approx -5,3 \text{ K} \cdot \left(\ln \frac{1,1}{\tilde{\kappa}l_\xi} - \frac{1}{2} \right) \approx -8 \text{ K}, \quad \xi_0 \approx -6 \text{ \AA}. \quad (15.27)$$

Величина $|W|$ сильно зависит от толщины пленки: $|W| \propto d^{-4}$.

При толщинах пленки $d < 10^{-6}$ см прогиб поверхности гелия может сравняться по порядку величины с толщиной гелиевой пленки. В этом случае изложенная теория нуждается в уточнении. Простейшая возможность описать этот эффект самосогласованно заключается в замене [58]

$$F \rightarrow \tilde{F} = \Lambda_1/(d + \xi_0)^2,$$

где d – толщина пленки вдали от локализованного электрона, ξ_0 – деформация пленки в центре лунки. Используя эту замену и решая механическую часть задачи о равновесной форме лунки, мы приходим к следующему

му соотношению, обобщающему выражение для ξ_0 (15.6) на случай тонкой пленки:

$$\frac{\xi_0}{d} = -\frac{\Lambda_1}{2\pi\alpha d^3(1+\xi_0/d)^2} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}, \quad (15.28)$$

где l_ξ определена (15.6) с заменой $eE_1 \rightarrow F$ из (15.23). Полагая

$$\xi_0/d = -x,$$

можно записать соотношение (15.28) в виде уравнения относительно x :

$$x(1-x)^2 = \tilde{\Lambda}, \quad (15.28a)$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda_1}{2\pi\alpha d^3} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}.$$

Уравнение (15.28a) имеет вещественное решение в области $x < 1$ лишь при условии, что параметр $\tilde{\Lambda} \leq 4/27$. Максимальное значение x_{\max} , отвечающее равенству $\tilde{\Lambda} = 4/27$, есть $x_{\max} = 1/3$. Другими словами, значение деформации толщины пленки в центре лунки всегда относительно мала, $\xi_0/d \leq 1/3$.

Условие $\tilde{\Lambda} \leq 4/27$ в развернутом виде является ограничением на толщину пленки снизу:

$$d^3 \geq d_{\min}^3, \quad (15.29)$$

$$d_{\min}^3 = \frac{27}{8\pi} \frac{\Lambda_1}{\alpha} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}.$$

Для типичных значений $\epsilon_d \approx 10$ и $\tilde{\kappa} l_\xi \sim 0.16$, $d_{\min} \approx 5 \cdot 10^{-7}$ см.

15.4. Предположим, что поверхностный анион движется с малой постоянной скоростью V_0 вдоль подложки под действием поля $E_{||}$. Локальная деформация поверхности гелия под электроном, которую мы будем считать успевающей адиабатически подстраиваться к перемещающемуся электрону, должна индуцировать определенное поле гидродинамических скоростей. Возмущение жидкости можно описывать в гидродинамических терминах, так как характерный масштаб возмущения l_ξ предполагается большим по сравнению со средней длиной пробега l_r , тепловых возбуждений в жидком гелии: $l_\xi \gg l_r$.

Задачу о нахождении поля скоростей удобно решать в системе координат r, θ, z , движущейся вместе с центром аниона (жидкой фазе соответствует $z \geq 0$). В этой системе координат деформация поверхности $\xi(r)$ цилиндрически-симметрична и неподвижна, а жидкость движется со скоростью V_0 на бесконечности. Полная скорость

$$V = V_0 + v(r)$$

($v(r)$ — поле скоростей, индуцированное поверхностным анионом), очевидно, должна удовлетворять граничному условию

$$V_n = 0,$$

n — нормаль к деформированной поверхности. Учитывая явный вид направляющих косинусов: $n_r = \partial \xi / \partial r \equiv \xi'(r)$, $n_z = -1$, $n_\theta = 0$, это условие можно переписать так:

$$v_z|_{z=0} = V_0 \cos \theta \cdot \xi'(r). \quad (15.30)$$

Здесь угол θ отсчитывается от направления электрического поля $E_{||}$, функция ξ определяется (15.6).

Приступая к вычислению поля v , рассмотрим сначала предел больших чисел Рейнольдса, когда в уравнениях движения можно пренебречь вязкими слагаемыми. При этом скорость находится из уравнений

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v = \nabla \chi, \quad \Delta \chi = 0, \quad (15.31)$$

$$x|_{r,z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} = V_0 \xi'(r) \cos \theta.$$

Присоединенная масса поверхностного аниона [101]

$$M = -\frac{\rho}{V_0^2} \int \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} d^2 r =$$

$$= \frac{\pi \rho}{\alpha^2} \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^2 d\omega = \frac{\rho e^2 E_{||}^2}{16 \kappa \alpha^2}, \quad (15.32)$$

$$G(\omega) = \frac{eE_{||}}{2\pi(\omega^2 + \kappa^2)} \exp\left(-\frac{\omega^2 l_\xi^2}{8}\right). \quad (15.33)$$

Из (15.33) и (15.10) видно, что в поверхностном случае прямая связь между объемом аниона и его присоединенной массой отсутствует (в отличие от объемного аниона, где присоединенная масса M_\pm пропорциональна объему аниона).

15.5. Следующей важной динамической характеристикой поверхностного аниона является его подвижность вдоль поверхности. В случае нормальной жидкости для определения подвижности, или, что то же самое, величины средней скорости V_0 под действием поля $E_{||}$ удобно воспользоваться уравнением баланса энергии [9, с. 79]

$$-eE_{||} V_0 = \dot{W} = \eta \int \frac{\partial v^2}{\partial n} d^2 r, \quad (15.34)$$

η — коэффициент первой вязкости. Конкретное выражение для скорости энергетических потерь \dot{W} , использованное в (15.34), имеет место, когда $v = \nabla \chi$ и $\Delta \chi = 0$ (см., например, [9]). На основании (15.34) и (15.31) для подвижности μ имеем следующее выражение [101]:

$$\mu = \alpha^2 e [4\pi\eta \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^4 d\omega]^{-1}. \quad (15.35)$$

Для $G(\omega)$ из (15.33) имеем

$$\mu = \frac{\pi^{1/2} \alpha^2 l_\xi}{\eta e E_{||}^2} = \frac{2\pi\hbar\alpha^{5/2}}{\eta m^{1/2} e^2 E_{||}^3}. \quad (15.36)$$

му соотношению, обобщающему выражение для ξ_0 (15.6) на случай тонкой пленки:

$$\frac{\xi_0}{d} = -\frac{\Lambda_1}{2\pi\alpha d^3(1+\xi_0/d)^2} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}, \quad (15.28)$$

где l_ξ определена (15.6) с заменой $eE_1 \rightarrow F$ из (15.23). Полагая

$$\xi_0/d = -x,$$

можно записать соотношение (15.28) в виде уравнения относительно x :

$$x(1-x)^2 = \tilde{\Lambda}, \quad (15.28a)$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda_1}{2\pi\alpha d^3} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}.$$

Уравнение (15.28a) имеет вещественное решение в области $x < 1$ лишь при условии, что параметр $\tilde{\Lambda} \leq 4/27$. Максимальное значение x_{\max} , отвечающее равенству $\tilde{\Lambda} = 4/27$, есть $x_{\max} = 1/3$. Другими словами, значение деформации толщины пленки в центре лунки всегда относительно мала, $\xi_0/d \leq 1/3$.

Условие $\tilde{\Lambda} \leq 4/27$ в развернутом виде является ограничением на толщину пленки снизу:

$$d^3 \geq d_{\min}^3, \quad (15.29)$$

$$d_{\min}^3 = \frac{27}{8\pi} \frac{\Lambda_1}{\alpha} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi}.$$

Для типичных значений $\epsilon_d \approx 10$ и $\tilde{\kappa} l_\xi \sim 0.16$, $d_{\min} \approx 5 \cdot 10^{-7}$ см.

15.4. Предположим, что поверхностный анион движется с малой постоянной скоростью V_0 вдоль подложки под действием поля $E_{||}$. Локальная деформация поверхности гелия под электроном, которую мы будем считать успевающей адиабатически подстраиваться к перемещающемуся электрону, должна индуцировать определенное поле гидродинамических скоростей. Возмущение жидкости можно описывать в гидродинамических терминах, так как характерный масштаб возмущения l_ξ предполагается большим по сравнению со средней длиной пробега l_r , тепловых возбуждений в жидком гелии: $l_\xi \gg l_r$.

Задачу о нахождении поля скоростей удобно решать в системе координат r, θ, z , движущейся вместе с центром аниона (жидкой фазе соответствует $z \geq 0$). В этой системе координат деформация поверхности $\xi(r)$ цилиндрически-симметрична и неподвижна, а жидкость движется со скоростью V_0 на бесконечности. Полная скорость

$$V = V_0 + v(r)$$

($v(r)$ — поле скоростей, индуцированное поверхностным анионом), очевидно, должна удовлетворять граничному условию

$$V_n = 0,$$

n — нормаль к деформированной поверхности. Учитывая явный вид направляющих косинусов: $n_r = \partial \xi / \partial r \equiv \xi'(r)$, $n_z = -1$, $n_\theta = 0$, это условие можно переписать так:

$$v_z|_{z=0} = V_0 \cos \theta \cdot \xi'(r). \quad (15.30)$$

Здесь угол θ отсчитывается от направления электрического поля $E_{||}$, функция ξ определяется (15.6).

Приступая к вычислению поля v , рассмотрим сначала предел больших чисел Рейнольдса, когда в уравнениях движения можно пренебречь вязкими слагаемыми. При этом скорость находится из уравнений

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v = \nabla \chi, \quad \Delta \chi = 0, \quad (15.31)$$

$$\chi|_{r,z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} = V_0 \xi'(r) \cos \theta.$$

Присоединенная масса поверхностного аниона [101]

$$M = -\frac{\rho}{V_0^2} \int \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} d^2 r =$$

$$= \frac{\pi \rho}{\alpha^2} \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^2 d\omega = \frac{\rho e^2 E_{||}^2}{16 \kappa \alpha^2}, \quad (15.32)$$

$$G(\omega) = \frac{eE_{||}}{2\pi(\omega^2 + \kappa^2)} \exp\left(-\frac{\omega^2 l_\xi^2}{8}\right). \quad (15.33)$$

Из (15.33) и (15.10) видно, что в поверхностном случае прямая связь между объемом аниона и его присоединенной массой отсутствует (в отличие от объемного аниона, где присоединенная масса M_\pm пропорциональна объему аниона).

15.5. Следующей важной динамической характеристикой поверхностного аниона является его подвижность вдоль поверхности. В случае нормальной жидкости для определения подвижности, или, что то же самое, величины средней скорости V_0 под действием поля $E_{||}$ удобно воспользоваться уравнением баланса энергии [9, с. 79]

$$-eE_{||} V_0 = \dot{W} = \eta \int \frac{\partial v^2}{\partial n} d^2 r, \quad (15.34)$$

η — коэффициент первой вязкости. Конкретное выражение для скорости энергетических потерь \dot{W} , использованное в (15.34), имеет место, когда $v = \nabla \chi$ и $\Delta \chi = 0$ (см., например, [9]). На основании (15.34) и (15.31) для подвижности μ имеем следующее выражение [101]:

$$\mu = \alpha^2 e [4\pi\eta \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^4 d\omega]^{-1}. \quad (15.35)$$

Для $G(\omega)$ из (15.33) имеем

$$\mu = \frac{\pi^{1/2} \alpha^2 l_\xi}{\eta e E_{||}^2} = \frac{2\pi\hbar\alpha^{5/2}}{\eta m^{1/2} e^2 E_{||}^3}. \quad (15.36)$$

В пределе малых чисел Рейнольдса конечное выражение для μ отличается от (15.36) лишь числовым множителем 2.

В сверхтекучей жидкости согласно [112] движение поверхности инициирует не только объемные гидродинамические потоки, аналогичные (15.32), но и определенное поле поверхностных потоков нормальной компоненты гелия. Дополнительная диссипация энергии в этих полях могла бы при низких температурах существенно изменить характер подвижности поверхностных анионов. Однако конкретное рассмотрение системы уравнений [112] в условиях, когда причиной возникновения потоков служит движение поверхностного аниона со скоростью V_0 , показывает, что диссипативные потоки на поверхности гелия возникают лишь во втором порядке по V_0 , т.е. в линейной теории подвижности ими можно пренебречь.

Приведенные расчеты динамических характеристик лунки под массивным гелием могут быть обобщены на случай движения лунки вдоль поверхности тонкой пленки (см. [109], Монарха). Опуская детали соответствующих расчетов, имеем

$$M \approx \frac{\rho(F^*)^2}{8\pi\alpha^2\tilde{\kappa}^2d}, \quad \kappa d < 1, \quad (15.37)$$

$$\mu = \frac{4\pi\alpha^2e(\kappa d)^2d}{3\eta(F^*)^2}, \quad (\tilde{\kappa}d)^2 < \frac{l_\xi}{d}, \quad (15.38)$$

F^* – из (15.26)

15.6. В последнее время задача о характеристиках поверхностного аниона получила дальнейшее развитие. Речь идет о работах Ипполито и др. [113] и Джексон и Платцмана [114–115], в которых вопрос об энергии связи и эффективной массе поверхностных анионов исследовался в рамках фейнмановского метода функционального интегрирования по траекториям (Фейнман [116]). В этом методе электрон-рипллонное взаимодействие, приводящее к локализации электрона и возникновению поверхностного аниона, заменяется на эффективное запаздывающее взаимодействие электрона с самим собой. Кроме того, сложный функциональный интеграл для энергии заменяется подходящим квадратичным, после чего полярная задача решается до конца. Приближение Фейнмана хорошо зарекомендовало себя при исследовании полярного эффекта в ионных кристаллах. По этой причине весьма интересны конечные результаты, полученные с его помощью в задаче о поверхностном анионе.

Результаты расчетов Ипполито и др. [113] для энергии связи W поверхностного аниона над массивным гелием как функции прижимающего поля E_1 приведены на рис. 4.2. Для сравнения здесь же показано поведение W , следующее из расчетов Шикина и Монархи [101] (см. определение W из (15.7)), а также соответствующие расчеты W , выполненные Сандером [117]. Очевидно, что расчеты [113] находятся в хорошем соответствии с определением W из (15.7). Любопытны также численные графики из этой работы, дающие представление о поведении массы M поверхностного аниона и его энергии связи W в функции от различных параметров

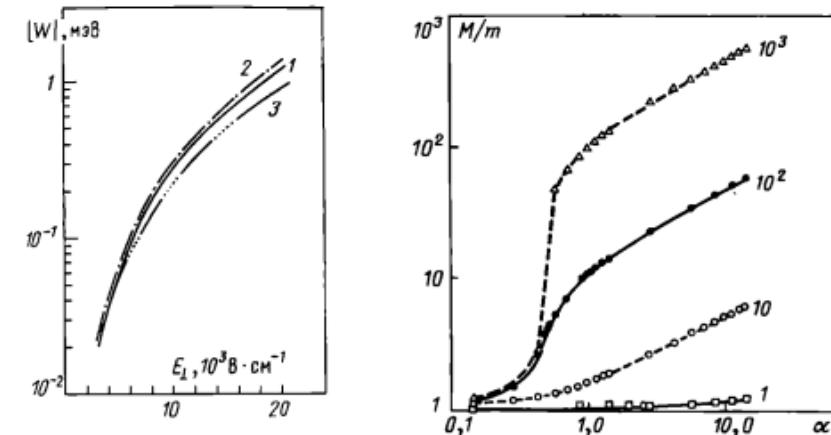


Рис. 4.2. Расчет энергии связи электрона в одноэлектронной лунке в функции от прижимающего электрического поля E_1 : 1 – Ипполито и др. [113]; 2 – по формуле (15.7); 3 – Сандер [117]

Рис. 4.3. Эффективная масса M одноэлектронной лунки над пленкой гелия в функции от параметра α^* , имеющего смысл константы связи (Джексон, Платцман [114]). Около кривых приведены значения параметра x_0 , имеющего смысл температуры; $x_0 = 100$ при $T = 0,17$ К

задачи: прижимающего поля E_1 , толщины d пленки гелия, типа подложки и т.д.

В работах Джексон и Платцмана [114–115] с использованием фейнмановского метода интегрирования по путям получены ряд зависимостей, характеризующих поведение энергии связи и эффективной массы поверхностного аниона в переходной области. Для примера на рис. 4.3 изображено поведение эффективной массы лунки для разных температур при непрерывном изменении константы связи α^* , значение которой варьируется напряженностью прижимающего поля E_1 ($\hbar = m = 1$):

$$\alpha^* = \frac{(eE_1)^2}{4\pi\alpha\tilde{\kappa}_d^2},$$

$$\tilde{\kappa}_d^2 = \rho\tilde{g}/\alpha,$$
(15.39)

здесь $\tilde{\kappa}_d$ – предельное значение капиллярной постоянной, \tilde{g} определена (15.24), энергия измеряется в единицах $\tilde{\kappa}_d^2/2$. Расчет выполнен для ситуации, в которой рипллонный спектр имеет звуковой вид $\omega = sq$, что имеет место для пленок гелия с $qd \ll 1$, т.е. речь идет о пленках толщины $d \lesssim 100$ Å. Безразмерная температура x_0 имеет масштаб, отвечающий значению $x_0 = 100$ при $T = 0,17$ К. Согласно данным рис. 4.3 локализация электрона в лунку происходит в условиях $\alpha^* < 1$.

15.7. Заканчивая описание свойств одноэлектронных лунок, отметим первые экспериментальные данные о локализации электронов. Кроме упоминавшегося выше сдвига линии циклотронного резонанса удастся

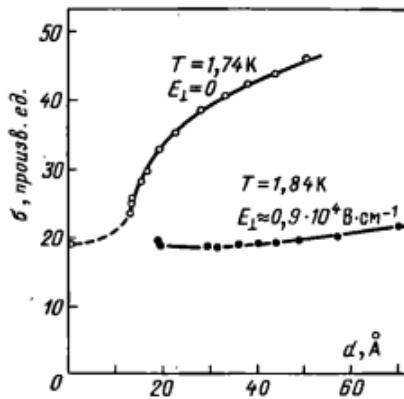


Рис. 4.4. Проводимость σ заряженной пленки гелия на неоновой подложке в функции от толщины пленки d (Кажита [118])

Рис. 4.5. Подвижность электронов μ на пленке гелия, нанесенной на сапфир, в функции от толщины пленки d для двух разных температур. Треугольники отвечают увеличению толщины пленки, кружки – уменьшению (Андрей [119])

фиксировать резкое падение подвижности электронов вдоль поверхности гелия при постепенном увеличении константы электрон-риплонного взаимодействия. Наиболее эффективным способом такого увеличения является уменьшение толщины пленки гелия до ван-дер-ваальсовских толщин, где естественно ожидать возникновения локализации электронов. Соответствующие эксперименты выполнены на пленках гелия, нанесенных на твердый неон [118] и на сапфир [119] (рис. 4.4) и на сапфир [119] (рис. 4.5). В обоих случаях при определенной толщине пленки гелия наблюдается скачкообразное падение подвижности μ электронов. В случае [119] в переходной области наблюдались сложные, резкие скачки подвижности – факт, не имеющий пока даже качественного объяснения. Кроме того, в этих экспериментах скачок подвижности возник в области достаточно толстых пленок, что также мало понятно. Тем не менее общий ход подвижности в функции от толщины пленки гелия достаточно красноречив.

§ 16. Отдельные многоэлектронные лунки

При экспериментальном исследовании поведения слабо заряженной поверхности гелия во внешнем поле (имеется в виду ситуация $E_1 \gg 2\pi n_s$) Лейдерером с сотрудниками [120] была получена серия фотографий,

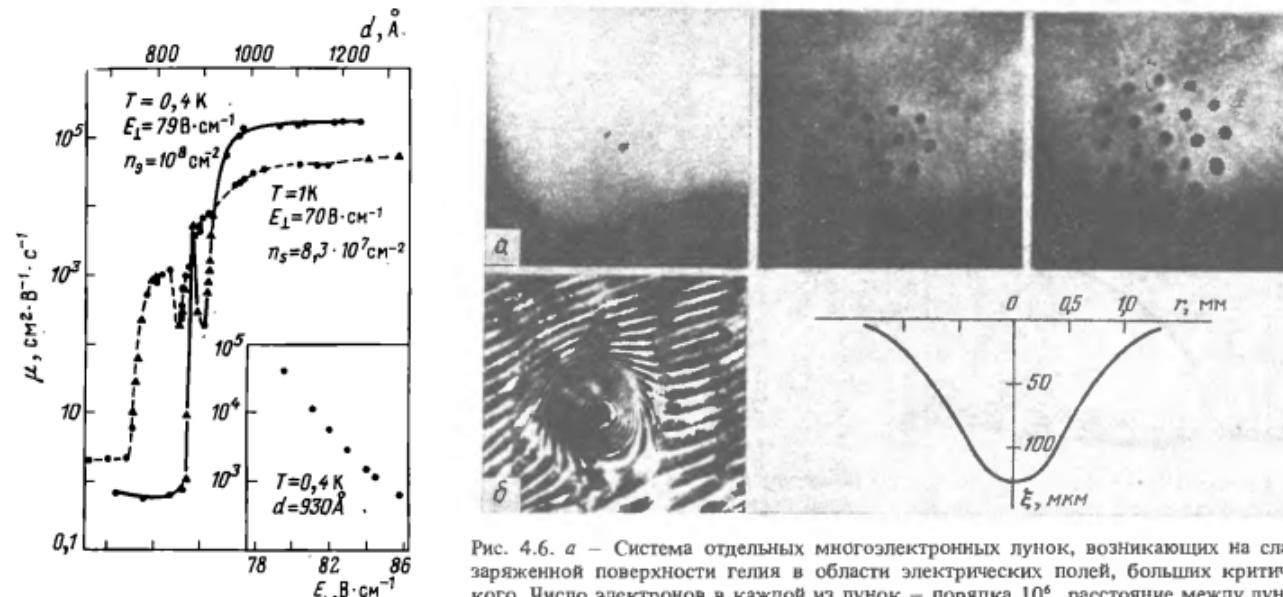


Рис. 4.6. а – Система отдельных многоэлектронных лунок, возникающих на слабо заряженной поверхности гелия в области электрических полей, больших критического. Число электронов в каждой из лунок – порядка 10^6 , расстояние между лунками – порядка капиллярной длины

б – Интерферограмма отдельной многоэлектронной лунки и профиль лунки $\xi(r)$, восстановленный по этой интерферограмме (Лейдерер и др. [120])

представленная на рис. 4.6*). Эти фотографии отражают тенденцию к образованию отдельных многоэлектронных лунок в области слабой заряженности поверхности гелия (альтернативная возможность – возникновение луночного кристалла при произвольно малой заряженности не реализуется). Результаты эксперимента показывают, что каждая из лунок содержит макроскопическое количество электронов $N \gg 1$ (примерно 10^6). Плотность электронов монотонно убывает при удалении от центра лунки, о чем свидетельствует интерферограмма отдельной многоэлектронной лунки, приведенная на рис. 4.6. В связи с этими экспериментами возникает задача о количественном описании различных свойств подобной лунки, во многих отношениях похожей на одноэлектронную.

16.1. Приступая к изложению имеющихся в этом направлении результатов, удобно для начала обратиться к упрощенному варианту теории, не претендующему на описание деталей распределения $n(r)$ электронов в лунке. Отмеченное упрощение сводится к выбору функции $n(r)$ в следующем

*Хронологически серия работ Лейдерера с сотрудниками по исследованию деформационных явлений на заряженной поверхности гелия была начата в 1979 г. изучением деталей закона дисперсии колебаний заряженной поверхности гелия. Затем была обнаружена реконструкция заряженной поверхности, и лишь вслед за этим в 1982 г. появилась информация об отдельных многозарядных лунках. Тем не менее с формальной точки зрения многозарядная лунка наряду с одиночной электронной лункой являются наиболее простыми объектами деформационного происхождения, имеющими много общего. Поэтому нами выбрана последовательность описания деформационных явлений, в которой обсуждение свойств многоэлектронных лунок предшествует проблеме колебаний и устойчивости заряженной поверхности гелия.

модельном виде:

$$n(r) = \frac{N}{\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right), \quad (16.1)$$

где N – полное число электронов в лунке, являющееся внешним параметром задачи, R – вариационный параметр, имеющий смысл радиуса заряженного пятна.

Учитывая формальную аналогию между распределением $n(r)$ электронов (16.1) и распределением электронной плотности в одноэлектронной задаче (см. определение $n(r)$ (15.4)), запишем полную энергию многоэлектронной лунки W в виде [121, 122]

$$W = \frac{Q^2 E_1^2}{8\pi\alpha} \exp\left(\frac{\kappa^2 R^2}{2}\right) \text{Ei}\left(-\frac{\kappa^2 R^2}{2}\right) + V_c(R), \quad (16.2)$$

$$V_c(R) = C_0 Q^2/R, \quad Q = eN.$$

Результат (16.2) отличается от (15.5) заменой энергии нулевых колебаний W_0 , фигурирующей в одноэлектронной задаче на полную энергию кулоновского взаимодействия V_c электронов, сосредоточенных в плоском пятне радиуса R (для распределения $n(r)$ (16.1) $C_0 = 1/2(\pi/2)^{1/2}$).

Нетрудно убедиться в том, что устойчивое решение уравнения $\partial W/\partial R = 0$ относительно R возможно лишь при условии

$$\kappa R < 1, \quad (16.3)$$

аналогичном $\kappa l_\xi < 1$ (15.7), (15.8). В предельном случае, $\kappa R \ll 1$, величина R и полная энергия W приобретают вид

$$\begin{aligned} R &= C_0 \frac{4\pi\alpha}{F_1^2} \equiv R^*, \quad \xi(0) = -\frac{QE_1}{2\pi\alpha} \ln \frac{1}{\kappa R^*}, \\ W &= -\frac{Q^2 E_1^2}{4\pi\alpha} \left(\ln \frac{C_1}{\kappa R^*} - 1 \right), \quad C_1 \approx 1. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Среди результатов (16.4) интересно отметить независимость от Q величины R^* . Естественно, с ростом Q кулоновское взаимодействие в заряженном ядре лунки возрастает, что, казалось бы, должно приводить к возрастанию R^* . Однако параллельно, с такой же скоростью, подрастают силы деформационного происхождения, удерживающие электроны в лунке. Поэтому величина R^* , определяемая конкуренцией двух указанных факторов, оказывается не зависящей от Q .

В окрестности $\kappa R \lesssim 1$ асимптотики (16.4) становятся неточными, и для определения соответствующих величин приходится использовать численные методы. При этом удобно представить энергию (16.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{W}{Q^2 \kappa} = s \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{Ei}\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{x}, \\ s &= \frac{1}{2\kappa R^*}, \quad x = \kappa R, \end{aligned} \quad (16.5)$$

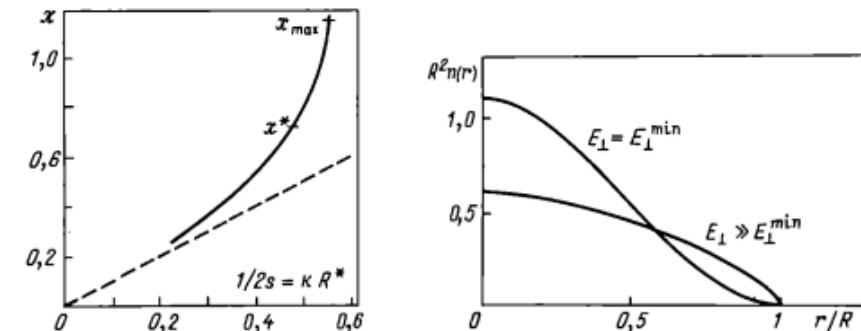


Рис. 4.7. Поведение безразмерного параметра x в функции от параметра κR^* . Величины x , x_{\max} , x^* , s и R^* определены в тексте [122]

Рис. 4.8. Поведение безразмерной плотности электронов в центральной части лунки в функции безразмерного радиуса. Представлены два варианта, один из которых отвечает ситуации $E_1 \geq E_1^{\min}$, второй – достаточно большим полям $E_1 \gg E_1^{\min}$ (Мельников, Мешков [124])

где R^* определено в (16.4). Задавая s и строя функцию $\tilde{W}(s, x)$, можно найти положение минимума этой функции и ее значение в точке минимума. Эта информация достаточна для определения свойств \tilde{W} и R в окрестности $\kappa R \lesssim 1$. Так, минимум функции \tilde{W} впервые появляется при $s = s_{\min} = 0,90$ в точке $x_{\max} = 1,14$. Функция \tilde{W} впервые обращается в нуль при $s = s^* = 1,05$ в точке $x^* = 0,72$. Приведенная на рис. 4.7 зависимость x от параметра $1/2s = \kappa R^*$ в области $s \geq s_{\min}$ дает представление о величине истинного безразмерного радиуса лунки x по сравнению с его асимптотическим значением κR^* .

В условиях $\kappa^2 S \gg 1$ (где S – площадь свободной поверхности гелия, приходящаяся на одну многоэлектронную лунку) критерием выгодности образования лунок является требование $\tilde{W}(s, x) \leq 0$, из которого, как ясно из изложенного выше, получаем

$$E_1 \geq E_1^{\min}, \quad (E_1^{\min})^2 = (2\pi)^{3/2} s^* \kappa \alpha = (16,52 \pm 0,005) \kappa \alpha. \quad (16.6)$$

Более тщательный вариационный расчет параметров многоэлектронной лунки, выполненный Мельниковым и Мешковым [123, 124], показал, что плотность электронов действительно монотонно уменьшается при удалении от центра лунки, обращаясь в пределе $\kappa R \ll 1$ корневым образом в нуль на границе электронного пятна. В области $\kappa R \lesssim 1$ распределение $n(r)$ близко к гауссову. Численные расчеты функции $n(r)$ из [124], иллюстрирующие поведение локальной электронной плотности в разных предельных случаях, приводят к зависимостям, изображенным на рис. 4.8. Что касается усредняемых характеристик лунки, как, например, минимальное поле E_1^{\min} , при котором становится возможным существование отдельной многоэлектронной лунки, то они близки к рассчитанным в [122]. Так, согласно [124], поле $E_1^{\min} = 4,062 (\kappa \alpha)^{1/2}$, что хорошо совпадает с результатом (16.6) из [122].

Отмеченная аналогия между статическими характеристиками одно- и многоэлектронной лунки сохраняет свой смысл и при вычислении динамических характеристик лунки вдоль поверхности гелия. Используя эту аналогию, можно привлекать результаты § 15 для определения эффективной массы и подвижности многоэлектронных лунок.

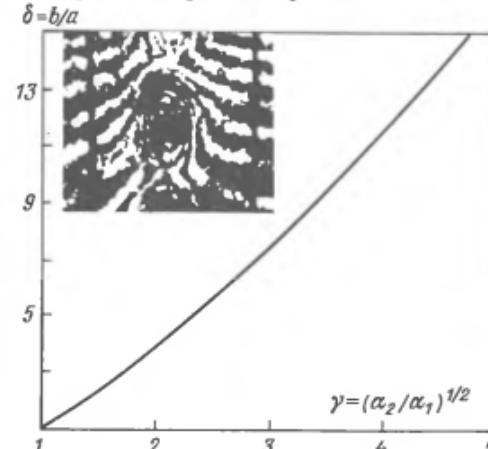
16.2. Среди результатов, обобщающих теорию цилиндрически симметричной лунки [121–124], имеет смысл отметить теорию эллиптических лунок.

Причины, приводящие к возникновению эллиптичности лунок, достаточно разнообразны: анизотропия коэффициента поверхностного натяжения в случае возникновения лунки на границе жидкого гелий – твердый гелий [125], влияние внешних полей (например, дополнительный одномерный потенциал, искажающий форму лунки, см. рис. 4.9 [126]), магнитное поле, параллельное поверхности гелия, деформация формы лунки при возбуждении ее собственных колебаний [127] и т.п. Соответствующие возможности теории наиболее полно обсуждались в работе [128] при описании свойств лунки на границе жидкого гелий – твердый гелий, обладающей определенной анизотропией. В этой работе отмечена аналогия между задачей об анизотропии лунки и контактной задачей Герца в теории упругости [129], показано, что в области $E_1 \gg E_1^{\min}$ распределение электронов $n(xy)$ в эллиптической лунке имеет вид

$$n(xy) = \frac{N}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}, \quad (16.7)$$

где a, b – оси электронного эллипса, связанные определенным образом с внешними параметрами задачи. Отношение b/a в функции параметра $\delta\alpha = (\alpha_2/\alpha_1)^{1/2}$, определяющего степень анизотропности подложки из твердого гелия, приведено на рис. 4.9. Здесь α_1 и α_2 – значения коэффициента поверхностного натяжения во взаимно перпендикулярных кристаллографических направлениях.

Наиболее эффективно явления анизотропии могли бы проявиться в окрестности фазовых переходов ограниния [130–132], когда одна из



компонент тензора натяжения α_{ik} может резко менять свое значение. В настоящее время ведутся поиски таких эффектов с привлечением, в частности, многоэлектронных лунок. Но окончательные результаты пока отсутствуют.

16.3. Изложенная выше теория многоэлектронной лунки на поверхности жидкого гелия справедлива при выполнении неравенств

$$\nabla\xi \ll 1, \quad E_1 > 4\pi en(0). \quad (16.8)$$

Первое из них позволяет линеаризовать в уравнении механического равновесия слагаемое с поверхностным натяжением. Второе необходимо для устойчивости лунки с электростатической точки зрения (требуется, чтобы внешнее прижимающее поле превышало собственное поля заряженного ядра лунки). Оба указанных неравенства не выполняются автоматически. Так, если в качестве $n(0)$ использовать определения следующие из (16.1), (16.4), то вместо второго неравенства (16.8) возникает условие [128] (Q – полный заряд лунки, $Q = eN$):

$$E_1 < E_1^{\max}, \quad E_1^{\max} \approx (\alpha^2/Q)^{1/3}. \quad (16.9)$$

Наличие критического поля E_1^{\max} хорошо иллюстрируется данными [133] о поведении глубины заряженной лунки в функции от E_1 (рис. 4.10). Отчетливо видно, что поле E_1^{\min} не зависит от Q в соответствии с предсказаниями теории. Что касается поля E_1^{\max} , то оно уменьшается с ростом Q .

16.4. Глубокая аналогия между свойствами одно- и многоэлектронных лунок, отмеченная выше, наводит на мысль о возможности привлечения этой аналогии и для ситуации на тонких пленках гелия. Соответствующие расчеты, обобщающие результаты § 15 для однозелектронных лунок над пленкой гелия на случай многоэлектронных солитонов, выполнены в работе [134], авторы которой полагают, что можно привлечь многоэлектронные лунки над тонкой пленкой гелия к объяснению экспериментов [119]. Однако нетрудно видеть, что для многозарядных лунок очень

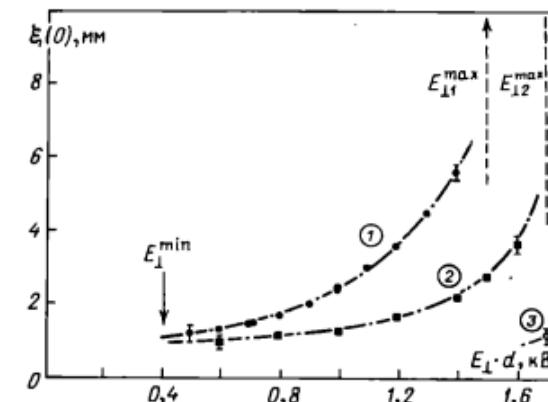


Рис. 4.10. Зависимость глубины лунки $\xi(0)$ от прижимающего поля E_1 при $T = 1,35$ К. Цифрами 1, 2, 3 отвечают разные исходные лунки: $Q_1 > Q_2 > Q_3$ [133].

легко нарушается критерий (15.29). Другими словами, многозарядные лунки над тонкой пленкой гелия если и существуют, то не в линейном варианте, при котором выполняется неравенство $\xi_0/d \ll 1$.

§ 17. Неустойчивость и реконструкция поверхности гелия.

Луночный кристалл

17.1. Разновидностью деформационных явлений на поверхности гелия является возникновение неустойчивости однородного распределения поверхностного заряда относительно малых флюктуаций его плотности. Классическая задача об устойчивости заряженной поверхности жидкого металла известна в электродинамике сплошных сред (см. [135, 136]). Перенесение этих результатов на случай электронов над поверхностью гелия было начато в работе Горькова и Черниковской [137] и продолжено затем многими авторами. Обилие внешних параметров в задаче о колебаниях заряженной поверхности жидкого гелия делает трудно обозримыми общие формулы для закона дисперсии этих колебаний. В связи с этим, комментируя полученные к настоящему времени результаты, мы ограничимся обсуждением характерных предельных случаев и тенденций.

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 4.11. Пространство между двумя пластинами плоскопараллельного конденсатора частично заполнено жидким гелием. Символы h , b и d обозначают соответственно расстояние между пластинами конденсатора, вакуумный зазор и толщину слоя жидкого гелия в конденсаторе. Ось z направлена на вертикали к поверхности жидкости, начало координат совпадает с положением невозмущенной поверхности жидкости, область $z < 0$ отвечает жидкой фазе, V – разность

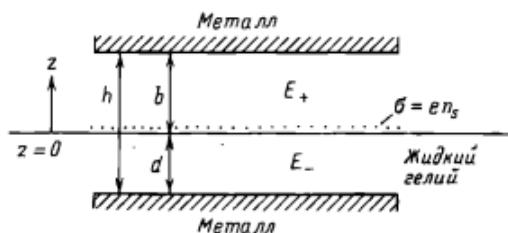


Рис. 4.11. Схематическое изображение заряженной поверхности гелия между пластинами конденсатора

потенциалов, приложенных к пластинам конденсатора, $\sigma = \epsilon n_s$ – поверхностная плотность зарядов.

Характерной особенностью задачи об устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия является наличие двух параметров электрического происхождения: V и σ , что оказывается весьма удобным обстоятельством в ряде конкретных ситуаций.

Проследим сперва поведение закона дисперсии малых колебаний заряженной поверхности массивной пленки гелия (т.е. пленки с $d \gg \kappa^{-1}$,

где κ определена (8.1)) при варьировании параметров V и σ [138–141]:

$$-\rho \frac{\omega^2}{q} + \alpha q^2 + \rho g = \frac{q}{8\pi} [(4\pi\sigma)^2 + (E_+ + E_-)^2], \quad (17.1)$$

$$E_+ + E_- = \frac{2V}{h} + 4\pi\sigma \frac{(d-b)}{h}, \quad q \ll n_s^{1/2}.$$

Здесь E_+ и E_- – напряженности электрического поля соответственно над и под заряженной поверхностью гелия, ω и q – частота и волновое число колебаний. В предельном случае $E_+ = 0$, т.е. $V = -4\pi\sigma d$ и $E_- = -4\pi\sigma$, выражение для $\omega(q)$ (17.1) сводится к известному определению $\omega(q)$ в металлическом приближении из [135]:

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} q^3 + gq - 4\pi\sigma^2 q^2 / \rho. \quad (17.1a)$$

Существенным предположением, используемым при отыскании $\omega(q)$ (17.1), является требование электрической эквипотенциальности слабо изогнутой заряженной поверхности гелия – факт, действительно имеющий место при выполнении неравенства

$$\lambda = \frac{T\tau}{m} q^2 \omega^{-1} \gg 1, \quad (17.2)$$

где T – температура, τ – время релаксации, m – масса заряда. В области $\omega^2 \sim 10^2 \text{ см}^{-1}$ и $q \sim 10 \text{ см}^{-1}$, отвечающих за область неустойчивости для электронной массы $m \sim 10^{-27} \text{ г}$ и $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$, величина $\lambda = 10^4 \gg 1$.

Дополнительным условием, определяющим область применимости (17.1a), является требование

$$q_\sigma = 2\pi\sigma e/T \gg q. \quad (17.2a)$$

Это неравенство для характерных $q \sim \kappa$, играющих основную роль в задаче об устойчивости заряженной поверхности гелия, и температур $T \lesssim 1 \text{ К}$ ограничивает снизу величину поверхностной концентрации электронов $n_s > n_s^{\min}$, $n_s^{\min} \sim 10^4 \div 10^5 \text{ см}^{-2}$.

Критерий устойчивости для закона дисперсии $\omega(q)$ (17.1) выглядит следующим образом: $\sigma < \sigma_{\max}$, где σ_{\max} определяется уравнением

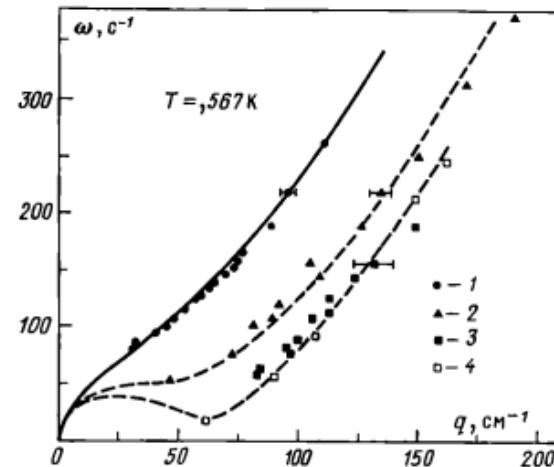
$$(4\pi\sigma_{\max})^2 + (E_+ + E_-)^2 = 16\pi(\rho g \alpha)^{1/2}. \quad (17.3)$$

В простейшем случае $E_+ = 0$, т.е. для $\omega(q)$ из (17.1a) условие устойчивости сводится к требованию

$$n_s < n_s^{\max}, \quad E_- < E_-^{\max} \equiv E_c, \\ (n_s^{\max})^2 = \frac{\kappa\alpha}{2\pi e^2}, \quad (E_c)^2 = 2\pi\kappa\alpha. \quad (17.4)$$

Числовое значение n_s^{\max} для жидкого гелия в этом случае оказывается равным $n_s^{\max} = 2,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$; соответствующее критическое поле $E_c \approx 2,03 \text{ кВ} \cdot \text{см}^{-1}$.

Рис. 4.12. Закон дисперсии заряженной анионами поверхности раздела в растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Критическое поле $E_c = 1130 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. Отношение E/E_c равно 1 – 0,1; 2 – 0,88; 3 – 0,99. Эксперимент 4 проведен с положительными ионами при отношении $E/E_c = 0,99$. Штриховые линии отвечают $\omega(q)$ (17.1а) (Лейдерер и др. [143])



При уменьшении плотности σ в области $V/d \gg 2\pi\sigma$ закон дисперсии (17.1) перестает зависеть от плотности зарядов σ :

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} q^3 + gq - \frac{q^2}{2\pi\rho} \left(\frac{V}{h} \right)^2, \quad E_c^2 = (V_m/h)^2 = 4\pi\alpha. \quad (17.5)$$

Подобная ситуация сохраняется с уменьшением σ до тех пор, пока не нарушится неравенство (17.2а). Числовое значение E_c из (17.5) в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в (17.4).

В обратном предельном случае $q_\sigma < q \ll \langle z \rangle^{-1}$ (где q_σ определяется (17.2а), $\langle z \rangle$ – средняя толщина заряженного слоя над поверхностью гелия) закон дисперсии для колебаний заряженной поверхности гелия принимает вид, качественно отличный от (17.1),

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} q^3 + gq - \frac{e\sigma}{\rho T} \frac{V^2}{h^2} q. \quad (17.6)$$

Определение $\omega(q)$ (17.6) демонстрирует нам, как в данной задаче пропадает влияние электронов на закон дисперсии риплонов при уменьшении их концентрации.

Из экспериментальных результатов в задаче о колебаниях заряженной поверхности жидкости наиболее интересны детальные исследования особенностей закона дисперсии заряженной границы раздела в расслоившемся растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$, выполненные Лейдерером с соавторами [142–143] (ситуация на границе раздела расслоившегося раствора ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ с точки зрения длинноволновых колебаний аналогична ситуации на свободной поверхности жидкого гелия). В этих изящных экспериментах дисперсионная кривая, приведенная на рис. 4.12, построена для ситуации, приводящей к определению $\omega(q)$ (17.1а). Сплошные линии – расчет по формуле (17.1а) без подгоночных параметров, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую. Рис. 4.13 хорошо иллюстрирует обращение ω^2 в нуль вдоль линии $q = k^{-1}$ при стремлении $E_1 \rightarrow E_c$.

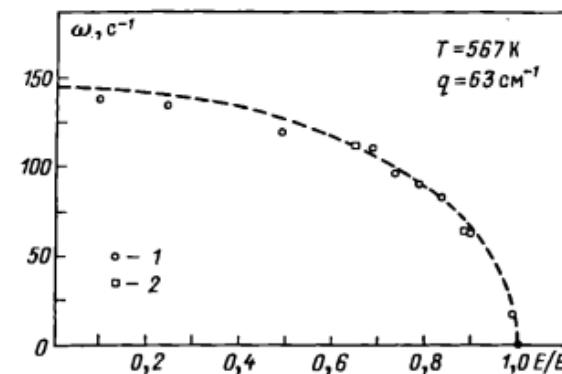


Рис. 4.13. Проверка соотношения $\omega = \omega(q = k^{-1}, E_1)$, следующего из определения $\omega(q)$ (17.1а) при $q = k^{-1}$. Штриховая линия – теория, 1 – эксперимент для заряженной поверхности гелия в случае положительных ионов, 2 – с отрицательными ионами (Лейдерер [143])

17.2. Интересным оказывается влияние толщины пленки d на закон дисперсии и критические параметры заряженной пленки гелия. Здесь следует отметить четыре наиболее существенных фактора. Первый из них заключается в том, что в области длинноволновых колебаний $q \ll d$ гидродинамическая и электрическая части задачи начинают зависеть от граничных условий на поверхности твердой подложки. В результате, например, закон дисперсии (17.1а) трансформируется в следующий [138, 144]:

$$\omega^2(q) = \frac{q^2 d}{\rho} \left(\rho q + \alpha q^2 - \frac{4\pi\sigma^2}{d} \right). \quad (17.7)$$

Соответственно критическая плотность зарядов $n_s^{\max} \equiv n_c$ и максимальное поле E_c принимают вид

$$n_c^2 = \frac{\rho gd}{4\pi e^2}, \quad E_c^2 = \pi \rho gd, \quad (17.8)$$

т.е. начинают уменьшаться с уменьшением d .

Однако (и это второй фактор) тенденция к уменьшению n_c и E_c нарушается в области толщин пленки гелия $d \lesssim 10^{-5} \text{ см}$, когда на движение поверхности жидкой пленки начинают оказывать влияние силы Ван-дер-Ваальса, обусловленные взаимодействием жидкого гелия с твердой подложкой. Этот размерный эффект можно учесть эффективной перенормировкой ускорения силы тяжести

$$\tilde{g} = g + \frac{3f}{\rho d^4}, \quad (17.9)$$

где f – константа ван-дер-ваальсовского взаимодействия, имеющая, например, для подложки из стекла масштаб $f \approx 9,5 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$ [110]. При этом определения n_c и E_c из (17.8) сохраняют свой смысл, если заменить g на \tilde{g} . Очевидно, что в области $d < d^*$, $d^* = (3f/\rho g)^{1/4}$ уменьшение критических параметров E_c , n_c прекращается, и возникает тенденция к росту этих

параметров:

$$n_c^2 = \frac{\rho g d}{4\pi e^2} \propto d^{-3}, \quad d < d^*. \quad (17.10)$$

Асимптотика (17.10) качественно верно предсказывает тенденцию к росту n_c с уменьшением d . Однако исходные предпосылки (в частности, металлическое приближение (17.2)), положенные в основу расчета закона дисперсии (17.7), а значит, и критических параметров n_c , E_c (17.10), перестают быть справедливыми в области малых d .

Суть дела заключается в том, что в области достаточно малых толщин d пленки гелия начинает нарушаться неравенство $r_s \ll d$ (r_s – среднее расстояние между электронами), позволяющее использовать континуальное приближение для описания поля сил изображения. Важность этого соображения в проблеме устойчивости заряженной гелиевой пленки была впервые отмечена в работе [145]. Кроме того, для гелиевой пленки, покрывающей металлическую подложку, оказываются существенными динамические эффекты, связанные с экранировкой кулоновского взаимодействия между электронами полями сил изображения [146]. Эти два обстоятельства получили дальнейшее развитие в серии работ [147–149], посвященных изучению тонкой заряженной пленки гелия.

Наконец, четвертый существенный фактор, требующий специального внимания, – необходимость учета изменения средней толщины пленки под действием давления на нее электронной системы. Лучше всего этот эффект демонстрируется экспериментальными данными Лейдерера и др. [150], представленными на рис. 4.14 и свидетельствующими о существенной зависимости

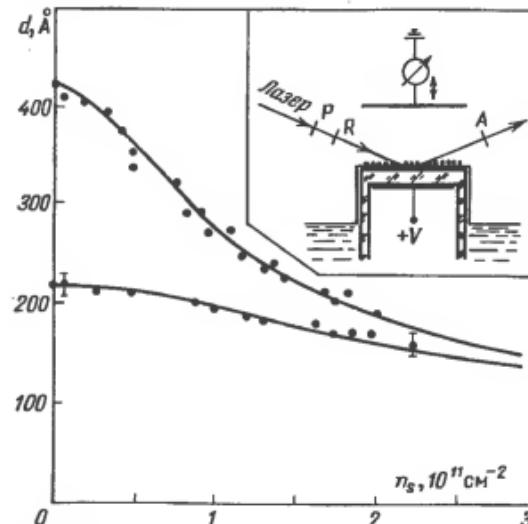


Рис. 4.14. Зависимость эффективной толщины пленки гелия на твердой подложке от плотности электронов n_s , осажденных на пленке гелия. Эксперименты осуществлялись по схеме, изображенной на врезке (Этц и др. [150]). Толщина d измерялась эллипсометрически по углу вращения плоскости поляризации монохроматического луча лазера при отражении от пленки гелия. Сплошные линии – расчет по формулам (17.11), точки – эксперимент [150].

симости d от n_s . Теоретические аспекты этой проблемы затронуты в работах [145, 147, 151, 152]. В простейшем случае электронов, равномерно размазанных вдоль поверхности пленки гелия, в ситуации, изображенной на рис. 4.14 и отвечающей реальному эксперименту из [150], зависимость d от n_s выглядит так:

$$d = \left(\frac{1}{d_0^3} + \frac{2\pi e^2 n_s^2}{f} \right)^{1/3}, \quad d_0 = \left(\frac{f}{\rho g h_0} \right)^{1/3}. \quad (17.11)$$

Здесь h_0 – высота твердой подложки над уровнем массивного гелия, g – ускорение силы тяжести, E_{\perp} – напряженность внешнего поля над пленкой гелия, $E_{\perp} = 2\pi e n_s$. Уточнения, которые следует вносить в определение (17.11), связаны с учетом эффекта экранировки, упоминавшегося выше.

Таким образом, самосогласованное описание свойств заряженной пленки гелия должно содержать информацию о динамических свойствах заряженной поверхности пленки с учетом трех, перечисленных выше факторов, вместе с дополнительным расчетом эффективной толщины пленки, имеющей в незаряженном состоянии толщину d_0 и деформированную системой поверхностных зарядов до эффективной величины $d < d_0$.

Соответствующие расчеты, выполненные наиболее полно в [148], приводят к зависимости n_c от произвольного значения d , изображенной на рис. 4.15. Одновременно на этот же график нанесены линии поведения эффективной толщины заряженной пленки гелия в функции от n_s и начально-го значения d_0 (расчет выполнен в [152]). Реальная критическая плотность

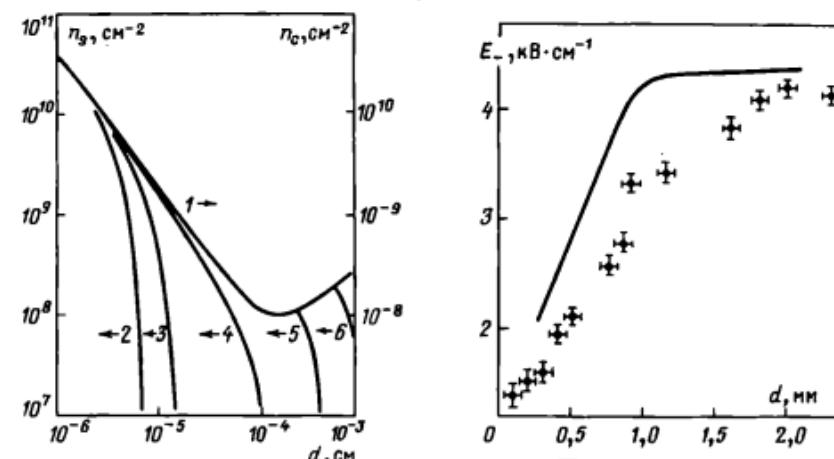


Рис. 4.15. Кривая 1 определяет зависимость критической плотности электронов от заданной толщины пленки [148]. Кривые 2–6 – зависимости толщины пленки гелия от плотности электронов для разных начальных значений нейтральной пленки гелия (Татарский [152]). Реальная критическая плотность электронов должна определяться пересечением кривой 1 с одной из кривых 2–6.

Рис. 4.16. Зависимость критического электронного поля E_{\perp} при полной экранировке внешнего поля над поверхностью гелия ($E_{\parallel} = 0$) от толщины пленки d гелия в области $k d \lesssim 1$ (k – капиллярная постоянная). Сплошная линия соответствует (17.8), точки – эксперимент [153].

n_c должна определяться пересечением линий $n_c(d)$ и $\tilde{n}(d_0, n_s)$. Очевидно, что в области малых толщин d (левее минимума кривой $n_s(d)$) критическая плотность n_c практически не зависит от исходной толщины пленки.

Среди экспериментальных результатов, связанных с изучением влияния толщины пленки на критическую плотность электронов, можно отметить уверенное наблюдение понижения значения $n_c(d)$ в области $kd < 1$; рис. 4.16 из [153] иллюстрирует наличие этого эффекта. Имеются различные косвенные данные, свидетельствующие о росте n_c в области толщин $d \lesssim 10^{-6}$ см. Однако окончательного решения этот вопрос с экспериментальной точки зрения пока не имеет.

17.3. Проблема устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия занимает специальное место в задаче о свойствах спектра длинноволновых колебаний. Дело в том, что существует ряд явлений, для которых серьезное увеличение плотности электронов по сравнению с реально имеющейся, представляется крайне желательным и интересным. Речь идет, например, о фазовой диаграмме вигнеровского кристалла, особенностях плазменных колебаний двумерных заряженных систем и т.д. В связи с этим прилагаются серьезные усилия в поисках реальных шагов, позволяющих увеличить критическую плотность электронов. Одним из таких, по-видимому, наиболее перспективных способов увеличения n_c является использование тонких пленок гелия. Эта возможность детально обсуждена выше. Интересны перспективы использования в качестве объектов с повышенной локальной плотностью зарядов многоэлектронных лунок на поверхности гелия. В этих образованиях плотность электронов в центре лунки может достигать значений $n(0) \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$ [128]. Однако в данном случае плотность электронов сильно неоднородна в пределах заряженной части лунки.

Свообразный размерный эффект, ведущий к увеличению критической плотности, предложенный в работе [154] и реализованный экспериментально в [155], заключается в следующем. Согласно изложенным выше результатам, деформационная неустойчивость заряженной поверхности гелия начинает развиваться, в первую очередь, на волновых числах порядка капиллярной постоянной жидкого гелия. Если искусственно воспрепятствовать возможности деформации поверхности гелия на масштабах порядка капиллярной постоянной, то можно ожидать в подобных условиях увеличения критической плотности n_c . Практически такая идея может быть реализована с использованием пленки гелия на твердой подложке, имеющей шероховатости большой амплитуды и с характерным периодом, гораздо меньшим, чем капиллярная постоянная.

Наконец, имеет смысл обратить внимание на очень интересный эффект, влияющий на критические параметры заряженной поверхности гелия в отрицательном направлении и возникший в качестве предмета для обсуждения лишь в последнее время. Речь идет о параметрической раскачке колебаний заряженной поверхности гелия. Причины для возникновения параметрической неустойчивости в случае заряженной поверхности жидкости очень прозрачны и заключаются в том, что спектр колебаний заряженной поверхности гелия явно зависит от напряженности прижимающего поля (см., например, определение $\omega(q)$ (17.1)). Очевидно, что если к постоянному прижимающему полю E_1 будет добавлена

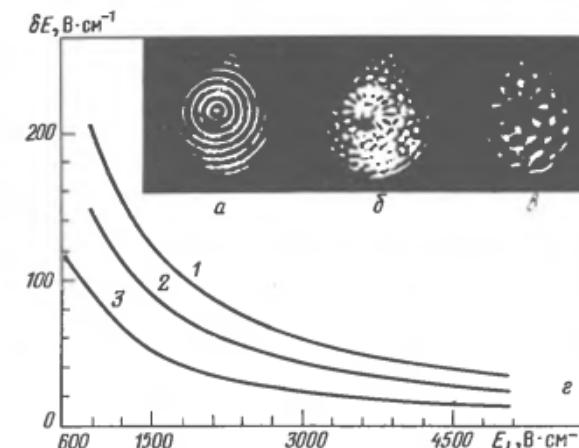


Рис. 4.17. Параметрическое возбуждение заряженной поверхности гелия дополнительным переменным полем δE , нормальным поверхности гелия.

а – Частота подсветки совпадает с внешней частотой возбуждения;

б – условия аналогичны ситуации а, но амплитуда возбуждающего поля возросла;

в – условия аналогичны ситуации б, но частота подсветки уменьшена вдвое (Лейдерер [156]).

г – Область стабильности для заряженной поверхности гелия в координатах $(E_1, \delta E)$ определяется кривыми 1, 2 и 3, рассчитанными соответственно для частот 100, 200 и 300 Гц, $T = 1 \text{ K}$ [157]

малая переменная добавка, то возникнут предпосылки для возникновения параметрической неустойчивости, хорошо известной в теории малых колебаний систем с варьируемыми параметрами.

Пример параметрического возбуждения заряженной поверхности гелия приведен на рис. 4.17 (Лейдерер [156]). Расчет диаграммы неустойчивости заряженной поверхности гелия при наличии статического и переменного напряжений на обкладках конденсатора и параметрах задачи, позволяющих использовать для описания динамики жидкого гелия двухжидкостных уравнений Навье – Стокса, приведен на рис. 4.17 [157]. В нормальной диэлектрической жидкости этот эффект исследовался авторами работ [158, 159]. Здесь же уместно привести эффектные фотографии (рис. 4.18) параметрического возбуждения жидкой поверхности металла (меди) в сильном электрическом поле [160]. Этот эффект может иметь приложения в проблеме получения порошка из жидкого металла.

17.4. Очень интересна и перспективна для дальнейших исследований область внешних параметров, несколько превышающих критические значения. В этой области в результате развития неустойчивости система ПЭ должна переходить в новое коллективное состояние. В зависимости от динамических условий развития этой неустойчивости возможны различные конечные электронные состояния, каждое из которых представляет самостоятельный интерес.

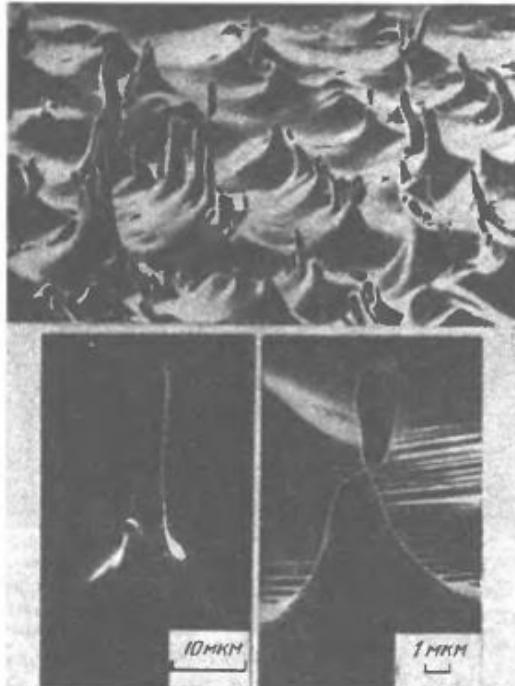


Рис. 4.18. Параметрическое возбуждение поверхности жидкой меди под действием постоянного и переменного электрических полей, возникающих на поверхности металла при воздействии на него мощного плазменного пучка (Габович, Порицкий [160])

Так, если речь идет о низких температурах и системе электронов над поверхностью сверхтекущего ^4He , то при появлении деформационной неустойчивости электроны собираются в большие сгустки и проваливаются в глубь жидкой фазы в виде многоэлектронных пузырьков [153].

При осторожном переходе через критическую область параметров и при наличии в системе достаточной вязкости заряженная поверхность гелия может реконструироваться и приобрести форму лунного кристалла с периодом, имеющим масштаб капиллярной постоянной. Это красивое явление, имеющее место не только на заряженной поверхности жидкости, но и, например, на поверхности жидкого диэлектрика в электрическом поле [161], было объяснено Кузнецовым и др. [162]. Обобщение на случай гелия дано в работе Горькова и Черниковой [163]. Экспериментальное обнаружение реконструкции заряженной поверхности гелия и образования лунного кристалла как на границе расслоения раствора ^3He – ^4He , так и на чистой поверхности гелия принадлежит Лейдереру с соавторами в работах [142, 164, 165], где были представлены первые экспериментальные данные о возникновении реконструкции заряженной поверхности гелия. Затем удалось резко улучшить методику приготовления и наблюдения за процессом реконструкции. Последние снимки реконструированной поверхности гелия имеют вид, представленный на рис. 4.19 [125]. Тип гашения и

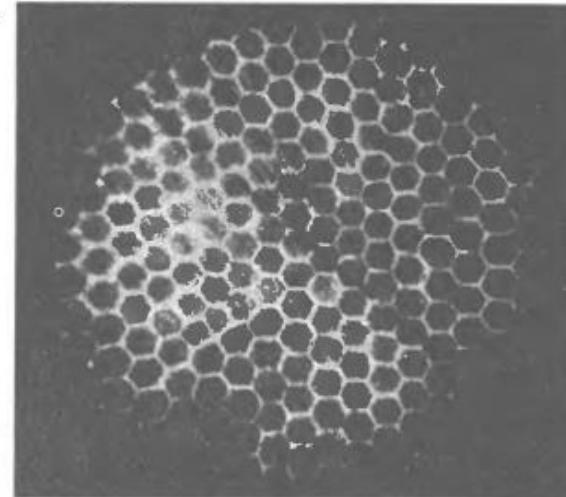


Рис. 4.19. Вид реконструированной поверхности гелия в ячейке, имеющей диаметр порядка 10 см. Снимок сделан по нормали к поверхности гелия через электрод, прозрачный для видимого света. Период решетки примерно равен капиллярной длине жидкого гелия (Лейдерер и др. [125])

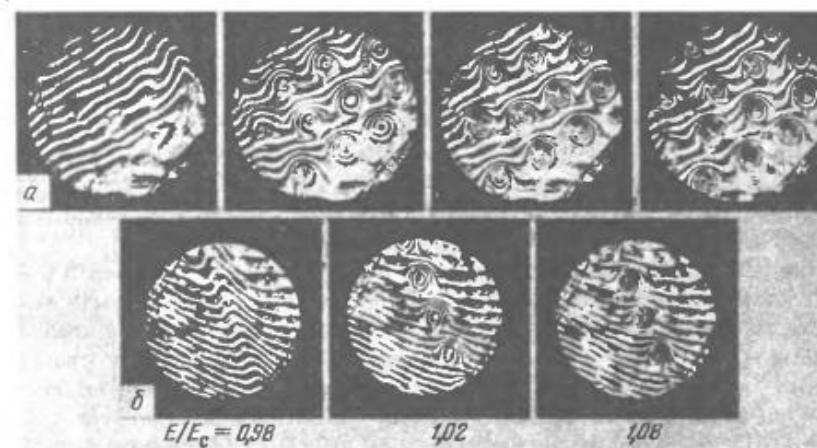


Рис. 4.20. а – Интерферограмма заряженной поверхности гелия вблизи критической точки $E/E_c = 1$. Первый снимок отвечает нереконструированной поверхности $E/E_c < 1$. Последующие дают представление о развитии реконструкции в области $E/E_c > 1$.

б – Развитие реконструкции поверхности гелия при наличи дополнительного одномерного потенциала вдоль свободной поверхности (П. Лейдерер, не опубликовано)

характерный масштаб периода решетки находятся в соответствии с предсказаниями теории. Таким образом, наиболее ответственный этап, связанный с обнаружением явления реконструкции заряженной поверхности жидкого гелия, можно считать успешно завершенным. Для иллюстрации на рис. 4.20 приведены еще интерферограммы реконструированной поверхности гелия (Лейдерер, не опубликовано). Аналогичные результаты были получены в работе [166].

Несмотря на успехи, касающиеся качественного предсказания самого факта существования лунного кристалла, типа его решетки и масштаба постоянной решетки, количественная теория лунного кристалла сталкивается в настоящее время с рядом достаточно сложных проблем.

Во-первых, самосогласованное описание стационарного состояния реконструированной поверхности жидкого гелия удается получить лишь в так называемом "мягком режиме" (терминология [162–163]), когда средняя плотность зарядов на поверхности гелия достаточно мала и амплитуда $\xi(r)$ нового периодического стационарного состояния невелика по сравнению с капиллярной постоянной. В то же время имеющиеся экспериментальные данные о реконструкции заряженной поверхности гелия получены в условиях практически максимальной заряженности поверхности гелия, т.е. в условиях "жесткого режима", когда деформация поверхности, в принципе, может быть не малой по сравнению с κ^{-1} . Что касается реконструкции поверхности гелия в условиях слабой заряженности, то она протекает несколько иначе, чем это следует из простой теории лунного кристалла (подробнее этот вариант реконструкции обсуждался в § 16 об одиночных многоэлектронных лунках).

Во-вторых, предстоит определить границы устойчивости и динамические свойства лунного кристалла. Исследование этих вопросов только начинается, хотя некоторые интересные результаты в этой области уже получены: авторы [162], а также Икези [167] вычислили упругие модули решеточного кристалла и определили скорости двух возможных типов звуковых колебаний в подобной решетке (отметим, что в решетке вигнеровского кристалла лишь поперечная ветвь колебаний имеет звуковой вид). В работе Черниковой [168] исследован вопрос о гистерезисных явлениях при развитии неустойчивости заряженной поверхности гелия.

В-третьих, весьма интересен вопрос о кинетике развития неустойчивости поверхности гелия при возникновении лунного кристалла. Исследованию этого вопроса посвящена работа Горькова и Черниковой [169].

Несмотря на указанную выше условность теоретических расчетов реконструкции заряженной поверхности гелия в "мягком" режиме, имеет смысл проследить за основными утверждениями этой теории, не вдаваясь в детали вычислений. При этом мы будем следовать работам [123, 170], содержащим наиболее полную информацию по данной проблеме.

Будем исходить из следующего выражения для энергии:

$$W = \frac{1}{2} \int [(\nabla \xi)^2 + \xi^2 + 2E_\perp \xi n] d^2 r + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{n(r)n(r')}{|r - r'|} d^2 r d^2 r', \quad (17.12)$$

в котором последовательные слагаемые дают вклад поверхностного натяжения, гравитации, взаимодействия электронов с внешним полем E_\perp и межэлектронного взаимодействия. Вертикальное смещение поверхности ξ и двумерная координата r измерены в единицах $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, поле E_\perp и плотность заряда $n(r)$ – в $(\rho g \alpha)^{1/4}$, энергия W – в $\alpha^2/\rho g$, где α – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность гелия, g – ускорение силы тяжести. Всюду ниже мы будем рассматривать предел малой плотности заряда $n(r) \ll 1$. В этом пределе, как показано Горьковым и Черниковой [163, 168], однородное распределение заряда при поле $E_c = (4\pi)^{1/2}$ становится неустойчивым относительно возникновения волны зарядовой плотности с единичным по модулю волновым вектором. Эта неустойчивость должна стабилизироваться нелинейностями. В работе [123] было изучено распределение заряда вида

$$n(r) = \bar{n} + \tilde{n} \left[\cos x + \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right], \quad (17.13)$$

имеющее гексагональную симметрию, с учетом поправок к энергии (17.12), получающихся при разложении энергии поверхностного натяжения и кулоновской энергии по степеням ξ и имеющих порядок $\xi^4, \tilde{n}^2 \xi^2, \bar{n} \tilde{n} \xi^2$. Было показано, в частности, что минимальная амплитуда модуляции плотности \tilde{n} отвечает границе устойчивости метастабильного состояния треугольной решетки, причем (в принятых нами обозначениях) $\tilde{n}_c = 3\bar{n}/\gamma$, где $\gamma \approx 0,96$.

Из выражения (17.13) следует, однако, что условие неотрицательности $n(r)$ приводит к неравенству $\tilde{n}^2 \leq \frac{2}{3} \bar{n}$. Таким образом, уже значение \tilde{n}_c примерно в пять раз превышает значение $\tilde{n}_0 = \frac{2}{3}\bar{n}$; при котором плотность заряда обращается в нуль в узлах гексагональной решетки типа пчелиных сот. Ясно поэтому, что нелинейность, связанная с условием $n(r) \geq 0$, начинает проявляться гораздо раньше, чем становятся существенными нелинейные члены, учтенные [163, 168]. Полученная выше оценка $\tilde{n}_c/\tilde{n}_0 \approx 5$ дает представление об относительной роли двух видов нелинейности непосредственно за порогом неустойчивости (при $E - E_c \lesssim \bar{n}^2$).

При фиксированном поле E и $\bar{n} \rightarrow 0$ вклад нелинейных поправок к энергии (17.12) убывает, как \bar{n}^2 , так что нелинейность, связанная с условием $n(r) > 0$, является в пределе $\bar{n} \rightarrow 0$ единственным механизмом, ограничивающим рост неустойчивости и определяющим структуру перестроенной поверхности гелия при $E > E_c$. Картина перестройки поверхности представляется нам качественно следующей [123].

При превышении полем критического значения E_c амплитуда \tilde{n} сразу достигает значения $\frac{2}{3}\bar{n}$, а $n(r)$ обращается в нуль в узлах гексагональной решетки. С увеличением поля эти точки расширяются в регулярно распо-

ложенные островки, на которых $n(r) = 0$. Период структуры при этом меняется, обеспечивая минимум энергии (17.12).

При некотором значении поля $E_c^{(1)}$ островки смыкаются и области, занятые электронами, оказываются изолированными друг от друга, так что при дальнейшем увеличении поля заряд в какой из этих областей уже не меняется. Ввиду того что средняя плотность заряда фиксирована, период структуры также остается постоянным, сохраняя значение, достигнутое при $E = E_c^{(1)}$. С ростом поля размер областей, занятых электронами, будет уменьшаться, поэтому в пределе сильного поля мы получим треугольную решетку из слабо взаимодействующих лунок.

Отметим, что нелинейные поправки к (17.12) будут существенно усложнять теорию в малой окрестности E_c (при $|E - E_c| \lesssim \bar{n}^2$). В частности, возможны гистерезисные эффекты, аналогичные представленным в [168].

ГЛАВА 5

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ. КУЛОНОВСКАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

Система электронов над жидким гелием идеально приспособлена для исследования коллективных явлений кулоновского происхождения. Речь идет, например, о двумерных плазменных колебаниях, кулоновской (вигнеровской) кристаллизации и т.п. В самом деле, в области гелиевых температур $T < 1$ К уже сравнительно небольшие плотности поверхностных электронов $n_s \sim 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-2}$ обеспечивают большое значение фундаментального (для коллективных явлений в электронной плазме) параметра $\Gamma = e^2 (\pi n_s)^{1/2} / T$, равного отношению средней энергии взаимодействия электронов $V_c = e^2 (\pi n_s)^{1/2}$ к температуре. В рассматриваемой системе энергия Ферми $\epsilon_F = \pi \hbar^2 n_s / m$ даже для предельно больших концентраций электронов $n_c \approx 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ оказывается много меньше температуры ($\epsilon_F \lesssim 10^{-2}$ К).

Следует отметить, что благодаря "мягкости" жидкой подложки коллективные явления в электронной системе над гелием обладают рядом специфических особенностей, присущих лишь этой системе. Речь идет о деформационных эффектах, самосогласованно переплетающихся с кулоновской частью задачи. Это обстоятельство приводит к возникновению серии уникальных явлений, представляющих самостоятельный интерес и позволяющих к тому же обнаруживать и последовательно изучать кулоновскую кристаллизацию в электронной системе.

§ 18. Двумерные плазмоны

Рассмотрим сначала случай так называемой слабой связи электронов по кулоновской энергии их взаимодействия, когда введенный выше параметр Γ мал: $\Gamma \ll 1$. Даже в этом пределе в рассматриваемой системе при изучении длинноволновых коллективных возбуждений нельзя пренебречь потенциальной энергией взаимодействия частиц. Это следует из дальнодействующего характера кулоновского потенциала $V(r) = e^2 / r$.

Действительно, рассмотрим фурье-преобразование этого потенциала $V(|\mathbf{k}|)$, где \mathbf{k} – волновой вектор. Для двумерной системы электронов (вектор \mathbf{k} двумерен и расположен в плоскости системы) величина $V(\mathbf{k}) = 2\pi e^2 / k$, как и в трехмерном случае, имеет расходимость при $k \rightarrow 0$. Из-за этой особенности длинноволновые флуктуации плотности электронов обладают очень большой энергией. Таким образом, всегда имеется диапазон значений волновых векторов, в котором кулоновская энергия велика и определяет свойства электронной плазмы. Однако характер особенности

фурье-преобразования несколько слабее, чем в трехмерном случае, где $V(k) = 4\pi e^2/k^2$. Это приводит к тому, что многие свойства двумерной плазмы сильно отличаются от свойств обычной трехмерной плазмы. В силу этого изучение двумерной плазмы представляет дополнительный интерес.

Специфика двумерной плазмы особенно сильно проявляется при изучении закона дисперсии коллективных возбуждений системы. В отличие от трехмерного случая спектр двумерных плазмонов не имеет пороговой частоты, причем $\omega(k) \sim k^{1/2}$. Этот результат был получен теоретически [171–173] еще задолго до появления системы поверхностных электронов (ПЭ) в гелии.

Хорошо известно, что отклик некоторой системы зарядов на внешнее электрическое возмущение определяется ее диэлектрической проницаемостью $\epsilon(k, \omega)$ как функцией частоты ω и волнового вектора k . При этом фурье-компоненты полного потенциала $\varphi_{\text{полн}}(k, \omega)$ связаны с компонентами внешнего возмущения потенциала $\varphi_{\text{внешн}}(k, \omega)$ простым соотношением:

$$\varphi_{\text{полн}}(k, \omega) = \varphi_{\text{внешн}}/\epsilon(k, \omega).$$

Нули диэлектрической проницаемости соответствуют коллективным модам, для которых реализуются возмущения плотности заряда в системе без внешних полей.

Диэлектрическая функция в линейном приближении связана известным соотношением с фурье-образом потенциала взаимодействия электронов $V(k)$ и функцией отклика $Q(k, \omega)$ на полный электростатический потенциал:

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - V(k) Q(k, \omega). \quad (18.1)$$

В приближении самосогласованного поля функцию Q следует приравнять функции отклика для газа невзаимодействующих электронов:

$$Q_0 = \sum_{k'} \frac{n(k') - n(k' + k)}{\epsilon_{k'} - \epsilon_{k'+k} + \hbar\omega + i\delta},$$

где $n(k)$ – функция распределения электронов.

Для электронов, подчиняющихся классической статистике, функция Q_0 легко вычисляется и в результате имеет следующий вид [174]:

$$Q_0 = -\frac{n_s}{T} [f(x) + i\chi(x)], \quad (18.2)$$

где

$$x = \frac{\omega}{k} \left(\frac{m}{2T} \right)^{1/2}, \quad \chi(x) = \pi^{1/2} x e^{-x^2},$$

$$f(x) = 1 - 2x e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy \approx -\frac{1}{2x^2} \left(1 + \frac{3}{2x^2} \right), \quad x \gg 1.$$

Функция $f(x)$ при $x = x_{\min} \approx 1,47$ имеет минимум $f(x_{\min}) = -0,284$.

При малых k параметр x , как правило, оказывается очень большим. В этом пределе закон дисперсии коллективных возбуждений $\omega = \omega_k - i\gamma_k$,

вытекающий из уравнения $\epsilon(k, \omega) = 0$, при $\gamma_k \ll \omega_k$ имеет следующий вид [175]:

$$\omega^2 = \frac{n_s k^2 V(k)}{m} \left[1 + 3 \frac{T}{n_s V(k)} \right]. \quad (18.3)$$

Бездиссилативное затухание плазмонов (затухание Ландау)

$$\gamma_k = k \left(\frac{2T}{m} \right)^{1/2} \left[\pi^{1/2} x e^{-x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} \right]_{x=x_k}$$

(здесь $x_k = (n_s V k / T)^{1/2}$) в пределе $x_k \gg 1$ экспоненциально мало.

Формула (18.3) справедлива в условиях, когда второй член в фигурных скобках мал. С помощью этой формулы легко устанавливается связь закона дисперсии коллективных возбуждений в системе с характером особенности $V(k)$ при $k = 0$. Для систем с короткодействующим потенциалом взаимодействия $V(0) = \text{const}$ спектр коллективных возбуждений согласно (18.3) имеет звуковой характер. Если бы фурье-преобразование $V(k)$ имело ту же особенность, что и в трехмерном случае $V(k) \sim k^{-2}$, то спектр плазмонов не зависел бы от волнового вектора в длинноволновом пределе (приобретая большую предельную частоту). В двумерном случае мы имеем в некотором случае промежуточную ситуацию: $V(k) \sim k^{-1}$. Частота двумерного плазмона стремится к нулю в пределе малых значений волнового вектора, но не так быстро, как в системе с короткодействующим потенциалом взаимодействия [174, 176]:

$$\omega(k) = \left(\frac{2\pi n_s \tilde{e}^2 k}{m} \right)^{1/2} \sim k^{1/2}. \quad (18.4)$$

Здесь \tilde{e} – эффективный заряд электрона.

Для частиц, взаимодействующих по закону Кулона, параметр x_k можно выразить через введенный ранее фундаментальный параметр Γ :

$$x_k^2 = \frac{\pi^{1/2}}{2} \Gamma \frac{n_s^{1/2}}{k}.$$

Формула для функции отклика $Q(k, \omega)$ справедлива в пределе $\Gamma \ll 1$. При не слишком малых значениях Γ величина x_k все же достаточно велика в мере неравенства $n_s^{1/2}/k \gg 1$.

При больших значениях фундаментального параметра $\Gamma > 1$ (сильная связь) использование квазичастичного приближения для функции отклика $Q(k, \omega)$ трудно обосновать. Однако в этом пределе можно использовать гидродинамическое описание свойств электронной плазмы. В этом приближении электронная плотность

$$n(r) = \sum_l \delta(r - r_l)$$

и вектор потока $j(r) = \sum_l v_l \delta(r - r_l)$ (здесь r_l и v_l – радиус-вектор и скорость l -го электрона) удовлетворяют уравнениям

$$\dot{n} + \operatorname{div} j = 0, \quad m v_l = -\nabla U(r_l),$$

первое из которых – уравнение непрерывности, а второе – уравнение движения отдельных электронов. Функция $U(r_l)$ есть потенциальная энергия l -го электрона в поле остальных электронов и положительно заряженного фона

$$U(r_l) = \sum_{q \neq 0} \sum_{j \neq l} V(q) \exp[iq(r_l - r_j)],$$

здесь $V(q)$ – фурье-преобразование парного потенциала взаимодействия электронов.

Дифференцируя по времени уравнение непрерывности и подставляя в него уравнение движения, можно получить следующий результат (см. например, [80, с. 95]):

$$\ddot{n}_k = \sum_{q \neq 0} \frac{qk}{m} V_q n_{k-q} n_q - \sum_l (kv_l)^2 \exp(-ikr_l). \quad (18.5)$$

В сумме по q мы сохраним лишь одно слагаемое, с $q = k$. Такое приближение называется приближением случайных фаз. В результате уравнение (18.5) принимает вид

$$\ddot{n}_k + \omega_k^2 n_k = - \sum_l (kv_l) \exp(-ikr_l), \quad (18.6)$$

здесь

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 V(k) n_s}{m}. \quad (18.7)$$

Выражением в правой части (18.6) можно пренебречь, если

$$n_s V(k) \gg m\bar{v}^2 \sim T,$$

здесь \bar{v} – характерная (средняя) скорость электронов. Таким образом, в гидродинамическом приближении спектр продольных плазменных волн описывается формулой (18.7), совпадающей с формулой (18.4). Этот результат вообще очень "устойчив" и оказывается справедливым, как это будет видно ниже, и для электронного кристалла.

Предсказанный теоретически [171–173] закон дисперсии двумерных плазмонов был впервые проверен экспериментально Граймсом и Адамсом [177–178] с использованием ПЭ в жидком гелии. При этом теоретические предсказания полностью подтвердились. Такой экспериментальной возможностью благоприятствовала исключительная "чистота" системы (импульсная частота столкновений ПЭ при концентрациях $n_s \approx 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-2}$ много меньше частоты плазмона с длиной волны порядка размера экспериментальной ячейки). Соответствующие экспериментальные данные вместе с теоретическими расчетами представлены на рис. 5.1. В дальнейшем плазменные колебания наблюдались и в системе поверхностных ионов [29].

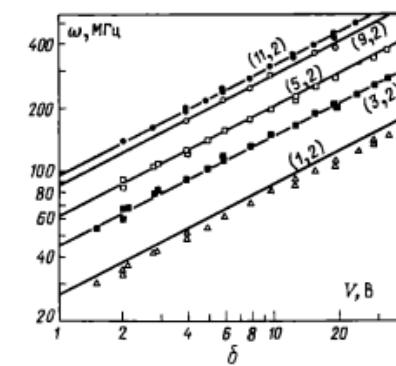
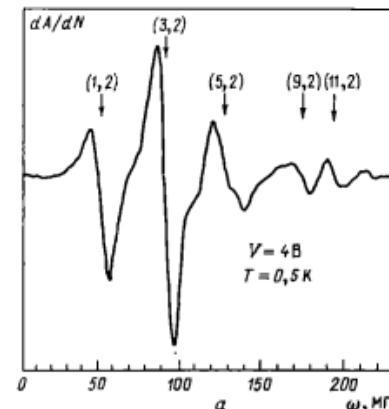


Рис. 5.1. *a* – Зависимость от частоты ω производной dA/dN поглощения ВЧ- поля системой электронов, заполняющих ячейку размерами $19 \times 12 \text{ мм}^2$. Пики поглощения отвечают возбуждению волн соответствующих порядков. Стрелками указаны положения теоретически рассчитанных собственных плазменных частот данной системы.

b – Зависимость собственных частот ω от плотности ПЭ $n_s = V (8.6 \cdot 10^6) \text{ см}^{-2}$. Сплошные линии – расчет, точки – эксперимент (Граймс, Адамс [177, 178])

Внешнее магнитное поле, перпендикулярное к поверхности, существенно изменяет структуру закона дисперсии плазменной моды. В этом случае циклотронная частота $\omega_c = eH/mc$, где c – скорость света, H – напряженность магнитного поля, ограничивает снизу спектр плазменной моды:

$$\omega_H^2(k) = \omega_c^2 + \omega_{IH}^2 = 0(k). \quad (18.8)$$

Отсюда следует, что "жесткость" электронной жидкости увеличивается с возрастанием напряженности магнитного поля.

§ 19. Вигнеровская кристаллизация двумерного электронного газа над идеально плоской поверхностью

Хорошо известно, что электронный газ в пределе больших плотностей близок к идеальному газу. Это следует из того, что средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов V_c и средняя квантово-механическая энергия K по-разному зависят от среднего расстояния между частицами r_s :

$$V_c \approx e^2/r_s, \quad K \sim \hbar^2/mr_s^2,$$

причем при $r_s \rightarrow 0$ кинетическая энергия электронов возрастает быстрее, чем потенциальная. В обычных металлах средние потенциальная и кинетическая энергии — одного порядка (здесь мы имеем промежуточный случай). При уменьшении электронной плотности (r_s увеличивается) ситуация становится обратной: кинетическая энергия убывает быстрее, и при некотором значении r_s становится много меньше V_c : $K \ll V_c$. В этом пределе электронам энергетически выгодно локализоваться в узлах некоторой гипотетической решетки, уменьшив тем самым свою потенциальную энергию. При этом увеличением кинетической энергии электронов, связанным с локализацией, можно пренебречь.

Такое состояние электронного газа низкой плотности впервые было предсказано Вигнером еще в 1934 г. [179–180]. В теории Вигнера кристаллизация электронов происходит на фоне однородно размазанного положительного заряда. Эта модель вызвала большой интерес несмотря на то, что реализовать такую систему экспериментально долгое время не удавалось. Лишь в 1971 г. Крендл и Вильямс [181] высказали предположение, что электроны на поверхности жидкого гелия в определенных условиях могут образовывать вигнеровский кристалл. Независимо от них Чаплик [60] рассмотрел возможность кристаллизации носителей заряда в инверсионных слоях полупроводников.

В случае электронов на поверхности гелия создание необходимых условий для вигнеровской кристаллизации не представляет существенных трудностей. При типичных концентрациях, $n_s \approx 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-2}$, квантово-механическая кинетическая энергия ($K < 10^{-2} \text{ K}$) оказывается существенно меньше не только потенциальной энергии V_c , но и температуры. Поэтому в данной системе средняя кинетическая энергия электронов равна их температуре T , а интенсивность взаимодействия электронов друг с другом характеризуется введенным ранее параметром $\Gamma = e(\pi n_s)^{1/2}/T$. Таким образом, поверхностные электроны в реальных экспериментальных условиях подчиняются классической статистике. Однако их кристаллизацию нельзя представить себе как кристаллизацию заряженных классических шариков. При кристаллизации электронного газа, кроме упорядочения, происходит еще одно качественное изменение в системе: локализация электронов.

Роль положительно заряженного фона в системе ПЭ над жидким гелием играет положительно заряженная металлическая пластина, подводимая к свободной поверхности гелия со стороны жидкой фазы. Эксперименты [182] свидетельствуют о равномерном распределении электронов вдоль поверхности гелия над металлической пластиной, что является надежным основанием для дальнейших теоретических построений в задаче о кристаллизации ПЭ.

Гораздо более сложным оказался поиск наблюдаемых признаков вигнеровской кристаллизации, однозначно свидетельствующих о ее существовании, так как традиционные методы обнаружения фазового перехода жидкость — кристалл в данном случае оказались неэффективными из-за малой плотности электронов. Эта проблема и ее успешное решение будут подробно рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же рассмотрим свойства двумерного электронного кристалла над идеально плоской подложкой. В гармоническом приближении свойства электронного кристалла определяются гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_l p_l^2 + \frac{1}{2} \sum_{l, m} \sum_{\alpha, \beta = x, y} \Phi_{\alpha\beta}(l, m) u_{l\alpha} u_{m\beta}, \quad (19.1)$$

где $u_l = r_l - R_l$ — вектор смещения электрона из равновесного положения R_l ; $\Phi_{\alpha\beta}$ — силовая матрица, которая выражается через потенциал взаимодействия частиц $V(r) = e^2/r$ по следующим формулам:

$$\Phi_{\alpha\beta}(l, m) = \begin{cases} -\frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} V(r) \Big|_{r=R_{lm}}, & l \neq m, \\ \sum_{n \neq l} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} V(r) \Big|_{r=R_{nl}}, & l = m. \end{cases} \quad (19.2)$$

Динамическая матрица в импульсном пространстве $D_{\alpha\beta}(k)$, собственные значения которой дают квадраты частот собственных колебаний кристалла, определяется стандартным образом:

$$D_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{m} \sum_{l'} \Phi_{\alpha\beta}(l, l') \exp(-ikR_{ll'}).$$

В общем случае выражение для квадратов частот двух фононных мод вигнеровского кристалла находится легко:

$$\omega_{l, t}^2(k) = \frac{1}{2} \{ D_{xx}(k) + D_{yy}(k) \pm [(D_{xx} - D_{yy})^2 + 4D_{xy}^2]^{1/2} \}, \quad (19.3)$$

здесь знак плюс соответствует продольным колебаниям, знак минус — поперечным. Конкретные численные расчеты силовой матрицы проводились

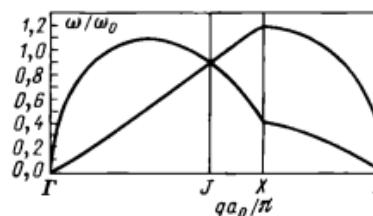


Рис. 5.2. Закон дисперсии продольных и поперечных колебаний для двумерной треугольной электронной решетки (Бонсал, Марадудин [185])

многими авторами [183–185]. Результаты работы [185] для спектров $\omega_l(k)$ и $\omega_t(k)$ приведены на рис. 5.2. В длинноволновом пределе частоты продольных и поперечных мод имеют следующий вид:

$$\omega_l^2 = \frac{2\pi e^2 n_s}{m} k, \quad \omega_t = c_t k, \quad c_t^2 = \frac{0,138 e^2 (\pi n_s)^{1/2}}{m}. \quad (19.4)$$

Таким образом, в длинноволновом пределе спектр продольных фононов

не зависит от структуры решетки и совпадает со спектром двумерных плазмонов в электронном газе (или жидкости). В то же время выражение для поперечной моды в (19.4) приведено для треугольной решетки, квадратная – оказывается неустойчивой: $c_t^2 < 0$. Для $ka \ll 1$ силовую матрицу $D_{\alpha\beta}(k)$ можно записать в терминах собственных частот ω_l и ω_t :

$$D_{\alpha\beta}(k) = \left[\omega_t^2(k)\delta_{\alpha\beta} + (\omega_t^2 - \omega_c^2) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right]. \quad (19.5)$$

В двумерной теории упругости модуль сдвига μ и коэффициент Пуассона τ определяются формулами

$$\mu = m_s c_t^2, \quad \tau = 1 - 2c_t^2/c_c^2. \quad (19.6)$$

Если для вигнеровского кристалла ввести формально скорость $c_t = \partial\omega_l/\partial k \approx k^{-1/2}$, то в пределе $ka \ll 1$ мы имеем $c_t \gg c_c$. Откуда следует, что в рамках теории упругости вигнеровский кристалл следует считать несжимаемым с $\tau \approx 1$. Важный результат в динамике электронного кристалла был получен Морфом [186], который рассчитал температурную зависимость модуля сдвига $\mu(T)$, обусловленную ангармонизмами. Согласно [186], не слишком близко к фазовому переходу зависимость $c_t^2(T)$ имеет следующий (линейный) вид:

$$c_t^2(T) = c_t^2(0) \left(1 - 30,8 \frac{T}{c^2(\pi m_s)^{1/2}} \right), \quad (19.7)$$

где $c_t^2(0)$ определяется формулой (19.4). Более точная зависимость $\mu(T)$ приведена на рис. 5.3 [186].

Закон дисперсии фононных ветвей двумерного вигнеровского кристалла должен сильно изменяться в присутствии магнитного поля, перпендикулярного кристаллу, поскольку он состоит из легких заряженных

частиц. Формально в исходном гамильтониане (19.1) следует произвести замену операторов \hat{p}_l на операторы $\hat{\pi}_l = \hat{p}_l - (e/c)A$, где A – векторный потенциал магнитного поля. Это приводит к тому, что в уравнения движения для фурье-компонент u_k следует приписать дополнительную силу $F = i(e/c)\omega [Hu_k]$. Таким образом, магнитное поле приводит к связыванию длинноволновых продольных и поперечных колебаний кристалла. Выражение для закона дисперсии колебаний кристалла в магнитном поле было впервые получено Чапликом [60]:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_l^2 + \omega_t^2 + \omega_c^2 \pm [(\omega_l^2 + \omega_t^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_l^2 \omega_t^2]^{1/2} \}, \quad (19.8)$$

здесь $\omega_l(k)$ и $\omega_t(k)$ определены ранее в (19.3), (19.4). Из выражения (19.8) следует, что высокочастотная мода $\omega_+(k)$ ограничена снизу циклотронной частотой $\omega_c(k) \geq \omega_c$, а низкочастотная $\omega_-(k)$ в пределе $\omega_c \gg \omega_l$ имеет асимптотику

$$\omega_-(k) \approx \frac{\omega_l(k) \omega_t(k)}{\omega_c} \sim k^{3/2}. \quad (19.9)$$

Из последней формулы следует, что частота $\omega_-(k)$ понижается с увеличением напряженности магнитного поля.

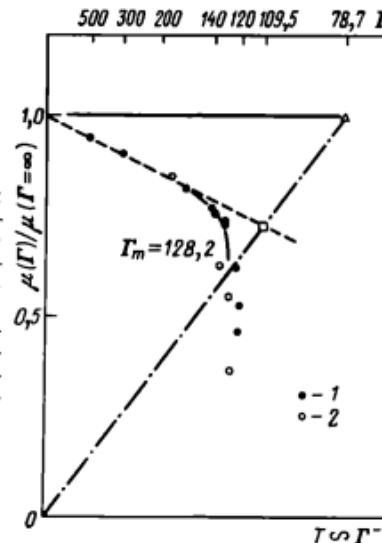
При изучении свойств двумерных кристаллов трудно обойти вопрос о среднеквадратичных смещениях $\langle u^2 \rangle$ частиц, образующих решетку. Действительно, рассмотрим формулу, связывающую $\langle u^2 \rangle$ с законом дисперсии коллективных мод:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mN} \sum_{k, p} \frac{1}{\omega_p(k)} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_p(k)}{2T}, \quad p = l, t. \quad (19.10)$$

При подстановке в нее выражений (19.4) и после перехода от суммирования по k к интегрированию мы видим, что для поперечной моды $\omega_t = c_t k$ соответствующий интеграл расходится на нижнем пределе, если температура системы отлична от нуля. Это довольно известное утверждение (см., например, [187]), которое связано с запретом на появление дальнего порядка в системах с одномерной и двумерной периодичностью. Так, например, в двумерной решетке корреляционная функция флуктуаций плотности в точках r_1 и r_2 стремится к нулю в пределе $|r_1 - r_2| \rightarrow \infty$ при любой отличной от нуля температуре. В трехмерной решетке она стремится к конечному значению, что соответствует наличию дальнего порядка. Однако убывание корреляционной функции в двумерном кристалле оказывается степенным, а не экспоненциальным, как это имеет место в жидкой фазе. Причем показатель степени α убывает с уменьшением температуры: $\alpha \sim T$ [187].

Приведенные выше утверждения справедливы для кристаллов бесконечных размеров. Для любой системы разумных размеров (например, $L \sim 1$ см) ситуация оказывается не столь катастрофической. Дело в том, что расходимость величины среднеквадратичных смещений для двумерного кристалла оказывается логарифмической и при подстановке в соответствующий интеграл по k в качестве нижнего предела интегрирования ве-

Рис. 5.3. Температурная зависимость модуля сдвига μ для двумерной электронной решетки. Точки отвечают числовым расчетам с использованием подхода молекулярной динамики (вариант 1 – нагрев, вариант 2 – охлаждение кристалла). Сплошная линия, оканчивающаяся в точке $\Gamma_m = 128,2$, получена в приближении ренорм-группы с использованием линейной экстраполяции для температурной зависимости модуля сдвига (штриховая линия). Критическая величина $\Gamma = 78,7$, полученная Таулесом [195] и отмеченная на рис. 5.3 треугольником, возникает при использовании в качестве модуля сдвига его значения при $T = 0$ (Морф [186]).



личины $k_0 = 2\pi/L$ числовое значение $\langle u^2 \rangle$ в определенных условиях оказывается достаточно малым. Действительно, подстановка формул (19.4) в выражение (19.10) с использованием дебаевского приближения ($k_{\max} = k_m = (4\pi n_s)^{1/2}$) приводит к результату

$$\langle u^2 \rangle = \langle u_0^2 \rangle + \frac{T}{2\pi m n_s c_t^2} \ln \left[\frac{1 - \exp(-\hbar\omega_{t,m}/T)}{1 - \exp(-\hbar\omega_{t,0}/T)} \right], \quad (19.11)$$

где

$$\begin{aligned} \langle u_0^2 \rangle &= \frac{\hbar\omega_{t,m}}{4\pi m n_s c_t^2} + \frac{\hbar k_m^2}{6\pi m n_s \omega_{l,m}}, \\ \omega_{t,m} &= \omega_t(k_m), \quad \omega_{t,0} = \omega_t(k_0), \quad \omega_{l,m} = \omega_l(k_m) \gg T/\hbar. \end{aligned} \quad (19.11a)$$

Из формулы (19.11) следует, что логарифмически расходящееся слагаемое пропорционально T и "вымерзает" при уменьшении температуры системы. Оценки показывают, что при $T \sim 0,1$ К и $n_s \approx 10^8$ см⁻² вклад тепловых колебаний в величину $\langle u^2 \rangle$ сравнивается по порядку величины с вкладом нулевых колебаний $\langle u_0^2 \rangle$.

При наличии магнитного поля, перпендикулярного кристаллу, непосредственная подстановка выражения для мягкой моды $\omega_-(k)$ из (19.9) в формулу (19.10) может привести к неожиданному результату: магнитное поле плавит вигнеровский кристалл [188]. Использовав метод функций Грина, Фукуяма [189] получил совершенно противоположный результат: магнитное поле стабилизирует электронную решетку. Дальнейшие исследования в этом направлении [190–192] в основном подтвердили справедливость заключений Фукуямы [189]. Суть проблемы заключается в том, что при наличии магнитного поля простая формула (19.10) теряет силу. Чтобы в этом убедиться, запишем гамильтониан электронного кристалла в магнитном поле (калибровка $A = (0, Hx, 0)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_k \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{p=l,t} (|P_k^{(p)}|^2 + m^2 \omega_p^2 |Q_k^{(p)}|^2) + \right. \\ \left. + \frac{m\omega_c^2}{2} |Q_k^{(l)}|^2 - \omega_c Q_k^{(l)} P_k^{(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (19.12)$$

где $Q_k^{(p)}$ и $P_k^{(p)}$ – обобщенные координаты и импульсы продольных ($p = l$) и поперечных ($p = t$) мод при $\omega_c = 0$. В отличие от традиционной динамики кристаллов гамильтониан (19.12) содержит произведение обобщенной координаты на обобщенный импульс и, следовательно, не диагонализируется простым поворотом обобщенных координат.

Гамильтониан (19.12) можно привести к стандартному виду, если расширить класс канонических преобразований: поменять местами координаты и импульсы поперечной моды ($p = t$) и оставить без изменения переменные продольной моды ($p = l$). После этого гамильтониан диагонализируется ортогональным поворотом новых обобщенных координат $\Phi_k^{(p)}$ ($\Phi_k^{(t)} = P_k^{(t)} / (m\omega_t)$). Теперь величина $|u_k^2|$ (u_k – фурье-компоненты u_l) не равна сумме $|\Phi_k^{(l)}|^2 + |\Phi_k^{(t)}|^2$, как было раньше, а опре-

деляется формулой [192]

$$|u_k|^2 = |\Phi_k^{(l)}|^2 + \frac{|\Pi_k^{(t)}|^2}{m^2 \omega_t^2},$$

где $\Pi_k^{(t)}$ – обобщенный импульс, соответствующий $\Phi_k^{(t)}$. Отсюда для величины $\langle u^2 \rangle$ можно получить следующее выражение:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mN} \sum_k \sum_{p=\pm} \frac{2\omega_p^2 - \omega_l^2 - \omega_t^2}{\omega_p^4 - \omega_l^2 \omega_t^2} \omega_p \operatorname{ctn} \frac{\hbar\omega_p(k)}{2T}. \quad (19.13)$$

Эта формула фактически совпадает с результатом Фукуямы [189]. Однако при анализе формулы (19.13) не всегда можно ограничиться рассмотрением предельного случая $T = 0$, как это было сделано в [189]. При любых конечных температурах в достаточно сильных магнитных полях имеем $\hbar\omega_- \ll T$, и величина $\langle u_-^2 \rangle$, соответствующая моде $p = -$, перестает зависеть от напряженности магнитного поля:

$$\langle u_-^2 \rangle = \frac{T}{mN} \sum_k \left(\frac{1}{\omega_l^2} + \frac{1}{\omega_t^2} \right).$$

Последний вывод объясняет результат, полученный ранее Рахмановым [193], который утверждал, что магнитное поле не влияет на величину среднеквадратичных смещений вигнеровского кристалла. Фактически поле H уменьшает амплитуду нулевых колебаний, но не влияет на тепловые колебания.

Большой интерес представляет вопрос о механизмах плавления вигнеровского кристалла. В трехмерном случае точка фазового перехода жидкость – кристалл хорошо описывается эмпирическим критерием Линденмана

$$\langle u^2 \rangle / a^2 < \delta_0^2, \quad (19.14)$$

где δ_0 – некоторый числовой параметр, обычно равный 0,13. Для двумерного вигнеровского кристалла теоретические и экспериментальные данные свидетельствуют в пользу дислокационного механизма плавления [194]. Для плоских двумерных систем дислокации не имеют длины и их упругая энергия при достаточно высоких температурах может оказаться меньше энтропийного слагаемого в свободной энергии отдельной дислокации

$$F = U - TS. \quad (19.15)$$

Энтропия, связанная с дислокацией S , и ее упругая энергия U в приближении теории упругости имеют вид

$$U = \frac{\mu b^2 (1 + \tau)}{8\pi} \ln \frac{A}{A_0}, \quad S = \ln \frac{A}{A_0}, \quad (19.16)$$

где b – вектор Бюргерса, A – площадь кристалла, A_0 – площадь одной элементарной ячейки, μ и τ определяются (19.6). В условиях $F \approx 0$ в системе с вероятностью, близкой к единице, появляются термоактивированные дислокации, разрушающие дальний порядок. Ввиду того что величина $\ln(A/A_0)$ велика, этот переход является достаточно резким. Температура

T_c , при которой свободная энергия отдельной дислокации обращается в нуль, в данной теории отождествляется с температурой плавления двумерного кристалла. Согласно теории Костерлица и Таулиса [194] при температурах $T < T_c$ все дислокации могут существовать лишь в виде связанных пар (так называемые дислокационные диполи), упругое поле которых быстро убывает с расстоянием, а упругая энергия достаточно мала. В точке фазового перехода происходит расспаривание дислокаций, сопровождающееся разрушением кристалла.

Подставляя в формулу для свободной энергии (19.15) величины μ и t из (19.6) и используя уравнение $F = 0$, легко можно найти выражение для температуры плавления двумерного электронного кристалла [195]:

$$T_c = n_s a^2 m c_t^2 / 4\pi. \quad (19.17)$$

Для c_t из (19.4) при $T = 0$ можно получить оценку параметра Γ в точке плавления: $\Gamma = 78,7$ [195]. Экспериментальное значение $\Gamma = 137 \pm 15$. Учет температурной зависимости $c_t(T)$, связанной с ангармонизмами, приводит к теоретической оценке $\Gamma = 140 \pm 16$ [186], более близкой к экспериментальной.

В целях сравнения имеет смысл привести выражение для температуры плавления электронного кристалла в рамках критерия Линдемана. Подставляя выражение (19.11) в формулу (19.14), получаем уравнение для критической температуры:

$$T_c \ln \frac{T_c}{\hbar \omega_{r,0}} = 2\pi n_s a^2 m c_t^2 \left(\delta_0^2 - \frac{\langle u_0^2 \rangle}{a^2} \right). \quad (19.18)$$

Отсюда следует, что определения температуры плавления (19.17) и (19.18) качественно отличаются лишь наличием дополнительной логарифмической зависимости от T_c в формуле (19.18). С увеличением концентрации электронов отношение $\langle u_0^2 \rangle / a^2$ возрастает пропорционально $n_s^{1/4}$. Поэтому при достаточно больших n_s согласно (19.18) даже при $T = 0$ должно возникать плавление вигнеровского кристалла. Однако разумность критерия Линдемана в этой области параметров не ясна.

§ 20. Электронный кристалл над реальной поверхностью гелия

Изучение особенностей поведения электронной решетки на "мягкой" подложке было начато в работах [196–198]. В этих работах было отмечено, в частности, что высокочастотная часть спектра кулоновского кристалла на поверхности гелия должна приобретать порог деформационного происхождения:

$$\tilde{\omega}_p^2 = \omega_\xi^2 + \omega_p^2, \quad p = l, t. \quad (20.1)$$

Здесь ω_p – продольная и поперечная части спектра решетки на плоской подложке (см. определение ω_p (19.4)), ω_ξ – пороговая частота деформационного происхождения, возникающая по тем же причинам, что и собственная частота отдельного электрона, локализованного в лунке.

В области низких частот деформационные лунки под каждым из локализованных электронов начинают успевать подстраиваться к движению

электронов. В результате низкочастотная часть спектра должна иметь "плоский" вид (19.4) с перенормированным значением массы. Например, продольная часть спектра приобретает вид [199]

$$\omega_l^2 \approx 2\pi e^2 n_s q / m^*, \quad (20.2)$$

где m^* имеет структуру M из (15.32) с заменой $k \rightarrow n_s^{1/2}$.

Другой интересный эффект, описанный в работах [196, 197], связан с возможностью возбуждения электронной решеткой, находящейся под воздействием переменного электрического поля, нормального поверхности гелия, стоящих капиллярных волн. При этом, например, на частотах $\omega_{n,m}$,

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^3 (n^2 + m^2 + nm)^3, \quad (20.3)$$

имеющих место для треугольной решетки, возбуждение капиллярных волн приобретает резонансный характер. Необходимым условием возникновения резонансов на частотах (20.3) является периодичность в электронной системе. В связи с этим обстоятельством резонансы $\omega_{n,m}$ (20.3) могут использоваться для обнаружения кулоновской кристаллизации.

Дальнейшие исследования подтвердили важную роль деформационных эффектов на поверхности жидкого гелия, сопутствующих вигнеровской кристаллизации электронов. Именно на этом пути был достигнут успех в проблеме регистрации фазового перехода жидкость – кристалл в двумерной электронной системе.

В 1979 г. Граймс и Адамс [200], воздействуя на систему поверхностных электронов быстропеременным электрическим полем, параллельным поверхности гелия, обнаружили серию резонансов на кривой зависимости поглощения энергии от частоты внешнего поля (рис. 5.4, а). Эти резонансы появлялись при температурах, меньших некоторой критической температуры T_c , однозначно связанной с концентрацией электронов, $T_c \propto n_s^{1/2}$. Положение двух из наблюдавшихся резонансов не зависело от температуры и хорошо описывалось формулой (20.3). Наблюдались также резонансы, не соответствующие набору (20.3), положение которых зависело от температуры. Объяснение этих результатов было дано в сопутствующей теоретической работе Фишера, Халперна и Платцмана [201]. В этой работе был сделан следующий серьезный шаг в понимании особенностей фононного спектра двумерного электронного кристалла, взаимодействующего с жидкостью подложкой. Оказалось, что электрон-риплонное взаимодействие в задаче о спектре коллективных возбуждений вигнеровского кристалла приводит к связыванию электронных и риплонных колебаний. При этом спектр связанных фонон-риплонных мод в условиях сильной связи разделяется на высокочастотные (оптические) ветви с $\omega > \omega_\xi$ и низкочастотные (акустические) ветви, ограниченные сверху наименьшей частотой из набора (20.3). В промежуточной области спектр связанных мод кристалла группируется вблизи частот $\omega_{n,m}$ из (20.3). Таким образом, связывание электрон-риплонных мод, обнаруженное в [201], привело к возникновению единобразной картины влияния деформационных явлений на структуру спектра ВК на жидкой подложке, содержащей в частности, все ка-

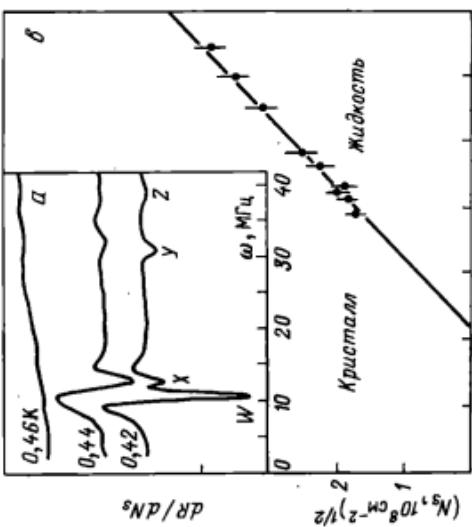
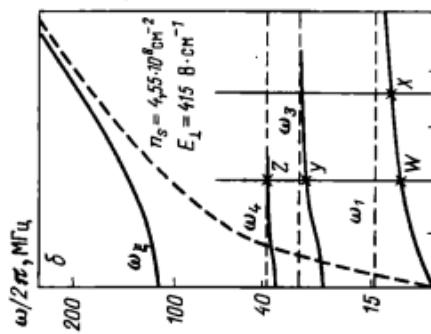


Рис. 5.4. а (врезка) – обнаружение существования вигнеровской кристаллизации в электронной системе на поверхности жидкого гелия (Граймс, Адамс [200]).
б – Закон дисперсии $\omega(k)$ связанных электронов, полученный Финсром и др. [201]. Штриховыми линиями нанесены закон дисперсии двумерных плазмонов на плоской подложке, а также положения дискретных частот $\omega \sim (20.3)$ либо (20.12), ω_c из (20.1). Вертикальные линии отвечают волновым числам, возбуждавшимся в [200] резонансом (см. [201]).
в – Часть фазовой диаграммы, полученная в ходе эксперимента [200]. Отчетливо видна зависимость $T_c \propto n_s^{1/2}$. Наклон линий позволяет найти критическое значение $\Gamma = 137 \pm 15$ [200]



чественные особенности (20.1)–(20.3), перечисленные выше. Схема продольной части спектра связанных электрон-риплонных колебаний из [201] приведена на рис. 5.4, б. Следуя трактовке [201], резонансы Граймса – Адамса [200] отвечают возбуждению связанных фонон-риплонных мод.

Экспериментальное наблюдение резонансов Граймса – Адамса и температуры, при которых эти резонансы возникли, позволило сделать однозначное заключение о возникновении в электронной системе на поверхности гелия кулоновского упорядочения и построить часть фазовой диаграммы этого перехода (см. рис. 5.4, в). Предполагаемой точке фазового перехода отвечало значение фундаментального параметра Γ , равное 137 ± 15 и находящееся в хорошем согласии с предсказаниями дислокационной теории плавления вигнеровского кристалла, учитывающей поправки Морфа (см. [186] и рис. 5.3).

Следует отметить, что в своем первоначальном виде теория связанных фонон-риплонных колебаний из [201] содержала ряд упрощающих предположений (введение обрезающих факторов, отсутствие магнитного поля и т.д.). Кроме того, в этой работе оказался невыявленным ряд дополнительных особенностей импеданса вигнеровской решетки на жидкой подложке. Последующие исследования в этой области, выполненные в [202–204], существенно расширили первоначальные представления [201] о поведении ВК над гелием во внешних полях. Ниже, излагая основные результаты теории фонон-риплонных резонансов вигнеровского кристалла на жидкой подложке, мы будем придерживаться схемы [202–204].

20.1. Появление деформационных эффектов, сопутствующих вигнеровской кристаллизации, связано с тем, что электронная плотность $n_s(r)$ в кристаллическом состоянии является периодической (микроскопически неоднородной) функцией двумерного радиус-вектора. Напомним, что в газе электронов, описываемых плоскими волнами, электронная плотность однородна $n_s(r) = \text{const}$. При $T = 0$ периодическую функцию $n_s(r)$ можно разложить в ряд по векторам обратной решетки

$$n_s(r) = \sum_g n_g \exp(igr), \quad n_g = n_s \exp(-g^2 \langle u_0^2 \rangle / 4), \quad (20.4)$$

$\langle u_0^2 \rangle$ – величина среднеквадратичных смещений электронов, обусловленная нулевыми колебаниями. В формуле (20.4) проведено усреднение по быстрым нулевым колебаниям, характерные частоты которых $\omega_i (k_m)$ многое больше соответствующих капиллярных частот.

Деформация поверхности гелия обусловлена наличием электрон-риплонного взаимодействия, гамильтониан которого в случае электронного кристалла, согласно (9.13), имеет вид

$$\hat{H}_{e-r} = \sum_l \sum_q \xi_q V_q \exp[iq(R_l + u_l)], \quad (20.5)$$

здесь R_l – радиус-вектор узла l ; ξ_q и V_q – из (8.6) и (9.14).

Чтобы понять основные закономерности динамики электронного кристалла, взаимодействующего с "мягкой" подложкой, рассмотрим сначала наиболее простой предельный случай $T = 0$ и будем считать, что внешнее ведущее поле, параллельное поверхности гелия, является однородным. После усреднения по "нулевым" колебаниям гамильтониан взаимодействия

вия (20.5) принимает вид

$$\hat{H}_{e-r} = N \sum_g \xi_g F_g V_g \exp(igu), \quad (20.6)$$

где

$$F_g = \exp(-g^2 \langle u_0^2 \rangle / 4), \quad (20.7)$$

u — смещение электронного кристалла как целого во внешнем переменном ведущем поле E_{\parallel} . Используя это выражение и учитывая вид гамильтониана свободных риплонов, нетрудно получить уравнения движения, определяющие u и ξ_g [202]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{g} (\ddot{\xi}_g + 2\gamma_g \dot{\xi}_g + \omega_g^2 \xi_g) + V_{-g} n_s F_g \exp(-igu) &= 0, \\ m_e \ddot{u} + i \sum_g \xi_g g V_g F_g \exp(igu) &= eE_{\parallel}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Эти уравнения нелинейны. Поэтому в общем случае их решение следует искать в виде

$$\xi_g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_{ng} \exp(in\omega t), \quad u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \exp(in\omega t). \quad (20.9)$$

Если же ограничиться линейным приближением, считая ведущее поле E_{\parallel} слабым настолько, что $gu \ll 1$, то в формулах (20.9) можно оставить слагаемое только с $n = 0, \pm 1$. Из первого уравнения (20.8) в этом приближении находим

$$\begin{aligned} \xi_{0,g} &= -\frac{gn_s F_g V_g}{\rho \omega_g^2}, \quad g = |g| \quad (n = 0), \\ \xi_{n,g} &= -\frac{gn_s F_g V_g}{\rho \Delta_{n,g}} igu_n \quad (n = \pm 1), \end{aligned} \quad (20.10)$$

где

$$\Delta_{n,g} = n^2 \omega^2 - \omega_g^2 - 2in\omega\gamma_g.$$

Величина $\xi_{0,g}$ соответствует статической деформации поверхности гелия под локализованными электронами, которая существует и при $u = 0$; $\xi_{n,g}$ — возмущение поверхности гелия, вызванное смещением кристалла во внешнем поле. Уравнение движения электронного кристалла в линейном приближении имеет вид

$$-m_e \ddot{u}_n + i \sum_g g F_g V_g \{ \xi_{n,g} + igu_n \xi_{0,g} \} = eE_n. \quad (20.11)$$

Прежде чем выписать окончательное решение этого уравнения, удобно ввести следующие обозначения. Условимся последовательность абсолютных значений векторов g и соответствующих им частот ω_g нумеровать целочисленным индексом ($\tilde{n} = 1, 3, 4, 7, \dots$) в порядке их возрастания:

$\omega_{\tilde{n}}$ и $\omega_{\tilde{n}}$. Для треугольной решетки:

$$\omega_{\tilde{n}}^2 = \frac{\alpha}{\rho} g_{\tilde{n}}^3, \quad g_{\tilde{n}}^2 = \tilde{n} g_1^2, \quad g_1^2 = 8\pi n_s / 3^{1/2}, \quad \tilde{n} = n^2 + m^2 + nm, \quad (20.12)$$

где $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; эти частоты аналогичны ω_{nm} из (20.3).

Подставляя в уравнение (20.11) выражения для $\xi_{n,g}$ и $\xi_{0,g}$ из (20.10) и ограничиваясь первой гармоникой u_1 (линейное приближение), получим

$$-m_e \omega^2 Z(\omega) u_1 = eE_1. \quad (20.13)$$

Функция $Z(\omega)$ характеризует отклик электронного кристалла на однородное внешнее возмущение. Ее диссипативная часть сильно зависит от типа гидродинамики (поверхностной [112] или объемной [110]), используявшаяся при получении уравнения для ξ_g . Первое из уравнений (20.8) записано для случая обычной объемной гидродинамики. Однако при низких температурах диссипативные процессы необходимо описывать поверхностной гидродинамикой Андреева — Компанейца [112]. При использовании этой гидродинамики выражение для $Z(\omega)$ имеет наиболее простой вид [202]:

$$Z(\omega) = 1 + \sum_{\tilde{n}} \frac{c_{\tilde{n}} \omega_{\tilde{n}}^2}{\omega_{\tilde{n}}^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_{\tilde{n}}}, \quad (20.14)$$

здесь

$$c_{\tilde{n}} = \frac{3n_s |E_g V_g|^2}{\omega m_e \omega_{\tilde{n}}^2} \sum_{|g|=g_{\tilde{n}}} 1/6, \quad \gamma_{\tilde{n}} = \gamma_g^{(s)} \quad \text{при } g = g_{\tilde{n}},$$

$\gamma_{\tilde{n}}^{(s)}$ — коэффициент затухания капиллярных волн. Соответствующее выражение для $Z(\omega)$ в объемной гидродинамике отличается от (20.14) лишь наличием дополнительного мнимого слагаемого $-2i\omega_{\tilde{n}}^2 \gamma_{\tilde{n}}/\omega$ в числителе дроби.

Коэффициенты $c_{\tilde{n}}$ характеризуют степень связи электронов с риплонами. Оценки показывают, что в реальных экспериментальных условиях $n_s \approx 10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-2}$ числовое значение коэффициента c_1 оказывается довольно большим, $c_1 \approx 10^2$ (связь сильная). Поэтому на низких частотах $\omega < \omega_1$ согласно (20.14) электроны движутся, как свободные частицы, $Z(\omega) \approx 1 + \sum_{\tilde{n}} c_{\tilde{n}} = \text{const}$, с некоторой эффективной массой

$$M = m_e (1 + \sum_{\tilde{n}} c_{\tilde{n}}) \equiv m_e Z(0), \quad (20.15)$$

существенно превышающей массу свободного электрона. Это означает, что на низких частотах, $\omega \ll \omega_1$, деформация поверхности гелия успевает следить за перемещением электронов и приводит к перенормировке их массы. В обратном предельном случае, $\omega \gg \omega_1$ (высокие частоты),

$$(\omega) \approx 1 - \omega_{\xi}^2 / \omega^2, \quad \omega_{\xi}^2 = \sum_{\tilde{n}} c_{\tilde{n}} \omega_{\tilde{n}}^2. \quad (20.16)$$

В этом случае уравнение (20.13) превращается в осциллярное с характерной частотой ω_{ξ} , соответствующей частоте колебаний электрона в стати-

ческой деформационной лунке $\xi_{0,g}$. В этом пределе деформационный рельеф не успевает следить за перемещением электронов.

В результате этого анализа становится понятным, какой вид должна иметь структура спектра коллективных возбуждений вигнеровского кристалла, взаимодействующего с мягкой подложкой. Закон дисперсии низкочастотных $\omega \ll \omega_1$ фононных мод электронного кристалла должен быть подобен закону дисперсии кристалла над плоской подложкой (см. (19.4)) с заменой $m \rightarrow M$. Отношение $(m/M)^{1/2}$ в типичных экспериментальных условиях оказывается довольно малым (порядка 0,1). Высокочастотные фононные моды кристалла $\omega \gg \omega_1$ должны иметь предельную частоту, равную ω_ξ из (20.16). Так как числовое значение коэффициента $c_1 \approx \approx 10^2$, то, следовательно, $\omega_\xi \gg \omega_1$. Последнее неравенство позволяет законным образом разделить колебания электронного кристалла на быстрые $u_f(\omega \gtrsim \omega_\xi)$ и медленные $u_s(\omega \leq \omega_1)$. Таким образом, электрон-риплонное взаимодействие приводит к разрыву фононных мод вигнеровского кристалла на низкочастотные и высокочастотные (оптические). Физически это обусловлено тем, что рассматриваемая решетка стала в некотором смысле сложной. В одной элементарной ячейке находится две "частицы": электрон и деформационная лунка.

20.2. Зная структуру фононных мод электронного кристалла на поверхности жидкого гелия при $T = 0$, можно приступить к более строгому определению ее в общем случае: $T \neq 0$. Специфика конечных температур заключается в том, что, как отмечалось выше (см. комментарии к (19.10)), величина $\langle u^2 \rangle$ начинает расходиться на малых значениях волновых чисел. Если учесть конечность системы, то основной вклад в $\langle u^2 \rangle$ дают низкочастотные колебания электронов и, следовательно, описанная выше процедура усреднения по быстрым модам неприменима. Естественно предположить, что роль обрезающего фактора в $\langle u^2 \rangle$ может взять на себя предельная частота ω_ξ из (20.1). В условиях $\omega_\xi \gg \omega_1$ усреднение по быстрым модам u_f легко проводится. При этом полученные выше формулы оказываются справедливыми, если в них F_q заменить следующим выражением:

$$F_q = \exp(-q^2 \langle u_f^2 \rangle / 4). \quad (20.17)$$

Проблема заключается в строгом определении величины $\langle u_f^2 \rangle$. В пределе сильной связи $\langle u_f^2 \rangle$ выражается через ω_ξ следующим образом:

$$\langle u_f^2 \rangle \approx \langle u_0^2 \rangle + u_T^2 \ln \frac{T}{\hbar \omega_\xi}, \quad (20.18)$$

где $\langle u_0^2 \rangle$ – из (19.11a); $u_T^2 = T/(2\pi m n_s c_f^2)$.

Подробный анализ [204] показывает, что уравнения (20.11) и (20.13) справедливы не только для низкочастотных мод u_s с $\omega < \omega_1$ (по смыслу усреднения), но и для высокочастотных, оптических мод. В последнем случае процедура усреднения уравнений движения и появление дополнительного фактора F_q представляют собой неявный учет ангармонизмов в электрон-риплонном взаимодействии. В результате соотношение (20.16) с учетом определения (20.17) переносится и на случай конечных температур.

Таким образом, соотношения (20.16) и (20.18) представляют собой полную систему для определения ω_ξ и $\langle u_f^2 \rangle$. Решая ее, находим [204]

$$\begin{aligned} \omega_\xi^2 &= B \omega_1^2 \exp(-g_1^2 \langle u_f^2 \rangle / 2), \\ \langle u_f^2 \rangle &= [\langle u_0^2 \rangle + u_T^2 \ln(T/(\hbar \omega_1 \sqrt{B}))](1 - g_1^2 u_T^2 / 4)^{-1}, \end{aligned} \quad (20.19)$$

где

$$B = 3n_s V_{g_1}^2 / (\alpha m \omega_1^2). \quad (20.20)$$

В отличие от теории [201] определение $\langle u_f^2 \rangle$ из (20.19) не содержит подгоночных параметров. Поэтому представляется интересным сравнить полученные результаты с имеющимися экспериментальными данными. Для того чтобы положение резонансных частот в теории [201] совпало с экспериментальными результатами Граймса и Адамса [200], авторы [201] положили $F_g^2 = 0,23$ при $T = 0,4$ К и $n_s = 4,4 \cdot 10^8$ см⁻², выбрав соответствующим образом подгоночный параметр. В тех же экспериментальных условиях самосогласованная теория (20.19) с учетом зависимости $c_f(T)$ из [186] дает следующую оценку: $F_g^2 \approx 0,25$, которая хорошо согласуется с экспериментальной.

Уравнения (20.11) и (20.13) получены для однородного ведущего поля ($k \rightarrow 0$). В неоднородном случае в уравнение (20.13) следует добавить упругие слагаемые, описываемые силовой матрицей $D_k^{\alpha\beta}$ из (19.5). При этом скорость энергетических потерь в системе, \dot{W} , можно представить в следующем виде [203]:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= N(eE_k)^2 \omega^3 m^{-1} |D(\omega, k)|^{-2} \operatorname{Im} Z[\omega^4 (\operatorname{Im} Z)^2 + \\ &+ (\omega^2 \operatorname{Re} Z - D_k^{yy})^2 + |D_k^{xy}|^2 + \omega^2 \omega_c^2], \end{aligned} \quad (20.21)$$

где

$$D(\omega, k) = [Z(\omega) \omega^2 - \omega_l^2] [Z(\omega) \omega^2 - \omega_t^2] - \omega^2 \omega_c^2, \quad (20.22)$$

N – полное число электронов.

Закон дисперсии связанных фонон-риплонных колебаний определяется из уравнения

$$\operatorname{Re} D(\omega, k) = 0. \quad (20.23)$$

В отсутствие магнитного поля, $\omega_c = 0$, из (20.23) строго выводится выражение (20.1) для спектра оптических мод, а также соотношение

$$\omega_{s,p}^2(k) = \omega_1^2 \omega_p^2(k) [\omega_p^2(k) + c_1 \omega_1^2]^{-1} \quad (p = I, R), \quad (20.24)$$

определенное закон дисперсии низкочастотных мод ($\omega_p(k)$ – решение плоской задачи). Видно, что величина $\omega_{s,p}$ ограничена сверху предельной частотой ω_1 . Существование связанных мод вблизи частот ω_n с $\tilde{n} \geq 3$ проблематично, так как в пределе сильной связи, $c_1 \gg 1$, даже слабое затухание риплонов, $\gamma_{\tilde{n}} \sim 0,1 \omega_{\tilde{n}}$, приводит к тому, что величина $\operatorname{Re} D$ не обращается в нуль и оказывается порядка нерезонансных слагаемых [203].

Исследуем теперь структуру электрон-риплонных резонансов, даваемую формулой (20.21). На частотах $\omega < \omega_1$ она определяется условием обращения в нуль реальной части $D(\omega, k)$, много большей $\operatorname{Im} D$ в нере-

резонансной ситуации. Другими словами, низкочастотные резонансы обусловлены возбуждением плазмон-риплонных мод, спектр которых приведен на рис. 5.4. Геометрия экспериментальной ячейки [200] задавала вполне определенные дискретные значения волнового вектора k_j ($j = 1, 2, \dots$). Резонансные частоты определяются формулой (20.24) с $p = l$ и $k = k_j$. Область существования связанных мод $\Delta\omega_{\tilde{n}}$ вблизи следующих капиллярных частот, $\omega_{\tilde{n}}$, в пределе сильной связи очень мала и экспоненциально убывает с ростом номера \tilde{n} : $\Delta\omega_{\tilde{n}}/\omega_{\tilde{n}} \sim c_{\tilde{n}}/c_1$. Более того, при учете затухания риплонов она вообще исчезает. Поэтому для объяснения резонансов Граймса – Адамса на частотах $\omega_{\tilde{n}}$ с $\tilde{n} > 3$ следует обратить внимание на множитель $\text{Im } Z$ в выражении для скорости энергетических потерь \dot{W} из (20.21).

Согласно (20.14) вблизи частот $\omega_{\tilde{n}}$ величина $Z(\omega)$ также содержит резонансные знаменатели:

$$(\text{Im } Z)_{\tilde{n}} \approx \frac{c_{\tilde{n}}}{2} \frac{\delta_{\tilde{n}}}{\epsilon_{\tilde{n}}^2 + \delta_{\tilde{n}}^2}, \quad (\text{Re } Z)_{\tilde{n}} \approx \frac{c_{\tilde{n}}}{2} \frac{\epsilon_{\tilde{n}}}{\epsilon_{\tilde{n}}^2 + \delta_{\tilde{n}}^2}, \quad (20.25)$$

где

$$\epsilon_{\tilde{n}} = (\omega_{\tilde{n}} - \omega)/\omega_{\tilde{n}}, \quad \delta_{\tilde{n}} = \gamma_{\tilde{n}}/\omega_{\tilde{n}}.$$

Появление множителя $\text{Im } Z$ в выражении для скорости энергетических потерь обусловлено тем, что \dot{W} определяется не только амплитудой колебаний кристалла, но и значением фазы колебаний по отношению к фазе ведущего переменного поля. На частоте $\omega = \omega_1$ в условиях сильной связи резонанс фазы колебаний кристалла, $\text{Im } Z \rightarrow \infty$, точно компенсируется антирезонансом амплитуды (реальная часть $Z(\omega)$, входящая в $D(\omega, k)$, резко возрастает). В условиях, когда связанные моды существовать не могут ($\omega = \omega_{\tilde{n}}$ с $\tilde{n} \geq 3$), отсутствует и антирезонанс амплитуды колебаний, $|\text{Re } Z| \sim c_1 \gg 1$ и, следовательно, единственной причиной резонансного изменения \dot{W} являются резонансы фазы, $\text{Im } Z \rightarrow \infty$. Резонансы фазы существуют, пока мало затухание капиллярных волн. Интенсивность их согласно (20.25) убывает с ростом номера \tilde{n} .

20.3. Интересной оказывается структура связанных электрон-риплонных мод вигнеровского кристалла ПЭ в магнитном поле, нормальном к поверхности гелия. Причины заметного влияния уже слабого магнитного поля на спектр электрон-риплонных колебаний достаточно очевидны и связаны со "смягчающим" действием магнитного поля на поперечную фононную ветку ВК (см. формулы (19.8), (19.9) и комментарии к ним). Возникающий спектр достаточно сложен и может быть количественно проанализирован лишь при $T = 0$, когда вклад в $\langle u^2 \rangle$ дают лишь нулевые колебания электронов вблизи положений их равновесия в ВК. Детали соответствующих расчетов содержатся в работах [203, 205].

Специального внимания заслуживает вопрос о поведении порога высокочастотной моды в сильном магнитном поле, так как он имеет отношение к экспериментам [41], обсуждавшимся в § 15 в связи со сдвигом положения частоты циклотронного резонанса ПЭ. Закон дисперсии высокочастотной магнитной моды $\omega_+(k)$ при наличии электрон-риплонного

взаимодействия согласно (20.23) и (20.22) модифицируется следующим образом [206]:

$$\omega_+^2(k) = \omega_c^2 + 2\omega_\xi^2 + \omega_l^2(k), \quad (20.26)$$

где

$$\omega_\xi^2 = \sum_g n_g e^2 E_\perp^2 2^{-1} \alpha^{-1} m^{-1} \exp(-g^2 \langle u_+^2 \rangle / 2), \quad (20.27)$$

$\langle u_+^2 \rangle$ – величина среднеквадратичных смещений в моде ω_+ . Наличие характерной частоты ω_ξ в выражении для ω_+ приводит к сдвигу положения частоты циклотронного резонанса $\delta\omega_c = \omega_+(k=0) - \omega_c \approx \omega_\xi^2/\omega_c$ (аналогично (15.14)).

В сильных магнитных полях, как правило, выполняется неравенство $g \langle u_+^2 \rangle \ll 1$. В этом случае сумму по g в (20.27) можно вычислить с помощью формулы Пуассона для квадратной решетки (при $\langle u_+^2 \rangle \ll a$ результат не зависит от типа решетки):

$$\delta\omega_c = e^2 E_\perp^2 [4\pi a \omega_c \langle u_+^2 \rangle]^{-1}. \quad (20.28)$$

Нетрудно убедиться, что при подстановке в формулу (20.28) вместо $\langle u_+^2 \rangle$ величины I_H^2 мы получили бы в точности формулу одноэлектронного приближения (15.16). Однако для электронов, находящихся в кристаллическом состоянии, величина $\langle u_+^2 \rangle$ отличается от I_H^2 . В пределе сильных магнитных полей, $\omega_c \gg \omega_D$ (ω_D – характерная дебаевская частота кристалла), согласно (19.13) имеем $\langle u_+^2 \rangle \approx \hbar/m \omega_c = \frac{1}{2} I_H^2$. В результате этого для сдвига частоты циклотронного резонанса ПЭ, находящихся в кристаллическом состоянии, мы получаем следующую формулу:

$$\delta\omega_c = e^2 E_\perp^2 / (4\pi a \hbar). \quad (20.29)$$

Эта величина в два раза больше $\delta\omega_c$ (15.16), полученной для электронного газа, что позволяет объяснить наблюдающийся экспериментально [41] излом на зависимости $\delta\omega_c(E_\perp^2)$ (рис. 5.5) и связать его с переходом

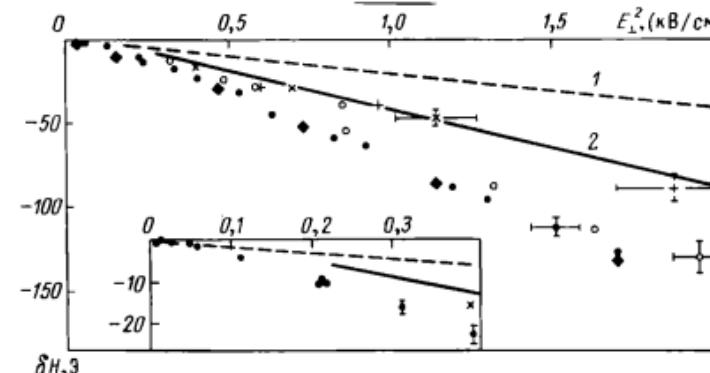


Рис. 5.5. Зависимость сдвига линии ЦР $\delta\omega_c$ от E_\perp^2 . Линия 1 – одноэлектронное приближение (15.16), 2 – формула (20.29), полученная для электронного кристалла в условиях $2\pi n_s \ll E_\perp$.

Эксперимент [41], выполненный в условиях $2\pi n_s \ll E_\perp$ (крестики), хорошо совпадает с (20.29). Остальные точки получены при $E_\perp = 2\pi n_s$.

электронной системы в кристаллическое состояние. Результат (20.29) хорошо согласуется с точками (крестики) на рис. 5.5, для которых плотность $n_s \ll E_1/(2\pi e)$. Что касается точек, полученных при $E_1 = 2\pi en_s$, то для них нарушается условие $\omega_c \gg \omega_D$. При этом величина $\langle u_f^2 \rangle$ должна быть меньше $\frac{1}{2}l_H^2$, а величина сдвига $\delta\omega_c$ соответственно больше, чем (20.29).

20.4. Интересная попытка построить теорию электрон-риплонных резонансов без расцепления электронных мод на "быстрые" и "медленные" с последующим усреднением по высокочастотным колебаниям предпринята в работе [207]. Однако для реализации намеченной программы, авторам [207] пришлось использовать борновскую теорию возмущений. Подобное упрощение, с нашей точки зрения, менее обосновано при описании электрон-риплонных резонансов, чем процедура усреднения по высокочастотным колебаниям, допускающая в определенных предельных случаях строгое обоснование. Конечные результаты теории [207] качественно совпадают с предсказаниями теории [201]. Что касается количественных выводов, следующих из теории [207], то степень их надежности не ясна в силу отсутствия области применимости для теории возмущений.

Среди других работ отметим работу Намаизавы [208], в которой приводится схема самосогласованного расчета параметров спектра связанных электрон-риплонных колебаний. Постановка задачи аналогична [204]. Однако в [208] необоснованно полагается наличие связи между c_t и $\langle u_f^2 \rangle$. В результате увеличивается число самосогласованных уравнений и решение задачи оказывается возможным лишь численно.

Подробные расчеты, определяющие поведение ВК на жидкой подложке в высокочастотном поле, выполнены Дыкманом [209, 210]. Согласно этим работам теория в состоянии объяснить особенности ЦР для кристалла на жидкой подложке в широком интервале значений n_s , T , H . Однако количественное сравнение теории с экспериментом в этих работах не проводилось.

20.5. Естественно, что обнаружение кулоновской кристаллизации, состоявшееся в работах [200, 201], стимулировало дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования в этом направлении. Очень скоро стало ясно, что факт кулоновской кристаллизации может быть зафиксирован и более простыми средствами, например по изменению подвижности поверхностных электронов (конечно для этого надо быть уверенным, что речь идет именно о кулоновской кристаллизации). Соответствующие данные получены разными группами [75, 211, 212]. Пример скачка подвижности в окрестности фазового перехода в электронной системе приведен на рис. 3.1 из [75]. Справедливости ради следует отметить, что не всегда этот скачок подвижности выглядит так отчетливо, как это следует из рис. 3.1. Например, в работе [211] речь шла лишь об изломе на концентриционной зависимости подвижности. Тем не менее фазовая диаграмма, возникающая на основе подобных измерений, воспроизводится достаточно согласованно, в разумных координатах $n_s^{1/2}$, T и в настоящее время охватывает область $0,1 \div 1$ К.

Новый этап в изучении свойств вигнеровского кристалла был начат французской группой из Сакле, поставившей своей целью обнаружить

поперечную моду в кулоновском кристалле и измерить скорость поперечного звука. Очевидно, что появление поперечной жесткости в электронной системе столь же критично к факту возникновения в ней кристаллизации, как и резонансы Граймса и Адамса. Поэтому возбуждение поперечного звука в кулоновском кристалле относится к разряду принципиальных экспериментов. Методика, позволившая успешно реализовать намеченную программу, связана с изготовлением экстравагантной экспериментальной ячейки, позволяющей возбуждать поперечные волны в двумерной электронной системе [213, 214]. Речь идет об электронах на гелиевой пленке, налитой на специальную подложку, покрытую змеевидной проводящей лентой (рис. 5.6), период λ которой имеет масштаб $\approx 10^{-3}$ см и должен примерно совпадать с толщиной пленки гелия. Если поместить всю эту систему в нормальное магнитное поле и пропускать вдоль змейки переменный ток, то на электронную систему координат начинают действовать сдвиговые силы с периодом, определяемым периодом змейки и частотой, отвечающей частоте внешнего источника тока. Очевидно, что для некоторых частот описанное выше воздействие на электронную систему должно становиться резонансно большим, если система обладает поперечной жесткостью. Эксперименты [213–215] показали, что с понижением температуры такие резонансы действительно появляются, т.е. поперечная жесткость в электронной системе реально возникает. В первых удачных экспериментах [213] период змейки был недостаточно мал, и поэтому возникающие резонансы располагались в области спектра, близкой к пороговой частоте ω_ξ (20.1) или (20.16). Такие эксперименты впервые убедительно доказали наличие в спектре ВК на жидкой подложке пороговой частоты ω_ξ деформационного происхождения, но давали слишком косвенную ин-

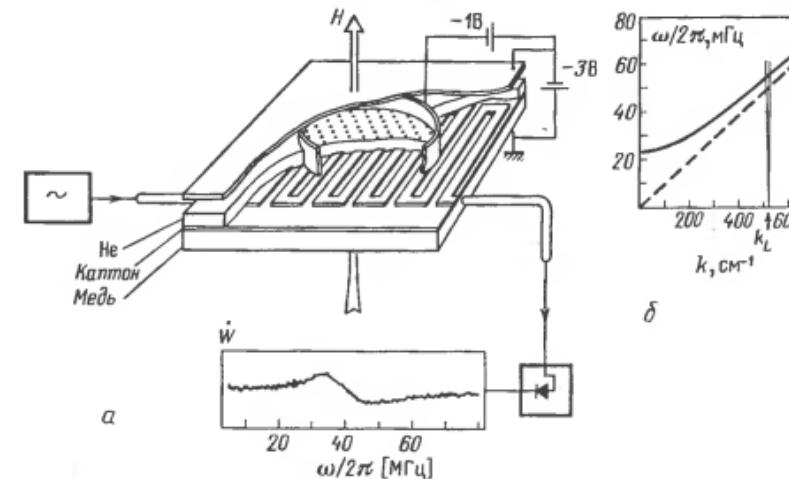


Рис. 5.6. *a* – Схема экспериментальной ячейки для возбуждения в двумерном электронном кристалле поперечных волн.

б – Часть спектра поперечных колебаний вигнеровской решетки, возбуждение которой осуществлено в данном эксперименте, и значение волнового числа k_L возбуждения, определяемого параметрами линии задержки, $T = 0,7$ К, $n_s = 6 \cdot 10^7$ см $^{-2}$, комментарии в тексте (Девиль и др. [214]).

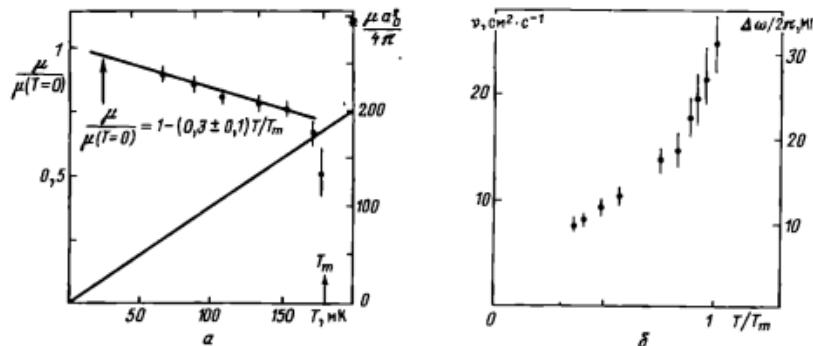


Рис. 5.7. а – Модуль сдвига μ , отнесенный к его значению при $T = 0$, в функции от T . Звездой отмечено значение модуля сдвига при $T = 0$, рассчитанное в [185] для экспериментально измеренной плотности кристалла; T_m – температура плавления кристалла. Правая шкала дает возможность непосредственного сравнения с критерием Костерлица – Таулеса (a_0 – вектор Бюргеса тепловых дислокаций, совпадающий с периодом решетки). Верхняя прямая линия $\mu(T)$ – из [186] (см. рис. 5.3), нижняя – критерий – Костерлица – Таулеса (из [214]).

б – Кинематическая вязкость ν в электронного кристалла в функции от температуры (левая ось), правая ось – ширина резонансной линии $\Delta\omega$ для $E_\perp = 128 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ и $\omega_0/2\pi = 1060 \text{ МГц}$. Данные для $n_s = 6 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2}$ (из [214])

формацию о модуле сдвига ВК. В последующих опытах [214] длина λ была значительно уменьшена, так что положение разонанса содержало прямую информацию о величине поперечной скорости в электронной решетке.

Используя эти данные, удалось определить температурную зависимость поперечного модуля сдвига, продемонстрировать, что плавление кулоновского кристалла происходит в соответствии с механизмом Костерлица – Таулеса и что температура плавления не зависит от напряженности магнитного поля (правда, в довольно узком интервале магнитных полей), и опубликовать первые экспериментальные данные о величине затуханий поперечных волн в двумерной электронной системе на поверхности жидкого гелия. Соответствующие данные собраны на рис. 5.7.

Не менее интересна серия экспериментов, также осуществленная французскими учеными [216], касается измерения теплоемкости электронной решетки и поведения теплоемкости при переходе электронной системы из кристаллической фазы в жидкую. Задача – на первый взгляд, трудно решаемая, так как речь идет об измерении теплоемкости двумерной системы малой плотности на фоне гораздо более теплоемкой жидкой подложки. Тем не менее остроумная методика, позволившая с уверенностью выделять теплоемкость электронной подсистемы, продемонстрирована в [216].

Для определения теплоемкости электронной решетки необходимо знать изменение ΔT температуры кристалла при поглощении им определенного количества тепла ΔQ . Измерение ΔQ не составляет труда, поскольку речь идет об оценке активных потерь, связанных с передачей высокочастотной электромагнитной энергии от радиочастотного контура электронной сист-

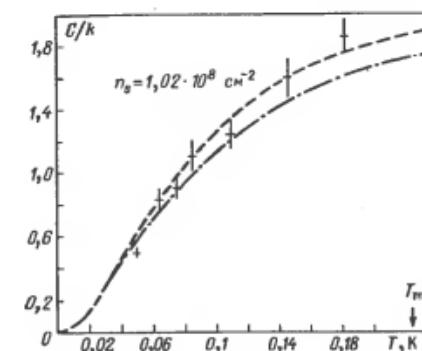


Рис. 5.8. Теплоемкость C/k (где k – постоянная Больцмана) электронной решетки над гелием. Штрихпунктир – фононная теплоемкость с модулем сдвига μ , не зависящим от T , штриховая линия – та же теплоемкость с $\mu(T)$, взятым с рис. 5.7. Расчет и эксперимент из [216]

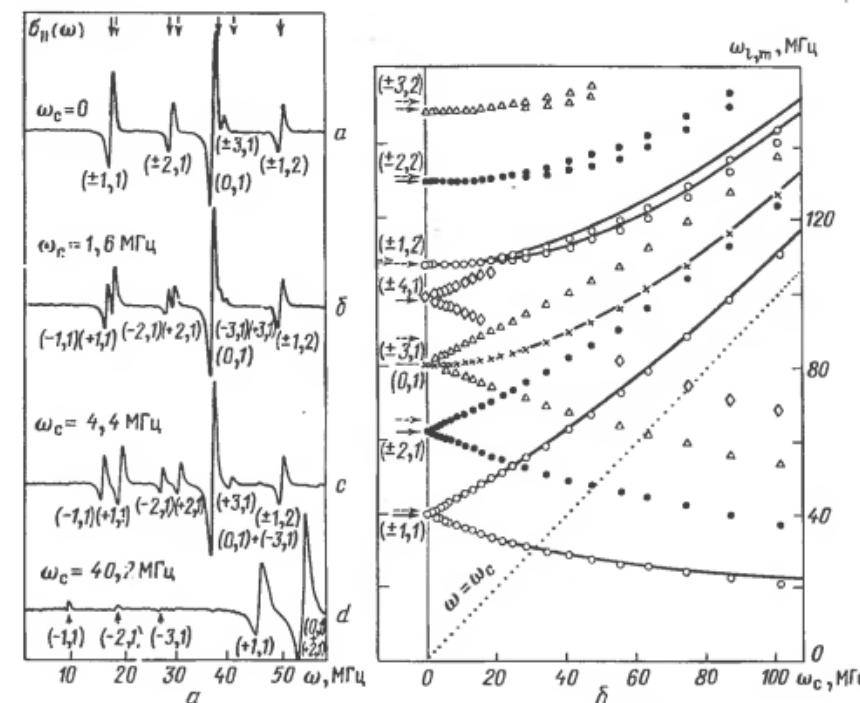


Рис. 5.9. а – Экспериментальная запись расцепления собственных плазменных частот 2 – d-диска во внешнем магнитном поле. Стрелками указаны рассчитанные значения частот и их сдвиги в магнитном поле (Девиль и др. [218]).

б – Сводка экспериментальных данных о проведении собственных плазменных частот ω_{lm} в магнитном поле. Индексы l – азимутальный, m – радиальный (из [218])

теме. Что касается измерения температуры ΔT (наиболее деликатная часть методики), то согласно [216] для этой цели можно воспользоваться свойствами пороговой частоты ω_c из (20.1) или (20.19). В самом деле, прямые измерения ω_c [213], упоминавшиеся выше, указывают на заметную зависимость ω_c от температуры. Полагая, что при наличии перегрева электронной решетки относительно жидкой подложки частота ω_c реагирует на электронную температуру, и ориентируясь на данные $\omega_c(T)$ [213] как градуировочные, мы приобретаем возможность использовать положение ω_c в качестве термометра электронной системы.

Реализовав указанную возможность, авторы [216] получили конечные результаты для теплоемкости электронного кристалла, представленные на рис. 5.8. Эта теплоемкость отвечает ее фононному значению, вычисленному для двумерной решетки. При этом штирхпунктирная линия отвечает расчетной теплоемкости с фиксированной поперечной жесткостью $\mu = \mu(0)$, а штриховая учитывает температурную зависимость $\mu(T)$, приведенную на рис. 5.8. Видно, что эксперимент лучше коррелирует со вторым вариантом расчета.

20.6. Заканчивая обсуждение основных экспериментов по изучению колективных явлений в двумерной электронной системе на поверхности гелия, остановимся вкратце на поведении плазменных частот в двумерных ограниченных средах при наличии магнитного поля H , нормального поверхности $2-d$ -системы. Как обнаружено в последнее время [217–219], магнитное поле расщепляет собственные плазменные частоты ограниченной $2-d$ -системы. Пример подобного расщепления из [218] приведен на рис. 5.9. Детально обсуждение этого эффекта приведено в следующей главе (§ 22) в связи с тем, что аналогичные эффекты в настоящее время широко исследуются и в полупроводниковых $2-d$ -системах.

ГЛАВА 6

ДВУМЕРНЫЕ ЗАРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Наиболее известными среди исследуемых в настоящее время двумерных заряженных систем являются различные инверсионные, аккумуляционные слои и гетероструктуры на полупроводниковой основе. В этих структурах удается создавать $2-d$ -электронные (дырочные) системы с интересным набором параметров. В частности, легко выполняется условие вырождения, причем плотность вырожденной электронной системы может меняться в широких пределах. В результате в последнее время в полупроводниковых $2-d$ -системах обнаружены и детально исследованы ряд фундаментальных физических явлений (эффекты слабой локализации, квантовый холл-эффект и т.д.). Не менее важное обстоятельство заключается в том, что инверсионные слои являются составной частью полупроводниковых устройств, широко используемых в современной микроэлектронике. Возможность серьезных технических приложений объясняет размах исследований, которые ведутся в нашей стране и за рубежом по изготовлению и изучению различных $2-d$ -электронных систем в полупроводниках.

Систематическое изложение результатов, полученных при изучении $2-d$ -систем в полупроводниках содержится в ряде обзоров и монографий [220–224]. Наиболее полный среди них – обзор Эндо, Фаулера и Стерна [223]. В этом обзоре затронуты практически все аспекты деятельности как теоретической, так и экспериментальной по изучению $2-d$ -заряженных систем в полупроводниках за период вплоть до 1982 г. (в русском переводе библиография расширена). Что касается нашей задачи при обсуждении свойств инверсионных слоев, то она, естественно, представляется более ограниченной. Речь идет, в основном, о сравнительном описании характеристик обсуждаемых двумерных систем и демонстрации взаимной дополнительности, имеющей место при изучении $2-d$ -систем на поверхности гелия и в полупроводниковых структурах. В первом случае максимально четко проявляются классические коллективные эффекты в $2-d$ -электронных системах (плазменные колебания, вигнеровская кристаллизация). Во втором – с таким же успехом – квантовые (слабая локализация, квантовый холл-эффект, мезоскопика и т.д.). В результате, из нашего рассмотрения практически полностью выпадают эффекты, обусловленные многодолинностью большинства полупроводников, а также спин-зависящие явления.

§ 21. Основные характеристики 2 – d-электронной системы в инверсионном слое на основе кремния

21.1. Для создания инверсионного слоя, например в кремнии, используется структура, изображенная на рис. 6.1, а. Она содержит металлический электрод (затвор), отделенный от массивного кремния *p*-типа слоем окисла SiO_2 толщиной порядка 1000 Å. Между затвором и объемом полупроводника подается напряжение V_g . При полярности V_g , отвечающей притяжению электронов к заряду, и изгибе зон, превышающем ширину запрещенной зоны кремния (см. рис. 6.1, б), на поверхности полупроводника возникает тонкий проводящий слой, получивший название инверсионного (тип носителя в этом слое инвертирован по отношению к типу объемных носителей данного полупроводника). Типичная толщина слоя $d \approx 50, толщина слоя объемного заряда (обедненного слоя), отделяющего инверсионный слой от объема массивного полупроводника, порядка $d_{\text{depl}} \approx 10^{-4}$ см при легировании с плотностью $n_d \sim 10^{14} \div 10^{15}$ см $^{-3}$. Наличие высокоомного обедненного слоя позволяет электрически развязать поверхностную и объемную проводящие области. Для измерения проводимости в инверсионном слое служат два омических контакта, между которыми может быть приложено дрейфовое напряжение V_D . Существуют варианты обсуждаемого устройства, позволяющие изучать проводимость инверсионного слоя бесконтактными методами.$

Поверхностная концентрация электронов n_s в инверсионном слое изменяется с помощью V_g :

$$n_s = \frac{C}{|e|} (V_g - V_t), \quad (21.1)$$

где C – емкость слоя SiO_2 , e – заряд электрона, V_t – пороговое напряжение инверсии (экспериментально V_t определяется по началу резкого возрастания проводимости инверсионного канала). Типичные значения n_s колеблются в интервале $10^{10} \leq n_s \leq 10^{13}$ см $^{-2}$. Полезно отметить, что типичные значения n_s для электронной системы на поверхности гелия, где

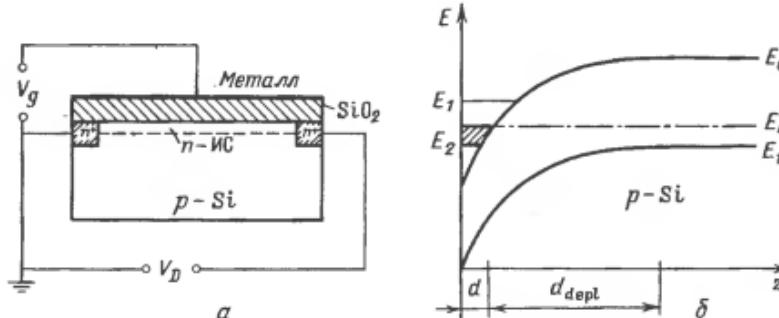


Рис. 6.1. а – Схематический вид структуры металл – диэлектрик – полупроводник: V_g – потенциал затвора относительно полупроводника, V_D – тянущее напряжение, ИС – инверсионный слой.

б – Зонная схема у поверхности полупроводника в условиях возникновения ИС, d – толщина ИС, d_{depl} – ширина обедненного слоя

$10^5 \leq n_s < 10^{10}$ см $^{-2}$, и в инверсионных слоях, где $n_s > 10^{10}$ см $^{-2}$, смыкаются и, в целом, перекрывают довольно широкую область электронных плотностей.

При загибе зон обратного знака, по сравнению с изображенной на рис. 6.1, б, в полупроводнике *p*-типа возникает на границе с затвором слой, обогащенный дырками. Такой слой также может рассматриваться как своеобразная двумерная система, получившая название аккумуляционного слоя. Серьезным недостатком этого варианта 2 – *d*-заряженной системы является отсутствие электрической развязки между поверхностной и объемной проводимостью полупроводника. В связи с этим обстоятельством двумерные явления в аккумуляционных слоях выражены менее четко, чем в инверсионных.

Обращает на себя внимание качественная аналогия между устройствами, приводящими к возникновению инверсионных слоев в полупроводниках, и соответствующими устройствами, позволяющими создавать 2 – *d*-электронную систему на поверхности жидкого гелия (см. рис. 4.11). Эта аналогия не случайна, так как в обоих случаях речь идет о гомогенно заряженных 2 – *d*-системах. Для обеспечения однородности средней плотности электронов в данной 2 – *d*-системе требуется наличие на конечном расстоянии от нее металлического электрода.

Электроны в инверсионном слое движутся в потенциальном желобе, образованном электростатическим потенциалом объемного заряда, с одной стороны, и потенциальным барьером на границе $\text{Si}-\text{SiO}_2$ – с другой (см. рис. 6.1, б). При этом электронный спектр из-за квантования поперечной компоненты квазимпульса состоит из набора 2 – *d*-подзон – так называемых электрических подзон – и в простейшем случае имеет вид

$$\epsilon_l(k_x k_y) = \Delta_{lv} + \frac{\hbar^2 (k_{\parallel} - k_{\parallel}^0)^2}{2m_{\parallel}^*}, \quad (21.2)$$

здесь ось z направлена по нормали к поверхности инверсионного слоя, Δ_l – положение дна l -й электрической подзоны, v – номер длины, центрированной в зоне проводимости в одной из точек $k_0 = 0,85(2\pi/a)(001)$, $a = 5,43$ Å – постоянная решетки Si, k_{\parallel}^0 – проекция k_0 на плоскость инверсионного слоя, m_{\parallel}^* – эффективная масса в плоскости инверсионного слоя (ИС), зависящая от его ориентации, для *n*-ИС (001) $m_{\parallel}^* = 0,19m$, m – масса свободного электрона.

Изоэнергетическая поверхность в зоне проводимости Si состоит из шести эллипсоидов вращения, вытянутых вдоль кубических осей. Основная электрическая подзона ϵ_{0v} в приближении эффективной массы двукратно вырождена по номеру долины ($v = 1, 2$) и формируется из двух эллипсоидов, соответствующих наибольшей эффективной массе вдоль нормали к ИС. Для нее $k_{\parallel}^0 = 0$, а изоэнергетические контуры – окружности. Типичный энергетический зазор между основной и первой возбужденной подзонами составляет несколько десятков миллизэлектронвольт. Поэтому при гелиевых температурах, при которых, как правило, проводятся измерения, заселена только основная подзона. Электроны в ней образуют вырожденный 2 – *d*-газ.

Плотность состояний на единицу площади $D(\epsilon)$ в этом случае не зависит от энергии и равна

$$D_0 = \frac{g_s g_v m^*}{2\pi \hbar^2}, \quad (21.3)$$

где g_s и g_v – кратности спинового и долинного вырождений соответственно. Для инверсионного слоя на грани (001) кремния $g_s = g_v = 2$ и $D_0 = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2} \cdot \text{мэВ}^{-1}$.

Уровень Ферми ϵ_F и фермиевское волновое число k_F в вырожденном газе с плотностью состояний D_0 (21.3) связаны с n_s следующим образом:

$$n_s = D_0 \epsilon_F = k_F^2 g_s g_v / 4\pi. \quad (21.4)$$

Следует отметить, что расчет спектра электронов в инверсионном слое оказывается гораздо более сложной задачей, чем в случае электронов на поверхности гелия. Если в случае электронов над гелием благодаря относительно малой концентрации зарядов достаточно хорошо работает одноделонное приближение, то в случае электронов в инверсионном слое это приближение оказывается слишком грубым. Необходимо принимать во внимание различные коллективные эффекты. Дополнительное усложнение заключается в том, что на границе Si–SiO₂ отсутствует простое гравитационное условие для инверсионных электронов, так как кроме резкого потенциала, определяющего саму границу между полупроводником и его окислом, существует сила изображения, имеющая знак отталкивания.

21.2. Естественно, что при наличии большого числа разнообразных взаимодействий, влияющих на структуру электронного спектра в инверсионном слое, возрастает и число факторов, уширяющих форму линий оптических спектров, отвечающих переходам электронов между различными электрическими подзонами. Для примера на рис. 6.2 приведены типич-

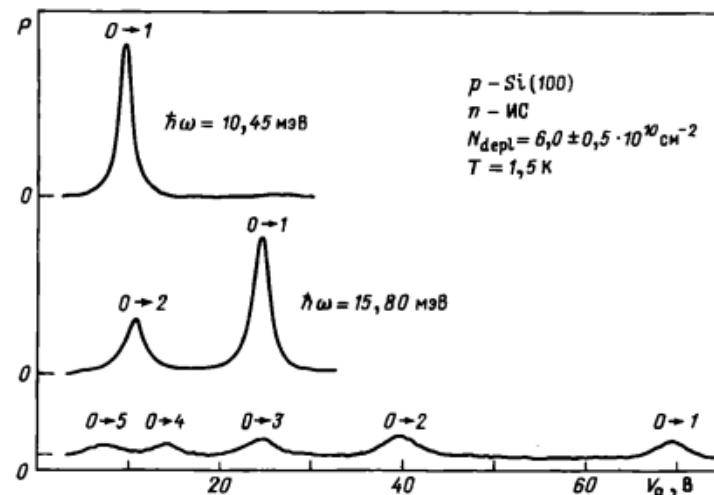


Рис. 6.2. Поглощение ВЧ-энергии P , связанное с электронными переходами между дискретными уровнями в инверсионном слое p -кремния (Ниппль и др. [225]).

ные спектры такого типа, на которых зафиксированы резонансные электронные переходы между основной и i -й возбужденной подзонами [225]. Сравнивая эти картины с аналогичным спектром для электронов на поверхности гелия (см. рис. 2.5), легко оценить качество спектров в двух вариантах электронных систем.

Интересны диагностические возможности так называемого комбинированного резонанса, возникающего при изучении электронных переходов между дискретными уровнями в магнитном поле, параллельном поверхности ИС. Эффект влияния H_{\parallel} на такие переходы был обнаружен впервые в экспериментах с электронами на поверхности гелия (см. [55] и рис. 2.12). Однако наиболее основательно данный эффект был исследован в инверсионных слоях [226–230]. Повышенный интерес к этому гибридному резонансу связан в данном случае с тем обстоятельством, что форма линии комбайн-резонанса содержит прямую информацию о суммарной перенормировке частот электронных переходов за счет эффекта деполяризации и экситонного сдвига. Согласно Эндо [229] группа линий, входящая в комбайн-резонанс, по-разному чувствительна к возмущениям коллективного происхождения, описываемым в теории [229] одним эффективным параметром.

Основная линия с $\Delta l = 0$ меняет свое положение на шкале частот линейно по γ . Что касается сателлитов с $\Delta l = \pm 1$, расположенных при $\gamma = 0$ симметрично относительно основной линии, то их положение на частотной шкале фиксировано, а влияние $\gamma \neq 0$ сводится к относительному изменению их амплитуды. Рис. 6.3 из [229] содержит несколько вариантов линий гибридного резонанса, отвечающих разным значениям γ . Ситуации $\gamma = 0$ отвечает симметричная комбинация с основным максимумом для энергии 31,5 мэВ. Положения сателлитов отмечены стрелками. Сплошная линия – комбайн-резонанс, отвечающий экспериментальным данным [230], для Si на грани (001). Соответствующее значение $\gamma = 0,2$.

Одной из основных характеристик инверсионного слоя, определяющих его качество, является подвижность носителей вдоль инверсионного канала. "Водораздел" между хорошими и плохими структурами лежит в области подвижностей $\mu \approx 10^2 \div 10^3 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Улучшение качества канала является серьезной технологической проблемой, так что каждый новый рубеж в повышении подвижности носителей вдоль инверсионного канала является этапом в развитии двумерной полупроводниковой деятельности. В настоящее время благодаря специальным усилиям максимальные значения μ "подняты" до значений $\mu \lesssim 10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. В этом случае подвижность инверсионных носителей сравнивается с подвижностью электронов над гелием.

Как правило, подвижность инверсионных электронов μ зависит от плотности n_s , проходя через характерный максимум (рис. 6.4 [231]). Происхождение максимума в общих чертах сводится к конкуренции различных механизмов, влияющих на подвижность. В области малых n_s существенное влияние на подвижность оказывает рассеяние на заряженных примесях, существующих в самом инверсионном слое и вблизи от него. С повышением n_s электроны начинают экранировать действие заряженных примесей, и подвижность растет. Однако при дальнейшем увеличении n_s ,

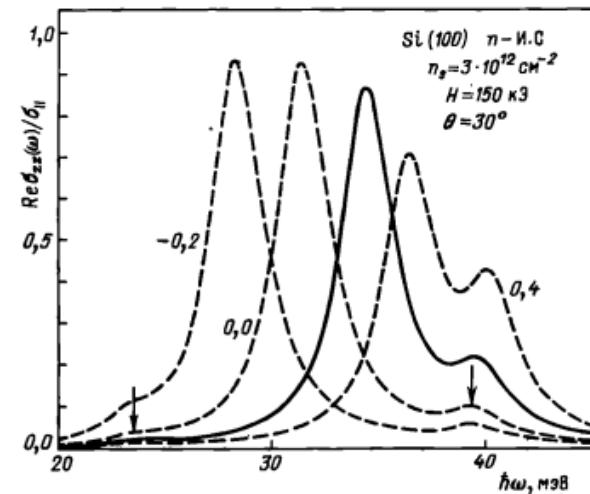
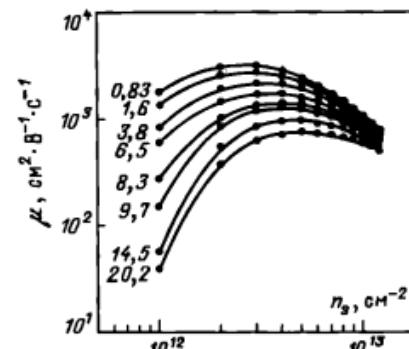


Рис. 6.4. Подвижность электронов в инверсионном слое в функции от плотности электронов. В качестве параметра варьируется плотность (в ед. 10^{11} см^{-2}) заряженных центров (ионов натрия). Температура $T = 4,2 \text{ К}$ (Харштейн и др. [231])



а значит, и V_g становится заметным эффектом поля, заключающийся в том, что внешнее электрическое поле все сильнее прижимает инверсионные электроны к границе раздела, в результате чего увеличивается рассеяние на шероховатостях границы [223].

Характерный масштаб подвижности электронов в максимуме зависимости $\mu(n_s)$ есть величина $\approx 10^3 \div 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. При таких подвижностях достаточно четко наблюдается циклотронный резонанс (рис. 6.5 [232]), плазменные резонансы (рис. 6.6 [233]).

Кроме физических аспектов, обсуждавшихся в гл. 5, задача о плазменных колебаниях интересна приложениями, так как диапазон частот и специфический характер их закона дисперсии (отсутствие порога) приводят к возможности связывания плазменных и упругих поверхностных колебаний полупроводника, что весьма существенно для задач акусто-электроники [234]. Подробнее эти вопросы освещены в обзоре [223].

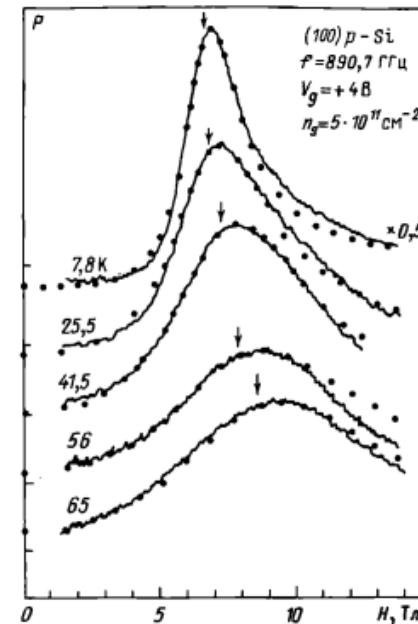
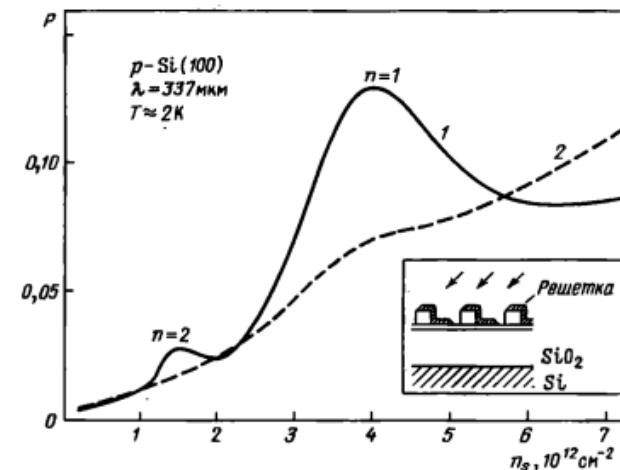


Рис. 6.6. Возбуждение плазменных резонансов на (100) поверхности кремния (Тейс и др. [233]). Кривые 1 и 2 – возбуждение плазмонов с помощью периодической решетки и без нее



21.3. Несколько слов о слабой локализации^{*)}. Это явление, наблюдавшееся в полупроводниках более тридцати лет назад, заслужило репутацию загадочного благодаря следующим свойствам.

1. Магнетосопротивление $\delta\sigma(H)$ отрицательно, т.е. магнитное поле не "мешает", а "помогает" проводить.

2. Явление практически не зависит от угла между измерительным током и магнитным полем, т.е. отрицательным является как продольное, так и поперечное магнетосопротивления.

3. Эффект хорошо наблюдается при концентрации легирующих примесей, близких к критической для перехода металл – диэлектрик и при низких температурах. С повышением температуры и в низкоомных образцах классическое магнетосопротивление становилось больше аномального.

4. При измерениях магнетосопротивления в инверсионных слоях на поверхности Si было показано, что магнетосопротивление отсутствует, если магнитное поле параллельно поверхности слоя. Этим было доказано, что аномальное магнетосопротивление связано с орбитальным движением и не может быть объяснено влиянием магнитного поля на спин электрона.

Все отмеченные особенности резко контрастируют с привычными представлениями кинетической теории [235] и не нашли в ней удовлетворительного объяснения.

Ограничения теории, основанной на уравнении Больцмана, хорошо известны. Они связаны с тем, что большинство описание кинетических явлений в квантовых системах оперирует не с амплитудами вероятности различных процессов, а с самими вероятностями. Этот факт был выяснен в работах Эдварса [236] и Абрикосова и Горькова [237], разработавших последовательную процедуру вычисления кинетических коэффициентов. Характерно, что особенно успешно эта процедура используется в теории сверхпроводимости металлов с примесями. Другим когерентным явлением, которое нельзя получить в рамках уравнения Больцмана, является андерсоновская локализация [238] и вообще переход металл–диэлектрик [239].

Первый важный шаг на пути решения проблемы перехода от большинского режима металлической проводимости к режиму локализации был сделан Таулесом в 1977 г. Изучая условия, при которых андерсоновская локализация может появиться в металлической проволоке конечного сечения, он привел качественные аргументы в пользу того, что при $T = 0$ локализованы все состояния в проволоке, сопротивление которой больше, чем $2\pi\hbar/e^2$ [240]. При конечной температуре это явление маскируется неупругими процессами. В результате вместо длины проволоки возникает длина диффузии L за время неупругих столкновений τ_{in} , $L^2 \sim D\tau_{in}$ (где D – коэффициент диффузии электронов проводимости).

Тот факт, что в теории Таулесса вся зависимость от степени беспорядка выражалась через сопротивление R , натолкнул Абрагамса и др. [241] на мысль, что величина R^{-1} , измеренная в единицах $e^2/2\pi\hbar$, выполняет в теории локализации ту же роль, какую в теории сверхтекучести играет плотность сверхтекучей компоненты. Ими была построена соответствующая

теория ренорм-группы [241], из которой следовало, что в двумерном случае все состояния при $T = 0$ локализованы, а в трехмерном случае при переходе от проводящих к локализованным состояниям проводимость плавно обращается в нуль.

Далее в рамках общей теории был поставлен следующий вопрос: известно, что в нулевом порядке по параметру $\lambda/l \ll 1$ проводимость дается формулой Друде. Спрашивается, как зависит от частоты ω , температуры T и магнитного поля H поправки к формуле Друде по параметру λ/l ? Эти поправки были вычислены в работах [242–244].

В работе [244] была впервые изучена зависимость $\delta\sigma$ от H . Оказалось, что зависимость проводимости от магнитного поля в области классически слабых полей определяется именно величиной $\delta\sigma(H)$. Таким образом, было найдено объяснение аномального магнетосопротивления (см. также [245, 246]). Теория была затем обобщена на случай, когда имеется сильное спин-орбитальное взаимодействие [247] (см. также [246]), а также электрон-электронное взаимодействие в канале частица – частица [248].

После того как источник аномальных зависимостей проводимости от магнитного поля был осознан, Альтшуллером, Ароновым и Спиваком был предсказан, а Ю.В. и Д.Ю. Шарвиными блестяще экспериментально подтвержден осциллирующий характер сопротивления полого цилиндра от магнитного потока (эффект Бома – Аронова) [249].

Параллельно с теорией кинетических явлений для невзаимодействующих электронов в неупорядоченных проводниках важный сдвиг произошел благодаря работам Альтшулера и Аронова [250–252], в которых учтено кулоновское взаимодействие между электронами, многократно рассеивающимися на примесях. При описании зависимостей проводимости от температуры и частоты теория Альтшулера – Аронова и теория локализации должны учитываться совместно. Именно эта теория для поправок порядка λ/l к формулам кинетической теории и получила наименование режима слабой локализации.

Отсутствие магнитного поля эффекты слабой локализации могут быть пояснены следующей качественной картиной, в которой электроны рассматриваются движущимися по классическим траекториям с изломами в точках, где расположены примеси или другие источники рассеяния [253]. При низкой температуре, когда время сбоя фазы электронной волновой функции τ_φ велико, движение электрона можно рассматривать как распространение волнового пакета с поперечным размером порядка $\lambda = h/p$ и продольным размером $v\tau_\varphi$ (здесь v – скорость частицы) вдоль такой изломанной классической траектории. В силу общих правил квантовой механики вероятность W попасть из точки A в точку B (рис. 6.7, а) равна

$$W = |\sum A_i|^2 = \sum |A_i|^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j^*, \quad (21.5)$$

где A_i – амплитуда вероятности попасть из A в B вдоль траектории i . Первый член в (21.5) представляет собой сумму вероятностей попасть из A в B по одной из классических траекторий. Именно эта величина возникает при описании с помощью кинетического уравнения. Второе слагаемое – вклад интерференции амплитуд A_i и A_j , отвечающих разным траекториям, обычно опускается, поскольку разность фаз для таких различных траекто-

^{*)} В изложении п. 21.3 мы придерживались докторской диссертации Д.Е. Хмельницкого (Черноголовка, ИТФ АН СССР, 1983).

рий является случайной, и интерференция пакетов, двигающихся вдоль двух произвольных траекторий, дает в среднем нулевой вклад в определение W .

Исключением является случай траектории, возвращающейся (с точностью до λ) в исходную точку (см. рис. 6.7, б). Каждой такой траектории отвечают две амплитуды — A_1 и A_2 , соответствующие противоположным

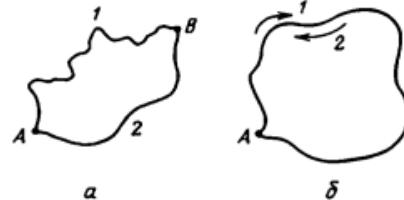


Рис. 6.7. Траектории пробных частиц

направлениям обхода замкнутой траектории. Амплитуды A_1 и A_2 когерентны и потому

$$|A_1 + A_2|^2 = 4|A_1|^2 > 2|A_1|^2.$$

Таким образом, интерференция будет сильнее для тех траекторий, которые проходят на расстоянии порядка λ от начальной точки. Полная вероятность того, что траектория, начавшаяся в точке r в момент t пройдет через точку r' , в момент t' определяется уравнением диффузии и равна (здесь d — размерность пространства)

$$p(|r - r'|, t' - t) = \frac{1}{2\pi D(t' - t)^{d/2}} \exp \left[-\frac{(r - r')^2}{2D(t' - t)} \right].$$

Поэтому величина относительной поправки к проводимости $\delta\sigma/\sigma$ определяется относительной вероятностью возврата траектории в область размеров λ вблизи точки r за время сбоя фазы τ_φ :

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = - \int_0^{\tau_\varphi} \lambda^d - 1 \frac{v dt}{(Dt)^{d/2}}. \quad (21.6)$$

Отрицательность квантовой поправки к проводимости связана с тем, что интерференция приводит к увеличению вероятности возврата и, в силу сохранения полной суммы вероятностей, к уменьшению вероятности распыления первоначального распределения плотности, т.е. к уменьшению проводимости.

Экспериментальный пример логарифмического поведения $\delta\sigma$ в зависимости от T , следующего из определения $\delta\sigma$ (21.6) для $d = 2$, приведен на рис. 6.8, а [254].

Внешнем магнитном поле с векторным потенциалом $A(r)$ амплитуды A_1 и A_2 , отвечающие различным направлениям обхода замкнутой траек-

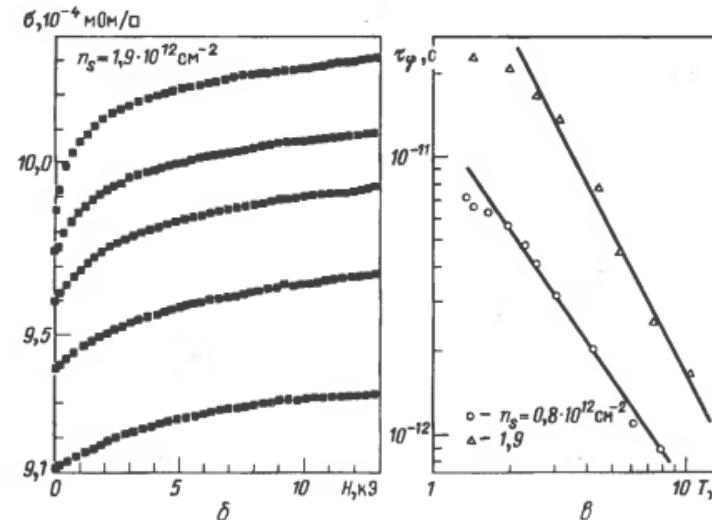
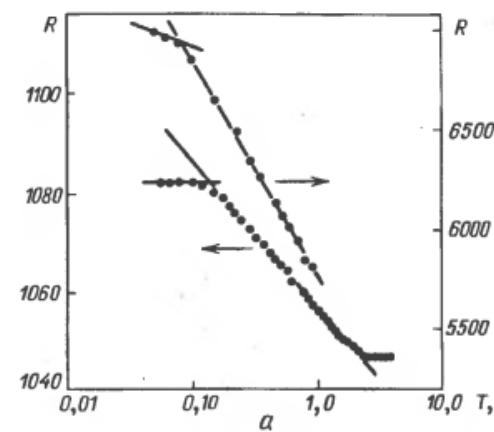


Рис. 6.8. а — Сопротивление R (в Омах на квадрат) инверсионного слоя кремния, экстраполированное к нулевому тянущему полю в функции от абсолютной температуры в логарифмическом масштабе. Плотность электронов $n_s = 2,03 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ для верхней кривой и $5,64 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ — для нижней (из работы Бишопа и др. [254]).

б — Магнетопроводимость инверсионного слоя кремния на грани (100) с плотностью $1,9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ и при температуре от 1,9 до 10,4 К. Экспериментальные точки хорошо соответствуют формуле (21.9) (из работы Кавачуги и др. [255]).

в — Температурная зависимость времени неупругого рассеяния, τ_φ полученная из обработки экспериментальных данных рисунка б [255]

тории, приобретают дополнительные множители

$$A_1 \rightarrow A_1 \exp\left(i \frac{e}{c \hbar} \int A dr\right) = A_1 \exp\left(2\pi i \frac{SH}{\Phi_0}\right), \quad (21.7)$$

$$A_2 \rightarrow A_2 \exp\left(-2\pi i \frac{SH}{\Phi_0}\right),$$

где $\Phi_0 = \hbar c / |e|$ – квант магнитного потока, S – проекция площади поверхности, натянутой на замкнутый контур, на плоскость, перпендикулярную направлению магнитного поля H . В результате формула (21.6) переписывается так [253] :

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = - \int_{\tau}^{\tau_\varphi} dt \frac{u\lambda^{d-1}}{(Dt)^{d/2}} \int \mathcal{W}(s, t) \cos\left(\frac{4\pi HS}{\Phi_0}\right) \quad (21.8)$$

где $\mathcal{W}(s, t)$ – вероятность для петли с длиной ut иметь площадь проекции на плоскость, перпендикулярную H , равную s . Среднее значение s порядка Dt . В двумерном случае можно заменить s на $\langle s \rangle$ и в результате имеем

$$\Delta\sigma = \sigma^{(2)}(0) = \frac{e^2}{\hbar} f_2\left(\frac{eHD\tau_\varphi}{\hbar c}\right) \quad (21.9)$$

$$f_2(x) \approx \begin{cases} x^2, & x \ll 1, \\ \ln x, & x \gg 1. \end{cases}$$

Формулы (21.9) правильно описывают все важнейшие свойства аномального магнетосопротивления в двумерном случае. Прежде всего, становится понятно, почему магнетосопротивление отрицательно. Дело в том, что квантовая поправка уменьшает проводимость, а магнитное поле приводит к подавлению этой поправки, т.е. приводит к увеличению проводимости в магнитном поле. Ясно, что от угла между магнитным полем и измерительным током ничего не зависит, так как замкнутая петля может быть произвольно ориентирована по отношению к измерительному току. В теории появился зависящий от температуры масштаб магнитного поля $\tilde{H} \sim \frac{\hbar c}{eD\tau_\varphi}$ ($\omega_c(\tilde{H}) \tau \sim (\mu\tau_\varphi)^{-1} \ll 1$), связанный с большим временем сбоя фазы τ_φ . Наконец, понятно, почему для инверсионных слоев этот эффект отсутствует, когда поле H параллельно плоскости слоя, – в этих условиях магнитный поток через замкнутую петлю равен нулю. Соответствующие экспериментальные данные, иллюстрирующие наличие отрицательного магнетосопротивления, приведены на рис. 6.8, б, в [255].

21.4. В число канонических измерений, позволяющих оценить качество инверсионного слоя, входит также наблюдение осцилляций Шубникова – де Гааза. Важной особенностью инверсионных слоев является то обстоятельство, что шубниковские осцилляции проводимости в инверсионном слое можно наблюдать не только при изменении магнитного поля H при фиксированном n_s , как в $3-d$ -случае, но и при изменении n_s для фиксированного магнитного поля H . В последнем случае пересечение уровнем Ферми уровней Ландау приводит к осцилляциям проводимости

с периодом [220] :

$$\Delta n_s = |e| g_s g_v H_\perp / (2\pi\hbar c), \quad (21.10)$$

где H_\perp – нормальная компонента магнитного поля. Независимость Δn_s от эффективной массы носителей является специфическим свойством $2-d$ -системы. Пример записи осцилляций Шубникова – де Гааза в функции от V_G приведен на рис. 6.9 [256]. Картина осцилляций усложняется в связи со снятием спинового и долинного вырождения.

С ростом магнитного поля амплитуда осцилляций Шубникова растет и возникают предпосылки для наблюдения чрезвычайно интересной совокупности низкоразмерных эффектов под общим названием "квантовый холл-эффект". Начало этим исследованиям было положено в 1980 г. в известной работе фон Клитцинга, Дорды и Пеппера [257], после появления которой возник бум, легко объяснимый красотой и фундаментальностью наблюдавшихся закономерностей.

Суть целочисленного квантового холл-эффекта заключается в том, что тензор сопротивления ρ_{lm} двумерного слоя носителей, находящегося в квантующем магнитном поле H , нормальной плоскости слоя, может иметь очень простой вид, не зависящий от характеристик данного полупроводника:

$$\rho_{lm} = \begin{cases} 0, & l = m, \\ h/(ne^2), & l \neq m, \end{cases} \quad (21.11)$$

$$(21.12)$$

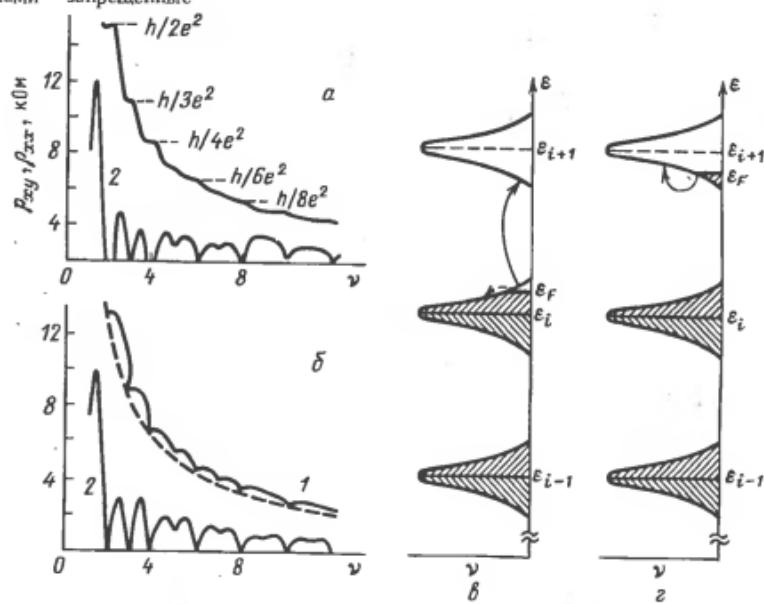
где n – целые числа. Соотношения (21.11), (21.12) выполняются в определенном интервале концентраций носителей n_s (при фиксированном H) либо в определенном интервале H (при фиксированном n_s). На рис. 6.10 проиллюстрировано поведение компонент ρ_{xy} и ρ_{xx} при изменении концентрации носителей. В реальных условиях компонента ρ_{xx} уменьшается не до нуля, а на пять – восемь порядков величины [258], а точность выполнения соотношений (21.12) составляет порядка 10^{-7} [258, 259]. Это позволяет использовать целочисленный квантовый холл-эффект для точного измерения постоянной тонкой структуры [258, 259] (до сих пор приоритет в измерении подобных мировых констант принадлежал специалистам в области квантовой электродинамики и джозефсоновской спектроскопии) и для создания эталона Ома [261].

Физической причиной отсутствия диссипации и квантования сопротивления Холла является принцип Паули, запрещающий изменение состояния носителей тока (фермионов), принадлежащих полностью заполненному двумерному уровню Ландау. Рассмотрим, для примера, ситуацию, изображенную на рис. 6.10, в, в которой уровень Ферми ϵ_F совпадает с верхней границей i -го уровня Ландау ($i = 0, 1, 2$). Тогда все состояния на нижних $i-1$ уровнях заполнены, и любые процессы, связанные с переходом частицы из одного состояния в другое, запрещены. Разрешенными являются лишь переходы в свободные состояния на верхних уровнях, однако их вероятность при достаточно низких температурах и в сильных магнитных полях экспоненциально мала. Таким образом, в системе, изображенной на рис. 6.10, в, носители двумерного слоя не могут изменять свое состояние и принимать участие в диссипативных процессах, т.е. $\rho_{xx} = 0$.

Рис. 6.9. Осцилляции Шубникова – де Газа в проводимости инверсионного слоя функции V_G . В качестве параметра меняется напряженность дрейфового поля V_D (Каваджи и др. [256])

Рис. 6.10. а, б – Зависимость холловской (1) и диагональной (2) компонент тензора удельного сопротивления кремниевой МДП-структурь от числа заполнения ν уровней Ландау ($\nu = n/n_H$, где $n_H = eH/c\hbar$). а – Эксперимент [257], $H = 189$ кЭ, $T = 1,5$ К; б – теоретические зависимости $\rho_{xy}(\nu)$ (1) и $\rho_{xx}(\nu)$ (2), построенные на основе экспериментальной зависимости $\rho_{xx}(\nu)$ (рисунок а), идеализированной в соответствии с теорией [259]

в, г – Схематическая зависимость плотности состояний $\nu(e)$ на 2-d-уровнях Ландау e_i от энергии при различных значениях энергии Ферми ϵ_F . Заштрихованные участки $\nu(e)$ обозначают заполненные области связанных состояний. Зачернены области подвижных состояний. Стрелками показаны разрешенные переходы, штриховыми стрелками – запрещенные



Движение электронов ИС в нормальном магнитном поле является финитным по всем направлениям. Вследствие этого концентрация возможных состояний на каждом из заполненных уровней Ландау фиксирована – она точно равна числу квантов магнитного потока, пронизывающего единичную площадь об разца:

$$n_H = \Phi/\Phi_0 = He/(c\hbar). \quad (21.13)$$

Подставляя выражение (21.13) в формулу Лоренца для классического эффекта Холла

$$\rho_{xy} = H/(n_s e c), \quad (21.14)$$

мы получаем соотношение (21.12).

Приведенное объяснение квантового холл-эффекта в "нулевом приближении", однако, не является удовлетворительным, так как не соответствует эксперименту в одном, принципиальном отношении. Действительно, добавление (или удаление) сколь угодно малого числа частиц в систему, приведенную на рис. 6.10, в, немедленно приводит к восстановлению диссипации (рис. 6.10, г). Состояния в и г на рис. 6.10 различаются по шкале энергий на довольно большую величину $\epsilon_{i+1} - \epsilon_i$, однако по концентрации носителей в системе (или по числу состояний, т.е. магнитному полю) обе ситуации различаются на сколь угодно малую величину (предполагается, что площадь ИС макроскопически велика). Следовательно, в рамках рассматриваемого объяснения соотношения (21.11) и (21.12) должны выполняться лишь в одной точке по концентрации (или по магнитному полю). Именно такое поведение ρ_{xy} и ρ_{xx} предсказывали существовавшие до 1980 г. теории [259] (см. рис. 6.10, г). В эксперименте же наблюдаются

плато ρ_{xy} и минимум ρ_{xx} , ширина которых составляет десятки процентов от ρ_{xx} (рис. 6.11 [262]). Эти важные детали отличают квантовый эффект Холла, имеющий место при пересечении уровня Ферми уровнями Ландау с малыми номерами от обычных осцилляций тензора сопротивления – эффекта Шубникова – де Газа.

Дальнейшее обсуждение целочисленного квантового холл-эффекта

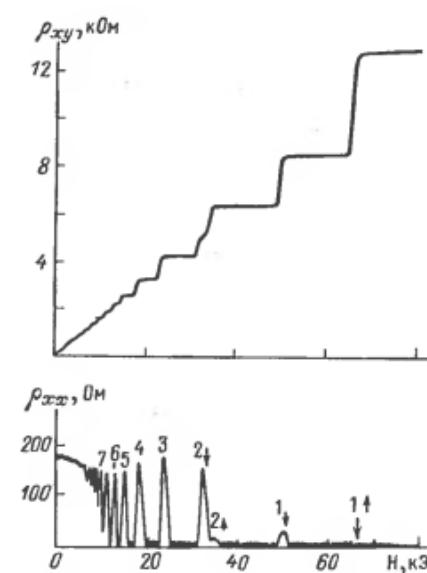
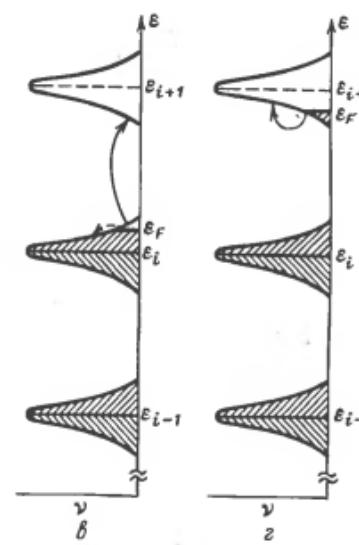
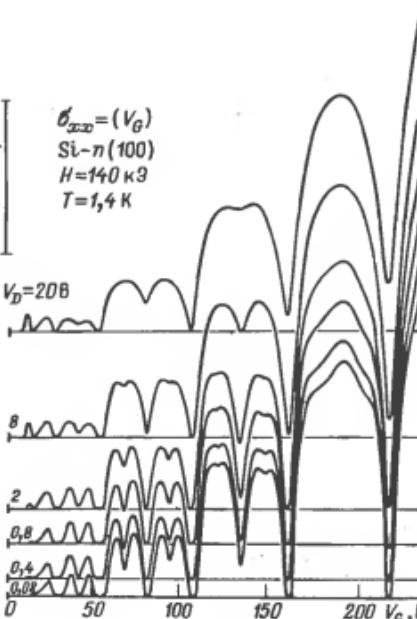
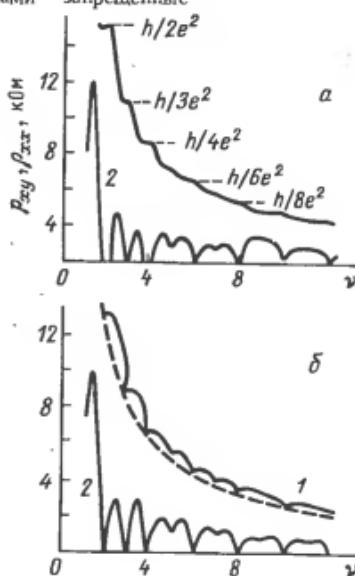


Рис. 6.11. Зависимости ρ_{xy} и ρ_{xx} от магнитного поля H для GaAs-гетероперехода при температуре 50 мК [262]. Измерения проведены на переменном токе частотой 11 Гц при плотности тока $j = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$. Цифры и стрелки над пиками ρ_{xx} обозначают номер уровня Ландау ρ_{xx} и спиновую поляризацию уровня

Рис. 6.9. Осцилляции Шубникова – де Газа в проводимости инверсионного слоя функции V_G . В качестве параметра меняется напряженность дрейфового поля V_D (Каваджи и др. [256])

Рис. 6.10. а, б – Зависимость холловской (1) и диагональной (2) компонент тензора удельного сопротивления кремниевой МДП-структуры от числа заполнения ν уровней Ландау ($\nu = n/n_H$, где $n_H = eH/c\hbar$). а – Эксперимент [257], $H = 189$ кЭ, $T = 1.5$ К; б – теоретические зависимости $\rho_{xy}(\nu)$ (1) и $\rho_{xx}(\nu)$ (2), построенные на основе экспериментальной зависимости $\rho_{xx}(\nu)$ (рисунок а), идеализированной в соответствии с теорией [259]

в, г – Схематическая зависимость плотности состояний $\nu(e)$ на 2-d-уровнях Ландау e_i от энергии при различных значениях энергии Ферми ϵ_F . Заштрихованные участки $\nu(e)$ обозначают заполненные области связанных состояний. Зачернены области подвижных состояний. Стрелками показаны разрешенные переходы, штриховыми стрелками – запрещенные



Движение электронов ИС в нормальном магнитном поле является финитным по всем направлениям. Вследствие этого концентрация возможных состояний на каждом из заполненных уровней Ландау фиксирована – она точно равна числу квантов магнитного потока, пронизывающего единичную площадь образца:

$$n_H = \Phi/\Phi_0 = He/(c\hbar). \quad (21.13)$$

Подставляя выражение (21.13) в формулу Лоренца для классического эффекта Холла

$$\rho_{xy} = H/(n_s e c), \quad (21.14)$$

мы получаем соотношение (21.12).

Приведенное объяснение квантового холл-эффекта в "нулевом приближении", однако, не является удовлетворительным, так как не соответствует эксперименту в одном, принципиальном отношении. Действительно, добавление (или удаление) сколь угодно малого числа частиц в систему, приведенную на рис. 6.10, б, немедленно приводит к восстановлению диссипации (рис. 6.10, г). Состояния в и г на рис. 6.10 различаются по шкале энергий на довольно большую величину $\epsilon_{i+1} - \epsilon_i$, однако по концентрации носителей в системе (или по числу состояний, т.е. магнитному полю) обе ситуации различаются на сколь угодно малую величину (предполагается, что площадь ИС макроскопически велика). Следовательно, в рамках рассматриваемого объяснения соотношения (21.11) и (21.12) должны выполняться лишь в одной точке по концентрации (или по магнитному полю). Именно такое поведение ρ_{xy} и ρ_{xx} предсказывали существовавшие до 1980 г. теории [259] (см. рис. 6.10, г). В эксперименте же наблюдаются

плато ρ_{xy} и минимум ρ_{xx} , ширина которых составляет десятки процентов от ρ_{xx} (рис. 6.11 [262]). Эти важные детали отличают квантовый эффект Холла, имеющий место при пересечении уровня Ферми уровнями Ландау с малыми номерами от обычных осцилляций тензора сопротивления – эффекта Шубникова – де Газа.

Дальнейшее обсуждение целочисленного квантового холл-эф-

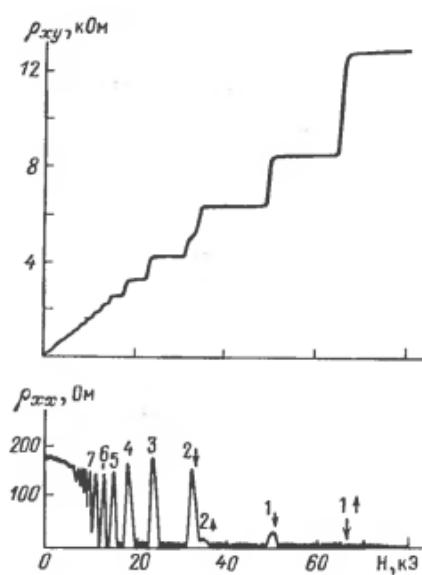


Рис. 6.11. Зависимости ρ_{xy} и ρ_{xx} от магнитного поля H для GaAs-гетероперехода при температуре 50 мК [262]. Измерения проведены на переменном токе частотой 11 Гц при плотности тока $j = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$. Цифры и стрелки над пиками ρ_{xx} обозначают номер уровня Ландау ρ_{xx} и спиновую поляризацию уровня

фекта, а также введение в физику дробного квантового холл-эффекта [263] выходят за рамки наших возможностей, ограниченных фиксированным объемом книги. В связи с этим уместно перечислить ряд интересных обзоров о квантовом холл-эффекте, появившихся в самое последнее время [264–268].

§ 22. Заряженные слои в полупроводниках с узкой щелью, гетероструктуры

22.1. Инверсионные слои могут быть получены и в других полупроводниках. Расширение круга исследуемых МДП-структур является естественным процессом. Кроме того, в ряде случаев появляется возможность упростить или видоизменить набор параметров, характеризующих данный инверсионный слой.

Ярким примером реализации таких возможностей являются инверсионные слои в полупроводниках с узкой щелью. Речь идет о полупроводниках типа: InSb, Hg_{1-x}Cd_xTe, PbTe. По сравнению с "классическим" ИС в кремнии в полупроводниках с узкой щелью диэлектрическая постоянная больше, а эффективная масса меньше. Таким образом, радиус Бора в этих системах больше, а характерный радиус r_s^* *, играющий существенную роль в различных многочастичных эффектах, много меньше, чем в кремнии. Например, для InSb при $n_s \approx 10^{12} \text{ см}^{-2}$ оценка r_s дает $r_s \approx 0.2$ – что примерно в 17 раз меньше, чем в случае Si (100) с той же плотностью n_s . Соответственно, для кремния многочастичные эффекты приводят к перенормировке расстояний между электрическими подзонами примерно в два раза, в то время как в полупроводниках с узкой щелью эта коррекция имеет масштаб нескольких процентов и, следовательно, может быть учтена более последовательно.

Не менее существенные упрощения возникают благодаря отсутствию большого числа долин в прямозонных полупроводниках и, следовательно, отсутствию междолинного взаимодействия, резко усложняющего многие наблюдаемые эффекты в кремниевых инверсионных слоях. Наконец, в прямозонных полупроводниках гораздо менее актуальна проблема анизотропии закона дисперсии подвижных носителей заряда.

Вместе с тем узость запрещенной зоны в прямозонных полупроводниках приводит и к осложнениям. В частности, появление в задаче сильного электрического поля ведет к "смешиванию" состояний из валентной зоны и зоны проводимости. Для примера на рис. 6.12 представлены данные об осцилляциях Шубникова – де Гааза для InSb [269], свидетельствующие о параллельном заполнении в данном инверсионном слое сразу трех электрических подзон. Рис. 6.13 демонстрирует данные о ЦР для InAs из [270].

Среди теоретических результатов в этой области отметим работы Завадского [271, 272], в которых получено и исследовано эффективное нелинейное уравнение для определения закона дисперсии электронов, формирующих инверсионный слой в полупроводниках с узкой щелью.

*) Как обычно, r_s есть отношение среднего расстояния между электронами к боровскому радиусу.

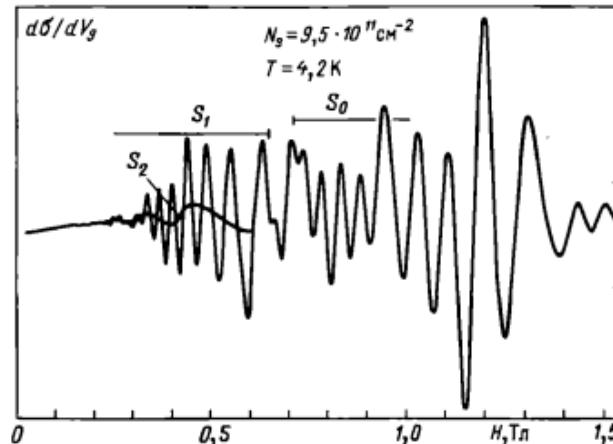


Рис. 6.12. Магнетоквантовые осцилляции поверхности проводимости InSb. Три независимых периода S четко просматриваются в этой записи (Дарр [269]).

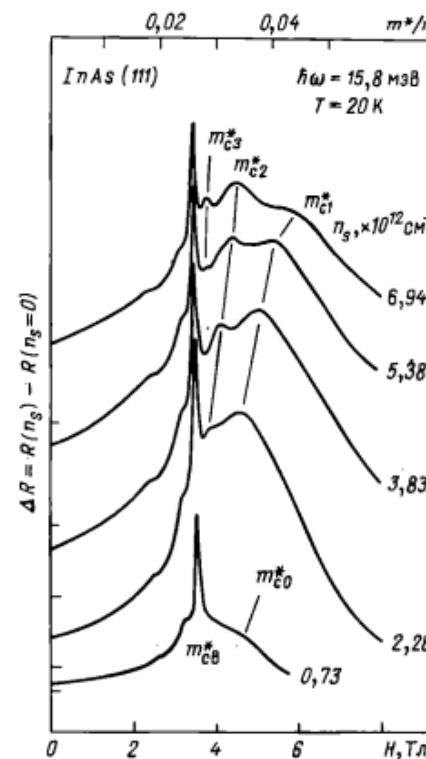


Рис. 6.13. ЦР для инверсионных электронов в вырожденном InAs. Резкий пик отвечает разонансу на объемных электронах с массой m_{c0}^* ; дополнительные пики с различными значениями m_{ci}^* отвечают возбуждению ЦР в разных электрических подзонах [270].

22.2. Обсуждая различные способы создания в полупроводниках 2 – d-электронных систем, следует, хотя бы вкратце, остановиться на принципиально отличном решении этой задачи. Речь идет о выращивании многослойных структур, в которых периодически чередуются полупроводниковые слои разного химического состава. Первоначально искусственные гетероструктуры создавались, в основном, для реализации модели твердого тела, характеристики которого модулированы периодическим одномерным возмущением [273]. В дальнейшем, однако, выяснилось, что наиболее ценными в этих структурах являются свойства не вдоль периодического потенциала, а в нормальном к нему направлении, вдоль двумерных слоев, содержащих проводящие электроны.

Исходные соображения, лежащие в основе конструирования гетероструктур, состоят в следующем. Очевидно, что для образования инверсионных слоев в глубине полупроводника несущественна природа электрического поля, стимулирующего инверсию. В частности, это может быть поле, возникающее на границе раздела двух подобных полупроводников с одинаковым периодом кристаллической решетки, но разной величиной энергетической щели. Наиболее изученной системой такого типа является гетеропереход $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{AsGaAs}$.

Энергетическая щель E_g в $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ больше, чем в GaAs, и ее значение линейно зависит от концентрации Al; при $x = 0,3$ разность значений E_g составляет $\Delta E_g \approx 400$ мэВ (при $T \approx 4$ К [274, 275]). Разность ΔE_g при контакте этих полупроводников приходится преимущественно на скачок дна зоны проводимости [275] (300–350 мэВ). Однако свободные носители, поставляемые в зону проводимости $n - \text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ с примесных донорных уровней, туннелируют через границу раздела в зону проводимости GaAs, уравнивая химические потенциалы по обе стороны барьера. В результате этого переноса заряда создается сильное внутреннее поле $\sim 10^5$ В · см⁻¹, которое приводит к изгибу зон вблизи границы раздела (рис. 6.14, a). В образовавшейся треугольной потенциальной яме воз-

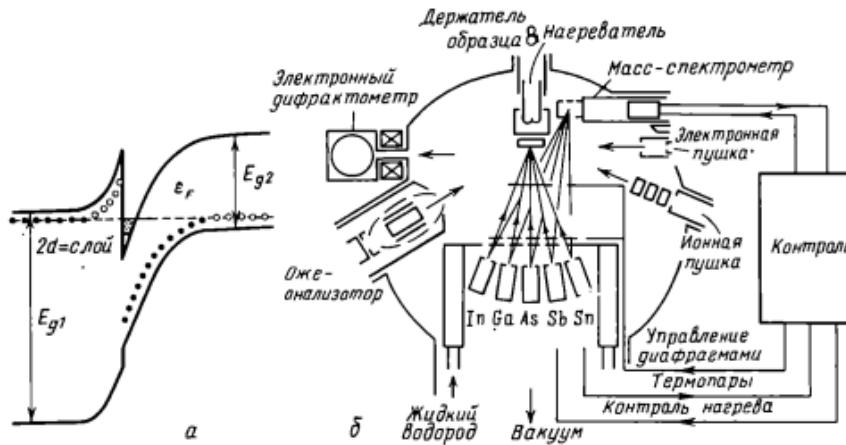


Рис. 6.14. а – Зонная схема типичного гетероперехода.
б – Схема установки для молекулярной эпитаксии

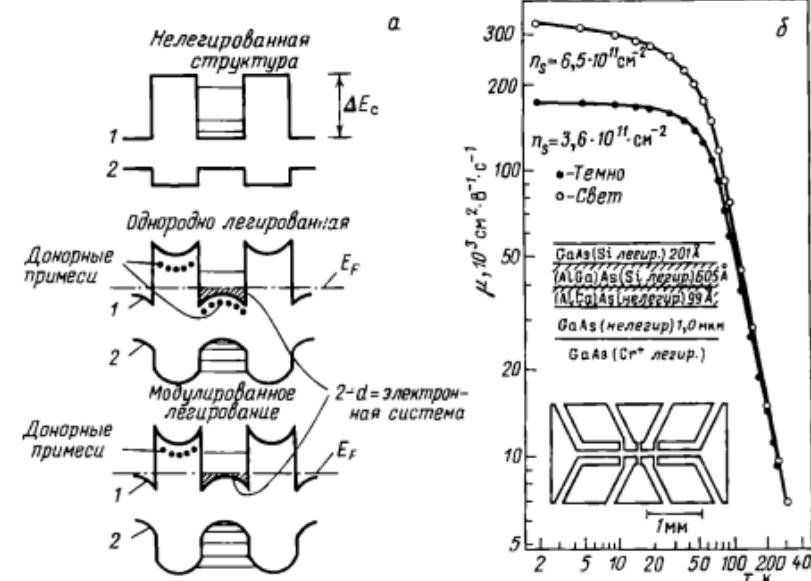


Рис. 6.15. а – Схема модулированного легирования гетероструктур: 1 – зона проводимости, 2 – валентная зона.

б – Электронная подвижность в гетероструктуре с модулированным легированием. Нижняя ветвь – подвижность неосвещенного образца, верхняя ветвь – с освещением (Штермер и др. [276])

никает двумерный слой носителей, как и в обычном инверсионном слое, причем в GaAs эффективная масса носителей ($m^* = 0,067 m$) примерно в три раза меньше, чем в Si.

Необходимый для существования 2 – d-слоя резкий переход с протяженностью порядка постоянной решетки методами молекулярно-пучковой эпитаксии на установках, схема одной из которых приведена на рис. 6.14, б. Применение технологии модулированного легирования гетероперехода позволяет пространственно разделить носители в 2-d-слое в GaAs и их донорные примеси в $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Схема подобного разделения приведена на рис. 6.15, а. Подвижность носителей в 2-d-слое увеличивается вследствие этого на один-два порядка (по сравнению с однородным легированием до тех же концентраций). Более тщательные исследования показали, что для увеличения подвижности носителей в 2-d-слоях весьма полезно введение в гетероструктуру еще одного дополнительного слоя (*spairing layer*), разделяющего свободные носители и заряженные примеси, являющиеся основным источником рассеяния носителей. Именно в таких образцах в настоящее время достигнуты рекордные подвижности $\mu < 10^7$ см² · В⁻¹ · с⁻¹. Пример соответствующей структуры из [276] и данные о подвижности в ее инверсионном слое приведены на рис. 6.15, б.

Среди приложений, наиболее полно использующих достоинства гетероструктур, следует назвать создание нового класса полевых транзи-

ров. Важнейшим примером транзистора является крутизна его вольт-амперной характеристики, определяющая скорость переключения различных устройств на основе полевых транзисторов. Крутизна ВАХ зависит от подвижности электронов в проводящем канале. Приборы, созданные на основе высококачественных гетероструктур, получили специальное название ХЕМТ (HEMT) – транзистор с высокой подвижностью электронов. Наилучшими параметрами на сегодняшний день обладают ХЕМТ с так называемым коротким каналом; созданные японской фирмой Fujitsu [277].

В области фундаментальных исследований именно на гетероструктурах был впервые обнаружен дробный квантовый эффект Холла [263].

22.3. Относительная простота электронного спектра прямозонных полупроводников позволяет осуществить количественный расчет различных равновесных и кинетических характеристик этих двумерных систем. Серия таких результатов для 2-d-систем на основе GaAs получена Завадским и Лассингом [278].

Н а м а г и ч е н н о с т ь. Расчет выполнен для двумерного газа невзаимодействующих электронов с параболическим законом дисперсии и малым g -фактором. Конкретные сведения о намагниченности $M = -\partial F / \partial H$, где F – свободная энергия 2-d-системы в магнитном поле H , получены для значений эффективной массы электронов $m^* = 0,0665 m$, плотности электронов $n_s \approx 8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, характерного уширения уровней Ландау $\Gamma \approx 0,5 \text{ МэВ}$ и температуры $T = 4,2 \text{ К}$. Поведение M в функции от H приведено на рис. 6.16, a .

Любопытно отметить, что в пионерской работе, посвященной интерпретации осцилляции Шубникова – де Гааза в 3-d-металлах, Пайерлс [279] использовал 2-d-модель металла при $T = 0$. Уже это первое рассмотрение привело к зависимости $M(H)$, похожей на изображенную на рис. 6.16, a .

Экспериментальная информация о намагниченности суперрешетки GaAs–GaAlAs (172 слоя) представлена на рис. 6.16, b [280]. Эксперимент находится в хорошем соответствии с теорией [278].

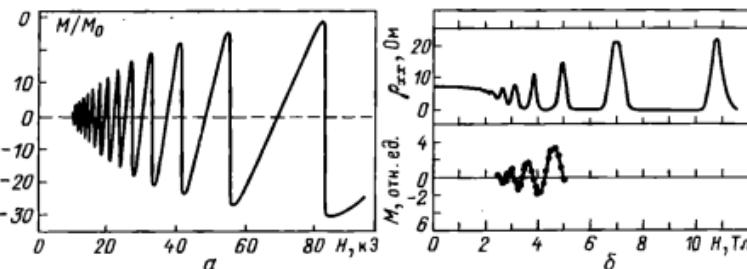


Рис. 6.16. a – Намагниченность M/M_0 2 – d-электронной системы в функции от H для $m^* = 0,0665 m$; $n_s = 8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$; $T = 4,2 \text{ К}$; $M_0 = T(2e/\hbar c)$ [278].

b – Магнитный момент GaAs–GaAlAs суперрешетки (172 слоя) в функции от H для $T = 1,5 \text{ К}$. Здесь же приведены данные об осцилляциях Шубникова – де Гааза [280] для ρ_{xx}

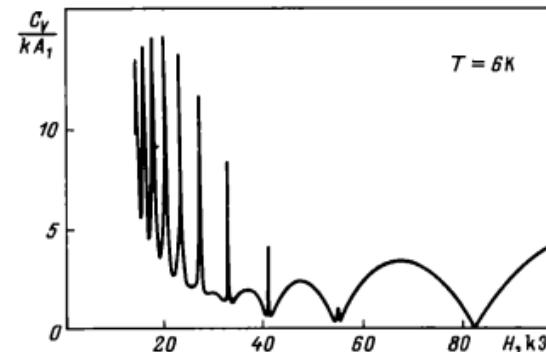


Рис. 6.17. Теплоемкость C_V 2 – d-электронного газа в функции поля H . Здесь $A_1 = \pi^{-1} (eH/\hbar c)$ для $H = 1 \text{ кЭ}$, k – постоянная Больцмана [278]

Теплоемкость этой же 2 – d-системы, как видно из рис. 6.17, содержит два вклада. В области сильных полей, когда $\hbar\omega_c \gg T$, вклад в теплоемкость дают лишь электронные переходы между уровнями Ландау. Если один из уровней полностью занят, а лежащий над ним – пуст, то теплоемкость обращается в нуль. С уменьшением магнитного поля при конечной температуре возникает вклад в теплоемкость от электронных переходов внутри одной зоны Ландау. Наконец, резкие всплески теплоемкости, хорошо видные на рис. 6.17, связаны с резкими скачками химического потенциала при его пересечении с уровнями Ландау.

Экспериментальные данные о теплоемкости вырожденных 2 – d-систем в магнитном поле пока отсутствуют. Однако успехи в решении этой задачи для электронов над гелием (см. конец предыдущей главы) позволяют надеяться, что вопрос о теплоемкости будет в скором времени решен и для вырожденных 2 – d-систем.

Т е р м о м а г н и т н ы й т р а н с п о р т. Квантовая теория термомагнитного транспорта долгое время сталкивалась с трудностями (нарушение соотношений симметрии Онзагера). Парадокс был разрешен Образцовым [281], который показал, что последовательное решение задачи должно учитывать вклад в термотранспорт намагниченности 2 – d-системы. С использованием этого формализма в работе [278] посчитано поведение термоэлектрического коэффициента для 2 – d-системы с параметрами GaAs и $T = 6 \text{ К}$ в функции от магнитного поля. Соответствующие данные представлены на рис. 6.18, a . Первые экспериментальные данные (рис. 6.18, b) для термоэлектрической постоянной, полученные на гетероструктуре GaAs в [282], подтверждают существование осцилляций термо-ЭДС при монотонном изменении магнитного поля.

22.4. Как отмечалось в конце предыдущей главы, одним из последних достижений в области изучения динамики двумерных заряженных систем является обнаружение краевых магнетоплазмонов, спектр которых обладает рядом специфических особенностей, позволяющих легко идентифицировать подобные колебания. Первые эксперименты, имеющие отноше-

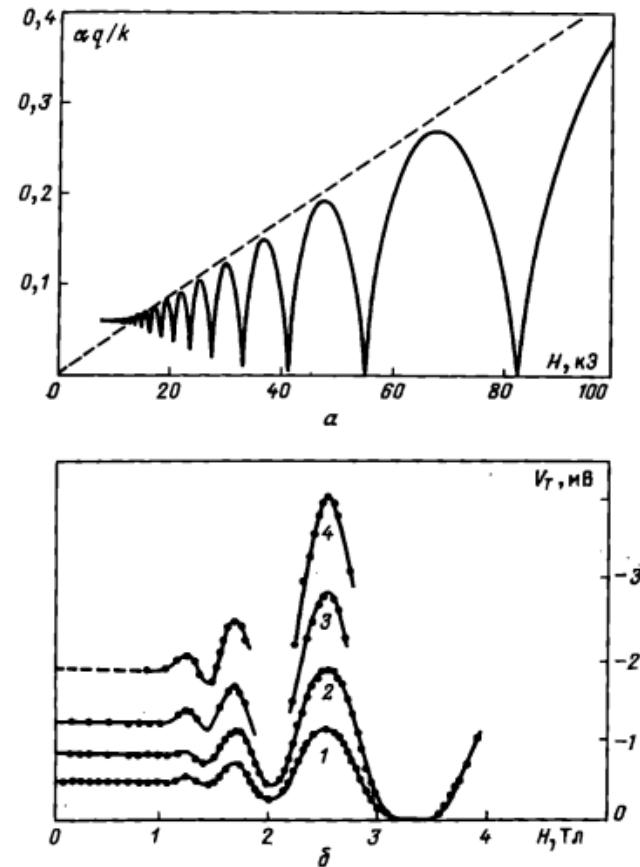


Рис. 6.18. а – Термо-ЭДС q для $2 - d$ -электронного газа, посчитанная для GaAs и $T = 6$ К. Штриховая линия определяет максимальное значение термо-ЭДС, равное $\alpha_{\max} = (k \ln 2) / v e$ [278].

б – Экспериментальное определение осцилляций термо-ЭДС V_T в функции от H для разных, растущих с номером кривой ($1-4$), градиентов температуры на GaAs–GaAlAs гетероструктуре. Температура эксперимента $T = 4,2$ К [282]

ние к данной проблеме, были выполнены на гетероструктуре GaAs, подготовленной в виде периодического набора двумерных электронных дисков [283]. Авторы этой работы интересовались поведением плазменного резонанса, системы дисков, возбуждаемого однородным ВЧ-полем с электрическим вектором вдоль плоскости гетероструктуры, в зависимости от магнитного поля, нормального к плоскости этой структуры. Результаты эксперимента представлены на рис. 6.19 и свидетельствуют о расщеплении плазменного резонанса на две ветви. Одна из них, ω_+ , растущая с увеличением магнитного поля, ведет себя в соответствии с предсказаниями

теории для неограниченной $2 - d$ -системы (см. определение ω_+ из (19.8)). Вторая мода ω_- , для которой частота падает с ростом магнитного поля, возникает лишь в ограниченных $2 - d$ -системах и, как выяснилось в дальнейшем, с увеличением азимутального числа превращается в краевой магнетоплазмон, локализованный вблизи периметра $2 - d$ -системы.

Теория краевых магнетоплазмонов строилась параллельно с экспериментальными исследованиями [284–287] и в настоящее время достаточно хорошо развита, в основном, в области слабых магнитных полей. В простейшем случае дипольного возбуждения эффект расщепления плазменных частот легко получается с использованием так называемого приближения деполяризованного фактора [283]. Конечный ответ для дипольной части спектра краевых магнетоплазмонов при этом выглядит так:

$$\omega_{\pm} = (\omega_0^2 + \omega_c^2/4)^{1/2} \pm \omega_c, \quad (22.1)$$

и может интерпретироваться как зееман-эффект для дискретной плазменной частоты ω_0 . Экспериментальные точки из [283] прекрасно ложатся на теоретические кривые из (22.1) при условии, что исходная плазменная частота ω_0 берется из эксперимента (см. рис. 6.19, б).

Реальное понимание возникновения в данной задаче локализации плазмонов вблизи периметра $2 - d$ -системы появилось в последующих работах [217–219], выполненных с электронами на поверхности гелия. Авторы этих работ смогли возбудить высокие азимутальные моды плазменных колебаний $\omega_{\pm}^{l, m}$ ($l, m > 1$) и предложили соответствующую интерпретацию, однозначно свидетельствующую о локализации мягкой моды $\omega_{\perp}^{l=1}$.

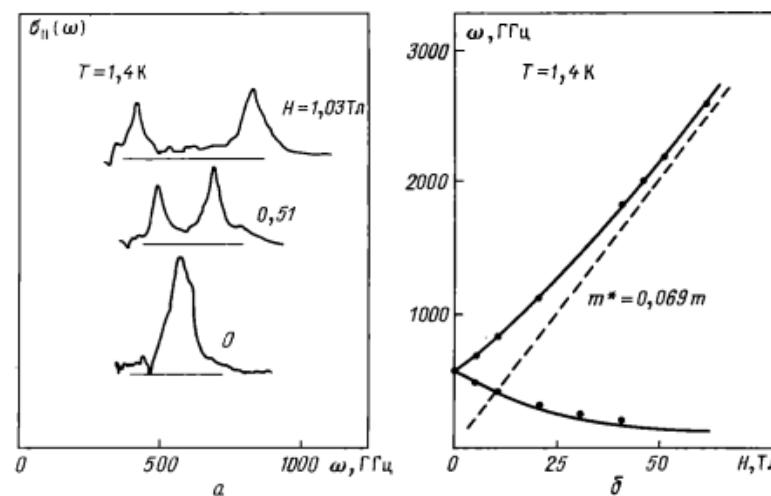


Рис. 6.19. а – Поведение плазменного резонанса системы электронных дисков в магнитном поле H , нормальному плоскостям дисков [283].

б – Обработка экспериментальных данных рисунка а. Сплошные линии – определение ω_{\pm} (22.1) с $m^* = 0,069 m$ и частотой ω_0 , отвечающей случаю $H = 0$ на рисунке а [283].

вблизи границы 2 – d -системы. Соответствующая информация (экспериментальная и теоретическая), развивающая результаты [283], собрана на рис. 5.9. Очевидно, что в области слабых магнитных полей соответствие между экспериментом и теорией [218] достаточно хорошее.

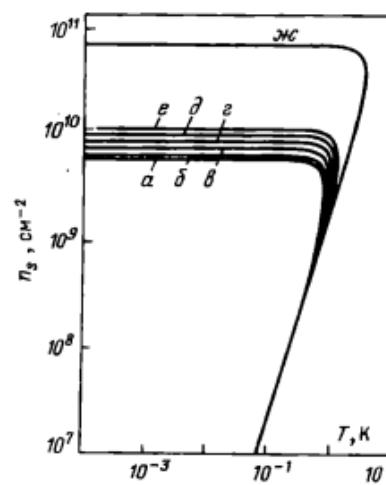
В настоящее время ведутся интенсивные исследования свойств, краевых магнетоплазмонов в гетероструктурах с параметрами, отвечающими режиму квантового эффекта Холла [288–289].

22.5. Заканчивая обсуждение коллективных эффектов в электронных системах, сформированных в гетероструктурах, имеет смысл вернуться к проблеме вигнеровской кристаллизации. Несмотря на то что в исходном состоянии такие системы являются вырожденными, наложение сильного магнитного поля может привести к возникновению условий, благоприятствующих электронной кристаллизации. В связи с этим существует обширная теоретическая деятельность относительно свойств двумерной электронной решетки в сильных магнитных полях. Детальное обсуждение имеющейся здесь информации является большой самостоятельной задачей и, осуществлено в ряде подробных обзоров [223, 290, 291]. Поэтому мы ограничимся комментариями лишь последних результатов, представляющими нам наиболее интересными.

Прежде всего, имеет смысл отметить новые попытки расчета фазовой диаграммы ВК кристалла в магнитном поле [292, 293]. Речь идет о том, что модуль сдвига 2 – d -кристалла $\mu(T)$, рассчитанный с учетом ангармонического поведения электронной решетки, содержит особенность $\partial\mu/\partial T|_{T_c} \rightarrow \infty$, положение которой можно связать с температурой плавления T_c . Это обстоятельство впервые отмечалось Платцманом и Фукуямой [294]. Однако конкретные приближения, использованные в [294] при обнаружении этой особенности, оказались достаточно грубыми, давая для критического значения Γ_c в классической области значение $\Gamma_c \approx 3$. Авторы [292] утверждают, что более адекватное рассмотрение сдвигает критическую точку области к значению $\Gamma_c \approx 130$, что соответствует действительности. По этой причине можно думать, что соответствующие предсказания из [292] в квантовой области, где особенность $\partial\mu/\partial T$ также имеет место, достаточно разумны.

Используя полученные результаты, авторы [292] "сконструировали" подходящий критерий Линдемана, заменяющий (19.14) и дающий правильное значение Γ_c в классической области.

Рис. 6.20. Фазовая диаграмма для 2 – d -электронной решетки в магнитном поле, изображенная в линейном и логарифмическом масштабах. В качестве параметра на рисунке фигурирует магнитное поле H (Тл): 0 (а); 2 (б); 4 (в); 6 (г); 8 (д); 10 (е); 100 (ж) [293]



С использованием этого критерия в [293] построена фазовая диаграмма для электронного кристалла в широком интервале магнитных полей (рис. 6.20). Очевидно, с ростом магнитного поля область существования кристалла резко увеличивается, так что поиски кристаллизации в исходно вырожденных 2 – d -системах выглядят обоснованными.

Очень интересна попытка обнаружения поперечной жесткости $\mu \neq 0$ в сильно замагниченной 2 – d -электронной системе на основе GaAs, предпринятая авторами [295]. Методика возбуждения поперечной моды аналогична использованной этими же авторами при изучении модуля сдвига в электронном кристалле над гелием. Обращает на себя внимание методический прогресс. Если в экспериментах над гелием [214] характерные волновые числа возбуждения имели масштаб $k \approx 500 \text{ см}^{-1}$, то в экспериментах с гетероструктурой период линии задержки имеет масштаб $k \approx 4000 \text{ см}^{-1}$. Конечные результаты этого эксперимента оказались пока отрицательными: в области $v < 1/5$, там где ВК-решетка в сильном магнитном поле могла бы возникать, возбуждение поперечного звука не регистрируется*).

*.) В начале 1988 г. появилось сообщение [296] об обнаружении фазового перехода в замагниченной 2 – d -электронной системе, имеющей место в гетероструктуре GaAs/GaAlAs. Авторы [296] приписывают этот переход вигнеровской кристаллизации электронов в 2 – d -системе. Критический фактор заполнения v_c , ниже которого реализуется вигнеровский кристалл, равен $v_c = 0,190 \pm 0,005$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atkins K.R. // Phys. Rev. – 1959. – V. 116. – P. 1339.
2. Архипов Р.Г. // УФН. – 1966. – Т. 88. – С. 185.
3. Gross E.P. // Ann. Phys. (N.Y.) – 1962. – V. 19. – P. 234.
4. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 58. – С. 1748.
5. Poitrenaud J., Williams F.J.B. // Phys. Rev. Lett. 1972. – V. 29. – P. 1230; 1974. – V. 32. – P. 1213.
6. Смирнов Б.М. // УФН. – 1967. – Т. 92. – С. 75.
7. Davis H.T., Dagonnier R. // J. Chem. Phys. – 1969. – V. 44. – P. 4030.
8. Веут Г., Barrera R., Pethick C. // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 22. – P. 20.
9. Ландау Л.Д., Либштадт Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
10. Schwarz K.W., Stark P.W. // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 22. – P. 1978.
11. Есельсон Б.Н., Ковдя Ю.З., Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59. С. 64.
12. Kuchnir M., Ketterson J.B., Roach P.R. // Phys. Rev. A. – 1972. – V. 6. – P. 341.
13. Bardeen J., Feynman R.P., Pines D. // Phys. Rev. – 1967. – 1967. – V. 156. – P. 207.
14. Bowley R.M., Lekner J. // J. Phys. C – 1970. – V. 3. – P. L127.
15. O'Malley T.F., Spruch L., Rosenberg L. // J. Math. Phys. – 1961. – V. 2. – P. 491.
16. Больцман Л. Лекции по теории газов. – М.: Гостехиздат, 1953. – С. 244.
17. Ferrel R.A. // Phys. Rev. – 1937. – Т. 108. – Р. 167.
18. Careri G., Fasoli V., Gaeta F. // Nuovo Cimento. – 1960. – Т. 15. – P. 774.
19. Sommer W.T. // Phys. Rev. Lett. – 1964. – V. 12. – P. 271.
20. Springett B.E., Cohen M.H., Jortner J. // Phys. Rev. – 1967. – V. 159. – P. 183; Yu-Min Shih, Chia-Wei Woo // Ibid. – 1973. – V. 8. – P. 1437.
21. Halperin B., Gomer R. // J. Chem. Phys. – 1965. – V. 43. – P. 1069; Лебеденко В.Н., Родионов Б.У. // Письма ЖЭТФ – 1972. – Т. 16. – С. 583; Гачечиладзе И.А., Кешишевошвили А.И. // Письма ЖЭТФ. – 1971. – Т. 12. – С. 231.
22. Canter K.F., McNutt J.D., Roellling L.O. // Phys. Rev. A. – 1975. – V. 12. – P. 375.
23. Завьялова В.В., Смольянинов И.И. // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 92. – С. 339.
24. Schwarz K.W., Stark P.W. // Phys. Rev. Lett. – 1968. – V. 21. – P. 967.
25. Gross E.P., Tung-Li H. // Phys. Rev. – 1968. – V. 170. – P. 253; Celli V., Cohen M.H., Zuckerman M.J. // Ibid. – 1968. – V. 173. – P. 253.
26. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М.: ИЛ, 1958. – Т. 2.
27. Ostermeier R.M. // Phys. Rev. – 1973. – V. A8. – P. 514.
28. Zipfel C., Sanders T.M., Jr. // Proc. of the II-th Inters. Conference on Low Temperature Physics / Ed. J.F. Allen et al. – Scotland: University of St. Andrews Printing Depart., 1969. – P. 296.
29. Ott-Rowland Mary L., Kotsubo V., Theobald Y., Williams G.A. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – P. 1708.
30. Cole M., Cohen M.H. // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 23. – P. 1238.
31. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 58. – С. 1748.
32. Есельсон Б.Н., Григорьев В.Н., Иванцов В.Г., Рудавский Э.Я., Санникидзе Д.Г., Сербин И.А. Растворы квантовых жидкостей. – М.: Наука, 1973.
33. Grimes C.C., Brown T.R. // Phys. Rev. Lett. – 1974. – V. 32. – P. 280.
34. Grimes C.C., Brown T.R., Burnes M.L., Zipfel C.L. // Phys. Rev. B. 1976. – V. 13. – P. 140.
35. Cole M.W. // Phys. Rev. B. – 1970. – V. 2. – P. 4239.
36. Cole M.W. // Rev. Mod. Phys. – 1974. – V. 36. – P. 451.
37. Sanders T.M., Weinreich G. // Phys. Rev. B. – 1976. – V. 13. – P. 4810.
38. Hipolito O., de Felicio J.R.D., Farias G.A. // Sol. St. Comm. – 1978. – V. 28. – P. 365.
39. Gomer R., Swansen L.W. // J. Chem. Phys. – 1963. – V. 38. – P. 1613.
40. Володин А.П., Эдельман В.С. // Письма ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30. – Р. 668; ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 368.
41. Эдельман В.С. // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77. – Р. 673.
42. Габович А.М., Ильченко Л.Г., Пашицкий Э.А. // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79. – С. 665.
43. Габович А.М., Ильченко Л.Г., Пашицкий Э.А. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 2063.
44. Lambert D.K., Richards P.L. // Phys. Rev. B. – 1981. – V. 23. – P. 328.
45. Crandall R.S., Williams R. // Phys. Rev. A. – 1972. – V. 5. – P. 2183.
46. Шикин В.Б., Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1975. – Т. 1. – С. 957.
47. Монарха Ю.П., Соколов С.С. // ФНТ. – 1978. – Т. 4. – Р. 685.
48. Черникова Д.М. // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68. – Р. 249.
49. Эдельман В.С. // Письма ЖЭТФ. – 1977. – Т. 25. – С. 422.
50. Либштадт Е.М., Косевич А.М. // ЖЭТФ. – 1955. – Т. 29. – С. 743.
51. Хайкин М.С. // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – С. 212.
52. Noe T. W., Prange R.E. // Phys. Rev. Lett. – 1967. – V. 25A – P. 582.
53. Канер Э.А., Макаров Н.М., Фукс И.М. // ЖЭТФ. – 1968. – Т. 55. – С. 931.
54. Zipfel C.L., Brown T.R., Grimes C.C. // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 26. – P. 1760.
55. Zipfel C.L., Brown T.R., Grimes C.C. // Surf. Sci. – 1976. – V. 58. – P. 283.
56. Ando T. // J. Phys. Soc. Japan. – 1978. – V. 44. – P. 765.
57. Справочник по специальным функциям Пер. с англ. / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – С. 322.
58. Татарский В.В., Шикина Н.И., Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 82. – С. 747.
59. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1977. – Т. 3. – Р. 1459.
60. Чаплик А.В. // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62. – Р. 746.
61. Гинзбург В.Л., Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1978. – Т. 4. – С. 1236.
62. Шик А.И. // ФНТ. – 1974. – Т. 8. – С. 1841.
63. Reutov Л.С., Фишер И.З. // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60. – С. 1814.
64. Edwards D.O., Saam W.F. // Progr. Low Temp. Phys. – 1978. – V. 7a. – P. 293.
65. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60. – С. 713.
66. Shikin V.B., Monarkha Yu.P. // JLTP. – 1974. – V. 16. – P. 193.
67. Gaspari G.D., Bridges F.J. // JLTP. – 1975. – V. 21. – P. 535.
68. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1977. – Т. 3. – С. 587.
69. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1978. – Т. 4. – С. 1093.
70. Huang H.H., Shin Y.M., Woo C.W. // JLTP. – 1974. – V. 14. – P. 413.
71. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1976. – Т. 2. – С. 1232.
72. Platzman P.M., Beni G. // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36. – P. 626.
73. Монарха Ю.П., Соколов С.С. // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 1283.
74. Рыбалко А.С., Ковдя Ю.З., Есельсон Б.Н. // Письма ЖЭТФ. – 1975. – Т. 22. – С. 569.
75. Mehrotra R., Guo C.J., Ruan V.Z., Mast D.B., Dahm A.J. // Phys. Rev. – 1984. – V. B29. – P. 5239.
76. Grimes C.C., Adams G. // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36. – P. 146.
77. Есельсон Б.Н., Рыбалко А.С., Соколов С.С. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 1120.
78. Татарский В.В., Шикин В.Б. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 1365.
79. Brown T.R., Grimes C.C. // Phys. Rev. Lett. – 1972. – V. 29. – 1233.
80. Давыдов А.С. // Теория твердого тела. – М.: Наука, 1976.
81. Sommer W.T., Tanner D.J. // Phys. Rev. Lett. – 1971. – V. 27. – P. 1345.
82. Рыбалко А.С. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 1980.
83. Crandall R.S. // Phys. Rev. B. – 1972. – V. 12. – P. 710.
84. Crandall R.S. // Phys. Rev. B. – 1975. – V. 12. – P. 119.
85. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 994.
86. Saitoh M. // J. Phys. Soc. Japan. – 1977. – V. 42. – P. 201.
87. Saitoh M., Aoki T. // J. Phys. Soc. Japan. – 1978. – V. 44. – P. 71.
88. Aoki T., Saitoh M. // J. Phys. Soc. Japan. – 1979. – V. 46. – P. 423.
89. Saitoh M., Aoki T. // Surf. Sci. – 1980. – V. 98. – P. 61.
90. Баск Ф.Т., Гуревич Ю.Т. // Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. – М.: Наука, 1975.

91. Есельсон Б.Н., Рыбалко А.С., Ковдри Ю.З. // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 1354.
92. Monarkha Yu. P., Sokolov S.S., Shikin V.B. // Solid St. Comm. – 1980. – V. 38. – Р. 611.
93. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77. – С. 717.
94. Bruschi T., Maraviglia B., Moss F. // Phys. Rev. Lett. – 1966. – V. 17. – Р. 632.
95. Schoepe W., Probst C. // Phys. Lett. – 1970. – V. A31. – Р. 490.
96. Rayfield G.W., Schoepe W. // Phys. Lett. – 1971. – V. A31. – 133.
97. Grandall R.S., Williams R. // Phys. Rev. A. – 1972. – V. 5. – Р. 2183.
98. Schoepe W., Rayfield C.W. // Phys. Rev. A. – 1973. – V. 7. – Р. 2111.
99. Cole M.W., Klein J.R. // JLTP. – 1979. – V. 36. – Р. 331.
100. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60. – С. 713.
101. Шикин В.Б., Монарха Ю.П. // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65. – С. 751.
102. Шикин В.Б. // Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 22. – С. 328.
103. Cheng A., Platzman P.M. // Solid St. Comm. – 1978. – V. 25. Р. 873.
104. Saitoh M. // J. Phys. C. – 1983. – V. 16. – Р. 6995.
105. Saitoh M. // J. Phys. C. – 1983. – V. 16. – Р. 6983.
106. Saitoh M. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – Р. 114.
107. Дыкман М.И. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 560.
108. Дыкман М.И. // Phys. Stat. Sol. (b). – 1978. – V. 88. – Р. 463.
109. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1975. – Т. 1. – С. 526.
110. Паттерман С. / Гидродинамика сверхтекучей жидкости: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978.
111. Sabisky E.S., Anderson C.H. // Phys. Rev. A. – 1973. – V. 7. – Р. 790.
112. Андреев А.Ф., Компанец Д.Л. // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 2459.
113. Hippolito O., Farias G.A., Studart N. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – Р. 394–400.
114. Jackson S.A., Platzman P.M. // Phys. Rev. – 1981. – V. 24. – Р. 499.
115. Jackson S.A., Platzman P.M. // Phys. Rev. – 1982. – V. B25. – Р. 4886.
116. Файнман Р., Хиба А. Квантовая механика и интегралы по траекториям: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968.
117. Sander L.M. // Phys. Rev. – 1975. – V. B11. – Р. 4350.
118. Kajita K. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – Р. 86.
119. Andrei E. Y. // Ptg. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – Р. 1449.
120. Leiderer P., Ebner W., Shikin V.B. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – Р. 405.
121. Шикин В.Б., Лейдерер П. // Письма ЖЭТФ. – 1980. – Т. 32. – С. 439.
122. Шикин В.Б., Лейдерер П. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 134.
123. Мельников В.И., Мешков С.В. // Письма ЖЭТФ. – 1981. – Т. 33. – С. 222.
124. Мельников В.И., Мешков С.В. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 951.
125. Savignac D., Leiderer P. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – Р. 1869.
126. Shikin V.B., Leiderer P. // Solid St. Comm. – 1983. – V. 47. – Р. 269.
127. Назин С.С., Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 85. – С. 530.
128. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86. – С. 521.
129. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. // Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – С. 47.
130. Balibar S., Edwards D.O., Laroche G. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – Р. 782.
131. Кешишев К.О., Паршин А.Я., Бабкин А.В. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80. – С. 716.
132. Андреев А.Ф., Паршин А.Я. // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 75. – С. 1511.
133. Savignac D. // Diplom. – Munchen: Physik-Department TUM E 10, 1982.
134. Degani M.H., Hippolito O. // Phys. Rev. B. – 1985. – V. 32. – Р. 3300.
135. Френкель Я.И. // Zs. der Sowjetunion. – 1935. – V. 8. – Р. 675.
136. Tonks T. // Phys. Rev. – 1935. – V. 48. – Р. 562.
137. Горьков Л.П., Черникова Д.М. // Письма ЖЭТФ. – 1973. – Т. 18. – С. 119.
138. Черникова Д.М. // ФНТ. – 1976. – Т. 2. – С. 1374.
139. Mita K., Ikezi H. // Phys. Rev. B. – 1978. – V. 17. – Р. 3567.
140. Вильямс Ф., Шикин В.Б. // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 1005.
141. Shikin V.B., Williams F.L.B. // JLTP. – 1981. – V. 43. – Р. 1.
142. Wanner M., Leiderer P. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – Р. 315.
143. Leiderer P. // Phys. Rev. – 1979. – V. B20. – 4511.
144. Ikezi H., Platzman P.M. // Phys. Rev. B. – 1982. – V. 23. – Р. 1145.
145. Шикин В.Б., Шикина Н.И., Татарский В.В. // Труды 4-й международной конференции "Электронные свойства 2-d-систем". США (Нью-Лондон), 1981.
146. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1982. – Т. 8. – С. 1133.
147. Татарский В.В., Шикина Н.И., Шикин В.Б. // ФНТ. – 1984. – Т. 10. – С. 117.
148. Вильк Ю.М., Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1984. – Т. 10. – С. 901.
149. Peeters F.M. // Phys. Rev. B. – 1984. – V. 30. – Р. 159.
150. Etz H., Bombert W., Leiderer P. // Proc. of LT-17 Conf. – West Germany, 1984. – Р. 395.
151. Татарский В.В. // ФНТ. – 1984. – Т. 10. – С. 435.
152. Татарский В.В. // ФНТ. – 1986. – Т. 12. – С. 451.
153. Володин А.П., Хайкин М.С., Эдельман В.С. // Письма ЖЭТФ. – 1977. – Т. 26. – С. 707.
154. Williams F.I.B. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – Р. 371.
155. Володин А.П., Эдельман В.С. // Письма ЖЭТФ. – 1983. – Т. 37. – С. 8.
156. Leiderer P. // Physica B. – 1984. – V. 186. – Р. 93.
157. Назин С.С., Шикин В.Б. // ФНТ. – 1986. – Т. 12. – С. 115.
158. Брикман В.А., Шайдулов Г.Ф. // ДАН СССР. – 1968. – Т. 180. – С. 1315.
159. Шаров М.Т. // Нестационарные процессы в жидкостях и твердых телах. – Уральский научный центр АН СССР, 1983. – С. 85.
160. Габович М.Д., Порицкий В.Я. // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 85. – С. 146.
161. Зайцев В.М., Шлиомис М.Н. // ДАН СССР. – 1969. – Т. 188. – С. 1261.
162. Кузнецов Е.А., Спектор М.Д. // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71. – С. 262.
163. Горьков Л.П., Черникова Д.М. // ДАН СССР. – 1976. – Т. 228. – С. 829.
164. Leiderer P., Wanner M. // Phys. Lett. A – 1979. – V. 73. – Р. 189.
165. Savignac D., Leiderer P. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – Р. 1869.
166. Giannetta R.W., Ikezi H. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – Р. 412.
167. Ikezi H. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – Р. 1688.
168. Черникова Д.М. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 1513.
169. Горьков Л.П., Черникова Д.М. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80. – С. 1940.
170. Мельников В.И., Мешков С.В. // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 82. – С. 191.
171. Ritchie R.H. // Phys. Rev. – 1957. – V. 106. – Р. 874.
172. Ferrell R.A. // Phys. Rev. – 1958. – V. 111. – Р. 1214.
173. Stern F. // Phys. Rev. Lett. – 1967. – V. 18. – Р. 546.
174. Platzman P.M., Tzoar H. // Phys. Rev. B. – 1976. – V. B13. – Р. 3197.
175. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1977. – Т. 3. – Р. 1459.
176. Fetter A.L. // Phys. Rev. – 1974. – V. B10. – Р. 3739.
177. Grimes C.C., Adams G. // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36. – Р. 145.
178. Grimes C.C., Adams G. // Surf. Sci. – 1976. – V. 58. – Р. 292.
179. Wigner E.P. // Phys. Rev. – 1934. – V. 46. – Р. 1002.
180. Wigner E.P. // Trans. Farad. Soc. – 1938. – V. 34. – Р. 678.
181. Grandall R.S., Williams R. // Phys. Lett. A. – 1971. – V. 7. – Р. 678.
182. Williams R., Crandall R.S. // Phys. Lett. A. – 1971. – V. 36. – Р. 35.
183. Crandall R.S. // Phys. Rev. A. – 1973. – V. 8. – Р. 2136.
184. Platzman P.M., Fukuyama H. // Phys. Rev. B. – 1974. – V. 10. – Р. 3150.
185. Bonsall L., Maradudin A.A. // Phys. Rev. B. – 1977. – V. 15. – 1959.
186. Morf R.H. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 43. – Р. 931.
187. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. // Статистическая физика. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – С. 471–477.
188. Чаплик А.В. // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72. – С. 1946.
189. Fukuyama H. // Solid St. Comm. – 1976. – V. 19. – Р. 551.
190. Уличич Ф.Р., Усов Н.А. // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 76. – С. 288.
191. Лозовик Ю.Е., Мусин Д.Р., Юдаин В.И. // ФНТ. – 1979. – Т. 21. – С. 1974.
192. Монарха Ю.П., Соколов С.С. // ФНТ. – 1982. – Т. 8. – С. 350.
193. Рахманов С.Я. // Solid St. Comm. – 1979. – V. 30. – Р. 779.
194. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. // J. Phys. C. – 1973. – V. C6. – 1131.
195. Thouless D.J. // J. Phys. C. – 1978. – V. 11. – Р. L 189.
196. Шикин В.Б. // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19. – С. 647.
197. Монарха Ю.П., Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 68. – С. 1423.
198. Шикин В.Б. // ЖЭТФ. – 1977. – Т. 72. – С. 1619.
199. Шикин В.Б., Монарха Ю.П. // Тезисы 19-го Всесоюзного совещания по физике низких температур. – Минск, 1976. – С. 3.

200. Grimes C.C., Adams G. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – P. 795.
201. Fisher D.S., Halperin B.I., Platzman P.M. // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 42. – P. 798.
202. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1980. – Т. 6. – С. 685.
203. Монарха Ю.П. // ФНТ. – 1981. – Т. 7. – С. 692.
204. Монарха Ю.П., Шикун В.Б. // ФНТ. – 1983. – Т. 9. – С. 913.
205. Фишер Д.С., Шикун В.Б. // Письма ЖЭТФ. – 1980. – Т. 31. – С. 338.
206. Монарха Ю.П., Шикун В.Б. // ФНТ. – 1988. – Т. 14. – С. 798.
207. Eguiluz A.G., Maradudin A.A. // Phys. Rev. B. – 1981. – V. 24. – P. 197.
208. Namaizawa H. // Solid St. Comm. – 1980. – V. 34. – P. 607.
209. Dykman M.I. // Solid St. Comm. – 1980. – V. 35. – P. 753.
210. Dykman M.I. // J. Phys. C. Solid State Phys. – 1982. – V. 15. – P. 7397.
211. Рыбако А.С., Есельсон Б.Н., Ковдря Ю.В. // ФНТ. – 1979. – Т. 5. – С. 947.
212. Marty D., Poitrenand J., Williams F.I.B. // J. Phys. Lett. (France) – 1980. – V. 41. – P. L311.
213. Gallet F., Deville G., Valdes A., Williams F.I.B. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – P. 212.
214. Déville G., Valdes A., Andrei F.Y., Williams F.I.B. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 588.
215. Marty D., Poitrenand J. // J. Physique. – 1984. – V. 45. – P. 1243.
216. Glattli D.C., Andrei E.Y., Williams F.I.B. // Proc. of EP2DS–VII Santa Fe. – 1987. – P. 9.
217. Mast D.B., Dahm A.J., Fetter A.L. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1706.
218. Glattli D.C., Andrei E.Y., Devillo G., Poitrenand J., Williams F.I.B. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1710.
219. Glattli D.C., Andrei E.Y., Devillo G., Williams F.I.B. // Surf. Sci. – 1986. – V. 170. – P. 70.
220. Стерн Ф. // Новое в исследовании поверхности твердого тела: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – Вып. 2. – С. 280.
221. Koch F. // Surf. Sci. – 1980. – V. 98. – P. 571.
222. Волков В.А., Петров В.А., Самодомирский В.В. // УФН. – 1980. – Т. 131. – С. 423.
223. Ando T., Fowler A.B., Stern F. // Rev. Mod. Phys. – 1982. – V. 54. – P. 437.
224. Добровольский В.Н., Литовченко В.Г. Перенос электронов и дырок у поверхности полупроводников. – Киев: Наук. думка, 1985.
225. Nepple F., Kotthaus J.P., Koch J.F. // Phys. Rev. – 1979. – V. B19. – P. 5270.
226. Ando T. // J. Phys. Soc. Japan. – 1975. – V. 39. – P. 411; 1978. – V. 44. – P. 475.
227. Reinvolg W., Kamgar A., Koch F. // Phys. Rev. – 1976. – V. 14. – P. 4274.
228. Ando T. // Sol. St. Comm. – 1977. – V. 21. – P. 801.
229. Ando T. // Phys. Rev. B. – 1979. – V. 19. – P. 2106.
230. Reinvolg W., Koch F. // Phys. Rev. Lett. – 1978. – V. 40. – P. 1736.
231. Härtle A., Fowler A.B., Albert M. // Surf. Sci. – 1980. – V. 98. – P. 181.
232. Kublbeck U., Kotthaus J.P. // Phys. Rev. Lett. – 1975. – V. 35. – P. 1019.
233. Allen S.J., Tsui D.C., Logan R.A. // Phys. Rev. Lett. – 1977. – V. 38. – P. 980.
Theis T.N., Kotthaus J.P., Stiles P.J. // Sol. St. Comm. – 1978. – V26. – P. 603.
234. Theis T.N., Kotthaus J.P., Stiles P.J. // Sol. St. Comm. – 1977. – V. 24. – P. 273.
235. Займан Дж. Электроны и фононы. Теория явлений переноса в твердых телах: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962.
236. Эдварс С. // Вопросы квантовой теории необратимых процессов: Пер. с англ. / Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. – М.: ИЛ, 1961. – С. 240–254.
237. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. // Методы квантовой теории поля в статистической физике. – М.: Физматгиз, 1962.
238. Anderson P.W. // Phys. Rev. – 1958. – V. 102. – P. 1008.
239. Мотт Н.Ф. Переход металл – диэлектрик: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.
240. Thouless D.J. // Phys. Rev. Lett. – 1977. – V. 39. – P. 1167.
241. Abrahams E., Anderson P.W., Liccardello D.C., Ramakrishnan T.V. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – V. 42. – P. 673.
242. Anderson P.W., Abrahams E., Ramakrishnan T.V. // Phys. Rev. Lett. 1979. – V. 43. – P. 718.
243. Горьков Л.П., Паркин А.И., Хмельницкий Д.Е. // Письма ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30. – С. 248.
244. Altschuler B.L., Khmel'nitskii D.E., Larkin A.I., Lee P.A. // Phys. Rev. B. – 1980. – V. 20. – P. 5142.
245. Kawabata A. // Sol. St. Comm. – 1980. – V. 34. – P. 431.
246. Альтшуллер Б.Л., Аронов А.Т., Паркин А.И., Хмельницкий Д.Е. // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 81. – С. 768.
247. Nukami S., Larkin A.I., Nagaoka Y. // Progr. Theor. Phys. – 1980. – V. 63. – P. 707.
248. Паркин А.И. // Письма ЖЭТФ. – 1980. – Т. 31. – С. 239.
249. Альтшуллер Б.Л., Аронов А.Т., Сливак Б.З., Шарвин Д.Ю., Шарвин Ю.В. // Письма ЖЭТФ. – 1982. – Т. 35. – С. 476.
250. Альтшуллер Б.Л., Аронов А.Т. // ЖЭТФ. – 1979. – Т. 77. – С. 2028.
251. Altschuler B.L., Aronov A.G. // Sol. St. Comm. – 1979. – V. 30. – P. 115.
252. Altschuler B.L., Aronov A.G., Lee P.A. // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 44. – P. 1288.
253. Паркин А.И., Хмельницкий Д.Е. // УФН. 1982. – Т. 136. – С. 336.
254. Bishop D.J., Tsui D.S., Dynes R.S. // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 44. – P. 1153.
255. Kawaguchi Y., Kawaji S. // J. Phys. Soc. Japan A. – 1980. – V. 49, Suppl. – P. 983.
256. Kawaji S., Wakabayashi J. // Surf. Sci. – 1976. – V. 58. – P. 238.
257. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper V. // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 45. – P. 494.
258. Von Klitzing K. // Surf. Sci. – 1982. – V. 113. – P. 1.
259. Ando T., Matsumoto Y., Uemura Y. // J. Phys. Soc. Japan. – 1975. – V. 39. – P. 279.
260. Tsui D.C., Gossard A.C., Field B.F., Cage M.E., Dziuba R.F. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 48. – P. 3.
261. Tsui D.C., Gossard A.C. // Appl. Phys. Lett. – 1981. – V. 38. – 550.
262. Paalanen M.A., Tsui D.C., Gossard A.C. // Phys. Rev. – 1982. – V. B25. – P. 5566.
263. Tsui D.C., Störmer H.L., Gossard A.C. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 48. – P. 1559.
264. Пудалов В.М., Семенчинский С.Г. // Поверхность. – 1984. – Т. 4. – С. 5.
265. Von Klitzing K. // Rev. Mod. Phys. – 1986. – V. 58. – P. 519.
266. Рашиба Э.И., Тимофеев В.В. // ФТП. – 1986. – Т. 20. – С. 977.
267. Квантовый эффект Холла: Сборник статей. / Пер. с англ. под ред. Ю.В. Шмарцева. – М.: Мир, 1986.
268. Prange R.E., Girvin S.M. // The Quantum Hall Effect. – Springer Verlag, 1987.
269. Därr A. // Doctoral dissert. – München: TU, 1978.
270. Därr A., Kotthaus J.P., Koch F. // Sol. St. Comm. – 1975. – V. 17. – P. 455.
271. Zawadzki W. // J. Phys. C.: Sol. St. Phys. – 1983. – V. 16. – P. 229.
272. Zawadzki W. // Lecture Note in Physics. – Springer, 1980. – V. 133. P. 85.
273. Esaki L., Tsui R. // IBM Res. Develop. – 1970. – V. 14. – P. 61.
274. Chang L.L., Esaki L. // Surf. Sci. – 1980. – V. 98. – P. 70.
275. Dingle R., Störmer H.L., Gossard A.C., Wiegmann W. // Surf. Sci. 1980. – V. 98. – P. 90.
276. Störmer H.L., Gossard A.S., Wiegmann W., Baldwin K. // Appl. Phys. Lett. – 1981. – V. 39. – P. 912.
277. Pearsall T.P. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – P. 529.
278. Zawadzki W., Lassing R. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – P. 225.
279. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Пер. с 4-го американского изд. под ред. Гусева. – М.: Наука, 1978.
280. Havasova T., Störmer H., Bishop D.J., Narayananurmi V., Gossard A.S. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – P. 294.
281. Образцов Ю.Н. // ФТП. – 1964. – Т. 6. – P. 414; 1965. – Т. 7. – С. 573.
282. Obloho H., von Klitzing K., Ploog K. // Surf. Sci. – 1984. – V. 142. – P. 236.
283. Allen S.J., Stormer H.L., Hwang J.C.M. // Phys. Rev. – 1983. – V. B28. – P. 7875.
284. Fetter A.L. // Phys. Rev. B. – 1985. – V. 32. – P. 7676; – 1986. – V. 33. – P. 3717; – V. 33. – P. 5221.
285. Волков В.А., Михайлов С.А. // Письма ЖЭТФ. – 1985. – Т. 42, С. 450.
286. Тальянский В.И. // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 43. – С. 96.
287. Шикун В.Б., Назин С.С. // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – С. 133.
288. Говорков С.А., Резников М.И., Сеничкин А.П., Тальянский В.И. // Письма ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44. – С. 380.
289. Волков В.А., Галченков Д.В., Галченков Л.А., Гродненский И.М., Матов О.Р., Михайлов С.А. // Письма ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44. – С. 510.
290. Fukuyama H. // Physics of low-dimensional systems. – Kyoto: Summer Institute. – 1979. – P. 145.

291. Цицильковский И.М. // УФН. – 1987. – Т. 152. – С. 583.
292. Lozovik Yu. E., Farztdinov V.M., Abdullaev B. // J. Phys. C.: Sol. St. Phys. – 1985. – V. 18. – P. L807.
293. Saitoh M. // Proc. of EP2DS-VII. – Santa Fe. – 1987. – P. 26.
294. Platzman P.M., Fukuyama H. // Phys. Rev. – 1974. – V. B10. – P. 3150.
295. Andrei E.Y., Glattli D.C., Williams F.I.B., Heiblum M. // Proc. of EP2DS-VII. – Santa Fe, 1987. – P. 50.
296. Andrei E.Y., Deville G., Glattli D.C., Williams F.I.B., Paris E., Etienne B. // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. 60. – P. 2765.