# Содержание

Поправки к фридмановской модели, вносимые петлевой квантовой космологией <i>М.Л. Фильченков, Ю.П. Лаптев</i>	3
Киральные волны плотности в двумерной модели Намбу- Йона-Лазини Н.В. Губина, В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко, С.Г. Курбанов, Д.Эберт	6
Инклюзивный распад т -лептона: эффекты адронизации <i>А.В.Нестеренко</i>	10
Космическая экзотика на Большом адронном коллайдере Л.И.Сарычева, Д.В.Скобельцын	12
Получение точной β-функции в N = 1 СКЭД, регуляризо- ванной высшими производными, с помощью прямого сум- мирования диаграмм Фейнмана <i>К.В.Степаньянц</i>	16

# 1. Сингулярности в моделях модифицированной гравитации

Е.В. Арбузова<sup>*a*</sup>, А.Д. Долгов<sup>*b*</sup>

<sup>a</sup>Кафедра высшей математики, университет "Дубна 141980 Дубна <sup>b</sup>Институт теоретической и экспериментальной физики, 113259 Москва <sup>b</sup>Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Ferrara, I-44100 Ferrara <sup>b</sup>Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Ferrara, I-44100 Ferrara <sup>a</sup>arbuzova@uni-dubna.ru, <sup>b</sup>dolgov@fe.infn.it

#### Аннотация

Наблюдаемые проявления моделей модифицированной гравитации, предложенных для объяснения ускоренного космологического расширения, анализируются для гравитирующих систем с плотностью материи, зависящей от времени. Показано, что если плотность материи растет со временем, то система приходит в сингулярное состояние с бесконечным скаляром кривизны. Соответствующее характерное время значительно меньше космологического времени. Добавление  $R^2$ -члена в действие позволяет избежать сингулярности.

Современные астрономические данные убедительно показывают, что в настоящее время вселенная расширяется с ускорением. Одним из возможных путей объяснения этого ускоренного расширения является предположение о существовании новой компоненты в космологической плотности энергии, так называемой темной энергии.

Конкурирующей возможностью для создания космологического ускорения служит модификация самой гравитации путем введения дополнительных членов в обычное действие общей теории относительности [1, 2]:

$$S = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + F(R)) + S_m, \tag{1}$$

где  $m_{Pl} = 1.22 \cdot 10^{19}$  ГэВ - масса Планка, R - скаляр кривизны,  $S_m$  - действие материи. F(R) - дополнительный член, изменяющий гравитацию на больших расстояниях и отвечающий за космологическое ускорение.

В пионерских работах [1] рассматривалась функция  $F(R) = -\mu^4/R$ , где  $\mu$  - малый параметер с размерностью массы. Однако, как было показано в [3], такой выбор F(R) ведет к сильной экспоненциальной нестабильности вблизи массивных объектов. Различные виды функции F(R), обеспечивающие ускоренное космологическое расширение и лишенные отмеченной выше нестабильности и некоторых других проблем, были рассмотрены в статьях [4, 5, 6, 7, 8]. В представленной работе [9] мы исследуем интересную модель модифицированной гравитации с функцией F(R), предложенной в [5]:

$$F(R) = \lambda R_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right] \,. \tag{2}$$

Здесь  $\lambda > 0, n$  - положительное целое число.  $R_0$  - постоянная, имеющая порядок средней кривизны вселенной в настоящее время,  $R_0 \sim 1/t_U^2$ , где  $t_U \approx 4 \cdot 10^{17}$  сек - возраст вселенной.

Космология с гравитационным действием (2), также как и некоторые другие сценарии с модифицированной гравитацией, были проанализированы в работах [2, 10, 11, 12]. В [9] мы рассматриваем физическую ситуацию, отличную от тех, что обсуждались в цитируемых статьях. А именно, мы изучаем поведение астрономических объектов с плотностью материи, растущей со временем, и показываем, что кривизна, R, становится бесконечно большой за время, которое мало по сравнению с космологической временной шкалой. Эта сингулярность не может быть ликвидирована подбором начальных условий.

Другим возможным путем предотвравщения сингулярности является введение в действие  $R^2$ -члена:

$$\delta F(R) = -R^2/6m^2, \qquad (3)$$

где *т* - постоянный параметр с размерностью массы.

Учитывая ограничение  $m > 10^{-2.5}$  эВ, которое следует из лабораторных гравитационных тестов [13], мы нашли  $n \ge 6$ . В работе [2] представлено более сильное ограничение,  $m \gg 10^5$  ГэВ. В этом случае  $n \ge 9$ . Естественное значение  $m \sim m_{Pl}$  и, соответственно,  $n \ge 12$ .

Итак, мы показали, что влияние рассмотренных выше версий модифицированной гравитации на системы с плотностью материи, зависящей от времени, в современной вселенной может быть катастрофическим, ведущим к сингулярности  $R \to \infty$  за конечное время в будущем. Это время значительно меньше, чем космологическое время. Проблема может быть устранена добавлением  $R^2$ -члена, если степень n достаточно велика.

# Список литературы

 S. Capozziello, S. Carloni, A. Troisi, *RecentRes. Dev. Astron. Astrophys.* 1, 625 (2003); S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M.S. Turner, *Phys.Rev.* **D** 70, 043528 (2004).

- [2] S.A. Appleby, R.A. Battye, A.A. Starobinsky, *JCAP* 1006, 005 (2010).
- [3] A.D. Dolgov, M.Kawasaki, *Phys. Lett.* B 573, 1 (2003).
- [4] S. Nojiri, S. Odintsov *Phys. Rev.* D 68, 123512 (2003).
- [5] A.A. Starobinsky, JETP Lett. 86, 157 (2007).
- [6] W.Hu, I. Sawicki, *Phys. Rev.* D 76, 064004 (2007).
- [7] A.Appleby, R. Battye, *Phys. Lett.* B 654, 7 (2007).
- [8] S. Nojiri, S. Odintsov, *Phys. Lett.* B 657, 238 (2007); S. Nojiri, S. Odintsov, *Phys. Rev.* D 77, 026007 (2008); G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, L. Sebastiani, S. Zerbini, *Phys. Rev.* D 77, 046009 (2008); G. Cognola, E. Elizalde, S.D. Odintsov, P. Tretyakov, S. Zerbini, *Phys. Rev.* D 79, 044001 (2009).
- [9] E.V. Arbuzova, A.D. Dolgov, *Phys. Lett.* **B** 700, 289 (2011).
- [10] S.A. Appleby, R.A. Battye, JCAP 0805, 019 (2008).
- [11] A. Dev, D. Jain, S. Jhingan, S. Nojiri, M. Sami, I. Thongkool, *Phys. Rev.* D 78, 083515 (2008); I. Thongkool, M. Sami, R. Gannouji, S. Jhingan, *Phys. Rev.* D 80, 043523 (2009); I. Thongkool, M. Sami, S. Rai Choudhury, *Phys. Rev.* D 80, 127501 (2009).
- [12] A.V. Frolov, *Phys. Rev. Lett.* 101, 061103 (2008).
- [13] D.J. Kapner, T.S. Cook, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, C.D. Hoyle, H.E. Swanson, *Phys. Rev. Lett.* 98, 021101 (2007).

# 2. Эффекты связанные с конечными размерами пространства в модели Гросса–Неве с учетом изотопического и барионного химических потенциалов

Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Хунджуа Т.Г., Эберт Д. Кафедра теоретической физики, физического факультета МГУ, 119992 Москва, Воробьевы горы, Адрес электронной почты: gtamaz@gtamaz.com

#### Аннотация

В данной работе исследованы свойства безмассовой модели Гросса–Неве в (1+1)-размерном пространстве  $R^1 \times S^1$  с учетом конечных размеров пространства а также ненулевых значений барионного и изотопического химических потенциалов  $\mu_I$ ,  $\mu$ . Исследование проводилось в пределе большого количества фермионных цветов  $N_c$ .

Показано, что при  $L \to \infty$  (L длина компактификации  $S^1$ ) фаза пионной конденсации (ПК) с *с нулевой кварковой плотностью* образуется при любом ненулевом значении  $\mu_I$  и малом значении  $\mu$ . Для любых конечных значений L фазовый портрет модели содержит фазу ПК с *ненулевой кварковой плотностью* (в случае периодических граничных условий). Таким образом конечные размеры системы могут служить фактором, способствующим образованию фазы ПК в кварковой материи с ненулевой барионной плотностью. С другой стороны, фаза с нарушенной киральной симметрией может существовать только при очень больших значениях L.

# Введение

В последнее время исследования фазовых портретов КХД в терминах барионного и изотопического химичсеких потенциалов вызывают повышенный интерес. Причина в том, что плотность барионной материи в экспериментах по столкновению тяжелых ионов имеет изоспиновую асимметрию. К тому же, плотность адроной/кварковой материи в компактных звездах также испытывает изотопическую асимметрию. Для объяснения выше перечисленных экспериментальных данных при низкой барионной плотности часто используются непертурбативные эффективные теории, в особенности модель Намбу–Йона-Лазинио [1] (НЙЛ). Однако очевидно, что (3+1)-размерная модель НЙЛ зависит от параметра обрезания, таким образом ее результаты применимы только к *низким энергиям, температуре и плотности.* По этой причине в настоящее время все больший интерес вызывают эффективные (1+1)-размерные теории, такие как модель Гросса–Неве (ГН) [2].

Настоящая работа посвящена обсуждению эффектов пионной конденсации при учете влияния конечных размеров пространства. Проблема была частично решена в [3]. Однако в этих работах барионный химический потенциал не учитывался, а учитывался только изотопический химический потенциал ( $\mu = 0, \mu_I \neq 0$ ). Мы сделали заключение, что проблема заслуживает дальнейшего изучения и обобщения на случай обоих ненулевых химических потенциалов ( $\mu \neq 0, \mu_I \neq 0$ ). Главным образом это мотивировано ненулевыми значениями барионной и изотопической плотности кварковой материи в экспериментах по столкновению тяжелых ионов.

#### Описание модели

Мы рассматриваем (1+1)-размерную модель ГН с двумя ароматами (и и d кварки), которая возникает при рассмотрении столкновений тяжелых ионов. Лагранжиан модели имеет следующий вид:

$$L_{q,\overline{q}} = \overline{q} \left[ \gamma^{\nu} \mathrm{i}\partial_{\nu} + \mu\gamma^{0} + \frac{\mu_{I}}{2}\tau_{3}\gamma^{0} \right] q + \frac{G}{N_{c}} \left[ (\overline{q}q)^{2} + (\overline{q}\mathrm{i}\gamma^{5}\overrightarrow{\tau}q)^{2} \right], \qquad (4)$$

где каждое кварковое поле  $q(x) \equiv q_{i\alpha}(x)$  является дублетом по ароматам (i = 1, 2 или i = u, d) и  $N_c$ -плетом по цветам  $(\alpha = 1, \ldots, N_c)$ . Таким образом подразумевается суммирование по спинорным <sup>1</sup>, цветовым и ароматовым индексам.  $\tau_k(k = 1, 2, 3)$  - матрицы Паули. Химический потенциал  $\mu$  в (4) ответственен за ненулевую барионную плотность кварковой материи, тогда как изотопический химический потенциал  $\mu_I$  отвечает за возникновение ненулевой изотопической плотности (в этом случае плотности u и d кварков различные).

Обсудим симметрии лагранжиана. Если  $\mu_I = 0$ , лагранжиан (4) имеет не только  $SU(N_c)$  симметрию, но также инвариантен относительно киральной  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  группы. Однако если  $\mu_I \neq 0$ , симметрия сокращается до группы  $U_{I_3L}(1) \times U_{I_3R}(1)$ , где  $I_3 = \tau_3/2$  третья компонента изоспинового оператора. Очевидно, эта группа может быть также представлена как  $U_{I_3}(1) \times U_{AI_3}(1)$ , где  $U_{I_3}(1)$  изоспиновая подгруппа, а  $U_{AI_3}(1)$ аксиально изоспиновая подгруппа. При действии этих подгрупп кварки преобразуются следующим образом  $q \to \exp(i\alpha\tau_3)q$  и  $q \to \exp(i\alpha\gamma^5\tau_3)q$ .

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Гамма матрицы Дирака выбраны в следующем виде:  $\gamma^0 = \sigma_1; \gamma^1 = i\sigma_2; \gamma^5 = \sigma_3.$ 

Линеаризованный вид лагранжиана (4), который содержит составные бозонные поля  $\sigma(x)$  и  $\pi_a(x)(a = 1, 2, 3)$ , имеет следующий вид:

$$L_{\sigma,\pi} = \overline{q} \left[ \gamma^{\nu} \mathrm{i} \partial_{\nu} + \mu \gamma^{0} + \frac{\mu_{I}}{2} \tau_{3} \gamma^{0} - \sigma - \mathrm{i} \gamma^{5} \pi_{a} \tau_{a} \right] q - \frac{N_{c}}{4G} \left[ \sigma \sigma + \pi_{a} \pi_{a} \right], \quad (5)$$

где бозонные поля:  $\sigma(x) = -2\frac{G}{N_c}(\overline{q}q); \quad \pi_a(x) = -2\frac{G}{N_c}(\overline{q}i\gamma^5\tau_a q).$ 

Исходя из (5), можно получить термодинамический потенциал (ТДП) модели в приближении среднего поля, т.е. разложение по  $1/N_c$ :

$$\Omega_{\mu\mu_{I}}(\sigma,\pi_{a}) = \frac{\sigma^{2} + \pi_{a}^{2}}{4G} + i \operatorname{Tr}_{sf} \int \frac{d^{2}p}{(2\pi)^{2}} \ln(\gamma p + \mu\gamma^{0} + \frac{\mu_{I}}{2}\tau_{3}\gamma^{0} - \sigma - i\gamma^{5}\pi_{a}\tau_{a}), \quad (6)$$

где поля  $\sigma$  и  $\pi_a$  не зависят от пространственной координаты х. Следует отметить, что ТДП (6) зависит только от двух комбинаций бозонных полей ( $\pi_1^2 + \pi_2^2$ ) и ( $\pi_3^2 + \sigma^2$ ), которые инварианты относительно группы  $U_{I_3}(1) \times U_{AI_3}(1)$ . В этом случае, без потери общности можно положить  $\pi_2 = \pi_3 = 0$ , и изучать ТДП (6) как функцию только двух переменных  $M \equiv \sigma$  и  $\Delta \equiv \pi_1$ . Далее мы накладываем на модель условия ограниченности пространства следующим образом  $0 \le x \le L$ . Это означает, что мы исследуем модель (1) в пространстве с топологией  $R^1 \times S^1$ , а на квантовые поля накладываем следующие граничные условия  $q(t, x+L) = e^{i\pi\alpha}q(t, x)$ , где  $0 \le \alpha \le 2, L$  длина окружности  $S^1$ . Далее мы будем рассматривать только два значения параметра  $\alpha : \alpha = 0$ , периодическое граничное условие, и  $\alpha = 1$  для антипериодического. Итак, после всех расчетов можно получить ТДП в следующем виде:

$$\Omega_{L\mu\mu_{I}}(M,\Delta) = V_{L}(\rho) - \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ E_{L\Delta n}^{+} + E_{L\Delta n}^{-} - 2\sqrt{\rho^{2} + \frac{\pi^{2}}{L^{2}}(2n+\alpha)^{2}} + (\mu - E_{L\Delta n}^{+})\theta(\mu - E_{L\Delta n}^{+}) + (\mu - E_{L\Delta n}^{-})\theta(\mu - E_{L\Delta n}^{-}) \right\}, \quad (7)$$

где  $\rho = \sqrt{M^2 + \Delta^2},$ 

$$E_{L\Delta n}^{\pm} = \sqrt{\left(\sqrt{M^2 + \frac{\pi^2}{L^2}(2n+\alpha)^2} \pm \nu\right)^2 + \Delta^2}$$
(8)

И

$$V_L(\rho) - V_L(0) = -\frac{\rho^2}{\pi} \ln\left(\frac{M_0 L}{4\pi}\right) - \frac{\rho^2 \gamma}{\pi} - \frac{2}{L^2} \sqrt{\rho^2 L^2 + \pi^2 \alpha^2} + \frac{2\pi\alpha}{L^2} - \frac{2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{\pi^2 (2n+\alpha)^2 + L^2 \rho^2} + \sqrt{\pi^2 (2n-\alpha)^2 + L^2 \rho^2} - 4n\pi - \frac{\rho^2 L^2}{2n\pi}\right], \quad (9)$$

где $\nu = \frac{\mu_I}{2M_0}$  и  $\gamma = 0.577...$  константа Эйлера. ТДП (7) уже перенормирован. Подробный вывод (9) и описание техники перенормировки проведены в [3]. Для дальнейшего исследования нам также потребуется выражение для кварковой плотности  $n_{qL}$  в пространстве  $R^1 \times S^1$ , которое может быть легко получено из ТДП (7) путем дифференцирования  $n_{qL} \equiv -\frac{\partial \Omega_{L\mu\mu_I}}{\partial \mu}$ . Кроме того, удобно пользоваться обезразмеренными величинами:  $\lambda = \frac{\pi}{LM_0}$ ,  $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{M_0}$ ,  $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{M_0} \equiv \frac{\mu_I}{2M_0}$ ,  $m = \frac{M}{M_0}$ ,  $\delta = \frac{\Delta}{M_0}$ .

# Фазовая структура модели

Для дальнейшего изучения исходной модели ГН необходимо решить систему уравнений (уравнения щели):  $\frac{\partial \Omega_{\mu\mu_I}(m,\delta)}{\partial m} = 0$ ;  $\frac{\partial \Omega_{\mu\mu_I}(m,\delta)}{\partial \delta} = 0$ . Координаты m и  $\delta$  точки глобального минимума (ТГМ) термодинамического потенциала (7) являются параметрами (щелями), которые пропорциональны вакуумному среднему величин  $\langle \bar{q}q \rangle$  и  $\langle \bar{q}i\gamma^5\tau_1q \rangle$  соответственно. Результаты численного решения уравнений щели для ТДП (7) представлены на Рис.1 и Рис.2 для периодического и антипериодического случая ( $\lambda = 0.1$ ). Симметричная фаза соответствует симметрии группы  $U_{I_3}(1) \times U_{AI_3}(1)$  (точка глобального минимума  $m = 0, \delta = 0$ ). Фаза II отвечает симметрии  $U_{I_3}(1)$  (т.е. симметрия  $U_{AI_3}$  нарушена  $m \neq 0, \delta = 0$ ). В этой фазе кварки массивны и кварковая плотность  $n_{qL}$  ненулевая. В отличие от случая с  $\lambda \to 0$  ( $L = \infty$ ) который обсуждался в статье [4], в случае  $\lambda \neq 0$  фаза II занимает конечную область фазовой диаграммы и полностью исчезает при  $\lambda > \lambda_p \approx 0.16(0.66)$  для периодических (антипериодических) граничных условий.

Также можно видеть, что в случае периодических граничных условий (Рис. 1) существует две фазы пионной конденсации РС и РСd. Главное различие между этими фазами в том, что в РС фазе плотность кварковой материи  $n_{qL} = 0$ , тогда как в фазе РСd  $n_{qL} \neq 0$ . В случае антипериодических граничных условий фазы РСd не существует (Рис.2).



Рис. 1. Периодический случай: фазовый портрет в переменных  $(\tilde{\nu}, \tilde{\mu})$  при  $\lambda = 0.1$ . Обозначения РСd и РС соответствуют фазам пионной конденсации с нулевой и ненулевой кварковой плотностью соответственно. Фаза II отвечает состоянию нарушенной киральной симметрии.



Рис. 2. Антипериодический случай: фазовый портрет в переменных  $(\tilde{\nu}, \tilde{\mu})$  при  $\lambda = 0.1$ . Обозначение PC соответствуют фазе пионной конденсации с нулевой кварковой плотностью. Фаза II - отвечает состоянию с нарушенной киральной симметрией.

# Список литературы

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. D 112, 345 (1961).
- [2] D.J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D 10, 3235 (1974).
- [3] D. Ebert, K.G. Klimenko, A.V. Tyukov and V.C. Zhukovsky, Phys. Rev. D 78, 045008 (2008).
- [4] V. C. Zhukovsky, K. G. Klimenko and T. G. Khunjua, Moscow Univ. Phys. Bull. 65, 21 (2010).

# 3. Алгоритм Дирака и физика элементарных частиц

Олег Космачев

Объединенный Институт Ядерных Исследований, ЛФВЭ, 141980 Дубна Московской области, Адрес электронной почты: kos@theor.jinr.ru

#### Аннотация

Алгоритм Дирака это совокупность необходимых и достаточных условий для формулировки волновых уравнений всего лептонного сектора. Все уравнения были получены при строгом ограничении принятыми предположениями. Общность и строгость предложенного метода позволяют ставить вопрос о его распространении на адронный сектор.

# Вступление

Алгоритм Дирака это совокупность необходимых и достаточных условий для формулировки волновых уравнений всего лептонного сектора при строгом ограничении рамками зафиксированных предположений. Алгоритм был установлен на основе исчерпывающего анализа уравнения Дирака. Предположения таковы.

- 1) Инвариантность и ковариантность уравнений относительно однородной группы Лоренца с учетом четырех компонентов связности.
- 2) Формулировка уравнений на основе неприводимых представлений групп, определяющих каждое лептонное уравнение.
- Сохранение 4-вектора тока вероятности и положительно определенный четвертый компонент тока.
- 4) Величина спина лептонов предполагается равной 1/2.
- 5) Каждое лептонное уравнение должно редуцироваться к уравнению Клейна-Гордона.

Всестороннее и максимально полное использование дискретных симметрий как рабочего инструмента было затруднено из-за отсутствия в физической литературе явной формы (P)-, (T)-, (PT)-сопряженных компонентов связности однородной группы Лоренца.

Требование неприводимости в данном подходе является эквивалентом принципа наименьшего действия на групповом языке.

Удовлетворять уравнению первого порядка по четырем производным  $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z.)$  это требование - описывать релятивистскую частицу. Возможность при этом редукции к уравнению Клейна-Гордона означает обладать волновыми свойствами независимо от наличия или отсутствия массы и величины спина.

# Лептонный сектор

Нами был получен полный и замкнутый набор групп для формулировки волновых уравнений как стабильных, так и нестабильных лептонов [2], [3]. Полнота и замкнутость означают, что в рамках принятых предположений нет возможности получить дополнительные уравнения сверх найденных, а для формулировки каждого из них достаточно четырех компонентов связности однородной группы Лоренца или их некоторой комбинации.

Очевидным и важным следствием выполненных построений является наличие в каждом уравнении без исключения своего собственного состава, т.е. набора тех или иных компонентов связности группы Лоренца. По определению [4] это позволяет говорить о своем собственном наборе квантовых чисел в каждом случае.

Совокупность исходных предположений вместе с известными теоретико-групповыми ограничениями и требованиями позволяют получить пять и только пять типов групп для формулировки пяти волновых уравнений по образу и подобию уравнения Дирака, т.е. групп уравнений стабильных лептонов. Их структурный состав т.е. набор соответствующих подгрупп  $d_{\gamma}, f_{\gamma}, b_{\gamma}, c_{\gamma}$ , на которых реализуются все четыре компонента связности неприводимых представлений группы Лоренца, выглядят таким образом:

- 1) Уравнение Дирака  $D_{\gamma}(II)$ : структурный состав  $\{d_{\gamma}, b_{\gamma}, f_{\gamma}\}$ .  $In[D_{\gamma}(II)] = -1.$
- 2) Уравнение для дублета массивных нейтрино  $D_{\gamma}(I)$ : структурный состав  $\{d_{\gamma}, c_{\gamma}, f_{\gamma}\}$ .  $In[D_{\gamma}(I)] = 1.$
- 3) Уравнение для квартета безмассовых нейтрино  $D_{\gamma}(III)$ : структурный состав  $\{d_{\gamma}, b_{\gamma}, c_{\gamma}, f_{\gamma}\}$ .  $In[D_{\gamma}(III)] = 0.$

- 4) Уравнение для безмассового (*T*)-синглета  $D_{\gamma}(IV)$ : структурный состав  $\{b_{\gamma}\}$ .  $In[D_{\gamma}(IV)] = -1.$
- 5) Уравнение для безмассового (*PT*)-синглета  $D_{\gamma}(V)$ : структурный состав  $\{c_{\gamma}\}$ .  $In[D_{\gamma}(V)] = 1.$

Здесь дублет означает систему частица-античастица. Каждая из групп имеет порядок 32 и порождается четырьмя генераторами. Однако, определяющие соотношения для каждой группы свои собственные и различные. Если все четыре генератора антикоммутируют, то получаются уравнения для массивных частиц:  $D_{\gamma}(II)$  -уравнение Дирака [1] и  $D_{\gamma}(I)$  уравнение Майораны для массивного нейтрино [5]. Если четвертый генератор группы коммутирует с тремя первыми, то получаются уравнения для безмассовых нейтрино:  $D_{\gamma}(III)$ ,  $D_{\gamma}(IV)$ ,  $D_{\gamma}(V)$ . Группа  $D_{\gamma}(III)$  связана с уравнением для двухкомпонентного нейтрино, не сохраняющего пространственную четность. Впервые уравнение было получено Паули [6]. Уравнения  $D_{\gamma}(IV)$  и  $D_{\gamma}(V)$  можно связывать с истинно нейтральными безмассовыми двухкомпонентными нейтрино.

Группы нестабильных лептонов получаются при расширении групп для стабильных массивных лептонов  $(D_{\gamma}(II), D_{\gamma}(I))$  с помощью пятого антикоммутирующего генератора. Если он таков, что  $(\Gamma_5)^2 = \pm I$  (I- единичная матрица), то получается три и только три не изоморфных группы  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , допускающих формулировку волновых уравнений, удовлетворяющих тем же требованиям. Структурный состав групп при этом выглядит более сложно. В каждой и них можно выделить подструктуры изоморфные группам стабильных лептонов. Структурный состав не повторяется. Точные выражения таковы.

$$\Delta_1\{D_\gamma(II), \quad D_\gamma(III), \quad D_\gamma(IV)\}.$$
(10)

$$\Delta_3\{D_\gamma(II), \quad D_\gamma(I), \quad D_\gamma(III)\}.$$
(11)

$$\Delta_2\{D_\gamma(I), \quad D_\gamma(III), \quad D_\gamma(V)\}.$$
(12)

Можно показать, что первые две группы связаны с уравнениями для заряженных частиц, а последняя - с уравнением для нейтральной нестабильной частицы.

# Заключение

Весь комплекс результатов по лептонному сектору открывает новые возможности для формирования структур с различными характеристи-

ками, включая такие, которые не могут быть связаны с реально наблюдаемыми частицами типа составляющих адронов (партоны, кварки). В частности, не имеется принципиальных запретов для обобщения предложенного метода на адронный сектор так, чтобы внутренние структуры формировались на основе лоренц-инвариантных объектов (таковыми являются группы, реализующие все четыре компонента связности группы Лоренца). Растущая при этом структура объектов в целом будет определять те самые симметрии, которые мы сейчас связываем с унитарными. В таком подходе лептоны и адроны будут описываться на единой релятивистской основе. При этом устраняется противоестественное положение, когда из основательной классификационной схемы (унитарные симметрии) целиком и полностью выпал лептонный сектор. Причина может заключаться в том, что членение адронов на составляющие является более крупным, чем это допустимо для описания лептонов. Кроме того, в самом лептонном секторе отпадает необходимость удивляться т.н.  $(\mu - e - \tau)$ -универсальности. Ее просто не имеется в силу структурных различий. Понятно, что реализация такой программы будет означать сближение сильных и электрослабых взаимодействий.

# Список литературы

- [1] P.Dirac, Proc. Roy. Soc. A vol.117,610 (1928).
- [2] А.Гусев, О.Космачев, *Писъма ЭЧАЯ*. Т.5, N2, 26 (2008).
- [3] О.Космачев, Письма ЭЧАЯ. 2010. Т.7, N2, 149 (2010).
- [4] Г.Вейль, Теория групп и квантовая механика, (Наука, Москва), 16 1986.
- [5] E.Majorana, *Il Nuovo Cimento* v.14, 171 (1937).
- [6] В.Паули, Общие принципы волновой механики, (ГТТЛ, Москва) 254 1947.

# 4. Построение профилей изгибного излучения пульсаров

В.А.Бордовицын, Е.А.Немченко

Кафедра теоретической физики, физический факультет ТГУ, 634050 Томск, пр. Ленина 36, Адрес электронной почты: rector@tsu.ru

#### Аннотация

Предлагается техника построения профилей излучения пульсаров на основе мгновенной индикатрисы углового распределения мощности излучения релятивистских заряженных частиц (джетов), движущихся по заданной траектории в магнитосфере нейтронной звезды. Данный метод иллюстрируется вычислением профилей излучения на примере модели изгибного излучения пульсаров. Получено хорошее согласие с наблюдаемыми профилями некоторых пульсаров.

# Введение

Открытие пульсаров, сделанное группой кембриджских радиоастрономов под руководством Э. Хьюиша [1] в 1967 году, существенным образом повлияло на дальнейшее развитие астрофизических исследований космического радиоизлучения. Было установлено, что пульсары представляют собой источники импульсного космического радиоизлучения с очень большой стабильностью периода. Они излучают в широком спектральном диапазоне - от метровых до сантиметровых волн включительно, а в ряде случаев - даже в оптическом, рентгеновском и гаммадиапазонах. Возможные механизмы излучения пульсаров продолжают интенсивно обсуждаться в научной литературе (см., например, [2, 3]). Пульсары открывают новые широкие возможности для применения теории излучения релятивистских частиц [4].

# Кинематический метод построения профилей излучения пульсаров

В нашей работе [3] был предложен универсальный кинематический метод построения профилей излучения пульсаров на основе точной пространственной индикатрисы (углового распределения) мощности релятивистского излучения (см. [4]). Идея этого метода состоит в том, что профиль излучения пульсара находится как сечение вращающейся индикатрисы излучения неподвижным в пространстве лучом зрения. Для идентификации с наблюдаемыми экспериментально профилями излучения предлагается использовать целый набор параметров: угол наклона магнитной оси пульсара относительно оси его вращения  $\eta$ , углы, образованные лучом зрения с осью вращения пульсара  $\zeta$  и с направлением его магнитной оси  $\mu$ , угол  $\alpha$  между скоростью и ускорением релятивистской частицы (см. рис. 1).



Рис. 3. Идентификация профилей излучения наблюдаемых (ср. [5]) пульсаров с параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$  соответственно: a) 25°, 0.99, 12°, 15°; б) 10°, 0.99, 14°, 11°; в) 15°, 0.95, 22°, 10°; г) 20°, 0.99, 10°, 15°; д) 20°, 0.99, 7°, 0°; e) 40°, 0.991, 8°, 10°.

Кроме того, можно варьировать параметры самого излучения, такие как энергия электронов ( $\gamma$  - фактор), напряженность магнитного поля H, радиус кривизны траектории электронов R, а также число излучающих частиц в плазменных сгустках и т. д.

# Заключение

Мы показали, что наша теория позволяет с большей точностью описывать наблюдаемые профили излучения пульсаров, причем эти результаты могут быть улучшены за счет более тщательной подборки параметров. Кроме того, можно использовать и некоторые дополнительные условия. Например, малые колебания параметров могут привести к часто наблюдаемой в экспериментах тонкой структуре профилей пульсаров. Это условие может быть связано с тем, что релятивистские электроны движутся в поле излучения других электронов, испущенных ранее. Кроме того, дополнительную информацию о параметрах источников излучения в магнитосфере пульсаров могут дать профили поляризованного излучения пульсаров, для которых применима та же методика, что и для рассмотренных здесь профилей полного излучения. Совсем недавно была обнаружена возможность визуального наблюдения первых гармоник синхротронного излучения (см. [4]). В связи с этим в перспективе представляет большой интерес построение в этом диапазоне частот профилей более мощного когерентного излучения пульсаров.

Данная работа поддержана федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России контракт No П789.

# Список литературы

- [1] A.Hewish, S.J.Bell, *Nature* 217, 709 (1968).
- [2] Р.Манчестер, Дж. Тейлор, "Пульсары", (Мир, Москва) 1980.
- [3] V.Bordovitsyn, V.Epp, V.Bulenok, in "Kinematic Projecting of Pulsur Profiles" (Proceedings of the 9th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, September 20-26 1999, Moscow, Russia), ed. by A.Studenikin, World Scientific Singapore, 187, 2001.
- [4] В.Г.Багров, Г.С.Бисноватый-Коган и др., "Теория излучения релятивистских частиц" под ред. В.А. Бордовицына, (ФИЗМАТЛИТ, Москва) 2002.
- [5] A.D.Kuzmin, V.A.Izvekova et al., Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 127, 355 (1998).

# 5. Изучение рождения тяжчлых кварков в эксперименте АТЛАС

Сергей Сивоклоков От имени Сотрудничества АТЛАС НИИЯФ МГУ, 119992 Москва, Ленинскиие горы, Россия Serguei.Sivoklokov@cern.ch

#### Аннотация

В работе представлен обзор новых результатов по физике тяжчлых кварков (b и c) полученных в эксперименте АТЛАС на Большом Адронном Коллайдере. Изучение процессов рождения тяжчлых ароматов на адронных коллайдерах дачт возможность проникновения в суть процессов КХД. Детектор АТЛАС обеспечивает получение физических данных при больших поперечных импульсах и в более широком интервале быстрот, чем достигнутые когда-либо раньше. Сечения рождения чармония и боттония были измерены в протон-протонных соударениях при энергии 7 ТэВ в разных интервалах поперечных импульсов и быстрот. Также был реконстроируван ряд эксклюзивных распадов В и D-мезонов. Результаты сравнивались с теоретическими предсказаниями некоторых КХД моделей.

## Введение

АТЛАС - это экспериментальная установка широкого назначения, работающая на Большом Адронном Коллайдере в Европейской лаборатоии ЦЕРН в Женеве, Щвейцария. Хотя основной целью эксперимента является поиск Хиггс-бозона и явлений за рамками Стандартной Модели, программа исследований также включает в себя изучение широкого круга явлений физики ароматов. Эти процессы также являются очень полезным инструментом для понимания свойств установки (при измерении хорошо изученных В- и D-адронов,  $J/\psi$  и  $\Upsilon$  - мезонов) и проверки предсказаний КХД. При достижении интегральной светимости в несколько фб<sup>-1</sup> будет возможен поиск непрямых проявлений эффектов новой физики в редких распадах В-мезонов и явлениях СР-нарушений.

# Детектор АТЛАС

Детектор АТЛАС [1] имеет стандартную для коллайдерных экспериментов цилиндрическую конфигурацию и содержит внутренний трековый детектор, калориметры и мюонный спектрометр. Внутренний Детектор обеспечивает прецизионное измерение треков заряженных частиц. Он состоит из кремниевых пиксельных (3 слоя) и микростриповых (4 слоя) детекторов и детектора переходного излучения, помещенных в магнитное поле сверхпроводящего соленоида напряженностью 2Т и позволяет измерять импульсы частиц с точностью  $\sigma(p_T)/p_T < 0.5\%$  в области псевдобыстрот  $|\eta| < 2.5$ . Мюоны являются самым удобным и чистым сигналом распада частиц с тяжчлыми кварками, поэтому свойства мюонной системы (наряду с трекингом) являются ключевыми для изучения физики тяжчлых ароматов. Мюонный спектрометр содержит несколько типов камер для измерения мюонных треков и находится в магнитном поле тороидальной сверхпроводящей системы (средней напряжчнностью около 0.5T). Он обеспечивает измерение импульсов мюонов в области  $|\eta| < 2.7$  с точностью меньше 10% вплоть до импульсов  $\sim 1$  ТэВ. Триггерная система АТЛАСа служит для отбора событий с определчнными физическими сигнатурами (например, мюонами с большими поперечными импульсами) и содержит три уровня. Триггер первого уровня реализован аппаратно и использует сигналы мюонного спектрометра, калориметра или специальных сцинтиляционных счутчиков (Minimum Bias Trigger Scintillator). Триггеры 2-го уровня и 3-го (т.н. Фильтр Событий) реализованы программно и составляют триггер высокого уровня (High Level Trigger). По мере возрастания светимости ускорителя степень отбора событий постоянно увеличивается для сохранения приемлемого для обработки и сохранения уровня потока данных, что требует тщательного контроля триггерных условий и порогов регистрации для коррекции возможного сдвига измеряемых величин.

# Рождение $J/\psi$ и $\Upsilon$

Реконструкцию узких состояний кваркония с хорошо известными массами,  $c\bar{c}$  и  $b\bar{b}$ , распадающихся на два мюона, очень удобно использовать для изучения характеристик детектора (разрешения по массе, взаимной юстировки частей детектора). На Рис.1 показаны распределения по инварианьной массе  $\mu^+\mu^-$  пар, полученные при анализе данных 0.24 фб<sup>-1</sup> интегральной светимости, набранных в 2011 году. Показаны области масс между 2.6 и 4 ГэВ (область  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  состояний) и между 8 и 12 ГэВ ( $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$  мезоны ). Мюоны пары должны иметь общую вершину, пройти ряд критериев по качеству восстановленныхо треков и быть зарегистрированными триггером. Реконструированные значениям масс находятся в хорошем согласии со среднемировыми значениями. Детали анализа в [2, 3].



Рис. 4. Димюонные спектры инвариантных масс в области  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  (слева) и  $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$  мезонов (справа)

#### Сечения рождения кваркониев

Состояния кваркония интересны не только с методической точки зрения. Процессы их рождения, особенно в новой области энергий, представляют интерес для теории. Используя значительное количество событий с восстановленными  $J/\psi$  и  $\Upsilon$ , АТЛАС измерил дваждыдифференциальные сечения рождения этих мезонов в нескольких областях быстроты y и поперечного импульса  $p_T$  мезонов. Анализ производился на основе данных 2010 года, когда относительно невысокая светимость ускорителя позволяла использовать наименее строгий триггерный отбор и получить наибольшую статистику при малых поперечных импульсах. Для восстановления истинного числа событий в каждом интервале, для каждого события вычислялся вес, который зависел от кинематического аксептанса (вероятности того, что мюоны с данными характеристиками могут быть зарегистрированы в детекторе), коэффициента, учитывающего размытие измеренного импульса мюона относительно истинного, эффективностей восстановления трека во внутреннем детекторе и в мюонном спектрометре и эффективности триггерной системы для регистрации двух мюонов (с разным знаком заряда). Кинематический аксептанс зависит от спиновой выстроенности рождчных мезонов относительно оси реакции и ориентации плоскости распада. Эти параметры для LHC ещч не измерены, поэтому на основе Монте-Карло моделирования были изучены все возможные варианты выстроенности и наибольшие вариации учитывались как систематические неопределчнности (т.н. spin-alignment envelope). На Рис.2 показано сечение рождения  $J/\psi$  в зависимости от *p*<sub>T</sub> мезона для одного из 4-х изученных интервалов быстрот из работы [2] (показаны также данные CMS-коллаборации). На Рис.3 аналогичное распределение для  $\Upsilon$  из [3] вместе с предсказаниями NLO вычислений.  $J/\psi$  могут рождаться через два механизма: прямое рождение в *pp*-соударениях и распадах более тяжчлых состояний чармония, и в распадах b-адронов, рождчнных в столкновении. Распады прямых мезонов происходят очень близко к первичной венршине, тогда, как b-адроны, имея значительное время жизни, распадаются вдали от неч. Измеряя распределение расстояния точки распада  $J/\psi$  от первичной вершины, можно определить пропорции мезонов, родившихся через каждый механизм и их характеристики. На Рис.4 и 5 показаны сечения рождения непрямых и прямых  $J/\psi$  в зависимости от  $p_T$  совместно с теоретическими предсказаниями ряда моделей.



Рис. 5. Сечение рождения  $J/\psi$  в зависимости от  $p_T$  для |y| < 0.75



Рис. 7. Сечение рождения непрямых  $J/\psi$  в зависимости от  $p_T$  для |y| < 0.75



Рис. 6. Сечение рождения  $\Upsilon(1S)$ в зависимости от  $p_T$ для |y|<1.2



Рис. 8. Сечение рождения прямых  $J/\psi$  в зависимости от  $p_T$  для |y| < 0.75

## Рождение очарованных мезонов

В эксперименте АТЛАС также изучалось рождение D-мезонов [4].  $D_s^+$  реконструировался в канале  $D_s^+ \to \phi \pi \to (KK)\pi$  и  $D^+$  в канале

 $D^+ \to K\pi\pi$ . Также реконструировался  $D^{*+}$ . На Рис.6 показаны дифференциальные сечения рождения  $D^{*\pm}$ -мезонов как функция  $p_T$  и псевдобыстроты  $\eta$  в сравнении с NLO КХД вычислениями.



Рис. 9. Дифференциальные сечения рождения  $D^{*\pm}$  в зависимости от  $p_T$  (слева) и псевдобыстроты (справа)

# Эксклюзивные каналы распада В-мезонов

Реконструкция отдельных каналов распада В-мезонов также важный этап в понимании методических особенностей установки и необходимая составляющая дальнейших исследований в области изучения СР-нарушений и редких распадов b-адронов. Были реконструированы распады  $B^{\pm} \to J\psi(\mu\mu)K^{\pm}$ ,  $B^0 \to J\psi(\mu\mu)K^*(K\pi) B^{\pm} \to J\psi(\mu\mu)\phi(KK)$ (См. пример реконструкции на Рис. 7 и подробно в [5, 6]).



Рис. 10. Сигналы  $B^0 \to J\psi(\mu\mu)K^*(K\pi)$  (лев.) и  $B^{\pm} \to J\psi(\mu\mu)\phi(KK)$  (прав.)

# Заключение

Уже в первый год набора данных эксперимент АТЛАС представил ряд интересных результатов также и в области физики тяжчлых кварков

- дифференциальные сечения рождения состояний кваркония измерены в прежде недоступной области кинематических переменных, определены доли прямых и непрямых  $J/\psi$ , рождчнных в pp-соударениях при 7ТэВ. Сечения рождения прямых мезонов демонстрируют некоторое различие с предсказаниями теории. Несклько важных каналов распада D и Вмезонов измерены. В ближайшем будущем будут завершены измерения времчн жизни этих состояний, начато изучение процессов СР-нарушений в их распадах и поиск явлении Новой Физики в редких распадах Вмезонов на основе быстро растущего объчма данных 2011 года.

# Список литературы

- [1] ATLAS Collaboration, JINST 3, S08003 (2008)
- [2] ATLAS Collaboration, Nucl. Phys. B 850 (2011) 387.
- [3] ATLAS Collaboration, arXiv:1106.5325v1 [hep-ex], accepted for publication *Phys.Lett.* **B**.
- [4] ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2011-017, http://cdsweb.cern.ch/record/1336746.
- [5] ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2011-050, http://cdsweb.cern.ch/record/1341815.
   [6] ATLAS CONF 2010 008
- [6] ATLAS Collaboration, ATLAS-CONF-2010-098, http://cdsweb.cern.ch/record/1307530

# 6. Струи на Tevatron и LHC

М.В.Токарев, Т.Г.Дедович Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская область, Россия tokarev@jinr.ru

#### Аннотация

Изучается самоподобие рождения струй в pp и  $\bar{p}p$  взаимодействиях в рамках теории z-скейлинга. Анализируются спектры рождения струй, измеренные коллаборациями CDF и D0 на Tevatron и коллаборациями CMS и ATLAS на LHC. Обсуждаются новые результаты, подтверждающие асимптотическое поведение скейлинговой функции  $\psi(z)$  и представляющие интерес для изучения фрактальной структуры импульсного пространства на малых масштабах.

# Введение

Струи традиционно рассматриваются как наиболее адекватные пробники для изучения взаимодействия адронных конституентов при высоких энергиях. Интерес вызывает как само рождение струй с большими поперечными импульсами, так и рождение новых частиц, идентифицируемых с помощью струй и рассматриваемых в качестве сигнатур новой физики. Новые данные об инклюзивных сечениях рождения струй в *pp* столкновениях при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ на LHC [1, 2] анализируются в рамках теории *z*-скейлинга [3]. Полученные результаты сравниваются с данными по рождению струй в *pp* взаимодействиях при меньших энергиях  $\sqrt{s} = 630, 1800, 1960$  ГэВ на Tevatron [4, 5, 6, 7].

# *z*-Скейлинг

Метод феноменологического описания (z-ckeйлинг) инклюзивных спектров рождения частиц с большими поперечными импульсами, развиваемый в работах [3, 8] применен для анализа новых данных [1, 2] по рождению струй в pp столкновениях на LHC. Он базируется на принципах локальности, самоподобия и фрактальности, отражающих свойства структуры частиц, взаимодействия их конституентов и механизма адронизации. Предполагается, что столкновение адронов выглядит как ансамбль самоподобно взаимодействующих конституентов.

Структура сталкивающихся объектов (адронов, ядер) с массами  $M_1$  и  $M_2$  характеризуется параметрами (фрактальными размерностями)  $\delta_1$  и

 $\delta_2$ . Взаимодействующие конституенты несут доли  $x_1, x_2$  импульсов сталкивающихся частиц  $P_1, P_2$ . Инклюзивная частица с массой  $m_1$  уносит импульс p. Элементарный подпроцесс рассматривается как бинарное столкновение конституентов  $(x_1M_1)$  и  $(x_2M_2)$ , приводящее к рождению частицы  $(m_1)$  и системы с массой  $(M_X)$  в конечном состоянии. Предполагается, что для подпроцесса выполняется закон сохранения импульса

$$(x_1P_1 + x_2P_2 - p)^2 = M_X^2, (13)$$

где  $M_X = x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2$  масса системы, балансирующая рождение инклюзивной частицы. Это уравнение выражает локальность взаимодействия адронов на конституентном уровне.

Параметры  $\delta_1, \delta_2$  связаны с долями  $x_1, x_2$  импульсов степенной функцией

$$\Omega(x_1, x_2) = (1 - x_1)^{\delta_1} (1 - x_2)^{\delta_2}.$$
(14)

Величина  $\Omega$  пропорциональна относительной доле таких конституентных взаимодействий, которые приводят к рождению данной инклюзивной частицы, и определяется долями  $x_1$  и  $x_2$ . В данном анализе мы используем соотношения  $\delta_1 = \delta_2 \equiv \delta$ ,  $M_1 = M_2$ , и  $m_2 = m_1 \equiv 0$ , естественные для рождения струй как в pp, так и в  $\bar{p}p$  взаимодействиях. В работе [3] установлено, что параметры  $\delta_1$  и  $\delta_2$  постоянны (не зависят от кинематических переменных). Они интепретируются как фрактальные размерности сталкивающихся частиц в пространстве долей импульсов  $\{x_1, x_2\}$ .

Скейлинговая переменная z представима в виде  $z = z_0 \Omega^{-1}$ . Величина  $z_0$  выражается через поперечную кинетическую энергию подпроцесса  $s_{\perp}^{1/2}$ , необходимую для рождения частиц  $(m_1)$  и  $(m_2)$  и плотность множественности  $dN/d\eta|_0$  при  $\eta = 0$ .

Скейлинговая функция, записанная в виде

$$\psi(z) = -\frac{\pi s}{(dN/d\eta)\sigma_{in}} J^{-1} E \frac{d^3\sigma}{dp^3},\tag{15}$$

выражается через инклюзивное сечение  $Ed^3\sigma/dp^3$ , плотность множественности  $dN/d\eta$  и полное неупругое сечение  $\sigma_{in}$ . Величина  $\sqrt{s}$  - энергия столкновения в системе центра масс, J - якобиан перехода от переменных  $\{p_z, p_T\}$  к переменным  $\{z, \eta\}$ . Функция  $\psi(z)$ , нормированная на единицу, имеет физическую интерпретацию плотности вероятности рождения частицы с данным значением величины z.

## Самоподобие рождения струй на LHC

Инклюзивное сечение рождения струи определяет вероятность ее наблюдения в адрон-адронном столкновении. Рождение струи рассматривается как прямое указание на взаимодействие адронных конституентов (кварков и глюонов) с большой передачей импульса.

В данной работе новые данные [1, 2], по инклюзивным сечениям рождения струй в pp столкновениях при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ, полученные на LHC, анализируются в рамках теории *z*-скейлинга и сравниваются с аналогичными данными [4, 5, 6, 7], полученными в экспериментах CDF и D0 на  $\bar{p}p$  коллайдере Tevatron. Эти данные позволяют изучить энергетическую зависимость скейлинговой функции  $\psi(z)$  в широкой области энергий  $\sqrt{s} = 630 - 7000$  ГэВ.



**Рисунок 1.** Сечения рождения инклюзивной струи в pp столкновениях при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ и в  $\bar{p}p$  столкновениях при  $\sqrt{s} = 630, 1800, 1960$  ГэВ и  $\theta \simeq 90^{0}$ , измеренные коллаборациями CMS [1], D0 [4, 5] (a) и CDF [6, 7] (b) в *z*-представлении.

На рисунке 1 показано z-представление спектров струй, измеренных коллаборациями CMS на LHC, D0 (a) и CDF (b) на Tevatron. Данные демонстрируют энергетическую независимость скейлинговой функции в центральной области псевдобыстрот. Наблюдается степенной поведение  $\psi(z)$  в широкой области z. Из рисунка видно, что функция  $\psi(z)$  изменяется больше чем на двенадцать порядков. Пунктирная линия соответствует асимптотическому поведению  $\psi(z)$ . Отклонение от асимптотического поведения наблюдается при  $z < 10^2$ . Данные CMS, используемые для определения сечений, соответствуют интегральной светимости 34 пб<sup>-1</sup>.



**Рисунок 2.** Спектры рождения инклюзивной струи в pp столкновениях при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ в различных интервалах по псевдобыстроте  $\eta$  в *z*-представлении. Экспериментальные данные, полученные коллаборациями CMS и ATLAS, взяты из [1, 2].

Спектры струй восстановлены до  $p_T \simeq 1000 \ \Gamma \Rightarrow B/c$ . Отметим, что минимальное значение  $\psi(z)$  при  $z \simeq 7 \cdot 10^3$  достигнуто на Tevatron при импульсе  $p_T \simeq 600 \ \Gamma \Rightarrow B/c$  и энергии  $\sqrt{s} = 1960 \ \Gamma \Rightarrow B$ .

На рисунке 2 приведены инклюзивные спектры струй [1, 2], рожденных в pp столкновениях при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ и охватывающие область поперечных импульсов  $p_T = 20 - 1350$  ГэВ/с и псевдобыстрот  $|\eta| < 4.4$  в z-представлении. Из рисунка видно, что данные демонстрируют угловую независимость  $\psi(z)$ . Скейлинговая функция описывается степенным законом  $\psi(z) \sim z^{-\beta}$  с постоянным значением параметра наклона  $\beta$ . Результаты проведенного анализа данных LHC находятся в хорошем согласии с результатами угловой независимости  $\psi(z)$ , установленной ранее при анализе данных CDF и D0 [9].

Коллаборация ATLAS для анализа спектров струй использовала статистику, соответствующую интегральной светимости 37 пб<sup>-1</sup>. Спектры измерены в области  $p_T = 25 - 1350$  ГэВ/с. Достигнуто максимальное значение величины  $z \simeq 10^4$ . Полученные результаты подтверждают самоподобие рождения струй до масштабов  $10^{-4}$  Фм.

В работе [9] установлено, что предсказания в следующим за лидирующим порядком КХД инклюзивных спектров струй при больших поперечных импульсах демонстрируют драматическое отклонение от асимптотического поведения  $\psi(z)$ , найденного в рамках *z*-скейлинга. Это поведение не воспроизводиться КХД эволюцией сечений с используемыми

феноменологическими партонными распределениями [9]. Мы полагаем, что асимптотическое степенное поведение  $\psi(z)$  могло бы быть использовано как дополнительное ограничение на глюонную функцию распределения при глобальном КХД анализе, включающем новые данные LHC по рождению струй при энергии  $\sqrt{s} = 7000$  ГэВ.

# Заключение

Новые данные по спектрам инклюзивных струй, полученные коллаборациями CMS и ATLAS на LHC, вплоть до самых больших поперечных импульсов, достигнутых в настоящее время на ускорителях, подтверждают энергетическую и угловую независимости функции  $\psi(z)$ , установленную ранее при энергиях Tevatron. Степенное поведение скейлинговой функции интерпретируется как проявление локальности, самоподобия и фрактальности адронных взаимодействий при высоких энергиях на конституентном уровне. Мы полагаем, что проверка асимптотического поведения  $\psi(z) \sim z^{-\beta}$  в рождении струй при больших импульсах  $p_T > 2000$  ГэВ/с могла бы дать информацию о фрактальной структуре импульсного пространства.

# Список литературы

- C. Dragoiu (for CMS Collab.), XIX Int. Workshop DIS2011, April 11-15, 2011, Newport News, VA, USA; http://conferences.jlab.org/DIS2011/; arXiv:1106.0208v1 [hep-ex] 1 Jun 2011.
- J. Zhang (for ATLAS Collab.), XIX Int.Workshop DIS2011, April 11-15, 2011, Newport News, VA, USA; http://conferences.jlab.org/DIS2011/
- [3] M.V. Tokarev, T.G. Dedovich, Int. J. Mod. Phys. A 15, 3495 (2000).
- [4] B. Abbott et al., *Phys.Rev.Lett.* 82, 2451 (1999); *Phys.Rev.* D 64, 032003 (2001).
  D. Elvira, Ph.D Thesis Universodad de Buenos Aires, Argentina (1995).
  V.M. Abazov et al., *Phys.Lett.* B 525, 211 (2002); *Phys.Rev.Lett.* 101, 062001 (2008).
- [5] M. Begel et al. (D0 Collab.), hep-ex/0305072.
  M. Voutilainen (for D0 Collab.) XIV Int.Workshop DIS2006, April 20-24, 2006, Tsukuba, Japan; http://www-conf.kek.jp/dis06/J. Commin (for D0 Collab.) XV Int. Workshop DIS2007, April 16-20, 2007, Munich, Germany; http://www.mppmu.mpg.de/dis2007/

- [6] F. Abe et al., *Phys.Rev.Lett.* 77, 438 (1996).
  T. Affolder et al., *Phys.Rev.* D 64, 032001 (2001).
- [7] A. Abulencia et al., *Phys.Rev.Lett.* 96, 122001 (2006); *Phys.Rev.* D 74, 071103 (2006); *Phys.Rev.* D 75, 092006 (2007).
- [8] I. Zborovský, M.V. Tokarev, *Phys. Rev.* D 75, 094008 (2007).
- [9] M.V. Tokarev, T.G.Dedovich, in *Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics* (Proceedings of the XIX International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems, September 29 October 4, 2008, Dubna, Russia), eds. by A.N.Sissakian, V.V.Burov, A.I.Malakhov, S.G.Bondarenko, E.B.Plekhanov, JINR, Vol.2, pp.187-197, 2008.

# 7. Ондуляторное излучение в периодическом магнитном поле с постоянной составляющей

#### К.В. Жуковский

Кафедра оптики и спектроскопии, физический факультет МГУ, 119992 Москва, Воробьевы горы Адрес электронной почты: zhukovsk@phys.msu.ru

#### Аннотация

Представлено аналитическое исследование влияния постоянного магнитного поля на излучение плоского ондулятора с использованием обобщенных специальных функций. Изучается поведение интенсивности и спектра излучения как на оси ондулятора, так и вне ее в составном магнитном поле. Аналитически вычисляется критическая величина напряженности постоянной составляющей магнитного поля, оказывающая заметное влияние на движение электронов в ондуляторе. Рассмотрены примеры нескольких плоских ондуляторов, проведена оценка влияния земного магнетизма на спектр их излучения, даны практические рекомендации по уменьшению этого влияния.

В течение последних 50 лет свойства синхротронного (СИ), ондуляторного излучения (ОИ) – высокая интенсивность пучка и локализация в узком конусе Ц являлись решающими для многих приложений и для появления и развития лазеров на свободных электронах ЛСЭ [1]. Развитие теории излучения электронов в магнитных полях различных конфигураций [1, 2, 3, 4] и разработка новых конфигураций этих устройств [4, 5], а также источников излучения – лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) – определяет повышенный интерес к исследованию излучения ультрарелятивистских зарядов, движущихся во внешних магнитных полях. Повышаются требования к качеству ОИ, которое сильно зависит от присутствия непериодических компонент и искажений магнитного поля в ондуляторе. Они могут быть присущи самому ондулятору ввиду, например, конструкции магнитов, ошибок намагничивания и неидеальности гармонического поля, связанной с условиями выполнения уравнений Максвелла (см., например, [6]). Из-за присутствия магнитного поля Земли, по всей длине ондулятора практически всегда присутствует постоянная компонента магнитного поля *B*<sub>d</sub>.

Мы приняли во внимание оба явления – как однородное, так и неоднородное уширение спектральных линий ОИ и представили аналитический

метод расчета излучения электрона, движущегося в ондуляторе, где постоянная компонента магнитного поля  $B_d = \kappa B_0$  наложена на периодическое поле ондулятора  $B_0$  (см. также [7]). В этом случае электрон движется по гораздо более сложной траектории, меняется спектр излучения, частоты, ширина и форма спектральных линий. Полученные выражения для резонансных частот на оси включают угол отклонения  $heta_H$ , который зависит только от суммы квадратов компонент постоянной компоненты магнитного поля, образующими его напряженность. Показано как эффект постоянного поля накапливается вдоль оси ондулятора с каждым периодом и что он зависит от их числа N. Интенсивность излучения на оси при условии слабого постоянного магнитного поля определяется рядом резонансных частот, записанных через обычные функции Бесселя и обобщенные функции Эйри. Метод обобщенных функций позволяет получить аналитические решения с использованием обобщенных функции Бесселя четырех аргументов также и при сравнимых напряженностях постоянного и периодического полей. Постоянная компонента поля *B<sub>d</sub>* приводит к появления четных гармоник в спектре и модифицирует нечетные гармоники. Замечателен тот факт, что интенсивность излучения четных гармоник определяется только модулем напряженности постоянного поля, а не ее направлением. Отсюда следует, что исключить их можно, только ориентировав ось ондулятора по направлению постоянного поля, и никаким другим вращением устранить это влияние нельзя. Физическая причина изменения спектра излучения — не в отклонении электронов в каком-то определенном направлении от оси, а в расстройке когерентности осцилляций электронов в ондуляторе при прохождении электронами постоянного магнитного поля. Исследование уширения основной гармоники ондулятора как на оси, так и вне ее, с использованием обобщений функции Эйри  $S(\alpha, \beta, \varepsilon)$  иллюстрирует влияние постоянного магнитного поля. Продемонстрирован сдвиг резонансной частоты и уменьшение высоты максимума. Показано, что влияние индуцированного угла изгиба  $\theta_H$  на интенсивность гармоники сильнее, чем влияние отклонения от оси на такой же угол. С использованием нового выражения для спектра ондулятора с дополнительным постоянным магнитным полем получено условие применимости хорошо известной формулы для основной частоты излучения  $\omega_{R_0}$  плоского ондулятора при наложении слабого постоянного поля. Анализ ОИ дополнен рассмотрением эффектов неоднородного уширения спектральных линий, эффективно отвечающего за разного рода потери при распространения пучков в ондуляторах и отклонения формы периодического поля от синусоидальной, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла. Учет влияния постоянного магнитного поля через соответствующий параметр  $\kappa$  на форму спектральной линии ондулятора со 100 периодами показывает, что эффект постоянной компоненты магнитного поля в ондуляторе пренебрежимо мал, пока значение  $\kappa < 10^{-4}$ . Заметное искажение спектральной линии происходит в дипольном поле напряженности  $B_d > 1.5 \times 10^{-4} B_0$ . Ситуация значительно изменяется с увеличением числа периодов ондулятора N. Так, для ондулятора с 200 периодами в присутствии постоянного магнитного поля  $B_d = 1 \times 10^{-4} B_0$  искажения спектральной линии появляются уже при отношении напряженностей постоянного и переменного полей  $\kappa \sim 5 \times 10^{-5}$ . Более того, максимальная разумная напряженность постоянной компоненты магнитного поля  $B_d$  для такого ондулятора составляет  $7 \times 10^{-5} B_0$ . Тогда очевидно, что искажения спектральной линии ондулятора с 200 периодами при  $B_d = 1 \times 10^{-4} B_0$  очень значительны. Так как магнитное поле Земли имеет как раз такой порядок относительно периодического поля в ондуляторе, то в рассмотренном случае нужно принимать все меры по тщательному экранированию постоянной компоненты поля или ее компенсации внешними катушками с током.

Итак, нами проведен анализ излучения плоского ондулятора и влияния постоянного магнитного поля на излучение как на его оси, так и под произвольным углом к ней, с применением техники функций Бесселя многих переменных. Для учета постоянной компоненты магнитного поля развита техника обобщенных функций Эйри. Использование обобщенных форм специальных функций многих переменных позволило получить аналитические выражения для спектра и интенсивности ОИ, а также критической величины постоянного магнитного поля, при которой начинаются значительные искажения спектра, формы спектральной линии и пространственного распределения излучения ондулятора, зависящие только от величины постоянного поля. Разработанный нами подход позволяет получить аналитическое решение задачи с периодическими полями необычных и сложных составных конфигураций. Становится легко доступным физический смысл полученных решений и их анализ. Компактная аналитическая форма решений позволяет провести анализ вклада каждой из компонент поля и учет искажений спектра и уширения спектральных линий, имеющих место в реальных устройствах с заданным числом периодов и другими характеристиками.

# Список литературы

[1] I.M. Ternov, V.V.Mikhailin, V.R.Khalilov "Synchrotron Radiation and its Applications" (in Russian), (Moscow University, Moscow), 1980.

- [2] V.A. Bordovitsyn (Ed.) "Synchrotron Radiation theory and its development" (in the memory of I.M.Ternov), (World Scientific. Singapore), 1999.
- [3] E.E. Koch (Ed.) "Handbook of Synchrotron Radiation", (North Holland. Amsterdam), 1983
- [4] A.A.Sokolov, D.V.Galtsov, V.Ch.Zhukovsky Zh. Tekhn. Fiz., N 43, 682 (1973)
- [5] G.Dattoli, V.V.Mikhailin, P.L.Ottaviani, K.Zhukovsky Journal of Applied Physics, 100, 084507 (2006).
- [6] D.F.Alferov, Yu.A.Bashmakov, P.A.Cherenkov Usp. Fiz. Nauk, N3, 389 (1989).
- [7] G.Dattoli, V.V.Mikhailin, K.V.Zhukovsky Journal of Applied Physics, 104, 124507 (2008).

# 8. Численное исследование решеточной модели Вайнберга - Салама

# М.А.Зубков

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, 117218 Россия, Москва ул. Большая Черемушкинская, 25, Адрес электронной почты: zubkov@itep.ru

#### Аннотация

Решеточная модель Вайнберга - Салама без динамических фермионов исследована численно при значении угла Вайнберга  $\theta_W \sim 30^{\circ}$ , и затравочной постоянной тонкой структуры  $\alpha \sim \frac{1}{150}$ . Рассматривается модель при затравочной массе Хиггса в районе 150 ГэВ. Мы исследуем явления, возникающие в окрестности фазового перехода между физической Хиггсовской фазой и нефизической симметричной фазой решеточной модели. Это именно та область фазовой диаграммы, где предполагается искать переход к непрерывной физике. Мы находим указание на то, что при энергиях масштаба 1 ТэВ непертурбативные явления могут быть существенны.

# Введение

Физическая шкала фиксируется нами, используя массу Z-бозона  $M_Z^{\rm phys} \sim 90$  ГэВ. Тогда длина ребра решетки равна  $a \sim [90 \,{\rm GeV}]^{-1}M_Z$ , где  $M_Z$  - это масса Z бозона в решеточных единицах. Внутри физической фазы теории линии постоянной физики (ЛПФ) определяются как соответствующие постоянным перенормированным физическим постоянным. (постоянная тонкой структуры  $\alpha$ , угол Вайнберга  $\theta_W$ , и отношение массы Хиггса к массе Z-бозона  $\eta = M_H/M_Z$ ). Точки ЛПФ параметризуются длиной ребра решетки. При увеличении ультрафиолетового обрезания при движении вдоль ЛПФ, соответствующей реалистическим значениям  $\alpha$ ,  $\theta_W$ , и  $\eta$  происходит приближение к фазовому переходу между физической фазой и нефизической фазой.

Ниже используются следующие решеточные переменные: 1. Калибровочное поле  $\mathcal{U} = (U, \theta)$ , где  $U \in SU(2)$ ,  $e^{i\theta} \in U(1)$ , определенное на линках решетки. 2. Скалярный дублет  $\Phi_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Действие мы рассматриваем в следующем виде

$$S = \beta \sum_{\text{plaquettes}} \left( \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} U_p\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta_W} (1 - \cos \theta_p) \right) + -\gamma \sum_{xy} \operatorname{Re}(\Phi^+ U_{xy} e^{i\theta_{xy}} \Phi) + \sum_x \left(|\Phi_x|^2 + \lambda (|\Phi_x|^2 - 1)^2)\right), \quad (16)$$

Затравочная постоянная тонкой структуры  $\alpha$  выражается через  $\beta$  и  $\theta_W$ как  $\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2 \theta_W}{\pi \beta (1 + \mathrm{tg}^2 \theta_W)}$ . Также имеют место следующие древесные оценки:  $v = \sqrt{2 \frac{\gamma - \gamma_c}{\lambda}}; M_H = v \sqrt{\frac{8\lambda}{\gamma}}; M_Z = v \sqrt{\frac{\gamma}{\beta \cos^2 \theta_W}}; \gamma_c = \frac{1 - 2\lambda}{4}; \Lambda = \frac{\pi}{a} = \sqrt{\frac{\pi^2 \lambda \beta}{2\gamma (\gamma - \gamma_c)}} [80 \,\mathrm{GeV}].$ При  $\lambda < 1/2$  древесные оценки предсказывают, что ультрафиолетовое

При  $\lambda < 1/2$  древесные оценки предсказывают, что ультрафиолетовое обрезание возрастает вдоль ЛПФ с уменьшением  $\gamma$ , причем в точке перехода она становится бесконечной. Тем самым древесное приближение предсказывает существование фазового перехода второго рода. Однако, благодаря непертурбативным эффектам эта картина может модифицироваться. А именно, фазовый переход, может вырождаться в кросовер.

#### Численные результаты

В нашем исследовании мы фиксируем затравочный угол Вайнберга равным 30°, кроме того мы фиксируем  $\beta = 12$ , что соответствует значению постоянной тонкой структуры в районе 1/150, затравочное значение  $\lambda = 0.0025$  используемое нами соответствует массе Хиггса ~ 150 ГэВ. Таким образом, единственным параметром является  $\gamma$ . При больших значениях этого параметра система находится в физической фазе, где скалярное поле сконденсировано. При уменьшении  $\gamma$  система переходит в симметричную фазу, где конденсат отсутствует. Приближение к непрерывной физике в рамках решеточной модели осуществляется при приближении к фазовому переходу. Симуляции производились на решетках размера  $8^3 \times 16$ ,  $12^3 \times 16$ ,  $16^4$ . Также производилась проверка ряда результатов на решетке  $16^3 \times 32$ .

Данные линковой части действия  $\frac{1}{4N} \sum_{xy} \Phi_x^+ U_{xy} e^{i\theta_{xy}} \Phi_y$  (часть действия наиболее чувствительная к изучаемому фазовому переходу) демонстрируют отсутствие сигнала двух состояний, что говорит о том, что мы не имеем дело с фазовым переходом первого рода. Также эти данные указывают, что в точке, близкой к  $\gamma'_c \sim 0.25775$  имеет место разрыв производной термодинамических потенциалов, что говорит о том, что в этой точке на решетках бесконечного размера может иметь место фазовый переход второго рода.

Наши данные показывают, что  $\Lambda = \frac{\pi}{a} = (\pi \times 91 \text{ GeV})/M_Z$  медленно растет с уменьшением  $\gamma$  при любом фиксированном  $\lambda$ . Мы исследовали более подробно окрестность фазового перехода для  $\lambda = 0.0025$  и  $\beta = 12$ . Было обнаружено, что при  $\gamma > \gamma'_c$  значение  $\Lambda$  на решетках вплоть до размера 16<sup>4</sup> не превышает величины в несколько ТэВ. В то же время при  $\gamma \leq \gamma'_c$  решеточная масса Z - бозона не может быть вычислена из - за больших статистических ошибок в корреляторе.

Ультрафиолетовый эффективный потенциал меняет свою форму в точке  $\gamma_c = 0.26$  [3]. Плотность монополей Намбу как функцию от  $\gamma$  при  $\lambda = 0.0025$ ,  $\beta = 12$  растет с уменьшением  $\gamma$ . Значение плотности монополей при  $\gamma_c = 0.26$  - около 0.1. В этой точке значение ультрафиолетового обрезания  $\Lambda \sim 1.2 \pm 0.2$  ТэВ. В соответствии с классическими представлениями размер монополя Намбу - порядка  $M_H^{-1}$ . Тогда для  $a^{-1} \sim 400$  ГэВ и  $M_H \sim 150$  ГэВ ожидаемый размер монополями, таким образом, меньше, чем длина ребра решетки и невозможно вообще говорить о данных конфигурациях как о представляющих физический монополь Намбу. При  $\gamma = \gamma_{c2} \sim 0.262$  плотность монополей Намбу - около 0.03. Среднее расстояние между монополями, таким образом, - примерно две длины ребра решетки или  $\sim \frac{1}{160 \text{ Gev}}$ . Мы видим, что при этом значении  $\gamma$  среднее расстояние между монополями намбу.

Суммируем указанные наблюдения. Внутри Флуктуационной Области (ФО) при  $\gamma'_c < \gamma < \gamma_{c2}$  рассматриваемые конфигурации не представляют отдельно расположенных монополей Намбу. Вместо этого, они должны рассматриваться как представляющие собрание плотно расположенных монополей. С другой стороны, при  $\gamma >> \gamma_{c2}$  рассматриваемые конфигурации представляют отдельно расположенные монополи, поскольку их размеры в этой области существенно меньше средних расстояний между ними. Другими словами, вне ФО вакуум представляет собой разреженный газ монополей Намбу, а внутри ФО - жидкость, составленную из монополеподобных объектов.

Внутри Z - струны, соединяющей монополи Намбу, а равно и внутри самих монополей  $|\Phi| = 0$ . Это означает, что монополь Намбу вместе с Z - струной может рассматриваться как зародыш нефизической фазы внутри физической. Мы видим, что плотность этих зародышей растет при приближении к точке перехода. Внутри ФО две фазы перемешаны, что связано с большим значением монопольной плотности.

Таким образом, мы приходим к выводу, что динамика решеточной модели Вайнберга - Салама внутри ФО не имеет ничего общего с обычной теорией возмущений. Это значит, что разложение вокруг тривиального вакуума (калибровочное поле равно нулю, скалярное поле равно  $(\phi_m, 0)^T$ ) не должно применяться внутри ФО.

# Список литературы

[1] W. Langguth, I. Montvay, P. Weisz, Nucl. Phys. B277:11,1986.

- M.A. Zubkov, Phys.Lett.B684:141-146,2010
   M.A. Zubkov, Phys.Rev.D82:093010,2010
- [3] "Effective constraint potential in lattice Weinberg Salam model M.I.Polikarpov, M.A.Zubkov, Physics Letters B 700 (2011) pp. 336-342, [arXiv:1104.1319]
- [4] Y. Nambu, Nucl.Phys. B 130, 505 (1977);
  Ana Achucarro and Tanmay Vachaspati, Phys. Rept. 327, 347 (2000);
  Phys. Rept. 327, 427 (2000).
- [5] M.N. Chernodub, JETP Lett. **66**, 605 (1997)
- [6] M.I. Polikarpov, U.J. Wiese, and M.A. Zubkov, Phys. Lett. B 309, 133 (1993).
- [7] Peter Arnold, Olivier Espinosa, Phys.Rev.D47:3546,1993; Erratumibid.D50:6662,1994
   Z. Fodor, A. Hebecker, Nucl.Phys. B432 (1994) 127-146
- [8] A.I. Veselov, and M.A. Zubkov, JHEP 0812:109 (2008);
- [9] I. Montvay, Nucl. Phys. B **269**, 170 (1986).
- [10] W. Langguth, I. Montvay (DESY) Z.Phys.C36:725,1987