

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции,
30 января — 6 февраля 2011 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2011

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011.

Настоящее издание включает тезисы 42-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых, проходившей с 30 января по 6 февраля 2011 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и дискретная математика, геометрия и топология, приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, распознавание образов и математическое программирование, информатика и вычислительная техника, компьютерные науки и безопасность, математическая биология. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-06801) и Президиума УрО РАН (грант поддержки молодежных научных школ и конференций).

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнев.

Рецензенты:

чл.-корр. РАН А.А. Махнев, д.ф.-м.н. А.Л. Агеев, д.ф.-м.н. А.Г. Бабенко, д.ф.-м.н. А.Р. Данилин, д.ф.-м.н. А.В. Ким, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев, к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, д.ф.-м.н. Н.Ю. Лукьянов, к.ф.-м.н. А.В. Осипов, к.ф.-м.н. М.А. Патракеев, д.ф.-м.н. В.В. Прохоров, к.ф.-м.н. М.Ф. Прохорова, д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин, д.ф.-м.н. В.Т. Шевалдин.

Ответственные за выпуск:
С.Ф. Правдин, Н.В. Маслова.

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Бакланов А.П.¹

e-mail: artem.baklanov@gmail.com

Рассматривается игровая постановка, где игроки имеют ограничения на выбор управлений, одно из которых — мгновенность импульса управления. Доказано, что используя достаточно «узкие» импульсы, т.е. ослабив ограничение, мы можем сколь угодно точно аппроксимировать результат «идеально импульсной» игры. Для нахождения асимптотических результатов игры используются конструкции расширения в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер. Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества S . Если X — множество, то $\beta[X] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | \forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$ и $\beta_0[X] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) | \forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$. Семейства из $\beta_0[X]$ есть базы фильтров X и только они. Если E — непустое множество, (X, τ) — топологическое пространство, r — отображение из E в X и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, тогда множество притяжения (МП) определяется равенством

$$(\text{as})[X, \tau, r, \mathcal{E}] \triangleq \bigcap_{L \in \mathcal{E}} cl(r^{-1}(L), \tau). \quad (1)$$

В дальнейшем фиксируем две линейные управляемые системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)b(t), \quad \dot{y}(t) = B(t)y(t) + v(t)c(t)$$

с управлениями $u(t), v(t)$ соответственно первого и второго игрока. Фазовое пространство первой системы (второй системы) полагаем k -мерным (l -мерным), промежуток управления совпадает с $[0, 1]$, а начальные условия удовлетворяют $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^k$ ($y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^l$). Полагаем, что при $t \in [0, 1]$ $A(t)$ — $k \times k$ -матрица и $B(t)$ — $l \times l$ -матрица, все компоненты которых — непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$. Каждая компонента $b_i = b_i(\cdot)$ ($c_j = c_j(\cdot)$) вектор-

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-7320.2010.1), РФФИ (грант No.09-01-00436-а) и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

функции b (вектор-функции c) является ярусной функцией. Управления $u(t) : I \rightarrow [0, \infty[$, $v(t) : I \rightarrow [0, \infty[$, $I \triangleq [0, 1[$ предполагаются конечно-постоянными и непрерывными справа. Более того, их выбор должен осуществляться с условиями

$$\int_0^1 u(t)dt = 1, \quad \int_0^1 v(t)dt = 1. \quad (2)$$

Обозначим через \mathbb{F} множество всех функций u и v , удовлетворяющих (2). Мы будем использовать в качестве u и v «узкие» импульсы. Формализуем это. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$F_\varepsilon \triangleq \{u \in \mathbb{F} | \exists t_1 \in I : \{\tau_1 \in I | u(\tau_1) \neq 0\} \subset [t_1, t_1 + \varepsilon]\}.$$

Аналогично вводим F_δ . Определим семейство $\mathcal{F} \triangleq \{F_\varepsilon : \varepsilon \in]0, \infty[\}$. Выполняется $\mathcal{F} \in \beta_0[\mathbb{F}]$. По формуле Коши получаем траектории $\phi_u(t)$ и $\xi_v(t)$. Определены функции терминального состояния систем от управления u и v , соответственно g и h . Задана непрерывная функция платы от терминальных состояний $\alpha_0 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим игровую задачу, в которой игрок I стремится к минимизации значения $\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1))$, а игрок II — к максимизации при соблюдении ими вышеупомянутых ограничений. Тогда наша задача с ослабленными ограничениями имеет следующий смысл:

$$\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1)) \rightarrow \sup_{v \in F_\delta} \inf_{u \in F_\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ исчезающе малы. Определены значения

$$\begin{aligned} V(\varepsilon, \delta) &\triangleq \sup_{v \in F_\delta} \inf_{u \in F_\varepsilon} \alpha_0(g(u), h(v)) = \\ &= \max_{y \in cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{x \in cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} \alpha_0(x, y), \end{aligned}$$

которые можно рассматривать как реализуемые максимумы при «узких» импульсах управления. Рассмотрим МП $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ (см. (1)) в пространстве терминальных состояний первого и второго игрока. В силу того, что $\mathcal{F} \in \beta_0[\mathbb{F}]$, множества \mathbb{G}_1 и \mathbb{G}_2 непусты.

Следовательно, определено значение асимптотического максимума (при мгновенных импульсах управления)

$$\mathbb{V} \triangleq \max_{y \in \mathbb{G}_2} \min_{x \in \mathbb{G}_1} \alpha_0(x, y) \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Теорема. $\forall \kappa > 0 \exists \theta_\kappa > 0 : |V(\varepsilon, \delta) - \mathbb{V}| < \kappa \forall \varepsilon \in]0, \theta_\kappa[\forall \delta \in]0, \theta_\kappa[.$

Теорема характеризует \mathbb{V} как предел реализуемых максиминов, определяя их асимптотику. Пусть $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ — множество к.-а. вероятностных (в.) мер на пространстве-стрелке (I, \mathcal{L}) . Введем обобщенные управления: определяем оператор \mathbf{m} из \mathbb{F} в $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ по правилу $\mathbf{m}(f) \triangleq f * \lambda \forall f \in \mathbb{F}$, где λ — след меры Лебега на полуалгебре \mathcal{L} , $f * \lambda$ — неопределенный интеграл. Существует МП в пространстве обобщенных управлений-мер, которое является одинаковым для обоих игроков,

$$\mathbf{G}^\lambda \triangleq (\text{as})[\mathbb{P}(\mathcal{L}), \tau_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{L}), \mathbf{m}, \mathcal{F}] \in \mathcal{P}(\mathbb{P}(\mathcal{L})).$$

МП \mathbf{G}^λ подобно $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$, но реализуются в пространстве обобщенных к.-а. в. мер. Последние мы будем использовать при расширении формулы Коши: при $\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L}), \nu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$ обобщенные траектории имеют вид $\tilde{\phi}_\mu(t) = \Phi_1(t, 0)x_0 + \int_{[0, t[} \Phi_1(t, \zeta)b(\zeta)\mu(d\zeta), \tilde{\xi}_\nu(t) = \Phi_2(t, 0)y_0 + \int_{[0, t[} \Phi_2(t, \zeta)c(\zeta)\nu(d\zeta) \forall t \in [0, 1]$.

Предложение. *Обобщенный и асимптотический максимины совпадают:* $\max_{\nu \in \mathbf{G}^\lambda} \min_{\mu \in \mathbf{G}^\lambda} \alpha_0(\tilde{\phi}_\mu(1), \tilde{\xi}_\nu(1)) = \mathbb{V}.$

Таким образом, наша асимптотическая задача (3) сводится к обобщенной, в которой каждый игрок выбирает управления-меры, а именно к.-а. в. меры, из множества \mathbf{G}^λ . Причем первый игрок пытается минимизировать $\alpha_0(\tilde{\phi}_\mu(1), \tilde{\xi}_\nu(1))$, а второй — максимизировать. Благодаря работе [1], мы знаем точное описание \mathbf{G}^λ . Более того, в этой работе доказана определенная нечувствительность \mathbf{G}^λ к форме управляющей функции.

Литература

- [1] Скворцова А.В., Ченцов А.Г. О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
- [2] Ченцов А.Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского Университета. 2010. Вып. 3. С. 104–119.

К ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОЙ ПОИМКИ УБЕГАЮЩЕГО ГРУППОЙ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Банников А.С.

e-mail: asbannikov@gmail.com

В конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k , $k \geq 2$, рассматривается дифференциальная игра Γ $(n + 1)$ -го лица: n преследователей P_i , $i \in N_n = \{1, \dots, n\}$, и убегающего E . Законы движения каждого из преследователей P_i и убегающего E имеют вид:

$$P_i: \quad \dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in Q, \quad (1)$$

$$E: \quad \dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \quad (2)$$

причём $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i \in N_n$, $M_i \subset \mathbb{R}^k$ — заданные выпуклые компакты, $a(\cdot): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве полуоси $[t_0, +\infty)$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Пусть $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i \in N_n$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$. Тогда

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0. \quad (3)$$

Для каждой из систем (3) рассмотрим систему-поводыря [1]

$$\dot{w}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad w_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in Q, \quad i \in N_n, \quad (4)$$

с такими же терминальными множествами, как и в исходной системе.

Определение. Будем говорить, что в игре Γ *происходит поимка* из заданной начальной позиции $z^0 = z(t_0)$, если существуют момент времени $T_0 = T(z^0)$, позиционные стратегии управления с поводырём $\mathcal{U}_i = (U_i, \psi_i, \chi_i)$ преследователей P_i , $i \in N_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [t_0, T_0]$, существуют момент времени $\tau \in [t_0, T_0]$ и номер $s \in N_n$ такие, что имеет место включение $z_s(\tau) \in M_s$.

Здесь U_i — функция, которая будет формировать управление преследователя P_i в исходной системе (3)

$$U_i: [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow Q, \quad (5)$$

функция ψ_i есть переходная функция i -го поводыря

$$\psi_i: T_+^2 \times \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (T_+^2 = \{(t_1, t_2) \in [t_0, T_0]^2 | t_1 \leq t_2\}). \quad (6)$$

Значение переходной функции $\psi_i(t_1, t_2, z, w)$ есть положение w^* , в котором поводырь окажется в заданный момент времени t_2 при условии, что в момент $t = t_1$ управляемая система и поводырь находились в точках z и w соответственно.

Третья функция χ_i ставит в соответствие позиции (t, z_i) i -й управляемой системы положение поводыря $\chi_i(t, z_i) = w_i = w_i(t)$.

Введём функции λ_i следующим образом

$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \quad \lambda_i^-(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(v, m_i).$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то существуют (см. [2, 3])

$$\delta(w^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i(v) \geq 0, \quad \delta^-(w^0) = \min_{v \in -Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i^-(v) \geq 0,$$

причём $(\delta(w^0))^2 + (\delta^-(w^0))^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \in \text{Int conv} \bigcup_{i \in N_n} (w_i^0 - M_i)$.

Теорема. Пусть начальная позиция z^0 такова, что

$$T' = T'(z^0) = \min\{t \geq t_0 \mid \int_{t_0}^t |a(s)| ds = \frac{n}{\min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\}}\} < +\infty$$

и $0 \in \text{Int conv} \bigcup_{i \in N_n} (z_i^0 - M_i)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ происходит поимка с терминальными множествами $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon S^k$.

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [2] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992.
- [3] Банников А.С. Об одной задаче простого преследования // Вестник удмуртского университета. Сер. Матем. Мех. Комп. науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК НЕСКОЛЬКИХ РЛС ПО АЗИМУТУ НА ОСНОВЕ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА

Бедин Д.А.¹

e-mail: jango.urals@gmail.com

Работа посвящена задаче идентификации систематических ошибок по азимуту радиолокационных станций (РЛС) по результатам наблюдения за полётом воздушного судна (ВС). Рассматривается случай совместного наблюдения ВС несколькими РЛС. Каждая РЛС измеряет дальность и азимут с некоторым тактом по времени. Измерения производятся с ошибками. В ошибке измерения азимута может присутствовать значительная систематическая составляющая.

Предполагается, что полёт близок к горизонтальному. Поэтому реальное движение ВС подменяется движением в двумерной плоскости.

Рассматривается алгоритм идентификации систематических ошибок РЛС на основе фильтрации Калмана [1]. В алгоритме используются результаты наблюдения за ВС на участке, где его движение незначительно отличается от прямолинейного равномерного. Разработан вспомогательный алгоритм выделения таких прямолинейных участков на траектории.

Алгоритм идентификации систематических ошибок существенно отличается от описанного в [2] тем, что не требует для анализа дополнительной «эталонной» информации.

1. Считаем, что ВС осуществляет прямолинейное и равномерное движение. Начальный момент движения полагаем нулевым. Начальные условия по положению и скорости обозначим $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$.

Пусть в момент t_i измерение производит РЛС с номером $k = k(i)$, находящаяся в точке r_k . В этот момент ВС занимает положение $x_i = x_0 + v_0 t_i$. Координаты замера z_i имеют вид

$$z_i = x_0 + v_0 t_i + e_2^i |x_i - r_k| \lambda_k + e_2^i \sigma_\varphi |x_i - r_k| w_i^1 + e_1^i \sigma_r w_i^2. \quad (1)$$

Здесь e_1^i, e_2^i – взаимно ортогональные векторы единичной длины; e_1^i соответствует направлению на РЛС с номером k ; e_2^i описывает

¹Работа выполнена при поддержке УрО РАН, проект 09-С-1-1010, а также при поддержке гранта РФФИ № 10-01-96006.

направление азимутального отклонения; σ_r, σ_φ – среднеквадратические отклонения для ошибок по дальности и азимуту; λ_k – неизвестная систематическая ошибка по азимуту РЛС с номером k ; w_i^1, w_i^2 – независимые для разных i и между собой случайные величины с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Случайные величины полагаем нормально распределёнными.

Введём вектор-столбец состояния X , в который внесём все неизвестные величины: параметры прямолинейного движения x_0, v_0 и систематические ошибки λ_k по азимуту различных РЛС. Считаем состояние X постоянной векторной случайной величиной. Перепишем соотношение (1) в виде

$$z_i = C_i X + D_i w_i. \quad (2)$$

Здесь $w_i = (w_i^1, w_i^2)^T$. Соотношение (2) выражает связь замера с состоянием X и называется уравнением наблюдения.

Переменные матрицы C_i, D_i зависят от координат x_i ВС, которые выражаются через неизвестные параметры x_0, v_0 оцениваемого состояния X . Эту трудность можно преодолеть, приближённо заменив в матрицах положение x_i ВС на замер z_i . Подобное упрощение разумно при достаточно больших значениях расстояния $|x_i - r_k|$ до РЛС.

Уравнение наблюдения используем для получения оценок состояния, уточняющихся по мере поступления новых замеров. Применяем процедуру фильтрации Калмана [1], стандартную для линейных систем. Фильтр Калмана по замерам $\{z_j\}_{j=1}^i$ выдает оценки состояния \hat{X} – условное математическое ожидание \hat{X}_i и матрицу условных ковариаций P_i :

$$\hat{X}_i = \mathbf{E} [X | \{z_j\}_{j=1}^i], \quad P_i = \mathbf{E} \left[(X - \hat{X}_i)(X - \hat{X}_i)^T \middle| \{z_j\}_{j=1}^i \right].$$

Уравнения фильтрации состояния X для нашей частной задачи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_i &= P_{i-1} C_i^T (C_i P_{i-1} C_i^T + D_{i-1} D_{i-1}^T)^{-1}, \\ \hat{X}_i &= \hat{X}_{i-1} + \beta_i (Z_i - C_i \hat{X}_{i-1}), \\ P_i &= (I - \beta_i C_i) P_{i-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия \hat{X}_0, P_0 выбираются специально.

2. Алгоритм выделения участков прямолинейного равномерного движения основан на обработке замеров одной РЛС процедурой «скользящего окна». В окне производится вызов процедуры фильтрации, описанной в предыдущем пункте, но записанной только для одной из РЛС. При этом для неё систематическая ошибка по азимуту полагается равной нулю. Процедура восстанавливает параметры прямолинейного равномерного движения, наилучшим образом приближающего замеры в окне, после чего производится анализ «разброса» замеров относительно найденного прямолинейного движения. Если эмпирическая дисперсия отклонения замеров по углу и по дальности не превосходит значений, характерных для выбранной РЛС, делается вывод о том, что в окне наблюдается участок прямолинейного движения. В этом случае производится увеличение окна с включением замеров от более поздних моментов времени. Увеличение производится до тех пор, пока «разброс» замеров подтверждает участок прямолинейного движения. Последнее найденное таким образом окно записывается в предварительный ответ, после чего начало анализируемого окна сдвигается в сторону замеров с большим временем. В окончательный ответ из предварительного берутся только непересекающиеся участки наибольшей длины.

Таким образом, алгоритм обрабатывает перемещающимся окном все замеры и находит прямолинейные участки максимально возможной длины.

Литература

- [1] *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва. — М.: Университетская книга, Логос, 2006. 640 с.
- [2] *Бедин Д.А., Федотов А.А.* Вычисление систематической ошибки радиолокатора по азимуту с использованием программы восстановления траектории самолёта / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Труды 39-й Всероссийской молодежной конференции. С. 319–324. — Екатеринбург: УрО РАН, 2010.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗДЕЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ К КАНАЛАМ

Букаренко М.Б.

e-mail: maxim.bukarenko@gmail.com

В работах [1, 2] была предложена нотификация состояний системы массового обслуживания (СМО) с использованием колец вычетов. Целью разработки такой нотификации является аналитическое описание СМО с отдельными очередями каналов обслуживания, граф которой не является графом процесса гибели и размножения.

Обозначим через $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ различные состояния системы массового обслуживания сигнатуры $T = T(m_1, m_2, \dots, m_k)$ или размеченной сигнатуры $T = T(\mu_1 \times m_1, \mu_2 \times m_2, \dots, \mu_k \times m_k)$ с $k \geq 1$ каналами пропускных способностей $\mu_t \geq 0$, $t \in \overline{1, k}$, с отдельными очередями длины $m_t \geq 0$. Здесь цифра 0 в двоичном k -значном представлении числа

$$\bar{x} \stackrel{def}{=} (x_1 x_2 \dots x_k)_2 \in \overline{0, 2^k}$$

обозначает свободный, а 1 – занятый канал. Тогда при

$$r \stackrel{def}{=} \max(m_1, m_2, \dots, m_k) + 1$$

в r -ичном k -значном представлении цифры $\{y_t \in \overline{0, x_t m_t}\}_{t=1}^k$ числа

$$\bar{y} \stackrel{def}{=} (y_1 y_2 \dots y_k)_r \in \overline{0, r^k}$$

будут соответствовать наполненности очередей.

Тогда матрица состояний СМО $A = A(T) = A(m_1, m_2, \dots, m_k)$ представляет собой бинарную $2^k \times (r^k + 1)$ -матрицу с элементами

$$a \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) \stackrel{def}{=} f \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) : \overline{0, 2^k} \times \overline{0, r^k} \rightarrow \{0, 1\}.$$

где f – характеристическая функция множества различных состояний СМО.

Представим состояния k -канальной СМО сигнатуры

$$T = T(m_1, m_2, \dots, m_k)$$

векторами $\begin{pmatrix} (x_1 x_2 \dots x_k)_2 \\ (y_1 y_2 \dots y_k)_r \end{pmatrix}$. Здесь $x_i = \overline{0, 1}$, где значение 0 соответствует свободному, а 1 – занятому каналу; $y_i = \overline{0, m_i}$ соответствует наполненности очереди i -го канала, $i = \overline{1, k}$.

Соответствующая система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{d}{dt}P = (A_{n \times n} + B_{n \times n})P. \quad (1)$$

Здесь P – вектор-столбец вероятностей состояний СМО,

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} -\lambda \sum_{j=1}^n a_{1j} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{11} & -\lambda \sum_{j=1}^n a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & -\lambda \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$B_{n \times n} = \begin{pmatrix} -\mu \sum_{j=1}^n b_{1j} & \mu b_{12} & \dots & \mu b_{1n} \\ \mu b_{11} & -\mu \sum_{j=1}^n b_{2j} & \dots & \mu b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu b_{n1} & \mu b_{n2} & \dots & -\mu \sum_{j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где a_{ij}, b_{ij} – веса прямых и обратных дуг соответственно орграфа состояний СМО, λ – интенсивность входящего пуассоновского потока заявок на обслуживание, μ – интенсивность выходящего пуассоновского потока обработанных заявок.

Рассмотрим хорошо известную одноканальную СМО с конечной очередью с графом процесса гибели и размножения. Система уравнений Колмогорова такой СМО имеет вид (1) с треугольными вырожденными 2-ленточными $n \times n$ -матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu & \mu & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Аналитическое решение такой системы дифференциальных уравнений $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t)$, $i = \overline{1, n-2}$ легко получить. Здесь $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – состояние СМО сигнатуры $T = T(m)$ в нотификации [1]: $x = \overline{0, 1}, y = \overline{0, m}$.

Тогда работу каждого канала СМО с отдельными очередями представим как работу соответствующей одноканальной СМО.

Пусть $i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ – состояние одноканальной СМО сигнатуры $T = T(m_i)$, соответствующей i -му каналу исходной СМО с отдельными очередями каналов. Тогда состояние $\begin{pmatrix} (x_1 x_2 \dots x_k)_2 \\ (y_1 y_2 \dots y_k)_r \end{pmatrix}$ можно рассматривать как пребывание каждой из k представленных одноканальных СМО в соответствующем состоянии $i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, k}$, в момент времени t . В этом случае мгновенные интенсивности $\lambda_i(t)$ входящих потоков заявок каждой одноканальной системы удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^k \lambda_i(t) = \lambda(t)$. Так как каналы работают независимо, то справедливо соотношение:

$$P \left(\begin{pmatrix} (x_1 x_2 \dots x_k)_2 \\ (y_1 y_2 \dots y_k)_r \end{pmatrix} \right) (t) = \prod_{i=1}^k P_i \left(\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right) (t).$$

Таким образом, найдены вероятности состояний СМО сигнатуры $T(m_1, m_2, \dots, m_k)$ без решения соответствующей громоздкой системы Колмогорова с матрицами (2), (3), а также показано наличие стационарного состояния.

Литература

- [1] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов в управлении организационно-экономическими системами / в сб. «Управление организационно-экономическими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений», выпуск 7. С. 31–34. — Самара: Изд-во СГАУ, 2010.
- [2] Котенко А.П., Букаренко М.Б. Аналитическое описание систем массового обслуживания с использованием колец вычетов / в сб. «Математическое моделирование и краевые задачи», Труды VII Всероссийской научной конференции с международным участием. С. 136–140. — Самара: Изд-во СамГТУ, 2010.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ

Бурмашева Н.В., Стружанов В.В.¹
e-mail: nat_burm@mail.ru, stru@imach.uran.ru

В данной работе рассматривается один класс градиентных дискретных механических систем, к которому относятся, например, стержневые системы. В таких системах положение элементов определяется конечным числом обобщенных координат (обобщенных перемещений). Часть этих координат могут быть заданными величинами и представлять собой параметры управления. Тогда остальные играют роль параметров состояния. Поведение градиентной механической системы характеризуется ее потенциальной функцией $W(q_i, Q_j) (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M)$, зависящей от параметров состояния q_i системы и параметров управления Q_j [1]. Эта функция есть сумма потенциальных функций элементов системы. Если рассматривать разрушение как невозможность равновесия, то, по крайней мере, часть потенциальных функций элементов системы должна описывать как их устойчивые, так и неустойчивые состояния. Такое описание возможно только тогда, когда обозначенные потенциальные функции являются, вообще говоря, невыпуклыми. Механическая система (конструкция) должна работать при определенных проектом параметрах управления (нагрузках), причем конструкцию выводят на заданный режим эксплуатации, постепенно изменяя параметры управления. В евклидовом пространстве процесс нагружения изображается медленным движением точки по некоторой кривой, выходящей из начала координат. Таким образом, возникает следующая задача управления: изображающую процесс точку в пространстве управления R_u^M нужно перевести из начала координат в заданную точку с координатами Q_j^* так, чтобы механическая система на данном пути сохраняла устойчивость.

Положения равновесия системы определяют критические точки потенциальной функции W , которые являются решениями системы уравнений $\nabla_N W = 0$. Здесь ∇_N — оператор Гамильтона в евклидовом пространстве состояний R_e^N . В силу того, что некоторые потенциальные функции элементов системы являются невыпуклыми, дан-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-08-00135.

ные уравнения могут иметь одно или несколько решений или вообще не иметь решения. Особое значение имеют вырожденные критические точки, в которых матрица устойчивости $H(W) = \nabla_N \nabla_N W$ вырождена. Здесь $H(W)$ — матрица Гессе вторых производных функции W . Такие точки структурно неустойчивы [1]. Возмущение потенциальной функции W вызывает качественные изменения в поведении самой функции. Вырожденная критическая точка расщепляется на несколько изолированных (невыврожденных) критических точек. Механическая система при этом скачком переходит в новое состояние равновесия.

Вырожденные критические точки образуют в евклидовом пространстве управлений R_u^M многообразия, являющиеся сепаратрисой функции W . Вне области, ограниченной сепаратрисой, механическая система имеют лишь одно положение равновесия или положений равновесия не существует. Внутри данной области имеется несколько положений равновесия [1]. Известно [1, 2], что при выходе пути нагружения из области, ограниченной сепаратрисой, положение равновесия механической системы становится неустойчивым и она скачком переходит в новое устойчивое положение равновесия. Следовательно, сформулированная задача управления будет решена, если путь нагружения обойдет область, ограниченную сепаратрисой.

В качестве примера была рассмотрена специальная стержневая система, осуществляющая трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного материала, описываемого невыпуклым потенциалом, имеющим области выпуклости вниз, выпуклости вверх, седловые точки. Построена сепаратриса потенциальной функции данной системы. Получены ограничения, накладываемые на механические характеристики стержней, позволяющие решить сформулированную задачу управления.

Также был рассмотрен случай силового нагружения описанной выше механической системы. В этом случае параметрами управления будут жесткости стержней и задаваемые усилия. Потенциальная функция системы представляется в виде суммы потенциальной функции механической системы, в которой отсутствуют линейно упругие стержни и нагружение куба осуществляется силовым способом, и потенциальной энергии деформирования упругих стержней. Причем проекции вырожденных точек потенциальной функции механической системы, в которой отсутствуют линейно упругие стерж-

ни, и потенциальной функции рассматриваемой механической системы в пространство управлений совпадают и определяют одну и ту же сепаратрису. Показано, что жесткости стержней являются несущественными параметрами для анализа устойчивости процесса мягкого (силового) нагружения данной механической системы. Таким образом, если результирующая точка лежит внутри поверхности, ограниченной сепаратрисой, то она всегда достижима; если же вне — то ее нельзя достичь ни по какому пути без потери устойчивости.

Литература

- [1] *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: в 2-х книгах. Кн. 1. — М.: Мир, 1984.
- [2] *Стружанов В.В.* Об устойчивости двухосного растяжения квадратной пластины в одной градиентной механической системе // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 187–195.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ФРЕЗЕРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ

Быков Д.С.¹

e-mail: bykovdanila@gmail.com

Линейная модель фрезерования описывается дифференциальным уравнением с запаздыванием [1]

$$\nu^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\nu \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \mu(x(t - \Delta) - x(t)) + u, \quad (1)$$

где x — отклонение глубины резания от номинального значения в направлении подачи детали, t — угол поворота фрезы, ν — параметр системы, пропорциональный скорости вращения фрезы, μ — параметр, зависящий от жесткости детали, ξ — коэффициент вязкости, $0 < \xi < 1$, $\Delta = \frac{2\pi}{n}$ — запаздывание, n — число зубьев фрезы, $n > 2$, u — управляющее воздействие.

Области асимптотической устойчивости уравнения (1) при $u = 0$ на плоскости параметров (ν, μ) приведены в [1, 2]. Ставится задача: используя управление, формируемое по принципу обратной связи, стабилизировать уравнение (1) в неустойчивой зоне. В качестве искомого управления выбирается оптимальное управление для следующего критерия качества переходных процессов:

$$J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Нас будет интересовать зависимость искомого управления от параметра μ .

При решении поставленной задачи удобно перейти к постановке задачи в функциональном пространстве состояний, введя с помощью формул $z_t(\cdot) = (x(t + \cdot), \dot{x}(t + \cdot))^T$, $t \in \mathbb{R}^+$, функциональные элементы для решений системы (1), принадлежащие сепарабельному гильбертову пространству $\mathbb{H} = L_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

¹Работа поддержана Программой Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1014), Урало-Сибирским интеграционным проектом 09-С-1-1010 и Программой поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1).

Исходная задача оптимальной стабилизации эквивалентна задаче стабилизации в бесконечномерном пространстве для уравнения

$$\frac{dz_t}{dt} = \mathbf{A}z_t + \mathbf{B}u$$

с критерием качества

$$J = \int_0^{\infty} [z_{t1}^2(0) + u^2(t)] dt,$$

где $z_t = (z_{t1}, z_{t2})^T$, $t \geq 0$, инфинитезимальный оператор \mathbf{A} и оператор \mathbf{B} определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}z)(\vartheta) &= \frac{dz(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad (\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\Delta, 0), \\ (\mathbf{A}z)(0) &= Az(0) + A_{\Delta}z(-\Delta), \quad (\mathbf{B}u)(0) = u, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mu+1}{\nu^2} & -2\frac{\xi}{\nu} \end{pmatrix}, \quad A_{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\nu^2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оптимальное управление является непрерывным функционалом в пространстве состояний \mathbb{H} и определяется формулой [4]

$$u^0(z(\cdot), \mu) = Q^T(\mu)z(0) + \int_{-\Delta}^0 \Pi^T(\vartheta, \mu)z(\vartheta) d\vartheta.$$

Здесь $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Pi : [-\Delta, 0] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывные отображения.

Для приближенного решения поставленной задачи предлагается заменить исходную задачу конечномерной

$$\frac{dz_t}{dt} = \mathbf{A}^N z_t + \mathbf{B}u$$

с критерием качества

$$J^N = \int_0^{\infty} [z_{t1}^2(0) + u^2(t)] dt,$$

где \mathbf{A}_N — конечномерные операторы, приближающие оператор \mathbf{A} на некотором плотном в \mathbb{H} множестве при $N \rightarrow \infty$ [3].

Оптимальное стабилизирующее управление конечномерной задачи определяется формулой

$$u^N(z(\cdot), \mu) = Q^{NT}(\mu)z(0) + \int_{-\Delta}^0 \Pi^{NT}(\vartheta, \mu)z(\vartheta) d\vartheta$$

с функциями Q^{NT} , Π^{NT} , которые сходятся к Q и Π при $N \rightarrow \infty$.

В работе используются усредняющие [3] и канонические конечномерные аппроксимации. Реализованы численные алгоритмы, позволяющие находить приближения для отображений Q и Π . На рис. 1 представлен график функции $\Pi_1^{15}(\vartheta, \mu)$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\mu \in [0, 0.3]$.

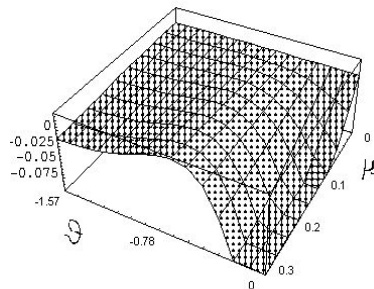


Рис. 1: функция Π_1^{15}

Литература

- [1] *Spidhar R., Hohn R., Long G.* A General Formulation of the Milling Process Equation — Contribution to Machine Tool Chatter Research // *Journal of Engineering for Industry.* 1968. Vol. 90, № 2. Pp. 317–324.
- [2] *Долгий Ю.Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: УрГУ, 1996.
- [3] *Gibson J.S.* Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // *SIAM J. Control and Optimization.* 1983. Vol. 21, № 1. Pp. 95–139.
- [4] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // *Прикл. матем. и механ.* 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ–УКЛОНЕНИЯ С ДВУМЯ ДОГОНЯЮЩИМИ ОБЪЕКТАМИ

Ганебный С.А., Кумков С.С.¹
e-mail: *ganebny@imm.uflan.ru, sskumk@gmail.com*

Исследуется задача о преследовании одного убегающего двумя догоняющими. Постановка задачи предложена в [1], где для некоторых случаев решение получено аналитическими методами. В данной работе представлено полное численное исследование задачи, основанное на построении максимальных стабильных мостов [2].

1. Игра происходит на плоскости. Считаем, что в начальный момент, полагаемый нулевым, скорости преследователей $P1$ и $P2$ и убегающего E достаточно высоки и параллельны (рис. 1). Предполагаем, что управления преследователей и убегающего действуют только на боковые отклонения.



Рис. 1: начальное положение преследователей и убегающего

Можно зафиксировать моменты T_{f1} и T_{f2} совмещения по горизонтали убегающего с каждым из догоняющих и рассматривать только боковые движения объектов с подсчётом промаха в моменты T_{f1} и T_{f2} .

После линеаризации и перехода к эквивалентным координатам получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -A_{P1}l_{P1}h(\tau_1/l_{P1})u_1 + A_El_Eh(\tau_1/l_E)v, \\ \dot{x}_2 &= -A_{P2}l_{P2}h(\tau_2/l_{P2})u_2 + A_El_Eh(\tau_2/l_E)v. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь координаты x_1 и x_2 имеют смысл прогнозируемых значений боковых отклонений убегающего от каждого из догоняющих на соответствующие моменты окончания T_{f1} и T_{f2} при нулевых действиях

¹Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» при поддержке УрО РАН, проект 09-П-1-1013, а также при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00436.

игроков; u_1, u_2, v — управления; A_{P1}, A_{P2}, A_E — максимальные величины ускорений; l_{P1}, l_{P2}, l_E — постоянные времени, описывающие инерционность исполнительных механизмов; $h(\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha - 1$. Управления игроков ограничены по модулю:

$$|u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \quad |v| \leq 1. \quad (2)$$

Объединим обоих преследователей $P1$ и $P2$ в одного игрока, которого будем называть *первым*. Убегающий E считается *вторым игроком*. Первый игрок распоряжается управлениями u_1 и u_2 ; второй — управлением v . Введём функцию платы

$$\varphi(x_1(T_{f1}), x_2(T_{f2})) = \min(|x_1(T_{f1})|, |x_2(T_{f2})|). \quad (3)$$

Первый игрок минимизирует значение платы, второй максимизирует.

В результате имеем стандартную линейную дифференциальную игру (1)–(3), особенностью которой является функция платы, вычисляемая, вообще говоря, не в один момент времени. Но даже если $T_{f1} = T_{f2}$, функция платы имеет невыпуклые множества уровня.

2. Принципиальным с точки зрения структуры решения задачи является понятие «преимущества» каждого из преследователей над убегающим, описываемое параметрами $\mu_i = A_{Pi}/A_E$ и $\varepsilon_i = l_E/l_{Pi}$, $i = 1, 2$ (см., например, [4]). В зависимости от соотношения этих параметров максимальные стабильные мосты в индивидуальных играх ($P1$ против E и $P2$ против E) могут иметь различную конфигурацию: расширяться или сжиматься в обратном времени $\tau_i = T_{fi} - t$ (рис. 2).

Для решения задачи (1)–(3) авторами разработан алгоритм построения максимальных стабильных мостов (множеств уровня функции цены игры) с невыпуклыми временными сечениями. С его помощью были исследованы все варианты задачи.

Оптимальные управления игроков строятся по принципу обратной связи на основе линий переключения, зависящих от t и получаемых при обработке семейства множеств уровня функции цены, построенных для набора значений платы. Задача построения линий переключения осложнена, главным образом, невыпуклостью t -сечений множеств уровня функции цены. Кроме того, их границы имеют значительные прямолинейные участки, на которых выбрать точку

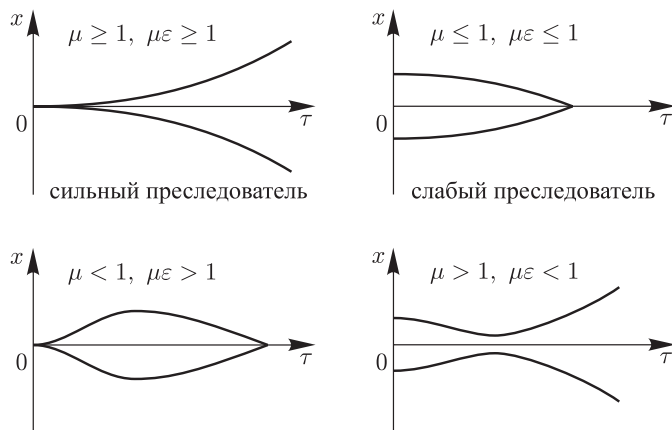


Рис. 2: возможные конфигурации мостов в индивидуальных играх

переключения можно произвольным образом. Предложена версия алгоритма для получения разумных конфигураций линий переключения.

Литература

- [1] *Le Méneç S.* Linear Differential Game with Two Pursuers and One Evader / Abstracts of 13th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Wrocław, Poland, 2008. Pp. 149–151.
- [2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [3] *Ганебный С.А., Кумков С.С.* Численное исследование дифференциальной игры с двумя догоняющими и одним убегающим // «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 332–338. — Екатеринбург: Институт математики и механики, 2010.
- [4] *Shima T., Shinar J.* Time varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2002. Vol. 25, № 3. Pp. 425–432.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Гомоюнов М.И.

e-mail: gomojunov@mail.ru

В рамках теоретико-игрового подхода [1–4] рассматривается задача управления, описываемая уравнением движения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_\tau(t)u(t - \tau) + C(t)v(t), \quad t_0 \leq t < \vartheta, \quad (1) \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^s, \quad \tau = \text{const}, \quad 0 < \tau < \vartheta - t_0, \end{aligned}$$

начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$u_{t_0}(\cdot) = \{u_{t_0}(\xi) = u(t_0 + \xi), \quad -\tau \leq \xi < 0\} = u_0(\cdot) \in L_2[-\tau, 0] \quad (3)$$

и показателем качества

$$\gamma = \sqrt{\|D_1(x(t_1) - c_1)\|^2 + \dots + \|D_N(x(t_N) - c_N)\|^2}. \quad (4)$$

Здесь $x(t)$ – состояние системы в текущий момент времени t , $u(t)$ и $v(t)$ – текущие воздействия управления и помехи. Начальный и терминальный моменты времени t_0 и ϑ , моменты оценки качества движения $t_i \in [t_0, \vartheta]$, $t_{i+1} > t_i$, $i = 0, \dots, N - 1$, $t_N = \vartheta$, $p_i \times n$ -матрицы D_i и цели $c_i \in \mathbb{R}^n$ заданы. Матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $B_\tau(t)$ и $C(t)$ кусочно непрерывны, P и Q компактны.

Цель оптимизации – доставить показателю (4) как можно меньшее значение. Так как помехи непредсказуемы, то их действие может быть самым неблагоприятным.

Слагаемое $B_\tau(t)u(t - \tau)$ в правой части (1) описывает запаздывание по управлению. Как известно (см., например, [3]), эффект запаздывания в управляющих силах наделяет систему рядом существенных особенностей. Показатель качества (4) содержит промежуточные моменты времени оценки движения. Эффективные конструкции решения задач оптимизации с такими показателями в системах без запаздывания даны, например, в [2, 4]. В докладе, на примере задачи (1)–(4), обсуждается развитие этих конструкций для систем с запаздыванием по управлению.

Допустимой стратегией управления считаем любую функцию

$$[t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n \times L_2[-\tau, 0) \times \mathbb{R} \ni (t, x, u(\cdot), \varepsilon) \mapsto U = U(t, x, u(\cdot), \varepsilon) \in P,$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр точности [1]. Управление осуществляется в дискретной по времени схеме на базе некоторого разбиения

$$\Delta_\delta = \{\tau_j : \tau_1 = t_0, 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta, j = 1, \dots, J, \tau_{J+1} = \vartheta\}, \quad \delta > 0.$$

На каждом шаге $[\tau_j, \tau_{j+1})$ этого разбиения имеем

$$u(t) = U(\tau_j, x(\tau_j), u_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon), \quad \tau_j \leq t < \tau_{j+1}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (5)$$

где $u_{\tau_j} = \{u_{\tau_j}(\xi) = u(\tau_j + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$.

Пусть $S = S(t_0, x_0, u_0(\cdot), U, \Delta_\delta, \varepsilon)$ – множество троек $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ таких, что $v[\cdot]$ – измеримая функция из $[t_0, \vartheta)$ в Q , $u[\cdot]$ – удовлетворяющая (3) измеримая функция из $[t_0 - \tau, \vartheta)$ в P , которая на $[t_0, \vartheta)$ формируется в согласии с (5), $x[\cdot]$ – удовлетворяющая (2) абсолютно непрерывная функция из $[t_0, \vartheta]$ в \mathbb{R}^n , которая вместе с $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$ удовлетворяет (1) при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Оптимальный гарантированный результат управления определяется равенством

$$\rho^\circ(t_0, x_0, u_0(\cdot)) = \inf_U \limsup_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} \{\gamma \mid \{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S\}.$$

Стратегия управления U° оптимальна, если для любого $\zeta > 0$ существуют $\varepsilon^* > 0$ и $\delta^* > 0$ такие, что $\gamma \leq \rho^\circ(t_0, x_0, u_0(\cdot)) + \zeta$, каковы бы ни были значение $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$, разбиение Δ_δ с шагом $\delta \leq \delta^*$ и $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S(t_0, x_0, u_0(\cdot), U^\circ, \Delta_\delta, \varepsilon)$.

Пусть $X(\tau, t)$ – матрица Коши уравнения $\dot{x} = A(t)x$, $\chi(t)$ – функция Хевисайда, $Y_i(t) = X(t_i, t + \tau)B_\tau(t + \tau)\chi(t_i - t - \tau)$. Следуя функциональной трактовке [4], для каждого $i = 0, \dots, N - 1$ рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= B_k(t)u + C_k(t)v, \quad t_* \leq t < \vartheta, \quad z_k(t_*) = z_k^* \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P, \quad v \in Q, \quad t_* \in [t_i, t_{i+1}), \quad k = i + 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

с показателем качества

$$\gamma_i = \sqrt{\|z_{i+1}(\vartheta)\|^2 + \dots + \|z_N(\vartheta)\|^2}, \quad (7)$$

где $B_k(t) = D_k(X(t_k, t)B(t) + Y_k(t))$, $C_k(t) = D_kX(t_k, t)C(t)$, когда $t < t_k$, и $B_k(t) = C_k(t) = 0$, когда $t \geq t_k$.

Обозначим $\mathbf{z}_i = \{z_k, k = i + 1, \dots, N\}$. Известно (см., например, [1, 2]), что игра (6), (7) имеет цену $\rho_i(t_*, \mathbf{z}_i^*)$ и седловую точку из оптимальных стратегий $u_i^\circ(t, \mathbf{z}_i, \varepsilon)$ и $v_i^\circ(t, \mathbf{z}_i, \varepsilon)$.

Введем информационный образ тройки $(t, x, u(\cdot))$

$$\mathbf{w}_i(t, x, u(\cdot)) = \{w_k(t, x, u(\cdot)), k = i + 1, \dots, N\}, t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (8)$$

где

$$w_k(t, x, u(\cdot)) = D_k \left(X(t_k, t)x + \int_{-t}^0 Y_k(t + \xi)u(\xi)d\xi - c_k \right).$$

Следующее утверждение устанавливает связь между исходной задачей управления (1)–(4) и дифференциальной игрой (6)–(7).

Утверждение. *Справедливо равенство*

$$\rho^\circ(t_0, x_0, u_0(\cdot)) = \rho_0(t_0, \mathbf{w}_0(t_0, x_0, u_0(\cdot)))$$

Стратегия $U^\circ = u_i^\circ(t, \mathbf{w}_i(t, x, u(\cdot)), \varepsilon)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, N - 1$ оптимальна в задаче (1)–(4).

Данное утверждение позволяет применить для решения исходной задачи с запаздыванием по управлению и промежуточными моментами оценки качества движения методы, разработанные в теории позиционных дифференциальных игр для задач без запаздывания с терминальной платой, с последующей редукцией, понижающей размерность итоговых разрешающих конструкций, как, например, в [4].

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
- [2] Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. — Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
- [3] Осипов Ю.С., Пименов В.Г. К теории дифференциальных игр в системах с последствием // ПММ. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 963–977.
- [4] Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60, Вып. 6. С. 885–900.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФА СЕТЕВОГО ПРОЕКТА С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ФИКТИВНЫХ ДУГ И УЧЕТОМ НОВОЙ МЕРЫ СЛОЖНОСТИ

Докучаев А.В.
e-mail: docuhaevrud@gmail.com

Исследована задача сетевого планирования и управления. Доказано, что вложение дополнительного ограниченного ресурса, сокращающего с разной эффективностью время выполнения отдельных проектных работ (далее ПР), для сокращения времени выполнения сетевого проекта в целом, возможно оптимизировать методом динамического программирования [1].

Минимальное время T^* выполнения сетевого проекта P из $K \geq 1$ ПР $a(i) : i \neq j \Leftrightarrow a(i) \neq a(j)$ со временем выполнения $t(a(i), x(i)) : P \times U(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ при вложении ограниченного ресурса X из разбиения $U(X)$ составит

$$T^* = \frac{\min}{x(i) \in U(X)} \left\{ \frac{\max}{1 \leq i \leq M} \sum_{r=1}^{r(l_i)} t((a_{j_r}), (x_{j_r})) \right\},$$

где число работ $a(i)$ на полном пути l_i равно $r(l_i) \geq 1$, $i \in \{1, \dots, M\}$, M – общее число полных путей проекта P , $r \in \{1, \dots, r(l_i)\}$, $j_r \in \{1, \dots, K\}$, индекс j_r обозначает принадлежность к матрице непосредственного предшествования работ [1].

Возникающий в этом случае граф имеет переменную разметку (вес, пропускная способность) дуг, не позволяя эффективно провести оптимизацию известными методами перебора критических и подкритических путей различного ранга. Зависимость времени выполнения работ проекта (далее РП) от распределяемого ресурса (далее РР) часто является нелинейной и задается таблично. Если зависимость времени выполнения отдельных РП от РР является непрерывной и задается в явном виде, производится дискретизация РР. РП соответствуют функции освоения, разбиение ресурса производится с постоянным шагом дискретизации, каждой порции РР соответствуют эффекты от распределения – значения функций освоения.

Сократим списки предшествования ПР до списков непосредственного предшествования [1]. При построении графа проекта возникает потребность в добавлении фиктивных работ (далее ФР) [2].

Разработан универсальный алгоритм добавления необходимого числа ФР $a_i \notin P, i \geq K + 1$ при построении графа сетевого проекта на основе списка технологического предшествования (последования) ПР. Алгоритм, в отличие от существующих [2] в настоящее время, рассчитан на случай нелинейной зависимости времени выполнения РП от вкладываемого в работы дополнительного ресурса.

В процессе оптимального РР в ряде случаев на некоторых итерациях возможны альтернативные решения. Вследствие этого на следующих шагах распределения возникает альтернативность критических и подкритических путей графа проекта, что ведет к увеличению количества операций.

Общее число M полных путей проекта P определяется произведением вариантов их прохождения через все блоки непрерывной цепочки $\{\mathbf{A}[i_v \times j_v]\}_{v=2}^{r-1}$, $1 \leq v \leq r$, $1 \leq i_v$, $1 \leq j_v$ блочной-цепочечной матрицы непосредственного предшествования ПР, полученной из начальной путем правильного упорядочивания и добавления ФР [1]:

$$M = \prod_{v=1}^{r-1} i_v = \prod_{v=2}^r j_v.$$

Эта величина может служить оценкой сложности проекта. До настоящего времени наиболее распространённым методом оценки являлось число РП, которое, очевидно, не учитывает сложность технологических взаимосвязей ПР. При этом число ФР, добавленных для построения графа проекта, в разных программных продуктах различно и поэтому не может служить допустимой поправкой к числу исходных (проектных) работ.

Литература

- [1] Докучаев А.В., Котенко А.П. Оптимизация привлечения дополнительных ресурсов в сетевом планировании // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. ф.-м. н. — 2010. № 1(20). С. 234–238.
- [2] Дыхнов А.Е., Постовалова И.П. Формирование сетевой модели с минимумом фиктивных операций / в сб. «Вычислительные технологии». <http://www.ict.nsc.ru/ws/ct-2000>. — ИВТ СО РАН: Новосибирск, 2000.

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ
СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ «К МОМЕНТУ»**

Ермаков Н.В., Лобов С.А., Самойлов А.Л., Токманцев Т.Б.
e-mail: master146@rambler.ru, fascioroma@gmail.com,
samojloval@k66.ru, tokmancev@mail.ru

Рассматривается конфликтно управляемая система с динамикой:

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + B(x)u + C(x)v, \quad x \in R^n, t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь x — фазовый вектор, t — время, $u \in P \subset R^n$ — управление первого игрока, $v \in Q \subset R^n$ — управление второго игрока. Множества P и Q являются выпуклыми многогранниками с вершинами $u^{(j)}$ и $v^{(k)}$ соответственно. Правая часть системы удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование решения уравнения. Задан функционал

$$\gamma(x(\cdot)) = \min_{t \in [0, T]} \rho(x(t)), \quad (2)$$

где $\rho(x)$ — функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица. Игрок, распоряжающийся управлением u , стремится минимизировать функционал, второй игрок, распоряжающийся управлением v , стремится его максимизировать. Будем считать дифференциальную игру (1)–(2) решенной, если построена ее функция цены $V(t, x): [0, T] \times R^n \rightarrow R$.

Для численного решения задачи воспользуемся аппроксимационной схемой, предложенной в работе [4]. Основной элемент аппроксимационной схемы — разностный оператор $G(t, \Delta, \psi)(x)$, действующий на шаге длины $\Delta > 0$ разбиения отрезка времени игры. Пусть $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$, $Q \subset R^n$ — регулярная сетка в фазовом пространстве с шагом Δx . Для решения задачи (1)–(2) последовательно применяем разностный оператор $G(t, \Delta, \psi)(x)$ к узлам сетки Q . Обозначим символом $\tilde{V}(t_i, x)$ аппроксимацию функции цены на сетке Q , $i = 0, \dots, N$. В момент $t = t_N = T$ определим функцию $\tilde{V}(T, x) = \rho(x)$. Следуя в обратном

времени, определим функцию $\tilde{V}(t_{i-1}, x)$ по рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t_{i-1}, x) = & \sup_{y \in O(x, \lambda(x)\Delta_i)} \max_{j, k} \max_{p \in \partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, x, y, j, k)} \{ \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y) + \\ & + \Delta_i(\langle p, g(x) \rangle + \langle p, B(x)u^{(j)} \rangle + \langle p, C(x)v^{(k)} \rangle) + \langle p, x - y \rangle \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) является более удобной для вычислений формой оператора $G(t, \Delta, \tilde{V}(t_{i-1}, x))(x)$. Здесь $\lambda(x)$ — функция Липшица гамильтониана $H(x, s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, g(x) + B(x)u + C(x)v \rangle$, $O(x, r) = \{y \in R^n : \|y - x\| < r\}$ — окрестность точки x радиуса r , $\text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y)$ — выпуклая оболочка функции $\tilde{V}_\rho(t_i, y) = \min\{\tilde{V}(t_i, y), \rho(y)\}$, $\partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, y)$ — субдифференциал выпуклой оболочки, вычисленный в точке y , $\partial \text{co} \tilde{V}_\rho(t_i, x, y, j, k)$ — пересечение субдифференциала выпуклой оболочки функции \tilde{V}_ρ , вычисленного в точке y , с конусом линейности гамильтониана $H(x, s)$, который определяется парой вершин $u^{(j)}$ и $v^{(k)}$.

Решение данной задачи было реализовано для двумерного фазового пространства по следующему алгоритму:

1. Задаются начальные данные, строятся конусы линейности.
2. Задается сетка Q и значение $\tilde{V}(t, x)$ в каждом узле в момент времени $t = T$.
3. Для $i = N, \dots, 1$ выполняются следующие шаги.
 - (a) Для каждой точки сетки находим точки из $O(x, r)$.
 - (b) Строим выпуклую оболочку для полученной области.
 - (c) Находим субдифференциал для каждой точки из области.
 - (d) Находим пересечения субдифференциала с конусами линейности.
 - (e) Находим значение $\tilde{V}(t_{i-1}, x)$ по формуле (3).

Ключевой процедурой алгоритма является построение выпуклой оболочки сеточной функции. Эта процедура выполняется для окрестности каждой точки сетки в каждый момент разбиения. Поэтому к этой процедуре предъявляются высокие требования по скорости выполнения и устойчивости. Задача сводится к построению

выпуклой оболочке множества точек в трехмерном пространстве. Ранее в работе [5] был применен алгоритм «Заворачивания подарка» [6], на практике показавший большую чувствительность к ошибкам вычислений. В данной работе выпуклая оболочка функции строится с использованием процедуры, представляющей модификацию алгоритма «быстрая оболочка» («QuickHull»). Модификация использует информацию о том, что проекции точек, для которых строится выпуклая оболочка, лежат на регулярной сетке. Для решения проблем, связанных с ошибками вычислений, применен механизм точных вычислений, когда действительные числа представляются в виде дробей. В дальнейшем планируется решение модельных примеров и сравнение с результатами, полученными другими методами.

Литература

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [2] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991.
- [3] Ушаков В.Н. К теории минимаксных дифференциальных игр. — Часть 1. Свердловск: 1980, 187 с. Деп. в ВИНТИ 16.10.80. № 4425-80.
- [4] Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата. — Сборник трудов «Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1991.», М.: Наука, 1992. С. 166–172.
- [5] Токманцев Т.Б., Успенский А.А. Сеточный алгоритм построения функции цены дифференциальной игры сближения-уклонения к моменту / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Труды 36-й Региональной молодежной конференции. С. 289–292. — Екатеринбург: УрО РАН, 2005.
- [6] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ

Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С.
e-mail: kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru, introbill@gmail.com

В работе предлагается новый подход к решению некоторых оптимизационных задач транспортной логистики. Решаются фундаментальные для современной логистики задачи: о прокладке дороги, об оптимальном размещении и об идентификации и сегментации логистических зон. Данные задачи рассматриваются как задачи вариационного исчисления [1].

Постановка задач

1. Пусть в некоторой ограниченной области $D \supseteq \mathbb{R}^2$, с кусочно-гладкой границей заданы точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и функция $v(x, y) > 0$, определяющая мгновенную скорость в точке (x, y) .

Требуется найти минимальное время перемещения из точки A в точку B :

$$T^*(M) = \min_{\Gamma(M)} \int_{\Gamma(M)} \frac{1}{v(x, y)} d\Gamma. \quad (1)$$

2. Пусть в некоторой ограниченной области $D \supseteq \mathbb{R}^2$, с кусочно-гладкой границей имеется n точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ и заданы кусочно-непрерывные функции $v_k(x, y) > 0$, $k = 1, \dots, n$, характеризующие для точки (x, y) скорость движения из точки $M_k(x_k, y_k)$ (функции v_k могут, вообще говоря, совпадать).

Тогда из любой точки $M(x, y)$ минимальное время достижения точки $M_k(x_k, y_k)$ по маршруту $\Gamma_k(M)$ вычисляется как

$$T_k^*(M) = \min_{\Gamma_k(M)} \int_{\Gamma_k(M)} \frac{1}{v_k(x, y)} d\Gamma. \quad (2)$$

Таким образом, имеем следующую вариационную задачу: среди точек $M \in D$ требуется найти такую точку M^* , что

$$T(M^*) = \min_{M \in D} \max_{k=1, \dots, n} T_k^*(M). \quad (3)$$

3. Пусть минимальное время достижения из любой точки $M(x, y)$ точки $M_k(x_k, y_k)$ по маршруту $\Gamma_k(M)$ также находится из выражения (2).

В отличие от задачи из п. 2 здесь требуется разбить область D на n зон так, чтобы для каждой точки $M \in D$ время достижения ее из одной из точек M_k было минимальным. Иначе говоря, для каждой точки $M \in D$ требуется “прикрепить” ее к одной из зон, т.е. найти такое k^* , при котором

$$T_{k^*}^*(M) = \min_{k=1, \dots, n} T_k^*(M). \quad (4)$$

Метод решения

Задачи решаются с помощью метода, основанного на аналогии между нахождением глобального экстремума интегрального функционала и распространением света в оптически неоднородной среде.

Согласно оптико-механической аналогии, впервые обнаруженной И. Бернулли [2], выражение (1) определяет время, за которое свет, выпущенный из точки A , достигает точки B , двигаясь в оптически неоднородной среде с местной скоростью света $c(x, y)$ [3]. В соответствии с принципом Гюйгенса, любую точку области D , которой свет уже достиг, можно рассматривать в качестве самостоятельного источника света [3]. Таким образом, выпустив световую волну из точки A , можно построить траекторию ее движения и найти момент времени, когда световая волна достигнет точки B . Далее, двигаясь в обратном направлении по времени, можно восстановить траекторию движения, которая и будет искомой кривой Γ^* . При этом нетрудно видеть, что, если задача разрешима, то хотя бы одно решение будет найдено. Ранее подобный подход («волновой» метод) применялся Вл. Вит. Башуровым для решения задач безопасности [4].

Для построения решения задачи (2)–(3) используется следующая модификация волнового метода: из всех точек M_1, \dots, M_n в начальный момент времени выпускаются световые волны. При $t > 0$ множество точек, которых уже достигла волна с номером k , обозначается $D_k(t)$. С течением времени области $D_k(t)$ увеличиваются, т.е. $D_k(t_1) \subset D_k(t_2)$, если $t_2 > t_1 > 0$. Если в некоторый момент t^* появится точка M^* , которая будет принадлежать всем $D_k(t^*)$ одновременно, то эта точка и будет являться решением задачи (3). В противном случае задача является неразрешимой (имеются точки M_i и M_j , путь между которыми отсутствует). Если M^* найдена, используя подход, предложенный в разделе 2, можно построить оптимальные маршруты доставки грузов из M^* в M_k , $k = 1, \dots, n$.

Для построения решения задачи (2)–(4) используется следующая модификация волнового метода: из всех точек M_1, \dots, M_n , как и в предыдущем случае, в начальный момент времени выпускаются световые волны, и для всех точек $M \in D$ фиксируется $k^*(M)$ – номер волны, пришедшей в точку M первой. Значение $k^*(M)$ и определяет зону, к которой относится точка A . Если $k^*(A)$ определяется неоднозначно (т.е. две или более волны достигают этой точки одновременно), то точка A лежит на границе зон.

Вычислительный эксперимент

На основе вышеизложенного метода и его модификаций разработаны численные алгоритмы, которые реализованы в виде программного комплекса. Проведены тестовые расчеты на серии модельных примеров с известными аналитическими решениями. В частности, решены задача о брахистохроне, задача о распространении волны в однородной среде, задача о переходе волны через границу двух сред. Кроме того, исследовались задачи, где в некоторых местах области D присутствуют непроходимые барьеры.

Также предлагаемая методика применялась для решения ряда практических задач по определению координат логистического центра и сегментации логистических зон в Иркутской области.

Литература

- [1] *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление.— М.: Издательство ЛКИ, 2008.
- [2] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: пер. с англ.— М.: Мир, 1965.
- [3] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике.— Т. 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
- [4] *Башуров В.В., Филлимоненкова Т.И.* Математические модели безопасности.— Новосибирск: Наука, 2009.

К ВОПРОСУ О ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С НЕТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Корнев Д.В.

e-mail: d.v.kornev@gmail.com

Рассмотрим дифференциальную игру [1, 2], описываемую уравнением движения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad t_0 \leq t < \vartheta, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s,$$

и показателем качества

$$\gamma = \sqrt{\mu_1^2 (D_1(x(t_1) - c_1)) + \dots + \mu_N^2 (D_N(x(t_N) - c_N))},$$

где x — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, соответственно. Начальный и терминальный моменты времени t_0 и ϑ , моменты оценки движения $t_i \in [t_0, \vartheta]$ ($t_{i+1} > t_i$, $i = 1, \dots, N-1$, $t_N = \vartheta$), $p_i \times n$ -матрицы D_i , целевые векторы $c_i \in \mathbb{R}^n$ и нормы $\mu_i(\cdot)$ заданы. Матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ кусочно непрерывны, P и Q компактны. Первый игрок нацелен минимизировать показатель γ , второй — максимизировать.

В [2] дана следующая процедура для приближенного вычисления цены этой игры, удобная (см., например, [1]) для построения оптимальных стратегий игроков методом экстремального сдвига на сопутствующую точку.

Назначается разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$:

$$\Delta_k = \{\tau_j : \tau_1 = t_0, \tau_j < \tau_{j+1}, j = 1, \dots, k, \tau_{k+1} = \vartheta\}.$$

Определяются вспомогательные функции

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_1, \\ \max\{i = 1, \dots, N \mid t^{[i]} \leq t\}, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \Delta\psi_j(m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v) \rangle d\tau, \\ m \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $X[\vartheta, \tau]$ — матрица Коши для уравнения $\dot{x} = A(t)x$, символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов, и далее, попятно по

шагам разбиения Δ_k , определяются множества G_j векторов m и функции $\varphi_j(m), m \in G_j$. При $j = k + 1$ полагаем

$$G_{k+1} = \{m = 0\}, \varphi_{k+1}(m) = 0, m \in G_{k+1},$$

а для текущего j , если $h(\tau_j) = h(\tau_{j+1})$:

$$G_j = G_{j+1}, \varphi_{j+1}^*(m) = \varphi(m), m \in G_j,$$

иначе, для $h = h(\tau_j) + 1$:

$$G_j = \left\{ m = \nu m_* + X^T [t_h, \vartheta] D_h^T l \mid l \in \mathbb{R}^{p_h}, \right. \\ \left. \mu_h^*(l) \leq \sqrt{1 - \nu^2}, \nu \in [0, 1], m_* \in G_{j+1} \right\}, \quad (1)$$

$$\varphi_{j+1}^*(m) = \max_{m_*, \nu, l} [\nu \varphi_{j+1}(m_*) - \langle l, D_h c_h \rangle], m \in G_j,$$

и, вне зависимости от условия:

$$\psi_j(m) = \Delta \psi_j(m) + \varphi_{j+1}^*(m), m \in G_j, \quad \varphi_j(m) = \{\psi_j\}_{G_j}^*(m), \quad (2)$$

где верхний индекс “ T ” означает транспонирование, $\mu_h^*(\cdot)$ – норма, сопряженные к $\mu_h(\cdot)$, символ $\{\psi_j\}_{G_j}^*$ означает вогнутую оболочку функции ψ_j на множестве G_j . Цена игры приближенно равна

$$e(\Delta_k) = \max_{m \in G_1} [\langle m, X[\vartheta, t_0]x_0 \rangle + \varphi_1(m)].$$

При программной реализации этой процедуры возникают две взаимосвязанные проблемы. Первая обусловлена трудоемкостью пересчета (1) при переходе через оценочные точки t_i . Вторая – известными сложностями построения вогнутых оболочек (2). В докладе обсуждаются эффективные способы решения первой из них. При этом рассматривается случай, когда $v \equiv 0$. Тогда функции ψ_j оказываются вогнутыми и второй проблемы не возникает.

В качестве языка программирования был выбран C++. Используются библиотеки Boost: `ublas`, `unordered`, `shared_ptr`, `thread`, `mpi`, `serialization`, `iostreams` и другие [3].

Используется так называемый «пиксельный» метод, когда все множества хранятся как наборы векторов с координатами, округленными до узлов сетки заданной точности. Промежуток времени управления известен заранее, поэтому функции времени хранятся в виде массивов. Так как размеры множеств G_j априори не известны, а их оценки грубы, то функции векторов m хранятся в виде хеш-массивов `boost::unordered`.

Способ пересчета (1) подразумевает перебор всех возможных троек $\{m_*, \nu, l\}$. Для ускорения данного перебора были применены различные программные и аппаратные оптимизации.

По умолчанию тип данных `ublas::vector` использует свободную память [4] для хранения значений координат векторов m , что приводит к дополнительным обращениям к операторам `new` и `delete` при создании новых векторов. Использование `bounded_array` в качестве хранилища массива координат позволяет избежать этих затрат.

Заметно ускорить программу позволила замена стандартной функции хеширования `boost::functional::hash_value` собственной реализацией.

Перебор (1) распараллеливается. Программная реализация поддерживает как многопоточную работу с разделяемой памятью, так и распараллеливание при помощи `mpi`. На вычислительном кластере ИММ УрО РАН было проверено, что при запуске программы на N вычислительных ядрах скорость работы в N раз больше, чем при запуске на одном ядре.

Направлениями дальнейшего развития являются оптимизации с использованием специальных аллокаторов памяти и целочисленной арифметики, добавление процедур вышукления для решения задачи в общем случае, разработка визуализатора промежуточных этапов работы алгоритма и получаемых результатов.

Литература

- [1] *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. – Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.
- [2] *Лукоянов Н.Ю.* Одна дифференциальная игра с нетерминальной платой // Известия Академии наук. Теория и системы управления, 1997, № 1, с. 85–90.
- [3] Boost library documentation. <http://www.boost.org/doc/libs/>.
- [4] *Бьерн Страуструп.* Язык программирования C++. – М: Бином, 2005.

**ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ
СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХАТЧИНСОНА
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ**

Кошкин Е.В.

e-mail: koshkin@uralmail.com

Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx}{dt} = (r + u) \left(1 - \frac{x([t])}{K} \right) x(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

где $r > 0$, $K > 0$, $[a]$ — целая часть числа a . Уравнение (1) при $u = 0$ описывает популяционную модель Хатчинсона с кусочно-постоянными аргументами. Вопросы качественного поведения решений этого уравнения были изучены в работе [1]. В настоящей работе изучается задача стабилизации положения равновесия $x = K$ с мультипликативным управлением u , регулирующим скорость роста популяции. Требуется найти оптимальное стабилизирующее управление u^0 в классе импульсных управлений

$$u(t) = u(n), \quad n \leq t < n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

с критерием качества переходных процессов

$$J(x, u) = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{x}{K} - 1 \right)^2 + u^2 \right) dt.$$

Поставленная задача сводится к задаче оптимальной стабилизации нелинейного разностного уравнения

$$y(n + 1) = f(y(n), u(n)), \quad n \geq 0, \quad (2)$$

с неквадратичным критерием качества переходных процессов

$$J(y, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega(y(n), u(n)). \quad (3)$$

Здесь f и ω — голоморфные функции в точке с координатами $y = u = 0$,

$$f(y, u) = e^{-(r+u)y} (y + 1) - 1,$$

$$\begin{aligned} \omega(y, u) = & -\frac{(y+1)^2}{2(r+u)y} \left(e^{-2(r+u)y} - 1 \right) + \\ & + \frac{2(y+1)}{(r+u)y} \left(e^{-(r+u)y} - 1 \right) + 1 + u^2, \end{aligned}$$

разложения которых в степенные ряды определяются формулами

$$\begin{aligned} f(y, u) &= (1 - r + u) y + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{r^{k-l}}{l!(k-l)!} + \frac{r^{k-1-l}}{l!(k-1-l)!} \right) u^l + \frac{u^k}{k!} \right) y^k, \\ \omega(y, u) &= u^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\sum_{l=0}^{k-2} (-1)^k \left(\frac{2^{k-2} r^{k-2-l}}{(k-1)l!(k-2-l)!} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{(2-2^k) r^{k-1-l}}{kl!(k-1-l)!} - \frac{(2-2^k) r^{k-l}}{(k+1)l!(k-l)!} \right) u^l y^k + \\ &+ \frac{(-1)^k (2-2^k)}{k!} u^{k-1} y^k - \frac{(-1)^k (2-2^k) r}{(k-1)!(k+l)} u^{k-1} y^k - \\ &\left. - \frac{(-1)^k (2-2^k)}{(k+l)!} u^k y^k \right]. \end{aligned}$$

Используя метод динамического программирования [2], для нахождения оптимального стабилизирующего управление u^0 задачи (2), (3) запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(y, u)}{\partial u} &= \frac{\partial V(f(y, u))}{\partial y} \frac{\partial f(y, u)}{\partial u} + \frac{\partial \omega(y, u)}{\partial u} = 0, \\ B(y, u) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$B(y, u) = V(f(y, u)) - V(y) + \omega(y, u).$$

Будем искать решение системы (4) в форме степенных рядов

$$V(y) = \sum_{p=2}^{+\infty} c_p y^p, \quad u^0(y) = \sum_{p=1}^{+\infty} r_p y^p.$$

В результате находим

$$u_1 = 0, \quad c_2 = \frac{-r^2 + 3r - 3}{3(r-2)r},$$

$$u_2 = \frac{1}{6} \left(-\frac{2(-r^2 + 3r - 3)}{r-2} + \frac{2(-r^2 + 3r - 3)}{(r-2)r} - 2r + 3 \right),$$

$$c_3 = -\frac{r^2 + \frac{4(-r^2+3r-3)r}{3(r-2)} - \frac{4(-r^2+3r-3)}{r-2} + \frac{8(-r^2+3r-3)}{3(r-2)r} - 4r + 4}{4(r^2 - 3r + 3)}.$$

Зададимся значениями $x(0) = 1500$, $r = 1$ и $K = 5000$. Оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$u^0(y) = \frac{1}{6}y^2 - \frac{7}{24}y^3 + \frac{1}{40}y^4 + O(y^5).$$

Литература

- [1] *Gopalsamy K.* Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА НА БАЗЕ МНОЖЕСТВ СИММЕТРИИ

Лебедев П.Д., Успенский А.А.¹
e-mail: pleb@yandex.ru

Изучается задача Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \langle \nu, Du(\mathbf{x}) \rangle + 1 = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — евклидова норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, Γ — граница замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$, $Du(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — градиент функции $u = u(\mathbf{x})$.

Минимаксное решение [1] задачи Дирихле (1), (2) совпадает с функцией оптимального результата соответствующей задачи динамического быстрогодействия с круговой индикатрисой скоростей. Исследуется достаточно общий случай краевого (целевого) множества M . Предполагается, что M является, вообще говоря, невыпуклым множеством с негладкой границей. Предлагается метод решения задачи, основанный на выделении биссектрисы краевого множества. Биссектриса относится к множествам симметрии [2]. Топологические особенности множеств симметрии изучались в [3, 4]. С точки зрения теории дифференциальных игр [5, 6] множества симметрии относятся в плоском случае к рассеивающим кривым.

Численно-аналитические подходы к конструированию множеств симметрии при изучении особенностей геометрии по существу невыпуклых множеств, при построении функции оптимального результата в задачах управления, а также при формировании эйконала в геометрической оптике, развивались в работах [7–9].

Приводятся результаты моделирования решений задач Дирихле, эволюции множеств управляемости, а также распространения волновых фронтов в среде с постоянным коэффициентом преломления.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления», РФФИ (проект 08-01-00587-а) и программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1).

Пример решения задачи быстродействия с круговой индикатрисой скоростей представлен на рис. 1. В качестве целевого множества M выбран подграфик функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 \ln(-x), & x \leq -1, \\ x^3 - x, & x > -1. \end{cases}$$

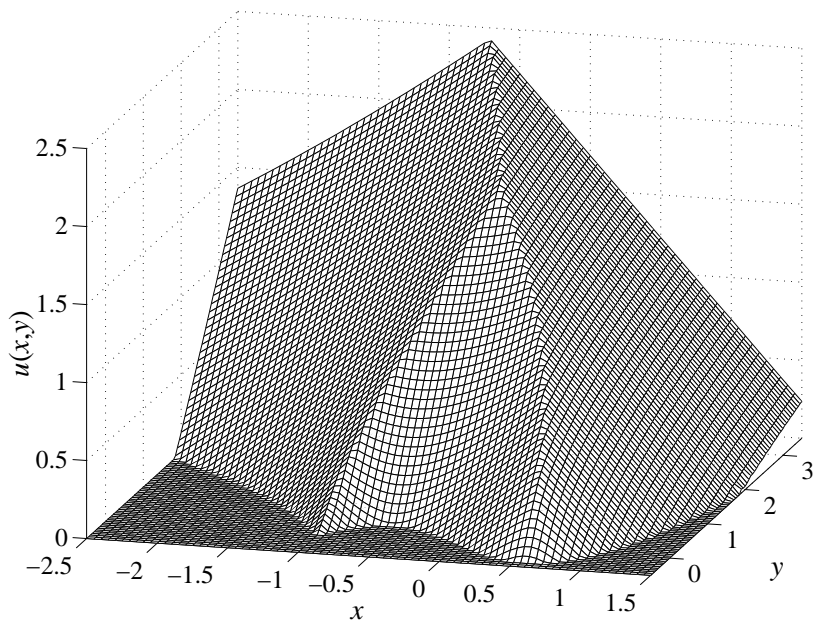


Рис. 1: функция $u = u(x, y)$

Литература

- [1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий. 2003.

-
- [2] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала // *I. Математический сборник.* 1974. Т. 98. № 3. С. 450–493.
- [3] *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Численно-аналитические методы построения волновых фронтов в задачах управления и геометрической оптике // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* 2007. Т. 12. № 4. С. 538–539.
- [4] *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // *Труды Института математики и механики,* 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
- [5] *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
- [6] *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988.
- [7] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [8] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [9] *Григорьева С.В., Пахотинский В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // *Математический сборник.* 2005. Т. 196, № 4. С. 51–78.

ДЕФЕКТ СТАБИЛЬНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ

Малёв А.Г., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д.¹
e-mail: malevag@mail.ru

Доклад посвящен изучению игровой задачи о сближении конфликтно управляемой системы с целью в фиксированный момент времени и исследованию свойства стабильности в этой игре. Свойство стабильности было введено в работах [1–4]; в них было дано определение стабильного моста — особого множества в пространстве позиций игровой задачи, обладающего свойством слабой инвариантности относительно некоторого набора дифференциальных включений, тесно связанных с динамикой конфликтно управляемой системы.

В настоящем докладе используется идеология унификации, предложенная в [6, 7], а также конструкции из [8, 9]. Развивается подход, направленный на расширение концепции стабильности [1–7]. Он связан с рассмотрением в пространстве позиций множеств, ведущих к целевому множеству, но не обладающих, вообще говоря, свойством стабильности. При таком подходе оказалось удобным использование унификационных определений стабильности в инфинитезимальной форме [11].

Суть расширения концепции стабильности состоит в том, что замкнутому множеству в пространстве позиций игровой задачи о сближении сопоставляется некоторая неотрицательная функция, заданная на промежутке времени, на котором рассматривается игра. Эта функция оценивает степень несогласованности множества и динамики конфликтно управляемой системы с точки зрения понятия стабильности. Окончательная оценка степени несогласованности выражена некоторым интегралом от этой функции, который мы и называем дефектом стабильности множества [12, 13].

В работе сделан акцент на вычислении дефекта стабильности в конкретных примерах. При этом нам представляется удобным такой подход к решению игровых задач о сближении, в котором стабиль-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления», РФФИ (проект 08-01-00587-а) и программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1).

ные мосты (максимальные стабильные мосты) со сложной геометрией подменяются (не очень сильно уклоняющимися от них в хаусдорфовой метрике) множествами с гладкой границей в пространстве позиций игровой задачи, временными сечениями которых являются эллипсы. Удобство подхода заключается в относительной простоте описания таких множеств с гладкой границей, а также в том, что в процессе реализации принципа экстремального прицеливания мы строим в каждый момент времени разрешающее позиционное управление первого игрока, исходя из прицеливания на эллипсы — множества с хорошей геометрией. Здесь мы следуем тому важному и полезному направлению в теории управления, которое развивается начиная с 80-х годов XX столетия А. Б. Куржанским и его сотрудниками [14–16], Ф. Л. Черноусько и его сотрудниками [17].

Литература

- [1] *Красовский Н.Н.* Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
- [2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 4. С. 745–747.
- [3] *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [4] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
- [5] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [6] *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
- [7] *Красовский Н.Н.* Унификация дифференциальных игр // Труды ИММ. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.

- [8] *Тарасьев А. М., Ушаков В. Н.* О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Деп. в ВИНТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983.
- [9] *Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
- [10] *Ushakov V. N., Taras'ev A. M., Tokmantsev T. B., Uspenskii A. A.* On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 139, №5, 2006. Pp. 6954–6975.
- [11] *Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.* Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game-Theoretical Problems of Control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, №. 6. Pp. 405–419.
- [12] *Ушаков В. Н., Латушкин Я. А.* Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.
- [13] *Ushakov V. N., Brykalov S. A., Latushkin Y. A.* Stable and unstanble sets in problems of conflict control // Functional Differential Equations, Vol. 15, №3–4, 2008. Pp. 309–338.
- [14] *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
- [15] *Гусев М. И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрёстными связями // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.
- [16] *Филлипова Т. Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 223–232.
- [17] *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука. 1988.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ МАРШРУТИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ФУНКЦИЯ СТОИМОСТИ ЗАВИСИТ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ

Морина М.С.¹

e-mail: morina.ms@gmail.com

Настоящее исследование посвящено построению приближенного метода решения (в модельной постановке) задачи о демонтаже оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Предполагается, что «невывключенные» элементы системы оказывают вредное воздействие на работника. Дозы облучения, полученные в процессе элементарных перемещений, суммируются. Совокупная доза зависит от маршрута, который требуется выбрать в интересах ее минимизации. Данная маршрутная задача имеет своим прототипом известную задачу коммивояжера (одну из классических труднорешаемых задач).

Точное решение сводится к применению метода динамического программирования (МДП). Однако применение МДП связано с большими трудностями вычислительного характера. Особые затруднения представляют рассчитывание и хранение большого массива значений функции Беллмана. В этой связи большой интерес представляют приближенные алгоритмы, в частности, в основу их построения можно положить аналог уравнения Беллмана, в котором, однако, значение самой функции Беллмана заменено некоторой огрубленной характеристикой.

Идея построения алгоритма. Будем исходить из предположения, что j выбирается из условия:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{i,j}[K] + \alpha \cdot \min_{s \in K \setminus \{j\}} \mathbf{c}_{j,s}[K \setminus \{j\}] + (1 - \alpha) \cdot \max_{s \in K \setminus \{j\}} \mathbf{c}_{j,s}[K \setminus \{j\}] \\ &= \min_{l \in K} (\mathbf{c}_{i,l}[K] + \alpha \cdot \min_{s \in K \setminus \{l\}} \mathbf{c}_{l,s}[K \setminus \{l\}] + (1 - \alpha) \cdot \max_{s \in K \setminus \{l\}} \mathbf{c}_{l,s}[K \setminus \{l\}]), \end{aligned}$$

где $i=0$ — исходный индекс («база»), из которого исполнитель начинает движение; j — очередное задание, подлежащее исполнению; $K = \overline{1, N}$ — «список» заданий; $\mathbf{c}_{i,j}[K] = \sum_{s \in K} c_{i,j}[\{s\}] \geq 0$ — вредное

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00000 и Программой фундаментальных исследований «Процессы управления».

набор городов	шаг alpha								
	0,1			0,01			0,001		
	диапазон	общ. вред	вр. счета, с	диапазон	общ. вред	вр. счета, с	диапазон	общ. вред	вр. счета, с
№1	1	3051,061	00:375	0,91-1	3051,061	02:985	0,905-1	3051,061	30:937
№2	0,9-1	4771,513	00:344	0,88-1	4771,513	02:938	0,877-1	4771,513	29:000
№3	1	4712,117	00:359	0,98	4616,347	02:875	0,974-0,983	4616,347	29:937
№4	0,8	4595,015	00:360	0,81-0,85	4592,635	02:906	0,805-0,853	4592,635	30:578
№5	0,7-1	3751,460	00:359	0,62-1	3751,460	03:000	0,612-1	3751,46	31:312
№6	0,9-1	3276,498	00:360	0,84-1	3276,498	03:000	0,838-1	3276,498	30:671
№7	1	4712,612	00:343	0,91-1	4712,612	02:984	0,91-1	4712,612	30:860
№8	1	4458,778	00:344	0,92-1	4458,778	02:969	0,915-1	4458,778	30:750
№9	0,9	4091,064	00:344	0,81-0,96	4091,064	03:016	0,805-0,965	4091,064	29:735
№10	0,9-1	3074,376	00:344	0,9-1	3074,376	03:328	0,894-1	3074,376	30:984

Рис. 1: результаты расчета для 10 различных наборов городов

воздействие со стороны активных элементов (множество K) при перемещении от i -го элемента системы к j ; $c_{i,j}[\{s\}]$ вычисляется исходя из интенсивности излучения активного элемента s и относительных расстояний между элементами s, i и j .

В свою очередь, α играет роль параметра управления и выбирается из отрезка $[0, 1]$. Заметим, в частности, если α находится на концах отрезка ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$), то решение задачи сводится к приближенным алгоритмам, предложенным в работах [1, 2]. Нам следует выбирать $\alpha \in [0, 1]$ таким образом, чтобы величина совокупных затрат (по смыслу – оценка суммарной дозы радиации) была минимальна.

Аналитическая часть

На основании вычислительного эксперимента, а именно, результатов, представленных на рис. 1, можно отметить, что в большинстве случаев с уменьшением шага по α не происходит минимизации величины совокупных затрат, а лишь увеличивается область, где этот результат остается минимальным. Это объясняется степенью дискретизации α . Рассмотрим данное наблюдение на наборе городов №2 (см. рис. 1 и рис. 2). Сначала выбираем шаг по α , равный 0.1: диапазон минимальных значений $[0,9, 1]$, величина совокупных затрат 4771.513. Уменьшим шаг по α до 0.01: диапазон минимальных значений расширился до $[0,88, 1]$, то есть наш прежний результат остался

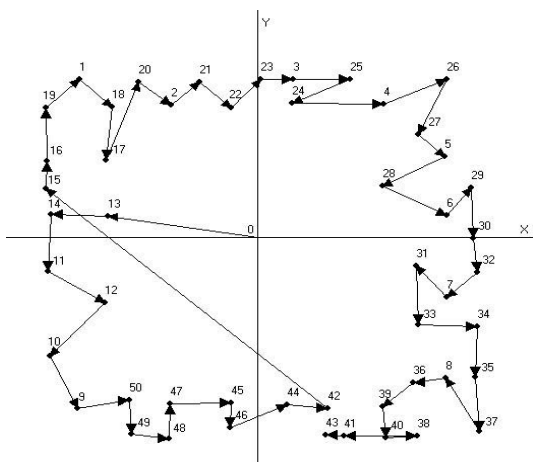


Рис. 2: путь посещения 50 городов при выборе $\alpha \in [0, 1]$ с шагом 0.1, 0.01 и 0.001

минимальным и при $\alpha = 0.88$, и при $\alpha = 0.89$. Еще уменьшим шаг по α до 0.001: наш минимальный результат попадает в диапазон значений $\alpha \in [0.877, 1]$. Обратим внимание на результат, полученный при решении задачи с набором городов № 3 (см. рис. 1): с уменьшением шага по α наблюдается улучшение величины совокупных затрат, результат становится более точным.

Литература

- [1] Морина М.С., Ченцов А.Г. Об одном алгоритме решения задачи маршрутизации процесса выведения элементов системы из рабочего режима // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. 2010, вып. 10. С. 25–35.
- [2] Кортаева Л.Н., Сбоев С.А., Хасанова И.С., Ченцов А.Г. Об одном алгоритме маршрутизации задачи обхода конечной системы множеств // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. 1999, вып. 3. С. 95–106.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Парышева Ю.В.¹

e-mail: Yulya-Parysheva@yandex.ru

Рассматривается задача оптимального управления [1, 2] с быстрыми и медленными переменными [3, 4]

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], & \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon &= A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, & y_\varepsilon(0) = y^0, \\ \sigma(x_\varepsilon(T)) &\rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x_\varepsilon(T)) =: \omega_\varepsilon(T, x^0, y^0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}, B_i, i, j = 1, 2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности;

$$\operatorname{Re} \lambda(A_{22}) \leq -\alpha < 0; \quad (2)$$

$\sigma(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая на \mathbb{R}^n , строго выпуклая функция; $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве.

Наряду с (1) рассмотрим также вырожденную задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_0x_0 + B_0u, & t \in [0, T], & x_0(0) = x^0, & \|u\| \leq 1, \\ A_0 &:= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & B_0 &:= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ \sigma(x_0(T)) &\rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x_0(T)) =: \omega_0(T, x^0). \end{aligned} \quad (3)$$

Исследована асимптотика оптимального значения функционала качества $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ в задаче (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$ и фиксированных T, x^0, y^0 в сингулярном случае.

Теорема. Пусть выполнено (2), а также следующие условия:

$\sigma^*(x)$ бесконечно дифференцируема на \mathbb{R}^n и матрица $D^2\sigma^*(r_0)$ положительно определенная;

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 05-01-01008, 06-01-00148.

$\|B_0^* e^{A_0^* t} r_0\| \neq 0$ при всех $t \in [0, T]$;
 $\|(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0\|$ имеет на $\tau \geq 0$ единственный ноль первого порядка в точке $\tilde{\tau} = 0$.

Тогда оптимальное значения $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ функционала качества в задаче (1) раскладывается в следующий асимптотический ряд:

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) \sim \omega_0(T, x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} \omega_{k,n}(T, x^0, y^0) \ln^n \varepsilon \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где $\omega_0(T, x^0)$ — решение задачи (3), а $\omega_{k,n}(T, x^0, y^0)$ — известные функции.

Литература

- [1] Понтрягин Л.С. [и др.] Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
- [2] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [3] Тихонов А.Н. // Мат. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
- [4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ СИЛЬНО МОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ТИПА ЛЯПУНОВА

Сорокин С.П.¹
e-mail: sorsp@mail.ru

Доклад посвящен получению и анализу достаточных условий глобальной оптимальности, базирующихся на применении семейств решений неравенств Гамильтона-Якоби, обладающих свойством монотонности вдоль всех траекторий управляемой системы; такие решения мы называем сильно монотонными функциями типа Ляпунова (кратко L -функциями) [1–3]. Новизна представляемых результатов состоит в использовании класса L -функций, параметрически зависящих от начальной (или конечной) позиции системы.

Рассматривается задача (P) оптимального управления с общими (не раздельными) конечными ограничениями на траекторию:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \quad (1)$$

$$q := (t_0, x(t_0); t_1, x(t_1)) \in Q, \quad (2)$$

$$J(\sigma) = l(q) \rightarrow \min,$$

где функции f , l непрерывны и непрерывно дифференцируемы по t , x , q , множество Q замкнуто, U произвольно, $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ — пара функций, определенных на отрезке времени $\Delta = [t_0, t_1]$ (зависящем от σ), причем траектория $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а управление $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на Δ , $\dim x = n$, $\dim u = m$.

Множество пар σ , удовлетворяющих управляемой системе (1), обозначим через Σ_f и назовем множеством процессов этой системы, а множество траекторий $x(\cdot)$, соответствующих процессам $\sigma \in \Sigma_f$, обозначим через \mathcal{T} . Множество $\Sigma \subset \Sigma_f$, состоящее из процессов, удовлетворяющих конечному ограничению (2), назовем множеством допустимых процессов. Будем предполагать, что $\Sigma \neq \emptyset$.

Определение 1. Пару точек (t_0, x_0) , (t_1, x_1) назовем соединимыми (траекториями системы (1)), если найдется траектория $x(\cdot) \in \mathcal{T}$, для которой $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$. Множество всех соединимых точек системы (1) обозначим через \mathcal{R} .

¹Работа поддержана СО РАН (интеграционный проект СО-УрО РАН № 85).

Определение 2. Обозначим через \mathcal{V}_+ множество всех функций $V(t, x; t_0, x_0) : R^{2n+2} \rightarrow R$, гладких по (t, x) и таких, что

$$V(t_0, x_0; t_0, x_0) \geq 0, \quad \forall (t_0, x_0) \in R^{n+1} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} & (\forall (t_0, x_0) \in R^{n+1}) (\forall (t_*, x_*) \in [t_0, +\infty) \times R^n) \\ & (\forall x(\cdot) \in \mathcal{T}, x(t_*) = x_*) : \\ & \text{функция } t \rightarrow V(t, x(t); t_0, x_0) \text{ не убывает на } [t_*, t_1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции, описанные этим определением, условимся называть *позиционными* сильно возрастающими L -функциями, подчеркивая тем самым их зависимость от (t_0, x_0) .

Условие сильной монотонности L -функции может выражаться в инфинитезимальной форме с помощью различных дифференциальных неравенств типа Гамильтона-Якоби [4, 5]. Здесь мы ограничимся одним следующим критерием. Для его формулировки введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$$

и нижний гамильтониан

$$h(t, x, \psi) = \inf_{u \in U} H(t, x, \psi, u) \quad (5)$$

с эффективным множеством

$$\text{dom } h = \{(t, x, \psi) \mid \text{инфимум в (5) достигается}\}.$$

Пусть V — гладкая по (t, x) функция. В сделанных предположениях её сильное возрастание гарантируется следующим неравенством Гамильтона-Якоби (рассматриваемым вместе с условием (3)):

$$\begin{aligned} & V_t(t, x; t_0, x_0) + h(t, x, V_x(t, x; t_0, x_0)) \geq 0 \\ & \forall (t, x, V_x) \in ([t_0, +\infty) \times R^n \times R^n) \cap \text{dom } h, \forall (t_0, x_0) \in R^{n+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где V_t и V_x — частные производные функции V по t и x . Отметим, что неравенство (6) обеспечивает выполнение условия (4) даже для локально липшицевой по (t, x) функции V ; в этом случае соотношение (6) должно выполняться в точках дифференцируемости функции $(t, x) \rightarrow V(t, x; t_0, x_0)$.

Пусть $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_+$ — произвольное множество и

$$E_+(\mathcal{V}) = \{q = (t_0, x_0; t_1, x_1) \mid V(t_1, x_1; t_0, x_0) \geq 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}\}.$$

Рассмотрим следующую конечномерную задачу ($EP(\mathcal{V})$):

$$l(q) \rightarrow \inf; \quad q \in E_+(\mathcal{V}) \cap Q.$$

Так как очевидно, что $E_+(\mathcal{V}) \supset \mathcal{R}$, то получаем оценку снизу значения задачи (P):

$$\min(P) \geq \inf(EP(\mathcal{V})) := \inf l(E_+(\mathcal{V}) \cap Q).$$

Отсюда следует также

Теорема (достаточное условие глобальной оптимальности). *Если для процесса $\bar{\sigma} \in \Sigma$ найдется такое множество $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_+$, что вектор \bar{q} глобально оптимален в задаче ($EP(\mathcal{V})$), то $\bar{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче (P) и*

$$\min(P) = J(\bar{\sigma}) = \min(EP(\mathcal{V})).$$

Литература

- [1] Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76–108.
- [2] Дыхта В.А. Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций типа Ляпунова // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 66–75.
- [3] Сорокин С.П. Монотонные решения неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении // Вестник Тамбовского ун-та. Серия Естеств. и техн. науки. 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 800–802.
- [4] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [5] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. Grad. Texts in Math. Vol. 178. New York: Springer-Verlag, 1998.

**ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА
НА ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ
НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ**

Усова А.А.¹

e-mail: anastasy.ousova@gmail.com

Рассматриваются две задачи оптимального управления инвестициями S , построенные на основе моделей экономического роста, анализирующих изменение внутреннего валового продукта (ВВП) Y страны в зависимости от двух факторов: основного капитала K и труда L . Данная взаимосвязь описывается производственной функцией Кобба-Дугласа F_β , а именно $Y = F_\beta[K, L] = \alpha K^\beta L^{1-\beta}$, где $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Суть задач состоит в максимизации функции полезности J , определяемой как интеграл от логарифмического индекса потребления одного рабочего $c(t) = (1 - s(t))y(t)$, дисконтированного δ на бесконечном промежутке времени: $J = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\delta t} (\ln(1 - s(t)) + \ln f_\beta(k(t))) dt$ вдоль траекторий динамической системы $\dot{k}(t) = s(t)f_\beta(k(t)) - \lambda k(t)$, $k(t_0) = k_0$, которая определяет изменение основного капитала страны в соответствии с моделью Солоу. Относительно труда L предполагается, что он изменяется экспоненциально с положительной относительной скоростью n . В качестве управляющего параметра задачи рассматривается доля $s(0 \leq s \leq a < 1)$ ВВП, инвестируемая в основной капитал страны. Начальный уровень основного капитала и труда заданы величинами K_0 и L_0 , соответственно. Поясним некоторые обозначения: $k(t)$ – основной капитал страны, приходящийся на одного рабочего; $k_0 = K_0/L_0$ – начальный уровень относительного капитала; $f_\beta(k) = F_\beta\left[\frac{K}{L}, 1\right] = \frac{F_\beta[K, 1]}{L} = \frac{Y}{L} = y = \alpha k^\beta$ – уровень ВВП

¹Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, 08-01-00587а; грантом Российского гуманитарного научного фонда, 08-02-00315а; грантом поддержки ведущих научных школ, НШ-64508.2010.1; программой Президиума Российской Академии Наук № 29 «Математическая теория управления»; Международным институтом прикладного системного анализа (IIASA)

страны на одного рабочего, вычисленный в силу свойства положительной однородности первой степени производственной функции, $\lambda = n + \mu$ – уровень размывания капитала.

Вторая задача возникает вследствие увеличения параметра эластичности модели β до единицы: $f_1(k) = \alpha k = \lim_{\beta \uparrow 1} f_\beta(k)$. Исследуется влияние изменений параметра эластичности модели на равновесные положения гамильтоновых систем, оптимальные траектории и функции цены.

Решение задач опирается на принцип максимума Понтрягина для задач на бесконечном горизонте [1].

Утверждение 1. *Гамильтонова система в нелинейной модели имеет стационарную точку седлового типа: $k_\beta^* = \left(\frac{\alpha\beta}{\delta+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $z_\beta^* = \frac{\beta}{\delta+(1-\beta)\lambda}$. В случае с линейной динамикой стационарная точка отсутствует, а именно, $k_1^* = +\infty$, когда $\alpha > \delta + \lambda$, и $k_1^* = 0$ в противном случае.*

Утверждение 2. *Оптимальная траектория нелинейной задачи оптимального управления поточечно сходится к оптимальной траектории линейной задачи (см. [3]), когда параметр β стремится к единице слева.*

Следует отметить, что для нелинейной задачи в областях с постоянным управлением решение можно построить аналитически, а именно в области нулевого управления D_1 ($s_\beta^0 = 0$) имеем: $k_{\beta 1}^0(t) = k_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$, $z_{\beta 1}^0(t) = C_1 e^{\delta t} + \beta/\delta$, в области насыщенного управления D_3 ($s_\beta^0 = a$) имеем: $x(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha\alpha} k_0^{1-\beta}\right) e^{-\lambda(1-\beta)(t-t_0)}$, $z_{\beta 3}^0(t) = (1-x(t))(\gamma_2 L_\varphi(x(t), \gamma_1) + C_3 x(t)^{-\gamma_1})$, где $x(t) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha\alpha} k_{\beta 3}^0(t)^{1-\beta}$,

функция $L_\varphi(\cdot)$ определяется равенством: $L_\varphi(x(t), \gamma_1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x(t)^m}{m+\gamma_1}$.

Символами γ_1 и γ_2 обозначены константы: $\gamma_1 = \frac{\delta}{(1-\beta)\lambda} + 1$, $\gamma_2 = \frac{\beta}{(1-\beta)\lambda}$. Постоянные величины C_1 и C_3 определяются из условия непрерывного перехода решения между соответствующими областями с постоянным управлением и областью переменного управления D_2 $s_\beta^0 = 1 - \frac{k^{1-\beta}}{\alpha z}$. Численный алгоритм построения оптимальных траекторий описан в работе [2].

Утверждение 3. Функция цены $V_\beta[t_0; k_0]$ нелинейной задачи оптимального управления поточечно сходится к функции цены $V_1[t_0; k_0]$ линейной задачи, когда параметр β стремится к единице слева.

Для линейной задачи функция цены строится аналитически (см. [3]). На рис. 1 изображена сходимость оптимальных траекторий

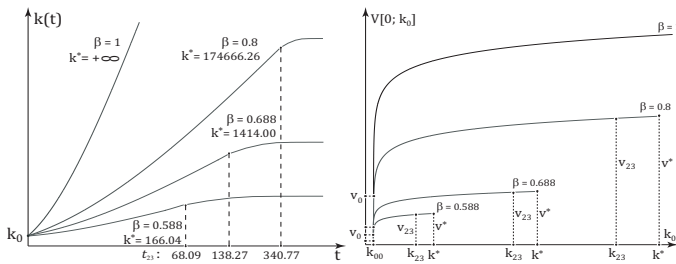


Рис. 1: графики оптимальных решений $k_\beta^0(t)$ и функций цены $v_\beta(k_0)$

и функций цены нелинейной задачи к оптимальной траектории и функции линейной задачи, когда β стремится к 1. На графике отмечены значения функций цены v_{23} в точках перехода решений из области D_3 в D_2 : $V_{0.588} = 32.8$, $V_{0.688} = 52.28$, $V_{0.8} = 99.71$, $V_1 = +\infty$, и значения v_β^* в стационарной точке k_β^* : $V_{0.588}^* = 34.29$, $V_{0.688}^* = 53.96$, $V_{0.8}^* = 100.35$, $V_1^* = +\infty$.

Литература

- [1] Асеев С.М., Кряжымский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН, 2007. Т. 257. С. 5–271.
- [2] Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. Conjugation of Hamiltonian Systems in Optimal Control Problems // Preprints of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control IFAC, 2008. Pp. 7784–7789.
- [3] Усова А.А. Функция цены в задаче управления с линейной динамикой и логарифмическим функционалом качества // Труды 40-й Молодежной школы-конференции, 2009. С. 260–265.

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ

Ушаков А.В.¹

e-mail: std_string@mail.ru

В теории антагонистических дифференциальных игр важной является задача о построении совокушности всех начальных позиций, откуда первый игрок гарантирует приведение фазового вектора в фиксированный момент времени на заданное целевое множество, как бы ни действовал второй игрок. Такое множество называется максимальным стабильным мостом [1].

В работе рассматривается алгоритм построения максимальных стабильных мостов для систем с линейной динамикой, скалярными (ограниченными по модулю) управлениями игроков и выпуклым, замкнутым, ограниченным трехмерным целевым множеством. Последнее обстоятельство позволяет перейти к эквивалентной дифференциальной игре третьего порядка.

Рассматриваемый алгоритм [2] попятного по времени построения t -сечений базируется на процедуре нахождения выпуклой оболочки кусочно-линейной положительно-однородной функции, заданной в трехмерном пространстве на некоторой сетке. Специфика процедуры овыпукления связана с тем, что нам известны все участки исходной функции, где потенциально может отсутствовать локальная выпуклость.

В последнее время основное внимание автором было уделено проблемам, связанным с реализацией разрабатываемого алгоритма на компьютере. Из-за того, что представление действительных чисел имеет конечную точность, в исследуемой задаче возникает проблема неразличимости близких объектов. Существует два типа близких объектов: близкие вершины и близкие связи (связи, угол между которыми мал). Новые вершины возникают в данном алгоритме только при учете действия первого игрока, поэтому проблема близких вершин решается при помощи «умного» первого игрока, который их не создает. С близкими связями так просто бороться не удается, так как мы не можем произвольно менять связи овыпукляемой (на сетке) кусочно-линейной функции. Одним из вариантов реше-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96006.

ния этой проблемы является применение масштабирования: мы масштабируем систему вдоль «проблемного» направления, при этом узлы функции «сгущаются» к плоскости, перпендикулярной этому направлению, что приводит к увеличению углов между узлами и между связями функции в области «проблемного» направления. Обычно «проблемным» направлением является направление наименьшей толщины выстраиваемого множества. Во многих случаях введение масштабирования позволило увеличить количество шагов понятной процедуры при удовлетворительном качестве (например, сохранение симметрии в «симметричных» задачах).

Приводятся результаты расчета мостов для нескольких примеров.

Литература

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
- [2] *Ivanov Alexey, Ushakov Andrey*. Maximal stable bridges in linear differential games of the third order / In: “13th International symposium on dynamic games and applications”. Edited by Arik A.Melikyan, Andrzej S. Nowak, Krzysztof J. Szajowski; Wrocław, 30th June – 3rd July 2008. P. 118. — Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2008.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Хлопин Д.В.¹
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Определения и обозначения. Пусть задано метрическое пространство $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{R}^m$. Определим $\mathbf{T} \triangleq \{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$. Всюду на пространствах функций из \mathbf{T} рассматривается компактно-открытая топология. В частности, это так для $\mathfrak{X} \triangleq C(\mathbf{T}, \mathbf{X})$. Обозначим также через Ω семейство тех функций $\omega \in \mathfrak{X}$, для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$.

Управляемая система. Пусть дана управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = 0, \quad t \in \mathbf{T} \triangleq \mathbf{R}_{\geq 0}, \quad u \in P \in (\text{comp})(\mathbf{R}^p). \quad (1)$$

Условие Ia. Условия Каратеодори, то есть: 1) для произвольных $(x, u) \in \mathbf{X} \times P$ функция $(f(t, x, u) \mid t \in \mathbf{T})$ измерима; 2) для каждого $t \in \mathbf{T}$ функция $(f(t, x, u) \mid (x, u) \in \mathbf{X} \times P)$ непрерывна.

Условие Ib. Для всякого $n \in \mathbf{N}$ найдется такая суммируемая функция $L : [0, n] \mapsto \mathbf{T}$, что функция $(f(t, x, u) \mid x \in \mathbf{X})$ липшицева по x с константой $L(t)$ для почти всех $t \in [0, n]$ и всех $u \in P$.

Условие Ic : условие подлинейного (по x) роста.

Введем множество $\mathfrak{U} \triangleq B(\mathbf{T}, P)$. В силу условия **I** отображение, сопоставляющее всякому $u \in \mathfrak{U}$ его решение $\varphi(u) \in \mathfrak{X}$, непрерывно.

Задача управления. Пусть поставлена задача максимизации на траекториях (1) функционала

$$J(x, u) \triangleq \int_{\mathbf{T}} g(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (2)$$

Для непрерывности J на допустимых парах $(u, \varphi(u))$ потребуется

Условие II : для g выполнено **Iabc** и для некоторой $\omega \in \Omega$

$$\int_T^\infty |g(t, \varphi(x)(t), u(t))| dt \leq \omega(T) \quad \forall T \in \mathbf{T}, u \in \mathfrak{U}.$$

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \times \mathbf{T} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ по правилу: $\mathcal{H}(x(t), t, u(t), \psi(t), \lambda) \triangleq \psi' f(x, u) + \lambda g(t, x, u)$.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00436 и программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

Предложение 1. В условиях **I – II** для оптимальных $u_* \in \mathfrak{U}$, $x_* = \varphi(u_*)$, при некоторых $\lambda \in \mathbf{R}$, $\psi \in \mathfrak{X}$ выполнено почти всюду на \mathbf{T}

$$\dot{\psi}(t) \in -\partial_x \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \lambda), \quad \|\psi(0)\|^2 + \lambda^2 = 1; \quad (3)$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \lambda) = \sup_{p \in P} \mathcal{H}(x_*(t), t, p, \psi(t), \lambda). \quad (4)$$

Доказательство сводится к применению принципа максимума [2, теорема 5.2.1] для последовательности вспомогательных задач на промежутках вида $[0, n]$ с краевым условием $x(n) = x_*(n)$.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{X}}$ замыкание в \mathfrak{X} семейства всевозможных решений $(x, u, \Psi, \lambda) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{R}$ соотношений (1), (3), (4).

Существование. Покажем в условиях **I – II** существование оптимального решения, расширив множество управлений.

Пусть $\Pi([0, n], P)$ – оснащенное топологией *-слабой сходимости множество всех слабо измеримых отображений из $[0, n]$ в множество вероятностных мер Радона над P . Определим топологическое пространство $\Pi(\mathbf{T}, P)$ как обратный предел ([4])

$$\Pi(\mathbf{T}, P) = \lim_{\leftarrow} \mathbf{S} = \lim_{\leftarrow} \left\{ \Pi([0, n], P), \pi_{[0, m]}^{[0, n]}, \mathbf{N} \right\}.$$

В частности, элементы $\Pi(\mathbf{T}, P)$ – такие функции μ , что $\mu|_{[0, n]} \in \Pi([0, n], P)$ для всякого $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\Pi(\mathbf{T}, P)$ наследует у $\Pi([0, n], P)$ компактность и соотношение $cl \mathfrak{U} \simeq \Pi(\mathbf{T}, P)$, отсюда отображения φ и J непрерывно продолжаются на $\Pi(\mathbf{T}, P)$, то есть у обобщенного аналога (2) в условиях **I – II** найдётся оптимальное решение $\mu_0 \in \Pi(\mathbf{T}, P)$. Перейдя теперь к управлениям Гамкрелидзе (см. [1]), можно обеспечить

Условие **III** ([1, (A2)]). Для всякого $(t, x) \in \mathbf{T} \times \mathbf{X}$ выпукло множество $\{(z', f(t, x, u)) \in \mathbf{R}^{m+1} \mid z \in \langle -\infty, g(t, x, u) \rangle, u \in P\}$.

Тогда будет достигаться верхняя грань $J(\mathfrak{U})$, теперь выполнено:

Следствие ([5]). В условиях **I – III** для задачи (2) всегда существует оптимальное управление $u \in \mathfrak{U} = B(\mathbf{T}, P)$.

Условия трансверсальности. Соотношения (1), (3), (4) не содержат условия на правом конце. Есть несколько вариантов таких условий (подробнее см. [1, §1.6]), в данной работе исследуется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0. \quad (5)$$

Условие **IV**. Для всякого $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0) \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^0(t)$; кроме того, этот предел равномерен для решений (1), (3) в целой окрестности Υ точки $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$, то есть для некоторой функции $\omega_1 \in \Omega$ для всякого решения $(x, u, \Psi, \lambda) \in \Upsilon$ соотношений (1), (3) для всех $s \in \mathbf{T}$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t) - \psi(s)\| \leq \omega_1(s)$.

Предложение 2. В условиях **Iabc, II – IV** для всякой оптимальной в (2) траектории x^0 найдется такое решение $(x^0, u^0, \Psi^0, \lambda^0)$ соотношений принципа максимума (1), (3), (4), что выполнено (5).

При доказательстве вводятся вспомогательные задачи, для оптимальных решений которых выполнено условие трансверсальности $\Psi_n(\tau_n) = 0$ и мало $\|x - x_n\|_{C([0, \tau_n], \mathbf{R})}$. Из полунепрерывной сверху зависимости решений (см. [3]) и компактности следует $\Psi_n(\tau_n) - \Psi(\tau_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Затем применяется условие **IV**.

Одно из самых общих условий на (5) показано в [6, Theorem 6.1]. Поскольку условие **IV** следует из условий [6, Theorem 3.1] в силу [6, Lemm 3.1], то и основной результат статьи [6] для задачи управления без фазовых ограничений вкладывается в предложение 2.

Литература

- [1] Асеев С.М., Кряжсимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 1–271.
- [2] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.
- [3] Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1986.
- [4] Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
- [5] Balder E.J. An existence result for optimal economic growth problems // J. of Math. Anal. 1983. Vol. 95. № 1. Pp. 195–213.
- [6] Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // JOTA. 1999. Vol. 103. № 1. Pp. 201–230.

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК В УСЛОВИЯХ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО СОБЛЮДЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ

Шапарь Ю.В.

e-mail: shaparuv@mail.ru

Рассматривается один конкретный пример задачи об игровом взаимодействии двух материальных точек с ограничениями, включающими импульсную и моментную составляющие. Моментные ограничения допускают ослабление, что может приводить к скачкообразному изменению качества. В настоящей работе используется подход, последовательно развиваемый в [1, 2] и связанный с построением множеств притяжения. Рассмотрим материальные точки

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = u(t), \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v(t) \quad (1)$$

на единичном промежутке времени $[0, 1]$; полагаем, что $y_1(0) = y_2(0) = z_1(0) = z_2(0) = 0$; $y_1(1) = z_1(1) = a$, $a \geq 0$. Программные управления $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ считаем определенными на «стрелке» $[0, 1[$, кусочно-постоянными, непрерывными справа вещественнозначными функциями. Ограничения на u и v включают моментную и импульсную компоненты:

$$\int_0^1 (1-t)u(t) dt = a, \quad \int_0^1 (1-t)v(t) dt = a; \quad (2)$$

$$\int_0^1 |u(t)| dt \leq c_U, \quad \int_0^1 |v(t)| dt \leq c_V,$$

где c_U и c_V — фиксированные положительные константы. Наличие здесь общего краевого условия можно интерпретировать как обязательное требование встречи материальных точек (по координате), причем точка встречи задается. Упомянутая точка встречи назначается директивно, что позволяет игрокам раздельно решать вопрос о допустимости соответствующих программных управлений. При упомянутых ограничениях рассматривается задача вида

$$\Phi(u, v) = f_0 \left(\int_0^1 u(t) dt, \int_0^1 v(t) dt \right) \rightarrow \sup \inf .$$

Функция f_0 определена и непрерывна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Считаем далее, что допустимые управления есть кусочно-постоянные, непрерывные

справа неотрицательные вещественнозначные функции на промежутке $[0, 1[$, удовлетворяющие условиям исходной задачи (1), (2). Обозначим через $\mathbb{F}_\partial^{(1)}[a]$ и $\mathbb{F}_\partial^{(2)}[a]$ множества допустимых управлений с моментными ограничениями. При $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ будем рассматривать множества допустимых управлений с ослабленными ограничениями: $\mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$ и $\mathbb{F}_{\partial,2}^{(\delta)}[a]$. Области достижимости по скорости при точном соблюдении ограничений имеют вид:

$$G_\partial^{(1)}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in \mathbb{F}_\partial^{(1)}[a] \right\}; \quad G_\partial^{(2)}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 v(t)dt : v \in \mathbb{F}_\partial^{(2)}[a] \right\}.$$

Области достижимости по скорости при ослаблении краевого условия на координату определяются (при $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$) выражениями:

$$G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in \mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a] \right\}; \quad G_{\partial,2}^{(\delta)}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 v(t)dt : v \in \mathbb{F}_{\partial,2}^{(\delta)}[a] \right\}.$$

Согласно построениям [2, с. 42], введем множества притяжения и полагаем в дальнейшем

$$AS_1 \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \overline{G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]}, \quad AS_2 \triangleq \bigcap_{\delta \in]0, \infty[} \overline{G_{\partial,2}^{(\delta)}[a]}.$$

Задача о построении области достижимости не обладает здесь (при $a = 0$) устойчивостью при ослаблении ограничений на координату, поскольку $AS_1 \neq G_\partial^{(1)}[a]$ и $AS_2 \neq G_\partial^{(2)}[a]$. Действительно, $G_\partial^{(1)}[0] = G_\partial^{(2)}[0] = \{0\}$, в то время как [3, (33)] $c_U \in AS_1$ и $c_V \in AS_2$. Заметим, что (см. [3, 4]) при $a = c_U$ выполнены условия $\mathbb{F}_\partial^{(1)}[a] = \emptyset$ и $G_\partial^{(1)}[a] = \emptyset$, в то время как $a = c_U \in AS_1$ (см. [3, (15)]). Аналогичным образом имеем при $a = c_V$ свойства: $G_\partial^{(2)}[a] = \emptyset$ и $a \in AS_2$. В упомянутых случаях нужная устойчивость отсутствует. Аналогично устанавливается, что ($c_V \in AS_2$) и ($AS_2 \subset [0, c_V]$). Таким образом, если $a \in]0, c_U[$, то число c_U является наибольшей точкой каждого из следующих двух множеств: $G_\partial^{(1)}[a]$ и AS_1 .

Иными словами, при $a \in]0, c_U[$ имеем равенство: $\max_{\nu \in G_\partial^{(1)}[a]} \nu = \max_{\nu \in AS_1} \nu$. Более того, согласно предложению 2 работы [3], справедливо свойство: $c_U = \max_{\nu \in G_\partial^{(1)}[a]} \nu = \max_{\nu \in AS_1} \nu$, которое можно интерпретировать как некоторую устойчивость по результату при ослаблении

краевого условия. Это утверждение верно для $a \in]0, c_V[$. Аналогично получаем, что если $a \in]0, c_V[$, то число c_V является наибольшей точкой каждого из множеств: $G_\partial^{(2)}[a]$ и AS_2 .

В качестве f_0 возьмем функцию $f_0(x, y) = |x - y|$. Определим значение $\sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x, y)$ (ограничения каждого из объектов образуют совместную систему). Пусть $c_U \leq c_V$.

Предложение 1. *Справедливо равенство:*

$$\sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x, y) = c_V - c_U.$$

Предложение 2. *Справедливо равенство (устойчивость по максимуму задачи (1), (2)):*

$$\max_{y \in AS_2} \min_{x \in AS_1} f_0(x, y) = \sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x, y).$$

Литература

- [1] *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [2] *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996.
- [3] *Кожан М. М., Ченцов А. Г.* К вопросу о корректности некоторых задач управления материальной точкой. / Проблемы управления и информатики. — № 1. С. 5–15. 2007.
- [4] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* Конечнo-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. № 3. — С. 89–111. 2010.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ–ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Абдуллаев А.А.¹

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-1 < m < 0) \quad (1)$$

в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 - ограничена кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком AB ($y = 0$), а D_2 ограничена тем же отрезком AB ($y = 0$) и характеристиками уравнения (1):

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

Задача РТ. Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C^2(D_1)$ удовлетворяет в области D_1 уравнению (1), а в области D_2 является обобщенным решением из класса R_2 ;

2) $u(x, y) \in C(\overline{D})$;

3) $u_x, u_y \in C^1(\overline{D_1} \setminus AB)$;

4) выполняется условие склеивания

$$-u_y(x, -0) = u_y(x, +0);$$

5) удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\{a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u\}|_{\sigma} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что эта задача была рассмотрена в работе [1] для уравнения Лаврентьева – Бицадзе.

¹Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент.

Теорема. Если функция $u(x, y)$ является решением задачи РТ и в точке B выполняется условие $(-y)^{\frac{m}{2}} u^2(B) = 0$, то она единственна.

Теорема единственности решения поставленной задачи доказывается с помощью метода интегралов энергии [2]. Для доказательства существования решения задачи приводится вспомогательная задача, т.е. требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами 1–4 задачи РТ и удовлетворяющую граничным условиям $u|_{\sigma} = \varphi(x)$, $u|_{AC} = 0$, где $\varphi(x)$ – пока неизвестная функция. Затем полученное решение вспомогательной задачи удовлетворим условиям задачи РТ. Для этого необходимо подобрать $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялось условие (2). При этом получается сингулярное интегральное уравнение относительно $\varphi'(x)$. Регуляризуя его известным способом, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи РТ.

Литература

- [1] Салахитдинов М. С., Аманов Д. Задача Пуанкаре–Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами // Сб. «Фан», 1987. С. 3–38.
- [2] Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., 1970.

**ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ**

Асфандиярова Ю.С.
e-mail: asfandiyarova@list.ru

В приложениях (например, в теории динамических измерений) возникают проблемы, приводящие к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями – многоточечные краевые задачи, задачи с распределенными данными и т.п. С математической точки зрения все подобные задачи могут быть сформулированы как задачи решения линейного дифференциального уравнения с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} L[x] = x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + p_1x' + p_0x = f(t), \\ U_j(x) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $p_i(t)$, $f(t)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, α_j – числа, $U_j(x)$ – линейные, линейно-независимые функционалы, представимые в общем случае в виде

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}x(t_i) + \int_a^b g_j(t)x(t)dt = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Наряду с *прямой задачей* – нахождением неизвестной функции $x(t)$ по заданной $f(t)$ – часто возникает и задача нахождения правой части $f(t)$ по экспериментально измеренной функции $x(t)$.

В настоящей работе предлагается параллельный алгоритм решения обратной задачи обращением дифференциального оператора с помощью функции Грина.

В основу метода положено хорошо известное соотношение для решения дифференциального уравнения:

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (2)$$

где $G(t, \tau)$ – функция Грина задачи (1).

Это соотношение, являющееся обращением дифференциального оператора (1), позволяет по измеренному экспериментально решению найти правую часть уравнения (1). Эффективные и устойчивые методы решения подобных задач хорошо известны (например, [1]).

Функция Грина основной задачи (1) может быть найдена с помощью функции Грина вспомогательной задачи [2, 3]:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t), \\ U_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

На основании описанной теории, анализа существующих методов и современных тенденций развития компьютерной техники, в связи с широким внедрением многопроцессорных компьютеров и появлением высокопроизводительных многопроцессорных кластеров, был предложен следующий алгоритм решения обратной задачи теории динамических измерений, реализующий ресурс параллелизма данной задачи (подробнее в [2]).

Входные данные: $x(t)$ – измеренный сигнал, $p_i(t)$ – коэффициенты дифференциального уравнения, $U_j(x)$ – граничные условия.

1. Вычисляем функцию Грина вспомогательной задачи (3). Вычисление функции Грина происходит в два этапа.
 - 1.1. Вычисление промежуточных коэффициентов. На первом этапе вычисляются промежуточные коэффициенты c_i как решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта система была решена аналитически.
 - 1.2. Вычисление коэффициентов функции Грина. Вычисление коэффициентов a_i и b_i функции Грина из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений производится независимо на каждом участке $[t_{i-1}, t_i]$.
2. Находим функцию Грина основной задачи (1) из уравнения

$$G(t, s) - \tilde{G}(t, s) = \int_a^b G(t, \tau) V(\tau, s) d\tau, \quad (5)$$

где $\tilde{G}(t, \tau)$ – функция Грина вспомогательной задачи (3), $V(\tau, s)$ – известная функция.

Для решения уравнения Фредгольма II-го рода (5) был выбран высокоточный метод Ньютона–Котеса.

3. Вычисление искомой функции $f(t)$.

Искомую функцию $f(t)$ находим из соотношения (2), рассматриваемого как уравнение относительно $f(t)$ при заданной функции $x(t)$. Решение уравнения Фредгольма I-го рода будем искать как решение вариационной задачи минимизации функционала

$$\|Af - x\|^2 + \alpha\|f\|^2, \quad (6)$$

где A – соответствующий интегральный оператор (2).

Оценка точности полученного решения производится при помощи вычислительного эксперимента (вычислением невязки для близкой к искомому решению функции $\hat{f}(t)$ и последующим решением полученной задачи предлагаемым методом).

Выходные данные: $f(t)$ – искомая функция, δ – точность полученного решения.

Блок, производящий вычисление функции Грина для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, реализован с использованием пакета Mathematica 5.1. Программа, реализующая описанный алгоритм, находится в стадии разработки.

Предложенный алгоритм реализуется на языке Си++ с использованием стандарта MPI-2 (Message Passing Interface) на высокопроизводительном вычислительном кластере «СКИФ Урал» (332 процессора 1328 вычислительных ядер, 12.2 триллиона операций в секунду) суперкомпьютерного центра ЮУрГУ.

Литература

- [1] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач. — М.: Наука, 1978.
- [2] Асфандиярова Ю. С. Численный анализ одной обратной задачи для линейного дифференциального уравнения // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 40. С. 32–36. — Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2010.
- [3] Zalyapin V. I., Kharitonova H. V., Ermakov S. V. Inverse problems of the measurements theory // Inverse problems, Design and Optimization Symposium. P. 91–96. — Miami, Florida, U.S.A., 2007.

НЕКОТОРЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЧАСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА

Белова Е.Д.¹

e-mail: Ek.D.Belova@gmail.com

Рассматриваются стационарные изэнтропические течения идеального политропного газа при учете действия силы тяжести и силы Кориолиса, являющиеся решениями следующей системы уравнений газовой динамики [1, 2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u\Theta_r + \frac{v}{r}\Theta_\varphi + w\Theta_z + (\gamma - 1)\Theta \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ uw_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{\Theta_r}{(\gamma - 1)} = av - bw \cos \varphi, \\ wv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{\Theta_\varphi}{(\gamma - 1)r} = -au + bw \sin \varphi, \\ ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{\Theta_z}{(\gamma - 1)} = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь t, r, φ, z – независимые переменные, соответственно время и цилиндрические координаты; искомыми функциями являются Θ – квадрат скорости звука, u, v – радиальная и окружная проекции вектора скорости в плоскости xOy , w – проекция вектора скорости на ось Oz ; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа; $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, Ω – угловая скорость вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy ,

В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные. Если в качестве масштабных значений скорости и расстояния взяты соответственно: $c_* = 333 \frac{\text{M}}{\text{c}}$, $r_* = 10^3 \text{M}$, – то безразмерные значения констант g и Ω такие: $g \approx 10^{-1}$, $\Omega \approx 2 \cdot 10^{-4}$. Поскольку малые параметры g и Ω входят в систему (1) регулярно, то далее строятся частные решения системы (1) в виде разложения в ряд по

¹Исследование поддержано РФФИ, проект № 08-01-00052

степеням g и Ω :

$$\mathbf{U}(r, \varphi, z, g, \Omega) = \mathbf{U}_{00}(r, \varphi, z) + \mathbf{U}_{10}(r, \varphi, z)g + \mathbf{U}_{01}(r, \varphi, z)\Omega + \dots, \quad (2)$$

где \mathbf{U} есть вектор искомых функций с компонентами Θ, u, v, w .

Далее строится конечный отрезок представления (3), который приближенно описывают стационарные течения газа, имеющие место в вертикальной части восходящего закрученного потока типа торнадо [2].

Если в системе (1) положить $g = \Omega = 0$, то получится [2] система для \mathbf{U}_{00} , решения которой можно взять в виде

$$\Theta_{00} = \Theta_0(r); \quad u_{00} = 0; \quad v_{00} = v_0(r); \quad w_{00} = \text{const} > 0, \quad (3)$$

где вначале исходя из газодинамического смысла задачи выбирается функция $v_0(r)$, а затем из уравнения $\Theta'_0(r) = (\gamma - 1)v_0^2(r)/r$ определяется функция $\Theta_0(r)$. В работе в качестве $v_0(r)$ берутся четыре разных зависимости:

$$\begin{aligned} v_0(r) &= v_{00} = \text{const} > 0; & v_0(r) &= \omega r, \quad \omega = \text{const} > 0; \\ v_0(r) &= v_{00}/r; & v_0(r) &= v_{00}(1/r - r) \end{aligned}$$

и, следовательно, получаются четыре разных набора, составляющих вектор \mathbf{U}_{00} . Заметим, что в [2] рассмотрен частный случай представления (3): без слагаемого с \mathbf{U}_{01} и с $v_0(r) = \omega r$.

Система уравнений для \mathbf{U}_{10} получается после дифференцирования системы (1) по параметру g и подстановки значений $g = \Omega = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{00}$. Во всех четырех случаях решений (3) получаются линейные системы уравнений для компонент искомого вектора \mathbf{U}_{10} . Переменные коэффициенты этой системы зависят от \mathbf{U}_{00} и не имеют особенностей при $r > 0$ и при условии $\Theta_0 > w_{00}^2$. Последнее неравенство обеспечивается дозвуковым характером течения вдоль оси Oz . Во всех четырех рассматриваемых случаях удается, как и в [2], получить одно уравнение второго порядка для искомой функции $u_{10}(r, z)$. Это позволяет найти такое решение краевой задачи для этой функции, которое обеспечивает условие непротекания на двух заданных контактных поверхностях. Например: $u_{10}|_{r=r_1} = 0$, $u_{10}|_{r=r_2} = 0$, $0 < r_1 < r_2$.

Система уравнений для \mathbf{U}_{01} получается после дифференцирования системы (1) по параметру Ω и подстановки значений $g = \Omega = 0$,

$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{00}$. Так же, как и выше, во всех четырех случаях решений (3) получаются линейные системы уравнений для компонент искомого вектора \mathbf{U}_{01} . Переменные коэффициенты этой системы зависят от \mathbf{U}_{00} и не имеют особенностей при $r > 0$ и при условии $\Theta_0 > v_0^2$, что обеспечивается дозвуковым характером вращательного движения газа. В качестве искомой функции w_{01} можно взять такую: $w_{01} = 2 \cos \psi (1 + \cos \varphi) r$, – и тогда оставшиеся искомые $\mathbf{V}_{01} = (\Theta_{01}, u_{01}, v_{01})$ строятся в следующем виде

$$\mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_{01,0}(r) + \mathbf{V}_{01,1}(r) \cos \varphi + \mathbf{V}_{01,2}(r) \sin \varphi.$$

В частности, можно положить: $u_{01,0}(r) = u_{01,1} = 0$. В этом случае для $u_{01,2}(r)$ также получается одно дифференциальное уравнение второго порядка. Это, в свою очередь, позволяет и для этой функции удовлетворить условиям непротекания на тех же контактных поверхностях: $u_{01,2}|_{r=r_1} = 0$, $u_{01,2}|_{r=r_2} = 0$.

Литература

- [1] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. — М.: Физматгиз, 1963.
- [2] *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008.

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Бояршинова П.В., Ряшко Л.Б.¹
e-mail: krpolina@mail.ru

В статье рассматривается стохастическая динамика модели «хищник-жертва» с конкуренцией хищника за отличные от жертвы ресурсы с насыщением хищника. Отличительная черта этой модели состоит в том, что устойчивое равновесие системы окружено бассейном притяжения, при выходе из которого траектории уходят в бесконечность. Целью работы является анализ пространственного расположения стохастических аттракторов модели относительно этого бассейна. Для описания стохастических аттракторов используется метод доверительных эллипсов. Исследуются пороговые значения интенсивности шума, при которых наблюдается выход эллипса рассеивания за границу устойчивого сосуществования.

Анализ модели

Модель популяционной динамики “хищник-жертва” с конкуренцией хищника за отличные от жертвы ресурсы с насыщением хищника после масштабирования задается системой

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{uv}{1+au} \\ \dot{v} = -\gamma v + \frac{uv}{1+au} - \delta v^2 \end{cases} \quad (1)$$

В отсутствие жертв популяция хищников вымирает - этой ситуации соответствует положение равновесия $M_1(0, 0)$. Кроме этого вырожденного случая в системе существует две точки, которые отвечают сосуществованию хищников и жертв, а именно:

$$M_2 \left(\frac{1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4a\delta}}{2a^2\delta} - \frac{1}{a}, \frac{1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4a\delta}}{2a\delta} \right)$$

и

$$M_3 \left(\frac{1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4a\delta}}{2a^2\delta} - \frac{1}{a}, \frac{1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4a\delta}}{2a\delta} \right).$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 09-01-00026, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202

В зависимости от параметров системы можно наблюдать различное ее поведение. В областях, в которых одна из точек устойчива, а вторая является седлом, существует бассейн притяжения, который ограничивает область устойчивого сосуществования хищников и жертв от области безграничного роста жертв.

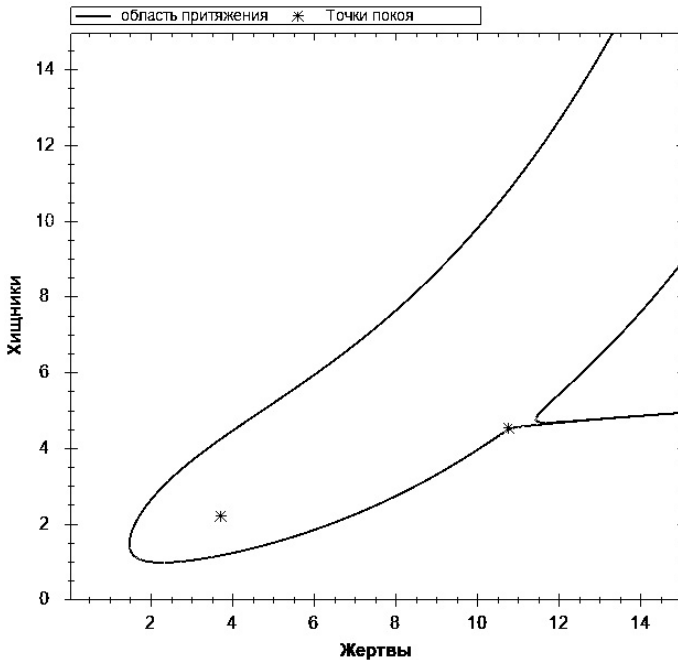


Рис. 1: Равновесие и бассейн притяжения при $a = 0.33$, $b = 0.3$

Анализ стохастических аттракторов

Рассмотрим наряду с детерминированной системой (1) соответствующую стохастически возмущенную систему (2):

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{uv}{1+au} + \varepsilon \dot{w}_1 \\ \dot{v} = -\gamma v + \frac{uv}{1+au} - \delta v^2 + \varepsilon \dot{w}_2 \end{cases} \quad (2)$$

где w_1 и w_2 - стандартные независимые винеровские процессы, а ε - интенсивность возмущения.

Под воздействием случайных шумов вокруг устойчивого равновесия образуется облако случайных точек, геометрию которого, с некоторой доверительной вероятностью, аналитически можно описать с помощью эллипса рассеивания [1]:

$$\frac{x^2}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_2} = 2\varepsilon^2 K^2,$$

где (x, y) - координаты эллипса, ε - интенсивность возмущения, $K = -\ln(1 - P)$, где P - доверительная вероятность, λ_1, λ_2 - собственные числа матрицы чувствительности W . Матрица чувствительности удовлетворяет уравнению

$$FW + WF^T = -S,$$

где F - матрица системы первого приближения в окрестности равновесия, S - матрица возмущений.

При малых значениях интенсивности шума ε облако случайных состояний концентрируется вблизи устойчивого равновесия. При увеличении ε разброс состояний увеличивается. Соответственно эллипс рассеивания выходит за границу бассейна притяжения - появляется зона риска.

Таким образом, метод эллипсов рассеивания позволяет проводить параметрический анализ выхода случайных траекторий из бассейна притяжения.

Литература

- [1] *Ryashko L., Bashkirtseva I., Gubkin A., Stikhin P.* Confidence tori in the analysis of stochastic 3D-cycles. *Mathematics and Computers in Simulation* 80 (2009) 256-269.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОПУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Гребенев Е.С.

e-mail: egrebenev@e1.ru

Приводятся результаты численного анализа популяционной модели Хатчинсона

$$N'(t) = \lambda N(t) \left(1 - \frac{N(t-h)}{K} \right) \quad (1)$$

и популяционной модели Лотки–Вольтерра

$$\begin{aligned} N_1'(t) &= \lambda_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_2(t-h_1)}{K_2} \right), \\ N_2'(t) &= -\lambda_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_1(t-h_2)}{K_1} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

При численном моделировании дифференциальные уравнения (1) и (2) заменялись разностными. При этом реализовывались различные разностные схемы: явного метода Эйлера, метода Рунге–Кутты четвертого порядка, неявного метода Эйлера, метода Адамса второго порядка. Множество $\{N : N > 0\}$ является инвариантным для уравнения (1), а множество $\{(N_1, N_2) : N_1 > 0, N_2 > 0\}$ — инвариантным для уравнения (2). Принципиальным вопросом для численного моделирования является сохранение инвариантных множеств при переходе к разностным схемам. Анализ показал, что для уравнений (1) и (2) методы Эйлера, Рунге–Кутты четвертого порядка и Адамса второго порядка не сохраняют инвариантные множества. В результате находится момент времени, когда численность популяции становится отрицательной и дальнейшие вычисления теряют биологический смысл. В случае неявного метода Эйлера инвариантность сохраняется, если постоянный шаг интегрирования $h < \lambda^{-1}$ для модели Хатчинсона и $h < \min\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}\}$ для модели Лотки–Вольтерра.

Проводился анализ условий выживаемости популяции в модели Хатчинсона, т.е. выполнения условия $N_{\min} \geq 2$. Из результатов работы [1] следует, что при больших значениях λ численность популяции, описываемой уравнением Хатчинсона, выходит на предельный цикл,

для которого минимальное значение численности стремится к нулю с ростом λ . Найдены условия выживаемости для предельного цикла. Поставлена задача нахождения условий выживаемости популяции, численность которой не превосходит некоторого заданного значения N_{\max} . При решении этой задачи требуется сузить класс начальных функций.

Проблема выживаемости для модели Лотки-Вольтерра решается отрицательно. При этом возникает задача: определить, какой из видов погибает первым? Численные эксперименты показали возможность гибели первым любого из видов. Условия гибели конкретного вида зависят и от значений параметров системы, и от начальных условий. Были поставлены вопросы: о существовании областей параметров, для точек которой конкретный вид погибает при любых начальных условиях; о нахождении области начальных условий, для точек которой после некоторого времени происходит гибель конкретного вида. Для модели Лотки-Вольтерра важной характеристикой является время жизни определенного вида популяции.

Для оценки точности вычислительных методов в качестве теста использовался предельный цикл уравнения Хатчинсона. Для него известны асимптотические формулы при больших значениях λ [1]. Вычисления показали, что при $\lambda \geq \lambda_{\min}$ асимптотические формулы дают хорошее приближение. При тестировании лучше всего проявил себя метод Рунге-Кутты четвертого порядка, хуже – явный метод Эйлера. Для численного анализа модели Хатчинсона интересны две задачи. Первая состоит в нахождении переходных процессов при $\lambda \geq \lambda_{\min}$. Вторая – нахождение периодических решений и переходных процессов при $\lambda < \lambda_{\min}$. Для модели Лотки-Вольтерра проводилось сравнение результатов численных вычислений по различным схемам.

Литература

- [1] Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. — М.: Наука, 1993.
- [2] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976.
- [3] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Дронова А.В., Казаков А.Л.
e-mail: AlisaDronova@gmail.com, kazakov@icc.ru

Исследуются начально-краевые задачи для нелинейных систем уравнений с частными производными, описывающих течения газа с ударными волнами [1].

С точки зрения общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, описание течений идеального газа с разрывами приводит к начально-краевым задач для систем квазилинейных уравнений. Для течений со слабыми разрывами это различные модификации характеристической задачи Коши [2, 3]. Для течений с сильными разрывами (ударными волнами) это обобщенная задача Коши [4–6].

Данная работа является продолжением исследования, начатого более года назад и представленного на предыдущей конференции [7]. Исследуются обобщенные задачи Коши, возникающие в газовой динамике. Для некоторых задач одним из авторов ранее были доказаны теоремы существования и единственности решения в классе аналитических функций, т. е. в виде сходящихся степенных рядов [7, 8].

Для вычисления коэффициентов этих рядов ранее были получены явные формулы, что позволило построить на их основе численные алгоритмы и выполнить иллюстрирующие численные расчеты для некоторых модельных задач [7] следующего вида:

$$\begin{cases} u_x = a(x, y, u, v)u_y + b(x, y, u, v)v_x + f(x, y, u, v), \\ v_y = c(x, y, u, v)u_y + d(x, y, u, v)v_x + g(x, y, u, v), \\ u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Однако, при попытке перенести полученные результаты с модельных задач на начально-краевые задачи для системы уравнений газовой динамики даже в случае политропного газа, плоскосимметричные течения которого описываются [1] системой квазилинейных

уравнений вида

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_r + \rho \left(u_r + v\frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + uu_r + s\rho^{\gamma-2}\rho_r + \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma} s_r = 0, \\ s_t + us_r = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где u – скорость газа, ρ – плотность, s – энтропия, r – пространственная координата, t – время, $\gamma > 1$ – константа; авторы столкнулись с аналитическими и вычислительными трудностями. Дело в том, что

1. Фронт ударной волны (УВ), на котором заданы условия Гюгонио, вообще говоря, неизвестен и определяется одновременно с построением течения газа за фронтом ударной волны [5, 6].

2. Формулы, задающие условия Гюгонио, в общем имеют вид

$$\begin{cases} D|_{r=r^*(t)} = D^*(\sigma, u_0, \rho_0, s_0), \\ \rho|_{r=r^*(t)} = \rho^*(\sigma, u_0, \rho_0, s_0), \\ s|_{r=r^*(t)} = s^*(\sigma, u_0, \rho_0, s_0), \end{cases} \quad (3)$$

где $r = r^*(t)$ – траектория движения фронта УВ, D – скорость движения ударной волны, σ – любой параметр газа за фронтом УВ, индексом «0» обозначены параметры перед фронтом УВ, которые предполагаются известными. Эти формулы являются довольно громоздкими (и здесь по этой причине не приводятся), что существенно затрудняет получение явных формул, описывающих переход от задачи для системы (3) к обобщенной задаче Коши стандартного вида. К тому же, система (2) и условия (3) содержат по три уравнения, это также приводит к возникновению дополнительных сложностей.

Тем не менее, указанные трудности авторам удалось преодолеть. Получены следующие результаты:

1. Выписаны явные формулы, которые определяют переход от начально-краевых задач газовой динамики, описывающих некоторые течения газа с УВ, в том числе отражение УВ от жесткой стенки, к обобщенным задачам Коши стандартного вида.

2. Численная методика, которая ранее была предложена для модельных задач, адаптирована для решения задач, содержащих четыре искомых функции (а не две, как было ранее).

3. Выполнена программная реализация и тестовые расчеты.

Авторы признательны д.ф.-м.н. А.Р. Данилину, д.ф.-м.н. А.И. Короткому (ИММ УрО РАН), д.ф.-м.н. А.А. Чеснокову (ИГиЛ СО РАН) за полезные замечания и рекомендации.

Литература

- [1] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1968.
- [2] *Сидоров А.Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
- [3] *Казаков А.Л.* Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 91–108.
- [4] *Леднёв Н.А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Вып. 2. С. 205–266.
- [5] *Тешуков В.М.* Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. Вып. 33. С. 114–133.
- [6] *Тешуков В.М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2. С. 225–234.
- [7] *Казаков А.Л., Лемперт А.А., Пьянкин А.П.* Аналитическое и численное исследование некоторых начально-краевых задач для уравнений с частными производными, возникающих в газовой динамике / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 261–267. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010.
- [8] *Казаков А.Л.* Построение полей течений газа за фронтом расходящейся ударной волны в задаче о сферически- или цилиндрически-симметричном неавтономном сжатии // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 35–52.

**АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА**

Джураев Ф.М.¹

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - (-y)^m \mu u(x, 0), & y < 0, \\ u_{xx} - x^p u_y - \mu_1 u(x, 0), & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где m, p, μ, μ_1 – любые действительные числа, причем

$$m > 0, p > 0, \mu < 0, \mu_1 > 0. \quad (2)$$

Пусть Ω_1 – область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y = 0, x = 0, x = 1, y = h$, соответственно, при $y > 0$. Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Введем следующие обозначения:

$$I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I.$$

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая

Задача АТ. Найти в области Ω функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;
- 2) $u(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

¹Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент.

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (4)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$,

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0, h] \cap C^1(0, h), \quad (5)$$

$$\psi(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (6)$$

Задача АТ для уравнения (1) при $\mu = \mu_1 = 0$, $m = 0$ изучена в работе [1], а при $m = 0$, $p = 0$ – в работе [2].

Теорема. *Если выполнены условия (2), (5), (6), то в области Ω решение задачи АТ существует и единственно.*

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование – методом интегральных уравнений.

Литература

- [1] *Исломов Б., Мадрахимова З.С.* Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с парабола-гиперболическом оператором // Узб. Мат. Журн. 2009. № 4. С. 76–81.
- [2] *Исломов Б., Курьязов Д.М.* Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа // Узб. Мат. Журн. 2000. № 2. С. 29–35.

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИФФУЗИИ С ФРОНТАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ВЕЩЕСТВ

Зверев В.С.¹

e-mail: v-s-zverev@yandex.ru

Комплекс явлений, носящий название поверхностной реакционной диффузии, был обнаружен в ходе разработки «аспектов концепции электрохимического подхода к реакциям синтеза сложных ионных соединений и межфазным транспортным процессам» [1]. Этот процесс заключается в твердофазном растекании при высокотемпературном отжиге вещества-диффузанта по поверхности подложки, сопровождающимся диффузионным проникновением и последующей химической реакцией, происходящей на фронте. При этом проявлялась особенность, не типичная для диффузионных задач: наблюдалась стабилизация продвижения прореагировавшего вещества по поверхности подложки, что вызвало интерес к данному процессу. Данный доклад является продолжением исследования поверхностной реакционной диффузии и посвящен построению формального решения, позволяющего получить поправки к уже имеющимся аналитическим приближениям.

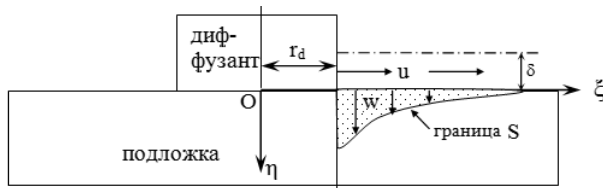


Рис. 1: схема распределения диффузионных потоков

Будем использовать следующие обозначения: u – концентрация диффузанта на поверхности подложки, w – внутри её, S – глубина фронта реакции, D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии реагента по поверхности подложки и её объему, u_0 – начальная концентрация, δ – высота приповерхностного слоя, в котором идет процесс диффу-

¹Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 02.740.11.0202 от 07.07.2009 года.

зии, h – константа скорости химической реакции, φ – концентрация продукта реакции.

Поскольку подробное описание математической модели можно найти, например, в [3], то приведем здесь итоговые уравнения.

$$u'_\tau = u''_{\xi\xi} + P w'_\eta|_{\eta=0}, \quad \tau > 0, \quad \xi > 0; \quad u(\tau, 0) = 1, \quad u(0, \eta) = 0. \quad (1)$$

$$w'_\tau = F w''_{\eta\eta}, \quad 0 < \eta < S(\tau, \rho), \quad (2)$$

$$w(0, \rho, \eta) = 0, \quad w(\tau, \rho, 0) = u(\tau, \rho), \quad w'_\eta|_{\eta=S} = -w|_{\eta=S}.$$

$$S'_\tau = w(\tau, \rho, S(\tau, \rho)), \quad S(0, \rho) = 0. \quad (3)$$

где $P = FD_2/h\delta$, $F = \varphi/u_0$ – параметры модели. Соотношения (1)-(2) описывают процесс диффузии на поверхности подложки и внутри её. Уравнение (3) задает движение фронта реакции. Длина прореагировавшего поверхностного слоя $l_s(\tau)$ определяется из выражения $S(\tau, l_s(\tau)) = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Таким образом, модель поверхностной реакционной диффузии – система параболических уравнений с подвижной неизвестной границей, решение которой сопряжено с известными сложностями.

Ограничиваясь первым приближением в методе дифференциальных рядов для задач с подвижной границей (описание можно найти например в [2]), можно свести систему к соотношениям

$$w = u \left(1 - \frac{\eta}{1+S} \right), \quad u = (S+1) \frac{\partial S}{\partial \tau},$$

$$(S+1) \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(S + \frac{S^2}{2} \right) - PS. \quad (4)$$

Итак, для описания системы (1)-(3) необходимо получить решение уравнения (4). В предыдущих работах, при получении аналитического приближения, ввиду медленного движения границы (то есть $S'_\tau \ll 1$) левая часть уравнения отбрасывалась, из-за чего впоследствии наблюдалось расхождение с численным решением задачи [3] на начальной стадии процесса. Оказывается, что для решения данной проблемы нужно построить решение уравнения с помощью замены пространственной переменной $\xi = z\sqrt{1/P}$ и степенного асимптотического разложения по параметру $1/P$:

$$S = v_0(\tau, z) + \frac{v_1(\tau, z)}{P} + \frac{v_2(\tau, z)}{P^2} + \dots,$$

поскольку предполагается, что $P \gg 1$.

Было обнаружено, что если ограничиться слагаемым v_0 , то получаемые соотношения для l_s полностью совпадают с решением при отбрасывании левой части в уравнении (4). Уравнения для последующих поправок являются полными линейными неоднородными уравнениями второго порядка. На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи при наличии слагаемого с v_1 .

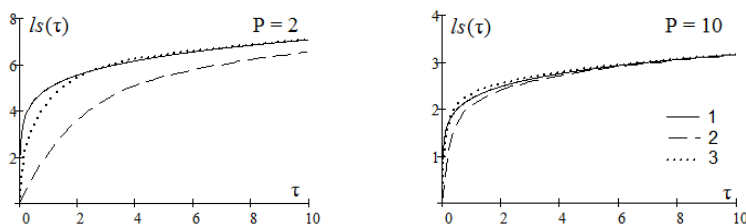


Рис. 2: длина поверхностного слоя, получаемая при решении $v_0(\tau, l_s) = \varepsilon$ (график 1), при решении $v_0(\tau, l_s) + v_1(\tau, l_s)/P = \varepsilon$, (график 2) и при численном решении из [3] (график 3); $\varepsilon = 0.001$

При решении для малых P нужно брать большее количество членов ряда, но в этом случае графики аналитического и численного решения лежат ниже нулевого приближения и стремятся к одному значению, что хорошо видно при $P \geq 10$. Итак, предложен новый подход получения асимптотического решения для задачи (1)-(3), поведение которого достаточно хорошо согласуется с численным решением из [3], и в тоже время говорит о необходимости улучшения метода для описания моделируемого процесса на начальной стадии.

Литература

- [1] Нейман А.Я. Электроповерхностные явления в твердофазных системах // Ж-л физ. химии. 2001. Т. 75, № 12, С. 2119–34.
- [2] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк, 2001.
- [3] Зверев В.С. Моделирование поверхностной реакционной диффузии и численное решение // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 7. С. 82–92.

О СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ким А.В., Волохова Л.Е.

e-mail: avkim@imm.uran.ru, l.volokhova@gmail.ru

Даны система уравнений с дискретным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) \quad (1)$$

и соответствующая ей линейная система:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2)$$

В настоящей статье сформулирован и доказан критерий структурной устойчивости по запаздыванию для линейных систем с запаздыванием.

Теорема. *Если система (1) структурно устойчива по запаздыванию на $[t_0, \vartheta]$, то система (2) технически устойчива на $[t_0, \vartheta]$. Обратно, если система (2) устойчива, то система (1) структурно устойчива по запаздыванию, на любом ограниченном интервале $[t_0, \vartheta]$.*

Литература

- [1] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Изд. 6-е. — М.: Физматлит, 2001. — 592 с.
- [2] *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. — Киев: Техніка, 1973. — 188 с.
- [3] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 256 с.

МЕТОД ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПСОВ В АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ

Кошелев Г.Н., Башкирцева И.А.¹
e-mail: gnkoshelev@gmail.com

Рассматривается нелинейная стохастическая система

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon\sigma(X)\dot{\omega}, \quad (1)$$

имеющая при $\varepsilon = 0$ T -периодическое решение $\xi(t)$ (предельный цикл). В присутствии стохастических возмущений $\varepsilon > 0$ вокруг цикла формируется пучок стохастических траекторий. Здесь $\dot{\omega} = (\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)$, где $\dot{\omega}_i (\forall i)$ — стандартные независимые винеровские процессы. Общее поведение стохастических траекторий можно описать собственными числами $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\lambda_3(t)$ матрицы стохастической чувствительности $W(t)$ [1], являющейся решением уравнения

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (2)$$

с условиями

$$W(t+T) = W(t), \quad W(t)r(t) \equiv 0. \quad (3)$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = \sigma(\xi(t)) \cdot \sigma^T(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad P(t) = P_{r(t)},$$

где $P_r = I - rr^T / r^T r$ — матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

В силу вырожденности $W(t)$ значение $\lambda_3(t) \equiv 0$. Два других собственных значения и соответствующие им собственные вектора характеризуют разброс пучка в секущей гиперплоскости по величине и направлению. Решая уравнение (2) с условиями (3) методом установления, получаем матрицу $W(t)$ вдоль цикла, для которой находим собственные значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. Затем для каждого $\lambda_i(t)$ ($i \in \{1, 2\}$) находим соответствующий собственный вектор \vec{v}_i . Очевидно, что $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. В секущей гиперплоскости доверительный эллипс будет задаваться уравнением:

$$y_1^2/\sigma_1 + y_2^2/\sigma_2 = 2k^2, \quad (4)$$

¹Работа поддержана грантами РФФИ № 09-08-00048 и № 09-01-00026.

где (y_1, y_2) – координаты точек эллипса в секущей гиперплоскости в базисе \vec{v}_1, \vec{v}_2 , направление осей эллипса задается векторами \vec{v}_i ($i \in \{1, 2\}$). Длины полуосей равны $k \cdot \sqrt{2\sigma_1}$ и $k \cdot \sqrt{2\sigma_2}$ соответственно. Здесь $\sigma_1 = \varepsilon^2 \cdot \lambda_1(t)$ и $\sigma_2 = \varepsilon^2 \cdot \lambda_2(t)$ – дисперсии вдоль направлений \vec{v}_1 и \vec{v}_2 соответственно. Параметр k задает доверительную вероятность:

$$P = 1 - e^{-k}. \quad (5)$$

Метод доверительных эллипсов рассматривается на примере модели Чена, которая может быть записана системой дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + \varepsilon \dot{\omega}_1, \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy + \varepsilon \dot{\omega}_2, \\ \dot{z} = xy - bz + \varepsilon \cdot \dot{\omega}_3, \end{cases} \quad (6)$$

где ε – интенсивность стохастических возмущений; ω_i – стандартные независимые винеровские процессы. При $\varepsilon = 0$ имеем систему, соответствующую детерминированной модели, в которой при $a = 45$, $c = 28$ и $b \in [1.1, 2]$ наблюдаются устойчивые предельные одноциклы [3]. На рисунке 1а изображена XZ -проекция предельного цикла при $b = 1.3$. Пучок случайных траекторий для $\varepsilon = 0.05$ изображен на рисунке 1б. На рисунке 2а и б изображены доверительные эллипсы

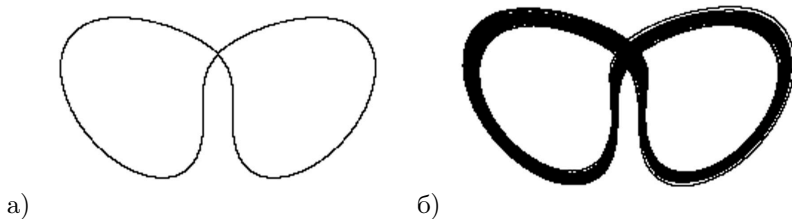


Рис. 1: XZ -проекция при $b = 1.3$ предельного цикла (а), пучка случайных траекторий вокруг предельного цикла для $\varepsilon = 0.05$ (б)

сы при $b = 1.3$, $\varepsilon = 0.05$ и доверительной вероятностью $P = 0.99$ в гиперплоскостях, проходящих через точки $(0.784, 0.781, 10.774)$ и $(-1.203, -1.323, 8.444)$ соответственно, а также точки пересечения

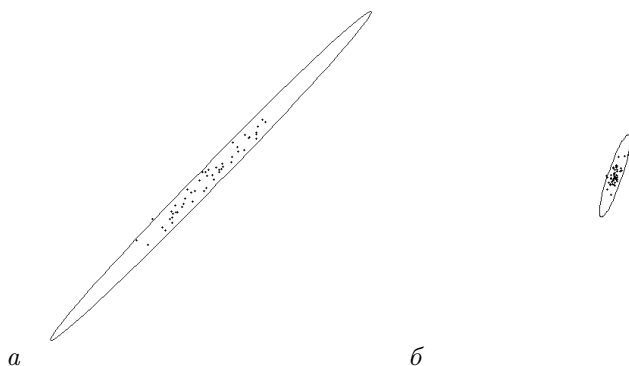


Рис. 2: доверительный эллипс при $b = 1.3$, $\varepsilon = 0.05$ и доверительной вероятностью $P = 0.99$ в точке $(0.784, 0.781, 10.774)$ (*a*), $(-1.203, -1.323, 8.444)$ (*б*)

стохастических траекторий с гиперплоскостями. Как видим, доверительные эллипсы хорошо отражают результаты прямого численного моделирования.

Литература

- [1] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2004. Vol. 66. Pp.55–67.
- [2] *Chen G., Ueta T.* Yet another chaotic attractor, *Int. J. Bifurcations and Chaos*, 9. Pp. 1465–1466, 1999.
- [3] *Chen G., Ueta T.* Bifurcation Analysis of Chen's Equation. <http://rusa.is.tokushima-u.ac.jp/~tetsushi/chen/chenbif/chenbif.html>

ЗАДАЧА О ПЛАВНОМ СТОКЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЫ КОРИОЛИСА

Крутова И.Ю.¹

e-mail: irma-levv@mail.ru

Рассматриваются изэнтропические течения идеального политропного газа при учете действия силы тяжести и силы Кориолиса, являющиеся решениями следующей системы уравнений газовой динамики [1,2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = \\ \quad = (2\Omega \sin \psi)v - (2\Omega \cos \psi \cos \varphi)w, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = \\ \quad = -(2\Omega \sin \psi)u + (2\Omega \cos \psi \sin \varphi)w, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = \\ \quad = (2\Omega \cos \psi \cos \varphi)u - (2\Omega \cos \psi \sin \varphi)v - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь t, r, φ, z – независимые переменные, соответственно время и цилиндрические координаты; искомыми функциями являются c – скорость звука; u, v – радиальная и окружная проекции вектора скорости в плоскости xOy ; w – проекция вектора скорости на ось Oz ; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа; Ω – угловая скорость вращения Земли; ψ – широта точки O на поверхности Земли, в которой находится начало координатной плоскости xOy , касающейся поверхности Земли в точке O . При этом $0 < \psi \leq \pi/2$, если точка O лежит в Северном полушарии, $-\pi/2 \leq \psi < 0$, если в Южном, $\psi = 0$ на экваторе.

Пусть соотношения

$$r = r_0(t, z), \quad r_0(t, z)|_{t=0} = r_{00} = \text{const} > 0$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00052.

с аналитической функцией $r_0(t, z)$ задают поверхность звуковой C^+ -характеристики, которая при $t \geq 0$ от цилиндра $r = r_{00}$ в сторону возрастания r распространяется по покоящемуся в поле тяжести газу, имеющему параметры:

$$\begin{aligned} c(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} &= c_0(z) \equiv \sqrt{c_{00} - (\gamma - 1)gz}; \quad c_{00} = \text{const} > 0, \\ u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} &= v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} = w(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, z)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть на поверхности цилиндра, т.е. при $r = r_{00}$, задана радиальная скорость газа

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{00}} = u_0(t), \quad u_0(0) = 0, \quad u'_0(0) < 0, \quad (3)$$

где функция $u_0(t)$ предполагается монотонной и аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Условие (3) описывает заданный на поверхности цилиндра $r = r_{00}$ плавный сток газа в направлении оси Oz .

Теорема. *Задача (1)–(3) при любом значении $\varphi = \varphi_0$ ($0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) имеет в некоторой окрестности точки ($t = 0, r = r_{00}, \varphi = \varphi_0, z = 0$) единственное аналитическое решение, представимое сходящимся рядом*

$$\mathbf{U}(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(r, \varphi, z) \frac{(r - r_0(t, z))^k}{k!}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} c \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Доказательство теоремы проводится сведением задачи (1)–(3) к характеристической задаче Коши стандартного вида [3, 4], для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской.

Первые коэффициенты ряда (4) строятся в явном виде при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Их анализ приводит к следующим значениям производных функции v , выводящих с C^+ -характеристики:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{C^+} = 0; \quad \text{sign} \left(\left. \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right|_{C^+} \right) = \text{sign}(\sin \psi),$$

т.е. в указанной окрестности знак производной $\partial^2 v / \partial r^2|_{C^+}$ совпадает со знаком $\sin \psi$ и, следовательно, указанная производная положительна в Северном и отрицательна в Южном полушариях.

Установленный знак неравенства для производной $\partial^2 v / \partial r^2|_{C+}$ и равенство $\partial v / \partial r|_{C+} = 0$ доказывают следующий факт: при плавном стоке газа одновременно с радиальным движением газа при стоке сразу возникает окружное движение (закрутка газа) в положительном направлении для случая Северного полушария и в отрицательном – для Южного полушария.

Литература

- [1] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. — М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. — Новосибирск: Наука, 2008.
- [3] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 1, № 11. С. 2052–2063.
- [4] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. — Новосибирск: Наука, 2009.

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ
КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА БАЗЕ СИНГУЛЯРНОЙ
СРЕЗКИ ОПЕРАТОРА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ**

Пененко А.В.¹

e-mail: aleks@ommgp.sssc.ru

Рассмотрим модель процесса теплопроводности в слоистой среде с коэффициентом температуропроводности k из множества K кусочно-постоянных на $[0, 1]$ функций с разрывами в точках $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, и значениями $0 < k_{\min} \leq k_{(i+0.5)} \leq k_{\max} < \infty$ на интервалах постоянства (x_i, x_{i+1}) :

$$u_t = (k_{(i+0.5)}u_x)_x, \quad (x, t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0, 1), \quad i \in \{1, N\}, \quad (1)$$

$$k_{(1+0.5)}u_x(0+, t) = \alpha(t), \quad k_{(N+0.5)}u_x(1-, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

$$[u](x_i, t) = 0, \quad [ku_x](x_i, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i \in \{2, N\}, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4)$$

$$u(0+, t) = f(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Для модели (1) - (5) определим при заданных k, α оператор прямой задачи:

$$A : \begin{cases} K \rightarrow C[0, 1] \\ k \mapsto u(0+, t; \alpha, k) \end{cases} .$$

Требуется решить **обратную задачу**: известны α, f , найти k из операторного уравнения

$$A(k) = f.$$

Для модели (1)-(5) из множества функций чувствительности, вычисляемых посредством сопряженных уравнений [1], построен интегральный оператор чувствительности, связывающий разницу коэффициентов дифференциальной модели теплопроводности с разницей следов функции состояния модели на границе области:

¹Работа поддержана программами фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и № 1.3 Отделения математических наук РАН.

Теорема. Для любых $k, \bar{k}, k_* \in K$, $f = A(k_*)$, $\alpha \in C_0^1[0, 1]$ верны соотношения [3]:

$$A(k) - f = \mathcal{L}[k_*, k](k - k_*) = \mathcal{L}[k, k_*)(k - k_*), \quad A'(k) = \mathcal{L}[k, k], \quad (6)$$

$$\|V[k, \cdot]^* U[\bar{k}, \cdot] \alpha\|_{L_2((0,1) \times (0,1))} \leq \frac{\|\alpha\|}{k_{min}^2}, \quad (7)$$

где $\mathcal{L}[k_*, k]$ - оператор чувствительности, $A'(k)$ - производная Фреше оператора A , $V[k, \cdot]^* U[\bar{k}, \cdot] \alpha$ - ядро оператора чувствительности.

Так как оператор чувствительности является компактным (7), то для определения k_* из (6) требуется применить регуляризацию. В качестве таковой была избрана регуляризация посредством сингулярной срезки (см. например [2]) и принципа невязки Морозова. За основу был взят алгоритм Ньютоновского типа:

1. Пусть $\Lambda := 1$ и задано некоторое вспомогательное \hat{k} .
2. Задается начальное приближение: $k_1 := \hat{k}$.
3. Приближение k_{j+1} выбирается посредством итерации Красносельского и решения линеаризованного уравнения

$$k_{j+1} := \gamma k_j + (1 - \gamma) \tilde{k}_{j+1}, \quad \gamma \in [0, 1],$$

$$\mathcal{L}_1^\Lambda [k_j, \hat{k}] (\tilde{k}_{j+1} - \hat{k}) = P_1^\Lambda [k_j, \hat{k}] (f - A(\hat{k})),$$

где $\mathcal{L}_1^\Lambda [k_*, \hat{k}]$ - оператор, полученный из усеченного разложения Шмидта (сингулярного разложения в случае конечномерных аппроксимаций) для $\mathcal{L} [k_*, \hat{k}]$, $P_1^\Lambda [k, \hat{k}]$ - проектор на Λ первых левых сингулярных векторов.

4. Если $\|f - A(k_{j+1})\| < \delta f$, где δf - некоторая оценка сверху для $\|f - A(k_*)\|$, то процесс завершается. Если $\|k_{j+1} - k_j\| > \epsilon$, то осуществляется переход к 3.
5. Уточняется вспомогательный коэффициент: $\hat{k} := k_\infty$. Если \hat{k} изменилось, то осуществляется переход к 2.

6. После стабилизации процесса (2)-(5), если сингулярное число $s_{\Lambda+1} [\hat{k}, \hat{k}] > s_{\min}$, то $\Lambda := \Lambda + 1$ и осуществляется переход к 2.

Для проверки эффективности алгоритма в рамках одного из численных экспериментов, к модельной пластине, состоящей из слоев с различной теплопроводностью, прикладывался поток тепла. Прямым моделированием находилась температура на поверхности. Восстановление производилось по "данным наблюдений" с различным стандартным отклонением δ от вычисленных точных значений. Результат представлен на рис. 1.

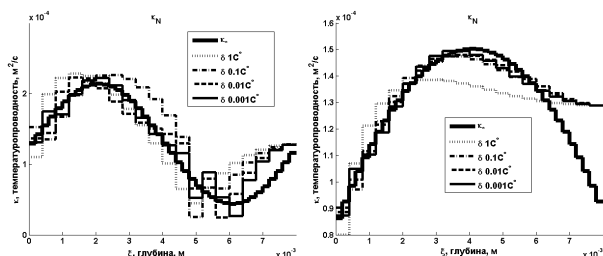


Рис. 1: Результаты восстановления коэффициента теплопроводности k_* при различных стандартных отклонениях δ данных измерений температуры на поверхности для двух модельных пластин.

Литература

- [1] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометиздат, 1981. 352 с.
- [2] Kaltenbacher B. Some Newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. 1997. Т. 13, С. 729–753.
- [3] Пененко А.В. О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента / в сб. «Труды первой международной молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» Часть I» // Сибирские электронные математические известия. 2010. С. 178–198.

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Плужникова Е.А.¹

e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Результаты [1], [2] изучения накрывающих отображений метрических пространств находят приложения к задачам управления, в исследованиях функциональных, интегральных, дифференциальных уравнений. Для нахождения условий разрешимости нелинейных краевых задач дифференциальных уравнений в работе [3] рассмотрены накрывающие отображения в произведении метрических пространств. Здесь продолжены эти исследования и рассмотрены условия непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений в произведении метрических пространств. Полученные в работе результаты позволяют сформулировать утверждения о корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) . Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r > 0$ в пространстве X , аналогичное обозначение введем в Y (и других метрических пространствах, используемых ниже). Будем использовать следующее

Определение. [1, с. 151] Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если для любого $r > 0$ и любого $x \in X$ имеет место включение

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r).$$

В дальнейшем пространства X и Y будут являться декартовыми произведениями метрических пространств: $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$. Пусть в X_1 и X_2 заданы метрики ρ_{X_1} и ρ_{X_2} , в Y_1 и Y_2 — метрики ρ_{Y_1}

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-97503, аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (проект № 2.1.1/1131), федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009-2013 годы)» (проект № 14.740.11.0349)

и ρ_{Y_2} , соответственно. Определим метрику в пространстве $X_1 \times X_2$ равенством

$$\rho_{X_1 \times X_2} = \left\| (\rho_{X_1}, \rho_{X_2}) \right\|_{\mathbb{R}^2},$$

причем норму в пространстве \mathbb{R}^2 будем выбирать только такую, которая обладает свойствами:

$$\begin{aligned} & \forall (x_1, x_2), (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & \left\| (x_1, x_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} = \left\| (x_2, x_1) \right\|_{\mathbb{R}^2}; \\ & \begin{cases} x_1 \geq u_1 \geq 0 \\ x_2 \geq u_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left\| (x_1, x_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} \geq \left\| (u_1, u_2) \right\|_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогичную метрику

$$\rho_{Y_1 \times Y_2} = \left\| (\rho_{Y_1}, \rho_{Y_2}) \right\|'_{\mathbb{R}^2}$$

введем в пространстве $Y_1 \times Y_2$ и будем считать, что здесь норма $\| \cdot \|'_{\mathbb{R}^2}$ также удовлетворяет требованиям (1).

Пусть заданы отображения $F_i = (F_{1i}, F_{2i}) : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, $i = 1, 2, \dots$ и элемент $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in Y_1 \times Y_2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_{1i}(x_1, x_2) = y_1^0 \\ F_{2i}(x_1, x_2) = y_2^0 \end{cases} \quad (2)$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Предположим, что для некоторого элемента $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in X_1 \times X_2$ выполнено

$$F_i(x^0) = (F_{1i}(x_1^0, x_2^0), F_{2i}(x_1^0, x_2^0)) \rightarrow y^0 = (y_1^0, y_2^0).$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном i системы уравнений (2) и сходимости к x^0 последовательности ее решений. Рассматриваемую задачу можно трактовать как корректность некоторого операторного уравнения

$$F(x) = y^0,$$

если принять, что x^0 является его решением.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть пространства X_1 и X_2 являются полными. Пусть существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие неравенству $\alpha_1\alpha_2 > \beta_1\beta_2$ и такие, что для любого натурального i при всех $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ выполнены условия:

- a) отображение $F_{1i}(\cdot, x_2)$ является замкнутым и α_1 -накрывающим;
- b) отображение $F_{2i}(x_1, \cdot)$ является замкнутым и α_2 -накрывающим;
- c) отображение $F_{1i}(x_1, \cdot)$ является β_1 -липшицевым;
- d) отображение $F_{2i}(\cdot, x_2)$ является β_2 -липшицевым.

Тогда, начиная с некоторого номера, при каждом i существует такое решение $\xi_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}) \in X_1 \times X_2$ системы уравнений (2), что $\xi_i \rightarrow x^0$.

Литература

- [1] Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
- [2] Арутюнов А.В., Абаков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. № 5. С. 613–634.
- [3] Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Расулов Т.Х.
e-mail: rth@mail.ru

Исследованию существенного спектра непрерывных и дискретных операторов Шредингера посвящены многие работы (см., например, [1] и [2], соответственно). В работе [2] доказано, что существенный спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера состоит из объединения не более чем конечного числа отрезков даже в том случае, когда соответствующий двухчастичный дискретный оператор Шредингера имеет бесконечное число собственных значений.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор H , ассоциированный с системой трех частиц на решетке. Выделены двух- и трехчастичная ветви существенного спектра оператора H . Установлено, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трех отрезков. В работе [2] доказано, что рассматриваемый решетчатый оператор не имеет частей существенного и дискретного спектра правее трехчастичной ветви. В данном случае, в отличие от этого, показано появление двухчастичных ветвей по обе стороны трехчастичной ветви существенного спектра H , который играет важную роль при изучении конечности или бесконечности частей дискретного спектра, расположенных там, а также на лагунах существенного спектра.

Пусть $\mathbf{T}^\nu = (-\pi; \pi]^\nu$ – ν -мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbf{T}^ν , и $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^\nu)^2$.

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$, по формуле

$$H = H_0 - K_1 - K_2,$$

где операторы H_0 и K_1, K_2 определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p, q) = w(p, q) f(p, q),$$

$$(K_1 f)(p, q) = \int_{\mathbf{T}^\nu} K(q, s) f(p, s) ds,$$

$$(K_2 f)(p, q) = \int_{\mathbf{T}^\nu} K(p, s) f(s, q) ds.$$

Здесь

$$K(p, q) = \varphi_1(p)\varphi_1(q) - \varphi_2(p)\varphi_2(q),$$

$\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные линейно независимые функции на \mathbf{T}^ν , $w(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначная симметричная непрерывная функция на $(\mathbf{T}^\nu)^2$.

В этих предположениях оператор H является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Для формулировки основного результата вводим модель Фридрикса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, действующую в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ как

$$h(p) = h_0(p) - k,$$

где операторы $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$ и k определяются по правилам:

$$(h_0(p)f_1)(q) = w(p, q)f(q), \quad (kf)(q) = \int_{\mathbf{T}^\nu} K(q, s)f(s)ds.$$

Положим

$$m = \min_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w(p, q), \quad M = \max_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w(p, q),$$

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} \sigma_{\text{disc}}(h(p)), \quad \sigma_{\text{three}}(H) = [m; M],$$

где $\sigma_{\text{disc}}(h(p))$ – дискретный спектр оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$.

Следующая теорема описывает существенный спектр оператора H .

Теорема. *Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H)$. Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трех отрезков.*

Вводим новые подмножества существенного спектра оператора H .

Определение 1. Множества $\sigma_{\text{two}}(H)$ и $\sigma_{\text{three}}(H)$ называются, соответственно, двух- и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора H .

Отметим, что множество $\sigma_{\text{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем двух отрезков, которые расположены в обеих части множества $\sigma_{\text{three}}(H)$.

Литература

- [1] *Жислин Г.М.* Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц // Труды Моск. матем. об-ва. 1960. Т. 9, С. 81–120.
- [2] *Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I.* On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices // Math. Nachr. 2007. Vol. 280. № 7. Pp. 699–716.
- [3] *Расулов Т.Х.* Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // Изв. вузов. Матем. 2008. № 12. С. 59–69.

О ЧИСЛЕ И МЕСТОНАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Расулов Т.Х., Тошева Н.А.
e-mails: rth@mail.ru, nargiza_n@mail.ru

Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической физики и гидродинамики, сводятся к исследованию собственных значений обобщенной модели Фридрихса.

В настоящей работе рассматривается ограниченная самосопряженная обобщенная модель Фридрихса как одномерное возмущение операторов, рассмотренных в работах [1–3]. Найдены условия существования собственных значений исследуемого оператора.

Пусть $\mathbf{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbf{T}^3 , \mathbf{C} – одномерное комплексное пространство. Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$ и $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$.

Рассмотрим самосопряженную обобщенную модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действующую в \mathcal{H} как

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы определяются равенствами:

$$(h_{00}(p)f_0)_0 = w_1(p)f_0, \quad (h_{01}f_1)_0 = \int_{\mathbf{T}^3} v_1(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{10}f_0)_1(q) = v_1(q)f_0, \quad h_{11}(p) = h_{11}^0(p) - v,$$

$$(h_{11}^0(p)f_1)_1(q) = w_2(p, q)f_1(q), \quad (vf_1)_1(q) = v_2(q) \int_{\mathbf{T}^3} v_2(s)f_1(s)ds.$$

Здесь $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f_1 \in \mathcal{H}_1$, $w_1(\cdot)$, $v_{1,2}(\cdot)$, и $w_2(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначные аналитические функции на \mathbf{T}^3 и $(\mathbf{T}^3)^2$, соответственно.

Пользуясь известной теоремой Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга, можно показать,

что $\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q).$$

Далее, предположим, что функция $v(\cdot) = v_1(\cdot)v_2(\cdot)$ – нечетная на \mathbf{T}^3 , а функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_{\min}^{(i)}, q_{\min}^{(i)}) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $1 \leq i \leq n_1 < \infty$ и невырожденный максимум в точках $(p_{\max}^{(j)}, q_{\max}^{(j)}) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $1 \leq j \leq n_2 < \infty$, а также является четной по p и q (по отдельности) на \mathbf{T}^3 .

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярные в $\mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ функции

$$\Delta_1(p; z) = 1 - \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v_2^2(s) ds}{w_2(p, s) - z}, \quad \Delta_2(p; z) = w_1(p) - z - \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v_1^2(s) ds}{w_2(p, s) - z}.$$

Видно, что

$$\int_{\mathbf{T}^3} \frac{v_k^2(s) ds}{w_2(p, s) - m} > 0, \quad p \in \mathbf{T}^3, k = 1, 2$$

является конечным интегралом, где $m = \min_{p, q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q)$.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta_k(p_{\min}^{(i)}; m) = \lim_{p \rightarrow p_{\min}^{(i)}} \Delta_k(p; m), \quad k = 1, 2, \quad 1 \leq i \leq n < \infty,$$

и следовательно, функции $\Delta_{1,2}(\cdot; m)$ непрерывны на \mathbf{T}^3 .

Следующая теорема описывает множество собственных значений оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, лежащих левее m .

Теорема. 1. Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{1,2}(p; m) \geq 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее точки m .

2. Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{1,2}(p; m) < 0$, $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{1,2}(p; m) \geq 0$. Тогда существуют непустые открытые множества $G_{1,2} \subset \mathbf{T}^3$, $G_{1,2} \neq \mathbf{T}^3$ такие, что

2.1) при всех $p \in G_1 \cap G_2$ оператор $h(p)$ имеет два собственных значения, лежащих левее t ;

2.2) при всех $p \in G_1 \Delta G_2$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение, лежащее левее t ;

2.3) для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus (G_1 \cup G_2)$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее t .

3. Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{1,2}(p; t) < 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет два собственных значения, лежащих левее t .

Литература

- [1] *Расулов Т.Х.* О структуре существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 1. С. 78–86.
- [2] *Расулов Т.Х.* О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока // Теор. и матем. физика. 2007. Т. 152, вып. 3. С. 518–528.
- [3] *Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H.* On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics // J. Stat. Phys. 2007. Vol. 127, № 2. Pp. 191–220.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

Султанов О.А.¹

e-mail: osa-uf@rambler.ru

Рассматривается система двух нелинейных неавтономных уравнений на полуоси:

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x, y) + F(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x, y) + G(x, y, t), \quad (1)$$

$t > T_0$, которая предполагается гамильтоновой в главном члене асимптотики по времени, т.е. $F, G \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $x = 0, y = 0$ – положение равновесия (тривиальное решение) этой системы. Предполагается, что для предельной гамильтоновой системы (при $F \equiv 0, G \equiv 0$) это же решение $\{x = 0, y = 0\}$ является неподвижной точкой типа «центр» общего положения. Функции $F(x, y, t), G(x, y, t)$ предполагаются гладкими в окрестности положения равновесия и имеют следующую асимптотику²:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= t^{-\delta}[ax + by + \mathcal{O}(t^{-\nu}) + \mathcal{O}(r^2)], \quad t \rightarrow \infty, \\ G(x, y, t) &= t^{-\delta}[cx + dy + \mathcal{O}(t^{-\nu}) + \mathcal{O}(r^2)], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что в этих соотношениях $a, b, c, d = \text{const}$, $\delta, \nu = \text{const} > 0$.

Устойчивость по Ляпунову для неавтономных систем понимается в смысле [1, стр. 9]. Имеют место утверждения [2]:

Теорема 1. Пусть система дифференциальных уравнений (1) обладает свойством (2). Если коэффициенты системы удовлетворяют неравенству: $a + d < 0$, то существует значение $T > 0$ такое, что при всех $t > T$ положение равновесия $x = 0, y = 0$ является асимптотически устойчивым решением для системы (1).

Теорема 2. Пусть система дифференциальных уравнений (1) обладает свойством (2). Если коэффициенты системы удовлетворяют

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00186.

²Скорость убывания неавтономной части (возмущения) может быть иной, например, логарифмической. Для простоты здесь рассматривается степенное убывание с $\delta, \nu > 0$.

неравенству: $a + d > 0$, то существует значение $T > 0$ такое, что при всех $t > T$ положение равновесия $x = 0, y = 0$ является неустойчивым для системы (1).

Доказательство проводится путем построения функций Ляпунова.

Полученные результаты можно применять к нелинейным неавтономным уравнениям для исследования асимптотики их решений на бесконечности. Наиболее простой пример дает частный случай третьего уравнения Пенлеве. Уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = -t^{-1}\dot{x}$$

эквивалентно системе (1): $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1$, коэффициенты $a = b = c = 0, d = -1$. Положение равновесия $x = 0, y = 0$ соответствует неподвижной точке типа «центр» для предельной системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$. Устойчивость положения равновесия для полной системы вытекает из теоремы 1, поскольку $a + d = -1 < 0$.

Для других уравнений Пенлеве неподвижных точек обычно не существует. Вместо них рассматриваются специальные решения, которые выделяются структурой своей асимптотики на бесконечности [2]. Устойчивость таких решений доказывается с использованием теоремы 1. Рассмотрим, например, второе уравнение Пенлеве:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2u^3 - 2zu + \frac{2\alpha}{3} \quad (\alpha = \text{const}).$$

После замены переменных $t = 2z\sqrt{z}/3, u(z) = \sqrt{z} \cdot x(t)$ уравнение принимает вид:

$$\ddot{x} - 2x^3 + 2x = t^{-1}(\alpha - \dot{x}) + t^{-2}\frac{1}{9}x. \quad (3)$$

Для уравнения (3) существует асимптотическое разложение:

$$x_0(t) = \frac{\alpha}{2t} + \mathcal{O}(t^{-3}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Используя это решение путем сдвига переменных и перенормировки, уравнение (3) можно свести к системе типа (1) с гамильтонианом $H = (x^2 + y^2)/2 - x^4/8$ и с коэффициентами $a = b = c = 0, d =$

-1. Поскольку $a + d = -1 < 0$, то решение с асимптотикой $x_0(t)$ асимптотически устойчиво.

Более сложная ситуация возникает при исследовании растущих решений уравнений главного резонанса [3, 4]. Возникающие при этом неавтономные уравнения типа (1) имеют другую структуру в неавтономной добавке (2). Тем не менее в конкретных случаях возможно построение функций Ляпунова. Например, для уравнений типа главного резонанса

$$\frac{dR}{dt} = \sin \Psi, \quad R \left[\frac{d\Psi}{dt} - R^2 + \lambda t \right] = \mu \cdot \cos \psi \quad (\lambda > 0, \mu = \text{const})$$

существует решение с растущей амплитудой:

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad \Psi_0(t) = \pi - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} t^{-1/2} + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Его устойчивость доказывается методом Ляпунова в случае $\mu > 1/2$.

Другой пример дает система, возникающая в задаче о параметрическом авторезонансе

$$\frac{dR}{dt} = R \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dt} - R + \lambda t = \mu \cdot \cos \psi.$$

Растущее решение с асимптотикой

$$R_0(t) = \lambda t + \mu + \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad \Psi_0(t) = \pi + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty$$

будет устойчиво при $\mu \geq 3/2$.

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959 г.
- [2] Султанов О.А. Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфимский. мат. журнал. Т. 2, № 4. 2010. С. 88–97.
- [3] Калякин Л.А. Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. Т. 63, вып. 5. 2008. С. 3–72.
- [4] Калякин Л.А. Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности // Уфимский мат. журнал. Т. 1, № 2. 2009. С. 29–52.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ С НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКОЙ ПРИ НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Сурков П.Г.¹

e-mail: platon.surkov@gmail.com

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — непрерывные матричнозначные функции на \mathbb{R} .

При нахождении решения $x(\cdot, \varphi)$ на полуоси $(-\infty, -r)$, с помощью итерационной процедуры, требуется решать уравнения $U_{k+1}x_k = x_{k+1}$, $k \leq -1$. Здесь U_{k+1} ($k \in \mathbb{Z}$) — линейный вполне непрерывный оператор сдвига на запаздывание вдоль решения системы (1), действующий в пространстве $H = L_2([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\top(s)\varphi(s)ds$. Последние задачи являются некорректными. В настоящей работе для их решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [1] со стабилизирующим функционалом следующего вида $\Omega[x] = x^\top(0)Gx(0) + \int_{-r}^0 (x^\top(s)Q(s)x(s) + x'^\top(s)P(s)x'(s))ds$, $x \in H$, где $P(s)$, $Q(s)$, G , $s \in [-r, 0]$ — положительно определённые матрицы, отображения $Q: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $P: [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывны.

В работе [2] показано, что элемент $x_{k\alpha} = R_{k+1}(x_{k+1}, \alpha) \in H$, минимизирующий функционал $M^\alpha[x_{k+1}, x_k] = (U_{k+1}x_k - x_{k+1}, U_{k+1}x_k - x_{k+1}) + \alpha\Omega[x_k]$, $k \leq -1$, является компонентой решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть получена из более общей краевой задачи, приведённой в работе [3].

¹Работа поддержана Программой Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1014), Урало-Сибирским интеграционным проектом 09-С-1-1010 и Программой поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1).

2. Численный метод решения краевой задачи [2]. Систему дифференциальных уравнений заменяем следующей системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_k^{i+1} &= h_i y_k^i + x_k^i, & y_k^{i+1} &= h_i P^{-1}(\vartheta^i)(Q(\vartheta^i)x_k^i - P'(\vartheta^i)y_k^i) + \\ &+ \alpha^{-1} h_i P^{-1}(\vartheta^i)(\psi_k^i - z_k(\vartheta^i)) + y_k^i, \\ \psi_k^{i+1} &= h_i (B_k^{-1}(\vartheta^i)(B'_k(\vartheta^i) - A_k(\vartheta^i)B_k(\vartheta^i)))^\top \psi^i - \\ - h_i B_k^\top(\vartheta^i)\chi_k^i + \psi_k^i, & \chi_k^{i+1} &= h_i A_k(\vartheta^i)\chi_k^i + h_i B_k(\vartheta^i)x_k^i + \chi_k^i, \end{aligned} \quad (2)$$

$i = \overline{0, N-1}$, где N — число узлов, $h_i = \vartheta^{i+1} - \vartheta^i$ — шаг разбиения отрезка $[-r, 0]$, $A_k(\vartheta) = A(\vartheta + kr)$, $B_k(\vartheta) = B(\vartheta + kr)$, $k \in \mathbb{Z}$. Краевые условия для системы (2) примут вид:

$$\begin{aligned} y_k^0 &= 0, & \psi_k^0 + \alpha B_k^\top(0)(Gx_k^N + P_k(0)y_k^N) &= z_k(-r), \\ \psi_k^N &= B_k^\top(0)\chi_k^N, & x_k^N &= \chi_k^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагаем, что существуют два пограничных слоя около обоих концов отрезка $[-r, 0]$. Неравномерную сетку определим следующим образом. Отрезок $[-r, 0]$ разбиваем на три интервала $[-r, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$ и $[\tau_2, 0]$, затем первые два интервала разделяем на $N/4$ подынтервала, а третий — на $N/2$. Точки перехода τ_1 и τ_2 [4] определяются формулами $\tau_1 = -r + \alpha^{1/4}\sigma_1\beta^{-1} \ln N$, $\tau_2 = -\alpha^{1/4}\sigma_2\beta^{-1} \ln N$, где $\|P^{-1}B^\top(\vartheta)B(\vartheta)\| \geq \beta > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ — некоторые постоянные. Тогда, если π — шаг равномерной сетки, находим $\pi = 4(\tau_2 - \tau_1)/N$.

Таким образом, получаем соответствующие точки сетки

$$\vartheta^i = \begin{cases} -r - \alpha^{1/4}\sigma_1\beta^{-1} \ln(1 - (1 - N^{-1})4i/N), & i = 0, \dots, N/4, \\ \tau_1 + \pi(i - N/4), & i = N/4, \dots, N/2, \\ \alpha^{1/4}\sigma_2\beta^{-1} \ln(1 - (1 - N^{-1})2(N - i)/N), & i = N/2, \dots, N. \end{cases}$$

Численное решение краевой задачи (2), (3) находим согласно следующему алгоритму: 1) используя систему разностных уравнений (2), получаем линейные зависимости $x_k^N, y_k^N, \psi_k^N, \chi_k^N$ от $x_k^0, y_k^0, \psi_k^0, \chi_k^0$; 2) подставляя найденные линейные зависимости в краевые условия (3), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_k^0, y_k^0, \psi_k^0, \chi_k^0$; 3) находим численное решение полученной системы линейных алгебраических уравнений; 4) находим численное решение краевой задачи (2), (3).

3. Пример. Рассмотрим скалярное уравнение $x'(t) = tx(t) - \exp(t)x(t-1)$ с заданной начальной функцией $\varphi(\vartheta) = \exp(\vartheta/5)$, $\vartheta \in [-1, 0]$. Построим численное решение краевой задачи на отрезке $[-2, -1]$. Параметры системы: $n = 1$, $A(t) = t$, $B(t) = -\exp(t)$, $r = 1$. Полагаем $G = 1$, $P = 1$, $Q = 3$, $\beta = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$. Численное решение краевой задачи при $N = 64$ и $\alpha = 10^{-6}$ представлено на рис. 1.

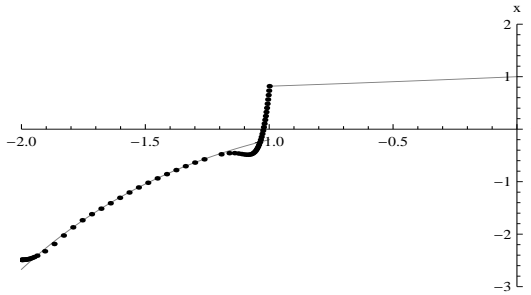


Рис. 1: численное решение краевой задачи

Литература

- [1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
- [2] Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с опережением // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 4. С. 467–485.
- [3] Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н. Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.
- [4] Lins T. Analysis of a Galerkin finite element method on a Bakhvalov-Shishkin mesh for a linear convection-diffusion problem // IMA. J. Numer. Anal. 2000. Vol. 20, № 4. Pp. 621–632.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРВОГО ТИПА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Торевбек Б.Т.

e-mail: turebekb85@mail.ru

Рассматривается нелокальная краевая задача первого типа для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного интегро-дифференцирования. Доказаны теоремы о единственности и существовании решений.

Пусть $\Omega = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ – единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ – его граница.

Пусть a_j – действительные числа, $0 < \delta_j < 1, j = 1, 2, \dots, N$. Будем считать, что все числа a_j – одного знака, т.е. при всех $j = 1, 2, \dots, N$ выполняются $a_j \leq 0$ или $a_j \geq 0$.

Рассмотрим в Ω следующую нелокальную задачу

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega \quad (1)$$

$$B_*^\alpha [u](x) - \sum_{i=1}^N a_i u(\delta_i x) = f(x), x \in \partial\Omega \quad (2)$$

$$u(0) = b \quad (3)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, b – некоторое заданное число, B_*^α – оператор дробного интегро-дифференцирования вида

$$B_*^\alpha = r^{\alpha_1} D_*^{\alpha_1} [r^{\alpha_2} D_*^{\alpha_2} \dots [r^{\alpha_m} D_*^{\alpha_m} \dots]],$$

введенный в работе [1]. Здесь D_*^α – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто.

Рассматриваемая задача является простейшим обобщением задачи Бицадзе–Самарского [2] на граничные операторы нецелого порядка. Заметим, что аналогичные задачи в случае $\alpha = 0$ изучались в работах [3, 4].

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, гармоническую в шаре Ω , для которой функция $B_*^\alpha [u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условиям (2), (3).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если $\sum_{i=1}^N a_j \leq 1$ и решение задачи существует, то оно единственно.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = -b \sum_{i=1}^N a_j.$$

Замечание. Отметим, что в случае $a_j = 0, j = 1, \dots, N$ задача А рассмотрена в [1] и условие разрешимости задачи имеет вид $\int_{\partial\Omega} f(x) ds_x = 0$.

Литература

- [1] Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т. Некоторые интегро-дифференциальные операторы в классе гармонических функций и их применения // Известия ЧНЦ РАН. Челябинск. 2010. № 1(47). С. 1–9.
- [2] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [3] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 534–539.
- [4] Пулатов А.К. Об одной задаче Бицадзе–Самарского // Дифференциальные уравнения. Минск. 1989. Т. 25. № 3. С. 537–540.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ТИПА
ЧАПЛЫГИНА**

Хаджи И.А.

e-mail: khadzi_irina@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(t)u_{xx} + u_{tt} - b^2K(t)u = f(x),$$

где $K(t) = \text{sgn } t \cdot |t|^n$, $n = \text{const} > 0$, $b = \text{const} > 0$, в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа, и следующую краевую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x, t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1}$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1]; \tag{2}$$

$$Lu(x, t) \equiv f(x, t), \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

$$u_t(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

где φ, ψ и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

В работах [1, 2] начато изучение обратных краевых задач для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Обратная задача (1) – (6) при $n = b = 0$ изучена в работе [3].

Теорема. *Если существует решение задачи (1) – (6), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}-q}}{p_k q} \omega_k^{-'}(-\alpha) \left[I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) + I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \right] +$$

$$+ \alpha^{-\frac{1}{2}} \omega_k^{-}(-\alpha) \left[I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k \alpha^q) + I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) J_{-\frac{1}{2q}-1}(p_k \alpha^q) \right] +$$

$$+\beta^{-\frac{1}{2}}\omega_k^+(\beta)\frac{2\sin\frac{\pi}{2q}}{\pi p_k\alpha^q}\neq 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_k^+(\beta) &= I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\frac{\pi p_k^{-\frac{1}{2q}}\beta^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2q}-1}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1-\frac{1}{2q})}{}_1F_2\left(\frac{1}{2q};1+\frac{1}{2q},1-\frac{1}{2q};\frac{(p_k\beta^q)^2}{4}\right)- \\ &- I_{-\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\frac{\pi p_k^{\frac{1}{2q}}\beta^{\frac{5}{2}}2^{-\frac{1}{2q}-2}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1+\frac{1}{2q})}{}_1F_2\left(\frac{1}{q};1+\frac{1}{q},1+\frac{1}{2q};\frac{(p_k\beta^q)^2}{4}\right); \\ \omega_k^-(\alpha) &= J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{\pi p_k^{-\frac{1}{2q}}\alpha^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2q}-1}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1-\frac{1}{2q})}{}_1F_2\left(\frac{1}{2q};1+\frac{1}{2q},1-\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right)- \\ &- J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{\pi p_k^{\frac{1}{2q}}\alpha^{\frac{5}{2}}2^{-\frac{1}{2q}-2}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1+\frac{1}{2q})}{}_1F_2\left(\frac{1}{q};1+\frac{1}{q},1+\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right); \\ \omega_k^{-'}(-\alpha) &= -\frac{\pi p_k^{-\frac{1}{2q}}2^{\frac{1}{2q}-1}\alpha^{\frac{1}{2}}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1-\frac{1}{2q})}\left[p_k\alpha^q q J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q) + J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\right]\times \\ &\times {}_1F_2\left(\frac{1}{2q};1+\frac{1}{2q},1-\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right) + \frac{\pi p_k^{\frac{1}{2q}}2^{-\frac{1}{2q}-2}\alpha^{\frac{3}{2}}}{q\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1+\frac{1}{2q})}\times \\ &\times \left[p_k\alpha^q q J_{-\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q) + 2J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\right]{}_1F_2\left(\frac{1}{q};1+\frac{1}{q},1+\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right) + \\ &+ J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{\pi p_k^{2-\frac{1}{2q}}2^{\frac{1}{2q}}\alpha^{2q+\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1-\frac{1}{2q})}\frac{q}{4q^2-1}{}_1F_2\left(1+\frac{1}{2q};2+\frac{1}{2q},-\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right)- \\ &- J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{\pi p_k^{2+\frac{1}{2q}}2^{-\frac{1}{2q}-1}\alpha^{2q+\frac{3}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1+\frac{1}{2q})}\frac{q}{(q+1)(2q+1)}\times \\ &\times {}_1F_2\left(1+\frac{1}{q};2+\frac{1}{q},2+\frac{1}{2q};-\frac{(p_k\alpha^q)^2}{4}\right) \end{aligned}$$

и $p_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2/q}$; $q = \frac{n+2}{2}$; $J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)$, $J_{-\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)$, $J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)$, $J_{-\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)$ – функции Бесселя I рода; $I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)$, $I_{-\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)$ – модифицированные функции Бесселя; ${}_1F_2(\cdot)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Если при некоторых α , β и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (7), т.е. $\Delta_p(\alpha, \beta) = 0$, то однородная задача (1) – (6) (где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, t) = u_p(t) \sin \pi p x, \quad f_p(x) = f_p \sin \pi p x,$$

$$u_p(t) = \begin{cases} -\frac{f_p}{\sqrt{\alpha\beta\delta_p(\alpha,\beta)}} \left[\sqrt{\alpha t \omega_p^+(\beta)} \delta_p(\alpha, t) - \sqrt{\beta t \omega_p^-(-\alpha)} A_p(t, \beta) - \sqrt{\alpha\beta} \omega_p^+(t) \delta_p(\alpha, \beta) \right], & t > 0, \\ \frac{f_p}{\sqrt{\alpha\beta\delta_p(\alpha,\beta)}} \left[\sqrt{-\alpha t \omega_p^+(\beta)} B_p(\alpha, -t) - \sqrt{-\beta t \omega_p^-(-\alpha)} \delta_p(-t, \beta) + \sqrt{\alpha\beta} \omega_p^+(t) \delta_p(\alpha, \beta) \right], & t < 0, \end{cases}$$

где f_p – не равная нулю произвольная постоянная и

$$\delta_p(\alpha, \beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q);$$

$$\delta_p(\alpha, t) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) I_{-\frac{1}{2q}}(p_k t^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q);$$

$$\delta_p(-t, \beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-t)^q) I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k (-t)^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q);$$

$$A_p(t, \beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) - I_{\frac{1}{2q}}(p_k t^q) I_{-\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q);$$

$$B_p(\alpha, -t) = J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-t)^q) - J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) J_{-\frac{1}{2q}}(p_k (-t)^q).$$

Литература

- [1] *Сабитов К.Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. 2009. Т. 27, № 5. С. 593–596.
- [2] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. № 6. С. 901–912.
- [3] *Сабитов К.Б., Хаджи И.А.* Краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия вузов. Математика. 2010 (принята в печать).

ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ В МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

Цветков И.Н.¹

e-mail: itsvetkov@eastwind.ru

На примере двумерной дискретной нелинейной стохастической системы Эно в диапазоне каскада бифуркаций удвоения периода изучается поведение случайных состояний при увеличении интенсивности стохастических возмущений, когда стохастический 2^n -цикл переходит в 2^{n-1} -цикл. Описываемое качественное изменение фазового портрета системы – уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума – будем называть *обратной стохастической бифуркацией (ОСБ)*.

Система Эно

Рассмотрим стохастическую систему Эно в следующем виде

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5y_t + \varepsilon\xi_{1,t}; \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon\xi_{2,t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi_{1,t}, \xi_{2,t}$ – последовательности независимых гауссовых случайных величин, $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0; E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1; E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$, а ε – интенсивность шумов.

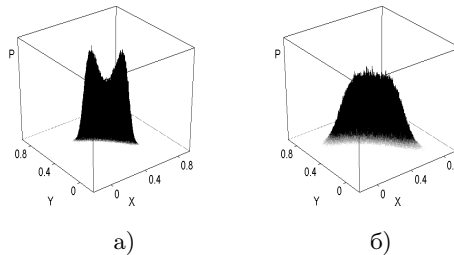


Рис. 1: эмпирическая плотность вероятности циклов системы Эно для $\mu = 1.72$ а) при $\varepsilon = 0.01$, б) при $\varepsilon = 0.03$

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 09-01-00026, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202

Эмпирический анализ

Эмпирический подход к изучению ОСБ опирается на численное моделирование случайной траектории. Для анализа ОСБ используется плотность вероятности состояний систем $p(X)$, $X = (x, y)$. Рассмотрим ОСБ перехода стохастического 2-цикла в 1-цикл. При малом значении ε график $p(X)$ имеет два четких всплеска (рис. 1а). При некотором значении ε происходит бифуркация – качественное изменение формы графика – она становится унимодальной (рис. 1б). Для 2^k -цикла бифуркационное значение интенсивности шума, при котором происходит качественное изменение графика плотности $p(X)$ – переход от 2^k -модальной формы к 2^{k-1} -модальной – будем называть *критическим значением шума первой ОСБ* и обозначать ε_1^* .

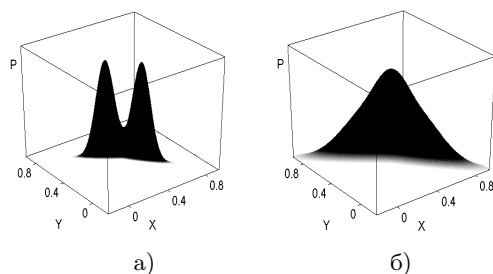


Рис. 2: теоретическая аппроксимация плотности вероятности циклов системы Эно для $\mu = 1.72$ а) при $\varepsilon = 0.01$, б) при $\varepsilon = 0.03$

Теоретический анализ

Плотность распределения, полученная методом численного моделирования, имеет достаточно большую шумовую составляющую, особенно при небольшом числе итераций стохастической системы или большой кратности цикла. Рассмотрим построение аппроксимации плотности распределения с использованием значений теоретической функций чувствительности [1], т.е. без учета эмпирических данных. Пусть в детерминированной системе (1) при $\varepsilon = 0$ наблюдается цикл Γ кратностью 2^k с состояниями $\bar{X}_j (j = 1, \dots, 2^k)$, тогда в качестве аппроксимации плотности возьмем следующую функцию

$\widehat{p}(X)$:

$$\widehat{p}(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (X - \bar{X}_i)^\top W_i^{-1} (X - \bar{X}_i)\right), \quad (2)$$

где W_i – матрицы чувствительности в точках цикла.

На рис. 2 представлены функции $\widehat{p}(X)$ для системы Эно при $\mu = 1.72$ и различной интенсивности внешнего шума. Как видно из сравнения рис. 1 и 2, численные эксперименты демонстрируют качественное соответствие между эмпирической плотностью $p(X)$ и ее теоретическим аналогом $\widehat{p}(X)$.

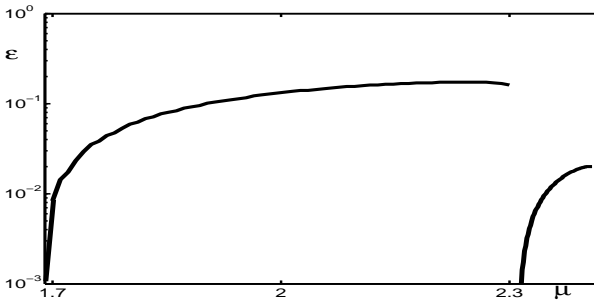


Рис. 3: иллюстрация критических значений интенсивности случайных возмущений для первых обратных бифуркаций системы Эно

На рис. 3 приведены графики функций $\varepsilon_1^*(\mu)$. Следует отметить резкое уменьшение критической интенсивности для первой ОСБ (ε_1^*) при переходе от одного интервала структурной устойчивости к другому.

Литература

- [1] *I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov.* Sensitivity analysis of the stochastic discrete systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. № 17. Pp. 501–515.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Чистяков П.А.¹

e-mail: p_a_v_e_l@isnet.ru

1. Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть X – равномерно выпуклое вещественное пространство, а Y – произвольное банахово вещественное пространство; заданы линейные непрерывные операторы $A \in L(X, Y)$, $B \in L(X, Y^*)$, $D(A) = D(B) = X$. Для значений функционала $f \in Y^*$ на элементе $y \in Y$ будем использовать обозначение $\langle y, f \rangle$.

Определение 1. Оператор A называется B -симметричным, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$.

Определение 2. Оператор A называется B -положительным (не строго), если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$, причём $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$.

Рассматривается задача решения операторного уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

с B -симметричным и B -положительным оператором. Предполагается, что множество его решений $S = \{x \in X \mid Ax = y\} \neq \emptyset$. Тогда среди этих решений можно выбрать нормальное решение \hat{x} наименьшей нормы. А именно, существует единственный элемент $\hat{x} \in S$ такой, что $\|\hat{x}\| = \min_{x \in S} \|x\|$.

2. Описание итерационного алгоритма в случае точных данных

- (1) Если $y = 0$, тогда $\hat{x} = 0$, работа алгоритма закончена.
- (2) Пусть $y \neq 0$. Выбираем произвольно параметры $p \in (1, +\infty)$, $C \in (0, 1)$. Начальное приближение $x_0 = 0$. Положим $q := p/(p-1)$.

Для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ повторяем следующий шаг:

- (3) Положим $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$. Если $R_n = 0$, то работа алгоритма закончена, в противном случае выбираем параметры согласно следующим правилам:

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00053.

- А. Для $n = 0$ примем $\mu_0 := Cq^{p-1}R_0^{p-2}\|B^*A\|^{1-p}$;
 Б. Для $n \geq 1$ возьмем

$$\lambda_n := \min \left\{ \rho_{X^*}(1), \frac{C R_n}{2^q G_q \|x_n\| \|B^*A\|} \right\},$$

здесь G_q – характеристическая константа из [4]. За счет равномерной гладкости пространства X^* можно выбрать параметр $\tau_n \in (0, 1]$ так, чтобы $\rho_{X^*}(\tau_n) = \tau_n \lambda_n$. Положим $\mu_n := \tau_n \|x_n\|^{p-1} R_n^{-1}$.

Определим следующее приближение по правилу

$$x_{n+1} := J_{*q}[J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y)],$$

где $J_p : X \rightarrow X^*$ – дуальное отображение пространства X степени p , определяемое соотношениями $\|J_p(x)\| = \|x\|^{p-1}$, $\langle x, J_p(x) \rangle = \|x\|^p$, а $J_{*q} : X^* \rightarrow X^{**} = X$ – определяемое аналогично дуальное отображение сопряженного пространства степени q , являющееся обратным к J_p .

Теорема 1. *Алгоритм с точными данными либо останавливается после конечного числа итераций на решении \hat{x} уравнения (1), либо определяет бесконечную последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся по норме пространства X к решению \hat{x} .*

3. Описание итерационного алгоритма в случае приближенных данных

Пусть вместо точных данных даны приближенные данные $y_k \in Y$, $A_l \in L(X, Y)$, $B_l \in L(X, Y^*)$, такие что A_l является B_l -симметричным и B_l -положительным. Предположим, что известны монотонно убывающие оценки погрешностей: $\|y_k - y\| \leq \delta_k$, $\|A_l - A\| \leq \eta_l$, $\|B_l - B\| \leq \xi_l$ ($\delta_{k+1} < \delta_k$, $\eta_{l+1} < \eta_l$, $\xi_{l+1} < \xi_l$). Пусть $y_k \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{R}(A_l)$, и $\mathcal{R}(B_l^* A_l) \subseteq \mathcal{R}(B^* A)$ при всех l и k . Пусть

также известна априорная оценка сверху нормы точного решения \hat{x} , т.е. известно $R > 0$ такое, что $\|\hat{x}\| \leq R$. Положим $S := \sup_l \|A_l\|$,

$T := \sup_l \|B_l\|$.

Алгоритм

(1) Выберем произвольно параметры $p \in (1, +\infty)$, $C, D \in (0, 1)$, а также начальное приближение $x_0 = 0$. Положим $q := p/(p-1)$, $k_{-1} := 0$, $l_{-1} := 0$. Для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ повторяем следующий шаг

(2) Если для всех $k > k_{n-1}$ и $l > l_{n-1}$ выполнено неравенство

$$D\langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x}) \rangle < T(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k),$$

то работа алгоритма закончена. Иначе найдем такие $k_n > k_{n-1}$ и $l_n > l_{n-1}$, что $D\tilde{R}_n \geq T(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k)$, где $\tilde{R}_n := \langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x}) \rangle$. Введем также обозначение $R_n := \|B_{l_n}^*(A_{l_n} x_n - y_{k_n})\|$. При $n = 0$ положим $\mu_0 := \frac{Cq^{p-1}(1-D)^{p-1}\|B^*y\|^{2p-2}}{(TS)^{p-1}R_0^p}$. При $n \geq 1$ пусть

$$\lambda_n := \min \left\{ \rho_{X^*}(1), \frac{C(1-D)\tilde{R}_n}{2qG_q\|x_n\|R_n} \right\},$$

выберем τ_n из условия $\rho_{X^*}(\tau_n) = \tau_n \lambda_n$ и зададим шаг итерационного метода по правилу $\mu_n := \tau_n \|x_n\|^{p-1} R_n^{-1}$. Следующее приближение определим по правилу $x_{n+1} := J_{*q}[J_p(x_n) - \mu_n B_{l_n}^*(A_{l_n} x_n - y_{k_n})]$.

Теорема 2. Алгоритм с приближенными данными либо останавливается после конечного числа итераций на решении \hat{x} уравнения (1), либо определяет бесконечную последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся по норме пространства X к решению \hat{x} .

Литература

- [1] Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind // Am. J. Math. 1951. № 73. Pp. 615–624.
- [2] Schöpfer F., Louis A. K., Schuster T. Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces // Inverse Problems. 2006. № 22. Pp. 311–329.
- [3] Schöpfer F, Schuster T. Acceleration of the generalized Landweber method in Banach spaces via sequential subspace optimization // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2009. Т. 17. № 1. Pp. 91–99.
- [4] Xu Z-B, Roach G.F. Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 1991. № 157. Pp. 189–210.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИНФОРМАТИВНОСТИ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧЕ НАВИГАЦИИ

Барабощкин Н.Д.¹
e-mail: starteleport@yandex.ru

В автономно управляемом движении информация о положении движущегося объекта поступает от инерциальной навигационной системы. Со временем накапливается ошибка в определении местоположения, которая может стать весьма большой. Для устранения накопленных ошибок используются дополнительные методы навигации, например навигация с использованием геофизических полей.

Данный метод основан на сравнении полученных измерений геофизического поля F (поля высот, гравитационного, магнитного) с эталонной информацией, хранящейся в памяти бортового вычислительного устройства. Важным его преимуществом является автономность и устойчивость к искусственным помехам. Целесообразно задавать такую траекторию движения автономного аппарата, которая позволила бы с наименьшей погрешностью (ошибкой привязки) определить его местоположение.

В [1] вводится модуль информативности, который позволяет оценить ошибку привязки (определения положения) при навигации по геофизическому полю, а также при выборе траектории движения предлагается оптимизировать не сам модуль, а значение его производной в нуле.

Введем функционал $\Phi = \Phi(\Gamma)$, характеризующий оптимальность траектории Γ . В качестве Φ может использоваться:

- значение производной модуля информативности в нуле (см. [1, гл. 4]): $\Phi(\Gamma) = J'(0, F, \Gamma)$;
- среднее значение модуля информативности в окрестности нуля:

$$\Phi(\Gamma) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} J(t, F, \Gamma) dt, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть в области Q заданы точки x^0, x^1 . Требуется построить гладкую траекторию

¹Работа выполнялась в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 09-П-1-1013), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00445).

$$\Gamma = \{x = x(s) : 0 \leq s \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad x(1) = x^1\},$$

минимизирующую значение $\Phi(\Gamma)$.

Предлагаемый алгоритм основан на внесении случайных гладких поправок в начальную траекторию и оценке значения функционала Φ . Начальная траектория Γ_0 — прямая или ломаная, соединяющая x^0 и x^1 .

В качестве поправок используются B -сплайны порядка 2. Общий вид поправочного сплайна: $P(s) = \sum_{i=0}^{3(K_s-1)} C_i B_{2,i}(s)$, где $B_{2,i}(s)$ определяются в соответствии с [2], а на коэффициенты C_i вводятся ограничения $a \leq C_i \leq b$. Такие ограничения для C_i обусловлены необходимостью сохранения конечных точек неподвижными. Возможны два способа внесения поправки: вдоль нормали к траектории и по координатно.

При покоординатном способе поправка вносится в j -ю координату ($j = 1, 2$) с набором коэффициентов $C_{i,j}$:

$$x_j^1(s) = x_j^0(s) + \sum_{i=0}^{3(K_s-1)} C_{i,j} B_{2,i}(s).$$

Обозначим через $n(x(s))$ единичный нормальный вектор к вектор-функции x в точке s . Определим метод внесения поправок вдоль нормали к траектории следующим образом:

$$x^1(s) = x^0(s) + n(x^0(s)) \sum_{i=0}^{3(K_s-1)} C_i B_{2,i}(s).$$

Один шаг работы алгоритма состоит из множества итераций, на каждой из которых: 1) случайным образом формируется новый набор коэффициентов C_i или $C_{i,j}$; 2) вводится поправка к исходной траектории $\Gamma^1 = \Gamma^0 + \Delta\Gamma$; 3) вычисляется значение $\Phi(\Gamma^1)$.

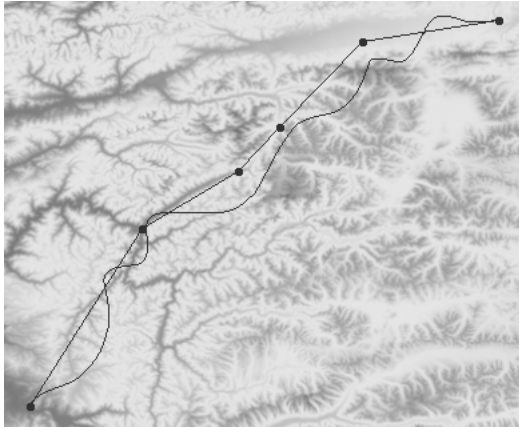
Итерацию, на которой была построена траектория с наименьшим среди всех предыдущих значением $\Phi(\Gamma)$, будем называть *промежуточной*. Соответствующая траектория также называется промежуточной.

Последняя полученная на данном шаге промежуточная траектория — *результат шага*.

Процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены либо оба следующих условия:

— количество итераций больше минимально требуемого $iter_{\min}$;
— найдена хотя бы одна промежуточная траектория,
либо пока число итераций не превысит $iter_{\max}$.

Выбор $iter_{\min}$ и $iter_{\max}$ производится, исходя из допустимого времени работы алгоритма.



На рисунке представлен результат работы алгоритма, показаны две траектории: начальная — ломаная линия и результат шага.

Алгоритм реализован в виде Windows-приложения, поддерживающего параллельные вычисления, и апробирован на большом количестве примеров. При создании программы использовался объектно-ориентированный подход, который позволяет сравнительно легко вводить новые критерии оптимизации и алгоритмы, не обязательно основанные на случайном поиске, изменять формы представления траектории и поля, тем самым, расширяя класс решаемых задач.

Литература

- [1] В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
- [2] В. И. Бердышев, Ю. Н. Субботин. Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979.

РАЗЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Дубосарский Г.А.
e-mail: glebUU@mail.ru

Известна формула (см. [2]), представляющая любую гармоническую функцию в кольце как сумму двух функций, гармонических внутри большого и вне малого круга соответственно. Другим методом в [3] было получено разложение гармонической функции в проколотовой окрестности. В работе [1] было дано еще одно доказательство этой формулы, обобщая которое, мы распространим формулу на случай многосвязных областей.

Точнее, мы находим разложение гармонической функции в $(n + 1)$ -связной области G комплексной плоскости \mathbb{C} ,

$$G = \tilde{G} \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k,$$

где \tilde{G} – односвязная область пространства \mathbb{C} , F_k – непустые компактные не разрезающие плоскость множества, и выполняется

$$F_k \subset \tilde{G}, F_k \cap F_l = \emptyset, k \neq l.$$

Теорема. Пусть $u(z)$ – гармоническая однозначная функция в области G и в каждом множестве $F_k, k = \overline{1, n}$ произвольно выбрана одна точка z_k . Тогда функция $u(z)$ в области G однозначным образом представима в виде:

$$u(z) = u_0(z) + \sum_{k=1}^n u_k(z) + \sum_{k=1}^n C_k \ln |z - z_k|,$$

где $u_0(z)$ – гармоническая функция в области \tilde{G} , $u_k(z)$ – гармонические функции в $\mathbb{C} \setminus F_k$, $u_k(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} u_k(z) = 0, k = \overline{1, n}$.

Для доказательства основной теоремы нам потребовалось сделать несколько шагов, оформленных ниже в виде утверждений. Будем считать, что кривые, встречающиеся в дальнейших формулировках утверждений, являются замкнутыми, жордановыми, спрямляемыми. Пусть D_L – область, ограниченная такой кривой L .

Утверждение 1. Пусть в области G произвольно выбрана точка z_0 . Тогда в области G существует система кривых $\{L_k\}_{k=0}^n$, удовлетворяющая требованиям:

1. $D_{L_k} \supset F_k$ и $\overline{D}_{L_k} \cap \overline{D}_{L_s} = \emptyset, k \neq l$,
2. $D_{L_0} \supset \bigcup_{k=1}^n \overline{D}_k$,
3. $z_0 \in D_{L_0} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{D}_k$.

Утверждение 2. Пусть $u(z)$ – гармоническая функция в области G . Для однозначности функции $\tilde{u}(z)$, гармонически сопряженной к функции $u(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой кривой L , лежащей в области G , выполнялось равенство:

$$\oint_L \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = 0. \quad (1)$$

Утверждение 3. Пусть $u(z)$ – гармоническая функция в области G . Тогда эквивалентны следующие условия:

1. Для любой кривой L , содержащейся в области G , выполнено равенство (1).

2. Существует конечный набор кривых $\{L_k\}_{k=1}^n$ в области G с требованиями:

- a) $D_{L_k} \supset F_k$ и $\overline{D}_{L_k} \cap \overline{D}_{L_l} = \emptyset, k \neq l$,
- b) для каждого $k = \overline{1, n}$ выполнено равенство:

$$\oint_{L_k} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = 0.$$

Следующее утверждение, по сути, является обобщением теоремы Лорана о представлении аналитической функции в кольце.

Утверждение 4. Пусть $f(z)$ – аналитическая в области G функция. Тогда $f(z)$ однозначным образом представима в виде:

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^n f_k(z),$$

где $f_0(z)$ – аналитическая функция в области \tilde{G} , $f_k(z)$ – аналитические функции в $\mathbb{C} \setminus F_k, f_k(\infty) = 0, k = \overline{1, n}$.

Теорема выводится из предыдущих утверждений.

В частном случае, когда область G является обобщенным кольцом, то есть такова, что $\widetilde{G} = B(z_0, r_0)$ и $F_k = \overline{B}(z_k, r_k)$, мы можем получить два полезных следствия.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция, определенная в обобщенном кольце G . Тогда в нем $f(z)$ однозначным образом представима в виде:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^0 (z - z_0)^m + \sum_{k=1}^n \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^k (z - z_k)^m,$$

где $a_m^k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$.

Следствие 2. Пусть гармоническая функция $u(z)$ определена в обобщенном кольце G . Представим для каждого $k = \overline{0, n}$ точку z комплексной плоскости в полярных координатах r_k и φ_k с полюсом в точке z_k в виде $z = z_k + r_k e^{i\varphi}$. Тогда функция $u(z)$ в G однозначно представима в виде:

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^0 \cos m\varphi_0 + b_m^0 \sin m\varphi_0) r_0^m + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{m=-\infty}^{-1} (a_m^k \cos m\varphi_k + b_m^k \sin m\varphi_k) r_k^m + \sum_{k=1}^n c_k \ln r_k,$$

где a_m^k, b_m^k, c_k – вещественные числа.

Литература

- [1] Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 145–174.
- [2] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматлит, 1962.
- [3] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. — М.: Физматлит, 1967. Т. 2.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В ОБЛАСТИ С КРУГОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

Дубосарский Г.А.
e-mail: *glebUU@mail.ru*

В статьях [2] и [3] на основе периодических всплесков были построены базисы пространств гармонических и аналитических функций в круге и в центрально-симметричном кольце. В данной работе мы распространим идеи, заложенные в этих работах, на случай обобщенного кольца K , получающегося из единичного круга $B(0, 1)$ путем удаления из него m содержащихся в нем непересекающихся замкнутых кругов $\overline{B}(z_l, r_l)$.

За основу для построения базиса всплесков возьмем базисы аналитических и гармонических в круге $\Gamma B(0, 1)$ функций из статьи [3]:

$$\begin{aligned}
 A_{j,k}(z) &= 2^{1-j/2} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} z^\nu \widehat{\theta} \left(\frac{\nu}{2^j} \right) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j}, \\
 w_{j,k}(z) &= 2^{(3-j)/2} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} |z|^\nu \widehat{\theta} \left(\frac{\nu}{2^j} \right) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j} \cos \nu x, \\
 \widetilde{w}_{j,k}(z) &= 2^{(3-j)/2} \sum_{\nu \in \mathbb{N}} |z|^\nu \widehat{\theta} \left(\frac{\nu}{2^j} \right) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j} \sin \nu x, \\
 j &\in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1, z = |z|e^{ix},
 \end{aligned}$$

где неотрицательная функция $\widehat{\theta}(\omega)$ определяется соотношением $\widehat{\theta}^2(\omega) = \widehat{\varphi}^2(\frac{\omega}{2}) - \widehat{\varphi}^2(\omega)$; $\widehat{\varphi}(\omega)$, как в работе [1], неотрицательная четная функция, которая удовлетворяет требованиям $\widehat{\varphi}(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \leq \frac{1-\varepsilon}{2}$, $\widehat{\varphi}(t) \equiv 0$ при $|\omega| \geq \frac{1+\varepsilon}{2}$, $\widehat{\varphi}^2(\omega - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ нечетна при $|\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, где $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{3}$.

Мы будем формулировать утверждения для аналитических функций. Для гармонических функций можно получить подобные результаты.

Введем класс аналитических функций $H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$. Обозначим через ρ минимальное расстояние между окружностями $C(0, 1), C(z_1, r_1), C(z_2, r_2), \dots, C(z_m, r_m)$. Условимся об обозначении

ях

$$a_0(f) = \sup_{1-\rho < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$a_l(f) = \sup_{r_l < r < r_l + \rho} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_l + re^{ix})|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, l = \overline{1, m}.$$

При $1 < p < \infty$ будем считать, что функция $f(z) \in H_p(K)$, если

$$\|f(z)\|_p = \max_{l=\overline{0, m}} (a_l(f)) < \infty. \tag{1}$$

При этом условии функция $f(z)$ имеет граничные значения, определяемые по некасательным путям. При $p = \infty$ на $f(z) \in H_\infty(K)$ наложим условие непрерывности в \overline{K} . В класс $H_1(K)$ выделим функции, удовлетворяющие при $p = 1$ условию (1), для которых

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{ix}) - f(e^{ix})| dx \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 0,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(z_l + re^{ix}) - f(z_l + r_l e^{ix})| dx \xrightarrow{r \rightarrow r_l+0} 0, l = \overline{1, m}.$$

Разобьем натуральный ряд на «пачки» числами $2^{j-1}, j > 0$:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{n = 2^{j-1} + k : k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1\}$$

и двухиндексную последовательность $\{A_{j,k}(z) : j > 0, k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1\}$ линейно упорядочим в последовательность $\{A_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$, полагая $A_{j,k}(z) = A_n(z), n = 2^{j-1} + k$.

Введем следующую систему аналитических функций:

$$\{1, A_n(z), A_n \left(\frac{r_l}{z - z_l} \right) : l = \overline{1, m}, n \in \mathbb{N}\}. \tag{2}$$

Используя теорему 2 из статьи [3] и утверждение 4 из [4], мы можем получить следующую теорему.

Теорема. Система функций (2) является базисом каждого из пространств $H_p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$. Коэффициенты разложения

$$f(z) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \beta_{n,l} A_n \left(\frac{r_l}{z - z_l} \right)$$

функции $f(z) \in H_p(K)$ вычисляются по формулам:

$$\alpha_0 = (f(z), 1)_0, \alpha_n = (f(z), A_n(z))_0, \\ \beta_{n,l} = \left(f(z), A_n \left(\frac{r_l}{z - z_l} \right) \right)_l,$$

где

$$(f, g)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \overline{g(e^{ix})} dx, \\ (f, g)_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_l + r_l e^{ix}) \overline{g(z_l + r_l e^{ix})} dx, l = \overline{1, m}.$$

Литература

- [1] *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constructive approx. 1993. Vol. 9. № 1. Pp. 319–325.
- [2] *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 145–174.
- [3] *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной дыркой / в сб. Труды Международной летней математической Школы С.Б. Стечкина по теории функций. С. 128–144. — Алексин, 2007.
- [4] *Дубосарский Г.А.* Разложение гармонической функции в много-связной области / см. настоящие Тезисы, с. 125–127.

**ВАРИАНТ ЗАДАЧИ ТУРАНА
ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Ефимов А.В.

e-mail: anothar@ya.ru

Пусть D — замкнутое центрально симметрическое тело в \mathbb{R}^m , $G_m(D)$ — класс функций $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- 1) $f \in C(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 1$;
- 2) $\text{supp } f \in D$;
- 3) преобразование Фурье функции f неотрицательно:

$$\widehat{f}(t) = \int_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) e^{i tx} dx \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Задача Турана (в ее классическом варианте) заключается в отыскании величины

$$AE(D) = \sup_{f \in G_m(D)} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx = (2\pi)^m \sup_{f \in G_m(D)} \widehat{f}(0). \quad (1)$$

Аналог задачи (1) для тригонометрических рядов в \mathbb{R}^1 был предложен П. Тураном в 1970 г. В 1972 г. С.Б. Стечкин [7] решил ее для $p = \frac{2\pi}{N}$, $N = 2, 3, \dots$; окончательное решение этой задачи получили В.И. Иванов, Д.В. Горбачев, Ю.Д. Рудомазина (см. работу [6] и приведенную там библиографию). В 1997 г. задача для многомерного куба была решена Н.Н. Андреевым [1]; он также дал оценки (1) при $n = 3, 4$ для октаэдра $D = \{t \in T^m : |t_1| + |t_2| + \dots + |t_m| \leq h\}$. В 2000 г. Д.В. Горбачев решил задачу (1) для m -мерных евклидовых шаров. В 2001 г. В.В. Арестов и Е.Е. Бердышева решили задачу Турана для правильного шестиугольника на плоскости [2], а в 2002 г. для класса многогранников, которыми можно покрыть пространство \mathbb{R}^m с помощью сдвигов [3]. К настоящему времени задаче Турана посвящено довольно большое число работ; см. статью С. Ревеса [9] и приведенную там библиографию.

Мы будем рассматривать следующую модифицированную задачу Турана. В качестве носителя D возьмем m -мерный евклидов шар

$\mathbb{B} = \mathbb{B}_r^m(0)$ радиуса $r = 1$ центром в начале координат пространства \mathbb{R}^m и будем искать точную верхнюю грань

$$\Phi_m(p) = \sup_{f \in G_m(\mathbb{B})} \frac{\int_{|x|=p} f(x) dx}{\int_{|x|=p} dx} \quad (2)$$

среднего значения функции $f \in G_m(\mathbb{B})$ по сфере $\mathbb{S}(p)$, $0 < p < 1$.

В 1945 г. Боас и Кас [8] нашли величину (2) в одномерном случае. В 2003 г. В.В. Арестов, Е.Е. Бердышева и Х. Беренс рассмотрели [4] периодический аналог последней задачи и получили двусторонние оценки для значения задачи.

Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. *При всех $0 < p < 1$ и $m \geq 2$ в задаче (2) можно ограничиться радиальными функциями.*

В силу этой теоремы задача (2) сводится к одномерной.

Теорема 2. *Для нечетных чисел m при всех $p \in (0, 1)$ в задаче (2) существует экстремальная (радиальная) функция.*

Теорема 2 для одномерного случая ($m = 1$) содержится в [8]. Следующая теорема существенно сужает класс функций, на котором следует искать экстремум в (2).

Теорема 3. *При нечетном m для всех значений p , $0 < p < 1$, в задаче (2) существует экстремальная (радиальная) функция, представимая в виде самосвертки $\varphi_m * \varphi_m$ функции φ_m , обладающей свойствами:*

- 1) $\varphi_m \in L_2(\mathbb{R}^m)$,
- 2) φ_m – радиальная функция,
- 3) $\text{supp } \varphi_m \in \mathbb{B}_{\frac{1}{2}}(0)$,
- 4) $\int_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi_m^2(x) dx = 1$.

Следующая теорема дает точные значения (2) при $\frac{1}{2} \leq p < 1$ для $m = 3$.

Теорема 4. *Пусть $m = 3$, $\frac{1}{2} \leq p < 1$. Тогда $\Phi_3(p) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)$.*

Литература

- [1] *Андреев Н.Н.* Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1997. № 1. С. 29–32.
- [2] *Арестов В.В., Бердышева Е.Е.* Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Труды ИММ УрО РАН, т. 7, № 1. 2001. С. 21–29.
- [3] *Арестов В.В., Бердышева Е.Е.* The Turan problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. Pp. 381–388.
- [4] *Arestov V.V., Berdysheva E.E., Berens H.* On Pointwise Turan's Problem for Positive Definite Functions // East J. Approx. 2003. Vol. 9, № 1. Pp. 31–42.
- [5] *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки, т. 69, № 3. 2001. С. 346–352.
- [6] *Иванов В.И.* О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки, т. 80, № 6. 2006. С. 934–939.
- [7] *Стечкин С.Б.* Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae 1972, Vol. 23 (3-4). Pp. 289–291.
- [8] *Boas R. P., Jr. and M. Kac.* Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. Pp. 189–206.
- [9] *Revesz S.G.* Turan's extremal problem on locally compact abelian groups // <http://arxiv.org>, arXiv:0904.1824v1.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА \mathbb{R}^3

Кошелев А.А.

e-mail: aakoshelev@gmail.com

Пусть $C = C(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (вещественнозначных) функций, непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^m , с равномерной нормой; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ – пространство измеримых, существенно ограниченных функций на \mathbb{R}^m ; $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$, – пространство измеримых функций f на \mathbb{R}^m с суммируемой степенью $|f|^p$. На достаточно гладких функциях f , к примеру, дважды дифференцируемых, оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

На классы менее гладких функций оператор Лапласа (и его степени) распространяются по схеме Соболева (см., например, [1]).

Обозначим через $W_p^{2n} = W_p^{2n}(\mathbb{R}^m)$ при натуральном $n \geq 2$ и вещественных p , $1 \leq p < \infty$, пространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. В случае $p = \infty$ через $W_\infty^{2n} = W_\infty^{2n}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in C(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В пространстве W_p^{2n} ($1 \leq p \leq \infty$) выделим (выпуклый центрально симметричный) класс функций $Q_p^{2n} = \{f \in W_p^{2n} : \|\Delta^n f\|_p \leq 1\}$.

Пусть \mathcal{L}_p есть множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq p < \infty$ и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Обозначим через $\mathcal{L}_p(N)$ множество операторов из \mathcal{L}_p , нормы которых (в \mathcal{L}_p) ограничены положительным числом N .

При натуральных $0 < k < n$ и вещественном $N > 0$ положим

$$E(N; k, n) = E(N) = E(N)_p = \inf\{U(T)_p : \|T\|_{\mathcal{L}_p} \leq N\}, \quad (1)$$

$$U(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - Tf\|_p : f \in Q_p^{2n}\}, \quad T \in \mathcal{L}_p(N). \quad (2)$$

Величину (1) называют наилучшим приближением k -й степени Δ^k оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классе функций Q_p^{2n} . Эта задача является частным случаем задачи Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [1].

Для неотрицательного числа δ положим

$$\omega(\delta) = \omega(\delta)_p = \sup\{\|\Delta^k f\|_p : f \in Q_p^{2n}, \|f\|_p \leq \delta\}; \quad (3)$$

эту функцию переменного $\delta \geq 0$ называют модулем непрерывности оператора Δ^k (на классе Q_p^{2n}). Нетрудно убедиться (см. [3, § 4, формула (4.6)]), что для модуля непрерывности (3) справедливо равенство

$$\omega(\delta)_p = \mathcal{K}_p \delta^{\frac{n-k}{n}}, \quad (4)$$

где $\mathcal{K}_p = \omega(1)_p$ есть точная (наименьшая) константа в неравенстве Колмогорова

$$\|\Delta^k f\|_p \leq \mathcal{K}_p \cdot \|f\|_p^{\frac{n-k}{n}} \cdot \|\Delta^n f\|_p^{\frac{k}{n}}. \quad (5)$$

Для оператора $T \in \mathcal{L}_p$ и числа $\delta \geq 0$ полагаем

$$U_\delta(T) = U_\delta(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p : f \in Q_p^{2n}, \eta \in L_p(\mathbb{R}^m), \|f - \eta\|_p \leq \delta\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p)_p = \inf\{U_\delta(T)_p : T \in \mathcal{L}_p\} \quad (6)$$

есть величина ошибки оптимального восстановления k -й степени оператора Лапласа Δ^k с помощью множества линейных методов восстановления на элементах класса Q_p^{2n} , заданных с известной погрешностью δ .

Историю исследования задачи Стечкина и родственных экстремальных задач можно найти в работе [3]. В работе [4] О. Кунчев изучал неравенство Колмогорова (5) в случае $m \geq 2$, $p = \infty$ и получил следующую оценку сверху:

$$\mathcal{K}_\infty \leq 2\sqrt{\frac{m}{(m+2)}}. \quad (7)$$

В работе [5] для величин (1), (3) и (6) в случае $m = 2$, $p = \infty$ автор получил близкие двусторонние оценки. Оценка сверху наилучшей константы \mathcal{K}_∞ была улучшена по сравнению с результатом (7).

Как частный случай общих результатов С. Б. Стечкина справедливо следующее утверждение (см., например, [3]).

Теорема 1. Для величин (1), (3), (6) справедливы равенства

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) \leq \inf\{E(N) + N\delta : N \geq 0\}, \quad \delta > 0;$$

$$E(N) \geq \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta \geq 0\}, \quad N > 0.$$

Из теоремы 1 и равенства (4) следуют соотношения

$$\mathcal{K}_p \delta^{\frac{n-k}{n}} \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) \leq \inf\{E(N) + N\delta : N \geq 0\}, \quad (8)$$

$$E(N) \geq \frac{k}{n} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\frac{n-k}{k}} \mathcal{K}_p^{\frac{n}{k}} N^{-\frac{n-k}{k}}. \quad (9)$$

Теорема 2. В случае $k = 1, n = 2, 1 \leq p < \infty, m = 3$ для величин (1), (3), (6) и наилучшей константы в (5) имеют место неравенства

$$1 \leq \mathcal{K}_p \leq 2\sqrt{0.5995};$$

$$\delta^{1/2} \leq \omega(\delta)_p \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p)_p \leq 2\sqrt{0.5995} \delta^{1/2}, \quad \delta > 0;$$

$$\frac{1}{4N} \leq E(N)_p \leq \frac{0.5995}{N}, \quad N > 0.$$

Литература

- [1] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.
- [2] Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
- [3] Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
- [4] Kounchev O. Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality // in «Multivariate Approximation», W. Haussmann et al. (eds.). Pp. 123–132. Akademie Verlag, 1997.
- [5] Koshelev A. Best approximation of the Laplace operator on the plane by linear bounded operators // East journal on approximations, 2008. Vol. 14. № 2. Pp. 29–40.

МЕТОД ДЕЛЬСАРТА В ЗАДАЧЕ О КОНТАКТНОМ ЧИСЛЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Куклин Н.А.¹

e-mail: nickkuklin@gmail.com

Экстремальные задачи для непрерывных на отрезке функций, представимых рядами по ортогональным многочленам, с ограничениями на значения функции и коэффициенты разложения, возникают в различных разделах математики. В докладе будет рассмотрена задача, возникающая из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа евклидова пространства \mathbb{R}^3 .

В общем случае, при оценке контактного числа евклидова пространства \mathbb{R}^m , эта задача является задачей бесконечномерного линейного программирования

$$\begin{cases} w_m = \min \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right), \\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k P_k^{(m)}(t) \leq 0, \quad t \in \left[-1, \frac{1}{2} \right], \\ f_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, \infty; \end{cases} \quad (1)$$

здесь $\{P_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ — система ультрасферических многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\phi(t) = (1 - t^2)^{\frac{m-3}{2}}$ и нормированных условием $P_k^{(m)}(1) = 1$.

В работе [1] найдено точное значение величины w_m при $m = 4$, а в работе [2] — при $5 \leq m \leq 146$, $148 \leq m \leq 156$, $m = 161$ (кроме случаев $m = 8$, $m = 24$, которые были известны ранее). В этих работах во всех перечисленных случаях найдена экстремальная функция, которая оказалась алгебраическим многочленом (конечной степени). Случай $m = 3$ не был изучен.

При $m = 3$ ранее автором были получены для величины w_3 близкие оценки $13.15822571531152 \leq w_3 \leq 13.15822571531179$. Помимо того, в работе [3] доказан следующий факт.

¹Исследования выполнены при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00213.

Утверждение. Экстремальная функция задачи (1) при $m = 3$ не может быть многочленом степени ниже, чем 15.

Доказательство этого утверждения основывается на тех же методах, что и в работах [1, 2].

На данный момент этот результат удалось усилить, используя алгоритм нахождения базиса Грёбнера системы алгебраических уравнений. Кроме того, удалось доказать, что экстремальная функция при $m = 3$ также является многочленом. Для доказательства применялись отличные от [1–3] методы (без отыскания экстремальной функции). В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема. Экстремальная функция задачи (1) при $m = 3$ является алгебраическим многочленом степени выше, чем 26.

Литература

- [1] Арестов В.В., Бабенко А.Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
- [2] Штром Д.В. Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Труды ИММ УрО РАН, 2002, Т. 8, № 2. С. 162–189.
- [3] Куклин Н.А. Аналитический метод в задаче о контактном числе трехмерного пространства // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2010. С. 159–164.

ПРИМЕРЫ И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА N-РАЗДЕЛЬНЫХ КМА

Плещёва Е.А.¹

В данной работе рассматриваются ортонормированные системы вида $\{2^{nj/2}\psi^1(2^{nj}x - k), 2^{(nj+1)/2}\psi^2(2^{nj+1}x - k), \dots, \dots, 2^{(nj+(n-1))/2}\psi^n(2^{nj+(n-1)}x - k) : k, j \in \mathbb{Z}\}$, введенные нами ранее в [1], образующие ОНБ в $L^2(\mathbb{R})$. Для построения таких функций было введено понятие n -раздельного кратномасштабного анализа

Определение. Назовем n -раздельным кратномасштабным анализом (n -КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$ кортеж n последовательностей $(V_i^s)_{i \in \mathbb{Z}, s=1,2,\dots,n}$ замкнутых в $L^2(\mathbb{R})$ подпространств

$$\dots \subset V_0^s \subset \dots \subset V_{n-s}^n \subset V_{n-s+1}^1 \subset \dots \subset V_{2n-s}^n \subset \dots \quad s = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

удовлетворяющий следующим условиям:

- а) $\bigcup_j V_{nj}^1 = \bigcup_j V_{nj}^2 = \dots = \bigcup_j V_{nj}^n = L^2(\mathbb{R})$;
- б) $\bigcap_j V_{nj}^1 = \bigcap_j V_{nj}^2 = \dots = \bigcap_j V_{nj}^n = \{0\}$;
- в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}, s = 1, 2, \dots, n$;
- г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \quad \forall j \in \mathbb{Z}, s = 1, 2, \dots, n$;
- д) в каждом пространстве V_0^s ($s = 1, 2, \dots, n$) существует ортонормированный базис вида $\{\varphi^s(x + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Для выполнения (1) при любом $s = 1, 2, \dots, n$ должны иметь место соотношения

$$\varphi^s(x) \stackrel{L^2(\mathbb{R})}{=} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} \varphi^{p_s}(2x - k), \quad \widehat{\varphi}^s(\omega) = m^{s,p_s}(\omega/2) \widehat{\varphi}^{p_s}(\omega/2),$$

где для всех $s = 1, 2, \dots, n$ $p_s = 1 + \text{Выч.}s \pmod n$, $h_k^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, а функции $m^{s,p_s} \in L^2[0, 1)$ введены по правилу

$$m^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} e^{2\pi i k \omega}. \tag{2}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00014).

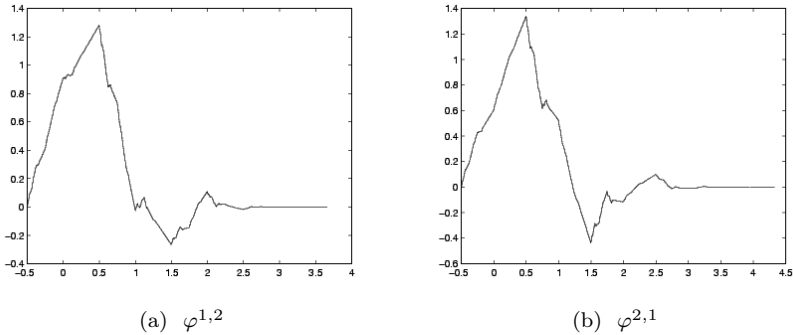


Рис. 1: масштабирующие функции

Обозначим

$$m^s(\omega) = m^{s,p_s}(2^{n-1}\omega) m^{p_s,p_{s+1}}(2^{n-2}\omega) \dots m^{p_{s+n-2},p_{s+n-1}}(\omega). \quad (3)$$

Для ортогональности $\{\varphi^s(x+k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $s = 1, 2, \dots, n$ нужно

$$\left| m^s(\omega) \right|^2 + \left| m^s\left(\omega + \frac{1}{2^n}\right) \right|^2 + \dots + \left| m^s\left(\omega + \frac{2^n - 1}{2^n}\right) \right|^2 = 1; \quad (4)$$

$$\left| m^{s,p_s}(\omega) \right|^2 + \left| m^{s,p_s}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1. \quad (5)$$

Базисы всплесков выражаются через масштабирующие функции следующим образом: $\psi^s(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-\nu}^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$, где h_{ν}^{s,p_s} — коэффициенты из (2). Используя пирамидальные схемы

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_k^{s,j-1} & \longrightarrow & c_k^{p_s,j} & \longrightarrow & c_k^{p_{s+1},j+1} & & \dots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & \\
 d_k^{s,j-1} & & d_k^{p_s,j} & & & &
 \end{array}$$

можно построить, например, 2-раздельный КМА на основе двух функций, используя в качестве m^{s,p_s} классические маски.

Пример. В качестве примера масштабирующих функций и всплесков на основе классических рассмотрим функции, которые получены на базе двух различных всплесков Добеши, полагая $m^{1,2}(0) =$

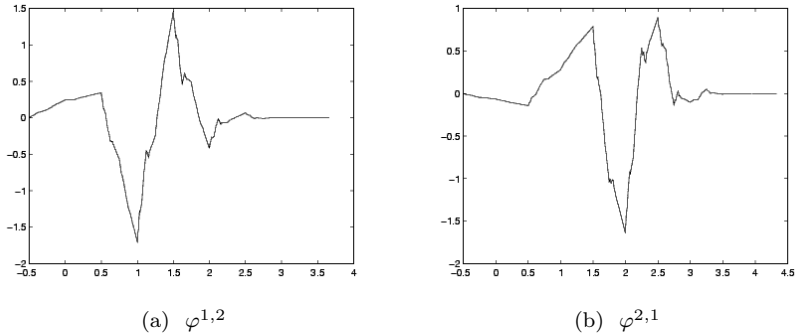


Рис. 2: всплески

$(1 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}$; $m^{1,2}(1) = (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}$; $m^{1,2}(2) = (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2}$; $m^{1,2}(3) = (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2}$; $m^{2,1}(0) = 0.33267055$; $m^{2,1}(1) = 0.80689151$; $m^{2,1}(2) = 0.45987750$; $m^{2,1}(3) = -0.13501102$; $m^{2,1}(4) = -0.08544127$; $m^{2,1}(5) = 0.03522629$. Графики этих функций изображены на рисунках 1 и 2.

Используя [2, теорему 1.15] и [1, теорему 2], получим следующее

Утверждение. Пусть функция $\varphi^s(x)$ такова, что $\widehat{\varphi}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} m(\frac{\omega}{2^{nj}}) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $|m^s(\omega)| \geq C_0 > 0$ при $|\omega| \leq \frac{1}{2 \cdot 2^n}$. Тогда пространства V_{nj}^s обеспечивают порядок сходимости 1, т.е. $E(f, V_{nj}^s) := \min\{\|f - s\| : s \in V_{nj}^s\} \leq \text{const}_{V_{nj}^s} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}/nj$.

Литература

[1] Плещева Е.А. Построение и свойства n -раздельного КМА // Тезисы 41-й всероссийской молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 1–5 февраля 2010 года. С. 172–178.

[2] de Boor C., de Vore R.A., Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of $\mathbb{L}_2(\mathbf{R}^d)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 341, № 2. Pp.787–806.

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ПРОСТЕЙШИМ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Родионов В.И., Родионова Н.В.

e-mail: rodionov@uni.udm.ru

Пусть точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ таковы, что векторы $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ попарно ортогональны (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$), а числа $p_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, таковы, что $p_{ij} = p_{ji}$. В семействе всех квадратичных полиномов вида $P(\xi) = (A\xi, \xi) + (b, \xi) + c$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, существует ровно один полином такой, что: 1) матрица A симметрична; 2) $P(\frac{1}{2}x_r + \frac{1}{2}x_s) = p_{rs}$ для всех $r, s = 0, 1, \dots, n$. Согласно [1], он представим в виде

$$P(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) + \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(\xi) + c, \quad (1)$$

где $a_{ij} \doteq 2(p_{ij} - p_{i0} - p_{0j} + p_{00})$, $b_k \doteq -p_{kk} + 4p_{k0} - 3p_{00}$, $c \doteq p_{00}$, $\varphi_k(\xi) \doteq (\xi - x_0, \Delta x_k) / \|\Delta x_k\|^2$, $i, j, k = 1, \dots, n$.

Мы применяем формулу (1) при численном решении задач математической физики, а в рамках настоящей работы при $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ в прямоугольнике $(t, x) \in \Omega \doteq [0, 2\tau] \times [0, 1]$ изучается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \phi(x), \quad u(t, 0) = \alpha(t), \quad u(t, 1) = \beta(t). \quad (2)$$

(Предполагаются выполненными естественные условия: $\alpha(0) = \phi(0)$, $\beta(0) = \phi(1)$.) Пусть $h \doteq \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j \doteq jh$, $j = 0, 1, \dots, 2N$.

Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ порождает в плоскости (t, x) четыре серии треугольников (каждый треугольник содержит ровно шесть точек сетки: три из них расположены в вершинах треугольника, а еще три — в серединах сторон); для любого $k = 1, \dots, N$ полагаем

$$\begin{aligned} \Omega_k^1 &\doteq \{(t, x) : t \geq 0, x \geq h_{2k-2}, x + ht/\tau \leq h_{2k}\}, \\ \Omega_k^2 &\doteq \{(t, x) : t \leq 2\tau, x \leq h_{2k}, x + ht/\tau \geq h_{2k}\}, \\ \Omega_k^3 &\doteq \{(t, x) : t \geq 0, x \leq h_{2k}, x - ht/\tau \geq h_{2k-2}\}, \\ \Omega_k^4 &\doteq \{(t, x) : t \leq 2\tau, x \geq h_{2k-2}, x - ht/\tau \leq h_{2k-2}\}. \end{aligned}$$

Массив u_j^i , $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, называется допустимым, если $u_j^0 \doteq \phi(h_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2N$; $u_0^i \doteq \alpha(\tau_i)$, $u_{2N}^i \doteq \beta(\tau_i)$, $i = 0, 1, 2$. Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ и допустимый массив (u_j^i) порождают четыре серии ($\ell = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, N$) полиномов $P_k^\ell : \Omega_k^\ell \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих явное представление вида (1), а в соответствии с [1] на множестве Ω определены две непрерывные функции (квадратичные сплайны)

$$u_L(t, x) \doteq \begin{cases} P_k^1(t, x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega_k^1, \\ P_k^2(t, x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega_k^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_R(t, x) \doteq \begin{cases} P_k^3(t, x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega_k^3, \\ P_k^4(t, x), & \text{если } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega_k^4. \end{cases} \quad (4)$$

Зафиксируем $\lambda \in [0, 1]$. Функции (3) и (4) порождают на прямоугольнике Ω квадратичный сплайн $u_\lambda \doteq \lambda u_L + (1 - \lambda) u_R$. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_j^i , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$. Это означает, что сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N - 2$. Обозначим его через $\Sigma_{N,\lambda}(\Omega)$. В качестве приближенного решения исходной задачи (2) принимаем сплайн, реализующий задачу

$$J \doteq J(u) \doteq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \Sigma_{N,\lambda}(\Omega). \quad (5)$$

В работе показано, что задача (5) имеет единственное решение, и для него получено точное представление. Элементы u_j^i , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 2N - 1$, допустимого массива (u_j^i) , порождающего данное решение, суть линейные функции от конечных разностей

$$u_{2k-2}^0 - 2u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0, \quad k = 1, \dots, N,$$

функции ϕ и от конечных разностей

$$u_0^2 - u_0^0, \quad u_0^2 - 2u_0^1 + u_0^0, \quad u_{2N}^2 - u_{2N}^0, \quad u_{2N}^2 - 2u_{2N}^1 + u_{2N}^0$$

функций α и β соответственно. Для коэффициентов всех функций получены точные формулы через значения (в некоторых специальных точках) многочленов Чебышева 1-го и 2-го рода.

Для минимума J^* функционала (5) также получена точная формула: она представляет собой положительно определенную квадратичную форму от указанных конечных разностей. Коэффициенты формы также вычислимы через значения многочленов Чебышева.

Последнее обстоятельство позволяет провести исследование на качество аппроксимации при разных N и λ . При фиксированном $\lambda \in [0, 1]$ определена последовательность $\{J_N\}$, где J_N — это значение J^* , вычисленное при заданном $N \in \mathbb{N}$. При выполнении определенных условий на функции α , β и ϕ имеем $J_N \rightarrow 0$, поэтому полученная формула позволяет при заданной точности вычислений $\varepsilon > 0$ решить неравенство $\sqrt{J_N} < \varepsilon$ (например, программным образом) и получить априори достаточное количество узлов сетки $\{\tau_i, h_j\}$.

Пусть, например, $\gamma = 1$, $\tau = 0.1$, функции α, β, ϕ — линейные, причем старшие коэффициенты функций α и β — одинаковы и равны 0.9. Если $\varepsilon = 10^{-3}$, а $\lambda = 0.5$, то достаточно взять $N = 14$.

При фиксированном $N \in \mathbb{N}$ определена аналитическая функция $\lambda \rightarrow J(\lambda)$, где $J(\lambda)$ — это значение J^* , вычисленное при заданном $\lambda \in [0, 1]$. В условиях предыдущего примера полагаем $N = 14$, а λ — любое. В результате вычислений имеем значения

$$J(0.0) = 0,0028867, \quad J(0.1) = 0,0025362, \quad J(0.2) = 0,0020595,$$

$$J(0.3) = 0,0014592, \quad J(0.4) = 0,0007530, \quad J(0.5) = 0,0000009.$$

(Функция $\lambda \rightarrow J(\lambda)$ имеет ровно два интервала монотонности, причем $J(1-\lambda) = J(\lambda)$.) Мы обнаруживаем ярко выраженный минимум функции, расположенный в точке $\lambda = 0.5$, и «желанный» эффект: значение $\lambda = 0.5$ имеет безусловный приоритет.

У нас есть основание полагать, что процедура конструирования сплайнов посредством формулы (1) и их «усреднение» с помощью параметра $\lambda = 0.5$ применимы не только для функционала из задачи (5), но и для функционала $J(u) \doteq \|Du\|_{L_2(\Omega)}^2$, порожденного произвольным дифференциальным оператором \bar{D} . Вычислительные эксперименты подтверждают это наблюдение, однако, в отличие от задачи (5), мы не имеем возможности точных вычислений: минимизация функционала осуществляется методом градиентного спуска.

Литература

- [1] Родионов В.И. Об аппроксимации функций многих переменных специальными сплайнами / В сб. «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования», Труды I-й международной конференции. Т. 1. С. 164–168. — Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2009.

О ТОЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА БРАТЬЕВ МАРКОВЫХ

Симонов И.Е.

e-mail: isimonov@k66.ru

В различных разделах математики возникает задача о соотношении между нормами производной многочлена и самого многочлена на отрезке. В докладе будет рассмотрена задача о точной константе в неравенстве

$$\|P^{(n-1)}\|_p \leq C(p, n)\|P\|_1, \quad 0 \leq p \leq \infty,$$

для алгебраических многочленов степени точно n .

В общем случае задача формулируется так. Рассматривается множество \mathcal{P}_n алгебраических многочленов степени n с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом, равным единице:

$$P(t) = (t - z_1)(t - z_2) \dots (t - z_n); \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Требуется найти наименьшую константу в неравенстве

$$\|P^{(k)}\|_p \leq C(n, k, p, q)\|P\|_q, \quad P \in \mathcal{P}_n. \quad (1)$$

Здесь

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|;$$

$$\|f\|_0 = \exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |f(t)| dt \right).$$

Многочлен $P_* \in \mathcal{P}_n$, на котором неравенство (1) обращается в равенство, называется экстремальным.

В работе [1] доказано, что

$$\|P'\|_\infty \leq \|T'_n\|_\infty \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

В работе [2] доказано, что

$$\|P^{(k)}\|_\infty \leq \|T_n^{(k)}\|_\infty \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

В работе [3] доказано, что

$$\|P'\|_p \leq \|T_n'\|_p \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Все три неравенства точные, и экстремальным является многочлен Чебышева первого рода:

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

В работах [4], [5] найдена точная константа в неравенстве (1) при $q = 0$, $0 \leq p \leq \infty$. В частности, доказано [4], что имеет место точное неравенство

$$\|P^{(k)}\|_0 \leq \frac{n! e^k}{(n-k)!} \|P\|_0, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad (2)$$

и экстремальным в (2) является лишь многочлен $P(t) = t^n$. Более полный обзор результатов, относящихся к неравенству (1), см. в [5].

В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема. Пусть $p \geq 0$, $n \geq 2$. Если $p+1 \leq 2n^2$, то

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\|P_n^{(n-1)}\|_p}{\|P_n\|_1} = \frac{\|U_n^{(n-1)}\|_p}{\|U_n\|_1}.$$

Если же $p+1 > 2n^2$, то

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\|P_n^{(n-1)}\|_p}{\|P_n\|_1} = \frac{\|Z_{n,c}^{(n-1)}\|_p}{\|Z_{n,c}\|_1}.$$

Здесь

$$Z_{n,c}(t) = U_n(t) - cU_{n-1}(t) + \frac{c^2}{4}U_{n-2}(t)$$

есть многочлен Золотарева,

$$U_\nu(t) = 2^{-\nu} \frac{\sin[(\nu+1) \arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \nu \geq 0,$$

— многочлен Чебышева 2-го рода, а параметр $c \in (0, 1)$ определяется из уравнения

$$\frac{p+1}{p} [(n+c)^p - (n-c)^p] (1+c^2) - 2c [(n+c)^{p+1} + (n-c)^{p+1}] = 0.$$

Литература

- [1] *Марков А.А.* Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Зап. Импер. Акад. наук. 1889. № 62. С. 1–24.
- [2] *Марков В.А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб, 1892.
- [3] *Vojanov B.D.* An extension of Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. № 35. Pp. 181–190.
- [4] *Глазырина П.Ю.* Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 59–65.
- [5] *Глазырина П.Ю.* Неравенство Маркова–Никольского в пространствах L_q , L_0 на отрезке // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 60–71.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ ЛОКАЛЬНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.¹
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ положим $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ ($h > 0$, $\alpha \in [0, 1)$, $j \in \mathbb{Z}$) и пусть $\Delta_h^k f(x) = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} C_k^s f(x+sh)$ — конечная разность порядка $k \in \mathbb{Z}_+$ в точке $x \in \mathbb{R}$ функции f с шагом h . В настоящей работе построена одна общая (см. также [1]–[3]) конструкция локального параболического сплайна с равномерными узлами $\{jh\}_{j \in \mathbb{Z}}$, различный выбор параметров в которой приводит к сохранению сплайном тех или иных свойств исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ функции f .

Пусть $B(x) = B_3(x) = \frac{1}{2h^2} \Delta_h^3 ((x-3h)_+)^2$ — нормализованный параболический B -сплайн [1] с носителем $\text{supp } B = [0, 3h]$ и равномерными узлами $\{jh\}_{j=0}^3$. С помощью функционала

$$I_j = C_1 y_{j+\alpha} + C_2 y_{j+1+\alpha} + C_3 y_{j+2+\alpha}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad C_s \in \mathbb{R} \quad (s = 1, 2, 3) \quad (1)$$

построим локальный параболический сплайн вида

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Этот сплайн не является интерполяционным, так как $S((j+\alpha)h) \neq y_{j+\alpha}$. При каждом фиксированном $x \in [lh, (l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$) сумма (2) состоит из трех слагаемых и поэтому $S(x)$ зависит от пяти значений функции $f: y_{l-2+\alpha}, y_{l-1+\alpha}, \dots, y_{l+2+\alpha}$.

Дадим два определения. Будем говорить, что схема (1)–(2) локальной аппроксимации точна на пространстве алгебраических многочленов P_k степени $k = \overline{0, 2}$, если для любого многочлена $p_k \in P_k$ имеет место равенство $S(p_k(\cdot), x) = p_k(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Поясним также, что означает свойство локального сохранения сплайном S k -монотонности исходных данных (при $k = 0$ — это неотрицательность, при $k = 1$ — монотонность, при $k = 2$ — выпуклость). Пусть l

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 08–01–00325 и проектом 09-С-1-1007, выполняемым учеными УРО РАН совместно с СО РАН.

— любое фиксированное целое число. Если для какого-то значения $k = \overline{0, 2}$ все конечные разности $\Delta_h^k y_{j+\alpha} = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} C_k^s y_{j+s+\alpha}$ порядка k неотрицательны при некоторых значениях j , близких к l , то k -ая производная локального сплайна S , построенного по значениям $\{y_{j+\alpha}\}$ с помощью формул (1)–(2), также должна быть неотрицательна на отрезке $[lh, (l+1)h]$.

Теорема 1. *Схема (1)–(2) локальной аппроксимации точна на пространстве P_k ($k = \overline{0, 2}$) тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:*

$$1) C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (k = 0), \quad 2) \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ 3C_1 + C_2 - C_3 = 2\alpha \end{cases} \quad (k = 1)$$

$$3) \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ 3C_1 + C_2 - C_3 = 2\alpha, \\ 5C_1 + C_2 + C_3 = 2\alpha^2 \end{cases} \quad (k = 2).$$

Система уравнений 3) имеет единственное решение: $C_1 = \frac{2\alpha^2 - 1}{4}$, $C_2 = -\alpha^2 + \alpha + 1$, $C_3 = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha + 1}{4}$. Отметим несколько известных частных случаев. Пусть AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $W_\infty^2 = \{f : f' \in AC, \|f''\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$ — класс функций Соболева. Через $E(W_\infty^2)_\infty$ обозначим величину погрешности приближения класса W_∞^2 в равномерной метрике построенными сплайнами S . Н. П. Корнейчук [2] доказал, что в случае 3) теоремы 1 при $\alpha = 1/2$ (т. е. при $C_1 = C_3 = -1/8$, $C_2 = 5/4$) имеет место равенство $E(W_\infty^2)_\infty = 9h^2/32$. Позже Ю. Н. Субботин [3] установил, что в случае 2) при $\alpha = 1/2$, $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = 1$ соответствующая величина приближения $E(W_\infty^2)_\infty$ равняется $h^2/8$. Последний результат означал, что при указанном выборе параметров сплайна величина приближения такими сплайнами класса функций W_∞^2 в равномерной метрике для 1-периодических функций совпадает с величиной колмогоровского поперечника (определение и историю вопроса см., например, в [2]). Поэтому выбор $\alpha = 1/2$ является оптимальным с точки зрения наилучших аппроксимативных свойств сплайна. Иной выбор параметра α ранее не рассматривался. На наш взгляд, в прикладных задачах теории приближения функций параметр α может быть выбран не только из соображений наилучшей

аппроксимации на классе W_∞^2 . Например, из теоремы 1 следует, что при $\alpha = 1/\sqrt{2}$ (или $\alpha = 1 - 1/\sqrt{2}$) коэффициент $C_1 = 0$ ($C_3 = 0$), т. е. длину шаблона в (1) при условии точности схемы на пространстве P_2 можно уменьшить на единицу. Оказывается также, что если в качестве α выбрать единственный на $(0, 1)$ корень уравнения $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 0,5 = 0$, то схема (1)–(2) будет точной на пространстве алгебраических многочленов P_3 третьей степени, рассматриваемых только на сетке $\{(j + \alpha)h\}_{j \in \mathbb{Z}}$, и параметры C_1, C_2 и C_3 в этом случае определяются из системы уравнений 3) теоремы 1 и дополнительного уравнения $7C_1 + C_2 - C_3 = 2\alpha^3$.

Нами доказано также, что при любом $\alpha \in [0, 1)$ условия $C_s \geq 0$ ($s = 1, 2, 3$) неотрицательности метода (1)–(2) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы при каждом фиксированном $k = \overline{0, 2}$ сплайн S обладал свойством локального сохранения k -монотонности исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}$. При $\alpha = 1/2$, $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = 1$ этот результат установил Ю. Н. Субботин [3]. Интересно заметить, что система 2) теоремы 1 при каждом $\alpha \in [0, 1)$ имеет следующее неотрицательное решение: $C_1 = \alpha/2$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = \frac{1-\alpha}{2}$, а для системы 3) не существует ни одного значения $\alpha \in [0, 1)$, при котором все числа $C_s \geq 0$ ($s = 1, 2, 3$).

Литература

- [1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [2] Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения. М.: Наука, 1984.
- [3] Субботин Ю.Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ B - \mathcal{L} -СПЛАЙНОВ

Шевалдин В.Т.¹

e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

В теории всплесков для построения кратномасштабного анализа вложенных друг в друга замкнутых подпространств $\{V_j \in L^2(\mathbb{R}) : j \in \mathbb{Z}\}$, определяемых на основе сплайнов, основную роль играют двухмасштабные соотношения для базисных B -сплайнов и их аналогов (см., например, [1, глава IV]). В настоящей работе мы покажем, как эти и более общие соотношения (их еще называют калибровочными) могут быть получены для B - \mathcal{L} -сплайнов с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору \mathcal{L}_n порядка $n \in \mathbb{N}$ с постоянными действительными коэффициентами. Идея построения заимствована нами из работ С. Б. Стечкина [2], посвященных доказательству неравенства Джексона об оценке сверху наилучшего приближения в C непрерывной функции тригонометрическими многочленами через ее k -ый модуль гладкости, в котором конечные разности с большим шагом раскладываются в линейную комбинацию конечных разностей с шагом, в целое число раз меньшим исходного.

Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D) = \prod_{j=1}^n (D - \beta_j)$ (D — оператор дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор порядка n с постоянными коэффициентами (старший коэффициент равен 1) и набором $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ корней его характеристического многочлена. Здесь β_j — заданные комплексные числа (среди них могут быть и совпадающие). Дифференциальному оператору \mathcal{L}_n поставим в соответствие разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ ($h > 0$), определенный на пространстве числовых последовательностей $\{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ по следующей формуле:

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \prod_{j=1}^n (T - e^{\beta_j h} E) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \mu_s y_{m+s},$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00325 и проектом 09-С-1-1007, выполняемым учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

где $Ty_m = y_{m+1}$, $Ey_m = y_m$ (тождественный оператор), $\mu_n = 1$, $\mu_{n-1} = \sum_{j=1}^n e^{\beta_j h}$, \dots , $\mu_0 = \prod_{j=1}^n e^{\beta_j h}$. Все числа $\mu_s > 0$ ($s = \overline{0, n}$), если все корни $\beta_s \in \mathbb{R}$ ($s = \overline{0, n}$). Этот разностный оператор впервые в явном виде, вероятно, был выписан в работе А. Шармы и И. Цимбаларио [3] при решении одной задачи функциональной интерполяции.

С оператором $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ можно ассоциировать алгебраический многочлен (характеристический многочлен этого оператора) вида

$$Q_n(x) = Q_{\mathcal{L}_n, h}(x) = \prod_{j=1}^n (x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \mu_s x^s.$$

При построении B - \mathcal{L} -сплайнов особую роль играет функция $\varphi_n \in \text{Ker } \mathcal{L}_n$, удовлетворяющая условиям: $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j, n-1}$ ($j = \overline{0, n-1}$). Пусть $y_m = \varphi_n(x + mh)$. B - \mathcal{L} -сплайном (см., например, [4]) называется следующая функция: $B(x) = B_{\mathcal{L}_n, h}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_n} \varphi_n((x - nh)_+)$. Здесь, как обычно, $t_+ = \max\{0, t\}$. Свойства функции $B_{\mathcal{L}_n, h}$ аналогичны свойствам полиномиального B -сплайна n -го порядка с равномерными узлами. Главное отличие состоит в том, что четность B - \mathcal{L} -сплайна относительно середины носителя $\text{supp } B = [0, nh]$ имеет место тогда и только тогда, когда оператор \mathcal{L}_n является самосопряженным (т. е. справедливо равенство $\mathcal{L}_n(-D) = (-1)^n \mathcal{L}_n(D)$). Покажем, как может быть получено двухмасштабное соотношение для B - \mathcal{L} -сплайнов в терминах коэффициентов многочлена Q_n .

Наряду с функцией $B_{\mathcal{L}_n, h}$ рассмотрим функцию $B_{\mathcal{L}_n, 2h}$, носителем которого является отрезок $[0, 2nh]$. Нас интересуют коэффициенты γ_s ($s = \overline{0, n}$) в формуле

$$B_{\mathcal{L}_n, 2h}(x) = \sum_{s=0}^n \gamma_s B_{\mathcal{L}_n, h}(x - (n-s)h), \quad x \in [0, 2nh]. \quad (1)$$

Из определения B - \mathcal{L} -сплайна ясно, что эти коэффициенты могут быть найдены с помощью характеристических многочленов $Q_{\mathcal{L}_n, h}$ и $Q_{\mathcal{L}_n, 2h}$. Поскольку

$$\frac{Q_{\mathcal{L}_n, 2h}(x^2)}{Q_{\mathcal{L}_n, h}(x)} = \frac{\prod_{j=1}^n (x^2 - e^{2\beta_j h})}{\prod_{j=1}^n (x - e^{\beta_j h})} = \prod_{j=1}^n (x + e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^n \mu_s x^s,$$

то имеет место равенство $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_n} y_m = \mu_n \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_{m+n} + \mu_{n-1} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_{m+n-1} + \dots + \mu_0 \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m$. Отсюда получаем, что $\gamma_s = \mu_s$ ($s = \overline{0, n}$), т. е. $\gamma_n = 1$, $\gamma_{n-1} = \sum_{j=1}^n e^{\beta_j h}, \dots, \gamma_0 = \prod_{j=1}^n e^{\beta_j h}$. В книге К. Чуи [1] соотношения (1) в случае оператора $\mathcal{L}_n = D^n$ доказано иным способом.

Из приведенного доказательства становится ясно, чтобы найти коэффициенты в k -масштабном соотношении ($k = 2, 3, \dots$) для B - \mathcal{L} -сплайнов нужно разделить многочлен $Q_{\mathcal{L}_n, kh}(x^k)$ на многочлен $Q_{\mathcal{L}_n, h}(x)$ и вычислить коэффициенты полученного в результате деления многочлена. Отметим, что идею деления характеристических многочленов дифференциальных операторов автор [4] применял также для доказательства неравенства Джексона – Стечкина в пространстве C с тригонометрическим модулем непрерывности, соответствующим оператору $\mathcal{L}_3 = D(D^2 + 1)$.

Калибровочные соотношения для B - \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка вида $\mathcal{L}_3 = D(D^2 - \beta^2)$, $\mathcal{L}_3 = D(D^2 + \beta^2)$ ($\beta \in \mathbb{R}$) изучались также в работах И. К. Демьяновича (см., например, [5]). Им же рассматривались и некоторые более общие конструкции аналогов B -сплайнов с неравномерными узлами, построенных на основе трех линейно независимых функций.

Литература

- [1] Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
- [2] Стечкин С.Б. Избранные труды: Математика. М.: Наука, 1998.
- [3] Шарма А., Цимбаларио И. Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 21. С. 161–173.
- [4] Шевалдин В.Т. Неравенство Джексона – Стечкина в C с тригонометрическим модулем непрерывности, аннулирующим первые гармоники // Труды ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
- [5] Демьянович И.К. Вложение пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 658–675.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ДОЗЫ ОБЛУЧЕНИЯ ПЕРСОНАЛА МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА

Айзенштейн Д.О., Ипатов А.В.
e-mail: aisek@mail.ru

В работах [1], [2] рассматривается задача оптимизации последовательности демонтажа элементов энергоблока АЭС с целью минимизации суммарной дозы облучения персонала.

В простейшем случае данная задача может быть сформулирована как задача минимизации функционала

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^n t_{\alpha(i)} \sum_{j=i}^n H_{\alpha(j)},$$

где α — последовательность демонтажа — некоторая перестановка элементов множества $\overline{1, n}$; t_k — время демонтажа k -го элемента; H_k — мощность дозы излучения, создаваемая k -м элементом.

В монографии [3] показано, что для достижения минимума $D(\alpha)$ следует демонтировать элементы в порядке убывания величины $\frac{H_k}{t_k}$.

В практических задачах различные технологические ограничения зачастую могут запрещать демонтировать один элемент раньше, чем будет демонтирован другой элемент. Будем понимать под *условиями предшествования* в задаче оптимального демонтажа набор пар (a_k, b_k) , означающий, что в допустимой последовательности элемент a_k должен быть демонтирован до того, как будет демонтирован элемент b_k .

Очевидно, такая задача имеет решение тогда и только тогда, когда условия предшествования задают некоторый частичный порядок на множестве $\overline{1, n}$. Поэтому, не ограничивая общность, можно считать набор пар (a_k, b_k) отношением порядка.

В работе [2] приводится алгоритм решения данной задачи для случая единственного условия предшествования. Если же множество условий предшествования имеет произвольную структуру, то для минимизации функционала $D(\alpha)$ можно использовать метод динамического программирования (см. [1]). Однако время работы алгоритма, реализующего данный метод, растёт экспоненциально с ро-

стом количества элементов n , и решать задачи на персональном компьютере с его помощью можно, только если n не превосходит двухтрёх десятков.

Общая схема метода имитации отжига

Метод имитации отжига (simulated annealing) строит последовательность планов оптимизационной задачи, начиная с начального плана x_0 и на t -й итерации переходя от плана x_{t-1} к плану x_t . На каждой из итераций метод действует следующим образом. Сначала из множества «соседних» к x_{t-1} планов случайным образом выбирается некоторый план x . Пусть $f(x)$ — стоимость плана x . Если $f(x) \leq f(x_{t-1})$, то в качестве x_t выбирается план x . Иначе x_t задаётся по правилу

$$x_t = \begin{cases} x & \text{с вероятностью } p_t, \\ x_{t-1} & \text{с вероятностью } 1 - p_t. \end{cases}$$

Здесь p_t — *вероятность перехода к худшему решению на t -й итерации* — некоторая функция от t , x и x_{t-1} .

Процесс построения последовательности планов задачи завершается после выполнения T итераций. Среди всех построенных планов x_i выбирается план с наименьшей стоимостью. Этот план и является результатом работы алгоритма, реализующего метод имитации отжига.

Описание алгоритма

Для создания алгоритма, укладывающегося в схему имитации отжига, нужно зафиксировать три составляющие: алгоритм построения начального плана x_0 , алгоритм выбора «соседнего» плана x и функцию p_t .

Рассмотрим ориентированный граф, вершинами в котором являются элементы энергоблока, а дугами — отношения предшествования. В качестве плана x_0 возьмём произвольную топологическую сортировку данного графа. Алгоритм топологической сортировки приведён в [4] и имеет сложность $O(n^2)$.

Пусть на t -й итерации отжига мы имеем текущий план x_{t-1} — перестановку на множестве $\bar{1}, n$. Будем называть элемент *перемещаемым*, если его положение в x_{t-1} можно изменить, не меняя порядок монтажа всех остальных элементов. Очевидно, элемент k является перемещаемым тогда и только тогда, когда либо непосредственно

перед k , либо непосредственно после k в перестановке x_{t-1} находится элемент, не связанный с k отношением предшествования. Выберем равновероятно среди всех перемещаемых элементов случайный. Случайным образом среди всех возможных новых положений этого элемента выберем некоторое (вновь равновероятно). Переместив выбранный элемент на это место, получим план x . Заметим, что множество всех перемещаемых элементов и множество новых положений выбранного элемента могут быть найдены за время $O(n)$.

Обозначим переменной d количество неупорядоченных пар элементов, между которыми есть отношение предшествования. Положим $p_t = \left(100 \cdot \left\lfloor \frac{8n^2 + 100d}{n^2 + 100d} \right\rfloor \right)^{-1}$.

Временная сложность описанного алгоритма составляет $O(nT)$, где T — количество итераций отжига.

Литература

- [1] *Балушкин Ф.А., Сесекин А.Н., Таишлыков О.Л., Чеблоков И.Б., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г.* Использование метода динамического программирования для оптимизации демонтажа оборудования энергоблоков АЭС, выводимых из эксплуатации, с целью минимизации облучения // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 4. С. 3–10.
- [2] *Балушкин Ф.А.* О задаче минимизации дозы облучения персонала при наличии условия предшествования // Проблемы теоретической и прикладной математики: тезисы 41-й Всероссийской молодёжной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2010. С. 309–314.
- [3] *Конвей Р., Максвелл В., Миллер Л.* Теория Расписаний // М.: Наука, 1975.
- [4] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2004.

СИСТЕМА ДЕТАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Белов А.М.¹, Вакула И.А.², Гаврилюк А.Л.²
e-mail: igor.vakula@adaptives.ru

Оперативное планирование (составление расписаний) производственных операций крайне актуально в машиностроительном производстве, для которого характерна широкая номенклатура продукции, значительное количество операций, выполняемых в рамках заказа, и альтернативных маршрутов изготовления деталей.

Допустимое для производства расписание должно учитывать объемный план производства (совокупность заказов с директивными сроками), особенности функционирования оборудования (графики ремонтных работ и смен), конструкторскую и технологическую документацию (технологические цепочки операций), логистику предприятия. Подробную классификацию условий планирования (ограничений на допустимые расписания) в машиностроении см. в [1].

Мы рассматриваем следующую задачу составления расписания (обобщение задачи планирования проекта с ограниченными ресурсами — RCPSP, [2, 3]). Имеется множество $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ операций, которые должны быть выполнены. На множестве \mathcal{O} задано нерезлексивное отношение частичного порядка \rightarrow , задающее последовательность выполнения операций (ограничения предшествования). Для $o \in \mathcal{O}$ положим $\text{Pred}(o) = \{o' \in \mathcal{O} : o' \rightarrow o\}$. Для выполнения операций имеется множество ресурсов $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Каждой операции $o \in \mathcal{O}$ сопоставлено множество альтернативных ресурсов $R(o) \subseteq \mathcal{R}$, каждый из которых необходим и достаточен для выполнения o . Для всех $o \in \mathcal{O}$ и $r \in R(o)$ задана $d(o, r) \in \mathbb{N}$ — длительность выполнения o на r (время дискретно, операции непрерываемы). Естественно полагать, что не все ресурсы и не всегда одинаково могут быть использованы для выполнения операций. Возможность ресурса r выполнять операции в момент t задается функцией $c_r(t) \in \mathbb{N}$ — профилем доступности ресурса. В частности, r не может выполнять операции в моменты, когда $c_r(t) = 0$. Рассматриваются

¹ООО «Экстенсив» (<http://www.x-tensive.ru>)

²ООО «Адаптивные решения» (<http://adaptives.ru>), ИММ УрО РАН

только дизъюнктивные ресурсы, способные выполнять одновременно не более одной операции, $c_r(t) \in \{0, 1\}$.

Для операции $o \in \mathcal{O}$ и $r \in R(o)$ может быть задан тип операции, $T = T(r, o)$, который определяет время $l(r, o)$, необходимое для переналадки r перед выполнением на нем операции o , если непосредственно предшествующая o операция на r имела тип $T' \neq T$.

Для моделирования отношений между операциями, в некотором смысле подобных предшествованию, используется понятие продукта. А именно, вводится множество продуктов $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Для каждой операции $o \in \mathcal{O}$ задано множество продуктов $\text{Cons}(o) \subseteq \mathcal{P}$, которые потребляются в начале её выполнения, и множество продуктов $\text{Prod}(o) \subseteq \mathcal{P}$, которые оказываются произведенными в результате её выполнения. Для каждого $p \in \mathcal{P}$ задан начальный профиль доступности продукта $c_p(t)$, который является неубывающей функцией времени, точки прироста её значений соответствуют внешним поставкам продукта. Для $o \in \mathcal{O}$ и $p \in \text{Cons}(o)$ (соотв. $p \in \text{Prod}(o)$) задаются величины $cs(p, o)$ (соотв. $pr(p, o)$) потребляемого (соотв. производимого) операцией o продукта p , и лаги времени: $lc(p, o)$ — готовности и $lp(p, o)$ — доступности продукта p в необходимом объеме до начала операции o и после ее окончания, соответственно.

С помощью продуктов можно моделировать такие связи между операциями, в которых операции одной группы $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ производят некоторый полуфабрикат, необходимый для выполнения операций другой группы $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}$. Выполнение отдельных операций из \mathcal{O}'' может начинаться при наличии необходимого объема полуфабриката независимо от того, какими операциями из \mathcal{O}' он был произведен. Использование для описания этой ситуации стандартных отношений предшествования потребует явного задания того, какие именно операции из \mathcal{O}' для каких операций из \mathcal{O}'' будут производить полуфабрикат, что необоснованно сужает множество допустимых расписаний. Поэтому отношения предшествования на основе продуктов мы называем также отношениями альтернативного предшествования.

Для $p \in \mathcal{P}$ обозначим $\text{Prod } \mathcal{O}(p) = \{o \in \mathcal{O} : p \in \text{Prod}(o)\}$ и $\text{Cons } \mathcal{O}(p) = \{o \in \mathcal{O} : p \in \text{Cons}(o)\}$.

Расписанием является любое отображение \mathcal{S} , сопоставляющее каждой операции $o \in \mathcal{O}$ ресурс $r_{\mathcal{S}}(o) \in R(o)$ и непрерывный отрезок времени $[s_{\mathcal{S}}(o), f_{\mathcal{S}}(o)]$ длиной $d(o, r)$. Расписание \mathcal{S} — допустимое,

если соблюдается:

(1) предшествование с учетом лагов $\forall o \in \mathcal{O}$:

$$\max_{o' \in \text{Pred}(o)} \{f_S(o)\} + l(r_S(o), o) < s_S(o);$$

(2) дизъюнктность ресурсов $\forall r \in \mathcal{R}, \forall t \in [1, \infty]$:

$$|\{o \in \mathcal{O} : r_S(o) = r \wedge s_S(o) \leq t \leq f_S(o)\}| \leq c_r(t).$$

(3) баланс потребляемых и производимых продуктов $\forall t \in [1, \infty]$:

$$\sum_{\substack{o \in \text{Cons}\mathcal{O}(p): \\ s_S(o) - lc(p,o) \leq t}} cs(p, o) \leq \sum_{\substack{o \in \text{Prod}\mathcal{O}(p): \\ f_S(o) + lp(p,o) \leq t}} pr(p, o).$$

Длиной расписания назовем величину $F_S = \max_{o \in \mathcal{O}} f_S(o)$. В нашей постановке задачи не рассматривается ограничение вида $F_S \leq H$, то есть длина допустимого расписания не ограничивается горизонтом планирования H . Под оптимизацией расписания в простейшем случае понимают минимизацию величины F_S . Также в работе рассматриваются следующие критерии оптимизации расписания:

- минимизация максимального отставания сроков выполнения заказов (цепочек операций) от заданных для них директивных сроков,
- балансировка загрузки альтернативных ресурсов,
- минимизация незавершенного производства.

Для поиска решения подобных оптимизационных задач мы использовали алгоритмы генерации расписаний (см. [3]) на основе эвристических правил предпочтения [2–4]. Для программной реализации этих алгоритмов мы описали задачу составления допустимого расписания как систему ограничений [5], при этом сами эвристические алгоритмы реализуются на уровне методов «обработки ограничений» (constraint processing). На сегодняшний день использование данного подхода является тенденцией, на этой технологии основаны такие передовые пакеты для решения задач дискретной оптимизации, как Comet компании Dynadec и ILOG CP Optimizer компании IBM.

Результатом данной работы является библиотека (реализованная на Microsoft .NET), решающая описанную задачу составления

расписания (как систему ограничений). В постановке задачи учтена специфика области применения библиотеки — MES-система машиностроительного производства. Необходимость разработки была обусловлена рядом причин, среди которых — потребность в новых быстрых эвристических процедурах для составления расписаний (с учетом критериев и условий, характерных для машиностроения [1]), а также стоимость существующих решений и их производительность.

Разработанные алгоритмы показали хорошие результаты по производительности и качеству составляемых расписаний на реальных производственных данных завода ООО «Радиус-Сервис», г. Пермь.

Литература

- [1] *Загидуллин Р.Р.* Вопросы классификации систем планирования машиностроительного производства // <http://erpnews.ru/doc5478.html>.
- [2] *Erik L. Demeulemeester, Willy S. Herroelen.* Project Scheduling: a Research Handbook. — New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [3] *Peter Brucker, Sigrid Knust.* Complex Scheduling. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [4] *Rainer Kolisch, Sonke Hartmann.* Heuristic Algorithms for Solving the Resource-Constrained Project Scheduling Problem: Classification and Computational Analysis (in "Project scheduling: Recent models, algorithms and applications"). — Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 1999. Pp. 147–178.
- [5] *Dechter R.* Constraint Processing. — San Francisco: Elsevier, 2003.
- [6] *Claude Le Pape.* Implementation of Resource Constraints in ILOG SCHEDULE: A Library for the Development of Constraint-Based Scheduling Systems // Intelligent Systems Engineering. 1994. Vol. 3. Iss. 2. Pp. 55–66.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОКРЕСТНОСТИ В ЗАДАЧЕ CMST

Ипатов А.В.

e-mail: sandro@acm.timus.ru

Рассмотрим неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j\}$, для каждого ребра из E определена его неотрицательная стоимость d_{ij} . Вершина v_0 называется *корнем*, а все остальные вершины — *терминалами*. Будем считать, что для каждого терминала определён его *вес* q_i ($q_i \geq 0$).

Пусть T — остов графа G с корнем в v_0 . Назовём *шлюзами* все терминалы, смежные с корнем в графе T .

Задача о минимальном остове с ограниченной пропускной способностью (далее CMST = Capacitated minimum spanning tree) состоит в нахождении такого остова T графа G с корнем в v_0 , что:

- 1) сумма весов всех терминалов в любом поддереве T с корнем в шлюзе не превосходит Q ;
- 2) среди всех остовов, удовлетворяющих первому свойству, T имеет минимальную стоимость.

Число Q называется *пропускной способностью*. $Q \geq \max_{v_i \in V \setminus v_0} q_i$.

Задача CMST возникает при проектировании сетей телекоммуникаций, гидравлических сетей и автомобильных дорог. Она является NP-трудной даже в том случае, если все $q_i = 1$ (см. [3]), в связи с чем большое внимание уделяется разработке эвристических и метаэвристических методов её решения. Краткий обзор существующих методов можно найти в [4].

Отдельный класс методов решения комбинаторных задач составляют *алгоритмы локального поиска*. В основе всех методов из этого класса лежит итеративная процедура: строится некоторый допустимый план x_0 задачи, и далее на каждой итерации осуществляется переход от плана x_t к следующему плану x_{t+1} .

Центральный момент любого алгоритма, реализующего локальный поиск — построение *окрестности* $N(x)$ — множества допустимых планов, к которым может быть осуществлён переход от плана x .

Некоторые методы построения окрестности для задачи CMST могут быть найдены в [4].

В данной работе мы рассмотрим окрестность $N(x_t)$ всех планов, получаемых из плана x_t удалением и добавлением двух рёбер. Мы приведём алгоритм, перебирающий планы в $N(x_t)$, пока не будет найден план со значением целевой функции меньше, чем у плана x_t , и реализуем метод локального поиска, вызывающий на каждой итерации приведённый алгоритм и завершающий работу, как только будет найден первый локальный минимум.

Алгоритм получает на вход план x_t . Если в $N(x_t)$ существуют допустимые планы CMST со стоимостью меньше, чем у плана x_t , то в качестве x_{t+1} возвращается произвольный из них. В противном случае в качестве x_{t+1} возвращается x_t .

1. Положим $x_{t+1} = x_t$. Составим массив *currentEdgePairs* из всех пар различных рёбер x_t $(v_i v_j, v_k v_l)$, упорядоченных по убыванию величины $d_{ij} + d_{kl}$.
2. Если массив *currentEdgePairs* просмотрен до конца, то завершим работу алгоритма. Иначе возьмём из него очередную пару рёбер $(v_i v_j, v_k v_l)$. Удалим эти рёбра из дерева x_{t+1} . При этом x_{t+1} распадётся на три компоненты связности.
3. Поместим в массив *newEdges* все рёбра, соединяющие вершины из разных компонент связности x_{t+1} и имеющие стоимость строго меньше $d_{ij} + d_{kl}$, в порядке возрастания их стоимости.
4. Переберём пары рёбер $v_p v_q$ и $v_r v_s$ из *newEdges*. Если $v_p v_q$ и $v_r v_s$ связывают разные пары компонент связности x_{t+1} , добавление $v_p v_q$ и $v_r v_s$ к графу x_{t+1} не нарушит ограничения по пропускной способности и $d_{pq} + d_{rs} < d_{ij} + d_{kl}$, то добавим к x_{t+1} рёбра $v_p v_q$ и $v_r v_s$ и завершим работу алгоритма.
5. Добавим к x_{t+1} рёбра $v_i v_j$ и $v_k v_l$ и вернёмся к шагу 2.

Если алгоритм завершил работу на шаге 2, то x_t является локальным минимумом. Если же это произошло на шаге 4, то стоимость x_{t+1} меньше стоимости x_t . Если реализовать проверку условий на шаге 4 за $O(1)$ (для этого нужно хранить для каждого поддеревья x_t

сумму весов терминалов в нём), то временная сложность приведённого алгоритма составит $O(n^6)$.

Мы исследовали работу алгоритма локального поиска на тестовом наборе cmXXXrY-ZZZ из библиотеки OR-Library. Набор состоит из 45 примеров с $n = 50, 100, 200$. Лучшие известные решения для них приведены в работе [1] (для примеров с $n = 50, 100$ они являются оптимальными). Тестирование производилось на персональном компьютере с процессором Intel Core2 Duo E4600 2.40 GHz.

Test	<i>cost</i>	<i>k</i>	<i>t_{total}</i>	<i>t_k</i>	<i>best</i>	<i>EW</i>
cm200r1-200	1171	125	86.96	4.29	994	1410
cm200r2-200	1442	174	272.26	6.40	1188	1703
cm200r3-200	1545	145	150.83	6.65	1313	1703
cm200r4-200	1121	130	85.25	4.09	917	1342
cm200r5-200	1185	105	60.01	4.14	948	1400

В таблицу включены примеры, на которых локальный поиск показал наибольшее отклонение от лучшего решения. Для каждого из них указаны стоимость найденного решения (*cost*), количество итераций локального поиска (*k*), общее время работы программы (*t_{total}*) и время работы последней итерации (*t_k*) в секундах. Для сравнения даны стоимости лучшего известного решения (*best*) и решения, найденного классическим алгоритмом, приведённым в работе [2] (*EW*).

Литература

- [1] *Robust branch-cut-and-price for the capacitated minimum spanning tree problem over a large extended formulation* / E. Uchoa [et al.] // *Mathematical Programming: Series A and B*. Vol. 112, № 2. 2007. Pp. 443–472.
- [2] *L.R. Esau, K.C. Williams*. On teleprocessing system design. Part II — A method for approximating the optimal network. *IBM Systems Journal* 5. 1966. Pp. 142–147.
- [3] *C.H. Papadimitriou*. The complexity of the capacitated tree problem // *Networks* 8. 1978. P. 217–230.
- [4] *S. Voss*. Capacitated minimum spanning trees // C.A. Floudas, P.M. Pardalos (eds.), *Encyclopedia of optimization*. Vol. 6. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2001. Pp. 225–235.

ТЕКСТОЗАВИСИМАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ ДИКТОРА НА ОСНОВЕ ФОРМАНТНОГО МЕТОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОГО МЕТОДА СЕГМЕНТАЦИИ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА

Ручай А.Н.

e-mail: ruchai@pochta.ru

На данный момент задачу распознавания диктора нельзя считать решенной, так как разработанные системы идентификации диктора по голосу не отличаются высокой надежностью. Последние исследования в области голосовой биометрики были направлены на исследования формантного метода параметризации речевого сигнала [1, 4–6].

В работе [6] рассматривается метод текстозависимой верификации диктора на основе анализа формантного набора, где дается описание теста надежности текстозависимой верификации диктора. В реализуемом методе верификации диктора речевой сигнал разбивается на кратковременные непересекающиеся вокализованные сегменты, для которых вычисляются формантные наборы. Практически все алгоритмы приводят к появлению антиформант [1, 3] и тем самым сказываются на качестве распознавания диктора.

В данной работе автором был предложен концептуально новый метод и алгоритм для успешного разбиения речевого сигнала на непересекающиеся вокализованные сегменты. Данный метод основан на представлении сигнала в виде его сингулярностей, которые определяются через их показатели Гёльдера [2, 7].

Пусть $Wf(x, s)$ — непрерывное вейвлет-преобразование функции $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$Wf(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-x}{s} \right) dt.$$

Теорема Джаффара [2] устанавливает связь между убыванием максимума модуля вейвлет-преобразования $Wf(x, s)$ и ее показателями Гёльдера, то есть локальной регулярностью функции $f(x)$. По данной теореме вейвлет-преобразование $Wf(x, s)$ функции $f(x)$ ме-

няется с изменением масштаба s как

$$|Wf(x, s)| \leq As^\alpha,$$

где A — константа, α — показатель Гёльдера.

Прологарифмировав обе части последнего уравнения, получим уравнение:

$$\log |Wf(x, s)| \leq \log A + \alpha \log s.$$

Это значит, что α , показатель Гёльдера, — это максимальный угол наклона прямых линий уравнения в логарифмическом масштабе, которые превышают $\log |Wf(x, s)|$.

В экспериментах был использован широко известный вейвлет, вторая производная от функции Гаусса $e^{-t^2/2}$, равный

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1 - t^2)e^{-t^2/2}.$$

Вещественные вейвлеты часто используются для выделения резких изменений сигнала, чтобы исключить информацию о фазе за счет рассмотрения модулей вейвлет-коэффициентов [2].

Реализованный алгоритм строит скейлограмму изучаемого звукового сигнала при помощи выбранного вейвлета, затем в каждой точке по времени вычисляется наклон $\log\text{-}\log$ графика скейлограммы при помощи построения прямой наилучшего среднеквадратичного приближения этого графика.

Для оценки качества работы предложенного нового метода разбиения речевого сигнала на вокализованные сегменты был проведен эксперимент. Для этого была собрана база голосов из 10 дикторов, каждый диктор произносил 13 раз некоторое одинаковое для всех слово. Ко всем речевым фразам из собранной базы был применен новый метод разбиения речевого сигнала на вокализованные сегменты с помощью оценки сингулярности сигнала, в результате были получены вокализованные сегменты, которые полностью соответствовали гласным звукам в этих речевых сигналах.

Новый предложенный метод разбиения речевого сигнала на вокализованные сегменты был также применен в реализованной системе текстозависимой верификации диктора [6]. Были получены ошибки:

ошибка первого рода — 0.301 и второго рода — 0.0011. Если сравнить с полученными ошибками первого и второго рода с применением обычного метода разбиения речевого сигнала на вокализованные сегменты [6], то можно сделать вывод, что ошибка первого рода уменьшилась на 7 % при фиксированной ошибке второго рода.

Результаты сравнения дают основания полагать, что новый метод сегментации позволит существенно уменьшить ошибки первого и второго рода в задаче текстозависимой верификации диктора.

Литература

- [1] *Аграновский А.В., Леднов Д.А.* Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации сигналов / – М. : Радио и связь, 2004.
- [2] *Малла, С.* Вейвлеты в обработке сигнала – М.: Мир, 2005.
- [3] *Рамшивили Г.С.* Автоматическое опознавание говорящего по голосу / – М.: Радио и связь, 1981.
- [4] *Ручай А.Н.* К вопросу о формантном методе текстозависимой верификации диктора // Научная сессия ТУСУР-2010: Материалы докладов Всероссийской научно-технической конференции. – Томск: В-Спектр, 2010. Ч. 3 С. 194–197.
- [5] *Ручай А.Н.* К вопросу о законе распределения форманты, биометрической характеристики диктора // Проблемы теоретической и практической математики: тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2010. С. 401–407.
- [6] *Ручай А.Н.* Формантный метод текстозависимой верификации диктора // Вестник Челябинского государственного университета. – Челябинск: ЧелГУ, 2010. С. 121–131.
- [7] *Хабидуллин Р.Ф., Левкович-Маслюк Р.Ф.* Локализация транзистентов в звуковых сигналах с помощью оценки локального показателя Гельдера, препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. М., 2006.

МОДИФИКАЦИЯ ОДНОГО АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПА МУЗЫКАЛЬНОЙ МЕЛОДИИ

Хачай М.Ю., Кобылкин К.С.¹

e-mail: mkhachay@imm.uran.ru, kobyлкин@imm.uran.ru

Разработка алгоритмов определения ритма мелодии является одной из известных задач анализа и обработки цифрового аудио. Ее приложениями являются синхронизация компьютерной анимации, цветомузыкальных устройств с проигрываемым произведением, а также анализ музыкальных композиций с целью автоматического индексирования, облегчающего поиск в больших базах данных.

Можно считать, что ритм это последовательность ударов воображаемого метронома, согласованная в каждый момент времени с музыкальным рисунком проигрываемой композиции. Основными требованиями к алгоритму его выделения являются устойчивость к шуму и вариациям условий исполнения мелодии (громкости, темпа и т.п.). При этом задача обработки мелодии в реальном времени является более сложной по сравнению с т.н. оффлайн-обработкой, т.к. в последнем случае мелодия доступна для обработки целиком, в то время как при онлайн-обработке оценка ритма должна выдаваться на основе анализа достаточно короткой предыстории.

Наиболее известный алгоритм *beat tracking* приведен в работе [1]. В данной работе предлагается простой эвристический алгоритм выделения ритма мелодии, использующий идеи работы [2].

Музыкальное произведение является структурированным набором музыкальных звуков (нот) определенной длительности и ритм является одним из его компонентов. Ритм любой композиции определяется особыми моментами времени, *битами*, которые выделяются исполнителем громкостью и (или) интонацией. *Темпом* называется измеряемая в ударах в минуту скорость, с которой в процессе исполнения встречаются биты.

Определение 1. *Атакой* [3] ноты называется короткий временной интервал, в течении которого амплитудная огибающая быстро увеличивается. *Переходное состояние* это включающий атаку короткий

¹Работа частично поддержана УрО РАН, гранты № 09-Р-1-1001, 09-С-1-1010, и РФФИ, гранты № 10-01-00273, 10-07-00134.

временной интервал, в течении которого сигнал изменяется очень быстро некоторым сложным, непредсказуемым образом. *Онсетом* называется момент начала переходного состояния.

Отыскание онсетов является важной задачей при выделении ритма поскольку биты имеют тенденцию совпадать с онсетами «ярких» событий музыкального произведения.

Описание алгоритма. Предлагаемая модификация алгоритма работает по следующей общей схеме. На первом этапе для обрабатываемого в реальном времени исходного сигнала вычисляются онсеты, хранится некоторая предыстория этих времен.

На втором этапе вычисляется длина временного промежутка $\Delta_0 = t_n - t_{n-1}$ между последним обнаруженным онсетом t_n и предыдущим онсетом t_{n-1} . Диапазону возможных в музыке темпов от самого быстрого до самого медленного отвечает определенный диапазон длительностей (периодов). Длительности Δ_0 , не принадлежащие этому диапазону, отбрасываются алгоритмом как не соответствующие ни одному из известных музыкальных темпов.

Для каждой длительности этого диапазона алгоритм вычисляет относительную частоту. До момента начала проигрывания мелодии частоты всех длительностей полагаются одинаковыми. Относительная частота последней наблюдаемой длительности Δ_0 и всех близких к ней длительностей увеличивается, а частоты, соответствующие остальным – уменьшаются. В момент, когда длительность Δ_0 близка к длительности с наибольшей частотой, величина $1/\Delta_0$ выдается в качестве новой оценки темпа.

Вычисление онсетов. Онсеты «ярких» событий мелодии можно найти, регистрируя скачки энергии аудиосигнала (как функции времени) в нескольких частотных поддиапазонах. Функция энергии является суммой квадратов модулей отсчетов преобразования Фурье исходного аудиосигнала, примененного со скользящим окном.

Пусть во время обработки сигнала получен очередной блок из отсчетов исходного сигнала и для каждого частотного поддиапазона вычислены функции энергии $\{E_i\}$. Также хранится некоторая предыстория значений энергий для i -го поддиапазона и можно подсчитать среднюю энергию M_i , $i = 1, \dots, k$. Алгоритм регистрирует онсет в данном блоке, если выполнено неравенство

$$E_i > C \cdot M_i$$

для некоторого $i = i_0$, где C – пороговое значение, являющееся характеристикой алгоритма определения онсетов.

Обновление частот. Длительности, различающиеся на степени двойки, обычно считают похожими. В диапазоне длительностей, лежащих между 0.28с и 2.21с, нами был выбран поддиапазон I длительностей от 0.55с до 1.09с. Введем функцию расстояния g между двумя длительностями Δ_1 и Δ_2 этого поддиапазона, равную:

$$g(\Delta_1, \Delta_2) = \min\{M - m, 2m - M\}, \quad (1)$$

где $m = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$, а $M = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Формула для обновления частот длительностей диапазона при определении очередного промежутка Δ_0 похожа на таковую в [2]:

$$p(\Delta) = \alpha p(\Delta) + \beta e^{-g^2(\Delta, \bar{\Delta}_0)} \quad (2)$$

где $\Delta \in I$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ а $\bar{\Delta}_0 = x\Delta_0 \in I$, где $x = 2^t$ для некоторого целого t . После пересчета частот длительностей $\Delta \in I$ по формуле (2) величины $p(\Delta)$ нормируются так, чтобы их сумма была равна 1.

Для оценки производительности алгоритма нами был проведен эксперимент с использованием коллекции MIREX Audio Beat Tracking, включающей 20 мелодий различных музыкальных жанров. Его качество оценивалось методом кросс-корреляций Мак-Кинни. Средняя кросс-корреляция по всей коллекции составила 0.34.

Литература

- [1] Dixon S. Automatic extraction of tempo and beat from expressive performances / Journal of New Music Research. 2001. Vol. 30, Pp. 39–58.
- [2] Jensen K., Andersen T.H. Real time beat estimation using feature extraction // Proceedings of the Computer Music Modelling and Retrieval Symposium. ser. Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag. 2003. Vol. 2771. Pp. 13–22.
- [3] Bello J.P., Daudet L., Abdallah S., Duxbury Ch., Davies M., Sandler M. A tutorial on onset detection in music signals // IEEE Transactions on speech and audio processing. 2005. Pp. 1–13.
- [4] MIREX Contest: www.music-ir.org/mirex/wiki/2006:Audio_Beat_Tracking_Results

СВОЙСТВО УНИФОРМИЗАЦИИ НА НЕКОТОРЫХ ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

Авдеев Р.Р.

e-mail: avdeyev@math.nsc.ru

Рассматривается вычислимость на допустимых множествах. Изучается свойство униформизации на допустимых множествах видов $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, а также связанные с ним свойства модели \mathfrak{M} . В дальнейшем, σ — сигнатура модели \mathfrak{M} , а $\sigma' = \sigma \cup \{U, \in, \emptyset\}$ — сигнатура допустимого множества над \mathfrak{M} .

Определение 1. На допустимом множестве \mathbb{A} выполняется *принцип униформизации* \Leftrightarrow для любого бинарного Σ -предиката $R(x, y)$ существует Σ -функция $F(x)$ такая, что $\text{dom}(F) = \{x \mid \exists y R(x, y)\}$, и справедливо $R(x, F(x))$ для всех $x \in \text{dom}(F)$.

Теорема. Пусть \mathfrak{M} — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Следующие условия эквивалентны:

1. На $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.
2. Для любого $A \subset P(M) \setminus \{\emptyset\}$, $A \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, существует Σ -функция $f : A \rightarrow M$ такая, что для любого $a \in A$ выполняется $f(a) \in a$. Кроме того, все эти функции задаются с единым набором параметров \bar{y} .
3. Существует $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ такой, что для любой пары $\varphi(\bar{u}, \bar{v})$ и $\psi(\bar{u}, \bar{v}, \bar{p})$ формул сигнатуры σ с параметрами \bar{p} таких, что ψ определяет отношение эквивалентности η на $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, существует вычислимое семейство формул $\chi_i(\bar{u}, \bar{v}, \bar{c})$, дизъюнкция которых определяет подмножество $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, пересекающееся с каждым классом эквивалентности по отношению η ровно на одном элементе.

Утверждение. Пусть \mathfrak{M} — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Тогда свойство униформизации на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ влечет свойство униформизации на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Гипотеза 1. Пусть \mathfrak{M} — рекурсивно насыщенная модель регулярной теории. Тогда свойство униформизации на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ влечет свойство униформизации на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$.

Предложение 1. Пусть \mathfrak{M}' — рекурсивно насыщенная модель арифметики. Тогда на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}')$ выполняется принцип униформизации.

Предложение 2. Пусть \mathfrak{R}' — рекурсивно насыщенная модель теории вещественных чисел ($\text{Th}(\langle R, 0, 1, +^2, \cdot^2, <^2 \rangle)$). Тогда на $\text{НУР}(\mathfrak{R}')$ выполняется принцип униформизации.

Предложение 3. Если T — несчетно категоричная теория и \mathfrak{M} — ее счетно-насыщенная модель, то ни на $\text{HF}(\mathfrak{M})$, ни на $\text{НУР}(\mathfrak{M})$ не выполняется принцип униформизации.

Предложение 4. Пусть \mathfrak{M} — счетно-насыщенная модель теории линейного порядка на натуральных числах ($\text{Th}(\langle \omega, \leq \rangle)$). Тогда на $\text{НУР}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации, а на $\text{HF}(\mathfrak{M})$ — нет ($\text{Th}(\langle \omega, \leq \rangle)$ не регулярна).

Гипотеза 2. Пусть \mathfrak{Q}'_p — рекурсивно насыщенная модель p -адических чисел (\mathfrak{Q}'_p). Тогда на $\text{НУР}(\mathfrak{Q}'_p)$ не выполняется принцип униформизации.

Определение 2. Модель \mathfrak{M} имеет Σ -определимые скулемовские функции \Leftrightarrow существует $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ (сигнатуры σ) существует Σ -формула $\psi(x, \bar{y}, \bar{c})$ (сигнатуры σ') такая, что $\text{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists! x (\varphi \wedge \psi)$.

Предложение 5. Существует теория с определимыми скулемовскими функциями такая, что в $\text{HF}(\mathfrak{M})$ и $\text{НУР}(\mathfrak{M})$, где \mathfrak{M} — ее счетно-насыщенная модель, не выполняется принцип униформизации.

Предложение 6. Пусть T — полная теория, в которой любая модель имеет Σ -определимые скулемовские функции. Тогда существует несущественное расширение T' этой теории, в котором есть определимые скулемовские функции.

Предложение 7. Существует модель, в которой есть Σ -определимые скулемовские функции, но ее теория регулярна и в любом ее расширении конечным числом констант нет определимых скулемовских функций.

Искомой моделью является $\mathfrak{M} \Leftrightarrow \langle \omega, \{0, s^2, P^2, Q^1\} \rangle$, где s — предикатный символ следования,

$$(\mathfrak{M} \models P(x, y)) \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge ((y = (2x)^2) \vee (y = (2x + 1)^2)),$$

$$(\mathfrak{M} \models Q(x)) \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x \text{ — не полный квадрат}).$$

Гипотеза 3. Теория модели $\mathfrak{M} \Leftrightarrow \langle \omega, \{0, s^2, P^2, Q^1\} \rangle$, где s — предикатный символ следования,

$$(\mathfrak{M} \models P(x, y)) \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge ((y = f(2x)) \vee (y = f(2x + 1))),$$

$$(\mathfrak{M} \models Q(x)) \Leftrightarrow (\mathfrak{M} \models (x \neq 0) \wedge \neg \exists y P(y, x))$$

имеет определимые скулемовские функции в некотором несущественном расширении \Leftrightarrow функция f является автоматной.

Основные сведения из теории допустимых множеств изложены в [1]. Критерий униформизации на $\text{HF}(\mathfrak{M})$, где \mathfrak{M} — модель регулярной теории, изучался А.И.Стукачевым в [2].

Литература

- [1] *Barwise J.* Admissible Sets and Structures. — Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.
- [2] *Стукачев А.И.* Теорема об униформизации в наследственно-конечных надстройках / в сб. «Обобщенная вычислимость и определимость», № 161, Новосибирск, 1998. С. 3–14.

ЛОКАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ О'НЭНА-СКОТТА

Аверкин Е.М.

e-mail: muzhaskin@mail.ru

Известная теорема О'Нэна-Скотта [1, теорема 2.4] дает индуктивное описание подгрупп симметрических групп. Она утверждает:

Теорема 1 (О'Нэна-Скотта). Пусть H — собственная подгруппа симметрической группы S_n , отличная от A_n . Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) H интранзитивна и $H \leq S_k \times S_m$, где $n = k + m$;
- 2) H импримитивна и $H \leq S_k \wr S_m$, где $n = km$;
- 3) H содержится в примитивном сплетении $S_k \wr S_m$, где $n = k^m$;
- 4) H содержится в аффинной группе $\text{AGL}_d(r) \simeq r^d : \text{GL}_d(r)$, где $n = r^d$;
- 5) H содержится в группе вида $T^m \cdot (\text{Out}(T) \times S_m)$, где T — неабелева простая группа, действующая на смежных классах по подгруппе $\text{Aut}(T) \times S_m$, где $n = |T|^{m-1}$;
- 6) H — почти простая группа, действующая на смежных классах по максимальной подгруппе индекса n .

Получено следующее уточнение этой теоремы для случая, когда подгруппа H имеет нетривиальную нормальную r -подгруппу:

Теорема 2. Пусть H — собственная подгруппа симметрической группы S_n , причем $O_r(H) \neq 1$ для некоторого простого числа r . Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) H интранзитивна и $H \leq S_k \times S_m$, где $n = k + m$;
- 2) H импримитивна и $H \leq S_k \wr S_m$, где $n = km$;
- 3) H содержится в аффинной группе $\text{AGL}_d(r) \simeq r^d : \text{GL}_d(r)$, где $n = r^d$.

Литература

- [1] Wilson R.A. The finite simple groups — London, Dordrecht, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2009. P. 309.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ ВТОРЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Андреева Д.П.

e-mail: dina.kovalkova@gmail.com

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными.

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы и т.д. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \dots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Связь между n -максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Хупертом, установившим в работе [1] сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты получили свое дальнейшее развитие и в работе Л.Я. Полякова [2], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В работе [3] Агравалем была доказана сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S -квазинормальны (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). В более поздней работе [4] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хуперта, рассматривая лишь строго n -максимальные подгруппы для $n = 2, 3$. Заметим попутно, что в работе П. Флавелла [5] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащих строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается. Естественным развитием упомянутых выше результатов стала работа А. Манна [6], в которой автор анализировал строение групп, в которых каждая n -максимальная подгруппа субнормальна.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов

о вторых и третьих максимальных подгруппах. В недавней публикации [7] Ли Широнг получил классификацию ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которой является TI -подгруппой. В работе [8] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [9–11] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамом были получены новые характеристики сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [12] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [13] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами.

В связи с отмеченными выше результатами Хупперта и Манна, Л.А. Шеметковым в 2005 году на Гомельском городском алгебраическом семинаре была поставлена задача установить точное строение конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа. Следующая теорема дает решение поставленной задачи.

Теорема. Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа;
- (2) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа;
- (3) каждая 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G ;
- (4) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа;
- (5) G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Литература

- [1] Huppert B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. 1954. Vol. 60. Pp. 409–434.

-
- [2] *Поляков Л.Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами // Наука и техника. 1966. С. 75–88.
- [3] *Agrawal R.K.* Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 54. Pp. 13–21.
- [4] *Asaad M.* Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal // Acta Math. Hung. 1989. Vol. 54, № 1. Pp. 9–27.
- [5] *Flavell P.* Overgroups of second maximal subgroups // Arch. Math. 1995. Vol. 64. Pp. 277–282.
- [6] *Mann A.* Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. Pp. 395–409.
- [7] *Li Shirong.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. 2000. Vol. 100A, № 1. Pp. 65–71.
- [8] *Guo X.Y., Shum K.P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // Journal of Pure and Applied Algebra. 2003. Vol. 181. Pp. 297–308.
- [9] *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* X -semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. Vol. 315. Pp. 31–41.
- [10] *Li Baojun* New characterizations of finite supersoluble groups // Science in China Series A: Mathematics. 2008. Vol. 50, № 1. Pp. 827–841.
- [11] *Guo W., Skiba A.N.* Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups // J. Algebra. 2009. Vol. 321. Pp. 2843–2860.
- [12] *Guo W., Legchekova H.V., Skiba A.N.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups // Communications in Algebra. 2009. Vol. 37. Pp. 2446–2456.
- [13] *Го В.В., Легчекова Е.В., Сжиба А.Н.* Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 50–359.

ОДНОРОДНОЕ НЕРАСЩЕПИМОЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ С РЕТРАКТОМ $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1/4}$

Башкин М.А.¹

e-mail: m_bashkin@list.ru

В 90-х годах А.Л. Онищиком была поставлена проблема классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с заданным однородным расщепимым супермногообразием, которое называется их ретрактом. Мы покажем, что с однородным расщепимым супермногообразием $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1/4}$ связано одно однородное нерасщепимое супермногообразие.

Воспользуемся тем, что однородные расщепимые супермногообразия над $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с невозрастающими наборами неотрицательных чисел. Через $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1/4}$ обозначим расщепимое супермногообразие, определяемое голоморфным векторным расслоением $\mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ранга 4, представленное в виде прямой суммы линейных расслоений на прямые $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-3} \oplus 2\mathbf{L}_{-2} \oplus \mathbf{L}_0$.

Покроем $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1/4}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид $y = x^{-1}$, $\eta_1 = x^{-3}\xi_1$, $\eta_2 = x^{-2}\xi_2$, $\eta_3 = x^{-2}\xi_3$, $\eta_4 = \xi_4$, где ξ_i и η_i ($i = 1, \dots, 4$) — базисные сечения расслоения \mathbf{E} над U_0 и U_1 соответственно.

Один из подходов к задаче классификации комплексных супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ заключается в следующем. Согласно теореме Грина, классы изоморфных супермногообразий такого вида находятся в биективном соответствии с орбитами группы автоморфизмов соответствующего векторного расслоения \mathbf{E} на множестве когомологий $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\mathcal{O}_{\text{gr}})$ со значениями в пучке $\text{Aut}_{(2)}\mathcal{O}_{\text{gr}}$ автоморфизмов пучка \mathcal{O}_{gr} , тождественных по модулю квадрата подпучка нильпотентных элементов. В некоторых случаях вычисление этих неабелевых когомологий удастся свести к вычислению обычных (абелевых) когомологий со значениями в пучке \mathcal{T}_{gr} векторных полей на $(M, \mathcal{O}_{\text{gr}})$. В нашем случае существует биекция между множеством $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \text{Aut}_{(2)}\mathcal{O}_{\text{gr}})$ и векторным простран-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00230.

ством $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, (\mathcal{T}_{\text{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\text{gr}})_4)$ (см. [1, 2]). При этом как абелевы, так и неабелевы когомологии могут быть описаны при помощи комплекса Чеха, связанного со штейновым открытым покрытием многообразия M . При исследовании супермногообразий на однородность и четную однородность существенное значение имеют критерии подъема на супермногообразии с его ретракта векторных полей и действий групп Ли, связанные с инвариантностью класса когомологий, определяющего супермногообразие, относительно этих действий (см. [3]).

Получено описание четно-однородных и однородных нерасщепимых супермногообразий с ретрактом $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1|4}$. Основным результатом является доказательство того, что с точностью до изоморфизма существует одно однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{1|4}$. В покрытии $\{U_0, U_1\}$ оно может быть задано следующим коциклом:

$$2x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + 3x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Литература

- [1] Башкин М.А., Онищук А.Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой / в сб. «Математика, кибернетика, информатика». Труды международной научной конференции памяти А.Ю. Левина. С. 40–57. — Ярославль: ЯрГУ, 2008.
- [2] Башкин М.А., Онищук А.Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности $1|4$ над комплексной проективной прямой / в сб. «Математика в Ярославском университете. К 30-летию математического факультета». С. 17–32. — Ярославль: ЯрГУ, 2006.
- [3] Onishchik A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. Vol. 16. Pp. 309–333.

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ОБОБЩЕННОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА $GH(6, 6)$

Белоусов И.Н.¹

e-mail: i_belousov@mail.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Для вершин u, w дистанционно регулярного графа, находящихся на расстоянии l друг от друга, через p_{ij}^l обозначается число вершин z с $d(u, z) = i$ и $d(z, w) = j$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный на множестве всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X .

Графом простых чисел $GK(G)$ группы G называется граф, вершинами которого являются простые делители порядка группы G и две вершины p и q которого смежны тогда и только тогда, когда в группе существует элемент порядка pq .

Система инцидентности (X, \mathcal{L}) , где X — множество точек и \mathcal{L} — множество прямых, называется *почти $2n$ -угольником порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке), диаметр графа коллинеарности равен n и для любой пары

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00019), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

$(a, L) \in (X, \mathcal{L})$ на прямой L найдется единственная точка, ближайшая к a в графе коллинеарности. Почти $2n$ -угольник называется *обобщенным $2n$ -угольником*, если любые две точки u, w , находящиеся на расстоянии, меньшем n , лежат на единственном геодезическом пути, идущем от u к w . Обобщенный $2n$ -угольник порядка (s, t) называется *толстым*, если $s > 1$ и $t > 1$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии и две различные вершины которого смежны, если они лежат на прямой.

Фейт и Хигман в [1] показали, что толстые обобщенные $2n$ -угольники существуют лишь для $2 \leq n \leq 5$. Неизвестно, существуют ли толстые обобщенные шестиугольники порядка, отличного от (q, q) , (q, q^3) и (q^3, q) , где q — степень простого числа. В работе [2] Янушка доказал единственность обобщенных шестиугольников порядка (p, p) , где p — простое число. В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{42, 36, 36; 1, 1, 7\}$. Этот граф является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(6, 6)$ (см. [3, гл. 6]) и не содержит n -циклов для $4 \leq n \leq 5$.

В работе удалось доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42, 36, 36; 1, 1, 7\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 31, 43\}$ и G действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ .

Литература

- [1] Feit W., Higman G. The non-existence of certain generalized polygons // J. Algebra. 1964. Vol. 1. Pp. 114–131.
- [2] Yanushka A. Generalized hexagon of order (t, t) // Israel J. Math. 1976. Vol. 23. Pp. 309–324.
- [3] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ЛОКАЛЬНО ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Буриченко В.П., Махнев А.А.¹
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Пусть \mathcal{F} — класс графов. Граф Γ называется *локально \mathcal{F} -графом*, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$. Если класс \mathcal{F} состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то говорят о локально Δ -графах.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Через K_{m_1, \dots, m_n} обозначим полный n -дольный граф, с долями порядков m_1, \dots, m_n . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$t \times n$ -решеткой*, если $|X| = t$, $|Y| = n$ и вершины

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы совместных исследований УрО РАН с НАН Беларуси и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00019).

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ .

Граф Пэли $P(q)$ в качестве вершин имеет элементы поля F_q , $q \equiv 1 \pmod{4}$, и две его вершины a, b смежны, только если $b - a$ является ненулевым квадратом в F_q . Граф Шрикханде — это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и любых вершин u, w , находящихся на расстоянии i , имеем $b_i(u, w) = b_i$, $c_i(u, w) = c_i$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Далее, дистанционно регулярный граф является вполне регулярным с $k = b_0$, $\lambda = k - b_1 - 1$ и $\mu = c_2$. Граф Клейна — это единственный дистанционно регулярный локально семиугольный граф диаметра 3 на 24 вершинах, являющийся 3-накрытием 8-клики.

В работе исследуются локально C_k -графы, где C_k является k -циклом, $k \geq 3$. Такие графы называют также локально k -угольными. Ясно, что связный локально C_3 -граф является полным графом K_4 на четырех вершинах. Связный локально C_n -граф является октаэдром в случае $k = 4$ и графом икосаэдра в случае $k = 5$ (см. предложения 1.1.4 и 1.1.5 из [1]).

В случае $k = 6$ возникает бесконечное двухпараметрическое семейство графов, задаваемых с помощью разбиения плоскости одинаковыми равносторонними треугольниками (см. [2]).

Пример. Конструкция Мэтона. Пусть $q = r\mu + 1$ — степень простого числа, $r > 1$ и μ чётно или q — степень 2. Если V — векторное пространство размерности 2 над полем $F = F_q$ с невырожденной знакопеременной формой B , K — подгруппа из F^* индекса r и $b \in F^*$, то граф Γ с множеством вершин $\{Kv \mid v \in V - \{0\}\}$, в котором вершины Ku, Kv смежны, если $B(u, v) \in bK$, является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{q, q - \mu - 1, 1; 1, \mu, q\}$

(r -накрытием $(q + 1)$ -клики).

Γ является реберно симметричным графом. Степень графа Γ равна μ , и Γ — локально циклический граф, если $\mu = 2$ и q — простое число.

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный локально C_k -граф, $k \geq 4$ и $v \leq 1000$. Тогда Γ — октаэдр или граф с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, $(16, 6, 2, 2)$, $(40, 12, 2, 4)$, $(64, 18, 2, 6)$, $(96, 19, 2, 4)$, $(112, 30, 2, 10)$, $(196, 39, 2, 9)$, $(204, 28, 2, 4)$, $(232, 33, 2, 5)$, $(256, 51, 2, 12)$, $(364, 33, 2, 3)$, $(676, 45, 2, 3)$ или $(690, 52, 2, 4)$.

Теорема 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный локально C_k -граф диаметра, большего 2, и $v \leq 1000$. Тогда верно одно из утверждений:

(1) Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 7; 1, 2, 7\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;

(2) Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, \dots, 21\} - \{10, 16\}$ и $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Литература

- [1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [2] Thomassen C. Tilings of the torus and the Klein bottle and vertex transitive graphs on a fixed surface // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 323. Pp. 605–635.

ОБ M -ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Васильев В.А.

e-mail: vovichx@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Элемент m решетки L называется модулярным (в смысле Куроша), если выполняются следующие условия:

- (1) $x \cup (m \cap z) = (x \cup m) \cap z$ для всех $x, z \in L$ таких, что $x \leq z$;
- (2) $m \cup (y \cap z) = (m \cup y) \cap z$ для всех $y, z \in L$ таких, что $m \leq z$.

Имея дело с решеткой $L(G)$ всех подгрупп группы G , мы приходим к понятию модулярной подгруппы группы G .

Определение 1. Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G , если выполняются следующие условия:

- (1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$;
- (2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Понятие модулярной подгруппы впервые было введено в работе Р. Шмидта [1] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [2] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеристик сверхразрешимых групп. Дополняя эти результаты, мы используем обобщенные модулярные подгруппы для изучения частично сверхразрешимых групп и нильпотентных групп.

Определение 2. Пусть $H \leq G$. Подгруппу, порожденную всеми теми подгруппами из H , которые модулярны в G , назовем модулярным ядром подгруппы H в группе G и обозначим H_{mG} .

Элементы теории модулярных ядер и некоторые приложения такой теории даны в работе [3]. В данном сообщении мы используем это понятие в следующем определении.

Определение 3. Подгруппу H группы G назовем m -добавляемой в G , если в G существует такая подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$.

Данное сообщение посвящено изучению строения групп в зависимости от наличия в них m -добавляемых подгрупп. В частности, найдены новые критерии p -сверхразрешимости и p -нильпотентности групп.

Литература

- [1] *Schmidt R.* Modulare Untergruppen endlicher Gruppen // J. Ill. Math. 1969. Vol. 13. Pp. 358–277.
- [2] *Schmidt R.* Subgroup Lattices of Groups. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
- [3] *Васильев В.А., Скиба А.Н.* Новые характеристики конечных разрешимых групп // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 3. С. 51–58.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДИАЛГЕБР

Воронин В.Ю.¹*e-mail: voronin.vasily@gmail.com*

Диалгеброй называется векторное пространство D с двумя билинейными операциями умножения $\vdash, \dashv: D \times D \rightarrow D$, относительно каждой из которых D является алгеброй. Диалгебра называется *ассоциативной*, если она удовлетворяет тождествам

$$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \dashv z, \quad x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z) \quad (1)$$

и

$$\begin{aligned} (x, y, z)_{\vdash} &:= (x \vdash y) \vdash z - x \vdash (y \vdash z) = 0, \\ (x, y, z)_{\dashv} &:= (x \dashv y) \dashv z - x \dashv (y \dashv z) = 0, \\ (x, y, z)_{\times} &:= (x \vdash y) \dashv z - x \vdash (y \dashv z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тождества (1) называются *0-тождествами*, тождества (2) получаются из тождества ассоциативности, если выбрать переменную и расположить знаки диалгебраических операций, чтобы они указывали на эту переменную. Ассоциативные диалгебры были введены в 1993 году [1], с их помощью строится универсальная обёртывающая для алгебр Лейбница. Далее в литературе появлялись различные типы диалгебр, и, наконец, Колесников [2] из общеалгебраических соображений, основанных на теории операд, показал, как для определённого многообразия алгебр построить соответствующее многообразие диалгебр. В частности, были указаны 3 тождества, определяющие многообразие йордановых диалгебр.

Пусть (D, \vdash, \dashv) — ассоциативная диалгебра. Если определить на множестве D операции

$$a_{(\vdash)} b = \frac{1}{2}(a \vdash b + b \dashv a), \quad a_{(\dashv)} b = \frac{1}{2}(a \dashv b + b \vdash a),$$

то получается новая диалгебра, которую мы будем обозначать $D^{(+)}$. Легко проверить, что эта диалгебра будет йордановой. Йорданову диалгебру J будем называть *специальной*, если J вкладывается в

¹Работа выполнена при поддержке АВИП Рособразования (проект 2.1.1.1.10726), гранта РФФИ 09-01-00157-А, НШ-3669.2010.1 и ФЦП (гос. контракты № 02.740.11.5191, № 14.740.11.0346).

$D^{(+)}$ для некоторой ассоциативной диалгебры D . Йордановы диалгебры, которые не являются специальными, будем называть *исключительными*. Автором доказано следующее предложение, дающее пример исключительной йордановой диалгебры.

Предложение. Пусть (J, \circ) — исключительная йорданова алгебра, причём такая, что из условия $x \circ J = 0$, где $x \in J$, следует $x = 0$. Тогда J , рассматриваемая как диалгебра с одинаковыми операциями $x_{(+)}y := x \circ y$ и $x_{(-)}y := x \circ y$, является исключительной йордановой диалгеброй.

Замечание. Как известно, существует простая исключительная йорданова алгебра Алберта. Она удовлетворяет условиям предложения 8 и, следовательно, будет являться исключительной йордановой диалгеброй.

В работе [3] по аналогии с обычными алгебрами введено понятие *специального тождества* (s -тождества) как тождества, которое выполнено во всех специальных йордановых диалгебрах, но не выполняется во всех йордановых диалгебрах. В работе [3] методами компьютерной алгебры доказано следующее утверждение.

Теорема 1 (Бремнер, Перези). Для йордановых диалгебр нет s -тождеств степени ≤ 7 и существует полилинейное s -тождество степени 8.

В настоящей работе теорема 1 получена как следствие из доказанной теоремы 2 о соответствии полилинейных s -тождеств диалгебр и обычных алгебр, при доказательстве не использовались методы компьютерной алгебры.

Если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен, то через $f(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)$ мы будем обозначать димногчлен, в котором центральной буквой является x_i , то есть он получается из f такой расстановкой знаков диалгебраических операций, что все знаки указывают на x_i . Пусть $g = g(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)$ — димногчлен, тогда через \bar{g} мы будем обозначать многочлен, получающийся из g заменой знаков диалгебраических операций на знак одной операции обычного умножения.

Теорема 2. 1. Пусть $g = g(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейное s -тождество обычных алгебр. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ димногчлен $g(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)$ является полилинейным s -тождеством диалгебр.

2. Пусть $f = f(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)$ — полилинейное s -тождество диалгебр, $f = f_1 + \dots + f_n$, центральной буквой в мономах из многочлена f_j является x_j . Тогда существует номер $j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что \bar{f}_j — полилинейное s -тождество обычных алгебр.

В работе [3] поставлена проблема обобщить классические результаты, известные для йордановых алгебр, на случай диалгебр. В настоящей работе доказаны следующие аналоги теоремы Ширшова.

Теорема 3. Пусть J — однопорождённая йорданова диалгебра. Тогда J специальна.

Теорема 4. Пусть J — свободная двупорождённая йорданова диалгебра. Тогда J специальна.

Следствие. Если тождество от двух переменных выполнено во всех специальных йордановых диалгебрах, то оно выполнено во всех йордановых диалгебрах.

Также доказан аналог теоремы Макдональда.

Теорема 5. Пусть $f = f(x, y, z)$ — димногочлен, линейный по z . Тогда если f выполняется во всех специальных йордановых диалгебрах, то f выполняется во всех йордановых диалгебрах.

Литература

- [1] Loday J.-L., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and homology // Math. Ann. 1993. Vol. 296. Pp. 139–158.
- [2] Колесников П. С. Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 322–339.
- [3] Bremner M., Peresi L. A. Special identities for quasi-Jordan algebras // to appear in Comm. Algebra, arXiv:1008.2723.
- [4] Voronin V. Special and exceptional Jordan dialgebras // preprint, arXiv:1011.3683.

**ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ
С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$
НЕ СУЩЕСТВУЕТ**

Гаврилюк А.Л.¹
e-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Основные обозначения и определения можно найти в [1]. В частности, для графа Γ и вершины $x \in \Gamma$ окрестность вершины x обозначается как $\Gamma(x)$.

Цель данной заметки — доказать, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ не существует. Данный массив указан в таблице допустимых массивов пересечений в [1].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d\}$ и x — произвольная вершина Γ . Окрестность вершины x является регулярным графом степени $a_1 := b_0 - b_1 - c_1$. Матрица смежности Γ имеет точно $d + 1$ различных собственных значений, скажем, $b_0 = \theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$.

Утверждение 1. *Если $\Gamma(x)$ содержит клику размера $c \geq 2$, то выполняется следующее неравенство*

$$c_2 - 1 \geq \frac{c(a_1 + 1) - b_0}{\binom{c}{2}}.$$

Доказательство. См. [2].

Утверждение 2. *Окрестность вершины x имеет второе собственное значение $\leq -\frac{b_1}{\theta_d + 1} - 1$ (при этом второе собственное значение считается равным степени графа a_1 , если $\Gamma(x)$ несвязен).*

Доказательство. См. [1, Th. 4.4.3].

Утверждение 3. *Пусть Δ является связным графом на v вершинах. Если Δ регулярен степени $k < v - 1$ и не является циклом нечетной длины, то Δ содержит клику размера $\geq v/k$.*

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00019), гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1) и программы УрО РАН для молодых ученых.

Доказательство. Из [3, Prop. 4.2.1] следует, что хроматическое число $\chi(\Delta) \leq 1 + k$, при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда Δ является полным графом или циклом нечетной длины. С другой стороны, размер максимальной клики в Δ не меньше, чем $v/\chi(\Delta)$.

Теорема. *Массив $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ не может быть массивом пересечений дистанционно регулярного графа.*

Доказательство. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ (см. [1, стр. 429]). Матрица смежности Γ имеет 4 различных собственных значения: 55, 19, -1 и -5 .

Пусть x является вершиной Γ . По утверждению 2, второе собственное значение $\Gamma(x)$ не больше $36/4 - 1 < a_1 = 18$. Следовательно, граф $\Gamma(x)$ связан. По лемме 3, граф $\Gamma(x)$ содержит коклику размера $\geq 55/18 > 3$. Теперь по лемме 1 имеем $4 - 1 \geq \frac{4(18 + 1) - 55}{\binom{4}{2}} = 3.5$, противоречие. Теорема доказана.

Литература

- [1] *A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier.* Distance-Regular Graphs. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.
- [2] *Jack H. Koolen, Jongyook Park.* Shilla distance-regular graphs // arXiv:0902.3860 [math.CO]
- [3] *A.E. Brouwer, W.H. Haemers.* Spectra of graphs // course notes.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ТОМПСОНА

Горшков И.Б.¹

Пусть G – конечная группа, $N(G)$ – множество порядков сопряженных классов группы G , $\pi(G)$ – множество всех простых делителей ее порядка и $\omega(G)$ – спектр группы G , т. е. множество порядков всех ее элементов. В восьмидесятых годах прошлого столетия Томпсоном была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза Томпсона. Пусть L – конечная простая группа, G – конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$. Тогда $G \simeq L$.

Граф $GK(G) = \langle V(GK(G)), E(GK(G)) \rangle$, где $V(GK(G))$ – множество вершин и $E(GK(G))$ – множество ребер, называется *графом Грюнберга – Кегеля* (или *графом простых чисел*) группы G , если $V(GK(G)) = \pi(G)$ и ребро (r, s) лежит в $E(GK(G))$ тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. В настоящее время получен положительный ответ для большинства конечных простых групп с несвязным графом простых чисел [1], и лишь для двух групп со связным графом простых чисел [2]. В настоящей работе исследуется гипотеза Томпсона для знакопеременных групп степени $p + 3$, где p – простое число, большее 11.

Теорема. Пусть $L \simeq Alt_{p+3}$, G – такая конечная группа с тривиальным центром, что $N(G) = N(L)$. Тогда G неразрешима и обладает единственным неабелевым композиционным фактором.

Литература

- [1] Chen G. Y. On Thompson's conjecture // J. Algebra, Vol. 185. Pp. 396–404 (1996).
- [2] Vasilev A. V. On Thompson's conjecture for groups with connected prime graph // Sib. El. Math. Rep. (<http://semr.math.nsc.ru>), to appear.

¹Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (ИП-344.2008.1) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

О ГРАФАХ ДЕЗА НА 14, 15 И 16 ВЕРШИНАХ

Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.¹

e-mail: 44g@mail.ru, leonidshalaginov@rambler.ru

Все графы, рассматриваемые в данной работе, — неориентированные, без петель и кратных ребер.

Определение 1. Графом Деца с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих смежных.

Определение 2. Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , любые две смежные вершины имеют точно λ общих смежных с ними и две несмежные вершины имеют μ общих смежных.

Определение 3. Точным графом Деца называется граф Деца диаметра 2, не являющийся сильно регулярным.

В этой работе рассматриваются только точные графы Деца.

В статье [1] Эриксона, Фернандо, Хэмерса, Харди и Хеммитера были предложены некоторые конструкции для построения точных графов Деца. В той же статье были найдены все точные графы Деца с числом вершин не более 13, с указанием способа построения. В данной статье мы продолжили эту работу и нашли все точные графы Деца на 14, 15 и 16 вершинах.

Для описания наденных графов нам понадобятся следующие конструкции из статьи [1] (утверждения 1-3).

Пусть G — группа и $D \subset G$. Определим D^{-1} как множество $\{d^{-1} : d \in D\}$ и определим DD^{-1} как мультимножество $\{dd'^{-1} : d, d' \in D\}$ (в DD^{-1} могут быть повторяющиеся элементы). Для подмножеств A и B множества элементов G и целых чисел a и b будем писать $DD^{-1} = aA + bB$, если в DD^{-1} содержится a копий каждого элемента из A и b копий каждого элемента из B .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1) и программы УРО РАН для молодых ученых.

Предложение 1. Пусть D — подмножество элементов группы Γ такое, что

$$(i) |\Gamma| = v \text{ и } |D| = k;$$

(ii) единица группы Γ не содержится в D ;

$$(iii) D^{-1} = D;$$

(iv) $DD^{-1} = aA + bB + ke$, где A , B и $\{e\}$ — разбиение Γ ;

Пусть G — граф, множество вершин которого — все элементы группы Γ , и вершина u смежна с v тогда и только тогда, когда $v^{-1}u \in D$, тогда G — граф Деза с параметрами (v, k, b, a) .

Предложение 2. Пусть G — сильно регулярный граф с параметрами (n, k, λ, μ) , $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$, и с матрицей смежности M . Пусть P — перестановочная матрица, тогда PM — матрица смежности графа Деза тогда и только тогда, когда P задает инволютивный автоморфизм графа G , переставляющий только несмежные вершины.

Определение 4. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — графы. Композиция $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 — граф с набором вершин $V_1 \times V_2$, в котором (u_1, u_2) смежна с (v_1, v_2) тогда и только тогда, когда u_1 смежна с v_1 или $(u_1 = v_1$ и u_2 смежна с $v_2)$.

Предложение 3. Пусть $G_1 = K_x$, полный граф на x вершинах, и $G_2 = yK_2$, y изолированных копий K_2 . Тогда $G_1[G_2]$ — граф Деза с параметрами $(2xy, 1 + 2y(x - 1), 2y(x - 1), 2 + 2y(x - 2))$.

В статье [1] найдены ограничения на параметры графа Деза, наиболее существенное из них заключается в том, что если G — граф Деза с параметрами (v, k, b, a) , то $b - a$ делит $b(n - 1) - k(k - 1)$.

В данной работе найдены все точные графы Деза на 14, 15 и 16 вершинах, и для каждого графа найдена конструкция из [1], позволяющая его получить. Поиск графов осуществлялся с помощью разработанного авторами алгоритма перебора.

Алгоритм был реализован на языке C++. В результате его работы были найдены все наборы параметров, для которых точные графы Деза существуют. Но для каждого набора нашлось не менее

нескольких тысяч, а для некоторых — и десятки тысяч графов. Поэтому была поставлена задача поиска среди этих графов всех неизоморфных и построения найденных графов с использованием приведенных выше конструкций. Так как в общем случае неизвестно существование полиномиального алгоритма проверки изоморфизма графов, то задача решалась отдельно для каждого набора параметров. В алгоритм вводились ограничения на перебор, соответствующие заданию нумерации вершин графа.

Найденные неизоморфные графы приведены в таблице, для каждого графа указана конструкция, с помощью которой он был получен.

Параметры точных графов Деца на 14, 15 и 16 вершинах

Параметры	Конструкция
(14,9,6,4)	1
(15,6,3,1)	2
(16,5,2,1)	1
(16,7,4,2)	1
(16,7,4,2)	1
(16,8,4,2)	1
(16,9,6,4)	2
(16,9,6,4)	2
(16,9,8,2)	1, 3
(16,11,8,6)	1
(16,12,10,8)	1
(16,13,12,10)	1, 3

Литература

- [1] *Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J.* Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // *J. Comb. Designs.* 1999. Vol. 7. Pp. 359–405.

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (245, 64, 18, 16)

Гутнова А.К., Махнев А.А.¹
e-mail: gutnovaalina@gmail.com

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Пусть \mathcal{F} — класс графов. Граф Γ называется *локально \mathcal{F} -графом*, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$. Если класс \mathcal{F} состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то говорят о локально Δ -графах.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

В [1] классифицированы связанные вполне регулярные локально псевдо- $GQ(3, 5)$ -графы. Если диаметр графа равен 2, то граф имеет параметры (245, 64, 18, 16). В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (245, 64, 18, 16) и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u, u^g) таких, что $d(u, u^g) = i$.

Теорема. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (245, 64, 18, 16), g — элемент простого порядка p из $\text{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00019), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УРО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

(1) Ω — пустой граф, ($p = 5$ и $\alpha_1(g)$ делится на 70) или ($p = 7$ и $\alpha_1(g)$ делится на 98);

(2) Ω является n -кликкой, и верно ровно одно из следующих утверждений:

(i) $n = 5$; $p = 3$, $\alpha_1(g) = 42r + 12$ или $p = 5$, $\alpha_1(g) = 70s - 30$;

(ii) $n = 8$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 42r - 6$;

(iii) $n = 10$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 70s + 10$;

(iv) $n = 11$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 42r + 18$;

(3) Ω является m -кликкой, $p = 2$, m нечетно, $5 \leq m \leq 21$ и $\alpha_1(g) - 8m$ делится на 14;

(4) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 13$.

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть Γ является сильно регулярным графом, g — элемент порядка p группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ и χ — характер проекции мономиального представления группы G на подпространство размерности t собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l , не кратного p , и $t - \chi(g)$ делится на p .

Доказательство. Эта лемма 2 из [2].

Лемма 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (245, 64, 18, 16). Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ содержит подграф $K_{m,n}$, то $mn \leq 36$;

(2) значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 144, на элементе $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (8\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/14 + 4$ и если $|g| = p$ — простое число, то $144 - \chi_2(g)$ делится на p .

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (245, 64, 18, 16), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Лемма 3. Если Ω — пустой граф, то либо (1) $p = 5$, $\alpha_1(g) \in \{0, 70, 140, 210\}$, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) \in \{0, 98, 196\}$.

Доказательство. Так как $245 = 5 \cdot 49$, то $p \in \{5, 7\}$.

Пусть $p = 5$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 70.

Пусть $p = 7$. Из леммы 2 следует, что $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 5$ и $100 - \chi_1(g)$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 98. Лемма доказана.

В леммах 4–6 предполагается, что $\Omega = \text{Fix}(g)$ содержит вершину a . Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 4. Пусть Ω является n -кликкой. Тогда выполняется одно из утверждений:

(1) $n = 5$ и либо ($p = 3$, $\alpha_1(g) = 42r + 12$), либо ($p = 5$, $\alpha_1(g) = 70s - 30$);

(2) $n = 8$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 42r - 6$;

(3) $n = 10$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 70s + 10$;

(4) $n = 11$, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 42r + 18$.

Лемма 5. Пусть Ω является t -коккликой, $t > 1$. Тогда $p = 2$, t нечетно, $5 \leq t \leq 21$ и $\alpha_1(g) - 8t$ делится на 14.

Если Ω является объединением t ($t \geq 2$) изолированных клик, то Ω — коклика.

Лемма 6. Выполняются следующие утверждения:

(1) если $a \in \Omega$ и $[a]$ содержится в Ω , то $p \leq 3$;

(2) Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18, 16)$ и $p \leq 13$.

Теорема следует из лемм 3–6.

Литература

- [1] Гутнова А.К., Махнев А.А. Графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(3, 5)$ // Теория групп и ее приложения. Труды восьмой Международной школы-конференции по теории групп. Нальчик. 2010. С. 70–76.
- [2] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Доклады академии наук. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.

КРАТНО Ω -РАССЛОЕННЫЕ ФОРМАЦИИ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ T -ГРУПП ДЛИНЫ 2

Демина Е.Н.

e-mail: DeminaENmf@yandex.ru

Аддитивная группа G с нулевым элементом 0 называется мультиоператорной T -группой с системой мультиоператоров T (или, коротко, T -группой), если в G задана еще некоторая система n -арных алгебраических операций T при некоторых n , удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n -арна (см. [1]; [2, гл. III]; [3, гл. VI, с. 356]). Используемые обозначения и определения можно найти в [4–6]. Пусть \mathfrak{C} – класс всех T -групп с конечными композиционными рядами, \mathfrak{I} – класс всех простых T -групп, Ω – непустой подкласс класса \mathfrak{I} , $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Все рассматриваемые T -группы принадлежат классу \mathfrak{C} . Функция $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации } T\text{-групп}\}$ называется ΩF -функцией; функция $\varphi: \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга } T\text{-групп}\}$ называется FR -функцией. Формация $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{R}(G))$ называется Ω -расслоенной формацией T -групп с Ω -спутником f и направлением φ или, коротко, ΩF -формацией. Обозначим ΩF_n^φ – множество всех n -кратно Ω -расслоенных \mathfrak{C} -формаций, $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ – ΩF_n^φ -формация, порожденная непустым множеством T -групп \mathfrak{X} .

Определение. Пусть Θ – полная модулярная решетка формаций мультиоператорных T -групп, 0_Θ – нуль решетки Θ . Будем говорить, что Θ -формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ -длину n , и обозначать $l_\Theta(\mathfrak{F}) = n$, если существует такая совокупность Θ -формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$, $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F}_{i-1} – максимальная Θ -подформация \mathfrak{C} -формации \mathfrak{F}_i , $i = 1, \dots, n$ [7].

Лемма 1. [5, теорема 4] ΩF_n^φ – полная и модулярная решетка для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ .

Лемма 2. Пусть \mathfrak{F} – непустая \mathfrak{C} -формация с произвольным направлением φ из ΩF_n^φ , $n \in \mathbf{N}_0$. Тогда и только тогда $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$, когда $\mathfrak{F} = (0)$.

Лемма 3. Пусть \mathfrak{F} – непустая \mathfrak{C} -формация с произвольным направлением φ из ΩF_n^φ , $n \in \mathbf{N}_0$. Если $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$, где $k \in \mathbf{N}$, то $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, где G – T -группа.

Доказательство. Применим индукцию по k . Пусть $k = 1$ и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$. Тогда по лемме 2 $\mathfrak{F} = (0) = \Omega F_n(\{0\}, \varphi)$, где $\{0\}$ – нулевая T -группа. Допустим, что утверждение справедливо при ΩF_n^φ -длине, равной $k - 1$. Пусть \mathfrak{F} – ΩF_n^φ -формация и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$. Тогда \mathfrak{F} обладает такой максимальной ΩF_n^φ -подформацией \mathfrak{H} , что $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{H}) = k - 1$. По предположению индукции, $\mathfrak{H} = \Omega F_n(H, \varphi)$, где H – T -группа. Выберем T -группу G с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, и пусть $G_1 = G \oplus H$. Тогда $G_1 \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}_1 = \Omega F_n(G_1, \varphi)$. Так как $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{H}) = k - 1$ и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} = \Omega F_n(G_1, \varphi)$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть \mathfrak{F} – непустая ненулевая \mathfrak{C} -формация с произвольным направлением φ из ΩF_n^φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда и только тогда $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$, когда $\mathfrak{F} = \Omega F_n(A, \varphi)$, где A – простая T -группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \in \Omega F_n^\varphi$ и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$, тогда по лемме 2 $\mathfrak{F} \neq (0)$. Выберем $\{0\} \neq G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}$, то существует идеал $N \triangleleft G$ такой, что G/N – простая T -группа. Поскольку $G/N \neq \{0\}$, то $\emptyset \subset (0) \subset \Omega F_n(G/N, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. По условию $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$, значит $\Omega F_n(G/N, \varphi) = \mathfrak{F}$. Таким образом, \mathfrak{F} порождается простой T -группой.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(A, \varphi)$, где A – простая T -группа. Индукцией по n покажем, что $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$. Пусть $n = 0$, $\mathfrak{F} = \text{form} A$ и \mathfrak{H} – непустая подформация из \mathfrak{F} . Если $\mathfrak{H} \neq (0)$, то по лемме 4 [6] \mathfrak{H} содержит T -группу G , которая является прямой суммой конечного числа ненулевых идеалов, изоморфных T -группе A . Тогда G содержит идеал N такой, что $\bar{G} = G/N \cong A$. Так как $\bar{G} \in \mathfrak{H}$, то $\text{form} \bar{G} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $\text{form} \bar{G} = \text{form}(\bar{G}) = \text{form}(A) = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Следовательно, \mathfrak{F} содержит в качестве подформаций лишь \emptyset , (0) и \mathfrak{F} , таким образом $l_{\Omega F_{n_0}^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$. Пусть $n \geq 1$ и утверждение верно для любых натуральных чисел, меньших n . Ввиду теоремы 4 [5], $\mathfrak{F} = \Omega F_n(A, \varphi)$ обладает единственным минимальным ΩF_{n-1}^φ -спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega F_{n-1}(A/O_\Omega(A), \varphi)$, $f(B) = \Omega F_{n-1}(A/A_{\varphi(B)}, \varphi)$ для всех $B \in \Omega \cap \mathfrak{K}(A)$, и $f(B) = \emptyset$, если $B \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(A)$. Предположим, что $\mathfrak{H} \in \Omega F_n^\varphi$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если h – минимальный ΩF_{n-1}^φ -спутник \mathfrak{H} , то $h \leq f$ и $h(B) = \Omega F_{n-1}^\varphi$ -подформация $f(B)$, для всех

$B \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Рассмотрим случай, когда $A \in \Omega$. При $A \notin \varphi(A)$ получаем $f(\Omega') = (0)$, $f(A) = \Omega F_{n-1}(A, \varphi)$ и $f(B) = \circlearrowleft$ для $B \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(A)$. По предположению индукции $l_{\Omega F_{n-1}^\varphi}(f(A)) = 2$ и $f(A)$ содержит в качестве ΩF_{n-1}^φ -подформаций лишь $\circlearrowleft, (0)$ и $\Omega F_{n-1}(A, \varphi)$, значит, $\mathfrak{H} = \circlearrowleft, (0)$ или \mathfrak{F} . Если $A \in \varphi(A)$, то $f(\Omega') = (0)$, $f(A) = (0)$ и $f(B) = \circlearrowleft$ для $B \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(A)$. По лемме 2 $l_{\Omega F_{n-1}^\varphi}(f(A)) = 1$ и $f(A)$ содержит в качестве ΩF_{n-1}^φ -подформаций лишь \circlearrowleft и (0) , значит, $\mathfrak{H} = \circlearrowleft$ или (0) . В случае, когда $A \notin \Omega$, получаем $f(\Omega') = \Omega F_{n-1}(A, \varphi)$ и $f(B) = \circlearrowleft$ для любого $B \in \Omega$. Тогда по предположению индукции $l_{\Omega F_{n-1}^\varphi}(f(\Omega')) = 2$ и $f(\Omega')$ содержит в качестве ΩF_{n-1}^φ -подформаций лишь $\circlearrowleft, (0)$ и $\Omega F_{n-1}(A, \varphi)$. Отсюда $\mathfrak{H} = \circlearrowleft, (0)$ или \mathfrak{F} . Таким образом, во всех случаях $\mathfrak{H} = \circlearrowleft, (0)$ или \mathfrak{F} и $l_{\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{H}) = 2$. Теорема доказана.

Литература

- [1] *Higgins P.J.* Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6, № 3. Pp. 366–416.
- [2] *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.
- [3] *Скорняков Л.А.* Общая алгебра. Т. 2. — М.: Наука, 1991.
- [4] *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989.
- [5] *Ведерников В.А., Демина Е.Н.* Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп // Сиб. матем. журнал. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.
- [6] *Демина Е.Н.* Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций мультиоператорных T -групп / в сб. «Теория групп и ее приложения». Труды восьмой межд. школы-конф., посвященной 75-летию В.А. Белоногова. С. 86–93. — Каб.-Балк. ун-т: Нальчик, 2010.
- [7] *Скиба А.Н.* О локальных формациях длины 5 / в кн. «Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп». С. 135–149. — Минск: Наука и техника, 1986.

О ГРУППАХ ШУНКОВА С ОДНИМ УСЛОВИЕМ НАСЫЩЕННОСТИ

Дуж А.А., Созутов А.И., Филиппов К.А.¹
e-mail: anyaduzh@yandex.ru

Группа G насыщена группами из множества X , если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G (возможно, совпадающей с K), изоморфной некоторой группе из X ; если при этом для любой группы из X в G найдется изоморфная подгруппа, то говорят, что группа G насыщена множеством групп X , а X называют насыщающим множеством группы G . Многие известные группы «бернсайдова типа» насыщены конечными множествами конечных групп. Поэтому группы, насыщенные заданными множествами конечных групп, изучаются также при дополнительных условиях конечности [1–3], введенных в теорию групп В.П. Шунковым. В работе [3] доказана локальная конечность периодической группы Шункова, насыщенной группами множества $\{L_2(5) \times I_n | n = 1, 2, \dots\}$, где I_n — элементарные абелевы 2-группы ранга n . Напомним, что в группах Шункова любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу и это свойство переносится на сечения по конечным подгруппам.

Мы доказываем более общий результат.

Пусть p — фиксированное нечетное число. В нашей работе группа насыщена группами из множества X_p , состоящего из групп вида $M \times Q$, где Q — единичная или произвольная конечная 2-группа, M принадлежит фиксированному конечному множеству Y_p конечных простых неабелевых групп $L_2(q)$, $Sz(q)$ или $Re(q)$ и содержит элемент порядка p с нечетным порядком централизатора в M . Итак, X_p — конечное или счетное множество, состоящее из конечных неразрешимых групп L указанного вида $L = M \times O_2(L)$.

Теорема. *Если периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества X_p , то все её элементы конечных нечетных порядков порождают конечную простую неабелеву характеристическую в G подгруппу L , $C_G(L) = O_2(G)$ и $G = L \times O_2(G)$.*

¹Работа поддержана РФФИ (проект 10-01-00509-а).

Литература

- [1] Шлепкин А.К. О сопряженно бипрimitивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 606–615.
- [2] Шлепкин А.К. О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 1. С. 96–125.
- [3] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических и проективных специальных линейных групп // Труды ИММ УрО РАН. Т. 16 (2010), № 2.
- [4] Шлепкин А.К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями // Дисс. докт. физ.-мат. наук, Красноярск, 1998.

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $K = 11, \lambda = 4$ Ефимов К.С., Махнев А.А.¹*e-mail: kysulya_ne@mail.ru*

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово «подграф» будет означать индуцированный подграф. Пусть \mathcal{F} — семейство графов. Граф Γ называется локально \mathcal{F} графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ -подграфом (μ -подграфом).

Через K_{m_1, \dots, m_n} обозначим полный n -дольный граф, с долями порядков m_1, \dots, m_n . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00019).

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликкой* (коккликкой).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в регулярном графе Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Положим $a_i(u, w) = k - b_i(u, w) - c_i(u, w)$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и любых вершин u, w , находящихся на расстоянии i в Γ , имеем $b_i(u, w) = b_i$ и $c_i(u, w) = c_i$.

При изучении реберно регулярных графов с $k \geq f(b_1)$ для некоторых функций f удается установить оценку $v \leq g(k)$ (или получить описание графов, для которых не выполняется оценка $v \leq g(k)$). Так, в лемме 1.4.2 [1] доказано, что если Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $k \geq 3b_1$, то диаметр Γ равен 2 и $v \leq 2k - 2$. Фактически доказано, что $v < k - 2 + 3b_1 + 3/(b_1 + 1)$, и уточнение границы для числа вершин потребует описания графов с малыми значениями b_1 и графов, насыщенных хорошими парами вершин.

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{n \times 2}$. В работах А.А. Махнева и его учеников были изучены вполне регулярные графы с $2 \leq b_1 \leq 5$. В статье [2] изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ было редуцировано к исследованию графов с $k \in \{10, 11, 12\}$. В статье [3] доказано

Предложение. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 10, 3, \mu)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) диаметр Γ равен 2 и Γ является дополнительным графом к треугольному графу $T(7)$ или одним из десяти графов с параметрами $(28, 10, 3, 4)$;

(2) $\mu = 3$, диаметр Γ равен 3 и $34 \leq v \leq 37$;

(3) $\mu = 2$ и Γ является графом Конвея-Смита или графом Доро.

В данной работе начато изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ и $k = 11$.

Теорема. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 11, 4, 3)$. Тогда диаметр Γ равен 3 и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $k_3 = 2$, для любой вершины $u \in \Gamma$ расстояние между двумя вершинами в $\Gamma_3(u)$ равно 1 или 3, причем граф Γ не является антиподальным;

(2) $k_3 = 8$ и

(i) если $b_2(u, x) = 4$ для некоторой вершины $x \in \Gamma_2(u)$, то либо $[x] \cap \Gamma_2(u)$ — клика и $[x] \cap \Gamma_3(u)$ является 3-путем, либо $[x] \cap \Gamma_2(u)$ содержит две изолированные вершины и ребро, и $[x] \cap \Gamma_3(u)$ — четырехугольник,

(ii) если y, z — две вершины из $\Gamma_3(u)$, то $d(y, z) \leq 2$.

Литература

- [1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. — Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [2] Ефимов К.С., Махнев А.А. Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ // Журнал Сибирского Федерального ун-та, 2009. Т. 2, № 1. С. 63–77.
- [3] Ефимов К.С., Махнев А.А., Нирова М.С. О вполне регулярных графах с $k = 10, \lambda = 3$ // Труды ИММ УрО РАН, 2010. Т. 16, № 2. С. 75–90.

СЛЕДЫ НА АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Жураев И.¹
e-mail: ijto64@mail.ru

Пусть M – однородная алгебра фон Неймана типа I_n с центром Z . Как известно, в этом случае $M \cong M_n(Z)$ [2], где $M_n(Z)$ – квадратная матрица $n \times n$ над центром Z . Пусть $S(M)$ – $*$ алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M . Отсюда $S(M) \cong M_n(S(Z))$ [1], где $S(Z)$ – центр $S(M)$, и любой элемент из $M_n(S(Z))$ можно представить в виде $x = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} e_{ij}$ где $\lambda_{ij} \in S(Z)$, e_{ij} – матричные единицы. Пусть A – некоторая алгебра.

Определение 1. Линейный оператор $L : A \rightarrow A$ называется левым дифференцированием, если

$$L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y)], \forall x, y \in A.$$

Здесь $[x, y]$ означает коммутатор элементов x, y , т.е. $[x, y] = xy - yx$.

Определение 2. Линейный оператор $\tau : A \rightarrow Z(A)$ называется центрозначным следом, если

$$\tau(xy) = \tau(yx), \forall x, y \in A,$$

где $Z(A)$ – центр A .

Пусть $L : S(M) \rightarrow S(M)$ – лиево дифференцирование и $\psi = L|_{S(Z)}$, $\tau(x) = \sum_{i=1}^n \psi(\lambda_{ii})$, где $x = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} e_{ij}$.

Теорема. *Отображение τ является линейным и*

$$\tau(xy) = \tau(yx).$$

Литература

- [1] *S. Albeverio, Sh.A. Ayupov, K.K. Kudayberganov.* Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras. J. Func. Anal. 256. 2009. Pp. 2917–2943.
- [2] *S. Sakai.* C^* -Algebras and W^* Algebras. Spriger-Verlag, 1971.

¹Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент.

ОБ ОБОБЩЕННОМ ДУБЛЕ КАНТОРА

Кайгородов И.Б.¹
e-mail: kib@math.nsc.ru

В свое время в работе [1] была предложена конструкция супералгебры, которая получила название Дубль Кантора.

Дубль Кантора. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{, \} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ — суперкосимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть *скобкой*. По супералгебре Γ и скобке $\{, \}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{, \})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{, \}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ . Считаем, что $D(a) = \{a, 1\}$. Пусть a, b — однородные элементы из Γ . Тогда операция умножения \cdot на $J(\Gamma, \{, \})$ определяется формулами:

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = (ab)x, ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 + \Gamma_1 x, M = \Gamma_1 + \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{, \}) = A \oplus M$ является \mathbb{Z}_2 -градуированной алгеброй.

Для унитарной супералгебры скобка $\{, \}$ называется йордановой, если при однородных элементах $f_i, g_i, h_i \in \Gamma_i$ выполняются следующие соотношения:

$$\{f_i, g_j h_k\} = \{f_i, g_j\}h_k + (-1)^{ij}g_j\{f_i, h_k\} - D(f_i)g_j h_k,$$

$$\{f_i, \{g_j, h_k\}\} = \{\{f_i, g_j\}, h_k\} + (-1)^{ij}\{g_j, \{f_i, h_k\}\} +$$

$$+ D(f_i)\{g_j, h_k\} + (-1)^{ji}D(g_j)\{h_k, f_i\} + (-1)^{k(j+i)}D(h_k)\{f_i, g_j\}.$$

В дальнейшем элементы k_i, f_i, g_i, h_i мы будем всегда считать однородными.

¹Работа выполнена при поддержке АБЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429, № 02.740.11.5191, № 14.740.11.0346), интеграционного проекта СО РАН № 97, Лаврентьевского гранта для коллективов молодых ученых СО РАН, постановление Президиума СО РАН № 43 от 04.02.2010.

Хорошо известно [3, 4], что супералгебра $J(\Gamma, \{, \})$ йорданова тогда и только тогда, когда скобка $\{, \}$ является йордановой. В силу йордановости супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$ получаем, что $D : a \rightarrow \{a, 1\}$ — дифференцирование супералгебры Γ .

Если D — нулевое дифференцирование, то $\{, \}$ является скобкой Пуассона, т.е.

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{p(a)p(b)}b\{a, c\}$$

и Γ — супералгебра Ли относительно операции $\{, \}$. Произвольная скобка Пуассона является йордановой скобкой [2].

Хорошо известно [3, 4], что йорданова супералгебра $J = \Gamma + \Gamma x$, полученная с помощью процесса удвоения Кантора, будет являться простой тогда и только тогда, когда Γ не имеет ненулевых идеалов V с условием $\{\Gamma, V\} \subseteq V$.

Обобщенный дубль Кантора. Нами начато изучение обобщения супералгебры Дубль Кантора, так называемого «обобщенного дубля Кантора». Мы ослабили условие унитарности и суперкоммутативности супералгебры Γ и построили супералгебру $J(\Gamma, \{, \})$ по аналогии с вышеприведенной конструкцией Дубля Кантора. Если супералгебра Γ обладает дифференцированием D , то, задав скобку $\{, \}$ по правилу $\{a, b\} = D(a) - aD(b)$, мы получим супералгебру векторного типа (не обязательно унитарную).

Легко заметить, что условие простоты супералгебры $J(\Gamma, \{, \})$ влечет отсутствие идеалов I в супералгебре Γ с условием $\{I, \Gamma\} \subseteq I$. В противном случае, в супералгебре $J(\Gamma, \{, \})$ мы имели бы ненулевой градуированный идеал $I + Ix$.

Скобка $\{, \}$, определенная на супералгебре Γ , называется йордановой, если

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j)l} \{\{f_i, h_k\}g_j, k_l\} + (-1)^{(k+j)i} \{\{h_k, k_l\}g_j, f_i\} + \\ & + (-1)^{(l+j)k} \{\{k_l, f_i\}g_j, h_k\} = (-1)^{(i+j)l} \{f_i, h_k\} \{g_j, k_l\} + \\ & + (-1)^{(k+j)i} \{h_k, k_l\} \{g_j, f_i\} + (-1)^{(l+j)k} \{k_l, f_i\} \{g_j, h_k\}; \\ & (-1)^{(k+j)i} (\{h_k k_l, g_j\} f_i - h_k k_l \{g_j, f_i\}) = \\ & = (-1)^{(l+j)k} (\{k_l f_i, g_j\} h_k - k_l f_i \{g_j, h_k\}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(i+j)l} (\{f_i h_k g_j, k_l\} - f_i h_k \{g_j, k_l\}) = \\
& = (-1)^{(k+j)i} (\{h_k k_l, g_j\} f_i - \{h_k k_l, g_j f_i\}) + \\
& + (-1)^{(l+j)k} (\{k_l f_i, g_j\} h_k - \{k_l f_i, g_j h_k\}).
\end{aligned}$$

Таким образом [5], была получена

Теорема. *Обобщенный дубль Кантора $J(\Gamma, \{, \})$ является йордановой супералгеброй тогда и только тогда, когда скобка $\{, \}$ является йордановой и супералгебра Γ — суперкоммутативна.*

О δ -дифференцированиях обобщенного дубля Кантора.

В дальнейшем нами были изучены некоторые вопросы описания δ -дифференцирований обобщенного дубля Кантора. Исходя из известных примеров нетривиальных (-1) -дифференцирований для алгебры sl_2 и нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебры Витта W_1 , мы получаем новые примеры нетривиальных (-1) -дифференцирований и $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр Ли.

Литература

- [1] Кантор И. Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона / в сб. «Алгебра и анализ», Томск, изд-во ТГУ (1989), с. 55–80.
- [2] Kantor I. L. Connection between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras / in «Lie Theory, Differential Equations and Representation Theory», publications in CRM, Montreal (1990). Pp. 213–225.
- [3] King D., McCrimmon K. The Kantor construction of Jordan Superalgebras // Comm. Algebra. Vol. 20. 1992. № 1. Pp. 109–126.
- [4] King D., McCrimmon K. The Kantor doubling process revisited // Comm. Algebra. Vol. 23. 1995. № 1. Pp. 357–372.
- [5] Кайгородов И. Б. Об обобщенном дубле Кантора // Вестник Самарского гос. университета. Вып. 78. 2010. № 4. С. 42–50.

УСЛОВИЯ P -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ И P -НИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Ковалева В.А.

e-mail: vika.kovalyova@rambler.ru

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Пусть A , K и H — подгруппы группы G и $K \leq H \leq G$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K, H) , если $AH = AK$; A изолирует пару (K, H) , если $A \cap H = A \cap K$ [1]. Пара (K, H) из G называется максимальной, если K — максимальная подгруппа в H . Напомним, что подгруппа H называется дополняемой в G , если существует такая подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K = 1$.

Целью данного сообщения является анализ следующего обобщение понятия дополняемых подгрупп.

Определение. Пусть A — подгруппа группы G . Тогда мы говорим, что A является t -добавляемой в G , если в G существуют такие подгруппы T и C , что $G = AT$, $T \cap A \leq C \leq A$ и C покрывает или изолирует всякую максимальную пару группы G .

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — группа и p — такой простой делитель порядка группы G , что $(|G|, p-1) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если каждая минимальная подгруппа нечетного порядка группы G t -добавляема в G , то G является $2'$ -сверхразрешимой.

(2) Если группа G разрешима и каждая подгруппа порядка 2 группы G дополняема в G , то G 2-нильпотентна.

(3) Если каждая максимальная подгруппа силовой p -подгруппы P группы G t -добавляема в G , то группа G p -нильпотентна.

Следствие 1. [2, IV, теорема 5.7] Если каждая минимальная подгруппа группы G нормальна в G , то коммутант G' группы G является 2-замкнутой подгруппой.

Следствие 2. (Бакли, [3]) Пусть G — группа нечетного порядка. Если каждая минимальная подгруппа группы G нормальна в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3. (Баллистер-Болише, Го, [4]) Если каждая минимальная подгруппа группы G дополняема в G , то группа G сверхразрешима.

Следствие 4. (Ванг, [5]) Пусть G — группа и P — силовская p -подгруппа из G , где p — такое простое число, что $(|G|, p - 1) = 1$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа силовской p -подгруппы P c -дополняема в G . Тогда G p -нильпотентна.

Литература

- [1] Ковалева В.А., Скиба А.Н. Конечные группы с обобщенным условием покрытия и изолирования для подгрупп // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2009. № 2(53). С. 145–149.
- [2] Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
- [3] Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. № 15. Pp. 15–17.
- [4] Ballester-Boliches A., Guo X.Y. On complemented subgroups of finite groups // Arch. Math. 1999. № 72. Pp. 161–166.
- [5] Wang Y. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c -Supplemented // J. Algebra. 2000. № 224. Pp. 464–78.

О КОНЕЧНЫХ ЧЕТЫРЕПРИМАРНЫХ ГРУППАХ С НЕСВЯЗНЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Кондратьев А.С., Храмцов И.В.¹

e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, ihramtsov@gmail.com

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости – характеристики группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примером такой проблемы является проблема распознаваемости конечных групп по графу простых чисел.

Пусть G – конечная группа. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество всех его простых делителей. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$. Через $\omega(G)$ обозначается *спектр* группы G , т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга – Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G , в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

Группа G называется *распознаваемой (по спектру)*, если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G . С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В.Д. Мазурова [1]) тесно связано новое перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

В 2003 г. в работе Хаги [2] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу простых чисел, а именно, некоторые спорадические простые группы, а также получено некоторое описание (но не полная классификация) конечных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S – спорадическая простая группа.

В дальнейшем в работах А.В. Заварницина [3] и нескольких иран-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

ских математиков была установлена распознаваемость по графу простых чисел групп $L_2(q)$ для некоторых q , ${}^2G_2(q)$ и $G_2(7)$. В работах [4, 5] была доказана распознаваемость по графу простых чисел группы $L_{16}(2)$, что дало первый пример распознаваемой по графу простых чисел группы, для которой этот граф связан.

Возникает также интересная общая задача: описать все конечные группы, графы простых чисел которых изоморфны графу с заданным свойством. Авторы исследуют конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет небольшое число вершин. При этом можно пользоваться имеющимися результатами о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [6, 7]), но возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями и расширениями конечных почти простых групп.

В своей недавней работе [8] авторы рассмотрели случай, когда несвязный граф простых чисел конечной группы имеет две или три вершины.

Основным результатом данной работы является некоторое предварительное описание конечных групп G , граф простых чисел которых имеет точно четыре вершины (в этом случае группа G называется *четырепримарной*) и несвязен. Доказана следующая

Теорема. Пусть G – конечная *четырепримарная* группа с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

- 1) G – группа Фробениуса;
- 2) G – двойная группа Фробениуса, т.е. в G существуют такие подгруппы A , B и C , что $G = ABC$, A и AB нормальные подгруппы в G , AB и BC – группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно;
- 3) $\overline{G} \cong L_2(2^p)$, где p и $2^p - 1$ – простые числа, $p \geq 5$, $|\pi(2^p + 1)| = 2$;
- 4) $\overline{G} \cong L_2(3^p)$, где p – нечетное простое число, и $|\pi(2^p \pm 1)| = 2$;
- 5) $\overline{G} \cong L_2(p)$, где p – простое число, $p \geq 5$ и $|\pi(p^2 - 1)| = 3$;
- 6) $\overline{G} \cong A_7, S_7, A_8, S_8, A_9, L_2(16), L_2(16) : 2, \text{Aut}(L_2(16)), L_2(25), L_2(25) : 2, L_2(49), L_2(49) : 2_1, L_2(49) : 2_3, L_2(81), L_2(81) : 2, L_3(4), L_3(4) : 2, L_3(5), \text{Aut}(L_3(5)), L_3(7), L_3(7) : 2, L_3(8), L_3(8) : 2, L_3(8) : 3, \text{Aut}(L_3(8)), L_4(3), L_4(3) : 2_2, L_4(3) : 2_3, U_3(4), U_3(4) : 2, \text{Aut}(U_3(4)), U_3(5), U_3(5) : 2, U_3(7), \text{Aut}(U_3(7)), U_3(8), U_3(8) : 3_1, U_3(8) : 3_3, U_3(9), U_3(9) : 2, \text{Aut}(U_3(9)), U_4(3), U_4(3) : 2_2, U_4(3) : 2_3, U_5(2),$

$Aut(U_5(2)), S_4(4), S_4(4) : 2, Aut(S_4(4)), S_4(5), S_4(7), S_6(2), O_8^+(2), G_2(3), Aut(G_2(3)), {}^3D_4(2), Aut({}^3D_4(2)), Sz(8), Sz(32), Aut(Sz(32)), M_{11}, M_{12}, Aut(M_{12}), J_2.$

Здесь через $F(G)$ обозначена подгруппа Фиттинга группы G . Обозначения конечных простых групп и их автоморфных расширений взяты из [9] и [10].

Литература

- [1] *В.Д. Мазуров*. Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
- [2] *М. Hagie*. The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, № 9. Pp. 4405–4424.
- [3] *А.В. Заварницин*. О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
- [4] *Behrooz Khosravi, Bahman Khosravi, Behnam Khosravi*. A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph // Manuscripta math. 2008. Vol. 126. Pp. 49–58.
- [5] *А.В. Заварницин*. Uniqueness of the prime graph of $L_{16}(2)$ // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Т. 7. С. 119–121.
- [6] *J.S. Williams*. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. Pp. 487–513.
- [7] *А.С. Кондратьев*. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
- [8] *А.С. Кондратьев, И.В. Храмов*. О конечных трипримарных группах // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
- [9] *J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson*. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [10] *The GAP Group*. GAP – Groups, algorithms, and programming. Vers. 4.4.2. URL: <http://www.gap-system.org>.

ОБРАТИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КОЛЬЦАХ ВЫЧЕТОВ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ

Кривова А.С.
e-mail: leska.nastya@mail.ru

В [1] была показана важность изучения обратимых элементов колец вычетов колец целых подполей круговых полей (эти подполя называются также абелевыми полями). Важнейшим классом таких полей являются квадратичные поля, для которых в [2] найдены экспоненты мультипликативных групп колец вычетов колец целых.

В данной работе продолжено изучение обратимости элементов колец вычетов по простому натуральному модулю колец целых квадратичных полей. Отметим, что в силу результатов из [1] это позволяет получить информацию об обратимости элементов колец вычетов по любому натуральному модулю.

Теорема 1. *Пусть K — конечное кольцо. Тогда множество необратимых элементов совпадает с множеством делителей нуля.*

С использованием этой теоремы и некоторых технических результатов о нильпотентности элементов в кольцах вычетов получена

Теорема 2. *Пусть I — кольцо целых квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, q — простое число и $A = I/qI$ — кольцо вычетов кольца I по модулю q . Тогда множество всех необратимых элементов кольца A совпадает с его радикалом Джекобсона $J(A)$.*

Этот результат позволяет получить информацию об обратимости элементов колец вычетов по натуральному модулю колец целых квадратичных полей. Также исследуется вопрос о нахождении обратимых элементов наибольшего порядка в таких кольцах вычетов.

Литература

- [1] Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, 3, № 1(2000), С. 3–37.
- [2] Алеев Р.Ж. Числа Хигмана конечных групп // Матем. труды, 3, № 2(2000), С. 3–28.

ДОЛЯ МАТРИЦ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ

Кривоногов А.С.¹
e-mail: android11@gmail.com

Из работы [1] вытекает, что доля матриц с вещественным спектром в алгебре *всех* матриц $M_n(\mathbb{R})$ равна $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. В данной работе аналогичная задача решается для симплектической алгебры Ли

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\},$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная матрица порядка n .

Пусть $B_{2n}(r)$ — евклидов шар радиуса r с центром в нуле в алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ и $R_{2n}(r)$ — множество матриц с вещественным спектром из шара $B_{2n}(r)$. Число

$$P_{2n} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } R_{2n}(r)}{\text{vol } B_{2n}(r)}$$

считаем по определению долей матриц с вещественным спектром в алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Теорема.

$$P_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n^2}.$$

Доказательство теоремы основано на подсчете якобиана параметризации множества $R_{2n}(r)$, связанной с аналогом теоремы Шура для матриц из $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, вычислении получившегося интеграла, а также вычислении объема максимальной компактной подгруппы группы Ли $Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

Литература

- [1] A. Edelman. The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law // J. Multivariate Anal., 1997. Vol. 60. Pp. 203–232.

¹Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-3669.2010.1) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/10726).

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОРЯДКАХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Лыткин Д.В.¹
e-mail: dan.lytkin@gmail.com

Пусть G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p . Обозначим p через $ch(G)$ и множество порядков элементов группы G через $\omega(G)$. Предположим, что G задана как подгруппа в $GL(n, q)$, порожденная некоторым множеством матриц X . Одной из задач вычислительной теории групп является нахождение $ch(G)$ по X за полиномиальное время.

В [1] разработан алгоритм Монте-Карло для решения этой задачи, основанный на следующем свойстве простых групп лиева типа: если G и H — простые группы лиева типа над полями нечетных характеристик такие, что в множествах $\omega(G)$ и $\omega(H)$ совпадают три самых больших числа, то $ch(G) = ch(H)$. Это свойство доказано в [1, теорема 1.2], и, как поясняют авторы, ограничение на характеристику групп G и H обусловлено сложностями, возникающими при подсчете максимальных порядков элементов симплектических и ортогональных групп над полями характеристики 2.

На теоретико-числовом языке эти сложности могут быть объяснены следующим образом. Пусть n — натуральное число и q — степень простого числа. Рассмотрим все числа вида $[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_k} \pm 1]$, где квадратные скобки означают взятие наименьшего общего кратного, $k \geq 2$, $n_1 + \dots + n_k = n$. Обозначим через $t(n, q)$ самое большое такое число. Если q нечетно, то члены $q^{n_i} \pm 1$ попарно не взаимно просты, поэтому $t(n, q)$ имеет вид $[q^{n_1} \pm 1, q^{n_2} \pm 1]$ и его несложно найти. Если же q четно, то количество частей в разбиении числа n , соответствующем $t(n, q)$, может быть сколь угодно большим. В настоящей работе найден явный вид числа $t(n, q)$ для всех четных q , кроме $q = 2$.

Теорема. Пусть n — натуральное число и $q = 2^l > 2$. Пусть $t(n, q)$ — наибольшее число вида $[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_k} \pm 1]$, где знаки выбираются независимо, $k, n_1, \dots, n_k \geq 1$ и $n_1 + \dots + n_k = n$.

¹Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (НШ-3669.2010.1) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

- (1) Если n нечетно, то $m(n, q) = [q^{n_1} + 1, q^{n_2} + 1, \dots, q^{n_k} + 1]$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ — двоичное разложение числа n .
- (2) Если n четно и $n \neq 2$, то

$$m(n, q) = [q^{n_1} + 1, q^{n_2} + 1, \dots, q^{n_{k-1}} + 1, q^{n_k} - 1],$$

где k — наибольшее натуральное число такое, что $2^{k-2} \leq n/3$, $n_i = 2^{i-1}$ при $1 \leq i \leq k-1$ и $n_k = n - 2^{k-1} + 1$.

- (3) Если $n = 2$, то $m(n, q) = q^2 + 1$.

Замечание. При $q = 2$ утверждение теоремы неверно. Например, $m(9, 2) = [2^5 - 1, 2^3 - 1, 2 + 1]$.

Эта теорема и результаты из [2] позволяют найти максимальные порядки элементов в симплектических и ортогональных группах над достаточно большими полями характеристики 2. Эту информацию планируется использовать при изучении следующей гипотезы.

Гипотеза. Если G и H — простые группы лиева типа такие, что в множествах $\omega(G)$ и $\omega(H)$ совпадают три самых больших числа, то $ch(G) = ch(H)$.

Литература

- [1] Kantor W.M., Seress A. Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups // J. Algebra. 2009. Vol. 322, № 3. Pp. 802–832.
- [2] Бутурлакин А.А. Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. труды. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.

О ПОДГРУППАХ D_π -ГРУППМанзаева Н. Ч.¹*e-mail: manzaeva@mail.ru*

Всюду далее считаем, что π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π . Множество простых делителей порядка конечной группы G обозначим символом $\pi(G)$. Группа G , для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π -группой. Подгруппа H группы G называется π -холловой, если H является π -группой и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.

Следуя Ф. Холлу [1], говорят, что конечная группа G обладает свойством D_π для некоторого множества π простых чисел, и пишут $G \in D_\pi$, если любые две максимальные π -подгруппы группы G сопряжены. Утверждение $G \in D_\pi$ равносильно тому, что в группе G выполнен полный аналог теоремы Силова для π -подгрупп. В Коровской тетради [2] под номером 17.44(б) записана следующая

Гипотеза 1. Если $G \in D_\pi$ и H — π -холлова подгруппа группы G , то любая подгруппа M , содержащая H , обладает свойством D_π

Основным результатом доклада является

Теорема 1. Пусть $G \in D_\pi$ и любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен либо спорадической, либо знакопеременной группе, либо группе Лиева типа характеристики, принадлежащей π . Пусть H — π -холлова подгруппа группы G и подгруппа $M \leq G$ такова, что $H \leq M$. Тогда $M \in D_\pi$.

Для конечных групп, у которых неабелевы композиционные факторы изоморфны знакопеременным или спорадическим группам, справедливо гораздо более сильное утверждение:

Теорема 2. Пусть $G \in D_\pi$ и любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен либо спорадической, либо знакопеременной группе. Тогда любая подгруппа группы G является D_π -группой.

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00391 и 10-01-90007), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1).

Теоремы 1 и 2 используют классификацию конечных простых групп и результаты работы [3].

Отметим, для произвольной D_π группы в общем случае неверен не только аналог теоремы 2, но даже следующее усиление гипотезы 1:

Гипотеза 2. Если $G \in D_\pi$, $M \leq G$ и в M существует π -холлова подгруппа, то $M \in D_\pi$

Более точно: опираясь на результаты работ [4, 5], доказана

Теорема 3. Пусть π — конечное множество нечетных простых чисел, причем $|\pi| \geq 2$. Тогда существует такая группа G и такая подгруппа $M \leq G$, что

- (1) $G \in D_\pi$;
- (2) M обладает π -холловой подгруппой;
- (3) $M \notin D_\pi$.

Литература

- [1] Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc, Ser. III. 1956. Vol. 6, № 22. Pp. 286–304.
- [2] Mazurov V. D. and Khukhro E. I. (editors). The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory. 17th ed. — Novosibirsk: Russian Academy of Sciences, Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, 2010.
- [3] Revin D.O. and Vdovin E.P. Hall subgroups of finite groups // Contemporary Mathematics. 2006. Vol. 402, Pp. 229–265.
- [4] Ревин Д.О. Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
- [5] Gross F. Odd order Hall subgroups of $GL_n(q)$ and $Sp_{2n}(q)$ // Math. Z. 1984. Vol. 187. Pp. 185–194.

НЕАБЕЛЕВЫ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРОЙ ХОЛЛОВЫ

Маслова Н.В.¹

e-mail: butterson@mail.ru

Подгруппа H конечной группы G называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G : H|$ взаимно просты.

В 2006 г. в работах В.М. Левчука и А.Г. Лихарева [1] и В.Н. Тютянова [2] было установлено, что конечная простая группа, все максимальные подгруппы которой дополняемы, изоморфна одной из групп $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ или $PSL_5(2)$. Во всех этих группах каждая максимальная подгруппа является холловой. Поэтому естественно возникла задача изучения конечных групп, в которых каждая максимальная подгруппа холлова.

В 2008 г. В.С. Монаховым [3] были изучены свойства конечной разрешимой группы, все максимальные подгруппы которой холловы. В этой же работе была сформулирована проблема: описать неабелевы композиционные факторы конечной неразрешимой группы, все максимальные подгруппы которой холловы. Эта проблема была записана В.С. Монаховым в «Коуровскую тетрадь» [4] под номером 17.92.

Изучение холловых максимальных подгрупп произвольной конечной группы нельзя свести только к изучению холловых подгрупп ее композиционных факторов. Например, в группе A_6 есть две сопряженные в $Aut(A_6)$ максимальные подгруппы, изоморфные S_4 и не являющиеся холловыми подгруппами в A_6 , однако нормализатор их пересечения в $Aut(A_6)$ является силовой максимальной подгруппой в $Aut(A_6)$. Однако максимальные подгруппы конечной простой группы дают некоторую информацию о том, может ли данная группа быть композиционным фактором некоторой конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009) и гранта «Лучшие аспиранты РАН - 2010».

Предложение. Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая подгруппой X такой, что

(1) класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно $\text{Aut}(S)$;

(2) для любой подгруппы Z такой, что $X \leq Z < S$, порядок $|Z|$ и индекс $|S : Z|$ не взаимно просты.

Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы.

Следствие. Пусть S — конечная простая неабелева группа, обладающая максимальной подгруппой X такой, что

(1) класс сопряженности $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ является инвариантным относительно $\text{Aut}(S)$;

(2) $|X|$ и $|S : X|$ не взаимно просты.

Тогда группа S не изоморфна никакому композиционному фактору конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы.

Подход к решению проблемы В.С. Монахова, сформулированный в следствии, был предложен нам Д.О. Ревиным. Этот подход позволяет установить для довольно широкого класса конечных простых групп, что никакая из этих групп не может быть композиционным фактором конечной группы с холловыми максимальными подгруппами. Однако для полного описания конечных простых групп, которые могут быть композиционными факторами конечной группы с холловыми максимальными подгруппами, мы используем более общий подход, сформулированный в предложении.

В настоящей работе мы также используем классификацию максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах [6, 7], описание максимальных подгрупп в конечных простых группах [5, 8, 9] и описание параболических холловых подгрупп в конечных простых группах лиева типа [10].

Доказана следующая

Теорема. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы, исчерпываются группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$.

Таким образом, проблема В. С. Монахова решена.

Литература

- [1] *Левчук В.М., Лихарев А.Г.* Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2006. Том 47, № 4. С. 798–810.
- [2] *Тютянов В.Н.* Конечные группы с дополняемыми подгруппами // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. Том 6. С. 178–183.
- [3] *Монахов В.С.* Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Математические заметки. 2008. Том 84, № 3. С. 390–394.
- [4] *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
- [5] *Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [6] *Маслова Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Том 14, № 4. С. 100–118.
- [7] *Маслова Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цокелем // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Том 16, № 3. С. 182–184.
- [8] *Kleidman P.* The subgroup structure of some finite simple groups. Ph. D. Thesis. Cambridge: Cambridge Univ., 1986.
- [9] *Kleidman P.* The maximal subgroups of the Chevalley Groups $G_2(q)$ with q odd the Ree Groups ${}^2G_2(q)$, and Their Automorphism Groups // J. Algebra. 1988. Vol. 117. Pp. 30–71.
- [10] *Ревин Д.О.* Холловы π -подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Математические труды. 1999. Том 2, № 1. С. 160–208.

О СТАТУСАХ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ, СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ

Маслова Н.В.¹, Одинцова Н. Ю.

e-mail: butterson@mail.ru, odincova_natalya@mail.ru

Полугруппу удобно задавать ее порождающим множеством. Кроме мощности порождающего множества важной его оценкой является диаметр. Для произвольного множества X полугруппы W через $\langle X \rangle$ будем обозначать подполугруппу, порожденную X . Если $\langle X \rangle = W$, то наименьшее натуральное число k такое, что любой элемент W представим в виде произведения не более, чем k элементов множества X , называется диаметром $\Delta(X)$ порождающего множества X . Диаметр позволяет оценить, насколько сложно выразить элементы полугруппы через данное порождающее множество.

Следуя [1], статусом $Stat(W)$ полугруппы W назовем величину

$$Stat(W) = \min_{W=\langle X \rangle} |X| \cdot \Delta(X).$$

Статус полугруппы позволяет оценить, насколько «хорошее» порождающее множество может быть выбрано для нее.

Изучение диаметра и статуса алгебраических систем имеет глубокие чисто алгебраические корни (см., например, [2–5]). С другой стороны, интерес к этим числовым характеристикам обусловлен некоторыми принципиально важными проблемами биоинформатики (см., например, [6, 7]) и проектирования архитектуры многопроцессорных систем (см., например, [8]).

В частности, существенное значение имеют верхние оценки диаметров и статусов конечных симметрических полугрупп, конечных симметрических и знакопеременных групп.

В ряде работ была получена квадратичная верхняя оценка для статуса симметрической группы S_n (см., например, [1, 8]).

В [9] установлено, что при $n = 2k + 3$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k + 1$ не кратно 4, в группе S_n найдется трехэлементное множество A такое,

¹Первый автор поддержан РФФИ (проект 10-01-00324), программой Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004), программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009) и грантом «Лучшие аспиранты РАН - 2010».

что $\Delta(A) \leq 33n \log_2 n$. Следовательно, при $n = 2k + 3$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k + 1$ не кратно 4, выполняется неравенство

$$\text{Stat}(S_n) \leq 99n \log_2 n.$$

Позднее В.Ю. Поповым [10] для произвольного n было предложено порождающее множество из семи элементов, которое имеет верхнюю оценку диаметра $O(n \cdot \log_2 n)$. Используя эту оценку, получаем следующую оценку для статуса симметрической группы

$$\text{Stat}(S_n) \leq O(n \cdot \log_2 n).$$

Известно, что нижняя оценка для статуса S_n совпадает с верхней по порядку [11]. Таким образом, $\text{Stat}(S_n)$ имеет порядок $O(n \cdot \log_2 n)$. Ввиду этого результата представляет интерес построение конечных порождающих множеств для симметрической полугруппы P_n и знакопеременной группы A_n с диаметрами порядка не более $O(n \cdot \log_2 n)$. Кроме того, возникает вопрос о связи нижних оценок статусов S_n , P_n и A_n .

В настоящей работе были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для симметрической полугруппы P_n над n -элементным множеством существует конечное порождающее множество X такое, что $|X| = 10$ и $\Delta(X) \leq O(n \cdot \log_2 n)$.*

Теорема 2. *Для знакопеременной группы A_n над n -элементным множеством существует конечное порождающее множество X такое, что $|X| \leq 22$ и $\Delta(X) \leq O(n \cdot \log_2 n)$.*

Теорема 3. *Для статусов знакопеременной группы A_n , симметрической полугруппы P_n и симметрической группы S_n над n -элементным множеством верны следующие оценки*

$$\text{Stat}(S_n) \leq \text{Stat}(P_n), \text{Stat}(S_n) \leq \text{Stat}(A_n).$$

Следствие 1. $\text{Stat}(P_n) = O(n \cdot \log_2 n)$, $\text{Stat}(A_n) = O(n \cdot \log_2 n)$.

Литература

- [1] *Cherubini A., Howie J., Piochi B.* Rank and status in semigroup theory // Communications in algebra. 2004. Vol. 32, № 7. Pp. 2783–2801.

-
- [2] *Cherley J.* On complementary sets of group elements // Arch. Math. 1980. Vol. 35, № 1. Pp. 313–318.
- [3] *Nathanson M. B.* On a problem of Rohrbach for finite groups // J. Number Theory. 1992. Vol. 41, № 1. Pp. 69–76.
- [4] *Jia X.-D.* Thin bases for finite abelian groups // J. Number Theory. 1990. Vol. 36, № 2. Pp. 254–256.
- [5] *Jia X.-D.* Thin bases for finite nilpotent groups // J. Number Theory. 1992. Vol. 41, № 3. Pp. 303–313.
- [6] *Shamir R.* Algorithms in molecular biology // Lecture notes. Tel Aviv University School of Computer Science. 2001. <http://www.cs.tau.ac.il/~rshamir/algmb/01/algmb01.html>
- [7] *Meidanis J., Walter M.E.M.T., Dias Z.* A lower bound on the reversal and transposition diameter // Relatorio Tecnico IC-00-16. 2000.
- [8] *Latifi S., Srimani P. K.* A new fixed degree regular network for parallel processing // Proceeding of the Eighth IEEE Symposium on Parallel and Distributed Proceeding. Los Alamitos, California. 1996. Pp. 152–159.
- [9] *Bass D. W., Sudborough I. H.* Pancake problems with restricted prefix reversals and some corresponding Cayley networks // Journal of Parallel and Distributed Computing archive. 2003. Vol. 63, № 3. Pp. 327–336.
- [10] *Popov V. Yu.* Status of the symmetric group // International algebraic conference. Ekaterinburg, Ural, August 29 – September 3, 2005. University Publisher. 2005. Pp. 91–92.
- [11] *Popov V. Yu.* Sorting by prefix reversals // IAENG International Journal of Applied Mathematics. Vol. 40, № 4. Pp. 24–27.
- [12] *Одницова Н. Ю.* О диаметре симметрической полугруппы // Тез. третьей межд. конф. «Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании». Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. С. 34

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА $Aut_0(\Lambda^2)$ -СИММЕТРИЧЕСКИХ 4-РАСШИРЕНИЙ РЕШЕТКИ Λ^2

Неганова Е.А., Трофимов В.И.¹

e-mail: nega-le@yandex.ru, trofimov@imm.uran.ru

Пусть Γ и Δ — графы (под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер). Напомним (см. [1]), что связанный граф $\tilde{\Gamma}$ называется симметрическим расширением графа Γ посредством графа Δ , если существуют такая вершинно-транзитивная группа \tilde{G} автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и такая система импримитивности σ группы \tilde{G} на множестве $V(\tilde{\Gamma})$ вершин графа $\tilde{\Gamma}$, что фактор-граф $\tilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\tilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные Δ . Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично понятию расширения одной группы посредством другой группы. В связи с кристаллографией частиц с внутренней структурой и теорией струн, особый интерес представляют симметрические расширения d -мерных решеток посредством конечных графов.

Как обычно, для целого положительного числа d под d -мерной решеткой Λ^d далее понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы (a_1, \dots, a_d) из d целых чисел, и две вершины (a_1, \dots, a_d) и (a'_1, \dots, a'_d) смежны тогда и только тогда, когда $|a_1 - a'_1| + \dots + |a_d - a'_d| = 1$. Сдвигом решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину (a_1, \dots, a_d) в вершину $(a_1 + k_1, \dots, a_d + k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел k_1, \dots, k_d . Через $Aut_0(\Lambda^d)$ обозначается изоморфная \mathbb{Z}^d подгруппа группы автоморфизмов решетки Λ^d , состоящая из всех ее сдвигов. Следуя [1], для целого положительного числа q связанный граф Γ назовем $Aut_0(\Lambda^d)$ -симметрическим q -расширением решетки Λ^d , если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q , что для некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ на решетку Λ^d справедливо $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = Aut_0(\Lambda^d)$.

В [2, теорема 3] нами был получен критерий конечности множества симметрических q -расширений решетки Λ^2 для произвольного целого положительного числа q . На основе этого критерия в [2] была

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00349-а.

доказана, в частности, конечность числа $Aut_0(\Lambda^2)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^2 для каждого простого числа q . В настоящей работе на основе того же критерия нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Существует лишь конечное число $Aut_0(\Lambda^2)$ -симметрических 4-расширений решетки Λ^2 .*

Для доказательства теоремы мы показываем, что если Γ — произвольное $Aut_0(\Lambda^2)$ -симметрическое 4-расширение решетки Λ^2 , то, в обозначениях из [2, теорема 3], для подходящих G, σ, φ справедливо $r_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$ или $r_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$, после чего теорема следует из [2, теорема 3].

Литература

- [1] *Trofimov V.I.* Some topics in graph theory related with group theory // Discrete Math, to appear.
- [2] *Неганова Е.А., Трофимов В.И.* О симметрических q -расширениях 2-мерной решетки // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 199–209.

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП КОДОВ АМИНОКИСЛОТ

Одинцова Н.Ю.
e-mail: odincova_natalya@mail.ru

В работе [1] введено понятие полугрупп кодов аминокислот. Эти полугруппы представляют существенный интерес с точки зрения ДНК-наномеханики (см., например, [2]). В [1] отмечено, что при наличии хотя бы одного сокращающего соотношения полугруппа кодов аминокислот является конечной. Следовательно, бесконечная полугруппа кодов аминокислот только одна. Кроме того, в [3] отмечено, что класс \mathbb{k} конечных полугрупп кодов аминокислот является нетривиальным, и указан частный случай изоморфности полугрупп этого класса.

Цель данной работы – установить критерий изоморфности конечных полугрупп кодов аминокислот. Важным свойством изоморфизмов конечных полугрупп кодов аминокислот является то, что ограничение любого такого изоморфизма на алфавит будет тождественной подстановкой. Используя это свойство, был установлен критерий изоморфности полугрупп из класса \mathbb{k} на языке определяющих соотношений. Он сформулирован в следующем утверждении.

Теорема. *Две полугруппы P_1, P_2 из класса \mathbb{k} изоморфны тогда и только тогда, когда для любого определяющего соотношения вида $XYU = XU$, $X, Y, U \in \{A, C, T, G\}$ одной из них найдётся такое $V \in \{A, C, T, G\}$, что соотношение $XYV = XU$ будет определяющим соотношением другой из них.*

Используя этот критерий, нетрудно получить число различных элементов в классе \mathbb{k} .

Следствие. *В классе \mathbb{k} всего $2^{16} - 1$ неизоморфных полугрупп.*

Литература

- [1] *Одинцова Н.Ю., Попов В.Ю.* О полугруппах кодов аминокислот. Тезисы докладов междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию со дня

рождения ректора МГУ академика В.А. Садовниченко. М.: Университетская книга, 2009. С. 328.

- [2] *Попов В.Ю.* ДНК наномеханические роботы и вычислительные устройства / Всероссийский конкурсный отбор обзорно-аналитических статей по приоритетному направлению «Информационно-телекоммуникационные системы», 2008.
- [3] *Одинцова Н.Ю.* Об определяющих соотношениях конечных полугрупп кодов аминокислот. Тезисы докладов всерос. молодежной школы-конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 71.

О СТРУКТУРЕ ПОЛУГРУПП, НА КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ ОТНОШЕНИЯ ГРИНА \mathcal{R} И \mathcal{H}

Первухина Т.В.

e-mail: cristofory@gmail.com

Отношения Грина на полугруппе S определяются формулами

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1, a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b, a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1,$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}, \mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}.$$

Знание отношений Грина на полугруппе играет существенную роль в понимании её структуры. Одной из важных проблем теории полугрупп является описание полугрупп, на которых некоторые из отношений Грина совпадают. Этой проблеме посвящено немало исследований, позволивших в ряде случаев указать класс универсальных полугрупп. То есть всякая полугруппа, удовлетворяющая данному равенству отношений Грина, изоморфно вкладывается в одну из универсальных полугрупп или делит одну из них.

Для класса конечных \mathcal{J} -тривиальных моноидов данная проблема была решена Г. Страубингом [1]; его решение было уточнено Ж.-Э. Пэном [2]. Также известно [2], что всякий конечный \mathcal{R} -тривиальный (\mathcal{L} -тривиальный) моноид изоморфно вкладывается в моноид экстенсивных преобразований на множестве $\{1, \dots, n\}$ для подходящего n . В [3] М. В. Волков и Ф. Пастэйн дают характеристику многообразий моноидов, удовлетворяющих соотношениям $\mathcal{D} = \mathcal{H}$, $\mathcal{D} = \mathcal{L}$, $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ и $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Однако класс всех конечных моноидов, удовлетворяющих соотношению $\mathcal{D} = \mathcal{L}$ (или, что то же самое, $\mathcal{R} = \mathcal{H}$), не образует многообразия, и класс универсальных полугрупп в этом случае неизвестен. Данная работа является шагом в направлении решения этой проблемы. В дальнейшем мы рассматриваем только конечные полугруппы, в которых совпадают отношения Грина \mathcal{R} и \mathcal{H} . В случае, если полугруппа не является моноидом, присоединяем единицу.

Одним из возможных кандидатов на роль универсальных моноидов являются моноиды $TM_n(G)$ верхнетреугольных мономиальных по строкам матриц порядка n над некоторой группой G с присоединенным нулем. Для них получен следующий результат.

Теорема 1. В моноиде $TM_n(G)$ для произвольного натурального n и произвольной конечной группы G совпадают отношения Грина \mathcal{R} и \mathcal{H} .

Основная теорема показывает, что моноиды $TM_n(G)$ обладают свойством универсальности для определенного подкласса рассматриваемых моноидов. Обозначим через $\mathcal{R}^\#$ наименьшую конгруэнцию, содержащую отношение \mathcal{R} .

Теорема 2. Пусть в конечном моноиде S совпадают отношения \mathcal{R} и \mathcal{H} и фактормоноид $S/\mathcal{R}^\#$ является \mathcal{R} -тривиальным. Тогда S делит моноид $TM_n(G)$ для подходящей группы G и подходящего натурального n .

Построенная в ходе доказательства группа G будет прямым произведением групп Шютценберже \mathcal{H} -классов моноида S . Схема построения гомоморфизма, лежащая в основе доказательства Теоремы 2, непосредственно реализована для моноидов $TM_n(G)$ при произвольной конечной G , а также для серии полугрупп, двойственных к полугруппам, построенным в [4].

Литература

- [1] *Straubing H.* On Finite \mathcal{J} -trivial Monoids // Semigroup Forum. 1980. Vol. 19. Pp. 107–110.
- [2] *Pin J.-E.* Varieties of Formal Languages. – London: North Oxford Academic Publishers, 1986.
- [3] *Volkov M.V., Pastijn F.* \mathcal{D} -Compatible Semigroup Varieties // Journal of Algebra. 2006. Vol. 299. Pp. 62–93.
- [4] *Volkov M.V., Trotter P.G.* The Finite Basis Problem in the Pseudovariety Joins of Aperiodic Semigroups with Groups // Semigroup Forum. 1996. Vol. 52. Pp. 83–91.
- [5] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985.
- [6] *Lallement G.* Regular Semigroups with $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ as Syntactic Monoids of Finite Prefix Codes // Theoretical Computer Science. 1997. Vol. 3. Pp. 35–49.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ

Пермина А.Н.

e-mail: a.permina@yandex.ru

Разбиения целых чисел на слагаемые играют важную роль в теории чисел, комбинаторике, теории представлений, математической физике, статистической механике.

В работе [1] Шлыкком В.А. был предложен полиэдральный подход к изучению множеств разбиений чисел, в [2] он был существенно развит. Основная идея нового подхода заключается в том, что множество разбиений числа n рассматривается как политоп (ограниченный многогранник) в пространстве \mathbf{R}^n . В указанных выше работах установлен следующий критерий представления заданного разбиения в виде выпуклой комбинации двух других разбиений.

Разбиение $x \vdash n$ есть выпуклая комбинация двух разбиений (u , следовательно, x — не вершина политопы P_n), тогда и только тогда, когда существуют два непересекающихся подмножества S_1, S_2 множества его частей $S(x)$ и существуют два набора чисел $u = \langle u_j \in \mathbb{Z}_+; j \in S_1 \rangle$, $v = \langle v_k \in \mathbb{Z}_+; k \in S_2 \rangle$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{j \in S_1} u_j j = \sum_{k \in S_2} v_k k, \quad 0 < u_j < x_j, \quad 0 < v_k < x_k.$$

Данный критерий позволяет распознать многие разбиения, не являющиеся вершинами P_n , хотя при $n = 15$ появляются не вершины, ему не удовлетворяющие, поэтому возникает проблема распознавания не вершин, которые выражаются через 3 и более разбиения. Возникает следующий вопрос:

Распознать не вершины, которые представляются в виде выпуклой комбинации трех и более разбиений.

Частичный ответ на поставленный вопрос даёт следующая

Теорема. *Для всех $n \leq 100$ и всех их разбиений можно определить, является ли разбиение вершиной политопы P_n .*

Отметим, что для невершины при доказательстве этого результата указывается соответствующая нетривиальная выпуклая комбинация.

Литература

- [1] *Шлык В.А.* О вершинах политопов разбиений чисел // Докл. НАН Беларуси, 2007.
- [2] *Шлык В.А.* Политопы разбиений чисел // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, № 3, 1996. С. 89–92.

О МОЩНОСТЯХ КОНЕЧНЫХ КРИТИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Перминова О.Е.

e-mail: perminova_oe@mail.ru

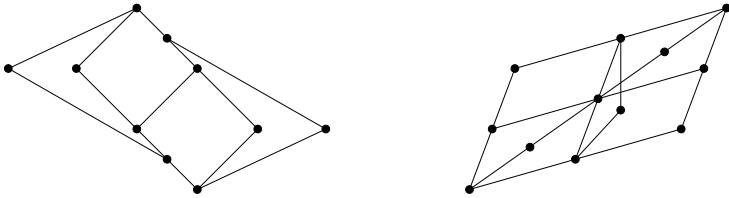
Решетка называется *жесткой*, если она обладает только тождественным или постоянными эндоморфизмами, т. е. эндоморфизмами, преобразующими все элементы в какой-либо один элемент. *Критической* назовем жесткую решетку, у которой нет собственных жестких подрешеток, исключая тривиальные — одно- и двухэлементные подрешетки.

В работе [1] было доказано, что для натурального $n = 7, 15, 18, 19$ и $n \geq 21$ существуют n -элементные критические решетки. Справедлива следующая

Теорема. Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$. Тогда n -элементная критическая решетка существует в том и только в том случае, когда $n = 7$ или $n \geq 9$.

Критические решетки, построенные нами в доказательстве теоремы, обладают важным свойством — все они являются разборными. Конечная решетка L порядка n называется *разборной* [2], если она содержит цепь $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = L$ подрешеток решетки L таких, что $|L_i| = i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Указанное определение эквивалентно следующему. Разборной является решетка, полученная из одноэлементной решетки с помощью конечного числа процедур одноэлементного расширения решетки, присоединения к решетке внешнего нуля 0 или единицы 1, описанных в работе [1]. Таким образом, понятие разборности имеет алгоритмическую природу, что облегчает описание конечных разборных решеток. Более того, свойство разборности дает возможность более точно охарактеризовать уже изученные ранее классы решеток, например, дистрибутивных и модулярных [3].

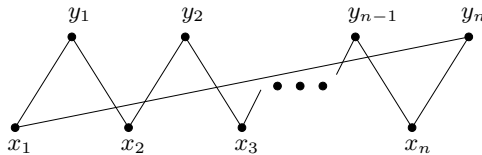
Приведем для некоторых порядков критические разборные решетки (см. рис. 1). Нами была написана программа на языке *Delphi* для порождения из $(n - 1)$ -элементных решеток всех неизоморфных n -элементных разборных решеток. Указанные на рис. 1 решетки были найдены с помощью этой программы.

Рис. 1: критические разборные решетки порядков $n = 10$ и $n = 12$

В работе [3] доказано, что любая конечная решетка либо является разборной, либо содержит корону. При этом *короной* (см. рис. 2) называется частично-упорядоченное множество $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n\}$ ($n \geq 3$) со следующим отношением частичного порядка \leq :

$$x_i \leq y_i, \quad y_i \geq x_{i+1} (i = 1, \dots, n-1), \quad x_1 \leq y_n;$$

при этом множества $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ являются антицепями, т.е. состоят из попарно несравнимых элементов.

Рис. 2: корона порядка $2n$

Нами установлено, что существуют критические неразборные решетки. Найдена минимальная критическая неразборная решетка (см. рис. 3). Эта решетка имеет десять элементов.

В доказательстве теоремы определяющую роль играют свойства проективных и слабо проективных интервалов [4], свойства эндоморфизмов, лемма 2 из работы [5] и некоторые вспомогательные решеточные конструкции. Для доказательства того, что не существует восьмиэлементных критических решеток, с помощью компьютера построены с точностью до двойственности диаграммы всех восьмиэлементных решеток. Анализ диаграмм позволяет установить, что

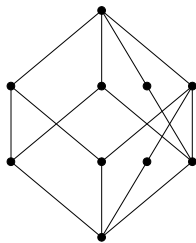


Рис. 3: критическая неразборная решетка

существует единственная жесткая восьмиэлементная решетка. Данная решетка содержит жесткую семиэлементную подрешетку (см. [5], стр. 11), следовательно, не является критической.

Литература

- [1] *Перминова О.Е.* О конечных критических решетках // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 185–193.
- [2] *Rival I.* Lattices with doubly irreducible elements // Can. Math. Bull. 1974. Vol. 17. Pp. 91–95.
- [3] *Kelly D., Rival I.* Crowns, fences, and dismantlable lattices // Canad. J. Math. 1974. Vol. XXVI, № 5. Pp. 1257–1271.
- [4] *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.
- [5] *Важенин Ю.М., Перминов Е.А.* О жестких решетках и графах // Исслед. по соврем. алгебре: межвуз. сб. ст. Т. 2, № 3. Свердловск, 1979. С. 3–21.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ КОМБИНАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП

Попович А.Л.¹

Задача характеристики решеток решетками конгруэнций универсальных алгебр определенных типов рассматривалась еще в работах Биркгофа (см. например [1]). Известно, что все такие решетки обязаны быть алгебраическими, то есть полными решетками, которые порождаются своими компактными элементами. Хорошо известная теорема Гретцера-Шмидта [2] утверждает, что всякая алгебраическая решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой алгебры. Однако, существует пример [3] модулярной решетки, которая не изоморфна решетке конгруэнций никакой алгебры конечной сигнатуры. В настоящее время открытым является вопрос о том, всякая ли дистрибутивная алгебраическая решетка изоморфна решетке конгруэнций группоида и, более того, полугруппы?

Ранее в [4] автором совместно с В.Б. Репницким был получен следующий результат: всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы. Метод, которым был доказан результат, оказалось возможным усовершенствовать. В результате были получены аналогичные результаты для классов полугрупп без идемпотентов.

Теорема 1. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Теорема 2. *Всякая счетная дистрибутивная алгебраическая решетка, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-12142 и программой Министерства образования Российской Федерации «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/3537)

-
- [2] *Grätzer G., Schmidt E. T.* Characterizations of congruence lattices of abstract algebras // *Acta Sci. Math. (Szeged)* 1963. № 24. Pp. 34–59.
- [3] *Freese R., Lampe W. A., Taylor W.* Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I // *Pacific J. Math.* 1979 № 82. Pp. 59–68.
- [4] *Попович А.Л., Репницкий В.Б.* О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп // *Труды ИММ Уро РАН.* 2010. Т. 16, № 2. С. 199–208.

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП РАЗМЕРНОСТИ 2

Сабодах И.В., Шлепкин А.А.

e-mail: sabodax@mail.ru

Группа G насыщена группами из множества X , если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G (возможно, совпадающей с K), изоморфной некоторой группе из X . Если при этом для любой группы из X в G найдется изоморфная подгруппа, то говорят, что группа G насыщена множеством групп X , а X называют насыщающим множеством группы G [1].

В работе [2] доказана локальная конечность периодической группы, насыщенной группами множества $L_2(p^n)$.

Мы следующим образом обобщаем этот результат на группы Шункова:

Теорема. *Группа Шункова, насыщенная множеством групп*

$$\mathfrak{N} = \{L_2(q) \times L_2(r) \mid r = p^\alpha, q = p^\beta; \alpha, \beta \in N\},$$

где N — множество натуральных чисел, изоморфна $L_2(Q) \times L_2(P)$ для подходящих локально конечных полей Q и P .

Литература

- [1] Шлепкин А.К. Сопряженно бипрimitивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / III международная конференция по алгебре. С. 363. — Красноярск: Сб. тезисов, 1993.
- [2] Рубашкин А.Г., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сибирский математический журнал. 2005. № 6. С. 1432–1438.

О ХРОМАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОТЫ 2 В РЕШЕТКАХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Сеньчонок Т.А.

e-mail: Tatiana.Senchonok@usu.ru

Пусть G — произвольный (n, m, k) -граф, т.е. граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Раскраской, или t -раскраской, графа G называется отображение ϕ из множества вершин V в множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots, t\}$ такое, что для любых двух различных смежных вершин u и v графа G выполняется $\phi(u) \neq \phi(v)$, т.е. любые две различные смежные вершины имеют разный «цвет». Граф называется t -раскрашиваемым, если он обладает t -раскраской, и t -хроматическим, если он t -раскрашиваемый, но не является $(t - 1)$ -раскрашиваемым; в этом случае число t называют хроматическим числом графа G и обозначают через $\chi(G)$.

Для натурального числа x через $P(G, x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно, (см. [1]), что функция $P(G, x)$ является многочленом степени n от x , который называют хроматическим многочленом графа G . Два графа называются хроматически эквивалентными или χ -эквивалентными, если они имеют одинаковые хроматические многочлены.

Граф является хроматически определяемым или χ -определяемым, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие ввели в 1976 г. Chao C.Y. и E.G. Whitehead Jr. [2]. Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. В этих исследованиях большое место было уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов.

Граф G называют t -дольным графом, если множество его вершин можно разбить на t непустых подмножеств (долей) так, что любое ребро данного графа соединяет вершину из одной доли с вершиной из другой доли; если каждая вершина из одной доли соединена с каждой вершиной из других долей, то G называют пол-

ным t -дольным графом и обозначают через $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$, где n_1, n_2, \dots, n_t — последовательность чисел элементов для всех t долей этого графа.

В 1990 г. Koh K.M. и Тео K.L. [3] доказали, что полный двухдольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Тогда же Li N.Z. и Liu R.Y. [4] доказали, что граф $K(1, n_2, \dots, n_t)$ χ -определяем тогда и только тогда, когда $\max\{n_2, \dots, n_t\} \leq 2$.

В ходе исследований различных авторов возникла следующая гипотеза: любой полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ является хроматически определяемым при $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$.

Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \dots)$ такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \dots$, причем u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. В [5] введено некоторое отношение частичного порядка \geq на множестве $NPL(n, t)$ — всех разбиений длины t натурального числа n . Доказано, что $NPL(n, t)$ является решеткой относительно этого отношения \geq . Далее мы применим решетки $NPL(n, t)$ для изучения хроматической определяемости графов. Легко видеть, что с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t -дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n, t)$. Поэтому порядок \geq на $NPL(n, t)$ индуцирует отвечающий ему порядок на множестве таких графов. Мы можем отождествлять полный многодольный n -граф с соответствующим разбиением числа n .

Пусть n и t — фиксированные натуральные числа, $3 \leq t \leq n$. Разделим n на t с остатком: $n = t \cdot q + r$, где $0 \leq r < t$.

В 1982 г. Chao C.Y. и G.A. Novacky Jr. [6] доказали, что хроматически определяются полные t -дольные n -графы вида $K(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$, где компонента $q+1$ повторяется r раз, а компонента q повторяется $t-r$ раз. Этот факт эквивалентен тому, что полные многодольные графы, являющиеся наименьшими элементами в решетках $NPL(n, t)$, хроматически определяются. В 2007 г. Баранский В.А. и Королева Т.А. [7] доказали, что атомы в решетках $NPL(n, t)$ также являются хроматически определяемыми.

Основным нашим результатом является следующая

Теорема. *Любой полный многодольный граф высоты 2 в решетке $NPL(n, t)$ является хроматически определяемым.*

Рассматриваемый на множестве полных t -дольных графов порядок помогает значительно сузить множество графов, которые могли бы быть эквивалентны заданному графу. При доказательстве хроматической определяемости графа мы применяем хроматические инварианты. Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют хроматическим инвариантом, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов.

Для доказательства Теоремы мы использовали инвариант $I_2(G)$ — число ребер графа, инвариант $I_3(G)$ — число треугольников в графе и $\text{pt}(G, \chi+1)$ — число разбиений множества вершин графа на $\chi+1$ непустых коклик, т.е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин графа.

Литература

- [1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [2] Chao C.Y., E.G. Whitehead Jr. On chromatic equivalence of graphs // Theory and applications of graphs. 1978. Vol. 642. Pp. 121–131.
- [3] Koh K.M., Teo K.L. The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. Pp. 259–285.
- [4] Li N.Z., Liu R.Y. The chromaticity of the complete t -partite graph $K(1; p_2; \dots; p_t)$ // Xinjiang Univ. Natur. Sci. 1990. Vol. 7, № 3. Pp. 95–96.
- [5] Баранский В.А., Королева Т.А. Решетка разбиений натурального числа // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
- [6] Chao C.Y., G.A. Novacky Jr. On maximally saturated graphs // Discrete Math. 1982. Vol. 41. Pp. 139–143.
- [7] Баранский В.А., Королева Т.А. Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 22–29.

О СВОЙСТВЕ ИНЪЕКТИВНОСТИ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Циовкина Л.Ю.

e-mail: l.tsioukina@gmail.com

При исследовании хроматической определяемости полных многодольных графов было замечено, что для полного многодольного графа G с t долями и n вершинами его хроматический инвариант $pt(G, t + 1)$ (см., например, [1]) может быть проинтерпретирован как значение некоторой функции на множестве $NPL(n, t)$ всех разбиений длины t натурального числа n (соответственно, NPL – множество всех разбиений всех натуральных чисел). Особый интерес представлял вопрос об инъективности этой функции, положительный ответ на который позволял бы, в частности, привести новое простое доказательство хроматической определяемости графов в классе полных многодольных графов. В настоящей работе показано, что предположение об инъективности данной функции в общем случае неверно, доказана ее инъективность при значениях $t \leq 4$ и выделены все классы разбиений, на которых инъективность нарушается для значения $t = 5$.

Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_t) \in NPL(n, t)$ для некоторых $n, t \in \mathbb{N}$. Рассмотрим полный многодольный граф $G = K(u_1, u_2, \dots, u_t)$. Определим показательную функцию для разбиений, полагая

$$2^u = 2^{u_1} + 2^{u_2} + \dots + 2^{u_t}.$$

Известно, что $\frac{1}{2}2^u - t$ есть в точности хроматический инвариант $pt(G, t + 1)$ и t – хроматическое число графа G . В связи с этим возникает вопрос, является ли показательная функция $u \mapsto 2^u$ инъективной. Приведем далее ряд определений и основные результаты.

Определение 1. Разбиение u будем называть *строгим*, если $u_1 > u_2 > \dots > u_t$.

Определим процедуру *сжатия* разбиения. Пусть u не является строгим и $s \in \overline{1, t}$ – это индекс, при котором $u_s = u_{s+1}$, причем $u_{s-1} > u_s$ при $s > 1$. Зададим разбиение u' , полагая $u' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_{t-1})$,

где $u'_1 = u_1, \dots, u'_{s-1} = u_{s-1}, u'_s = u_s + 1, u'_{s+1} = u_{s+2}, u'_{s+2} = u_{s+3}, \dots, u'_{t-1} = u_t$. Ясно, что $u' \in NPL(n - u_s + 1, t - 1)$.

Определение 2. Будем говорить, что разбиение u' получено *сжатием* разбиения u и будем писать $u \mapsto u'$.

Утверждение 1. А. Если $u \mapsto u'$, то $2^u = 2^{u'}$.

Б. Если $u, v \in NPL$ – строгие разбиения и $2^u = 2^v$, то $u = v$.

Ясно, что любое разбиение u с помощью конечного числа последовательных сжатий (возможно нулевого, в случае если u – строгое) можно преобразовать в строгое разбиение w . В силу утверждения 1, такое строгое разбиение w единственно. Оно не зависит от способа приведения разбиения u последовательными сжатиями к строгому разбиению. Через $l(u)$ будем обозначать длину разбиения u . Число сжатий, необходимое для приведения u к w , также не зависит от способа приведения сжатиями разбиения u к разбиению w . Оно равно $l(u) - l(w)$, так как при каждом сжатии длина разбиения уменьшается точно на единицу.

Определение 3. Будем говорить, что такое разбиение w – это *ретракт* разбиения u , а число $l(u) - l(w)$ будем обозначать через $h(u)$ и называть *уровнем* разбиения u .

Утверждение 2. Пусть $u, v \in NPL$, $l(u) = l(v) = t$. Если u – строгое разбиение и $2^u = 2^v$, то $u = v$.

Утверждение 3. Пусть $u, v \in NPL$, $l(u) = l(v) = 2$. Если $2^u = 2^v$, то $u = v$.

Утверждение 4. Пусть $u, v \in NPL(n, t)$ для некоторых $n, t \in \mathbb{N}$, $h(u) < \lceil \frac{t}{3} \rceil$. Если $2^u = 2^v$, то существуют $i, j \in \overline{1, t}$ такие, что $u_i = v_j$.

Теорема 1. Пусть $u, v \in NPL(n, t)$ для некоторых $n, t \in \mathbb{N}$ и $t \leq 4$. Если $2^u = 2^v$, то $u = v$.

Пусть $n, t \in \mathbb{N}$ и $t \leq n$. На множестве $NPL(n, t)$ определим отношение эквивалентности ρ , полагая $u \rho v$, если ретракты разбиений u и v совпадают. Рассмотрим множество классов эквивалентности $NPL(n, t)/\rho$. Понятно, что для любых $u, v \in NPL(n, t)$ условие

$2^u = 2^v$ равносильно условию $u\rho v$, и фактически вопрос об инъективности функции $u \mapsto 2^u$ сводится к описанию классов эквивалентности ρ . По теореме 1 при значениях $t \leq 4$ все ρ -классы множества $NPL(n, t)$ одноэлементны. Опишем далее все классы $NPL(n, t)/\rho$ для значения $t = 5$.

Теорема 2. Пусть $u, v \in NPL(n, t)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $t = 5$, $u \neq v$. Тогда $u\rho v$ в том и только в том случае, если

$$u = (u_1, v_3 - 1, v_3 - 2, v_3 - 2, u_5),$$

$$v = (u_1 - 1, u_1 - 1, v_3, u_5 - 1, u_5 - 1),$$

$$h(u) = h(v) = 2, (u_5 \geq 2).$$

Замечание 1. По теореме 2, для любых $n, t \in \mathbb{N}$ таких, что $t \geq 6$ и $n \geq t + 14$, можно указать хотя бы один неоднородный ρ -класс множества $NPL(n, t)$.

Литература

- [1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОЕ КОДИРОВАНИЕ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Черников Д.В.
e-mail: cherninkiy@gmail.com

В статьях [1, 2] представлен подход к построению кодов, корректирующих ошибки, на основе относительно недавно развитой теории ортогональных вейвлет-преобразований над конечным полем. Практическое применение этого метода затруднено необходимостью построения вейвлет-функции с заданными свойствами. Подобные задачи, как и в теории вейвлетов над комплексным полем, представляют определенную трудность. В работе предлагается другой подход, в основе которого лежит двухканальная схема анализа-синтеза с биортогональными фильтрами над конечным полем $\mathcal{P} = GF(p)$. Не ограничивая общности, будем считать p простым числом. Биортогональные преобразования над полем комплексных чисел подробно рассматриваются в работе [4].



Рис. 1: помехоустойчивое кодирование с использованием биортогональной двухканальной схемы анализа-синтеза

Исходный сигнал $v(n), n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, является последовательностью длины $N/2$ элементов поля \mathcal{P} , где N – четное число. Предполагаем, что рассматриваемые фильтры линейны и циклически с периодом N .

Схемы кодирования, декодирования, вычисления синдрома представлены на рис. 1.

Использование биортогональных фильтров позволяет восстанавливать информационное слово и обеспечивает необходимые свойства

для синдромного декодирования.

Сигнал и импульсные отклики фильтров будем представлять многочленами в кольце $\mathcal{P}[x]/(x^N - 1)$. Рассмотрим две пары фильтров анализа-синтеза:

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} h_i x^{N-i}, & g(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} g_i x^{N-i}; \\ \tilde{h}(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{h}_i x^{N-i}, & \tilde{g}(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{g}_i x^{N-i}. \end{aligned}$$

Пары фильтров (h, g) и (\tilde{h}, \tilde{g}) решают задачу анализа-синтеза, если выполняются условия

$$\begin{aligned} h(x)\tilde{h}(x^{N-1}) + g(x)\tilde{g}(x^{N-1}) &= 2, \\ h(x)\tilde{h}(\alpha x^{N-1}) + g(x)\tilde{g}(\alpha x^{N-1}) &= 0, \end{aligned} \quad \alpha = p - 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Представим фильтр h в виде

$$h(x) = h_e(x^2) + x^{N-1}h_o(x^2),$$

где h_e содержит только четные компоненты, h_o – только нечетные. Введем полифазные матрицы $P(x)$ и $\tilde{P}(x)$:

$$P(x) = \begin{bmatrix} h_e(x) & g_e(x) \\ h_o(x) & g_o(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e(x) & \tilde{g}_e(x) \\ \tilde{h}_o(x) & \tilde{g}_o(x) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В конечном поле для полифазных матриц условие точного восстановления запишется в виде:

$$P(x)(\tilde{P}(x^{N-1}))^T = 2\mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_{2 \times 2} - \text{единичная матрица}. \quad (3)$$

Матрица $P(x)$ с единичным определителем называется комплементарной. Так как $P(x)^{-1} = (\tilde{P}(x^{N-1}))^T$, то для комплементарных пар фильтров (h, g) и (\tilde{h}, \tilde{g}) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e(x) &= g_o(x^{N-1}), & \tilde{h}_o(x) &= \alpha g_e(x^{N-1}), \\ \tilde{g}_e(x) &= \alpha h_o(x^{N-1}), & \tilde{g}_o(x) &= h_e(x^{N-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм Евклида для полифазных компонент фильтра h позволяет получить представление

$$\begin{bmatrix} h_e(x) \\ h_o(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} q_i(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K - \text{константа}. \quad (5)$$

С его помощью находим комплементарный к нему фильтр $g^{(0)}$:

$$P^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} h_e(x) & g_e^{(0)}(x) \\ h_o(x) & g_o^{(0)}(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} q_i(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Согласно теореме о лифтинге (см. [4]) любая комплементарная пара фильтров (h, g) может быть восстановлена по паре $(h, g^{(0)})$ соотношением

$$P(x) = P^{(0)}(x) \begin{bmatrix} 1 & s(x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

для некоторого $s(x) \in \mathcal{P}[x]/(x^N - 1)$.

С помощью изложенного метода был рассмотрен пример из [3]. По известному фильтру $h(x) = 10 + 16x^7 + 5x^2 + 16x$ над полем $GF(17)$ находим комплементарный ему фильтр $g^{(0)}(x) = 10 + x$. Вторая компонента ортогональной пары фильтров $(h(x), g(x))$, где $g(x) = 1 + 10x^7 + x^6 + 5x^5$, восстанавливается соотношением

$$g(x) = g^{(0)}(x) + h(x) s(x^2) \quad (8)$$

с многочленом $s(x) = 7x^3$.

Литература

- [1] *M. Sartipi, F. Fekri*. Two-dimensional error correcting codes using finite-field wavelets / IEEE Information Theory Workshop, San Antonio, Texas, October 2004.
- [2] *F. Fekri, S.W. McLaughlin, R.M. Mersereau, R.W. Shafer*. Double-circulant self-dual codes using finite field wavelet transforms / Proceedings of 13th AAEC Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, pp. 115–116, Honolulu, Hawaii (USA), November 15–19, 1999.
- [3] *G. Caire, R.L. Grossman, H.V. Poor*. Wavelet transforms associated with finite cyclic groups / IEEE Transactions on Information Theory, vol. 39, pp. 1157–1166, July 1993.
- [4] *I. Doubechies, W. Sweldens*. Factoring wavelet transforms into lifting steps / The Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 4, iss. 3, 1998.

О ГРАФАХ ДЕЗА С ПАРАМЕТРАМИ ГРАФОВ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ К РЕШЕТЧАТЫМ И ТРЕУГОЛЬНЫМ ГРАФАМ

Шалагинов Л.В.¹

e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru

Все графы, рассматриваемые в данной работе, — неориентированные, без петель и кратных ребер. Окрестностью вершины u в графе G будем называть подграф $[u]$, вершины которого смежны с u в графе G и две вершины смежны между собой в $[u]$ тогда и только тогда, когда они смежны в G .

Графом Деца с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих смежных.

Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , любые две смежные вершины имеют точно λ общих смежных с ними и две несмежные вершины имеют μ общих смежных.

Реберным графом графа G называется граф $L(G)$, множество вершин которого является множеством ребер исходного графа, и две вершины которого смежны, если соответствующие ребра в исходном графе имеют общую вершину.

Решетчатым графом называется реберный граф полного двудольного графа. В случае равных долей исходного графа, равных n , решетчатый граф является сильно регулярным с параметрами $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ и обозначается через $L(n)$. Треугольным графом называется реберный граф полного графа. Треугольный граф является сильно регулярным с параметрами $(\binom{n}{2}, 2(n-2), n-2, 4)$, где n — число вершин в исходном полном графе, и обозначается через $T(n)$.

Дополнением графа G называется граф \overline{G} , множество вершин которого совпадает с множеством вершин G , и две вершины смежны в \overline{G} тогда и только тогда, когда они не смежны в G .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1) и программы УрО РАН для молодых ученых.

Очевидно, что граф, дополнительный к сильно регулярному графу, тоже сильно регулярный. Граф $\overline{L(n)}$ является сильно регулярным с параметрами $(n^2, (n-1)^2, (n-2)(n-1), (n-2)^2)$, а граф $\overline{T(n)}$ – сильно регулярным с параметрами $(\binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{2}, \binom{n-4}{2})$.

Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, не являющийся сильно регулярным.

В этой работе рассматриваются только точные графы Деза.

В статье [1] Эриксона, Фернандо, Хэмерса, Харди и Хеммитера рассмотрены базовые свойства графов Деза, в том числе предложен способ получения точных графов Деза из сильно регулярных графов. А именно, справедлива

Теорема 1. Пусть G – сильно регулярный граф с параметрами (n, k, λ, μ) с $k \neq \mu$ и $\lambda \neq \mu$, и с матрицей смежности M . Пусть P – перестановочная матрица, тогда PM – матрица смежности графа Деза тогда и только тогда, когда P задает инволютивный автоморфизм графа G , переставляющий только несмежные вершины.

Цель данной работы – найти все удовлетворяющие условию теоремы 1 автоморфизмы графов, дополнительных к решетчатым и треугольным графам. Описать графы, полученные с помощью этих автоморфизмов, через их параметры и окрестности. И показать, что по этим параметрам и окрестностям графы восстанавливаются однозначно.

Теорема 2. Для $\overline{L(n)}$ существует $\lfloor n/2 \rfloor$ автоморфизмов, удовлетворяющих условию теоремы 1. При этом i -й автоморфизм переставляет i пар строк (или столбцов).

В данной работе будем рассматривать только автоморфизм, переставляющий одну пару строк (столбцов). С точностью до нумерации вершин можно считать, что он переставляет первые две строки. Ясно, что окрестности неподвижных и сдвигаемых вершин различны. Окрестность неподвижной вершины обозначим L_1 , а сдвигаемой L_2 .

Теорема 3. Пусть G – граф Деза с параметрами $(n^2, (n-1)^2, (n-2)(n-1), (n-2)^2)$, окрестность каждой вершины которого изоморфна L_1 или L_2 , тогда G можно получить из $\overline{L(n)}$ с помощью автоморфизма, переставляющего пару строк (или столбцов).

Теорема 4. Для $\overline{T(n)}$ существует в точности один автоморфизм, удовлетворяющий условию теоремы 1. Этот автоморфизм переводит друг в друга два максимальных полных подграфа $\overline{T(n)}$.

Окрестность неподвижной вершины обозначим через T_1 , а сдвигаемой – через T_2 .

Теорема 5. Пусть G – граф Деза с параметрами $((\binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}), (\binom{n-3}{2}, \binom{n-4}{2}))$, окрестность каждой вершины которого изоморфна T_1 или T_2 , тогда G можно получить из $\overline{T(n)}$ с помощью автоморфизма, переводящего друг в друга два максимальных полных подграфа $\overline{T(n)}$.

В статье [2] с помощью рассматриваемого метода были построены графы Деза с параметрами (15,6,3,1) и (16,9,6,4) и было показано, что других графов с такими параметрами не существует.

Литература

- [1] Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D., Hemmeter J. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. Pp. 359–405.
- [2] Горяинов С.В., Шалагинов Л.В. О графах Деза на 14, 15 и 16 вершинах / см. настоящие Тезисы, с. 192–194.

МОДУЛЯРНЫЕ И НИЖНМОДУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТОК МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Шапрынский В.Ю.¹

e-mail: vshapr@yandex.ru

Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется *модулярным*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$ для всех $y, z \in L$ таких, что $y \leq z$, и *нижнемодулярным*, если $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$ для всех $y, z \in L$ таких, что $x \leq y$. В ряде работ (см., в частности, [2–4]) изучались модулярные и нижнемодулярные элементы решетки **SEM** всех многообразий полугрупп. В данной работе рассматриваются элементы этих двух типов в решетке **Com** коммутативных многообразий полугрупп. Чтобы сформулировать полученные результаты, нам понадобится ряд определений и обозначений.

Для краткости, договоримся называть многообразия коммутативных полугрупп, являющиеся (нижне)модулярными элементами решетки **Com**, *(нижне)модулярными в Com* многообразиями. Через \mathcal{T} , \mathcal{SL} и \mathcal{COM} мы обозначаем тривиальное многообразие, многообразие полурешеток и многообразие всех коммутативных полугрупп соответственно. Как обычно, мы будем заменять пару тождеств $ux = xi = u$, где буква x не входит в запись слова u , символическим тождеством $u = 0$. Тождества вида $u = 0$ называются *0-приведенными*. Многообразию коммутативных полугрупп, заданное внутри многообразия \mathcal{COM} некоторым набором 0-приведенных тождеств, будем называть *0-приведенным в Com*. Многообразие полугрупп называется *нильмногообразием*, если оно состоит из нильполугрупп, или, что эквивалентно, удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для некоторого натурального n . Тождество $u = v$ называется *подстановочным*, если слова u и v зависят от одних и тех же букв и одно из них может быть получено из другого переименованием букв.

Теорема 1. *Если многообразие коммутативных полугрупп \mathcal{V} модулярно в **Com**, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{M} – одно*

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 09-01-12142, 10-01-00524) и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования Российской Федерации (проект № 2.1.1/3537).

из многообразий \mathcal{T} и \mathcal{SL} , а \mathcal{N} – нильмногообразиие.

Эта теорема полностью сводит задачу описания модулярных в **Com** многообразий к рассмотрению ниль-случая.

Теорема 2. *Всякое модулярное в **Com** коммутативное нильмногообразиие полугрупп может быть задано внутри многообразииа \mathcal{COM} только 0-приведенными и подстановочными тождествами.*

С другой стороны, как показано в [1, предложение 2.1], всякое 0-приведенное в **Com** многообразиие модулярно в **Com**.

Теорема 3. *Многообразиие коммутативных полугрупп \mathcal{V} нижнемодулярно в **Com** тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{M} – одно из многообразиий \mathcal{T} и \mathcal{SL} , а \mathcal{N} – 0-приведенное в **Com** многообразиие.*

Из этой теоремы и ранее известных фактов легко вытекает

Следствие. *Всякое нижнемодулярное в **Com** многообразиие коммутативных полугрупп модулярно в **Com**.*

Все сформулированные выше утверждения являются точными «коммутативными аналогами» полученных ранее результатов о модулярных и нижнемодулярных элементах решеток **SEM**. Аналог теоремы 1 для решетки **SEM** получен в [2], аналог теоремы 2 – в [4], а аналоги теоремы 3 и следствия – в [3]. Столь полная аналогия между результатами о (нижне)модулярных элементах в решетках **SEM** и **Com** не случайна: практически все они вытекают из некоторого общего факта. Напомним, что многообразиие полугрупп называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразиие \mathcal{COM} , и *периодическим*, если оно состоит из периодических полугрупп (или, что эквивалентно, не содержит \mathcal{COM}). Справедливо следующее

Предложение. *Если периодическое многообразиие полугрупп \mathcal{V} является модулярным или нижнемодулярным элементом решетки подмногообразиий некоторого надкоммутативного многообразииа \mathcal{X} , то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{M} – одно из многообразиий \mathcal{T} и \mathcal{SL} , а \mathcal{N} – нильмногообразиие.*

Применяя это предложение при $\mathcal{X} = \mathcal{COM}$, легко получить теоремы 1 и 3. Применение предложения при $\mathcal{X} = \mathcal{SEM}$ позволяет получить новые, существенно более простые и короткие, чем известные ранее, доказательства аналогов теорем 1 и 3 для решетки **SEM**.

Естественно возникают два вопроса: а) можно ли в формулировке предложения отказаться от требования, чтобы многообразие \mathcal{V} было периодическим; б) можно ли с помощью предложения доказать аналоги теорем 1 и 3 для решеток, «промежуточных» между **SEM** и **Com** (например, для решетки подмногообразий произвольного надкоммутативного многообразия или для решетки всех перестановочных многообразий полугрупп²)? Нами найдены примеры, показывающие, что ответ на оба этих вопроса отрицателен. В частности, многообразие \mathcal{COM} является одновременно модулярным и нижнемодулярным элементом решетки подмногообразий многообразия $\text{var}\{xyz = yxz = xzy\}$; более того, всякое отличное от \mathcal{SEM} надкоммутативное многообразие \mathcal{V} является нижнемодулярным элементом решетки подмногообразий некоторого надкоммутативного многообразия, строго содержащего \mathcal{V} .

Литература

- [1] В. Ю. Шапрынский. Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп // Изв. вузов. Матем. (принято к печати).
- [2] J. Ježek, R. N. McKenzie. Definability in the lattice of equational theories of semigroups // Semigroup Forum. 1993. Vol. 46, № 2. Pp. 199–245.
- [3] V. Yu. Shaprynskii, B. M. Vernikov. Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, № 3–4. Pp. 371–382.
- [4] B. M. Vernikov. On modular elements of the lattice of semigroup varieties // Comment. Math. Univ. Carol. 2007. Vol. 48, № 4. Pp. 595–606.

²Многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2 \cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$, где π – нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

ПОДКОЛЬЦА КОЛЕЦ ВЫЧЕТОВ ЦЕЛЫХ КРУГОВЫХ ПОЛЕЙ

Шпонько А.В.

e-mail: ashponko@gmail.com

Пусть $\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Введем обозначение $I_m^p = I(Q(\zeta_m))/pI(Q(\zeta_m))$, где $I(Q(\zeta_m))$ – кольцо целых m -кругового поля. Это кольцо рассматривалось в [1].

Ограничимся случаем, когда m и p принимают простые и попарно различные значения. В [1] было показано, что если p не делит $m > 3$, то

$$\exp(U(I_m^p)) = p^f - 1, \text{ где } f = \min\{j \geq 1 \mid p^j \equiv 1 \pmod{m}\}.$$

Рассмотрим подмножества $R_k(I_m^p) = \langle x \in I_m^p \mid x^k = x \rangle$. Касательно их строения удалось получить следующий результат.

Теорема. $R_k(I_m^p)$ – подкольцо I_m^p , обладающее свойствами:

- 1) $\forall a \in R_k(I_m^p) \ a \in U(R_k(I_m^p)) \iff a \in U(I_m^p)$;
- 2) $R_k(I_m^p)$ по сложению есть линейное пространство над Z_p размерности $\text{НОК}(f, k)$, где $f = \min\{j \geq 1 \mid p^j \equiv 1 \pmod{m}\}$.

Подобный результат открывает новый подход к изучению структуры I_m^p для случая составного значения f , позволяя выделить систему вложенных подколец в I_m^p . В силу второго свойства, реальный интерес в данном случае представляют сугубо подкольца $R_k(I_m^p)$, где k является собственным делителем f . Однако, структура данных подколец нетривиальна и требует тщательного изучения.

Литература

- [1] Шпонько А.В. Порядки элемента в группах вычетов колец целых абелевых полей / Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции. С. 72-75. - Екатеринбург: УрО РАН, 2009.

О ПОДМНОЖЕСТВАХ РАСШИРЕНИЯ БЕЛЛА, НЕ ГОМЕОМОРФНЫХ βN

Бастрыков Е.С.
e-mail: vporoshok@gmail.com

В работе рассматривается одно бикомпактное расширение BN счётного дискретного пространства, построенное М. Беллом [1] как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры, определённой в множестве подмножеств N .

В [2] было показано существование подмножеств N , являющихся сходящимися последовательностями в BN , и подмножеств N , для которых замыкание в BN есть копия βN . Сходящейся последовательностью в BN оказалась всякая цепь в N , рассматриваемом как частично упорядоченное множество. А замыкание всякой так называемой строгой антицепи гомеоморфно βN . Под строгой антицепью мы понимаем антицепь, любые два элемента которой имеют разные области определения. Естественно встал вопрос о существовании антицепи в N , чьё замыкание негомеоморфно βN . Для $s \in N$ обозначим: $s + 1 = \{t \in N : \text{dom } t = \text{dom } s + 1, t|_{\text{dom } s} = s\}$.

Пример 1. Пусть $f \in P$ и $\{s_n = f|_{n+1} : n \in \omega\}$ — полная цепь. Для каждого чётного $n \in \omega$ пусть $A_n, B_n \subseteq s_n + 1 \setminus \{s_{n+1}\}$ такие, что $A_n \cap B_n = \emptyset$ и $|A_n| < |A_{n+2}|$, $|B_n| < |B_{n+2}|$. Обозначим $A = \cup\{A_n : n \text{ — чётное}\}$ и $B = \cup\{B_n : n \text{ — чётное}\}$. $A \cup B$ является антицепью и $[A \cup B]$ не гомеоморфно βN .

Пример 2. Аналогичным образом можно рассматривать антицепь. Пусть $\{\pi(n) : n \text{ — чётное}\}$ — антицепь. Для каждого чётного $n \in \omega$ пусть $A_n, B_n \subseteq \pi(n) + 1$ такие, что $A_n \cap B_n = \emptyset$ и $|A_n| < |A_{n+2}|$, $|B_n| < |B_{n+2}|$. Обозначим $A = \cup\{A_n : n \text{ — чётное}\}$ и $B = \cup\{B_n : n \text{ — чётное}\}$. Как и в первом примере, $A \cup B$ является антицепью и $[A \cup B]$ не гомеоморфно βN .

Литература

- [1] Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // *Topology Proceedings*. 1980. Vol. 5. Pp. 11–25.
- [2] Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of N // *Topology Proceedings*. 2010. Vol. 35. Pp. 177–185.

О ТЕНЗОРЕ КРИВИЗНЫ В РАССЛОЕНИИ БИВЕКТОРОВ НАД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ

Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В.¹
e-mail: gladunova_olesya@mail.ru, edr2002@mail.ru,
slavsky2004@mail.ru

Пусть (M, g) — ориентированное риманово многообразие размерности 4. Тогда оператор Ходжа задает эндоморфизм $*$: $\Lambda^2 T^*M \rightarrow \Lambda^2 T^*M$, для которого $*^2 = \text{Id}$. Его собственные подпространства Λ^+ и Λ^- , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно, определяют два векторных расслоения, при этом

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-. \quad (1)$$

Риманов тензор кривизны R в любой точке можно рассматривать как оператор $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, задаваемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(Z \wedge T) \rangle = R(X, Y, Z, T).$$

Оператор кривизны \mathcal{R} относительно разложения (1) можно представить в блочном виде

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\text{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\text{Id} \end{array} \right), \quad (2)$$

где W^+ и W^- — матрицы автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля W , s — скалярная кривизна (см. [7, 8]).

Многообразия, для которых автодуальная или антиавтодуальная составляющая тензора Вейля W равна нулю, принято называть конформно полуплоскими, в отличие от конформно плоских, для которых $W = 0$. Конформно полуплоские римановы многообразия изучались в работах многих математиков (см., например, [3]). Конформно плоские римановы многообразия исследовались в [2]. Однородные конформно плоские римановы многообразия классифицированы

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-98001, 10-01-90000-Бел_а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта НШ-6613.2010.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

Д.В. Алексеевским и Б.Н. Кимельфельдом в [1]. Вопрос о классификации конформно полуплоских однородных римановых многообразий в общем случае остается открытым. В данной работе изучаются четырехмерные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой, и для которых один из блоков W^+ , W^- или Z в разложении матрицы оператора кривизны (2) обращается в нуль. При этом существенно используются результаты работ [4–6], и система обозначений вещественных четырехмерных алгебр Ли соответствует введенной в [6].

Теорема 1. Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда $W^+ = 0$, если и только если $W = 0$.

Теорема 2. Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой такая, что $W^- = 0$. Тогда либо $W = 0$, либо алгебра Ли группы G есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,9}^\beta$ ($-1 < \beta \leq 1$) с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = 2A$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$, $\beta = 1$ или $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$, $\beta = 1$; алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,11}^\alpha$ ($\alpha > 0$) с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^2 = -c_{3,4}^3 = -A$, $A > 0$ или $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^2 = -c_{3,4}^3 = -A$, $A > 0$.

Теорема 3. Пусть G — действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой такая, что $Z = 0$. Тогда алгебра Ли группы G изоморфна либо алгебре Ли $4A_1$, либо $A_{3,6} \oplus A_1$.

Теорема 4. Пусть G — действительная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой такая, что $Z = 0$. Тогда G изоморфна либо алгебре Ли $2A_2$ с набором структурных констант $c_{1,2}^2 = c_{3,4}^4 = A > 0$, либо $A_{4,5}^{\alpha,\beta}$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L > 0$, либо $A_{4,6}^{\alpha,\beta}$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 c_{3,4}^3 = \alpha L$, $c_{2,4}^2 = -c_{3,4}^3 = L > 0$, $\alpha > 0$, либо $A_{4,9}^\beta$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$, либо $A_{4,11}^\alpha$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2\alpha A$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \alpha A$, $c_{2,4}^2 = -c_{3,4}^3 = A$, $A > 0$, $\alpha > 0$.

Литература

- [1] *Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
- [2] *Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В.* Однородные пространства: теория и приложения: монография. — Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.
- [3] *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
- [4] *Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 115–147.
- [5] *Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 40–116.
- [6] *Мубаракзянов Г.М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов, серия: математика. 1963. Т. 32, № 1. С. 144–123.
- [7] *Петров А.З.* Классификация пространств, определяющих поля тяготения // Ученые записки Казанского гос. ун-та. 1954. Т. 114, № 8. С. 55–69.
- [8] *Singer I.M., Thorpe J.A.* The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analysis, Papers in Honour of K. Kodaira, Univ. Tokyo Press. 1969. Pp. 355–365.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПСЕВДОРИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ

Долгоносова А.Ю.¹

e-mail: dolgonosova@rambler.ru

Пусть (M, F) — слоение, заданное T -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}$, где $i, j \in J$, а T — многообразие размерности q . Это означает, что $U_i, i \in J$, — открытое покрытие M ; $f_i : U_i \rightarrow T$ — субмерсии со связными слоями; если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то определены такие биекции $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$, что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$.

Если на многообразии T существует такая псевдориманова метрика, что каждое локальное преобразование γ_{ij} является изоморфизмом псевдоримановых многообразий, индуцированных на соответствующих открытых подмножествах, то слоение (M, F) называется псевдоримановым. Подчеркнем, что лоренцевы и римановы слоения образуют подклассы псевдоримановых слоений.

Нами доказан следующий критерий псевдоримановости гладкого слоения произвольной коразмерности.

Теорема 1. *Для того чтобы произвольное гладкое слоение (M, F) было псевдоримановым, необходимо и достаточно, чтобы на многообразии M существовала такая псевдориманова метрика g , что любая геодезическая псевдориманова многообразия (M, g) , ортогональная слоению (M, F) в одной точке, оставалась ортогональной этому слоению в каждой своей точке.*

Для римановых слоений утверждение Теоремы 1 принадлежит Рейнхарту [1], в этом случае оно также доказано Молино [2], причем доказательство существенно использует положительную определенность римановой метрики и, в частности, то, что геодезические риманова многообразия являются локально кратчайшими.

Теорема 1 доказана другим способом, основанным на применении слоеных расслоений над (M, F) и их редукций.

Псевдориманова метрика g , удовлетворяющая Теореме 1, существование которой характеризует псевдориманово слоение (M, F) ,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00457-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2011 годы (контракт № П945).

является трансверсально проектируемой относительно (M, F) , т.е. производная Ли $L_X g$ вдоль любого векторного поля X , касательно к этому слоению, равна нулю. Пусть ∇ – связность Леви-Чивита псевдориманова многообразия (M, g) , т.е. ∇ не имеет кручения и $\nabla g = 0$. Если каждый слой слоения (M, F) является вполне геодезическим подмногообразием в (M, ∇) , то (M, F) называется вполне геодезическим псевдоримановым слоением.

Через ∇^* обозначается линейная связность Вранчиану. Эта связность трансверсально проектируемая относительно псевдориманова слоения (M, F) и, вообще говоря, отлична от ∇ .

Теорема 2. Пусть (M, F) – вполне геодезическое псевдориманово слоение произвольной коразмерности q и g – трансверсально проектируемая относительно (M, F) псевдориманова метрика на многообразии M . Тогда для того, чтобы связность Леви-Чивита ∇ на (M, g) совпала со связностью Вранчиану ∇^* , необходимо и достаточно выполнения одного из следующих двух эквивалентных условий:

- 1) q -мерное распределение \mathfrak{M} , ортогональное к (M, F) , интегрируемо;
- 2) слоение (M, F) параллельно.

В случае, когда (M, F) – вполне геодезическое риманово слоение, из Теоремы 1 вытекает Теорема 2 статьи [3].

Литература

- [1] Reinhardt B. Foliated manifolds with bundle-like metrics // Ann. of Math. 1959. Vol. 69. Pp. 119–132.
- [2] Molino P. Riemannian foliations // Progress in Math. of Math. 1988. Vol. 73. –Boston-Basel: Birkhauser.
- [3] Нарманов А. Я. О геометрии вполне геодезических римановых слоений // Изв. вузов. Матем., 1999. № 9. С. 26–31.

ИНДЕКС МОРСА ЦИКЛИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА

Жукова А.М.

e-mail: millionnaya13@ya.ru

Определение 1. Полигональным шарнирным механизмом называется набор из n положительных вещественных чисел l_1, l_2, \dots, l_n , реализуемых в виде сторон многоугольника.

Определение 2. Конфигурацией шарнирного механизма называется набор из n точек на плоскости $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, таких, что $|p_i, p_{i+1}| = l_i$. При этом первые две точки зафиксированы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (l_1, 0)$.

Мы изучаем только плоские конфигурации шарнирного механизма. Хотя конструкции обобщаемы для размерности 3, ситуация в трехмерном пространстве существенно отличается от плоской, см. [2].

Совокупность конфигураций с зафиксированными вершинами p_1 и p_2 есть пространство модулей шарнирного механизма. В общем случае пространство модулей является гладким многообразием, размерность которого равна $n - 3$.

Мы изучаем шарнирные механизмы с помощью теории Морса, задавая на пространстве модулей функцию ориентированной площади:

$$A(P) = (x_1y_2 - x_2y_1) + \dots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

Известно, что вписанные конфигурации шарнирного механизма являются критическими точками этой функции [1]. Главная теорема работы содержит явную формулу для индекса Морса циклической конфигурации.

Для вписанной конфигурации мы вводим следующие обозначения (рис. 1):

α_i – половина центрального угла, опирающегося на сторону p_i, p_{i+1} ;

$m(P)$ – индекс Морса функции A в точке P ;

$\mathcal{H}(P)$ – знак определителя гессиана функции A в точке P ;

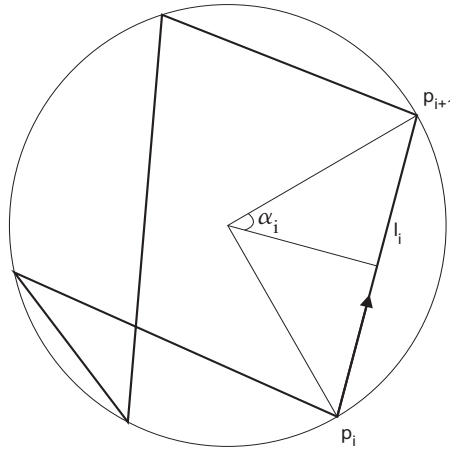


Рис. 1: базовые обозначения

$\omega(P)$ – степень конфигурации P как замкнутой ломаной относительно центра описанной окружности;

ε_i – ориентация вектора (p_i, p_{i+1}) относительно центра описанной окружности;

$e(P)$ – количество положительно ориентированных относительно центра векторов (p_i, p_{i+1}) .

Нам понадобится следующая метрическая характеристика:

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \operatorname{tg} \alpha_i;$$

$$d(P) = \operatorname{sgn}(\delta P).$$

Мы доказываем следующие утверждения [3]:

Утверждение 1. Пусть P – циклическая конфигурация общего вида. Тогда

$$\mathcal{H}(P) = -d(P)(-1)^{e(P)}.$$

Утверждение 2. Пусть $P = (p_1, \dots, p_n)$ – циклическая конфигурация общего вида. Рассмотрим ее подконфигурации P_3, \dots, P_n

$$P_i = (p_1, \dots, p_i), \quad i = 3, \dots, n.$$

Примем $\mathcal{H}(P_3) = 1$ для треугольной конфигурации P_3 .

Тогда индекс Морса конфигурации $m(P)$ равен количеству смен знака в последовательности

$$\mathcal{H}(P_3), \mathcal{H}(P_4), \mathcal{H}(P_5), \dots, \mathcal{H}(P_n).$$

На основе этих двух утверждений выводится

Теорема. Для циклической конфигурации общего вида P шарнирного механизма L

$$m(P) = \begin{cases} e(P) - 1 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) > 0; \\ e(P) - 2 - 2\omega(P), & \text{если } \delta(P) < 0. \end{cases}$$

Литература

- [1] *Khimshiashvili G., Panina G.* Cyclic polygons are critical points of area / *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*. 2008, Vol. 360, № 8, Pp. 238–245.
- [2] *Khimshiashvili G., Panina G., Siersma D., Zhukova A.* Critical points of robot arms and polygonal linkages in 3D (готовится к печати).
- [3] *Panina G., Zhukova A.* Morse index of a cyclic polygon. arXiv:1007.2740v2 [math.MG]

СЕКВЕНЦИАЛЬНО-КОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ

Косолобов Д.А.

e-mail: dkosolobov@mail.ru

Исследуются свойства секвенциально-компактно открытой топологии на пространстве всех непрерывных вещественнозначных функций $C_{sc}(X)$. В работе исследуется взаимосвязь $C_{sc}(X)$ с другими известными множественно-открытыми топологиями такими, как топология поточечной сходимости, компактно-открытая, счётно компактно-открытая, псевдокомпактно-открытая, \mathbb{R} -компактно-открытая. Будем использовать следующие обозначения:

$$C_p(X), C_c(X), C_{cc}(X), C_{ps}(X), C_r(X). \quad (1)$$

Множество непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ с множественно-открытой топологией, порождённой некоторым семейством λ , будем обозначать $C_\lambda(X)$, соответственно, $C(X)$ с топологией равномерной сходимости на семействе λ — $C_{\lambda,u}(X)$. Семейство замыканий секвенциально компактных множеств обозначается \overline{sc} . Отметим, что топология $C_{sc}(X)$ может быть несравнимой с топологией $C_c(X)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. $C_{sc}(X) = C_{\overline{sc}}(X) = C_{sc,u}(X) = C_{\overline{sc},u}(X) \leq C_u(X)$.

Теорема 2. $C_{sc}(X) = C_u(X)$ тогда и только тогда, когда в X существует секвенциально компактное всюду плотное множество.

Из теоремы 1 заключаем, что $C_{sc}(X)$ — топологическая группа (и даже топологическое векторное пространство).

Определение. Топологическая абелева группа G называется \aleph_0 -ограниченной, если для каждого открытого множества U , содержащего нейтральный элемент, существует счётное множество $S \subset G$ такое, что $S + U = G$.

Известно, что каждая топологическая группа G , обладающая свойством Суслина ($c(G) \leq \omega$), является \aleph_0 -ограниченной. Доказана следующая

Теорема 3. Пусть $C_\lambda(X)$ — топологическая группа. $C_\lambda(X)$ \aleph_0 -ограничена тогда и только тогда, когда λ состоит из метризуемых компактов.

Из теоремы 3 следуют важные следствия.

Следствие 1. Пусть λ — семейство всех секвенциально компактных множеств в X (компактных, счётно компактных, псевдокомпактных, \mathbb{R} -компактных). $C_\lambda(X)$ \aleph_0 -ограничено тогда и только тогда, когда все элементы λ — метризуемые компакты.

Следствие 2. Пусть $C_\lambda(X)$ — топологическая группа, обладающая свойством Суслина. Тогда λ состоит из метризуемых компактов.

Интересно рассмотреть частный случай, когда X является субметризуемым пространством (то есть X уплотняется на метризуемое пространство).

Теорема 4. Пусть X — субметризуемое пространство, $A \subset X$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) A компактно;
- (б) A метризуемый компакт;
- (в) A секвенциально компактно;
- (г) A счётно компактно;
- (д) A псевдокомпактно;
- (е) A \mathbb{R} -компактно.

Из этой теоремы сразу следует важное

Следствие 3. Если X субметризуемо, то

$$C_c(X) = C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_r(X).$$

Далее, показано, что для многих основных топологических кардинальнозначных характеристик счётность в одной из известных множественно-открытых топологий влечёт за собой счётность во всех топологиях (1). А именно, доказаны теоремы (доказательства существенно опираются на теорему 4):

Теорема 5. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $C_p(X)$ сепарабельно;

- (б) $C_c(X)$ сепарабельно;
- (в) $C_{sc}(X)$ сепарабельно;
- (г) $C_{cc}(X)$ сепарабельно;
- (д) $C_{ps}(X)$ сепарабельно;
- (е) $C_r(X)$ сепарабельно.

Теорема 6. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $C_c(X)$ имеет счётную сеть;
- (б) $C_{sc}(X)$ имеет счётную сеть;
- (в) $C_{cc}(X)$ имеет счётную сеть;
- (г) $C_{ps}(X)$ имеет счётную сеть;
- (д) $C_r(X)$ имеет счётную сеть.

Теорема 7. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $C_c(X)$ обладает счётной базой;
- (б) $C_{sc}(X)$ обладает счётной базой;
- (в) $C_{cc}(X)$ обладает счётной базой;
- (г) $C_{ps}(X)$ обладает счётной базой;
- (д) $C_r(X)$ обладает счётной базой.

ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Можей Н.П.

e-mail: mozhey@bstu.unibel.by

Опишем локально однородные поверхности в четырехмерной аффинной и проективной геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность не менее 4 (с точностью до аффинной и проективной эквивалентности соответственно). В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. Отдельно выделим подмногообразия, алгебры симметрий которых имеют нетривиальную открытую орбиту и конечное число орбит (в этом случае эта группа содержится в группе симметрий одной из орбит меньшей размерности). При классификации для каждой поверхности найдем ее алгебру симметрий. Особенностью представленной методики является использование чисто алгебраических методов описания однородных подмногообразий. Для решения проблемы используется алгебраический аналог метода Картана подвижных реперов, описанный в [1].

Пусть M — однородное пространство, снабженное транзитивным действием группы Ли \overline{G} , и пусть L — вложенное подмногообразие в M . Будем предполагать, что действие \overline{G} на M локально эффективно, и отождествлять алгебру Ли $\overline{\mathfrak{g}}$ группы Ли \overline{G} с некоторой подалгеброй алгебры Ли векторных полей на M . Группа симметрий, определенная соотношением $\text{sym}(L) = \{g \in \overline{G} \mid g.L = L\}$, является подгруппой Ли группы \overline{G} , и $\text{sym}(L)$ совпадает с соответствующей подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$. Более того, L является однородным тогда и только тогда, когда $\text{Sym}(L)$ действует транзитивно на L . Пусть \mathfrak{h} — произвольная подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$, и H — соответствующая связная виртуальная подгруппа группы \overline{G} . Говорят, что L является орбитой подалгебры \mathfrak{h} через точку $p \in M$, если L — связное открытое подмногообразие (во внутренней топологии) орбиты H , примененной к точке p , и $p \in L$. Чтобы найти однородное подмногообразие L , нужно найти для \mathfrak{h} связную виртуальную подгруппу H группы \overline{G} и ее орбиту через фиксированную точку. Определим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \overline{\mathfrak{g}}$ и построим цепочку подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots$ следующим образом: $\mathfrak{g} = \{X \in \overline{\mathfrak{g}} \mid X_a = 0\}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{n+1} = \{x \in \mathfrak{g}_n \mid [x, \mathfrak{h}] \supset \mathfrak{g}_n + \mathfrak{h}\}$, $\mathfrak{g}_\infty = \bigcap_{n=0}^\infty \mathfrak{g}_n$. Будем полагать, что две подалгебры алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$ экви-

валентны, если они могут быть преобразованы друг в друга с помощью элементов группы $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пусть $V_n(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_n)/\mathfrak{g}_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ для всех $n \geq 0$, $V_\infty = (\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\infty)/\mathfrak{g}_\infty \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_\infty$; а $\pi_n: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ и $\tau_n: \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ — естественные проекции при всех $n \geq 0$. Для данного подпространства $V_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ обозначим через G_{n+1} подгруппу в $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, состоящую из всех автоморфизмов, которые сохраняют подалгебру \mathfrak{g}_n и при индуцировании на $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ сохраняют подпространство V_n .

Для описания всех алгебр симметрий однородных подмногообразий в M используем следующий алгоритм. Опишем все подпространства V_0 в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ (с точностью до преобразований, индуцированных элементами группы $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$). Для каждого найденного подпространства V_n найдем подалгебру \mathfrak{g}_{n+1} , подгруппу G_{n+1} и подпространство $W = \tau_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1}$. Если $\mathfrak{g}_{n+1} \neq \mathfrak{g}_n$, опишем (с точностью до G_{n+1}) все подпространства V_{n+1} в W , для которых V_{n+1} является дополнительным к $\ker \tau_n = \mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_{n+1}$ и V_{n+1} удовлетворяет условию: для любых двух элементов $x + \mathfrak{g}_n, y + \mathfrak{g}_n \in V_n$ элемент $[x, y] + \mathfrak{g}_{n-1}$ принадлежит подпространству V_{n-1} . Затем повторяем этот шаг снова. Если $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n+1}$, найдем $\mathfrak{h} = \pi_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Если \mathfrak{h} является подалгеброй, то \mathfrak{h} является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия. Более того, таким образом могут быть получены все алгебры симметрий.

Применяя алгоритм к случаям $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$, $M = \mathbb{RP}^4$ и $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4)$, $M = \mathbb{R}^4$, получим искомые классификации. Таким образом получены действия с открытой орбитой и с конечным числом орбит. Аналогичные классы однородных поверхностей в трехмерном случае (т.е. с алгеброй симметрий размерности ≥ 3) исчерпываются цилиндрами, квадриками и поверхностью Кэли $z = xy + x^3/3$ в аффинной геометрии (поверхностью Кэли и поверхностью Энрикеса $(z - xy + x^3/3)^2 = 8/9(y - x^2/2)^3$ в проективной геометрии). Найден полный список остальных однородных поверхностей из этого класса (27 гиперповерхностей в проективной геометрии и 33 гиперповерхности в аффинной геометрии).

Литература

- [1] *Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M.* Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry // *Geometry of submanifolds.* 1996. № 8. Pp. 168–178.

РЕГУЛЯРНОСТЬ МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИИ

Осипов А.В.

e-mail: oab@list.ru

На пространстве всех непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$, как правило, рассматриваются топологии, обладающие достаточно сильными аксиомами отделимости. Так, топология поточечной сходимости (т.е. самая слабая топология, относительно которой все функции $C(X)$ непрерывны) или компактно-открытая топология (т.е. топология равномерной сходимости на семействе всех компактных подмножеств X) являются вполне регулярными топологиями, более того, $C(X)$ в этих топологиях — топологическая группа и топологическое векторное пространство. Совсем другая ситуация может быть, если рассматривать множественно-открытую топологию на $C(X)$, определенную на множестве не всех компактных подмножеств X или на множестве не обязательно компактных подмножеств X . В этой работе исследуется вопрос регулярности множественно-открытой топологии, а именно, получены некоторые необходимые и достаточные условия регулярности множественно-открытой топологии в классе сильно нульмерных пространств.

Пусть X — тихоновское пространство, λ — некоторое семейство непустых подмножеств X . На пространстве всех непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ рассмотрим топологию, предбазу которой образуют все множества вида $[F, U] = \{f \in C(X) : f(F) \subset U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество \mathbb{R} . Введенная таким образом топология называется множественно-открытой и обозначается $C_\lambda(X)$. Если семейство λ состоит из всех конечных (компактных) подмножеств X , топология совпадает с топологией поточечной сходимости $C_p(X)$ (с компактно-открытой топологией $C_c(X)$). Далее будем предполагать, что λ является π -сетью, что является необходимым и достаточным условием для хаусдорфовости $C_\lambda(X)$.

Нам понадобятся следующие определения:

Определение 1. Подмножество A пространства X называется *ограниченным*, если для любого $f \in C(X)$ множество $f(A)$ — ограниченное множество в \mathbb{R} .

Определение 2. Подмножество A пространства X называется \mathbb{R} -компактным, если для любого $f \in C(X)$ множество $f(A)$ компактно в \mathbb{R} .

Определение 3. Пусть λ — некоторое семейство подмножеств пространства X . Посемейство $\beta \subseteq \lambda$ называется аппроксимирующим для семейства λ , если для любого $A \in \lambda$ и произвольной функционально открытой окрестности U элемента A существует конечный набор B_i из β такой, что $A \subseteq \bigcup B_i \subseteq U$.

Определение 4. Весом семейства λ будем называть наименьшую мощность аппроксимирующих подсемейств β семейства λ (обозн. $\omega(\lambda)$).

Теорема 1. Пусть пространство X является сильно нульмерным и $C_\lambda(X)$ обладает регулярной аксиомой отделимости (T_3). Тогда семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных подмножеств.

Следствие 1. Пусть X — нульмерное линделефово пространство и $C_\lambda(X) = T_3$. Тогда семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных подмножеств X .

Следствие 2. Пусть X — произвольное непустое регулярное пространство, мощность которого не более чем счетна, и $C_\lambda(X) = T_3$. Тогда семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных подмножеств X .

Отметим, что класс сильно нульмерных пространств достаточно разнообразен. Например, к этому классу относятся: прямая Зоргенфрея (стрелка), тихоновская плоскость, стоун-чеховская компактификация натуральных чисел βN , пространство Исбелла–Мривка, иррациональные числа, рациональные числа, канторовское множество.

Теорема 2. Пусть X — произвольное тихоновское пространство и вес семейства λ не более чем счетен. Тогда если $C_\lambda(X) = T_3$, то семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных подмножеств X .

Следствие 3. Пусть X — произвольное тихоновское пространство и вес семейства λ не более чем счетен. Тогда если $C_\lambda(X) = T_3$, то $C_\lambda(X)$ — метризуемое пространство со второй аксиомой счетности.

ДВУМЕРНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ОРБИФОЛДЫ И ИХ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ

Рогожина Е.А.¹

e-mail: rogozhinaekaterina@rambler.ru

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями, образованными орбифолдными точками.

Для каждой точки x орбифолда \mathcal{N} определена карта (U, φ) , где $\varphi : U \rightarrow R^n/\Gamma$ — гомеоморфизм на фактор-пространство R^n по конечной группе $\Gamma \subset GL(n, R)$, причем $\varphi(x)$ — орбита нуля $0 \in R^n$. При этом Γ называется *группой орбифолдности* точки x . При переходе к другой точке из \mathcal{N} группа орбифолдности может изменяться.

Если для $x \in \mathcal{N}$ существует такая карта, что $\Gamma = Id_{R^n}$, то точка x называется *регулярной*. Как известно, множество всех регулярных точек открыто и всюду плотно в \mathcal{N} .

Орбифолд \mathcal{N} с лоренцевой метрикой g называется *лоренцевым орбифолдом* и обозначается парой (\mathcal{N}, g) .

Целью работы является исследование строения двумерных лоренцевых орбифолдов в зависимости от их групп изометрий.

Напомним, что орбифолд \mathcal{N} называется *хорошим*, если он представим в виде M/Ψ , где Ψ — некоторая группа диффеоморфизмов многообразия M . Если, более того, группа Ψ конечна, то орбифолд \mathcal{N} называется *очень хорошим*.

Сначала, применяя [1], мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если (\mathcal{N}, g) — двумерный лоренцев орбифолд, то существуют двумерное ориентируемое лоренцево многообразие (M, g_M) и конечная группа Ψ изометрий многообразия (M, g_M) , изоморфная подгруппе группы $Z_2 \times Z_2$, такие, что $\mathcal{N} = M/\Psi$, а фактор-отображение $f : M \rightarrow M/\Psi$ является регулярным псевдоримановым накрытием (M, g_M) на (\mathcal{N}, g) .*

Следствие 1. *Все двумерные лоренцевы орбифолды очень хорошие.*

Группа всех изометрий лоренцева орбифолда (\mathcal{N}, g) называется *полной* и обозначается через $\mathcal{I}(\mathcal{N}, g)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00457-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2011 годы (проект № П945).

Теорема 2. Пусть $f : M \rightarrow M/\Psi = \mathcal{N}$ — накрытие лоренцева орбифолда (\mathcal{N}, g) лоренцевым многообразием (M, g_M) , удовлетворяющее теореме 1. Тогда полная группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ орбифолда (\mathcal{N}, g) является группой Ли, изоморфной фактор-группе $\mathbf{N}(\Psi)/\Psi$, где $\mathbf{N}(\Psi)$ — нормализатор группы Ψ в группе Ли $\mathfrak{I}(M)$ всех изометрий лоренцева многообразия M . Размерность этой группы удовлетворяет неравенству

$$\dim(\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)) \leq 3,$$

причем для выполнения равенства необходимо, чтобы орбифолд (\mathcal{N}, g) являлся лоренцевым многообразием постоянной кривизны.

Если орбифолд \mathcal{N} компактен, то выполняется неравенство

$$\dim(\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)) \leq 2.$$

Отметим, что свойства лоренцевых торов с недискретными группами изометрий исследуются в [2].

Напомним, что действие $\Phi : G \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} : (f, x) \mapsto f(x)$ группы Ли G на орбифолде \mathcal{N} называется *собственным*, если отображение $F = (\Phi, id_{\mathcal{N}}) : G \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N} : (f, x) \mapsto (f(x), x)$ является собственным, т.е. прообраз $F^{-1}(K)$ любого компактного подмножества K в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ компактен [3].

Используя теорему 1, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Для полной группы изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ двумерного лоренцева орбифолда (\mathcal{N}, g) следующие два условия эквивалентны:

- 1) действие группы $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ на \mathcal{N} собственное;
- 2) на орбифолде \mathcal{N} существует такая риманова метрика h , что $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g) = \mathfrak{I}(\mathcal{N}, h)$, где $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, h)$ — группа изометрий риманова орбифолда (\mathcal{N}, h) .

Если орбифолд \mathcal{N} компактен, то каждое из условий 1) и 2) эквивалентно следующему условию:

- 3) группа Ли $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ компактна.

Применяя, в частности, свойства ановских диффеоморфизмов, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. Если компонента единицы $\mathfrak{I}_e(\mathcal{N}, g)$ полной группы Ли изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ действует на орбифолде \mathcal{N} несобственно, то лоренцев орбифолд (\mathcal{N}, g) имеет постоянную кривизну.

Более того, если орбифолд \mathcal{N} компактен, то существует накрытие $f : M \rightarrow \mathcal{N}$, удовлетворяющее теореме 1, где $(M, g_M) = (T^2, g_0)$ — полный плоский лоренцев тор.

Следствие 2. *Если полная группа изометрий двумерного компактного лоренцева многообразия (M, g) некомпактна, то (M, g) либо полный плоский тор, либо полная плоская бутылка Клейна.*

Заметим, что группа изометрий двумерного лоренцева орбифолда (\mathcal{N}, g) , удовлетворяющая теореме 4, не является дискретной.

Выражаю благодарность научному руководителю Н.И. Жуковой.

Литература

- [1] Багаев А.В., Жукова Н.И. Группы автоморфизмов G -структур конечного типа на орбиобразиях // Сиб. матем. журнал, 2003. Т. 44, № 2. С. 263–278.
- [2] Sanchez M. Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field // Trans. Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 349, № 3. Pp. 1063–1080.
- [3] Багаев А.В., Жукова Н.И. Группы изометрий римановых орбифолдов // Сиб. матем. журнал, 2007. Т. 48, № 4. С. 723–741.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ ТВЕРДООКСИДНЫХ ТОПЛИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ананьев М.В., Гаврилюк А.Л.¹

e-mail: alexandergavriliouk@gmail.com

Свойства керамических изделий и частей современных электрохимических устройств (твердо-оксидных топливных элементов (ТОТЭ), электрохимических сенсоров, насосов, реформеров и др.) определяются не только составом и свойствами присутствующих фаз, но и расположением кристаллитов, площадью их контакта, т.е. микроструктурой изделий. Микроструктура является определяющим фактором кинетики процессов, происходящих при работе электрохимических устройств. Понимание природы этих процессов во многом обуславливает нашу способность влиять на них: заменять дорогие и дефицитные материалы более доступными, определять наиболее эффективные способы формирования конструктивных частей электрохимических устройств. Микроструктура зависит от технологии производства материала, вида сырья, степени установления фазового равновесия, кинетики фазовых превращений, роста зерен, спекания и т.д.

Чаще всего источником информации о микроструктуре являются изображения, получаемые методом растровой электронной микроскопии. Так, например, пористость и распределение размеров фаз в материале можно оценить сегментацией изображения поверхности материала [1]. (Отдельными фазами являются поры и объемы материала, имеющего одинаковый химический состав; различия между фазами на изображении проявляются в яркости или текстуре.) Тем не менее, для оценки ряда параметров микроструктуры, которые имеют прямую взаимосвязь с физическими свойствами ТОТЭ, недостаточно только анализа изображений сечений или поверхности материалов. Существуют параметры, которые можно рассчитать только из 3D-структуры (открытая пористость и связанная с ней проблема перколяции, доля активных межфазных границ и т.п.)

Информацию о 3D-микроструктуре функциональных материалов можно получать методами ионного травления (FIB-SEM) и рент-

¹Работа поддержана молодежным инновационным грантом УрО РАН.

геновской томографии. Недостатком этих методов является высокая стоимость, трудоемкость и ограничение по объему анализируемого материала, который, как правило, составляет $20 \times 20 \times 20$ мкм, чего недостаточно, чтобы делать выводы о распределении параметров во всем объеме конструкционной части ТОТЭ.

Этого ограничения лишены методы стохастического моделирования микроструктуры [2–4]. Провести 3D-реконструкцию по свойствам изображения возможно в предположении изотропности распределения фаз материала в объеме. Анализ изображений поверхности при этом используется для оценки следующих статистических характеристик распределения фаз и их взаимного расположения.

1. Автокорреляционная функция фазы [2]. Определим характеристическую функцию $I^{(j)}(\mathbf{r})$ фазы с номером j в точке пространства \mathbf{r} : $I^{(j)}(\mathbf{r}) = 1$, если материал в точке \mathbf{r} принадлежит фазе j , и $I^{(j)}(\mathbf{r}) = 0$ в противном случае. В общем случае, автокорреляционная функция фазы j является функцией двух аргументов $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — произвольных точек системы, и интерпретируется как вероятность того, что материал в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 принадлежит фазе j . В предположении изотропности системы можно считать, что автокорреляционная функция фазы зависит не от выбранных точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, а от расстояния между ними $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, и может быть определена как

$$S_2^{(j)}(r) = \langle I^{(j)}(\mathbf{r}_1)I^{(j)}(\mathbf{r}_2) \rangle_{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2): r=|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

где $\langle \rangle$ — усреднение по всему ансамблю реализаций.

2. Функция распределения хорд [3]. Хордой фазы j называется любой отрезок, состоящий из точек фазы j , концы которого лежат на границах фазы j . Функция распределения хорд $P_j(u)$ показывает, сколько хорд длины u содержит фаза j . Некоторые авторы также рассматривают близкую по смыслу функцию прямых путей (lineal path function, [2]) $L_j(u)$, значение которой есть вероятность того, что внутри фазы j можно провести отрезок длиной u .

Известно три подхода для реализации 3D-реконструкции.

1. Аппроксимация блуждающими шарами (или случайная упаковка шарами) [2]. При этом подходе реконструируемый объем случайно заполняется шарами различных классов (отвечающих фазам). Выбор радиусов и способа взаимного расположения шаров влияет на распределение площадей фаз и их извилистость и составляет суть

конкретной реализации данного подхода. Предварительные результаты разрабатываемой в данной работе реализации приведены ниже. На рис. 1 представлено исходное изображение сечения материала. На рис. 2 представлено сравнение результата сегментации исходного изображения сечения материала с сечением трехмерной модели.

2. Реконструкция на основе нелинейного преобразования случайного поля (для двухфазной системы) [5]. Суть метода заключается в том, что сначала генерируется трехмерное случайное поле (некоррелированное и нормально распределенное). Затем подбирается линейный фильтр и нелинейное преобразование для получения поля с требуемыми автокорреляционными функциями фаз.

3. Стохастическая минимизация функционала [2–4]. В этом методе также сначала генерируется трехмерное случайное поле и составляется квадратичный функционал близости упомянутых статистических характеристик этого поля и характеристик, оцененных в результате анализа изображений. Затем производится стохастическая минимизация этого функционала (вариациями метода Монте-Карло: имитация отжига и алгоритм Метрополиса и др.).

Для оценки и проверки достоверности результатов моделирования предполагается проводить моделирование всеми тремя способами, что потребует значительных вычислительных ресурсов.

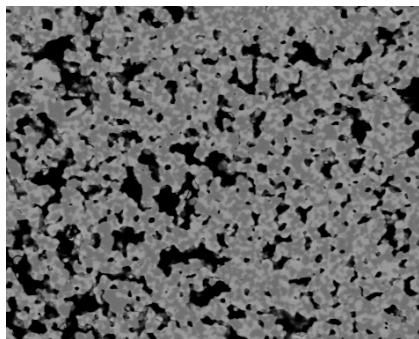


Рис. 1: изображение сечения несущего анодного слоя ТОТЭ

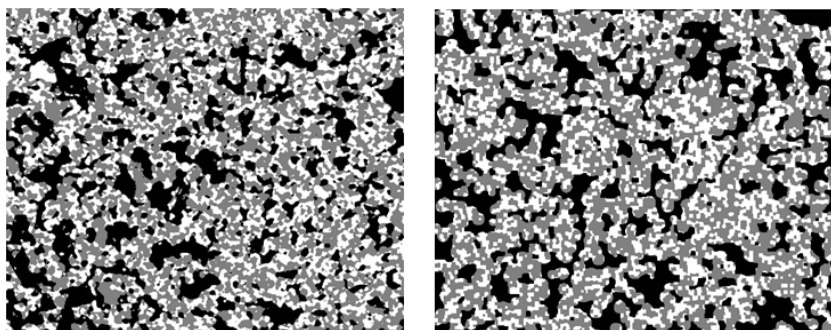


Рис. 2: сегментация сечения материала (слева) и сечение 3D-модели

Литература

- [1] *Ананьев М.В., Гаврилюк А.Л.* Анализ микроструктуры поверхности электрохимических материалов по данным РЭМ / в сб. «Проблемы теорет. и прикл. математики», Труды 40-й Всерос. молодеж. конф. С. 522–532. — Екатеринбург: УрО РАН, 2010.
- [2] *C.L.Y. Yeong, S. Torquato* Reconstructing random media // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57, № 1. Pp. 495–506.
- [3] *M.S. Talukdar, O. Torsaeter, M.A. Ioannidist.* Stochastic reconstruction of particulate media from two-dimensional images // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2002. № 248. Pp. 419–428.
- [4] *Yoshinori Suzue, Naoki Shikazono, Nobuhide Kasagi.* Micro modeling of solid oxide fuel cell anode based on stochastic reconstruction // *Journal of Power Sources*. 2008. № 184. Pp. 52–59.
- [5] *J.A. Quiblier.* A new three-dimensional modeling technique for studying porous media // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1984. Vol. 98, № 84. Pp. 84–102.

О СОЗДАНИИ СРЕДЫ ДЛЯ БЫСТРОЙ РАЗРАБОТКИ СИСТЕМ НАУЧНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю.

e-mail: sskumk@gmail.com

За последние 25-30 лет с появлением и развитием персональных компьютеров резко возросли вычислительные мощности и, как следствие, объёмы выходных данных вычислительных программ. В частности, это относится и к программам, реализующим алгоритмы, разрабатывавшиеся в 1980-90-е годы в Отделе динамических систем ИММ УрО РАН. Основным объектом построения являются максимальные стабильные мосты (множества уровня функции цены игры), которые для некоторого класса задач могут мыслиться как вложенные друг в друга трубки, тянущиеся параллельно оси времени в трёхмерном пространстве *время × двумерная фазовая координата*. Временные сечения этих трубок приближаются многоугольниками и вычисляются на некоторой сетке по времени.

Первые программы визуализации подразумевали совместное нанесение на плоскость фазовых координат нескольких сечений. Однако с ростом количества выводимых многоугольников картинка быстро переставала быть наглядной. В конце 1990-х в рабочей группе В.Л. Авербуха в ИММ УрО РАН была создана программа визуализации получаемых трёхмерных трубок. Затем, с разработкой новых вычислительных программ, дописывались и новые программы визуализации [1, 2].

Однако в процессе создания этих систем стало ясно, что из системы в систему кочует значительная часть программы, а именно, вся реализация пользовательского интерфейса и манипуляция сценой, что значительно усложняет и тормозит получение возможностей по отображению новых объектов. Кроме того, разработанные системы были жёстко привязаны к формату выходных данных вычислительной программы, оговоренному на момент разработки.

В результате анализа разработанных систем были выделены основные возможности, которыми должна обладать система визуализации, а именно:

- уметь загружать объекты (поверхности, линии, точки) в сцену и удалять их оттуда;

- изменять атрибуты объектов: цвет (для поверхности — цвет лицевой и изнаночной стороны), прозрачность, видимость; при этом изменение атрибутов должно быть возможным как у отдельных объектов, так и у групп;
- группировать объекты либо статически, при добавлении в сцену, либо динамически, например, посредством поиска по тегам, которые им приписываются при создании;
- вращать, перемещать, масштабировать сцену;
- добавлять, удалять источники света, изменять яркость;
- добавлять, удалять, перемещать, поворачивать отсекающие плоскости;
- сохранять и загружать текущее состояние сцены;
- запоминать историю действий пользователя, производить пошаговые и групповые откаты;
- экспортировать картинки и видео.

Кроме того, стало ясно, что алгоритмы восстановления трёхмерных объектов на основе выходных данных вычислительных программ должны быть оформлены в модулях (фильтрах), внешних по отношению к среде визуализации. Такая структура (рис. 1) позволяет без перекомпиляции среды заменять фильтры при изменении формата выходных данных или добавлять новые фильтры для визуализации новых объектов.

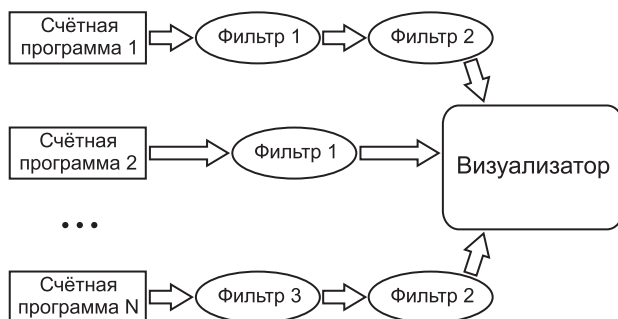


Рис. 1: модульная схема системы визуализации

Разработка соответствующей системы была начата [3] в начале 2000-х. За прошедший период был накоплен значительный теорети-

ческий и практический опыт эксплуатации полученного программного продукта. В настоящее время авторами реализуется принципиально новая поколение данной системы. Применяются такие актуальные на данные момент технологии, как: язык C#, среда исполнения Microsoft .Net 4.0, оконная библиотека WPF, библиотека трёхмерной графики Media3D.

Среди дополнительных требований, сформулированных сейчас к системе, основным является возможность расширения функционала среды через создание скриптов на языке C#. Написание должно быть доступно как из самой среды (в случае небольшого объёма кода), так и вне её, например, в Visual Studio. Для подключения скриптов и их компиляции во время исполнения используется библиотека MEF (Managed Extensibility Framework).

Авторы считают, что предлагаемая разработка поможет осуществить визуализацию собственных вычислительных результатов, а также окажется полезным инструментом для анализа и представления результатов самого широкого круга задач.

Литература

- [1] *Averbukh V.L., Kumkov S.S., Patsko V.S., Pykhitev O.A., Yurtaev D.A.* Specialized Visualization Systems for Differential Games / Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and Electronic Devices and Systems, N.E. Mastorakis (Ed.). Pp. 301–306. — S.L.: WSES Press, 1999.
- [2] *Авербух В.Л., Зенков А.И., Исмагилов Т.Р., Манаков Д.В., Пыхитеев О.А., Юртаев Д.А.* Разработка специализированных систем научной визуализации / Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Вып. 4. С. 3–23. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
- [3] *Зенков А.И.* Разработка подхода к созданию специализированных систем визуализации для высокопроизводительных научных вычислений // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 81–86.

ПРОТОТИП СИСТЕМЫ СТЕРЕОНАБЛЮДЕНИЯ

Горшенин В.В.

e-mail: Gorshenin.Vladimir@googlemail.com

Системы, использующие видеоаппаратуру для регистрации происходящих событий, принято называть системами видеонаблюдения. Основная цель использования видеонаблюдения — обеспечение безопасности. Системы видеонаблюдения стали применяться несколько десятилетий назад, претерпели за это время эволюционное развитие и имеют на данный момент широкое распространение за рубежом и в России. Современные системы видеонаблюдения способны работать в контрастных условиях освещенности, воздействия неблагоприятных факторов окружающей среды, способны охватывать наблюдением территорию большой площади. Неотъемлемой частью комплекса видеонаблюдения является человек. Только действия оператора видеонаблюдения позволяют среагировать на происходящие в кадре события и принять необходимые меры по предотвращению нежелательных последствий. Высшим уровнем автоматического реагирования является определение наличия движения в кадре. При этом системы видеонаблюдения не могут количественно описать движение наблюдаемого объекта. Указанное обстоятельство обусловлено законами оптики: для камеры будут выглядеть «одинаковыми» и автомобиль, движущийся вдалеке, и пчела, пролетающая перед объективом.

В данной работе предлагается способ улучшения систем видеонаблюдения — стереонаблюдение. Термин «стереонаблюдение», используемый в рамках данной работы, сформулирован по аналогии с «видеонаблюдением» и означает применение систем стереозрения в задачах наблюдения.

Стереонаблюдение качественно отличается от видеонаблюдения тем, что позволяет не только выполнять видеорегистрацию событий в рамках наблюдаемой сцены, но и определять трехмерные координаты тех участков сцены, в которых происходят события (движение). Переход на использование систем стереонаблюдения позволит автоматически классифицировать наблюдаемые события на «разрешенные» и «запрещенные», а также реагировать на них появление определенным образом (видеорегистрация, отправка сигнала опера-

тору и т.п.). Выбор метода стереозрения [1] среди других методов технического зрения для решения поставленной задачи объясняется следующим обстоятельством. Системы стерео- и видеонаблюдения используют одинаковую аппаратную базу и поэтому существующие системы наблюдения могут быть улучшены установкой дополнительных камер и вычислительных модулей со встроенными алгоритмами стереозрения. Другие методы технического зрения [2] требуют для своей работы дополнительной лазерной, инфракрасной, ультразвуковой «подсветки», поэтому их применение серьезно усложнит существующие системы наблюдения.

Изучение продукции ведущих отечественных и зарубежных производителей систем видеонаблюдения [5] позволяет определить современные тенденции развития: использование систем с переменной частотой оцифровки, использование камер с переменным фокусным расстоянием, использование камер с изменяемым положением (поворот, наклон), применение тепловизоров в системах видеонаблюдения, построение географически распределенных многокамерных систем видеонаблюдения. Все вышеперечисленные подходы повышают надежность систем видеонаблюдения, не предлагая революционных решений. С этой точки зрения интересной является публикация компанией «Новые технологии» информации об испытаниях стереоскопической системы видеонаблюдения CVS-3D [3]. Подробной информации об этой разработке нет.

Целью работы системы стереонаблюдения является определение трехмерных координат области пространства, в которой происходят некоторые события, и автоматическое реагирование на возникновение данных событий в соответствии с заранее установленными правилами. Алгоритм работы системы описывается последовательностью операций:

- 1) калибровка стереоголовок;
- 2) калибровка стереокамеры;
- 3) определение движения в кадре;
- 4) отслеживание перемещения объектов;
- 5) вычисление пространственных координат движущихся объектов;
- 6) применение правил реагирования.

В рамках данной работы реализован программно-аппаратный комплекс стереонаблюдения с функций автоматической классифи-

кации движения в рамках наблюдаемой сцены. Программная часть написана на языке Си с использованием библиотеки компьютерного зрения OpenCV [4]. В качестве камер используются бытовые веб-камеры Logitech OpticPro 9000. Для вычисления пространственных координат движущихся объектов предложен и апробирован модифицированный метод Лукаса–Канады [6]. Основной упор в работе системы стереонаблюдения делается на разработку и применение правил реагирования на движение.

Литература

- [1] *Форсайт, Дэвид А., Понс, Жан.* Компьютерное зрение. Современный подход. — М.: Вильямс, 2004.
- [2] *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2006.
- [3] 3D видео в компьютерных телевизионных системах безопасности. http://www.cvsnt.ru/technology_cur.html.
- [4] *Bradsy Gary, Kaehler Adrian.* Learning OpenCV. — O'Reilly, 2008.
- [5] *Горшенин В.В.* Перспективы развития систем видеонаблюдения / в сб. «Казанская наука № 6». С. 7–9. — Казань: Казанский Издательский Дом, 2010.
- [6] *Горшенин В.В.* Модифицированный алгоритм Лукаса–Канады в задаче стереонаблюдения / в сб. «Казанская наука № 5». С. 4–7. — Казань: Казанский Издательский Дом, 2010.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО
РЕШЕНИЯ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Заводников Д.Е., Сафронов М., Ким А.В.¹

e-mail: d.zavodnikov@gmail.com, samazan@gmail.com, avkim@imm.uran.ru

В докладе обсуждаются вопросы практической реализации параллельных численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ).

В работах [1–3] рассматривались теоретические аспекты распараллеливания численных методов решения ФДУ — явных и неявных методов Эйлера и Рунге–Кутты. Описанные алгоритмы и представленные теоретические оценки не учитывали практическую реализацию методов на современных вычислительных системах.

В настоящем докладе представлены и обсуждаются результаты параллельной реализации численных методов решения ФДУ на языке C++ с использованием библиотек поддержки параллельных вычислений [4–6]: OpenMP и MPI.

Проведены вычисления на компьютере с многоядерным процессором и на вычислительном кластере ИММ УрО РАН.

Представлено сравнение скорости вычислений при помощи последовательных и параллельных реализаций численных методов на данных различной размерности. Также приводится сравнение скорости работы реализаций на языке C++ с реализациями в системе MATLAB.

Приводится обоснование полученных результатов с учетом архитектуры ЭВМ ([4–7]) и реализации современных ОС ([8, 9]).

Даны рекомендации исследователям, в каких случаях и при каких данных имеет смысл использовать параллельные вычисления для численного решения функционально-дифференциальных уравнений.

¹Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН «Фундаментальные науки — медицине», РФФИ (проекты 08-0100141, 10-01-00377) и Уралосибирского междисциплинарного проекта.

Литература

- [1] *Ким А.В., Пименов В.Г.* *i*-Гладкий анализ и численные методы решения ФДУ. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [2] *Iserles A., Norsett S.P.* On the theory of parallel Runge-Kutta methods // IMA J. Numer. Anal. 1990. Vol. 10. Pp. 463–488.
- [3] *Ким А.В., Волохова Л.Е., Заводников Д.Е.* Компьютерное моделирование и анализ фазовых портретов функционально-дифференциальных уравнений // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений, 2010.
- [4] *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
- [5] *Rauber T., Runger G.* Parallel Programming: for Multicore and Cluster Systems. — Springer, 2010.
- [6] *Эхтер Ш., Робертс Д.* Многоядерное программирование. — СПб.: Питер, 2010.
- [7] *Таненбаум Э.С.* Архитектура компьютера. 5-е изд. — СПб.: Питер, 2007.
- [8] *Таненбаум Э.С.* Современные операционные системы. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2007.
- [9] *Робачевский А.М., Немнюгин С.А., Стесик О.Л.* Операционная система UNIX. 2-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010.

РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ПОТОКОВАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ

Ионов С.Д.

e-mail: progsdi@gmail.com

Искусственная нейронная сеть (ИНС) – система соединённых и взаимодействующих между собой простых процессоров, искусственных нейронов. Потокковая нейронная сеть – ИНС, состоящая из потоковых нейронов. Потокковым нейроном будем называть простейший вычислитель, преобразующий входной вектор в выходное значение следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Output}_j &= f_j(\text{Input}_j W_j)(\text{Input}_j T_j + a_j) \\ &= f_j \left(\sum_{i=1}^n \text{Input}_{ij} w_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n \text{Input}_{ij} t_{ij} + a_j \right) \end{aligned}$$

где W и T – весовые матрицы, a_j – постоянная константа выхода нейрона, f – пороговая функция.

Заметим, что этот нейрон можно реализовать на основе обычного многослойного перцептрона, преобразуя передаваемые сигналы в битовое представление и производя битовые операции на нейронных сетях. В качестве примера, на рисунке 1 показан блок, выдающий сигнал Z , если сигнал Y превышает заданный порог.

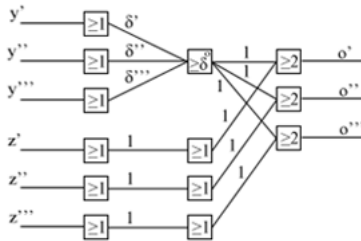


Рис. 1: перцептрон, реализующий потокковый нейтрон

Весы δ' , δ'' , δ''' и порог δ^o определяются по порогу δ потокковой сети.

На основе потокового нейрона можно построить простейшие блоки: генератор единицы, сеть сравнения, конструкцию ЕСЛИ, ячейку потоковой памяти, сумматор.

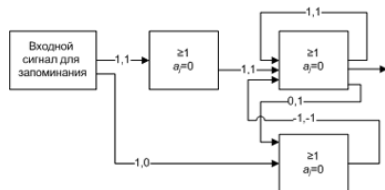


Рис. 2: ячейка памяти с функцией перезаписи

На схеме 2 полноценный элемент памяти, который хранит входной сигнал, пока не будет подан новый входной сигнал.

В основе потоковой нейронной сети мы построили потоковый нейрон, возбуждение и выходной сигнал которого вычисляются независимо, используя две различные матрицы весов. Такая конструкция позволила нейрону сохранять или корректировать входной сигнал, а параллельно с этим выполнять свои классифицирующие функции, присущие обычным нейронам.

Для распределенного запуска нейронной сети используется разработанный мной универсальный сервер, позволяющий использовать произвольный протокол обмена сообщениями над TCP/IP. На начальном этапе все узлы равнозначны и основным для взаимодействия с пользователем может быть выбран любой. Всё взаимодействие происходит согласно протоколу нейронной сети NNP.

Первая проблема, с которой мы сталкиваемся в ходе взаимодействия нейронов сети – рассинхронизация, вызванная различиями в скорости работы сети и ее узлов. Чтобы проанализировать состояние физической сети узлов и определить временные задержки на соединениях, производится тестирование сети отправкой пакетов от основного узла до всех остальных с вычислением времен перехода через соединения.

Вторая проблема – процесс размещения нейронов. Чтобы разместить нейроны по узлам, необходимо решить вариант двухуровневой задачи о назначениях.

Заданы два графа: $\dot{G} = (\dot{V}, \dot{E})$ – граф нейронной сети и

$\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{w})$ – граф узлов, где $\widehat{w}: \widehat{V} \rightarrow (0, 1]$ – весовая функция вершин – производительность узла. Заданы $\dot{e}: \dot{V} \times \dot{V} \rightarrow \{0, 1\}$ и $\widehat{e}: \widehat{V} \times \widehat{V} \rightarrow \{0, 1\}$ – функции ребер. Необходимо построить такую функцию $f: \dot{V} \rightarrow \widehat{V}$, чтобы выполнялись условия:

1) $\dot{e}(v_1, v_2) \leq \widehat{e}(f(v_1), f(v_2))$, причем для $v_1, v_2 \in \dot{V}$ $f(v_1) \neq f(v_2)$ – все ребра нейронной сети лежат или на ребрах между узлами или внутри узлов,

2) $\sum_{v_1, v_2 \in \dot{V}} \widehat{e}(f(v_1), f(v_2)) \dot{e}(v_1, v_2) \rightarrow \min$ – число ребер нейронной сети на ребрах между узлами минимально,

3) $\sum_{\substack{v \in \dot{V} \\ \widehat{v}}} \psi_f(\widehat{v}) w(\widehat{v}) \rightarrow \max$ – число размещенных нейронов по узлам пропорционально производительности этих узлов, где

$$\psi_f = \begin{cases} \frac{1}{\phi_f}, & \phi_f > 0; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$\phi_f: \widehat{V} \rightarrow N = \left\| \left\{ \dot{v} \in \dot{V} \mid f(\dot{v}) = \widehat{v} \right\} \right\| \geq 0$. В общем случае получаем NP-полную задачу.

Чтобы найти приближенное решение этой задачи, обратимся ко второму условию. Нужно разбить граф нейронной сети на классы, чтобы их количество было равно числу узлов. Для этого нужно найти $k - 1$ минимальных разрезов, где k – число узлов.

Для поиска произвольного минимального разреза используется современный алгоритм Матильды Штор и Френка Вагнера (1995) [1]. Алгоритм создан на основе алгоритма Нагамоки и Ибараки и имеет сложность $O(nm + n^2 \log n)$.

Получив группы с минимальными разрезами, будем размещать группы по узлам пропорционально их производительности.

Описанный алгоритм размещения позволяет достичь оптимального соответствия нейронов узлам для большинства задач, но может дать размещение, когда все нейроны будут работать на некотором одном узле.

Литература

- [1] Stoer M., Wagner F. A Simple Min-Cut Algorithm.

ОЦЕНКА ОПТИМАЛЬНОГО ПОРОГА ДЛЯ АЛГОРИТМА ПОИСКА СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКТОРА ПЫТЬЕВА

Корнилов Ф.А., Первалов Д.С. ¹
e-mail: fakornilov@mail.ru

Задача поиска изменений на двух изображениях возникает в разных областях компьютерного зрения, таких как сжатие видеоданных, системы видеонаблюдения и автоматический анализ космоснимков [1], [2]. Особый интерес представляет задача обнаружения не всех изменений, а так называемых *структурных изменений*, которые заключаются в существенном изменении наблюдаемой сцены типа появления, исчезновения или изменения формы объектов. При этом изменения освещенности и цвета объектов структурными изменениями не считаются. В работе [3] был построен алгоритм, решающий прикладную задачу обнаружения структурных изменений на двух одновременных космических снимках. В настоящей работе приводится исследование данного алгоритма на модельном примере с целью выбора оптимальных параметров его работы.

В основе алгоритма лежит функция $f_{\mathbf{AB}}$ преобразования яркости, строящаяся по двум сравниваемым изображениям \mathbf{A} и \mathbf{B} ². Ее значение для некоторой яркости c есть среднее значение набора яркостей изображения \mathbf{B} в пикселах, яркость которых на изображении \mathbf{A} равна c :

$$f_{\mathbf{AB}}(c) = \overline{\{\mathbf{B}(x, y) : \forall x \forall y \mathbf{A}(x, y) = c\}}.$$

Используя $f_{\mathbf{AB}}$, строится изображение

$$\mathbf{A}'(x, y) = f_{\mathbf{AB}}(\mathbf{A}(x, y)),$$

и структурными изменениями \mathbf{A} в \mathbf{B} считается множество точек, в которых величина $|\mathbf{A}'(x, y) - \mathbf{B}(x, y)|$ превосходит некоторый порог T .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 09-П-1-1013 и гранта РФФИ № 09-01-00523.

²Известно, что такая функция является оптимальным проектором в некотором пространстве функций относительно специального интегрального критерия невязки, предложенного Ю.П. Пытьевым [4]. В дальнейшем будем называть такую функцию проектором Пытьева.

Для целей симметризации результата окончательным результатом работы алгоритма объявляется объединение данного множества с аналогичным множеством изменений \mathbf{B} в \mathbf{A} .

Очевидно, что порог T является параметром, зависящим от \mathbf{A} и \mathbf{B} , и его правильная оценка существенным образом влияет на качество работы алгоритма. Исследуем вопрос выбора T для оценки изменений \mathbf{A} в \mathbf{B} для модельной задачи: \mathbf{A} однотонное, то есть $\mathbf{A} \equiv c$, а \mathbf{B} состоит из однотонных областей Q и V , соответствующих объекту и фону. При этом $\mathbf{B}|_Q \equiv b + h$, $\mathbf{B}|_V \equiv b$, площадь Q составляет aS пикселей, где S — число пикселей изображения, а a — некоторый параметр из отрезка $[0, 0.5]$. Выясним, каким должно быть значение T для того, чтобы все пиксели объекта (соотв. фона) посчитались (соотв. не посчитались) структурным изменением.

Без ограничения общности будем считать $b = c = 0$. Тогда

$$\mathbf{A}' \equiv f_{\mathbf{AB}}(c) = \frac{(b + h) \cdot aS + b \cdot (1 - a)S}{S} = ah.$$

Для пикселей Q требуется, чтобы $|ah - h| > T$. Для пикселей V требуется, чтобы $|ah| \leq T$. Имеем

$$ah \leq T < (1 - a)h.$$

Таким образом, для $0 \leq a < 0.5$ множество допустимых порогов непусто и представляет собой полуинтервал с серединой $0.5h$ и радиусом $(0.5 - a)h$.

Полученный результат был проверен на паре реальных изображений \mathbf{A} и \mathbf{B} , когда \mathbf{A} является практически однотонным, а на \mathbf{B} появляется новый объект (изображение дома). Изображение \mathbf{B} было вручную разбито на области Q и V (изображение дома и остальные пиксели соответственно), и значения $b + h$ и b были вычислены как средние значения яркостей на этих областях. В качестве T использовалась величина $0.5h$. См. результаты на рис. 1, где изображены (слева направо): \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A}' - \mathbf{B}$ и найденные структурные изменения.

Можно заметить, что область с изображением дома была выделена достаточно точно, а диагональный объект в левой нижней части изображений, изменивший цвет, не выделился. Это свидетельствует о принципиальной применимости полученного результата.

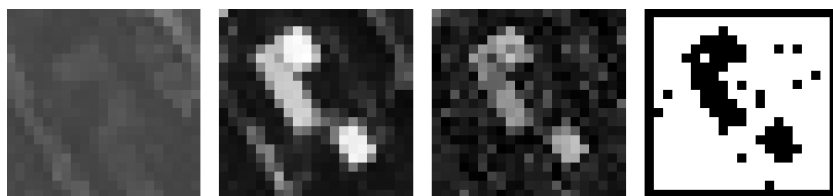


Рис. 1: результаты численного эксперимента

В дальнейшем планируется построение оценки оптимального порога в случае зашумленных изображений, а также автоматическое оценивание величины h алгоритмами типа метода Оцу. Это позволит построить оптимальный алгоритм для решения прикладных задач поиска структурных изменений.

Литература

- [1] OpenCV documentation, <http://opencv.willowgarage.com/wiki/>
- [2] *Mena J., B.* State of the art on automatic road extraction for GIS update: a novel classification // Pattern Recognition Letters. 2003. Vol. 24. Pp. 3037–3058.
- [3] *Перевалов Д.С., Корнилов Ф.А.* Обнаружение изменений объектов земной поверхности по спутниковым снимкам // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 41-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 534–540.
- [4] *Пытьев Ю.П.* Морфологический анализ изображений // Доклады академии наук СССР, том 269, № 5, 1983 г. С. 1061–1064.

ВЛИЯНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ НЕСТАБИЛЬНОСТЕЙ НА СИГНАЛ МНОГОКАНАЛЬНОГО ГИДРОЛОКАТОРА БОКОВОГО ОБЗОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

Костоусов В.Б., Игумнов Г.А.¹

e-mail: vkost@imm.uran.ru

Введение

В докладе рассматривается проблема траекторных неустойчивостей в задаче обработки эхо-сигнала многоканального гидролокатора бокового обзора (ГБО) с синтезированной апертурой антенны. Эта задача является одной из приоритетных задач системы технического зрения автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) [1, 2], поскольку её решение позволит значительно повысить угловую разрешающую способность ГБО и информативность гидролокационного изображения, применяя при этом относительно простую и компактную антенную систему, приемлемую для размещения на малоразмерном АНПА.

В предыдущей статье [4] нами был описан алгоритм синтеза апертуры антенны, позволяющий для небольших и относительно дешевых гидролокаторов различать небольшие объекты на расстояниях в сотни метров, однако для устойчивой работы этого алгоритма требуется разработка стабилизирующих процедур. Первым шагом в решении этой задачи является введение траекторных неустойчивостей в программный комплекс, реализующий математическую модель отраженного эхо-сигнала.

Статья посвящена описанию такой модели и некоторых новых деталей ее программной реализации. Работа проводится в тесном сотрудничестве с институтом проблем морских технологий ДВО РАН (г. Владивосток), в котором разрабатывается экспериментальный аппаратно-программный комплекс для когерентного многоканального сбора и накопления данных. При этом оцифрованные гидролокационные и навигационные данные накапливаются в «сыром» (т.е. минимально искаженном какой-либо предобработкой) виде [3].

¹Работа поддержана программой фундаментальных исследований УрО РАН №09-С-1-1004 (проект, совместный с ИПМТ ДВО РАН) и грантом РФФИ № 09-01-00523.

Моделирование изображения многоканального ГБО с синтезированной апертурой

Вопросы моделирования и обеспечения устойчивости фазы были рассмотрены в предыдущей статье [4], поэтому мы не будем на них останавливаться, а обратимся лишь к вопросу выбора алгоритма.

Для создания модели траекторного сигнала было решено использовать алгоритм с использованием Z-буфера. Суть его работы заключается в том, что каждый объект сцены проецируется на сетку Z-буфера, параллельную плоскости OYZ , где ось OY параллельна движению АНПА, а ось OZ направлена вертикально вверх. Далее для каждой ячейки сетки, в которую попадает объект, вычисляется расстояние от попадающих в нее «липких» точек до излучателя. Полученное расстояние сравнивается с уже имеющимся в соответствующей ячейке Z-буфера, после чего выбирается наименьшее. Таким образом, в каждой ячейке Z-буфера хранятся расстояния до попавших в нее «липких» точек видимого объекта и информация о них (нормаль, фаза, яркость), необходимая для формирования траекторного сигнала. Реализация этого алгоритма позволила на порядок ускорить процесс моделирования по сравнению с алгоритмом трассировки лучей.



Рис. 1: результаты моделирования ЭЛИ без синтезирования при отсутствии траекторных нестабильностей (слева) и с ними (справа). Модельная сцена состоит из цепочки точечных отражателей

Математическая модель траекторных нестабильностей

При движении АНПА можно выделить две основные группы траекторных нестабильностей – координатные и угловые. В первую группу входят сдвиги по осям координат, во вторую – крен (вращение аппарата вокруг продольной оси), рыскание (вращение аппарата

вокруг вертикальной оси) и дифферент (отклонение корпуса аппарата от горизонтального положения в продольном направлении). Для определения влияния траекторных неустойчивостей на получаемое изображение было решено моделировать неустойчивость только по координате Z . Поскольку резкое изменение положения аппарата за промежуток между отсчетами невозможно, сдвиг относительно идеального положения реализуется в синусоиды с амплитудой 15 см и периодом в одну минуту. Влияние модельных неустойчивостей на реальный луч можно увидеть на рис. 1.

Заключение

В результате проведенных исследований удалось значительно ускорить работу моделирующего алгоритма и реализовать модель траекторных неустойчивостей, однако не удалось провести качественное синтезирование изображения их учетом, поэтому дальнейшей задачей будет разработка компенсирующего алгоритма.

Литература

- [1] *М.Д. Агеев, Л.В. Киселев, Ю.В. Матвиенко и др.; под общ. ред. А.Д. Агеева.* Автономные подводные роботы: системы и технологии / ИПМТ. - М.: Наука, 2005.
- [2] *Золотарев В.В.* Гидролокаторы с синтезированной апертурой для автономного подводного робота // Подводные исследования и робототехника. 2007. № 1(3). С. 12–20.
- [3] *А.Л. Агеев, В.Б. Костоусов, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев* Моделирование и обработка траекторного сигнала гидролокатора с синтезированной апертурой // Материалы 3-й научно-технической конференции «Технические проблемы освоения Мирового океана». Владивосток: ИПМТ ДВО РАН, 2009. С. 351–355.
- [4] *В.Б. Костоусов, Г.А. Игумнов.* Моделирование и обработка траекторного сигнала гидролокатора с синтезированной апертурой // Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 541–547.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КАЛИБРОВОЧНЫХ МАРКЕРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ

Костюсов К.В.^{1,2}

e-mail: kkostousov@gmail.com

В настоящей работе проведен сравнительный анализ калибровочных маркеров трёх различных типов (рис. 1). Интерес к этой задаче возник в связи с работой над системой технического зрения промышленного испытательного стенда, который разрабатывается Уральским Отделением ВНИИЖТ и предназначен для контроля качества ремонта подвагонной тележки пассажирского вагона. Для калибровки и трэкинга в нашей системе в настоящий момент используется распознавание маркера из 9 кружков, который изображен в левой части рис. 1 (тип 1).

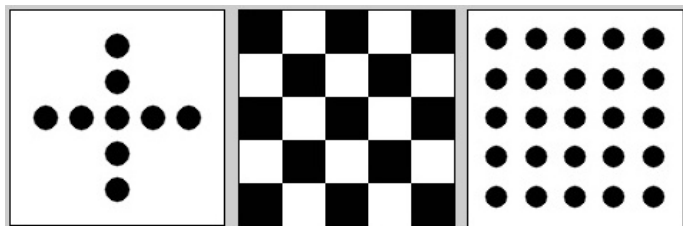


Рис. 1: маркеры типа 1, 2 и 3

В различных СТЗ используются различные калибровочные маркеры. Например, в широко известной бесплатной библиотеке компьютерного зрения OpenCV реализовано распознавание маркера типа 2 (рис. 1, *в центре*), а в платной библиотеке NI Vision реализовано распознавание маркера типа 3 (рис. 1, *справа*).

Для сравнения калибровочных маркеров было сгенерировано по 33 случайных изображения (640x480 пикс.) калибровочных маркеров каждого из трех типов, отличающихся расположением, поворотом,

¹ИММ УрО РАН.

²Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» при поддержке УрО РАН, проект 09-П-1-1013 и поддержана грантом РФФИ № 09-01-00523.

размером маркера (размер варьировался в диапазоне от 100 до 300 пикс.), и содержащих независимый гауссов шум с нулевым средним (рис. 2).

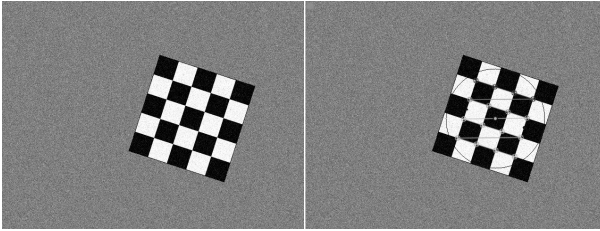


Рис. 2: сгенерированное изображение маркера типа 2 (*слева*) и результат его распознавания (*справа*)

Результаты статистического анализа результатов распознавания сгенерированных изображений приведены в таблице 1. Здесь ϵ_c – погрешность определения координат центра маркера в пикселях, ϵ_s – погрешность определения размера маркера (в таблице приведены средние и максимальные значения этих величин).

Таблица 1. Результаты распознавания

Тип	$\bar{\epsilon}_c$	$\max(\epsilon_c)$	$\bar{\epsilon}_s$	$\max(\epsilon_s)$
1	0.053	0.235	0.825	1.858
2	0.026	0.062	0.755	1.568
3	0.009	0.027	0.633	1.354

На основе табл. 1 можно сформулировать гипотезу, что тип 3 является наилучшим, а тип 1 является наихудшим. Объясняется это, вероятно, тем, что в распознавании маркера каждого из трех типов сначала ищутся особые точки (чёрные кружки для типов 1 и 3, внутренние углы для типа 2), а затем из них реконструируется положение всего маркера. При этом чем больше особых точек, тем выше точность результата.

Далее, для моделирования засветки, в генерируемые изображения был внесён структурный шум в виде случайно расположенных белых кругов, суммарная площадь которых составляла 10 % от площади всего изображения (рис. 3).

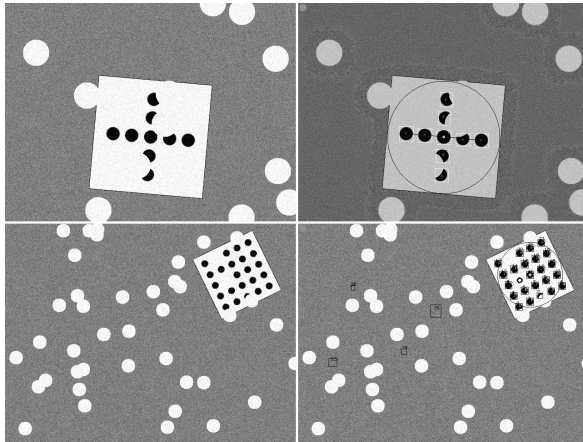


Рис. 3: сгенерированные изображения маркеров типов 1 и 3, содержащие структурный шум (*слева*) и результаты их распознавания (*справа*)

В результате была получена табл. 2. Прочерки в строке, отвечающей маркеру типу 2, говорят о том, что алгоритм распознавания маркеров этого типа, содержащийся в библиотеке OpenCV, не смог справиться со структурными искажениями.

Таблица 2. Статистика результатов распознаваний изображений со структурным шумом

Тип	$\bar{\epsilon}_c$	$\max(\epsilon_c)$	$\bar{\epsilon}_s$	$\max(\epsilon_s)$
1	0.252	1.317	0.722	2.069
2	—	—	—	—
3	0.134	0.461	0.768	3.418

Из табл. 2 можно видеть, что соотношение качества распознавания маркеров типов 1 и 3 при добавлении структурного шума осталось прежним: маркер типа 3 лучше маркера типа 1.

В качестве итога данного исследования можно выдвинуть гипотезу о том, что маркеры 2-го и 3-го типов лучше маркера типа 1, и рекомендовать разработчикам системы технического зрения промышленного испытательного стенда перейти на использование маркера типа 3, если текущих точностей распознавания будет недостаточно.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ИНФОРМАТИВНОСТИ ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Тарханов А.Е.¹

e-mail: atarkhanov@inbox.ru

Введение

Оценка информативности геофизического поля является одной из задач, которая возникает при исследовании проблемы навигации по геофизическим полям [1]. Задача навигации по геофизическому полю состоит в определении местоположения движущегося объекта путём сопоставления измеренного фрагмента с эталоном поля. Информативность геофизического поля позволяет предсказывать возможную ошибку решения задачи навигации.

Среди имеющихся способов оценивания информативности был сделан выбор в пользу статистического моделирования, дающего достаточно точный результат благодаря использованию большого количества информации о задаче. Но достоинства способа неизбежно связаны с его недостатками, основным из которых является его большая трудоёмкость: необходимо моделировать процесс решения конкретной задачи навигации достаточно большое число раз.

В предыдущей работе [2] был взят имеющийся алгоритм, решающий задачу последовательно, и ускорение достигалось за счёт выполнения некоторой его части на GPU по технологии CUDA. В данной работе за основу был взят тот же алгоритм, но достигнуто значительно большее ускорение за счёт большего параллелизма. А организация параллельного счёта на GPU выполнена с помощью OpenCL [3] – новой, но уже имеющей широкое применение технологии.

Использование GPU для ускорения вычислений

Как было отмечено ранее [2], большую часть времени счёта отнимает этап «грубого поиска», состоящий из проверки K_g гипотез. Эту часть алгоритма можно эффективно распараллелить. Но для минимизации обмена данными между CPU и GPU, который затратны, требуется перенести на GPU и другие части алгоритма.

¹Работа поддержана программами фундаментальных исследований Президиума РАН: «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (№ 2) и «Математическая теория управления» (№ 29); а также грантом РФФИ № 09-01-00523.

Большого параллелизма, и, соответственно, большего коэффициента ускорения на мощном GPU можно добиться, решая задачу «грубого поиска» сразу для всех N измеренных фрагментов. Т.е. вычисляя параллельно $N \times K_g$ значений функционала сравнения каждого измеренного фрагмента с каждым эталонным.

Сетка K_g гипотез этапа «грубого поиска» одна и та же для каждого из N испытаний, а потому можно построить эталонные фрагменты этапа «грубого поиска» заранее и использовать каждый N раз. Подготавливая эталонные фрагменты на GPU, можно производить билинейную интерполяцию на элементах матрицы рельефа аппаратно средствами GPU.

На рис. 1 приведена схема параллельного алгоритма. В ней CPU и его память обозначены как *host*, а GPU и его память – как *device*.

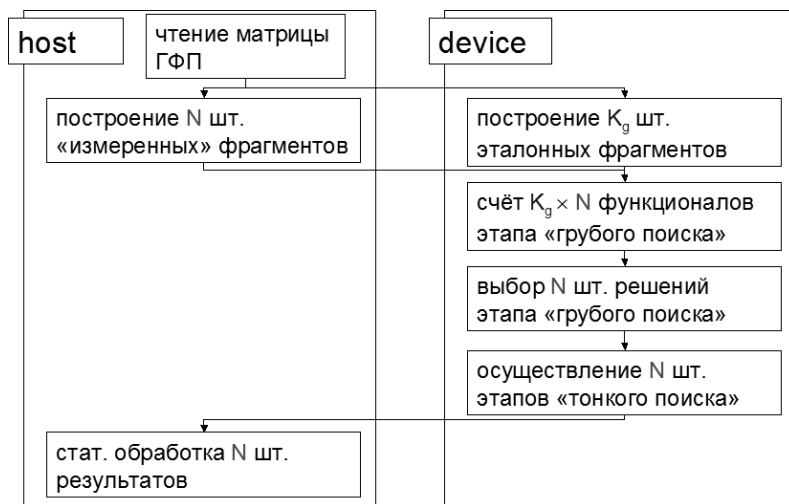


Рис. 1: схема параллельного алгоритма. Блоки означают операции. Стрелки означают зависимости по данным, в т.ч. передачу данных между *host* и *device*

Был проведён вычислительный эксперимент, включающий 100 итераций моделирования. Результаты эксперимента представлены в табл. 2. Характеристики использованных вычислителей представлены в табл. 1.

Таблица 1. Характеристики использованных вычислителей

Вычислитель		Количество процессоров	Частота процессоров
CPU	Intel Pentium IV	1	3,4 ГГц
GPU	nVidia GTX260	216	1,35 ГГц

Таблица 2. Время, затрачиваемое на 100 итераций моделирования

Достигнутое ускорение			
	Без ускорения	Ускорение «Градиентный поиск»	Ускорение «Градиентный поиск» + GPU
Время счёта	16 мин 40 с	11 с	140 мс
Ускорение	-	91x	79x

Заключение

Высокопараллельный алгоритм позволил значительно сократить время, необходимое для получения оценки информативности алгоритмом статистического моделирования. Дальнейшей задачей будет улучшение градиентного спуска, выполняющего этап «тонкого поиска» [2] и расширение имеющейся базы для работы с двухмерными фрагментами.

Литература

- [1] Бердышев В.И., Костоусов В.Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. — Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
- [2] Тарханов А.Е. Использование GPU для оперативной оценки информативности геофизического поля / в сб. «Проблемы теоретической и прикладной математики», Труды 41-й Всероссийской молодежной конференции. С. 553–559 — Екатеринбург, УрО РАН, 2010.
- [3] Khronos OpenCL — The open standard for parallel programming of heterogeneous systems. www.khronos.org/opencl/

О ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕХМЕРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО МНОЖЕСТВУ ФОТОГРАФИЙ

Штуркин Н.А.

e-mail: nsp@mail.ru

Реконструкция трехмерных изображений по множеству фотографий является весьма актуальной задачей. Её решение открывает доступ к созданию трехмерной фотографии, когда пользователь может воссоздать текстурированную геометрическую модель, получить «виртуальный слепок» реальности и с помощью современных средств отображения (3D-телевизоров и мониторов) в любое время в будущем как бы заново побывать там, рассматривая объекты с любых сторон. Сейчас для этого приходится применять лазерное сканирование, требующее специализированного оборудования и ручной постобработки.

Предполагается, что на вход системы реконструкции дано неупорядоченное множество снимков, сделанных в примерно одинаковых условиях (время года, время суток), с не сильно отличающимися деталями. Для получения трехмерной модели мы используем следующий алгоритм.

Стадия 1. Установление соответствия между фотографиями, определение перекрытия и восстановление положения камеры:

- 1) выделить на каждом изображении уникальные точки,
- 2) найти совпадающие точки на двух и более изображениях,
- 3) провести по ним итеративно восстановление матрицы перехода с отбраковкой несовпадающих точек (изменившиеся объекты, шумы) и компенсацией искажений.

Стадия 2. Восстановление фрагментов геометрии:

- 1) отобрать N перекрывающихся изображений для восстановления фрагментов рельефа,
- 2) на изображениях (откалиброванных на стадии 1.3) итеративно провести сопоставление локально-уникальных точек,
- 3) для полученной карты рассогласований найти такие значения глубины Z , при которых функция визуального различия фрагментов дает минимум; если минимум превышает порог – отбросить фрагменты как относящиеся к различным частям объекта (потенциально затененные),

4) понизить порог детектирования локально-уникальных точек и радиус поиска и повторить стадии 2-3,

5) запомнить множество совпавших точек; в качестве результирующих цветов можно брать HSL-медиану цветов проекций на все фотографии (кроме отброшенных).

Стадия 3. Сшивка фрагментов:

1) для фрагментов, полученных с разных наборов перекрывающихся изображений, провести поиск совпадающих участков,

2) используя информацию о расположении камер, произвести поточечную сшивку рельефов в единое облако точек с учетом затенений.

Реализация данного алгоритма на языке C++ в ходе экспериментов на процессоре Intel Core2 Quad Q9500 показала следующие результаты: скорость восстановления модели плюшевой игрушки со сложным рельефом по 20 снимкам – 1.5 ч, восстановление участка археологических раскопок размером 200x100 м с разрешением 4 см по 52 фотографиям 10МП – 5 ч.

МЕТОД ОРГАНИЗАЦИИ ИНДЕКСА КОЛЛЕКЦИИ XML ДОКУМЕНТОВ

Веретенников А.Б.¹

e-mail: alexander@veretennikov.ru

Автором ведется разработка системы для полнотекстового поиска в большом массиве текстовых документов [1, 2]. Одним из важных типов текстовых документов является XML документ. Под поисковым запросом будем понимать набор слов или фразу. Обычно поисковые системы выдают в качестве результата поиска набор документов, которые содержат искомые слова, а также информацию о том, в каком месте документа находятся эти слова.

При поиске в XML документе этого недостаточно. XML документ – это набор элементов, каждый из которых является отдельной сущностью, поэтому имеет смысл в результаты поиска включить информацию о том, в каком элементе содержатся искомые слова. Для этого можно взять XPath данного элемента, как в [3].

Пример результата поиска: `1.xml, /root/section[12]/p[23]`. Т.е. искомые слова находятся в документе `1.xml`, где внутри тега `root`, в 12-м по порядку тега `section`, есть теги `p`, и в 23-м из них и содержатся искомые слова. Кроме того, допустим, `p` имеет атрибут `id`, который обозначим как ключевой. Имеет смысл получить XPath в виде `/root/section[12]/p[id = 4356]`, где 4356 – значение атрибута `id` у 23-го тега `p`.

Часто для поиска в XML документах используются запросы, основанные на XPath или XQuery [4, 5]. При этом используются Деревья или аналогичные индексы, но для построения таких индексов для более-менее большой коллекции (например, 10-20 Гб) требуется весьма значительное время.

Полнотекстовый индекс, основанный на инвертированных файлах, или SLB-индекс [1, 2] строится гораздо быстрее. Разработанный автором метод позволяет получить в результатах поиска XPath искомого элемента. Скорость создания индекса и поиска практически не снижается по сравнению с обработкой обычных текстов. Если ищем с учетом некоторого XPath, то из результатов поиска можно исключить те элементы, которые не соответствуют этому XPath.

¹www.veretennikov.org

Для организации индекса используем следующую модель данных:

1. **Файл с информацией о документах** содержит описание проиндексированных документов. Это имя документа, ID документа и т.д. для каждого документа.

2. **Индекс** содержит для каждого слова список его вхождений в обработанных документах, т.е. например, записи вида (ID, Position), где ID – ID документа, Position – позиция слова в документе.

3. **Репозиторий** содержит текст проиндексированных документов для быстрого извлечения фрагментов текста при включении их в результаты поиска.

В [6] для решения подобной задачи предлагается по сути в качестве одного документа взять каждый элемент исходного XML документа. Однако при данном подходе будут значительно увеличены 1-й и 2-й компоненты системы, за счет увеличения количества документов.

Вместо этого автор предлагает использовать репозиторий. Для быстрого извлечения фрагмента текста репозиторий разделен на блоки фиксированного размера (обычно 4 кб). Когда пользователю выводятся результаты поиска, мы читаем из репозитория блок, в котором содержатся искомые слова. В начале этого блока сохранен текущий XPath, соответствующий началу блока в XML документе. Далее читаем текст в блоке, пока не дойдем до местоположения искомых слов. При чтении текста при обнаружении XML тегов осуществляется корректировка XPath. В результате получаем XPath, соответствующий искомым словам.

Можно хранить XML документ как он есть. Но так как теги могут повторяться как в одном, так и в нескольких документах, и, более того, в наборе XML документов может использоваться одно и то же пространство имен, структуру тегов можно сохранить иначе. В отдельном файле храним информацию о пространствах имен. В результате каждое пространство имен имеет свой ID, каждый тег в пространстве имен имеет свой ID (уникальный в данном пространстве имен).

Вместо исходных конструкций вида `<namespace:tag>` в репозитории сохраняем пару чисел `namespace_id, tag_id`. Где `tag_id` – ID тега, `namespace_id` – ID пространства имен. `namespace_id` может быть как глобальным ID, так и локальным ID, взятым относительно

но текущего документа. При этом, скорее всего, данные ID-ы будут небольшими числами и поместятся в 1 байт каждый, т.е. размеры хранимых данных уменьшаются. Используется специальный метод кодирования, чтобы можно было отличить ID-ы тегов от остальных символов текста. Также сохраняется информация о конце тега, начале, окончании атрибута.

Автором были обработаны 50 Гб XML документов (120 тыс. файлов). Скорость создания индекса меньше, чем для простых текстовых файлов, но незначительно, и по сути обусловлена накладными расходами использования XML парсера. Скорость поиска по сравнению с поиском в обычных текстовых файлах практически не изменилась.

Литература

- [1] *Веретенников А.Б.* Эффективная индексация текстовых документов с использованием CLB-деревьев. // Системы управления и информационные технологии, 2009, 1.1 (35). С. 134–139.
- [2] *Веретенников А.Б.* Программный комплекс и эффективные методы организации и индексации больших массивов текстов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Екатеринбург, 2009.
- [3] *David Mertz* XML Matters: Indexing XML documents // <http://www.ibm.com/developerworks/xml/library/x-matters10.html>.
- [4] *Wei Wang, Hongzhi Wang, Hongjun Lu, Haifeng Jiang, Xuemin Lin, Jianzhong Li.* Efficient Processing of XML Path Queries Using the Disk-based F&B Index // Proceedings of the 31st VLDB Conference, Trondheim, Norway, 2005.
- [5] *Haifeng Jiang, Hongjun Lu, Wei Wang.* XR-Tree: Indexing XML Data for Efficient Structural Joins // Proc. Int'l Conf. Data Eng. (ICDE 02), IEEE CS Press, 2002. Pp. 253–263.
- [6] *Jaap Kamps, Maarten Marx, Maarten de Rijke, Borkur Sigurbjornsson.* XML Retrieval: What to Retrieve? // SIGIR'03, July 28–August 1, 2003, Toronto, Canada.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОРОЖДЕНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Горбенко А.А.

e-mail: gorbenko.aa@gmail.com

Под вычислительными возможностями нейронных сетей с точки зрения распознавания обычно понимается количество образов, которые сеть способна распознавать одновременно. Оценка вычислительных возможностей исследовалась ранее в работах [1, 2]. В частности, была установлена нижняя граница для персептрона. Соответствующий результат основан на линейной разделимости. Это означает, что персептрон способен отделить (иметь различный выход) только такие два множества векторов входов, для которых имеется гиперплоскость, отсекающая одно множество от другого. Из результатов [1, 2] также вытекает, что одними из важнейших параметров нейронной сети являются количество слоев в сети и нейронов в каждом слое. На сегодняшний день не найдена верхняя граница вычислительных возможностей нейронных сетей в зависимости от их структуры. Поэтому большинство исследователей, которые используют нейронные сети при решении задач, интуитивно подбирают структуру нейронной сети для нахождения наилучшего решения поставленной задачи.

Классический метод обучения многослойной нейронной сети — обучение с учителем. Он заключается в следующем. На вход сети подается вектор (или так называемый вопрос), а на выходе получаем вычисленный отклик сети (тот объект, к которому нейронная сеть отнесла входной образ). Затем мы сравниваем это значение с заранее известным правильным ответом. В зависимости от величины разности отклика сети и ожидаемого значения, веса нейронной сети корректируются. Процесс обучения продолжается до тех пор, пока отклик нейронной сети не будет равен желаемому на всем обучающем множестве. Необходимо отметить, что слишком большое количество нейронов сети ведет к увеличению времени ее обучения. При этом не исключен случай, когда нейронная сеть начинает запоминать не только важные нам образы, но и шум, который может присутствовать в небольшом количестве в обучающей выборке [3].

Допустим, у нас есть нейронная сеть, состоящая из m слоев по k нейронов в каждом слое, которая эффективно распознает крас-

ные, синие и зеленые оттенки на изображениях. Нам необходима нейронная сеть, способная распознавать только оттенки красного. Естественно, мы можем использовать для этих целей имеющуюся нейронную сеть, распознающую оттенки красного, синего и зеленого. Это даст нам быстрое решение, которое, однако, не является эффективным. К недостаткам такого подхода можно отнести следующие: такая нейронная сеть нуждается в дополнительном обработчике, который в зависимости от вида получаемого ответа может быть довольно сложным; интуитивно ясно, что эта сеть будет требовать больших ресурсов, чем специально обученная; при необходимости дополнительного обучения такая нейронная сеть будет обучаться медленнее, чем специализированная; обычно нейронные сети, нацеленные на более тонкую классификацию, обладают меньшей отказоустойчивостью.

Исходя из только что сказанного, для эффективного решения рассматриваемой задачи необходимо обучение новой сети. Соответственно, нам нужно создать некоторый обучающий набор примеров, описывающий красный цвет, подобрать структуру новой нейронной сети и запустить процесс обучения. При этом, как правило, возможности уже обученной сети никак не используются, а структура новой сети подбирается наугад. Единственная информация, которая принимается во внимание — это то, что новая сеть может содержать меньшее количество нейронов, нежели первая.

Из вышесказанного следует два главных вопроса. Как подобрать оптимальную структуру нейронной сети для решения конкретной поставленной задачи? И возможно ли сделать это автоматически?

Нами предложен подход к обучению нейронных сетей, позволяющий автоматизировать процесс обучения сети оптимальной структуры. Этот подход основан на использовании имеющейся нейронной сети в качестве учителя для новой. В частности, в нашем примере человеку не обязательно формировать обучающее множество и запускать процесс обучения заново. Вместо этого можно просто воспользоваться возможностями имеющейся нейронной сети. Процесс обучения можно описать следующим образом. Мы подаем на вход обеим сетям вектор из обучающего множества, а на выходе сравниваем их ответы. В зависимости от величины этой разницы мы производим коррекцию весов новой нейронной сети. Процесс продолжается для остальных элементов обучающего множества, пока

новая нейронная сеть не обучится нужным образам. Интуитивно понятно, что сеть, распознающая меньшее количество образов, должна содержать меньшее количество нейронов, и, возможно, слоев. Но как определить оптимальную структуру новой нейронной сети? Для этого мы используем генетические алгоритмы. Их применение позволяет подобрать наилучшую структуру, отвечающую требованиям задачи. Благодаря эволюционным операциям, таким как мутация, скрещивание и естественный отбор, нейронные сети могут «соревноваться» друг с другом за право быстрее и правильнее решить задачу. Эволюционный процесс в этом случае описывается следующим образом. На начальном этапе работы мы создаем популяцию нейронных сетей с количеством слоев и нейронов в них из некоторых заданных диапазонов. Затем мы каждую нейронную сеть обучаем, предоставляя в качестве вопроса интересующий нас образ, а в качестве учителя — обученную ранее нейронную сеть, которая может распознавать большое количество различных объектов, включая необходимый нам. После того как все сети будут обучены, они проходят отбор. Те нейронные сети, которые дали наиболее близкий к верному ответ, продолжают работу и подвергаются операциям мутации и скрещивания. Сети, дающие наихудшие результаты, выбывают из эволюционного процесса. Действие генетического алгоритма продолжается до тех пор, пока не будет найдена нейронная сеть, дающая правильный ответ, то есть способная распознавать необходимый образ. Для фиксирования времени обучения конкретной сети в генетическом алгоритме оно также сохраняется. Заметим, что нейронные сети с большим количеством нейронов учатся дольше. Следовательно, сеть с меньшим количеством нейронов, распознающая необходимый образ, всегда будет приоритетнее, нежели с большим.

Литература

- [1] *Novikoff A.B.* On convergence proofs on perceptrons // Symposium on the Mathem. Theory of Automata. 1962. Vol. 12. Pp. 615–622.
- [2] *Minsky M.L., Papert S.A.* Perceptrons. Cambridge, MA: MIT Press, 1969.
- [3] *Kröse B., van der Smagt P.* An introduction to neural network. 8th Edition. Amsterdam: The University of Amsterdam, 1996.

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ВИЗУАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Горбенко А.А., Морнев М.Л., Попов В.Ю., Шека А.С.¹
e-mail: gorbenko.aa@gmail.com

Задача организации стационарного визуального наблюдения представляет интерес для многих прикладных областей. К числу таких областей относятся системы контроля производственных процессов на промышленных объектах; системы дорожного наблюдения; охранные системы; лабораторные и испытательные регистрационные системы; навигационные системы и т.д.

Задачи организации стационарного наблюдения в трехмерном пространстве, как правило, могут быть сведены к двумерным. В большинстве случаев соответствующее сведение может быть получено за счет того, что диапазон высот слишком мал по сравнению с горизонтальными координатами (подводное наблюдение) или допускает дискретизацию с большим шагом (аэрокосмическое наблюдение). В этих случаях мы можем разместить несколько точек, соответствующих различным высотам, в один квадрат дискретизации, относя различия в наблюдаемой области к специфике проницаемости пространства. В тех случаях, когда диапазон высот велик, а горизонтальные координаты имеют малое изменение (наблюдение внутреннего периметра в высотном здании), обычно пространство делится на горизонтальные слои, размещаемые в одной плоскости. Таким образом, без ограничения общности задачу стационарного наблюдения можно рассматривать в дискретном пространстве \mathbb{Z}^2 . При этом в дальнейшем каждую точку в пространстве \mathbb{Z}^2 мы будем отождествлять с единичным квадратом, центром которого она является.

Обозначим через N множество точек пространства \mathbb{Z}^2 , представляющих интерес для наблюдения. Заметим, что множество N не обязательно представлять некоторую связную область. Например, нас могут интересовать исключительно сухопутные объекты, а часть окружа-

¹Исследования, представленные в работе, частично поддержаны грантом РФФИ 09-01-12142-офи_м «Фундаментальные проблемы теории алгебраических систем и ее приложения в информатике» и проводились в рамках проекта № 2.1.1/1775 «Алгебраические модели робототехнических систем» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)».

ющей местности может быть покрыта водой. Пусть S — множество точек пространства \mathbb{Z}^2 , допустимых для размещения сенсоров. Отметим, что введение ограничения на область размещения сенсоров существенно для многих задач наблюдения. Некоторые районы могут быть запрещены из-за отсутствия источников питания, некоторые районы могут быть недоступны для установщиков (например, при охране государственной границы), некоторые области нельзя использовать из соображений безопасности сенсоров (например, сенсоры без антивандальных кожухов нельзя размещать на внешнем периметре зданий) и т.д. Стационарность наблюдательной системы предполагает, что мы имеем дело с некоторой ограниченной областью R такой, что $N \subseteq R$, $S \subseteq R$. С учетом того, что регион развертывания R может содержать препятствия, а визуальные сенсоры не обладают абсолютной проницаемостью, каждой точке множества S может быть сопоставлена своя собственная область обзора, определяемая функцией $F : S \rightarrow 2^R$. Часто при описании возможностей сенсоров используется разметка препятствий в регионе развертывания, радиус и сектор обзора. Однако такой подход приводит к трудностям, связанным с описанием частично проницаемых зон (туман над болотом, дым, источники радиоактивного излучения и т.п.); препятствий, размеры которых пренебрежительно малы по сравнению с единицей измерения и т.д. Как правило, у нас есть возможность для основательного изучения региона развертывания системы и проведения предварительного анализа. Поэтому функцию F можно считать известной и всюду определенной. Значениями функции F , вообще говоря, являются произвольные подмножества R , получаемые, исходя из прямолинейного распространения сигнала в геометрическом пространстве. Соответственно, можно полагать, что функция F задана перечислением пар, состоящих из элементов множества S и соответствующих подмножеств.

Целью предварительного анализа региона развертывания системы наблюдения является определение конкретных точек размещения визуальных сенсоров, обеспечивающих полноту обзора наблюдаемой области и минимальность количества используемых сенсоров, т.е. нахождение множества $T \subseteq S$ такого, что

$$\|T\| = \min_{P \subseteq S, \cup_{x \in P} F(x) = N} \|P\|.$$

В форме проблемы выполнимости соответствующая задача может быть сформулирована следующим образом:

Проблема организации стационарного визуального наблюдения (SVD)

Дано: конечное множество R , $S \subseteq R$, $N \subseteq R$, $F : S \rightarrow 2^R$, $k \in \mathbb{N}$.

Вопрос: существует ли $T \subseteq S$ такое, что $\cup_{x \in T} F(x) = N$, $|T| \leq k$?

Вычислительную сложность проблемы SVD характеризует

Теорема. Проблема SVD является NP-полной.

Все задачи из класса NP полиномиально сводятся к проблеме выполнимости булевой функции, сокращенно обозначаемой SAT. В последние годы в области разработки быстрых алгоритмов для решения SAT был достигнут существенный прогресс (см., в частности, [1]). Преимущественно делается акцент на генетические алгоритмы и алгоритмы локального поиска. При этом значительное внимание уделяется не только проблеме SAT, но и ее оптимизационной версии MAXSAT. На сегодняшний день предложено несколько вариантов генетических алгоритмов. Рассматривались гибридные алгоритмы, в которых подход генетических алгоритмов совмещен с локальным поиском. Довольно высокой эффективности удается достичь и для алгоритмов, основанных исключительно на локальном поиске. Конечно, эти алгоритмы работают за экспоненциальное время в худшем случае. Но они могут относительно быстро получать решение для многих булевых функций, возникающих на практике. Поэтому идея использования сведения к SAT и MAXSAT для решения трудных задач обретает практический смысл.

Нами построено эффективное сведение проблемы SVD к SAT и MAXSAT, разработаны генераторы тестов для SVD и генетические алгоритмы для решения SAT и MAXSAT, позволяющие решать проблему SVD через построенное сведение.

Литература

- [1] Gu J., Purdom P., Franco J., Wah B. Algorithms for the Satisfiability (SAT) Problem: A Survey. Pentagon Reports, Report № A240623, 1996.

СИМУЛЯТОР КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ

Самунь В.С.

e-mail: victor.samun@gmail.com

Введение

Симуляторы компьютерных сетей широко применяются. Основная область применения этих симуляторов – обучение студентов как основам сетей, так и администрированию. Также симуляторы могут использоваться для апробации различных настроек в крупных сетях с целью последующего их внедрения на реальную сеть.

Существует много различных симуляторов: NS3, Xenompi3, Cisco Packet Tracer и др. Эти симуляторы имеют существенные недостатки: NS3 не позволяет изменять топологию сети в процессе работы. Топология задаётся программой на языке C++, что осложняет его использование. Но NS3 обладает достаточной гибкостью – можно создавать своё оборудование и протоколы. Cisco Packet Tracer позволяет изменять топологию, но не даёт гибкости при работе с различным сетевым оборудованием: доступны только некоторые продукты фирмы Cisco, другие устройства и протоколы добавить нельзя. Xenompi3 – это симулятор сети, построенный на базе Cisco 7200 и компьютеров.

Мы поставили цель разработать симулятор, лишённый указанных недостатков. В разрабатываемом симуляторе преследуется реализация следующих возможностей:

- Динамическое изменение топологии сети
- Снятие различной статистики
- Детализированный просмотр передачи данных
- Возможность верификации протоколов
- Простое создания нового оборудования
- Создание различных пользовательских интерфейсов настройки оборудования
- Распределённая система симуляторов

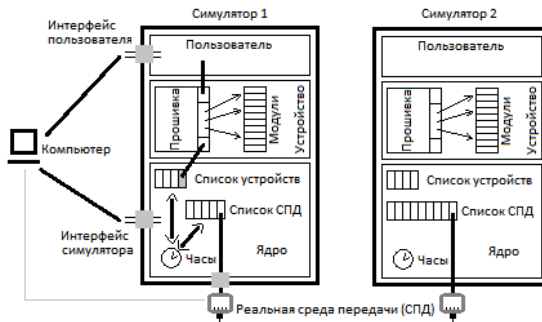


Рис. 1: архитектура симулятора

Архитектура симулятора

Симулятор имеет трёхуровневую архитектуру. На самом нижнем уровне располагается ядро, которое оперирует такими сущностями, как интерфейс, среда передачи данных и т.д. На следующем уровне появляются устройства – свитчи, роутеры, хабы, компьютеры, IP-телефоны и т.д. Самый верхний уровень – уровень пользователя. Каждый уровень может взаимодействовать только с соседними уровнями.

Ядро представляет собой некоторый движок, работающий по парадигме часов. Имеется тактовый генератор, тик которого запускает процессы обработки событий – начинается передача и обработка пакетов и т.д. Существует два различных способа построения ядра; рассмотрим оба из них. Первый способ – запускать на каждое устройство отдельный процесс обработки событий. Второй способ – запустить всего один поток, внутри которого будет происходить обработка пакетов. В первом способе возникают различные проблемы синхронизации: мы не можем запускать следующий тик, пока не отработают все потоки. Кроме этого, у потоков могут быть различные общие данные, поэтому придётся ещё решать проблемы, связанные с синхронизацией доступа и избегать взаимных блокировок. Во втором способе таких проблем не возникает: мы сразу понимаем, когда у нас закончилась обработка – она закончилась при выходе из функ-

ции. Более того, в первом способе при симуляции крупной сети на одной машине будет создано большое число потоков, механизмы синхронизации и процесс переключения потоков будет тормозить всю работу. Вторым способом лишён этих недостатков. Поэтому для реализации выберем второй способ, как наиболее простой.

Также ядро хранит в себе информацию о текущей топологии сети: список устройств, сред передачи данных и связи между ними. Устройство, по сути, представляет собой коробку с интерфейсами, но такое устройство не позволит обрабатывать пакеты – нужно поставить обработчики событий и привязать их к интерфейсам. Для этого введём сущности «прошивка» и «модуль». Модуль реализует обработку пакетов какого-либо определённого протокола. Прошивка управляет межмодульным взаимодействием и имеет интерфейс для настройки оборудования. Также прошивка «знает» о характеристике устройства: количество и типы интерфейсов, имеющиеся модули. Среда передачи данных – это канал передачи, предназначенный для связи устройств. Среда имеет некоторые характеристики: пропускную способность, загрузку, долю потери пакетов, количество endpoint'ов. Так как одной из характеристик является скорость передачи, то тики часов ядра нужно привязать к реальному времени. При передаче пакета реальное время передачи преобразуется в тики.

Архитектура симулятора изображена на рис. 1.

Реализация

В качестве языка реализации был выбран C#. Одним из поставленных требований является возможность верификации реализованных протоколов. Эта возможность уже реализована в проекте NModel, который существует только для платформы .NET. Для некоторых других языков существуют аналогичные проекты, но они существенно уступают по возможностям и простоте использования.

На текущий момент реализовано ядро симулятора и простые устройства (хаб и компьютер). В скором времени проект будет выложен в открытый доступ.

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ
МОДЕЛИ ИММУНОДОМИНАНТНОГО И
АДАПТИВНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

Глушенкова В.В., Ким А.В.¹
e-mail: *verrra@uralweb.ru, avkim@imm.uran.ru*

Начиная с работ Г.И. Марчука математическое моделирование широко применяется для изучения и анализа иммунных процессов. В силу присущего биологическим процессам эффекта латентности, получаемые математические модели описываются, как правило, дифференциальными уравнениями с последствием.

В работе представлены и обсуждаются результаты компьютерного моделирования иммунодоминантного и адаптивного регулирования Т-клетки, описываемой следующей системой дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_0(t) = s_A - d_0 A_0(t) - a(t) A_0(t), \\ A'_1(t) = a(t) A_0(t) - d_1 A_1(t), \\ H_i^0(t) = s_{H,i} - \delta_0 H_i^0(t) - k_i A_1(t) H_i^0(t), \\ H'_i(t) = 2^{m_1} k_i A_1(t - \sigma_1) H_i^0(t - \sigma_1) - k_i A_1(t) H_i(t) + \\ + 2k_i A_1(t - \rho_1) H_i(t - \rho_1) - (\delta_H + r) H_i(t) - \\ - k R_{total}(t) H_i(t), \\ K_i^0(t) = s_{K,i} - \delta_0 K_i^0(t) - k_i A_1(t) K_i^0(t), \\ K'_i(t) = 2^{m_2} k_i A_1(t - \sigma_2) K_i^0(t - \sigma_2) - k P(t) K_i(t) + \\ + 2k P(t - \rho_2) K_i(t - \rho_2) - \delta_K K_i(t) - \\ - k R_{total}(t) K_i(t), \\ P'(t) = r_1 H_{total}(t) + r_2 K_{total}(t) - \delta_P P(t) - \\ - k P(t) K_{total}(t) - k P(t) R_{total}(t), \\ R'_i(t) = r H_i(t) - k P(t) R_i(t) + 2k P(t - \rho_1) R_i(t - \rho_1) - \\ - \delta_H R_i(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

где $H_{total} = \sum_{i=1, \dots, n} H_i$, $K_{total} = \sum_{i=1, \dots, n} K_i$, $R_{total} = \sum_{i=1, \dots, n} R_i$.

Для компьютерного моделирования системы (1) подготовлена специальная интерактивная компьютерная система.

¹Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН «Фундаментальные науки — медицине», РФФИ (проекты 08-0100141, 10-01-00377) и Уралосибирского междисциплинарного проекта.

Литература

- [1] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1980.
- [2] *Kim P.S., Lee P.P., Levy D.* A Theory of immunodominance and adaptive regulation // Bull. Math. Biol. 2010.
- [3] *Bocharov G., Zust R., Cervantes-Barragan L., Luzyanina T., Chiglintsev E., Chereshev V.A., Thiel V., Ludwig B.* A System Immunology Approach to Plasmacytoid Dendritic Cell Function in Cytopatic Virus Infections. Plos Pathog 6(7): e1001017. doi: 10.1371/journal.ppat.1001017.
- [4] *Ким А.В., Красовский А.Н.* Математическое и компьютерное моделирование систем с последствием. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛИ «ХИЩНИК – ДВЕ ЖЕРТВЫ» К АДДИТИВНЫМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ШУМАМ

Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.¹
e-mail: KarpenkoLarisa@mail.ru

В статье рассматривается модель популяционной динамики «хищник – две жертвы» в той области параметров, где устойчивый предельный цикл модели претерпевает серию бифуркаций удвоения периода. При помощи специально конструируемой функции стохастической чувствительности проводится анализ чувствительности циклов системы к аддитивным и параметрическим шумам в цепочке удвоений периода при переходе от порядка к хаосу.

Модель популяционной динамики «хищник – две жертвы», находящаяся под воздействием аддитивных и параметрических шумов, задается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon(\dot{w}_2 + cy\dot{w}_4), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (1)$$

где x и y – численности первого и второго вида жертвы, соответственно, z – численность популяции хищника, b характеризует разность между рождаемостью и эффективной смертностью в популяции второго вида жертвы, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – стандартные независимые винеровские процессы, ε – степень интенсивности возмущений, параметр c – коэффициент интенсивности параметрического шума.

Рассмотрим интервал $b \in I = (1.7528; 1.75305)$. На нем система имеет колебательный аттрактор – предельный цикл $\Gamma = \xi(t)$ (рис. 1а), с которым, по мере увеличения значения b , происходит серия последовательных бифуркаций удвоения периода. Можно выделить интервалы структурной устойчивости $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$, соответствующие циклам кратности $1, 2, \dots, 2^k, \dots$.

¹Работа выполнена при частичной поддержке грантов Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571, РФФИ 09-01-00026, РФФИ 10-01-96022урал.

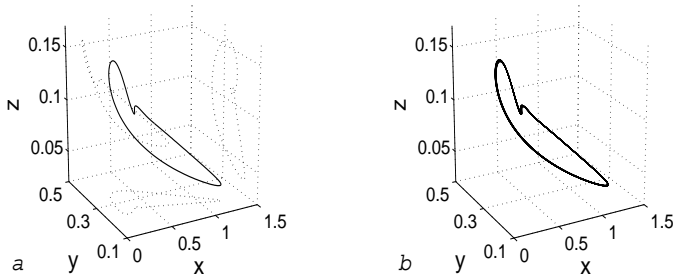


Рис. 1: предельный цикл при $b = 1.7528$: а) $\varepsilon = 0$; б) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$

Под воздействием стохастических шумов ($\varepsilon > 0$) случайные траектории системы (1) покидают детерминированный предельный цикл и формируют вокруг него некоторый стационарно распределенный пучок (рис. 1б). Разброс случайных траекторий вокруг детерминированного цикла неравномерен. Эту неоднородность можно описать при помощи функции стохастической чувствительности.

Функция стохастической чувствительности (ФСЧ) для трехмерного цикла $\xi(t)$ нелинейной стохастической системы $\dot{X} = f(X) + \sigma(X)\dot{w}$ может быть описана [2] собственными числами $\eta_1(t) \geq \eta_2(t) \geq \eta_3(t)$ матрицы $W(t)$, являющейся решением краевой задачи

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad (2)$$

$$W(t+T) = W(t), \quad W(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)).$$

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial X}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)),$$

где $P(t) = P_{r(t)} = I - \frac{rr^\top}{r^\top r}$ – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

В силу вырожденности $W(t)$, значение $\eta_3(t) \equiv 0$. Два других собственных значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в секущей гиперплоскости по величине и направлению. Численно решая задачу (2), можно проследить изменение собственных чисел матрицы W вдоль цикла. На рис. 2 представлены соответствующие функции для цикла, находящегося под

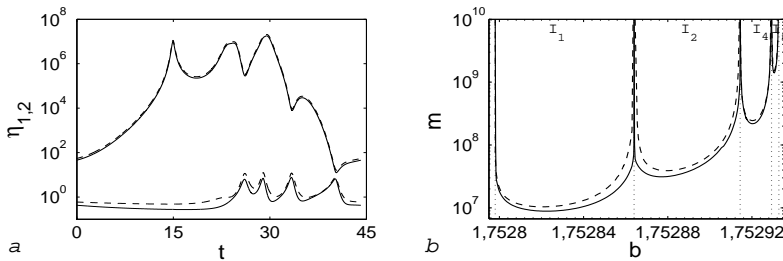


Рис. 2: ФСЧ предельного цикла при $b = 1.7528$ (a) и показатель стохастической чувствительности (b): $c = 0$ (сплошная линия), $c = 100$ (пунктир)

воздействием только аддитивных шумов ($c = 0$ – сплошная линия) и при одновременном воздействии параметрических шумов ($c = 100$ – пунктир).

Мерой стохастической чувствительности предельного цикла в целом будем считать число $m = \max_t \eta_1(t)$ – *показатель стохастической чувствительности*. На рис. 2b представлены графики показателя стохастической чувствительности $m(b)$ в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 . Значения $m(b)$ устремляются в бесконечность при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости, и при воздействии параметрических возмущений это свойство более выражено. Это означает, что вблизи бифуркационных значений параметра система становится максимально чувствительной к возмущениям, особенно к параметрическим.

Литература

[1] *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985.

[2] *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles. Mathematics and Computers in Simulation. 2004. Vol. 66. Pp. 55–67.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ ОСЛАБЛЕННОГО ВИРУСА В КАЧЕСТВЕ ПОСПОДВЕРЖЕННОГО ЛЕЧЕНИЯ

Копытова Ю.В.

e-mail: etems@ya.ru

Работа посвящена математическому и компьютерному моделированию действия ослабленного вируса на иммунную систему.

Базовая модель имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_i}{dt} = (r - px_i - sz)v_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{dv_0}{dt} = (r_0 - p_0x_0 - s_0z)v_0 \\ \frac{dx_i}{dt} = cv_i - (uv + u_0v_0)x_i - bx_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{dx_0}{dt} = c_0v_0 - (uv + u_0v_0)x_0 - bx_0 \\ \frac{dz}{dt} = kv + k_0v_0 - (uv + u_0v_0)z - bz \end{array} \right. \quad (1)$$

Наряду с моделью (1) строится и наследуется модель, учитывающая эффект последствия в процессе инфицирования и развития болезни.

Литература

- [1] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. 3-е изд. — М.: Наука, 1991.
- [2] *Bonhoeffer S., Nowak M.* Can live attenuated virus work as post-exposure treatment? // *Immunology Today*. Vol. 16, iss. 3, March 1995. Pp 131–135.

СТАТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АРХИТЕКТониКИ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА ЧЕЛОВЕКА

Правдин С.Ф., Бердышев В.И., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э.,
Мархасин В.С.¹

e-mail: sfpravdin@imm.uran.ru

Одной из важных задач компьютерного моделирования сердца является моделирование направления хода волокон в миокарде. Нами была разработана процедура формирования модели левого желудочка (ЛЖ) в виде трехмерного тела вращения, представляющего собой в соответствии с оценками, полученными в [1] (см. рис. 40 там же), нечто промежуточное между толстостенным конусом и толстостенным полуэллипсоидом. Главной особенностью этого тела является его плотная упаковка непересекающимися линиями, моделирующими мышечные волокна.

Основополагающей идеей явилось заполнение тела вначале поверхностями, а затем каждой поверхности — геодезическими линиями (ГЛ). ГЛ на одной поверхности не пересекаются между собой.

Мы использовали такой метод построения поверхностей. Пусть параметр ϕ изменяется от 0 до ϕ_{\max} и задано параметрическое семейство плоских кривых γ_ϕ . Каждая кривая есть график некоторой функции: $\gamma_\phi = \Gamma_{z=\mathcal{G}_\phi(\rho)}$ (рис. 1). Тогда определим «спиральную» поверхность (СП) S в цилиндрической системе координат (ρ, ϕ, z) как объединение ее сечений меридиональными полуплоскостями $\phi = \text{const}$, а именно кривых γ_ϕ . Даже если $\phi_{\max} > 2\pi$, вполне ясно, как будет построена результирующая поверхность. Мы назвали такие поверхности **спиральными** (СП).

Пусть заданы: внешний радиус ЛЖ у основания R_b ; толщина ЛЖ у основания L ; высота ЛЖ Z_b ; толщина ЛЖ на верхушке h ; угол закрутки требуемой СП ϕ_{\max} (рис. 2). В [1] на основе экспериментальных данных была предложена модель формы стенки ЛЖ. Зададим некоторые значения параметров $\epsilon_a, \epsilon_b \in [0, 1]$. Мы можем выписать параметрические уравнения внешней (эпикард) и внутренней (эндокард) поверхностей ЛЖ — поверхности вращения в цилин-

¹Институт математики и механики УрО РАН, Институт иммунологии и физиологии УрО РАН. Работа поддержана грантом УрО РАН № 09-М-14-2001

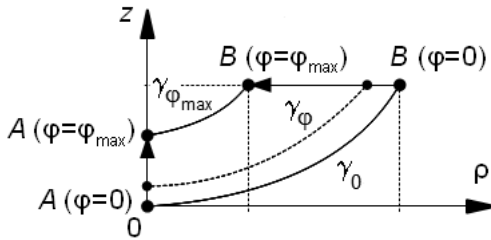


Рис. 1: образующие для СП. Дуги AB — кривые γ_ϕ

дических координатах (ρ, ϕ, z) :

$$\rho_{\text{endo,epi}}(\psi) = R_{a,b}(\epsilon_{a,b} \cos \psi + (1 - \epsilon_{a,b})(1 - \sin \psi));$$

$$z_{\text{endo,epi}}(\psi) = Z_{a,b}(1 - \sin \psi),$$

где $R_a = R_b - L$; $Z_a = Z_b - h$; «широта» ψ изменяется от 0 до 90° (см. рис. 2).

Мы перешли от параметрического к явному заданию СП:

$$z_{\text{epi}}(\rho) = Z_b \mathcal{F}_{\text{epi}}(\rho/R_b); \quad z_{\text{endo}}(\rho) = (Z_b - h) \mathcal{F}_{\text{endo}}(\rho/(R_b - L)) + h,$$

где $\mathcal{F}_{\text{epi}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\mathcal{F}_{\text{endo}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — «фундаментальные» функции эпикарда и эндокарда;

на эпикарде $\rho/R_b \in [0, 1]$, на эндокарде $\rho/(R_b - L) \in [0, 1]$.

Пусть $\hat{\phi} = \phi/\Phi_{\text{max}} \in [0, 1]$. Определим тогда промежуточные «фундаментальные» функции так:

$$\mathcal{F}_{\hat{\phi}}^{\text{mid}}(\cdot) = \hat{\phi} \cdot \mathcal{F}_{\text{endo}}(\cdot) + (1 - \hat{\phi}) \mathcal{F}_{\text{epi}}(\cdot). \quad (1)$$

В итоге определение СП будет следующим:

$$z(\rho, \phi) = (Z_b - \hat{\phi}h) \mathcal{F}_{\hat{\phi}}^{\text{mid}}\left(\frac{\rho}{R_b - \hat{\phi}L}\right) + \hat{\phi}h. \quad (2)$$

В работе [1] указаны средние значения необходимых параметров: $R_b = 3.3$ см, $L = 1$ см, $Z_b = 6$ см, $\phi_{\text{max}} = 3\pi \approx 9.4$.

При $\epsilon_a = \epsilon_b = h = 0$ СП будет являться развёртывающейся. Мы заполнили такую СП серией непересекающихся ГЛ.

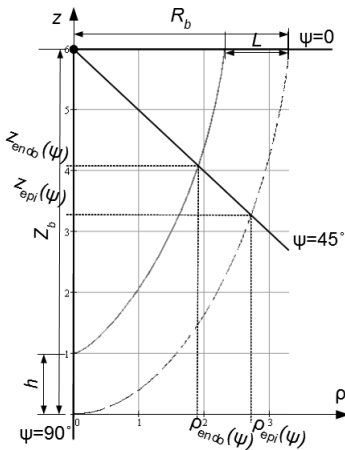


Рис. 2: сечение поверхностей эндокарда (сплошная линия) и эпикарда (пунктирная линия)

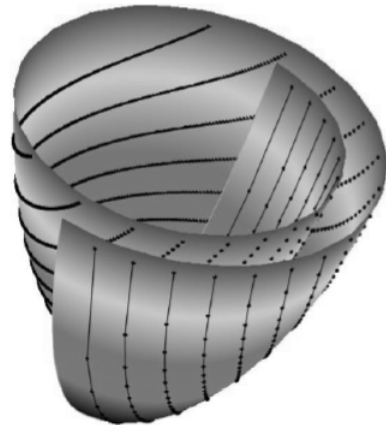


Рис. 3: образы хорд полукруга на СП

С анатомической точки зрения, более корректно моделировать миокард ЛЖ при иных значениях параметров: $h = 1$ см, $\epsilon_a = 0.5$, $\epsilon_b = 0.8$. Поэтому построенные геодезические линии мы отобразили специальным образом на такую анатомически более точную СП (рис. 3), уже не являющуюся развёртывающейся.

Дальнейшая работа предполагает заполнение неразвёртывающихся СП геодезическими линиями, углы наклона которых наиболее точно соответствуют анатомическим данным. Наши первые компьютерные эксперименты показали, что при углах закрутки более 1.7π и $\epsilon_{a,b} > 0.3$ начинающиеся и заканчивающиеся на верхней границе поверхности ГЛ не могут заполнить существенную часть СП.

Литература

[1] D. D. Streeter, JR. Gross morphology and fiber geometry of the heart / Handbook of physiology. Sec. 2. Vol. I. The Heart. Pp. 61–112. Bethesda, Maryland: Am. Physiol. Soc., 1979.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЦИРКУЛЯЦИИ ЛИМФОЦИТОВ

Ткачук М.О., Крысова А.С.

e-mail: tkmaryana@yandex.ru, 20gofman@rambler.ru

В работе представлены результаты математического и компьютерного моделирования рециркуляции Т-клетки между кровью, селезенкой и лимфатической системой.

Модель актуальна: изменчивость количества Т-клеток в крови зараженных ВИЧ пациентов используется как указатель для прогрессии болезни.

Проводились экспериментальные исследования, в том числе над ВИЧ-инфицированными людьми и СТВ-инфицированными обезьянами, измерялось количество Т-клеток в крови. Были выдвинуты предложения, за счет чего происходит изменение количества Т-клеток, наблюдаемых в крови.

Математическая модель процесса имеет вид:

$$\frac{dT(s)}{dt} = -\alpha_s T(t) - \alpha_1 T(t) + v_s u_s(1, t) - v_1 u_1(1, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_s(x, t)}{\partial t} = -v_s \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x} + D_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_s T(t) \delta(s) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_1 T(t) \frac{\theta(y-x)}{y} \quad (3)$$

$\alpha_s = 1.0$, $\alpha_1 = 1.5$, $v_s = 1/6$, $v_1 = 1/20$, $D_s = D_1 = 0.005$, $y = 0.65$.

С помощью компьютерной программы решали дифференциальное уравнение. Цель работы — установить, что модель способна к планированию результатов классических экспериментов по перемещению и рециркуляции лимфоцитов.

В работе также приведены различные графики изменчивости Т-клеток от различных параметров (скорость, время) в крови, селезенке и в лимфатической системе.

Был исследован эффект краткосрочных изменений в значениях параметров перемещения лимфоцита модели (то есть углы входа в органы и следования в пределах этих органов).

Литература

- [1] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1980.
- [2] *Stekel D.J., Parker C.E., Nowak M.A.* A model of lymphocyte recirculation // Trends in Immunology, 1 May 1997. Vol. 18, iss. 5. Pp. 216–221.

Содержание

1. Математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры	3
1. Бакланов А.П. Об одной игровой задаче асимптотически импульсного управления	3
2. Банников А.С. К задаче позиционной поимки убегающего группой преследователей	6
3. Бедин Д.А. Алгоритм расчета систематических ошибок нескольких РЛС по азимуту на основе фильтрации Калмана	8
4. Букаренко М.Б. Система массового обслуживания с отдельными очередями к каналам	11
5. Бурмашева Н.В., Стружанов В.В. Об одной задаче управления в механике деформирования градиентных систем	14
6. Быков Д.С. Стабилизация динамических процессов фрезерования металлов	17
7. Ганебный С.А., Кумков С.С. Игра преследования–уклонения с двумя догоняющими объектами	20
8. Гомоюнов М.И. Об одной задаче оптимизации гарантии в системе с запаздыванием по управлению	23
9. Докучаев А.В. Построение графа сетевого проекта с минимальным числом фиктивных дуг и учетом новой меры сложности	26
10. Ермаков Н.В., Лобов С.А., Самойлов А.Л., Токманцев Т.Б. Численный алгоритм решения дифференциальной игры сближения-уклонения «к моменту»	28
11. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. О решении задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике	31
12. Корнев Д.В. К вопросу о программной реализации решения дифференциальной игры с нетерминальной платой	34

13.	Кошкин Е.В. Построение оптимальных стабилизирующих управлений в математической модели Хатчинсона с кусочно-постоянными аргументами	37
14.	Лебедев П.Д., Успенский А.А. Построение функции оптимального результата на базе множеств симметрии	40
15.	Малёв А.Г., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в дифференциальных играх сближения-уклонения	43
16.	Морина М.С. Об одном алгоритме маршрутизации в случае, когда функция стоимости зависит от списка заданий	46
17.	Парышева Ю.В. Асимптотика решения задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными в сингулярном случае	49
18.	Сорокин С.П. Достаточные условия оптимальности с позиционными сильно монотонными функциями типа Ляпунова	51
19.	Усова А.А. Влияние изменений параметров производственных функций в моделях экономического роста на поведение решений задач управления на бесконечном горизонте	54
20.	Ушаков А.В. Численное построение трехмерных максимальных стабильных мостов	57
21.	Хлопин Д.В. Принцип максимума для задач управления на бесконечном промежутке	59
22.	Шапарь Ю.В. К вопросу о взаимодействии материальных точек в условиях точного и приближенного соблюдения ограничений	62
2.	Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения	65
1.	Абдуллаев А.А. Об одной задаче Пуанкаре–Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода	65

2. Асфандиярова Ю.С. Об одном численном алгоритме решения обратной задачи теории измерений 67
3. Белова Е.Д. Некоторые стационарные течения газа в вертикальной части восходящего закрученного потока 70
4. Бояршинова П.В., Ряшко Л.Б. Анализ стохастических аттракторов модели «хищник-жертва» 73
5. Гребенев Е.С. Численный анализ популяционных моделей 76
6. Дронова А.В., Казаков А.Л. Аналитическое и численное исследование решений начально-краевых задач для уравнений газовой динамики, описывающих течения с ударными волнами 78
7. Джураев Ф.М. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения парабологиперболического типа 81
8. Зверев В.С. Анализ модели поверхностной диффузии с фронтальным взаимодействием веществ 83
9. Ким А.В., Волохова Л.Е. О структурной устойчивости линейных систем с запаздыванием 86
10. Кошелев Г.Н., Башкирцева И.А. Метод доверительных эллипсов в анализе стохастических аттракторов . . . 87
11. Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке при наличии силы Кориолиса 90
12. Пененко А.В. Алгоритм решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности на базе сингулярной срезки оператора чувствительности 93
13. Плужникова Е.А. О непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений в метрических пространствах 96
14. Расулов Т.Х. Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке 99

15.	Расулов Т.Х., Тошева Н.А. О числе и местонахождении собственных значений обобщенной модели Фридрихса	102
16.	Султанов О.А. Устойчивость неавтономных систем, близких к гамильтоновым	105
17.	Сурков П.Г. Использование численных методов с неравномерной сеткой при нахождении решений дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательной полуоси	108
18.	Торбек Б.Т. Об одной нелокальной задаче первого типа для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка	111
19.	Хаджи И.А. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина	113
20.	Цветков И.Н. Обратные стохастические бифуркации в многомерных дискретных моделях	116
21.	Чистяков П.А. Итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах	119
3.	Приближение функций и численный анализ	122
1.	Барабошкин Н.Д. Поиск оптимальной с точки зрения информативности траектории в задаче навигации . .	122
2.	Дубосарский Г.А. Разложение гармонической функции в многосвязной области	125
3.	Дубосарский Г.А. Аналитические и гармонические всплески в области с круговыми границами	128
4.	Ефимов А.В. Вариант задачи Турана для положительно-определенных функций нескольких переменных	131
5.	Кошелев А.А. Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на \mathbb{R}^3	134
6.	Куклин Н.А. Метод Дельсарта в задаче о контактном числе трехмерного пространства	137

7.	Плещёва Е.А. Примеры и аппроксимативные свойства n -раздельных КМА	139
8.	Родионов В.И., Родионова Н.В. О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности	142
9.	Симонов И.Е. О точном неравенстве типа братьев Марковых	145
10.	Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т. Наследование свойств k -монотонности при аппроксимации локальными полиномиальными сплайнами четвертой степени	148
11.	Шевалдин В.Т. Калибровочные соотношения для B - \mathcal{L} -сплайнов	151
4.	Математическое программирование и распознавание образов	154
1.	Айзенштейн Д.О., Ипатов А.В. Решение задачи минимизации дозы облучения персонала методом имитации отжига	154
2.	Белов А.М., Вакула И.А., Гаврилюк А.Л. Система детального планирования машиностроительного производства на основе задачи обработки ограничений	157
3.	Ипатов А.В. Об одном методе построения окрестности в задаче CMST	161
4.	Ручай А.Н. Текстозависимая верификация диктора на основе формантного метода с использованием нового метода сегментации речевого сигнала	164
5.	Хачай М.Ю., Кобылкин К.С. Модификация одного алгоритма определения темпа музыкальной мелодии	167
5.	Алгебра и дискретная математика	170
1.	Авдеев Р.Р. Свойство униформизации на некоторых допустимых множествах	170
2.	Аверкин Е.М. Локальный случай теоремы О'Нэна-Скотта	173

3.	Андреева Д.П. Конечные группы с субнормальными вторыми максимальными подгруппами	174
4.	Башкин М.А. Однородное нерасщепимое супермногообразии с ретрактом $\mathbb{C}\mathbb{P}_{3220}^{14}$	177
5.	Белоусов И.Н. О группе автоморфизмов обобщенного шестиугольника $GH(6, 6)$	179
6.	Буриченко В.П., Махнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах	181
7.	Васильев В.А. Об m -добавляемых подгруппах конечных групп	184
8.	Воронин В.Ю. Специальные тождества для диалгебр	186
9.	Гаврилюк А.Л. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$ не существует	189
10.	Горшков И.Б. Об одной гипотезе Томпсона	191
11.	Горяинов С.В., Шалагинов Л.В. О графах Деся на 14, 15 и 16 вершинах	192
12.	Гутнова А.К., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(245, 64, 18, 16)$. .	195
13.	Демина Е.Н. Кратно Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп длины 2	198
14.	Дуж А.А., Созутов А.И., Филиппов К.А. О группах Шункова с одним условием насыщенности	201
15.	Ефимов К.С., Махнев А.А. О вполне регулярных графах с $k = 11, \lambda = 4$	203
16.	Жураев И. Следы на алгебрах измеримых операторов	206
17.	Кайгородов И.Б. Об обобщенном Дубле Кантора . . .	207
18.	Ковалева В.А. Условия p -сверхразрешимости и p -нильпотентности конечных групп	210
19.	Кондратьев А.С., Храмцов И.В. О конечных четырехпримарных группах с несвязным графом простых чисел	212

20.	Кривова А.С. Обратимые элементы в кольцах вычетов квадратичных полей	215
21.	Кривоногов А.С. Доля матриц с вещественным спектром в симплектической алгебре Ли	216
22.	Лыткин Д.В. О максимальных порядках элементов простых симплектических и ортогональных групп в характеристике 2	217
23.	Манзаева Н.Ч. О подгруппах D_π -групп	219
24.	Маслова Н.В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы	221
25.	Маслова Н.В., Одинцова Н.Ю. О статусах симметрической полугруппы, симметрической группы и знакопеременной группы	224
26.	Неганова Е.А., Трофимов В.И. Конечность числа $Aut_0(\Lambda^2)$ -симметрических 4-расширений решетки Λ^2	227
27.	Одинцова Н.Ю. Об изоморфизмах полугрупп кодов аминокислот	229
28.	Первухина Т.В. О структуре полугрупп, на которых совпадают отношения Грина \mathcal{R} и \mathcal{H}	231
29.	Пермина А.Н. Целочисленные разбиения	233
30.	Перминова О.Е. О мощностях конечных критических решеток	235
31.	Попович А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций комбинаторных полугрупп	238
32.	Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями линейных групп размерности 2	240
33.	Сеньчонок Т.А. О хроматической определяемости элементов высоты 2 в решетках полных многодольных графов	241

34.	Циовкина Л.Ю. О свойстве инъективности для показательной функции на множествах разбиений натуральных чисел	244
35.	Черников Д.В. Помехоустойчивое кодирование над конечным полем с использованием биортогональных преобразований	247
36.	Шалагинов Л.В. О графах Деза с параметрами графов, дополнительных к решетчатым и треугольным графам	250
37.	Шапрынский В. Ю. Модулярные и нижнемодулярные элементы решеток многообразий полугрупп	253
38.	Шпонько А.В. Подкольца колец вычетов целых круговых полей	256
6.	Топология и геометрия	257
1.	Бастрыков Е.С. О подмножествах расширения Белла, не гомеоморфных βN	257
2.	Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О тензоре кривизны в расслоении бивекторов над четырехмерными группами Ли	258
3.	Долгоносова А.Ю. Некоторые свойства псевдоримановых слоений	261
4.	Жукова А.М. Индекс Морса циклической конфигурации шарнирного механизма	263
5.	Косолобов Д.А. Секвенциально-компактно открытая топология	266
6.	Можей Н.П. Локально однородные поверхности в аффинной и проективной геометрии	269
7.	Осипов А.В. Регулярность множественно-открытой топологии	271
8.	Рогожина Е.А. Двумерные лоренцевы орбифолды и их группы изометрий	273

7. Параллельные вычисления и техническое зрение	276
1. Ананьев М.В., Гаврилюк А.Л. Стохастическое 3D-моделирование микроструктуры твердооксидных топливных элементов	276
2. Васёв П.А., Кумков С.С., Шмаков Е.Ю. О создании среды для быстрой разработки систем научной визуализации	280
3. Горшенин В.В. Прототип системы стереонаблюдения	283
4. Заводников Д.Е., Сафронов М., Ким А.В. Практическая реализация и анализ параллельных алгоритмов численного решения функционально-дифференциальных уравнений	286
5. Ионов С.Д. Распределенная потоковая нейронная сеть	288
6. Корнилов Ф.А., Перевалов Д.С. Оценка оптимального порога для алгоритма поиска структурных изменений с помощью проектора Пытьева	291
7. Костоусов В.Б., Игумнов Г.А. Влияние траекторных нестабильностей на сигнал многоканального гидролокатора бокового обзора с синтезированной апертурой	294
8. Костоусов К.В. Сравнительный анализ калибровочных маркеров для системы технического зрения . . .	297
9. Тарханов А.Е. Параллельные алгоритмы оценки информативности геофизического поля	300
10. Штуркин Н.А. О задаче реконструкции трехмерного изображения по множеству фотографий	303
8. Компьютерные науки и компьютерная безопасность	305
1. Веретенников А.Б. Метод организации индекса коллекции XML документов	305
2. Горбенко А.А. Автоматическое порождение специализированных нейронных сетей	308

3.	Горбенко А.А., Морнев М.Л., Попов В.Ю., Шека А.С. Об организации стационарного визуального наблюдения	311
4.	Самунь В.С. Симулятор компьютерной сети	314
9.	Математическая биология	317
1.	Глушенкова В.В., Ким А.В. Компьютерное моделирование и анализ модели иммунодоминантного и адаптивного регулирования	317
2.	Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б. Стохастическая чувствительность модели «хищник – две жертвы» к аддитивным и параметрическим шумам	319
3.	Копытова Ю.В. Моделирование действия ослабленного вируса в качестве постподверженного лечения . . .	322
4.	Правдин С.Ф., Бердышев В.И., Кацнельсон Л.Б., Соловьёва О.Э., Мархасин В.С. Статическая математическая модель архитектоники левого желудочка сердца человека	323
5.	Ткачук М.О., Крысова А.С. Математическое и компьютерное моделирование рециркуляции лимфоцитов	326

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции

Рекомендовано к изданию
Ученым советом Института математики
и механики УрО РАН

Подписано в печать 15.01.2011.

Формат 60×84/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Тираж 145 экз.

Усл. печ. л. 21,1. Уч.-изд. л. 15,0.

Заказ №

620990 Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
ООО «Издательство Учебно-методический центр УПИ»
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226