

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| Наседкин А.В. К 65-летию ректора, директора НИИМ и ПМ РГУ Александра Владимировича Белоконя . . . . .   | 7  |
| Абросимов Н.А., Куликова Н.А. Определение вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа нестационарного деформирования оболочек вращения . . . . . | 10 |
| Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С., Кузнецова Т.А. Об идентификации однородных и функционально-градиентных покрытий методом индентирования . . . . .   | 14 |
| Александров В.М., Зарубов Д.И. Устойчивость продольно сжатой бесконечной упругой плиты на двухслойном упругом основании . . . . .   | 18 |
| Асотова Е.А., Зубов Л.М. Эффекты второго порядка в теории кручения призматических упругих тел . . . . .   | 21 |
| Ахметов Н.К., Устинов Ю.А. О некоторых особенностях напряженно деформированного состояния сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек . . . . .   | 26 |
| Бай А.В., Сторожев В.И., Шпак В.А. Поверхностные электроупругие волны в пьезокристаллическом полупространстве: методика построения полиномиального уравнения для фазовых скоростей . . . . .                  | 31 |
| Баранов И.В., Соловьев А.Н. Стрельникова А.В. Об идентификации свойств полимеркомпозитных и пьезоэлектрических материалов на основе динамических испытаний и генетических алгоритмов . . . . .                | 36 |
| Батищев В.А., Белов К.Л. Асимптотика вторичных режимов термокапиллярных течений жидкости при слиянии точек бифуркации . . . . .   | 41 |
| Белов К.Л., Еремеев В.А. Капиллярные волны в жидкости, покрытой микрополярной пленкой . . . . .   | 46 |
| Белоконь А.В., Скалиух А.С. К моделированию сегнетоэластиков . . . . .  | 51 |
| Беляк О.А., Баранов И.В. Обратная задача для слоя с полостью . . . . .  | 56 |
| Боев Н.В., Бокарева Л.В. К обоснованию применения скалярной модели в ультразвуковом неразрушающем контроле упругих материалов . . . . .   | 61 |
| Бондаренко А.А., Мелешко В.В. Нормальные волны в прямоугольном упругом волноводе . . . . .  | 66 |
| Буйло С.И. Связь параметров акустической эмиссии развивающихся дефектов со скоростью деформации и типом напряженного состояния . . . . .  | 71 |
| Ватульян А.О., Двоскин М.А., Сатуновский П.С. Прямые и обратные задачи для неоднородного слоя . . . . .   | 76 |
| Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Блокирование упругих волн наклонными полосовыми трещинами . . . . .   | 81 |
| Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ерёмин А.А., Кириллова Е.В. Применение метода слоистых элементов для расчета волноводов с неоднородностями . . . . .   | 86 |
| Гуда С.А. Спектр Флоке крутильных колебаний тела в вязкой жидкости . . . . .  | 90 |

|  |     |
|--|-----|
| Гузев М.А., Израильский Ю.Г., Шепелов М.А. Макроскопические характеристики одномерной точно решаемой молекулярной модели на различных масштабах . . . . .            | 94  |
| Драгилев В.М. Априорный анализ некорректной обратной граничной задачи для упругого тела . . . . .  | 98  |
| Евдокимова О.В., Бабешко В.А., Федоренко А.Г., Бабешко О.М. Дифференциальный метод факторизации в проблеме конструирования материалов . . . . .                      | 103 |
| Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Строчков С.Е. О собственных колебаниях систем нанотрубок . . . . .   | 109 |
| Жорник В.А., Прокопенко Ю.А., Рыбинская А.А., Савочка П.А. Нестационарная задача термоупругости для цилиндра с осесимметричной трещиной . . . . .                    | 115 |
| Залётов В.В., Сторожев В.И., Хапилова Н.С. Смешанная задача теории упругости для изотропного полупространства при действии на границе сосредоточенной силы . . . . . | 120 |
| Зарецкая М.В. О влиянии разнотипности нижнего основания литосферных плит на мантийные процессы . . . . .   | 125 |
| Захарова С.В., Наседкин А.В., Шихман В.М. Зависимость амплитудно-частотной характеристики преобразователя от граничных условий на торце . . . . .                    | 128 |
| Иваночкин П.Г., Флек Б.М. Термоупругая контактная задача для подшипника скольжения сухого трения с учетом изнашивания . . . . .                                      | 133 |
| Илюхин А.А. Неоднозначность определения стационарных решений уравнений Эйлера при заданных значениях постоянных в общих интегралах . . . . .                         | 138 |
| Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Селезнев Н.М. Об одном алгоритме расчета динамики системы "здание-грунт" . . . . .  | 144 |
| Калашников В.В., Карякин М.И. Эффекты второго порядка в задаче плоского изгиба нелинейно-упругого стержня . . . . .  | 148 |
| Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Богомоллов А.С. Динамика упругих градиентно-неоднородных сред . . . . .   | 153 |
| Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в многослойных трубках и диагностический анализ пульсовых колебаний диаметра артерий .                                   | 157 |
| Кизилова Н.Н. Сравнительный анализ моделей роста биологических сплошных сред . . . . .   | 162 |
| Колосова Е.М. Исследование колебаний ортотропной среды с полостью на основе метода ГИУ . . . . .   | 167 |
| Курбатова Н.В., Романова Н.М. Об анализе жесткости на изгиб естественно закрученного стержня . . . . .   | 172 |
| Курбатова П.С., Сапрунов Н.И., Соловьев А.Н. Об использовании нейронных сетей в задачах определения дефектов в упругих телах . . .                                   | 177 |
| Лежнёв М.В. Алгоритм задачи плоскопараллельного обтекания присоединенного вихря . . . . .  | 183 |

|  |     |
|--|-----|
| Marulo F., Ricci F., Sumbatyan M.A. Interior noise in the aircraft streamlined by the turbulent flow . . . . .   | 188 |
| Мелехов А.П., Ревина С.В. Устойчивость трехмерных пространственно-периодических течений относительно длинноволновых возмущений . . . . .   | 193 |
| Милосердова И.В., Потапов И.А., Филичев М.Е. Модулированные колебания в стержне с нелинейно-упругим закреплением . . . . .   | 198 |
| Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н. Действие сейсмических волн в массиве горных пород с выработкой и трещинами вокруг нее . . . . .   | 202 |
| Островская И.В. Гидродинамический удар диска о неоднородную жидкость . . . . .   | 207 |
| Павлова А.В., Рубцов С.Е. К решению динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями на стыках слоев . . . . .   | 212 |
| Пинчук Н.А., Столяр А.М. Расчет продольно-поперечных колебаний троса переменной длины . . . . .  | 217 |
| Потапов А.И., Лисина С.А. Обоснование моделей сплошной среды с позиций классической механики . . . . .   | 222 |
| Попов А.В. Устойчивость составного цилиндра с предварительным натягом . . . . .  | 227 |
| Проценко В.С., Украинец Н.А. Первая основная задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью . . . . .   | 232 |
| Пряхина О.Д., Смирнова А.В. К учету влияния неоднородностей различной природы на спектральные характеристики слоистых сред . . . . .   | 237 |
| Пряхина О.Д., Смирнова А.В. О рекуррентной процедуре вычисления элементов матрицы Грина многослойных сред . . . . .  | 240 |
| Руднев Ю.И. Устойчивость токнесущего жидкого цилиндра в магнитном поле . . . . .   | 243 |
| Санников С.В. Расчёт звукового излучения пластической деформации у вершины трещины . . . . .   | 248 |
| Сафроненко В.Г., Трифонов В.В., Шутько В.М. О распределении диссипативной энергии по типам деформаций при гармонических колебаниях цилиндрической композитной оболочки . . . . . | 252 |
| Селезнев М.Г., Селезнев Н.М., Ву Тхи Бик Куен. О расчете характеристик воздействия сейсмических колебаний на здания, расположенные вблизи берегового склона . . . . .            | 257 |
| Сметанин Б.И. Метод ортогональных многочленов в некоторых задачах гидроупругости . . . . .   | 260 |
| Снопов А.И. Диабатическое сжатие газового облака . . . . .   | 264 |
| Соколов А.В. Задача пространственного изгиба нелинейно упругой трубы при наличии внутреннего давления . . . . .  | 266 |
| Цибулин В.Г. Метод сеток для расчета фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости . . . . .   | 271 |
| Цыбенкова О.А. Колебания шара в вязкой жидкости под действием модулированной упругой силы . . . . .  | 276 |
| Чебаков М.И. Контактная задача для двухслойного цилиндрического основания . . . . .  | 280 |

|   |     |
|---|-----|
| Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Об использовании спектральной теории<br>несамосопряженных операторов для определения деформационных<br>характеристик пространственных тел . . . . . | 285 |
| Юдин А.С., Юдин С.А. Моделирование пластической формовки артифици-<br>зированной хлопающей мембраны . . . . .   | 290 |
| Юдин С.А., Юдин А.С. Устойчивость сфероидальных оболочек перемен-<br>ной толщины . . . . .  | 295 |

## К 65-ЛЕТИЮ РЕКТОРА, ДИРЕКТОРА НИИМ и ПМ РГУ АЛЕКСАНДРА ВЛАДИМИРОВИЧА БЕЛОКОНЯ

5 декабря 2006 года исполняется 65 лет А.В. Белоконю, доктору физико-математических наук, профессору, ректору Ростовского государственного университета, директору Научно-исследовательского института механики и прикладной математики, заведующему кафедрой математического моделирования.

Вся трудовая деятельность Александра Владимировича Белоконя неразрывно связана с Ростовским государственным университетом. В разные годы он работал ассистентом, старшим преподавателем, доцентом, профессором кафедры теории упругости, заведующим кафедрой математического моделирования, деканом механико-математического факультета, и, наконец — ректором РГУ и директором Научно-исследовательского института механики и прикладной математики им. Воровича И.И.

А.В. Белоконь является известным ученым в областях механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и геоэкологии. Он и его ученики ведут плодотворные научные исследования по разнообразным направлениям современной механики и математического моделирования. Александр Владимирович — автор и соавтор более 200 научных работ, 3 монографий. За годы педагогического труда он подготовил 14 кандидатов и 3 докторов наук.

Работы А.В. Белоконя в области механики выделяются широким использованием сложного математического аппарата, особенно, методов функционального анализа, глубоким проникновением в существо механических проблем и применением современных численных методов для доведения результатов исследования, что называется, до числа.

Хорошо известны исследования А.В. Белоконя в области контактных задач теории упругости. Им предложены оригинальные формы граничных интегральных уравнений задач для упругих тел ограниченных размеров обобщенной цилиндрической формы, разработаны эффективные численные алгоритмы их решения, включая новый метод асимптотического решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

А.В. Белоконем существенно развита теория распространения упругих волн в анизотропных неоднородных по сечению волноводах типа полосы и слоя. Он впервые начал всесторонне изучать динамические задачи для полуограниченных упругих сред с гармоническими, подвижными и с движущимися гармоническими источниками волн во взаимосвязи. Для этих задач им был сформулирован общий принцип соответствия, развита методика анализа дисперсионных соотношений, выявлена связь различных принципов выделения единственных решений, установлены новые энергетические соотношения, изучены вопросы единственности и разрешимости задач с подвижными источниками в энергетических классах. Методы исследования задач с подвижными источниками волн им были распространены также на контактные задачи с подвижными штампами и на задачи для вязкоупругих волноводов. Для последних А.В. Белоконем были сформулированы специальные принципы соответствия между решениями упругих и вязкоупругих задач с подвижными и осциллирующими источниками волн. Существенное

значение имели работы А.В. Белоконя по исследованию трехмерных динамических задач для упругого слоя. Методика анализа подобных задач, разработанная И.И. Воровичем, им была перенесена на трехмерные задачи с существенным развитием, касающимся применением принципа предельного поглощения, построения асимптотик дальних полей и исследования кинематики и энергетики волновых полей.

Вопросами распространения упругих волн в полуограниченных анизотропных упругих средах А.В. Белоконь продолжает заниматься и по настоящее время. Так, в последние годы им были получены новые интересные результаты, касающиеся применения методов контурного интегрирования в задачах для анизотропных неоднородных по глубине полуплоскости, полупространства и слоистых сред.

А.В. Белоконь внес значительный вклад в разработку математических основ теории электроупругости. В соавторстве с И.И. Воровичем им изучены проблемы корректности постановок статических и динамических задач электроупругости, исследованы спектральные свойства пьезоэлектрических тел ограниченных размеров, обоснована применимость метода Бубнова-Галеркина. Ряд статей А.В. Белоконя был посвящен исследованию эффективных свойств пьезоэлектрических композитов различной связности.

Большое число работ А.В. Белоконя было посвящено решению конкретных инженерно-технических задач. Так, им были выполнены исследования по расчету подшипников с полимерным покрытием, тензометрических датчиков давления, разнообразных пьезоэлектрических преобразователей, устройств акустических систем диагностики, построены различные прикладные инженерные теории и методы.

В настоящее время А.В. Белоконь является руководителем ряда научно-исследовательских работ, выполняемых по грантам РФФИ, Федерального агентства по образованию и др.

Активную научную и преподавательскую работу А.В. Белоконь всегда успешно сочетал с общественной и научно-организационной деятельностью. В самом начале трудовой деятельности в РГУ А.В. Белоконь был Ученым секретарем НИИ М и ПМ, в 1981-1988 гг. — деканом механико-математического факультета, а с 1988 г. и по настоящее время А.В. Белоконь является ректором РГУ.

В 1998 г. А.В. Белоконь возглавил новую кафедру механико-математического факультета — кафедру математического моделирования, на которой поставил и читал новый курс "Математические модели естественных наук" для студентов отделения математики механико-математического факультета, а в последствии — курс "Современные проблемы прикладной математики и информатики" для магистрантов факультета математики, механики и компьютерных наук. Кафедра математического моделирования находится в постоянном поиске новых форм обучения и условий, обеспечивающих повышение качества учебного процесса и научно-исследовательских работ. Так кафедра являлась базой образовательной части проекта "Научно-образовательный Эколого-аналитический центр системных исследований, математического моделирования и геоэкологической безопасности Юга России" по программе Министерства Образования РФ и CRDF "Фундаментальные исследования и высшее образование". С 2005 года под руководством А.В. Бе-

локона на кафедре выполнялся проект научной программы "Развитие научного потенциала высшей школы" Федерального агентства по образованию "Создание корпоративной учебно-исследовательской кафедры математического моделирования и прикладной математики РГУ, ТРТУ и ЮРГТУ". В результате выполнения этого проекта была образована новая корпоративная учебно-исследовательская Кафедра математического моделирования и прикладной математики РГУ, ТРТУ и ЮРГТУ, объединяющая в своей работе потенциалы кафедр классического и технических университетов.

Под руководством А.В. Белокося на кафедре математического моделирования создан современный конечно-элементный программный комплекс ACELAN, предназначенный для решения задач механики деформируемого твердого тела с усложненными физико-механическими свойствами. В настоящее время разрабатывается новая усовершенствованная версия пакета ACELAN с развитыми возможностями расчета процессов неравномерной поляризации, расчета пьезоустройств с неоднородными свойствами материалов, а также проведения параллельных и оптимизационных расчетов.

С 2002 г. А.В. Белокося является директором Научно-исследовательского института механики и прикладной математики им. Воровича И.И. РГУ. В последние годы в институте были организованы совместные лаборатории вычислительной механики РГУ и Института проблем механики РАН (г. Москва), нелинейной механики РГУ и Института проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург), математического моделирования в трибологии РГУ и РГУПС, динамично развиваются исследования в различных современных областях механики деформируемого твердого тела, вычислительной механики, математического моделирования и изучения свойств новых материалов, включая пьезоактивные, композиционные и нано- материалы. Более подробно достижения Научно-исследовательского института механики и прикладной математики им. Воровича И.И. РГУ описаны в отдельной статье второго тома трудов этой конференции.

Александр Владимирович — член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, академик МАН ВШ, член-корреспондент Инженерной Академии, член многих отраслевых и общественных академий. Награжден орденами "Знак Почета" (1986 г.), Дружбы народов (2001 г.), "За заслуги перед Отечеством IV степени" (2006 г.), медалями им. академика Н.А. Пилюгина (1993 г.), им. К.Э. Циолковского (2001 г.), им. И.Д. Ушинского (2001 г.).

*А.В. Наседкин*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

**Абросимов Н. А., Куликова Н. А.**

*Научно-исследовательский институт механики Нижегородского  
государственного университета им. Н.И.Лобачевского*

Предложен метод определения жесткостных и реологических характеристик композитных материалов, основанный на минимизации рассогласования экспериментальных данных и результатов численного моделирования нестационарных процессов деформации оболочек вращения, изготовленных из исследуемых композитных материалов. На основе данного подхода проведен анализ демпфирующих характеристик хаотически армированных и тканевых композитных материалов.

Характерная особенность конструкций из композиционных материалов состоит в том, что материал и конструкция создаются в рамках единого технологического процесса. В связи с этим возникает задача определения деформационных характеристик композитного материала при его работе в конструкции, решение которой необходимо для построения адекватных моделей деформирования материала и конструкции с целью последующего прогнозирования их поведения при заданных воздействиях. Традиционные методы решения этой задачи [1], основанные на испытаниях представительских образцов методом свободных затухающих колебаний, зачастую оказываются не работоспособными в связи с существенным влиянием на результаты измерений условий закрепления, способа возбуждения колебаний, неоднородности напряженно-деформированного состояния и технологических трудностей изготовления образцов. Альтернативным методом определения параметров моделей деформирования является непосредственное использование экспериментальной информации, получаемой при нагружении элементов конструкций. Такие подходы идентификации материалов и моделей применялись для определения эффективных упругих характеристик композитных материалов на основе статических экспериментов [2, 3]. В докладе рассматривается дальнейшее развитие этих исследований, связанное с разработкой расчетно-экспериментального подхода к определению жесткостных и реологических характеристик композитных материалов в динамически нагруженных оболочках вращения, выполненных из исследуемых материалов. Так как оболочки вращения из композитных материалов являются неоднородными имеют низкую сдвиговую жесткость и, в ряде случаев, не малую толщину, поэтому для описания их напряженно-деформированного состояния необходимо привлекать неклассические теории оболочек. Для построения разрешающей системы уравнений неклассической теории оболочек вращения используется принцип возможных перемещений в



сочетании с методом рядов [4]. При этом связь между напряжениями и деформациями устанавливается на основе соотношений наследственной теории упругости с многоэкспонентными ядрами релаксации максвелловского типа. Полученное вариационное уравнение динамики описывает движение вязкоупругой композитной оболочки вращения и может быть использовано для численного решения прикладных задач с различной степенью точности в зависимости от числа членов в аппроксимирующих рядах. Для определения деформационных характеристик и параметров реологических моделей механического поведения композитных вязкоупругих материалов предлагается следующая схема. Пусть получена информация о динамическом поведении композитной оболочки вращения, в виде временных зависимостей перемещений и деформаций на ее поверхностях. Считаем, что имеются соответствующие тензограммы перемещений и деформаций, полученные в результате экспериментальных испытаний. Поскольку расчетные и экспериментальные перемещения и деформации являются, затухающими условно моногармоническими колебаниями, то можно определить максимальные значения расчетных и экспериментальных перемещений и деформаций, а также соответствующие моменты времени, в которые они достигаются. Далее предлагается параметризованный вариант постановки задачи идентификации материальных констант моделей вязкоупругого поведения композитного материала. Требуется найти набор параметров (вектор) определяющих соотношений при которых математическая модель, описывающая динамическое поведение композитных вязкоупругих оболочек вращения, наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. Под параметрами понимаются мгновенные и длительные модули упругости и сдвига, коэффициенты Пуассона, времена релаксации и другие характеристики. В результате задача сводится к нахождению вектора коэффициентов физических уравнений, обеспечивающего в выбранной норме минимальное расстояние между расчетными и экспериментальными данными. В качестве нормы выбирается функционал, представляющий сумму среднеквадратичных отклонений максимальных значений расчетных и экспериментальных деформаций и перемещений. Численный метод решения сформулированной задачи идентификации состоит из двух самостоятельных этапов: решении начально-краевой задачи вязкоупругого деформирования композитной оболочки вращения и поиска глобального минимума целевой функции в сочетании с анализом ее чувствительности по проектным переменным. Первый этап решения задачи идентификации основывается на явной вариационно-разностной схеме [4]. Второй этап решения задачи идентификации заключается в разработке и программной реализации поиска глобального минимума функции рассогласования расчетных и экспериментальных значений максимальных перемещений и деформаций. Предварительно осуществляется анализ чувствительности целевой функции по переменным проектирования с целью оценки возможности определения параметров определяющих соотношений в данной задаче. Это исследование базируется на теории глобальных показателей чувствительности для изучения нелинейных математических моделей [5]. Глобальный анализ чувствительности в отличие от традиционного анализа чувствительности [6], который можно назвать локальным, позволяет проанализировать поведение целевой функции во всей области допустимых значений проектных пере-

менных, изучить и количественно оценить влияние отдельных проектных переменных и их групп и, наконец, выделить существенные и несущественные проектные переменные. Кроме того, для повышения эффективности расчетов подбор жесткостных и реологических характеристик для многоэкспонентных ядер релаксации осуществляется на последовательно расширяющихся временных интервалах, что в сочетании с анализом существенности проектных переменных позволяет значительно сократить вычислительные затраты при решении задачи идентификации. При выборе метода минимизации целевой функции многих переменных необходимо учитывать ряд факторов: многоэкстремальный характер целевой функции и большие вычислительные затраты при ее формировании, сложность вычисления градиентов целевой функции, чувствительность методов оптимизации к погрешностям экспериментальных измерений деформаций. Учитывая отмеченные трудности, предпочтение отдано синтезу методов адаптивного случайного поиска и детерминированных прямых алгоритмов локальной оптимизации, в которых строится нелокальная аппроксимация функции по ее значениям в ряде точек [7]. Адекватность предлагаемых моделей деформирования материала оболочек вращения и метода их идентификации оценивалась на задачах динамического деформирования цилиндрической и полусферической оболочек при внутреннем импульсном нагружении [8, 9]. Проведенные исследования показали, что построенная разрешающая система уравнений позволяет с необходимой точностью анализировать нестационарные процессы деформации в нетонких вязкоупругих композитных оболочках вращения, а предлагаемый расчетно-экспериментальный метод идентификации параметров определяющих соотношений вязкоупругого деформирования композитных материалов открывает возможность адекватного описания динамического поведения элементов конструкций, изготовленных из исследуемых материалов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-08-50212) и по программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ - 6391.2006.8).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Пелех Б.Л., Саляк Б.И.* Экспериментальные методы исследования динамических свойств композиционных структур. Киев: Наукова думка, 1990. 136 с.
- [2] *Каюмов Р.А.* Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 94–103.
- [3] *Матвеевко В.П., Юрлова Н.А.* Идентификация упругих постоянных композитных оболочек на основе статических и динамических экспериментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 12–20.
- [4] *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.

- [5] *Соболь И.М.* Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 9. С. 43–52.
- [6] *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
- [7] *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.
- [8] *Володина Л.В., Гердюков Н.Н., Зотов Е.В. и др.* Реакция полусферических оболочек из ВВ на действие импульсной нагрузки (экспериментальн -расчетное исследование). Вещества, материалы и конструкции при интенсивных динамических воздействиях // Тр. Междунар. конф. "V Харитоновские тематические научные чтения". Саров: Всерос. науч.-исслед. ин-т эксперим. физики. 2003г.
- [9] *Федоренко А.Г., Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Русак В.Н., Заикин С.Н.* Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композит. материалов. 1983. No 1. С. 90-94.

**Abrosimov N.A., Kulikova N.A.** *Determination of visco-elastic properties of composite materials on experimental-theoretical analysis results of nonstationary deformation shells of revolution.* A method for determining stiffness and rheological characteristics of composite materials, based on minimizing the mismatch of experimental data and the results of numerically modeling nonstationary deformation processes in shells of revolution made of composites studied, is presented. The above approach is used for analyzing damping characteristics of chaotically reinforced and cloth composites.

# ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОРОДНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ МЕТОДОМ ИНДЕНТИРОВАНИЯ

**Айзикович С. М.\***, **Кренев Л. И.\***,  
**Трубчик И. С.\*\***, **Кузнецова Т. А.\*\*\***

*\* Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

*\*\* НИИ механики и прикладной математики имени Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

*\*\*\* Институт порошковой металлургии, Минск, Беларусь*

Предлагается способ определения упругих характеристик неоднородных покрытий, основанный на методах индентирования, с одной стороны, и решении контактной задачи о внедрении параболического штампа в упругое полупространство, с другой стороны. Для материалов с покрытием, используя метод индентирования, можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта, и в силу этого являющийся некоторой средней величиной между модулем упругости поверхностного и глубинных слоев материала. Изменяя диаметр штампа, можно получить некоторый спектр модулей упругости, характерных для счетного ряда зон контакта. Интегральную же характеристику, которую называют эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания, можно найти из решения контактной задачи о внедрении осесимметричного параболического штампа в неоднородное покрытие. Проводится сопоставление результатов натуральных испытаний на индентирование с результатами, полученными аналитически.

Для современных покрытий, широко используемых в технике, характерной чертой является сложность самой структуры (неоднородность) при толщине покрытия в диапазоне 0,1–2,5 микрон. При этом становится весьма актуальной проблема определения упругих свойств таких покрытий. Особое значение имеет модель функционально-градиентного покрытия, так как она позволяет аналитически описать явление расслаивания, присущее твердым упругим однородным покрытиям.

В настоящей работе развивается подход, позволяющий с помощью индентирования отличить в упругой области напряженно-деформируемого состояния среды однородное покрытие от функционально-градиентного (непрерывно-неоднородного) и идентифицировать упругие свойства покрытия.

Решение контактных задач для сред с произвольным законом изменения неоднородности по глубине двухсторонним асимптотическим методом было построено в работах Айзиковича С.М., Александрова В.М. и др. [1–4]. Суть метода состоит в том, что трансформанта ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача, и ее аппроксимация находятся численно. После того, как структура трансформанты ядра интегрального уравнения определена, она аппроксимируется выражением специального вида. Решение интегрального уравнения с аппроксимированным ядром строится аналитически. Это дает возможность получить решение

в виде, удобном для аналитического исследования различных эффектов, связанных с неоднородностью. Кроме того, эта аппроксимация позволяет найти решение задачи для достаточно широкого класса законов неоднородности.

Для материалов с покрытием, используя метод индентирования можно определить модуль упругости [5] актуальный для некоторой зоны контакта, и в силу этого являющийся некоторой средней величиной между модулем упругости поверхностного и глубинных слоев материала. Эту характеристику, которую будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания, можно найти из решения контактной задачи о внедрении осесимметричного штампа в неоднородное покрытие.

В результате ее решения определяется связь между вдавливающей силой и осадкой индентора. Однако для исследования эффекта неоднородности материала покрытия по глубине более информативной является производная от них величина функции жесткости.

В случае внедрения в основание осесимметричного штампа с плоской подошвой функция жесткости имеет вид:

$$E_w = \frac{4}{\pi D} \frac{dP}{d\delta}$$

для однородного основания она является постоянной величиной и не зависит от размеров штампа. Здесь  $D$  – диаметр штампа,  $P$  – величина вдавливающей силы,  $\delta$  – перемещение штампа под действием силы  $P$ .  $E_w$  связана с модулем упругости  $E$  соотношением  $E_w = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Штамп каждого фиксированного диаметра "измеряет" некоторые средние характеристики слоя, толщина которого пропорциональна диаметру штампа. Поэтому в результате измерений при помощи штампов разных диаметров содержится информация, на основе которой, при помощи разработанного метода расчета, можно определить модуль упругости как глубинных, так и поверхностных слоев.

Нужно отметить, что отношение жесткости поверхностного слоя  $E_w$  (по отношению к глубинным слоям), при постоянстве коэффициента Пуассона в материале, не зависит от абсолютного значения коэффициента Пуассона. Таким образом, взяв набор штампов с плоской подошвой различного диаметра можно оценить степень неоднородности упругих свойств поверхностного слоя и установить упругие свойства материала.

Эта задача определения упругих свойств неоднородного материала является некорректной обратной задачей математической физики. Наиболее распространенный метод решения подобных задач – метод подбора. В нашем случае интерпретация этого метода состоит в том, что сначала решаем прямую задачу об определении жесткости основания для некоторого набора функций изменения модуля упругости в поверхностном слое, а затем подбираем ту функцию, которая лучше всего согласуется с экспериментальными данными по значениям  $E_w$ , полученным для инденторов различных диаметров [6, 7].

На рисунке 1 показаны кривые жесткости для однородного слоя (кривая 1) и слоя, модуль Юнга, которого линейно убывает по глубине (кривые 2 и 3). При одной и той же толщине слоя  $H$  кривые хорошо различимы (1 и 3). Однако если мы возьмем удвоенную толщину неоднородного слоя, то мы видим, что кривые

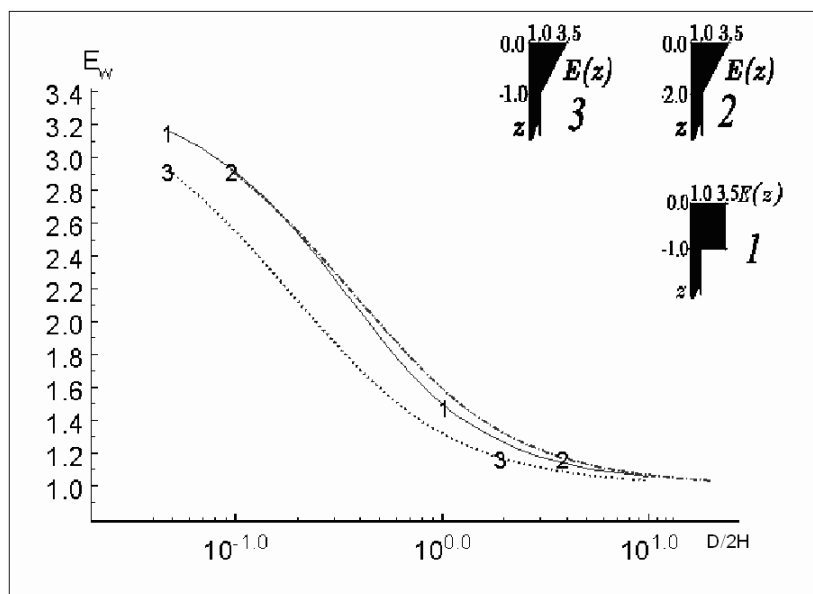


Рис. 1.

практически сливаются. То есть, не зная толщину неоднородного слоя, мы не можем отличить однородный и функционально-градиентный слой. В этом случае мы можем использовать информацию о кривизне поверхности вне штампа.

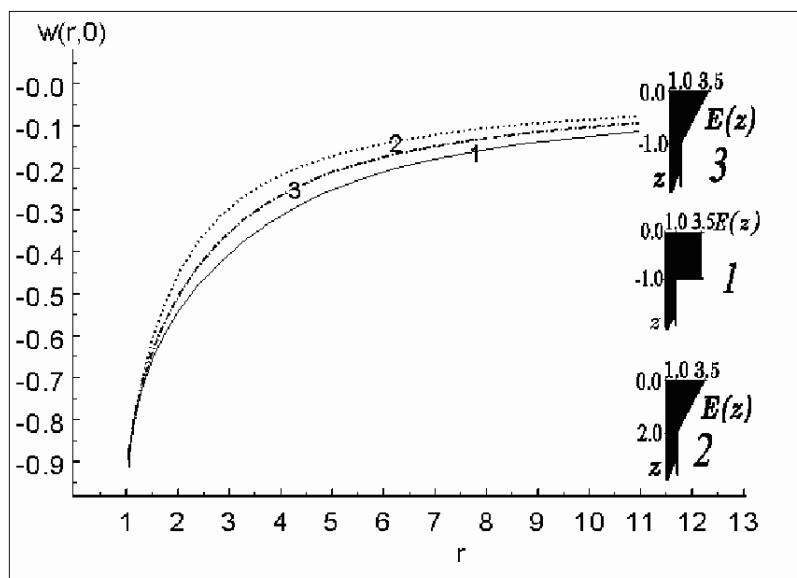


Рис. 2.

На рисунке 2 показана форма поверхности для тех же случаев изменения модуля Юнга по глубине.

Работа написана при поддержке грантов РФФИ № 05-01-00002, № 05-08-18270, № 06-08-01595.

Авторы благодарят В.М.Александрова за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айзикович С.М., Трубчик И.С. Об определении формы осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства при внедрении в него кругового штампа // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 702–705.
- [2] Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Асимптотическое решение задачи о внедрении сферического индентора в неоднородное по глубине полупространство // Изв. РАН, МТТ. 2000. № 5. С. 107–117.
- [3] Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Kalker J.J., Krenev L.I., Trubchik I.S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. № 10. pp. 2745–2772.
- [4] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
- [5] Кузнецова Т.А. Применение атомно-силовой микроскопии в методах индентирования / Сборник докладов VII Международного семинара "Методологические аспекты сканирующей зондовой микроскопии", 1–3 ноября 2006 г. Минск, Беларусь. 2006. С. 248–251
- [6] Aizikovich S.M., Celis J.-P., Krenev L.I., Serova N.A. Non-destructive mechanical characterization of mechanical properties of non-homogeneous nanostructured coatings // in G.M. Chow et al. (eds.), Nanostructured Films and Coatings, Kluwer Academic Publishers. 2000. pp. 315–322.
- [7] Трубчик И.С., Айзикович С.М., Кренев Л.И. Математически обоснованное определение механических характеристик неоднородных покрытий методом индентирования // Трение и износ. Март-апрель 2003. Т. 24. № 2. С. 126–131.

**Aizikovich S.M., Trubchik I.S., Krenev L.I., Kuznetzova T.A.** *About the homogeneous and functional-graded coating indentification by the indentation method.* It is proposed the characterization method for elastic characters for the non-homogeneous coatings, on the one hand based on the indentation methods, on the other hand on the solution of the contact problem for the parabolic indenter impact into elastic half-space. The Young modulus, which is actual for the some contact zone, can be determined for the coated materials, thereby it is some average value for surface Young modulus and deep-laid one for the material. By used changing the indenter diameter it is possible to find spectrum of the elastic modula which are typical for the counting set of contact zones. But the integral characteristic, named efficient modulus or rigidity function of the non-homogeneous foundation, can by fond from the contact problem solution for the indentation the axisymmetrical parabolic stamp into non-homogeneous coating. It realized the comparison of the nature indentation testing results with the results obtaining analytically.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ НА ДВУХСЛОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

**Александров В. М., Зарубов Д. И.**  
*Институт проблем механики РАН, Москва*

Изучена задача об устойчивости в условиях двухстороннего контакта продольно сжатой бесконечной упругой плиты на двухслойном упругом основании. Верхний слой основания описывается обычной моделью изотропной сжимаемой упругой среды. Нижний слой представляет собой изотропное несжимаемое преднапряженное силами тяжести упругое полупространство. Между верхним слоем и полупространством осуществлено полное сцепление. Найдены при различных геометрических параметрах задачи критические усилия потери устойчивости конструкции в целом.

Пусть бесконечная упругая плита толщины  $2h$  в условиях плоской деформации находится в двухстороннем контакте с двухслойным упругим основанием. Будем предполагать, что верхний слой двухслойного основания имеет толщину  $H$  и описывается обычными уравнениями линейной изотропной теории упругости с упругими характеристиками  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона и  $G$  – модуль сдвига. Нижний слой двухслойного основания представляет собой несжимаемое преднапряженное силами тяжести упругое полупространство с потенциалом Муни, описываемое уравнениями [1]

$$\begin{aligned}\mu\Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x}(q - \gamma w_1) &= 0, \quad \mu\Delta w_1 + \frac{\partial}{\partial z}(q - \gamma w_1) = 0 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \\ \sigma_x^{(1)} &= 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + q, \quad \sigma_z^{(1)} = 2\mu \frac{\partial w_1}{\partial z} + q, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\gamma = \rho g$ ,  $\rho$  – плотность материала полупространства,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\mu$  – играет роль модуля сдвига,  $q$  – давление. Между нижней границей верхнего слоя и границей полупространства предполагается осуществленным полное сцепление.

Деформацию нижней границы продольно сжатой усилием  $n$  плиты будем описывать уравнениями [2]

$$\begin{aligned}4\theta h^2 \frac{d^3}{dx^3} u^* &= -3\sigma + 4h \frac{d}{dx} \tau \\ 4\theta h^3 \frac{d^4}{dx^4} w^* + 6nh \frac{d^2}{dx^2} w^* &= -3\sigma + 3h \frac{d}{dx} \tau \\ \theta &= \frac{4G_1}{1 + \kappa_1}, \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1\end{aligned}\tag{2}$$



где  $\sigma$  и  $\tau$  – контактные напряжения, действующие между нижней поверхностью плиты и верхней поверхностью верхнего слоя.

Далее рассмотрим два варианта задачи: 1) полное сцепление между поверхностями плиты и верхнего слоя

$$u^* = u(x, H), \quad w^* = w(x, H), \quad \sigma = \sigma_z(x, H), \quad \tau = \tau_{xz}(x, H) \quad (3)$$

2) двухсторонняя связь между поверхностями плиты и верхнего слоя без сил трения

$$w^* = w(x, H), \quad \sigma = \sigma_z(x, H), \quad \tau = \tau_{xz}(x, H) = 0 \quad (4)$$

Во втором случае нужно использовать только второе уравнение (2).

Разыскивая решение первого варианта задачи в виде

$$\begin{aligned} u &= U(\alpha, z) \sin \alpha x, \quad w = W(\alpha, z) \cos \alpha x, \quad \sigma_z = \Sigma_z(\alpha, z) \cos \alpha x \\ \tau_{xz} &= T_{xz}(\alpha, z) \sin \alpha z, \quad u_1 = U_1(\alpha, z) \sin \alpha x, \quad w_1 = W_1(\alpha, z) \cos \alpha x \\ \sigma_z^{(1)} &= \Sigma_z^{(1)}(\alpha, z) \cos \alpha x, \quad \tau_{xz}^{(1)} = T_{xz}^{(1)}(\alpha, z) \sin \alpha x, \quad q = Q(\alpha, z) \cos \alpha x \end{aligned} \quad (5)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2), (3), а также граничным условиям полного сцепления верхней границы слоя с границей полупространства, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Для существования нетривиального решения этой системы определитель ее должен быть равен нулю. Представим его схематично в виде

$$f(\alpha', n', H', \kappa_1, \kappa, \theta', \mu', \gamma') = 0 \quad (6)$$

где безразмерные величины

$$\alpha' = \alpha h, \quad n' = \frac{n}{G}, \quad H' = \frac{H}{h}, \quad \theta' = \frac{4G_1}{G(1 + \kappa_1)}, \quad \mu' = \frac{\mu}{G}, \quad \gamma' = \frac{\gamma H}{G} \quad (7)$$

Далее штрихи будем опускать.

Задавая разные значения  $\alpha$ , т.е. разную длину полуволны, можем получить любое значение для безразмерного критического усилия потери устойчивости всей конструкции  $n$ . Однако существует значение  $\alpha_*$ , при котором критическое усилие  $n_*$  минимально. Значения  $\alpha_*$  и  $n_*$  соответствуют кратному корню уравнения (6) по  $\alpha$  или, что равносильно,  $\alpha_*$  и  $n_*$  могут быть одновременно найдены из системы уравнений (6) и

$$f'_\alpha(\alpha, n, H, \kappa_1, \kappa, \theta, \mu, \gamma) = 0 \quad (8)$$

Аналогично решается и второй вариант задачи.

Имея ввиду приложение к геофизике (литосферная плита толщины  $2h$  лежит на слое астеносферы толщины  $H$ , которая подстигается преднапряженным силами тяжести полупространством – мантией) далее положим

$$\kappa_1 = 2, \quad \kappa = 1.04, \quad \theta = 1333.(3), \quad \mu = 10000, \quad \gamma = 10000$$

В результате для первого и второго вариантов задачи соответственно имеем:

| $H$ | $\alpha_*$ | $n_*$ | $H$ | $\alpha_*$ | $n_*$ |
|-----|------------|-------|-----|------------|-------|
| 10  | 0.0588     | 3.848 | 10  | 0.144      | 34.00 |
| 11  | 0.0566     | 3.420 | 11  | 0.138      | 32.13 |
| 12  | 0.0548     | 3.073 | 12  | 0.134      | 30.45 |
| 13  | 0.0532     | 2.784 | 13  | 0.130      | 29.06 |
| 14  | 0.0518     | 2.543 | 14  | 0.128      | 27.85 |

Интересно отметить, что в первом варианте задачи, когда имеет место полное сцепление между плитой и основанием, критическое усилие  $n_*$  примерно в 10 раз меньше критического усилия, которое имеем место во втором варианте задачи при неучете сил трения между плитой и основанием.

Рассмотрение аналогичных осесимметричных задач приводит к тем же значениям критических усилий сжатия плиты, что и в изученном случае плоской деформации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00002)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В.М., Филиппова Л.М. Контактная задача для тяжелой полуплоскости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 535–539.
- [2] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

**Alexandrov V.M., Zarubov D.I.** *Stability of the longitudinally compressed infinite elastic plate on the two-layered elastic basis.* The problem is studied about stability of the longitudinally compressed infinite elastic plate on the two-layered elastic basis in conditions of two-sided contact. The top layer of the basis is described by conventional model of the isotropic compressible elastic medium. The bottom layer represents isotropic incompressible elastic half-space stressed by gravity forces. Between the top layer and half-space full coupling is carried out. Critical efforts of stability loss of the design in general are found at various geometrical parameters of a problem.

# ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

**Асотова Е. А., Зубов Л. М.**

*Ростовский государственный университет*

Представлено приближенное решение нелинейной проблемы кручения призматического упругого тела при малых углах закручивания. В отличие от предыдущих исследований метод возмущений Синьорини применяется не к трехмерной задаче нелинейной упругости, а к двумерной нелинейной краевой задаче на сечении цилиндрического тела.

1. Система уравнений упругого тела при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия [1]

$$\operatorname{div} \underline{\underline{D}} = 0, \quad (1)$$

определяющих соотношений и геометрических соотношений

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^T, \quad \underline{\underline{C}} = \operatorname{grad} \underline{R}, \quad \underline{R} = X_k \underline{i}_k \quad (2)$$

Здесь  $\underline{\underline{C}}$  – градиент деформации,  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – декартовы координаты деформированного тела,  $\underline{\underline{G}}$  – мера деформации Коши,  $\underline{\underline{D}}$  – несимметричный тензор напряжений Пиолы.

Будем рассматривать упругое тело в отсчетной конфигурации, имеющее форму призмы произвольного поперечного сечения. Образующие цилиндра параллельны оси  $x_3$ , а координаты  $x_1, x_2$  отсчитываются в плоскости поперечного сечения, занимающего область  $\sigma$ .

Следуя [2], рассмотрим следующее двухпараметрическое семейство деформаций призматического тела.

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(x_1, x_2) \cos \psi x_3 - u_2(x_1, x_2) \sin \psi x_3, \\ X_2 &= u_2(x_1, x_2) \cos \psi x_3 + u_1(x_1, x_2) \sin \psi x_3, \\ X_3 &= \lambda x_3 + w(x_1, x_2), \quad (\lambda, \psi = \text{const}). \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно (2) и (3) радиус-вектор деформированного тела выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{R} &= u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + (\lambda x_3 + w) \underline{i}_3, \\ \underline{e}_1 &= \underline{i}_1 \cos \psi x_3 + \underline{i}_2 \sin \psi x_3, \\ \underline{e}_2 &= -\underline{i}_1 \sin \psi x_3 + \underline{i}_2 \cos \psi x_3. \end{aligned} \quad (4)$$

На основании (2) и (3) получаем ( $\underline{e}_3 = \underline{i}_3$ )

$$\underline{\underline{C}}(x_1, x_2, x_3) = C_{sk}(x_1, x_2) \underline{i}_s \otimes \underline{e}_k \quad (5)$$

$$C_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad C_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad C_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad C_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad C_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad C_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (6)$$

$$C_{31} = -\psi u_2, \quad C_{32} = \psi u_1, \quad C_{33} = \lambda$$

В силу определяющих уравнений упругого материала  $\underline{\underline{D}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{C}}$ ,  $\underline{\underline{P}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}}$ , где  $\underline{\underline{P}}$  – симметричный тензор напряжений Кирхгофа,  $W(\underline{\underline{C}})$  – удельная потенциальная энергия деформации упругого материала, для тела, однородного по координате  $x_3$ , имеем:

$$\underline{\underline{D}}(x_1, x_2, x_3) = D_{sk}(x_1, x_2) \underline{\underline{i}}_s \otimes \underline{\underline{e}}_k.$$

С учетом этого уравнения равновесия (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} &= \psi D_{32} \\ \frac{\partial D_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} &= -\psi D_{31} \\ \frac{\partial D_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{23}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия на незагруженной боковой поверхности призмы приводятся к следующим условиям на  $\partial\sigma$ :

$$\begin{aligned} n_1 D_{11} + n_2 D_{21} &= 0 \\ n_1 D_{12} + n_2 D_{22} &= 0 \\ n_1 D_{13} + n_2 D_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

**2.** Решение проблемы кручения сводится к определению функций  $u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2(x_1, x_2)$ ,  $w(x_1, x_2)$  из системы уравнений равновесия (7) и граничных параметров  $\lambda, \psi$ . Считая угол закручивания  $\psi$  малым, будем искать решение в виде отрезка степенного ряда по  $\psi$ . Из физических соображений следует, что функции  $u_1, u_2$  в (4) будут четными функциями от  $\psi$ , а  $w$  – нечетной от  $\psi$ . Поэтому решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta x_1 + \psi^2 u(x_1, x_2) + \dots \\ u_2 &= \beta x_2 + \psi^2 v(x_1, x_2) + \dots \\ w &= \psi w_0(x_1, x_2) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Многоточием обозначены члены третьего и более высокого порядка относительно  $\psi$ , которые отброшены.

Будем использовать модель полуплинейного материала [1]:

$$\underline{\underline{D}} = 2\mu \left[ \left( \frac{\nu S_1}{1 - 2\nu} - 1 \right) \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}} \right], \quad S_1 = \text{tr} \underline{\underline{U}} - 3, \quad \underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^T)^{1/2}, \quad (10)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Постоянная  $\lambda$  считается заданной, а постоянная  $\beta$  находится из условия, что  $D_{11} = D_{22} = 0$  при  $\psi = 0$ . Отсюда, используя (4) и (10), получаем:  $\beta = 1 - \nu(\lambda - 1)$ .

**3.** Далее будем рассматривать случай, когда  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ . Найдем разложение тензора растяжения  $\underline{U} = (\underline{C} \cdot \underline{C}^T)^{1/2}$  и обратного тензора  $\underline{U}^{-1} = \underline{V}$ , используя (9).

После этого с учетом (10) вычислим компоненты тензора  $\underline{D}$ :

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= 2\mu\psi^2 \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) \right), \\
 D_{22} &= 2\mu\psi^2 \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8}x_1^2 \right) \right), \\
 D_{12} &= 2\mu\psi^2 \left( \frac{\partial v}{2\partial x_1} + \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \\
 D_{21} &= 2\mu\psi^2 \left( \frac{\partial v}{2\partial x_1} + \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1x_2 - \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \\
 D_{31} &= D_{13} = \mu\psi \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad D_{32} = D_{23} = \mu\psi \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + x_1 \right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Разлагая при помощи (11) левые части уравнений (7) и краевых условий (8) в ряды по  $\psi$  и приравнявая нулю коэффициенты при  $\psi$  и  $\psi^2$ , получим следующие краевые задачи:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} = 0 \tag{12}$$

$$n_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + n_2 x_1 - n_1 x_2 = 0, \text{ на } \partial\sigma \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{2\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{2\partial x_2 \partial x_1} = \\
 &- \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \\
 &- \left( \frac{1}{4} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}x_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \right. \\
 &\left. + \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} - \frac{5}{8}x_2 + \frac{5}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \\
 &\frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{2\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{2\partial x_1 \partial x_2} = \\
 &- \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2 \partial x_1} \right) - \\
 &- \left( \frac{1}{4} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} - \right. \\
 &\left. - \frac{3}{8}x_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{8}x_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} - \frac{5}{8}x_1 - \frac{5}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\nu}{1-2\nu} n_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \left( \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{\partial v}{2\partial x_1} \right) = \\
 &- \left( \frac{\nu}{1-2\nu} n_1 \left( \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \right. \\
 &\left. + n_1 \left( \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) + n_2 \left( \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{8}x_1x_2 - \frac{3}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) \right), \text{ на } \partial\sigma \\
 &\frac{\nu}{1-2\nu} n_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + n_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + n_1 \left( \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{\partial v}{2\partial x_1} \right) = \\
 &- \left( \frac{\nu}{1-2\nu} n_2 \left( \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + n_2 \left( \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) + \right. \\
 &\left. + n_1 \left( \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) \right), \text{ на } \partial\sigma
 \end{aligned} \tag{15}$$

Краевая задача (12), (13) – это известная задача [3] для функции депланации в линейной теории кручения. Если функция  $w_0$  найдена, то становятся известными правые части в уравнениях и краевых условиях задачи (14), (15).

4. Легко проверить, что левые части уравнений равновесия (14) и граничных условий (15) идентичны уравнениям и граничным условиям плоской задачи линейной теории упругости для изотропного тела. Таким образом (14) и (15) примут следующий вид:

$$\text{в } \sigma: \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{b}}$$

$$\text{на } \partial\sigma: \underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{f}},$$

где  $\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{f}}$  – правые части (14), (15),  $\underline{\underline{T}}$  – тензор напряжений линейной теории упругости.

Необходимое условие разрешимости задачи (14), (15) состоит в требовании самоуравновешенности указанной системы внешних сил:

$$\iint_{\sigma} \underline{\underline{b}} d\sigma + \oint_{\partial\sigma} \underline{\underline{f}} ds = 0, \quad \iint_{\sigma} \underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{b}} d\sigma + \oint_{\partial\sigma} \underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{f}} ds = 0 \quad (16)$$

Докажем, что условия (16) выполняются в силу свойств решения линейной задачи о кручении. Применяя формулу Грина к (16), с учетом граничных условий (8) имеем:

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8} x_1 x_2 + \frac{3}{8} x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \right. \\ & \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{8} x_1^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) \right) d\sigma - \\ & - \oint_{\partial\sigma} \frac{\nu}{1-2\nu} n_2 \left( \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \\ & + n_2 \left( \frac{1}{8} x_1^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) + n_1 \left( \frac{1}{8} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8} x_1 x_2 + \frac{3}{8} x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8} x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) \\ & = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - x_2 \right) d\sigma = \iint_{\sigma} D_{31} d\sigma \end{aligned} \quad (17)$$

Точно так же получаем второе равенство с интегралом  $\iint_{\sigma} D_{32} d\sigma$  в правой части

Главный вектор  $\underline{\underline{F}}$  сил в сечении стержня на основании того что  $\underline{\underline{D}}(x_1, x_2, x_3) = D_{sk}(x_1, x_2) \underline{\underline{i}}_s \otimes \underline{\underline{e}}_k$ , выглядит следующим образом:

$$\underline{\underline{F}}(x_3) = \iint_{\sigma} \underline{\underline{i}}_1 \cdot \underline{\underline{D}} d\sigma = F_1 \underline{\underline{e}}_1 + F_2 \underline{\underline{e}}_2 + F_3 \underline{\underline{e}}_3 \quad (18)$$

$$F_k = \iint_{\sigma} D_{3k} d\sigma \quad (k = 1, 2).$$

Необходимое условие равновесия  $\underline{\underline{F}}(a) = \underline{\underline{F}}(b)$  части призмы, ограниченной боковой поверхностью и сечениями  $x_3 = a, x_3 = b$ ,  $a, b$  (произвольные действительные числа, согласно (4),(18) приводит к равенствам

$$s_1 F_1 - s_2 F_2 = 0, \quad s_2 F_1 + s_1 F_2 = 0,$$

$$s_1 = \cos \psi a - \cos \psi b, \quad s_2 = \sin \psi a - \sin \psi b$$

Определитель этой системы относительно  $F_1, F_2$  отличен от нуля, следовательно,  $F_1 = F_2 = 0$  т. е.

$$\begin{aligned} \iint D_{32} d\sigma &= 0, \\ \iint_{\sigma} D_{31} d\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для второго уравнения из (14), (18), получим:

$$\iint_{\sigma} (x_1 e_1 + x_2 e_2) \times \underline{b} d\sigma + \int_{\partial\sigma} (x_1 e_1 + x_2 e_2) \times \underline{f} ds = 0,$$

то есть условия самоуравновешенности выполнено.

Таким образом, исследование нелинейных эффектов второго порядка при кручении стержня сведено к решению плоской задачи линейной теории упругости с известными массовыми и поверхностными нагрузками.

**5.** В частном случае, когда контуром поперечного сечения является эллипс, уравнения (12), (14) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{2\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{2\partial x_2 \partial x_1} &= -\frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2} + A + \frac{1}{2} A^2 \right) x_2 - \left( \frac{1}{8} A^2 + \right. \\ &+ \left. A - \frac{5}{8} \right) x_2, \\ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{2\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{2\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2} - A + \frac{1}{2} A^2 \right) x_1 - \left( \frac{1}{8} A^2 - \right. \\ &- \left. A - \frac{5}{8} \right) x_1, \\ \frac{\nu}{1-2\nu} n_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \left( \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{\partial v}{2\partial x_1} \right) &= -\left( \frac{\nu}{1-2\nu} n_1 \left( \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{2} A x_2^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} A^2 x_1^2 - \frac{1}{2} A x_1^2 \right) + n_1 \left( \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{4} A + \frac{1}{8} \right) x_2^2 + n_2 \left( \frac{1}{8} A^2 - \frac{1}{2} A - \frac{1}{8} \right) x_1 x_2, \\ \frac{\nu}{1-2\nu} n_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + n_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + n_1 \left( \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{\partial v}{2\partial x_1} \right) &= -\left( \frac{\nu}{1-2\nu} n_2 \left( \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{2} A x_2^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} A^2 x_1^2 - \frac{1}{2} A x_1^2 \right) + n_2 \left( \frac{1}{8} A^2 - \frac{1}{4} A + \frac{1}{8} \right) x_1^2 + n_1 \left( \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{2} A - \frac{1}{8} \right) x_1 x_2, \\ A &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Здесь  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [2] Zubov L.M. Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 827–831.
- [3] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

**Asotova E.A., Zubov L.M.** *The second-order effect at the theory of torsion for elastic bodies of a prismatic form.* The approximate solution of the nonlinear problem of small angle torsion for elastic prismatic body is presented. Different of previous researches, the Signorini method is applied now not to three - dimension problem of a nonlinear elasticity, but for two-dimension nonlinear boundary - value problem at a cross section of a cylindrical body.

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

**Ахметов Н. К.\* , Устинов Ю А.\*\***

\* *Бакинский госуниверситет (Азербайджан)*

\*\* *Ростовский государственный университет*

Доклад посвящен обзору результатов анализа решений трехмерных статических задач теории упругости для многослойных пластин и оболочек с чередующимися жесткими и мягкими слоями.

Хорошо известно, что одним из фундаментальных положений классической теории пластин и оболочек, основанной на гипотезе единой нормали, является принцип Сен-Венана. Однако уже в середине прошлого века с внедрением в авиационном строительстве трехслойных конструкций с легким наполнителем появились иные подходы к построению прикладных теорий таких элементов. Впоследствии эти подходы были применены для построения прикладных теорий многослойных конструкций. Общее признание получили два подхода. В первом подходе построение двумерных теорий основывалось на кинематических гипотезах для каждого отдельного слоя. Во втором – вывод двумерных уравнений опирался на принятие гипотез для всего пакета в целом. Наличие нескольких вариантов прикладных теорий, практически полное отсутствие данных по сравнительному анализу поставили весьма остро вопрос об исследовании трехмерных задач теории упругости для многослойных элементов конструкций строгими математическими методами. Первыми такими работами стали [1, 2]. В этих работах путем асимптотического интегрирования трехмерных уравнений впервые было указано на возможное нарушение принципа Сен-Венана в его классической формулировке. Для многослойных плит эта проблема достаточно полно была исследована в докторской диссертации одного из авторов данной работы и только часть результатов была анонсирована в [3, 4]. В дальнейшем, подходы и методы, разработанные в диссертации, получили свое дальнейшее развитие при исследовании различных задач для многослойных элементов из электроупругих материалов [5]– [7], трехслойной сферической оболочки [8], многослойной цилиндрической оболочки [9]– [12] и др.

Основная цель данного сообщения — дать краткое описание математического аппарата, с помощью которого были установлены некоторые особенности решений трехмерных задач для сильно неоднородных слоистых конструкций. Эти особенности вытекают из анализа спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро изменяющимися кусочно-постоянными коэффициентами, возникающими в результате применения метода однородных решений для анализа НДС слоистых плит, цилиндрических и сферических оболочек. Ниже математический аппарат и некоторые результаты исследования излагаются на примере так называемой "вихревой задачи" для слоистой плиты.



Рассмотрим многослойную плиту с числом слоев  $n = 2r - 1$ . Будем считать, что плита составлена из чередующихся жестких и мягких слоев, при этом предполагается, что внешние слои жесткие. Перенумеруем слои таким образом, чтобы жесткие слои имели нечетные номера ( $j = 1, 3, \dots, n$ ), а мягкие — четные ( $i = 2, 4, \dots, n - 1$ ). Для простоты предположим, что упругие свойства всех жестких и, соответственно, всех мягких одинаковы, т.е.

$$\begin{aligned} G_1 = G_3 = \dots = G_n = G_{\text{Ж}}, \quad \nu_1 = \nu_3 = \dots = \nu_n = \nu_{\text{Ж}}, \\ G_2 = G_4 = \dots = G_{n-1} = G_{\text{М}}, \quad \nu_2 = \nu_4 = \dots = \nu_{n-1} = \nu_{\text{М}}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $h_s$  — толщину слоя с номером  $s$ , а через  $2h$  — толщину плиты. Введем безразмерные толщины  $\omega_s = h_s/h$ . Начало координат свяжем со срединной поверхностью  $S$  и введем безразмерные координаты соотношениями  $x_\alpha = a\xi_\alpha$ ,  $x_3 = h\zeta$ , где  $x_\alpha \in S$ , ( $\alpha = 1, 2$ ),  $x_3 \in [-h, h]$ .

Будем считать, что лицевые поверхности  $\zeta = \pm 1$  свободны от напряжений, а поле смещений отыщем в виде

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \psi(\zeta)\partial_2 n(\xi), \quad u_2(\xi_1, \xi_2, \zeta) = -\psi(\zeta)\partial_1 n(\xi), \quad u_3 \equiv 0, \\ (\epsilon^2 \Delta - \delta^2)n(\xi) = 0, \end{aligned}$$

где  $\epsilon$  — безразмерная толщина,  $\delta$  — спектральный параметр задачи

$$T = \delta^2 \psi, \quad T = [-(G\psi)'], \quad \psi'(\pm 1) = 0, \quad (1)$$

которая эквивалентна следующей задаче сопряжения

$$\psi_s'' + \delta^2 \psi_s = 0, \quad \psi = \psi_s \quad (\text{при } \zeta \in \omega_s^*), \quad (2)$$

$$\psi_1'(-1) = 0 = \psi_n'(1), \quad (3)$$

$$\psi_s(\frac{\omega_s}{2}) = \psi_{s+1}(-\frac{\omega_{s+1}}{2}), \quad G_s \psi_s'(\frac{\omega_s}{2}) = G_{s+1} \psi_{s+1}'(-\frac{\omega_{s+1}}{2}). \quad (4)$$

Здесь (2) соответствует условию отсутствия напряжений на торцах плиты, а равенства (3), (4) вытекают из условия непрерывности перемещений и напряжений на поверхности стыка двух слоев.

Обозначим через  $\Lambda(p)$  спектр оператора  $T$ , где  $p = G_{\text{М}}/G_{\text{Ж}}$ . Поскольку этот оператор положительный, то все его собственные значения (СЗ)  $\lambda_k = \delta_k^2 \geq 0$  неотрицательны, и  $\lambda_0 = 0$  является СЗ, которому соответствует собственная функция (СФ)  $\psi_0 = \text{const}$ .

Для того, чтобы исследовать структуру  $\Lambda(p)$  при малых  $p$  будем различать два случая:

А) условие  $p \rightarrow 0$  эквивалентно  $G_{\text{М}} \rightarrow 0$ ,  $G_{\text{Ж}}$  — фиксирован;

В) условие  $p \rightarrow 0$  эквивалентно  $G_{\text{Ж}} \rightarrow \infty$ ,  $G_{\text{М}}$  — фиксирован.

Эти два случая требуют различных подходов к анализу эквивалентной задачи сопряжения (1)–(3). Не останавливаясь на технических приемах, поясним суть результатов.

В случае А задача сопряжения сводится к алгебраической системе вида

$$\mathcal{A}(\delta, p)\vartheta \equiv \mathcal{A}_0(\delta)\vartheta + p\mathcal{A}_1(\delta)\vartheta = 0,$$

где  $\vartheta$  —  $2r$ -мерный вектор,  $\mathcal{A}_0(\delta)$ ,  $\mathcal{A}_1(\delta)$  — блочные матрицы ( $2r \times 2r$ ), элементы которых являются мероморфными функциями спектрального параметра  $\delta$ .

Предельному случаю  $p = 0$  отвечает структура из  $r$  несвязанных между собой жестких слоев, лицевые поверхности которых свободны от напряжений. Поэтому из анализа характеристического уравнения

$$\det(\mathcal{A}_0(\delta)) = 0$$

вытекает, что предельный спектр  $\Lambda_{\text{Ж}}(0)$  в случае А состоит из объединения спектров  $\Lambda_j(0)$ ,  $j = 1, 3, \dots, n$ , при этом каждое такое множество состоит из двукратного СЗ  $\delta_0 = 0$  и счетного множества СЗ  $\delta_{jk}^{\pm}(0) = \pm k\pi/\omega_j$ ,  $k = 1, \dots$

Выявленная структура предельного спектра позволяет методами теории возмущений установить, что при малых значениях  $p$   $\Lambda(p)$  состоит:

- 1) из двукратного СЗ  $\delta_0 = 0$ ;
- 2) из  $2(r - 1)$  СЗ вида

$$\delta_l^{\pm} = \pm p^{1/2}(\eta_l + O(p)), \quad l = 1, \dots, r - 1. \quad (5)$$

Здесь  $\eta_l^2$  являются СЗ задачи

$$\mathcal{A}_0\mathbf{x} - \eta^2\mathcal{A}_1\mathbf{x} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_r]$  —  $r$ -мерный вектор,  $\mathcal{A}_1 = \text{diag}(\omega_j)$ ,  $\mathcal{A}_0$  — неотрицательная якобиева матрица

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \left\| \begin{array}{cccccc} \omega_2^{-1} & -\omega_2^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_2^{-1} & \omega_2^{-1} + \omega_4^{-1} & -\omega_4^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_{n-1}^{-1} & \omega_{n-1}^{-1} \end{array} \right\|$$

$$\delta_{sk}^{\pm} = \pm k\pi/\omega_s(1 + O(p^\alpha)), \quad s = 1 \dots n, k = 1, \dots \quad (7)$$

и СЗ с нечетными  $s$  отвечают жестким слоям, с четными — мягким. Обозначим эти множества соответственно  $\Lambda_{\text{В}}^j(p)$  и  $\Lambda_{\text{В}}^i(p)$ . Множество СЗ вида (5) обозначим через  $\Lambda_{\text{Н}}(p)$  и назовем нижней частью спектра. Объединение множеств  $\Lambda_{\text{В}}^j(p)$ ,  $\Lambda_{\text{В}}^i(p)$  обозначим через  $\Lambda_{\text{В}}(p)$  и назовем верхней частью спектра.

Приведем некоторые результаты анализа структуры собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, предварительно заметив, что каждой паре СЗ  $(\delta_{sk}^+, \delta_{sk}^-)$  соответствует одна и та же СФ.

- 1) СЗ  $\delta_0 = 0$  отвечает СФ  $\psi_0(\zeta) = \text{const}$  по всему поперечному сечению плиты;
- 2) Ненулевым СЗ задачи (6) из  $\Lambda_{\text{Н}}(p)$  отвечают ступенчатые СФ, значения которых остаются постоянными в каждом жестком слое, и изменяются по линейному закону в каждом слое;

- 3) Распределения СФ по толщине, отвечающих  $\Lambda_B(p)$  зависит, главным образом, от двух факторов: во-первых, от того, какому из множеств  $\Lambda_B^j$  или  $\Lambda_B^i$  принадлежит СЗ; во-вторых, есть ли среди предельных значений СЗ кратные или нет.

Так, например, если  $\delta \in \Lambda_B^i$  и является простым СЗ, то СФ локализуется в соответствующем мягком слое. Если предельное значение  $\delta \in \Lambda_B^j$  и является простым СЗ, то в этом случае СФ локализуется в соответствующем жестком слое и окружающих его двух мягких.

В случае наличия кратных предельных СЗ картина распределения СФ становится более сложной. Как следует из формулы (7), такие случаи возникают, когда для двух или нескольких слоев отношения  $\lambda_{sk} = k/\omega_s$  становятся равными. Следует заметить, что для периодических структур  $\lambda_{sk}$  одинаковы как для жестких, так и для мягких слоев. Поэтому для таких структур все СФ, отвечающие  $\Lambda_B$ , оказываются "размазанными" по всей толщине плиты.

Аналогичные результаты были недавно получены Н.К. Ахметовым при исследовании задачи кручения многослойной сферической оболочки. Описанной структурой обладает спектр и СФ "потенциальной задачи". Главное отличие состоит только в том, что нулевое СЗ значение становится шестикратным.

НДС, построенное по совокупности ЭР "вихревой и потенциальной" задач, отвечающих нулевому СЗ, имеет линейный закон распределения по толщине плиты. НДС, построенное по совокупности ЭР, отвечающих нижней части спектра обеих задач имеет кусочно-линейное распределение по толщине. Оно может быть определено на основе прикладной теории [13]–[14], согласно которой НДС каждого жесткого слоя удовлетворяет гипотезам Кирхгоффа, а мягкие слои выполняют роль винклеровских оснований, "работающих" на сдвиг. При этом НДС, отвечающее ненулевым СЗ слабо затухает по мере удаления от боковой поверхности плиты, что приводит к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке. НДС, отвечающее верхней части спектра  $\delta_{jk} \in \Lambda_B(p)$ , самоуравновешено по толщине и локализуется в окрестности боковых поверхностей и соответствует классическому принципу Сен-Венана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-000-69).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гусейн-Заде М.И. К построению теории изгиба слоистых пластинок // ПММ, 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 232–243.
- [2] Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // ПММ, 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 870–876.

- [3] Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР, 1974. Т. 216, № 4. С. 755–758.
- [4] Устинов Ю.А. О структуре погранслоя слоистых плитах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 325–328.
- [5] Гетман И.П., Устинов Ю.А. К теории неоднородных электроупругих плит // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 923–932.
- [6] Гетман И.П., Устинов Ю.А. Распространение волн в поперечно-неоднородных волноводах // Акуст. журнал. 1985. Т. 31, № 3. С. 314–319.
- [7] Гетман И.П., Рябов А.П., Устинов Ю.А. О возможностях метода осреднения в задаче о распространении волн в электроупругом слое с периодической неоднородностью по толщине // Изв АН СССР, МТТ, 1987, № 3. С.1118–125.
- [8] Боев Н.В., Устинов Ю.А. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 136–143.
- [9] Ахметов Н.К., Устинов Ю.А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра //ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 264–268.
- [10] Ахметов Н.К., Устинов Ю.А. Анализ структуры погранслоя в слоистом цилиндре //Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1989. № 1. С. 14–18.
- [11] Ахметов Н.К., Устинов Ю.А. Крутильные колебания и волны в слоистом цилиндре //Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 92–98.
- [12] Ахметов Н.К. Анализ пограничного слоя в осесимметричной задаче теории упругости для радиально-слоистого цилиндра и распространения осесимметричных волн //ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 863–872.
- [13] Болотин Н.К. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 61–66.
- [14] Болотин Н.К., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.

**Ahmetov N.K., Ustinov Yu. A.** *On distinctive feature stressedly-deformed state of strongly nonhomogeneous laminated plates and shells.* This paper is a brief review of result's analysis of tree-dimensional static problems of theory of elasticity for nonhomogeneous laminated plates and shells with alternate (rigid and soft) layers.

# ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ: МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ

**Бай А. В., Сторожев В. И., Шпак В. А.**  
*Донецкий национальный университет, Украина*

Предложена методика построения полиномиального уравнения для скоростей поверхностных электроупругих волн в ортотропном пьезокристаллическом полупространстве, основанная на теории симметрических многочленов. Полученная форма дисперсионного уравнения является качественно более эффективной для численного анализа по сравнению с классической формой уравнения, содержащего корни характеристического полинома Кристоффеля.

Классическое уравнение для поверхностных упругих волн Рэлея в изотропном полупространстве помимо исходной формы может быть преобразовано в форму полиномиального алгебраического уравнения четвертой степени [1], что облегчает его численный анализ. При усложнении моделей распространения поверхностных волн в деформируемом полупространстве с учетом механической анизотропии материалов, сопряженных физических полей, получаемые дисперсионные уравнения становятся все более сложными для численного анализа, а зависимости их корней от физико-механических параметров характеризуются нарастающей неустойчивостью [2, 3].

В работе [4] был предложен способ перехода от классической формы дисперсионного уравнения для скоростей поверхностных волн с произвольным направлением распространения в ограниченном одной из поверхностей упругой симметрии прямолинейно-ортотропном полупространстве к полиномиальной форме.

В данной статье методология использования преобразований, основывающихся на теории симметрических многочленов, распространена на качественно более сложный вариант задачи об определении скоростей связанных электроупругих поверхностных волн вдоль границы пьезокристаллического полупространства класса 222 орторомбической системы.

**Постановка и построение решения задачи.** Рассматривается пьезокристаллическое полупространство из ортотропного пьезоактивного кристалла класса 222, занимающее в прямоугольных декартовых координатах область  $x_3 \leq 0$ . Граничная поверхность полупространства  $x_3 = 0$  по предположению свободна от механических напряжений и имеет тонкое безинерционное электродное покрытие, т. е. на ней для компонент тензора механических напряжений  $\sigma_{ij}$  и потенциала квазистатического электрического поля  $\varphi$  выполняются граничные условия

$$\sigma_{3j} \Big|_{x_3=\pm h} = 0 \quad \varphi \Big|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (1)$$

Процессы распространения связанных электроупругих волн в рассматриваемой пьезоактивной среде описываются тензорными уравнениями движения

$$\begin{cases} c_{ijkl}^E U_{i,jl} + e_{mkl} \varphi_{,ml} & = \rho \ddot{U}_k, \\ 4\pi e_{nij} U_{i,jn} - \varepsilon_{mn}^S \varphi_{,mn} & = 0, \end{cases} \quad (i, j, k, l, m = \overline{1,6}) \quad (2)$$

в которых  $U_j$  – компоненты вектора динамических упругих перемещений;  $c_{ijkl}^E$  – модули упругости монокристалла, измеренные при постоянном электрическом поле;  $e_{ijk}$  – пьезоэлектрические постоянные;  $\varepsilon_{ij}$  – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянных механических деформациях. Тензорная форма соотношений связи компонент тензора механических напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора индукции электрического поля  $D_i$  с характеристиками  $U_j$  и  $\varphi$  имеет вид [2, 5]

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E (U_{i,j} + U_{j,i}) + e_{mkl} \varphi_{,m}, \quad D_n = -\varepsilon_{mn}^S \varphi_{,m} + 2\pi e_{nij} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (3)$$

На основании соотношений (1)–(3) ставится задача о существовании и определении фазовых скоростей связанных электроупругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль произвольного направления на граничной плоскости  $x_3 = 0$  рассматриваемого полупространства.

**Получение классической формы дисперсионного уравнения.** Для компонент вектора волновых перемещений и потенциала квазистатического электрического поля в трехпарциальной гармонической электроупругой поверхностной волне, распространяющейся вдоль направления, характеризующегося вектором  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  в плоскости  $x_3 = 0$ , вводятся представления

$$\begin{aligned} U_j(x_1, x_2, x_3, t) &= f_j(x_3) e^{-I(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))} \quad (j = \overline{1,3}) \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= f_4(x_3) e^{-I(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка этих представлений в уравнения (2) приводит к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитудных функций  $f_j(x_3)$  ( $j = \overline{1,4}$ ), характеристическое уравнение которой представимо в виде

$$a_4 \lambda^8 + a_3 \lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_0 = 0. \quad (5)$$

Описывающее поверхностную волну решение этой системы со свойствами  $f_j(x_3) \rightarrow 0$  при  $x_3 \rightarrow -\infty$ , может быть представлено в виде

$$f_j(x_3) = \sum_{i=1}^4 [g_{ij} A_i \exp(\lambda_i x_3)] \quad (j = \overline{1,4}), \quad (6)$$

где  $A_i$  – произвольные постоянные;  $\lambda_i$  – подмножество корней  $\pm \lambda_i$  уравнения (5), обладающих свойством  $\text{Re} \lambda_i \geq 0$ ;  $g_{ji}$  – компоненты собственных векторов  $\vec{g}_i$  расширенной матрицы Кристоффеля для среды рассматриваемого класса, соответствующих значениям  $\lambda_i$ .

Использование представлений (4), (6) в граничных условиях (1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно  $A_i$ , а искомая дисперсионная функция для исследуемых волн в классической форме является определителем матрицы  $\|s_{ji}\|$  указанной однородной системы с элементами, имеющими

структуру

$$\begin{aligned} s_{1i} &= \lambda_i^6 + \beta_{12}\lambda_i^4 + \beta_{14}\lambda_i^2 + \beta_{16}, & s_{2i} &= \lambda_i^6 + \beta_{22}\lambda_i^4 + \beta_{24}\lambda_i^2 + \beta_{26}, \\ s_{3i} &= \lambda_i(\lambda_i^6 + \beta_{32}\lambda_i^4 + \beta_{34}\lambda_i^2 + \beta_{36}), & s_{4i} &= \lambda_i^4 + \beta_{42}\lambda_i^2 + \beta_{44}, \end{aligned} \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (7)$$

где  $\beta_{mn}$  – функциональные коэффициенты, не зависящие от  $\lambda_i$ .

Дисперсионное уравнение

$$|s_{ij}| = 0 \quad (8)$$

является чрезвычайно громоздким и включает в себя в явном виде корни  $\lambda_i$  биквадратного характеристического уравнения (5). Численный анализ такого уравнения достаточно сложен ввиду отмеченной во многих работах высокой степени неустойчивости значений дисперсионной функции по отношению к погрешности вычислений.

**Полиномиальная форма дисперсионного уравнения.** Дисперсионное уравнение (8) путем специальных преобразований при заданном волновом числе  $k$  может быть представлено в виде многочлена относительно круговой частоты  $\omega$  поверхностной волны с коэффициентами, не содержащими корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения (5).

Введем в рассмотрение симметрические многочлены, образованные из величин  $\lambda_i$  и  $\lambda_i^2$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, & \sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_2 + \lambda_4\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4, \\ \sigma_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4, & \sigma_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2, & \Sigma_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^2 + \lambda_4^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_4^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2, \\ \Sigma_3 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_4^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_4^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_4^2, & \Sigma_4 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Симметрические многочлены  $\Sigma_i$  с учетом соотношений Виета выражаются через коэффициенты  $a_i$  характеристического уравнения (5), а симметрические многочлены  $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$  с использованием соотношений

$$\sigma_1^2 = 2\sigma_2 + \Sigma_1, \quad \sigma_2^2 = 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4 + \Sigma_2, \quad \sigma_3^2 = 2\sigma_2\sigma_4 + \Sigma_3, \quad \sigma_4^2 = \Sigma_4, \quad (11)$$

могут быть выражены через  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{F(\sigma_2)}{2G(\sigma_2)\sigma_2} + \frac{G(\sigma_2)(\sigma_2^3 - \Sigma_2\sigma_2 - \Sigma_3)}{2\sigma_2 F(\sigma_2)}, & \sigma_3 &= \frac{F(\sigma_2)}{G(\sigma_2)}, & \sigma_4 &= \frac{F(\sigma_2)^2}{2G(\sigma_2)^2\sigma_2} - \frac{\Sigma_3}{2\sigma_2}, \\ F(\sigma_2) &= \sqrt{-\sigma_2^5 + 2\Sigma_2\sigma_2^3 - 2\Sigma_3\sigma_2^2 - \Sigma_2^2\sigma_2 - 4\Sigma_4\sigma_2 + 2\Sigma_2\Sigma_3}, \\ G(\sigma_2) &= \sqrt{6\sigma_2^2 + 4\Sigma_1\sigma_2 + 2\Sigma_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дисперсионный определитель (8) при его последовательном построчном разложении вида

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_1^6 + \beta_{12}\lambda_1^4 + \beta_{14}\lambda_1^2 + \beta_{16} & \dots & s_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{41} & \dots & s_{44} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda_1^6 & \dots & s_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{41} & \dots & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{12}\lambda_1^4 & \dots & s_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{41} & \dots & s_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \beta_{14}\lambda_1^2 & \dots & s_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{41} & \dots & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{16} & \dots & s_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{41} & \dots & s_{44} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

приводится к представлению

$$W = (\alpha_1\sigma_4^2 + \alpha_2)W_{124} + \alpha_3W_{126} + \alpha_4\sigma_4W_{135} + \alpha_5W_{146} + (\alpha_6\sigma_4^2 + \alpha_7)W_{234} + \alpha_8W_{236} + (\alpha_9\sigma_4^2 + \alpha_{10})W_{245} + \alpha_{11}W_{247} + \alpha_{12}W_{267} + \alpha_{13}W_{346} + \alpha_{14}W_{456} + \alpha_{15}W_{467} = 0, \quad (13)$$

где

$$W_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^i & \lambda_2^i & \lambda_3^i & \lambda_4^i \\ \lambda_1^j & \lambda_2^j & \lambda_3^j & \lambda_4^j \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \lambda_3^k & \lambda_4^k \end{vmatrix}, \quad (14)$$

и  $\alpha_i$  – коэффициенты, не зависящие от  $\lambda_i$ . В свою очередь определители  $W_{ijk}$  являются произведением определителя Вандермонда  $W = W_{123}$  на симметрический многочлен, выраженный через элементарные симметрические многочлены  $\sigma_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ):

$$\begin{aligned} W_{124} &= W \sigma_1, & W_{126} &= W (\sigma_1^3 - 2\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3), & W_{135} &= W (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3), \\ W_{146} &= W (-\sigma_3\sigma_1^2 + \sigma_2^2\sigma_1 + \sigma_4\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3), & W_{234} &= W \sigma_3, \\ W_{236} &= W (\sigma_3\sigma_1^2 - \sigma_4\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3), & W_{245} &= W (\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4), \\ W_{247} &= W (-\sigma_4\sigma_1^3 + \sigma_2\sigma_3\sigma_1^2 - \sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_4\sigma_1 - \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4), \\ W_{256} &= W (\sigma_3\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_4\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_4), \\ W_{267} &= W (\sigma_3\sigma_2^3 - \sigma_1\sigma_4\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3^2\sigma_2 + \sigma_3^3 - \sigma_1\sigma_4^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3\sigma_4), \\ W_{346} &= W (\sigma_1\sigma_3^2 - \sigma_4\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2\sigma_4), & W_{456} &= W (\sigma_3^3 - 2\sigma_2\sigma_4\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4^2), \\ W_{467} &= W (\sigma_2\sigma_3^3 - \sigma_1\sigma_4\sigma_3^2 + \sigma_4^2\sigma_3 - 2\sigma_2^2\sigma_4\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_4^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения (15) с учетом (11) могут быть далее упрощены и приведены к виду

$$\begin{aligned} W_{124} &= W \sigma_1, & W_{126} &= W (\sigma_3 + \sigma_1\Sigma_1), & W_{135} &= W (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3), \\ W_{146} &= W (\sigma_2\sigma_3 + \Sigma_1\sigma_3 + \sigma_1(\Sigma_2 - \sigma_4)), & W_{234} &= W \sigma_3, \\ W_{236} &= W (\sigma_2\sigma_3 + \Sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4), & W_{245} &= W (\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4), \\ W_{247} &= W (\sigma_3(-\sigma_4 + \sigma_2\Sigma_1 + \Sigma_2) + \sigma_1(\sigma_2\sigma_4 - \Sigma_1\sigma_4 + \Sigma_3)), \\ W_{256} &= W (\sigma_3(\Sigma_2 - \sigma_4) + \sigma_1(\sigma_2\sigma_4 + \Sigma_3)), \\ W_{267} &= W (\sigma_2\sigma_3\Sigma_2 + \sigma_3\Sigma_3 + \sigma_1(\Sigma_4 - \sigma_4\Sigma_2)), \\ W_{346} &= W (\sigma_1(\sigma_2\sigma_4 + \Sigma_3) - \sigma_3\sigma_4), & W_{456} &= W (\sigma_3\Sigma_3 + \sigma_1\Sigma_4), \\ W_{467} &= W (\sigma_2\sigma_3\Sigma_3 - \sigma_1\sigma_4\Sigma_3 + \sigma_3\Sigma_4). \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношений (11) может быть получено уравнение вида  $P(\sigma_2) = 0$ . Подстановка зависимостей (12) и (16) в уравнение (13) приводит к уравнению  $Q(\sigma_2) = 0$ .

$$\begin{aligned} P(\sigma_2) &= \sigma_2^8 + P_6\sigma_2^6 + P_5\sigma_2^5 + P_4\sigma_2^4 + P_3\sigma_2^3 + P_2\sigma_2^2 + P_1\sigma_2 + P_0 = 0 \\ Q(\sigma_2) &= \sigma_2^9 + Q_8\sigma_2^8 + Q_7\sigma_2^7 + Q_6\sigma_2^6 + Q_5\sigma_2^5 + Q_4\sigma_2^4 + Q_3\sigma_2^3 + Q_2\sigma_2^2 + Q_1\sigma_2 + Q_0 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} P_6 &= -4\Sigma_2 & P_5 &= -16\Sigma_3 & P_4 &= 6\Sigma_2^2 - 8(\Sigma_1\Sigma_3 + 17\Sigma_4) \\ P_3 &= 32(\Sigma_2\Sigma_3 - 6\Sigma_1\Sigma_4) \\ P_2 &= -4(\Sigma_2^3 - 4\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_2 - 16\Sigma_3^2 + 4(4\Sigma_1^2 + 7\Sigma_2)\Sigma_4) \\ P_1 &= -16\Sigma_3(\Sigma_2^2 - 4\Sigma_1\Sigma_3) - 64(\Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_3)\Sigma_4 \\ P_0 &= \Sigma_2^4 - 8(\Sigma_1\Sigma_3 + \Sigma_4)\Sigma_2^2 + 16(\Sigma_4 - \Sigma_1\Sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (18)$$



Любое  $\hat{\sigma}_2$ , которое является корнем уравнения  $P(\sigma_2) = 0$ , также является симметрической комбинацией корней характеристического уравнения (5), и, следовательно, обращает в ноль выражение  $Q(\sigma_2)$  по его построению. Таким образом,  $P(\sigma_2) = 0$  и  $Q(\sigma_2) = 0$  имеют общий корень. В итоге, результат от  $P(\sigma_2)$  и  $Q(\sigma_2)$  по  $\sigma_2$  равен нулю и является искомым представлением дисперсионного уравнения в виде многочлена относительно  $\omega$ , в который не входят корни  $\lambda_i$ .

Полученное представление дисперсионного уравнения имеет очевидные преимущества для его дальнейшего анализа. В частности, можно заранее предсказать точное количество уравнения; для любого  $k$  нахождение заведомо всех соответствующих пар  $\{\omega, k\}$  сводится к решению полиномиального уравнения известными численными методами без необходимости анализа и отбора собственных значений  $\lambda_i$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
- [2] *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
- [3] *Капцов А.В., Кузнецов С.В.* Поверхностные волны в анизотропных горных породах // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: Тр. VIII науч. школы. Симферополь: Симфероп. гос. ун-т, 1998. С. 54–56
- [4] *Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А.* Распространение длинных волн в композитах (континуальная теория первого порядка) // В кн. Механика композитов. Динамика и устойчивость материалов. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1993. С. 338–376.
- [5] *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке: Пер. с англ. М.: ИЛ, 1952. 448 с.

**Baj A.V, Storozhev V.I., Shpack V.A.** *Surface electroelastic waves in the piezocrystal half-space: the method of construction of polynomial equation for phase velocities.* The method of construction of polynomial equation for velocities of surface electroelastic waves in the orthotropic piezocrystal half-space, based on the theory of symmetrical polynomials is proposed. The obtained form of dispersion equation is qualitatively more effective for the numerical analysis in comparison with the classical non-polynomial form of equation, which includes roots of the bitetrahedric characteristic Christoffel's polynomial.

# ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРКОМПОЗИТНЫХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

**Баранов И. В.\***, **Соловьев А. Н.\*\***, **Стрельникова А. В.\***,

*\* Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

*\*\* Донской государственный технический университет*

*ℳ Ростовский государственный университет*

Рассматриваются задачи модального и гармонического анализа полимеркомпозитной конструкции и пьезокерамического преобразователя в конечноэлементном комплексе ACELAN. Спектр собственных частот и амплитуды поля смещений на свободной границе являются входной информацией для определения модулей упругости, коэффициентов демпфирования и пьезоконстант этих материалов на основе применения генетических алгоритмов.

**1. Введение.** Проблеме описания свойств однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел уделяется большое внимание в мировой литературе. Одним из направлений этих исследований является определение эффективных характеристик композиционных материалов. В последние годы к решению этих задач применяются новые подходы [1–4], основанные на генетических алгоритмах (ГА) или нейросетевых технологиях [5]. Дополнительной экспериментальной информацией для решения этих обратных коэффициентных задач может служить статическое или динамическое поле смещений, измеренное на границе тела или ее части [3, 4, 6]. В качестве такой информации в ряде исследований [7, 8] используется информация о собственных резонансных частотах и собственных формах колебаний.

В данной работе с помощью генетических алгоритмов [3, 4] и конечноэлементного решения прямых задач в ACELAN [9], и дополнительной информации, состоящей из набора собственных резонансных частот для прямоугольника и цилиндра определяются эффективные постоянные анизотропного материала, моделирующего полимеркомпозитный материал и с помощью поля смещений измеренного на части свободной поверхности цилиндрического пьезоэлемента работающего в режиме установившихся колебаний, определяются три пьезоконстанты пьезокерамики, в предположении, что упругие модули и диэлектрические проницаемости известны.

**2. Определение эффективных модулей упругости.** Рассмотрим собственные колебания образца взятого из полимеркомпозитной детали, будем моделировать его анизотропным однородным упругим телом с неизвестными упругими постоянными, занимающего конечную односвязную область  $V$  с границей  $S$ , которая может быть описана объединением непересекающихся областей  $S = S_1 \cup S_2$  (на  $S_1$  — заданы кинематические, а на  $S_2$  — силовые граничные условия). Собственные

формы колебаний описываются однородной краевой задачей теории упругости

$$\sigma_{ij,j} = \rho\omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{x} \in V \quad (1)$$

$$u_i|_{S_1} = 0, \quad t_i|_{S_2} = \sigma_{ij} m_j|_{S_2} = 0 \quad (2)$$

где  $u_i$ ,  $t_i$  — компоненты векторов смещений и напряжений,  $c_{ijkl}$  — компоненты  $\mathbf{c}$  тензора упругих постоянных,  $\rho$  — плотность.

В обратной задаче упругие постоянные в области  $V$  являются неизвестными, информацией для их определения служит набор собственных резонансных частот

$$\omega = \omega_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Определение неизвестных компонент тензора  $\mathbf{c}$  основано на минимизации функционала невязки между экспериментально измеренными собственными частотами  $\tilde{\omega}_k$ , который неквадратичным образом зависит от них, с дополнительным условием строгой положительности упругой энергии

$$F(\mathbf{c}) = \left[ \sum_{k=1}^N p_k (\omega_k - \tilde{\omega}_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{c} > 0 \quad (4)$$

где  $p_k$  некоторые весовые коэффициенты.

*Замечание 1.* На практике собственные резонансные частоты могут быть найдены из АЧХ динамического состояния тела. Возбуждение гармонических колебаний при этом может быть осуществлено с помощью пьезоэлементов, расположенных на поверхности тела, причем свойства пьезокерамических материалов используемых в них можно считать известными. При моделировании такого эксперимента к уравнениям (1)–(2) необходимо добавить уравнения электроупругости (см. п. 3), это расширение не изменит постановку обратной задачи.

*Замечание 2.* Выбор параметра  $N$  согласуется с числом определяемых компонент тензора  $\mathbf{c}$ , а также с геометрией области  $V$ .

*Замечание 3.* В численных экспериментах в качестве правой части соотношения (4), выбирались и другие неотрицательные функции от разностей  $\omega_k - \tilde{\omega}_k$ .

В качестве численной реализации описанного метода рассматривается плоская задача трансверсально-изотропной теории упругости для образца в форме прямоугольника ( $x_1 \in [0, a]$ ,  $x_3 \in [0, b]$ ) с различным соотношением сторон  $h = a/b$ , сторона  $x_1 = 0$  — закреплена в случае  $h \geq 1$ , в случае  $h < 1$  закреплена сторона  $x_3 = 0$ , остальные стороны свободны от напряжений. Функционал (4) минимизируется с помощью ГА [3, 4], прямые задачи модального анализа решаются МКЭ в ACELAN [9]. Процесс измерения собственных частот  $\tilde{\omega}_k$  моделировался решением прямой задачи с набором упругих постоянных  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{55}$ , значения которых ( $\times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) приведены в табл. 1 во второй строке. В этой же таблице приведены результаты идентификации модулей упругости для трех значений параметра  $h$ . В этом численном эксперименте в (4) было взято  $N = 9$ , настройки ГА заключались в том, что область поиска  $W = ([0; 3] \times [0; 3] \times [0; 3] \times [0; 3])$ , суперэлитная стратегия отбора, размер популяции — 25 особей, число одновременно мутирующих бит — 5, размер генома — 16, вероятности скрещивания, мутации, инверсии, сегрегации составляли соответственно 0.95, 0.8, 0.2, 0.5, максимальное число эпох — 100, что потребовало вычисление целевой функции 2483 раза.

|                 | $c_{11}$ | $c_{13}$ | $c_{33}$ | $c_{55}$ |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| Точные значения | 13.9     | 7.43     | 11.5     | 2.56     |
| $h = 2$         | 13.908   | 8.627    | 15.045   | 2.580    |
| $h = 1$         | 13.125   | 6.365    | 10.161   | 2.695    |
| $h = 1/2$       | 16.231   | 8.104    | 11.634   | 2.545    |

Таблица 1.

**3. Определение пьезоконстант пьезокерамики.** Стандартные методики определения упругих и пьезоэлектрических характеристик пьезокерамики основаны на проведении серии испытаний с образцами стандартных форм и размеров, применение ГА позволяет найти эти характеристики на готовом изделии. Это особенно важно, если материал пьезоэлемента является пористой керамикой или пьезокомпозитом, т.к. эффективные характеристики заранее неизвестны и на их значения существенное влияние может оказать процесс поляризации в кусочно-неоднородной среде. Проиллюстрируем это на следующей задаче, в которой в рамках линейной теории электроупругости рассматриваются установившиеся колебания цилиндрического пьезоэлемента (рис. 1 слева). Частота колебаний  $455 \text{ кГц}$  близка к собственной резонансной, форма колебаний на которой с распределением радиального смещения представлена на рис. 1 справа (здесь и далее вычисления проведены в ACELAN).

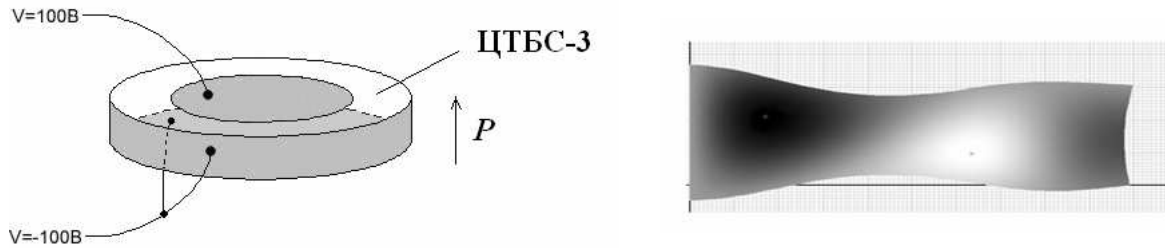


Рис. 1.

На практике это обстоятельство позволяет с большой степенью точности измерить амплитуду смещений поверхности пьезоэлемента, например лазерным интерферометром. Поэтому в качестве дополнительной информации для решения обратной задачи определения пьезоконстант  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{15}$  может служить амплитуда смещений в конечном наборе  $M$  точек границы и при  $K$  — значениях частоты колебаний

$$u_i(\underline{x}_m, \omega_r)|_{S_0} = u_i^{(0)}(\underline{x}_m, \omega_r); \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad r = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

Задача идентификации пьезоконстант —  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{15}$  сводится к нахождению абсолютного (нулевого) минимума функционала  $F$ , задающего норму разности (в некотором пространстве  $L$ ) между, измеренным полем смещения (4) и найденным из решения, например МКЭ, краевой задачи электроупругости.

$$F(e_{ij}) = \left( \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^K \sum_{n=1}^2 [u_n^{(0)}(\underline{x}_m, \omega_r, \tilde{e}_{ij}) - u_n(\underline{x}_m, \omega_r, e_{ij})|_{S_0}]^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

при этом область  $W$  изменения переменных  $e_{ij}$  известна.

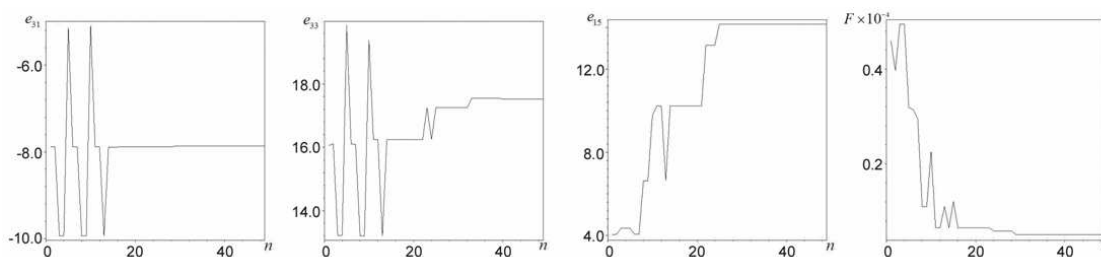


Рис. 2.

Численный эксперимент проведенный для пьезоэлемента из пьезокерамики ЦТБС-3, результаты которого представлены на рис. 2 (при  $M = 20$ ,  $K = 1$  в соотношении (6)), показал достаточную точность в определении искомым пьезо-констант. Найденные значения составили  $e_{31} = -7.8$ ,  $e_{33} = 17.5$  и  $e_{15} = 14.2$ , погрешность которых составляет соответственно 1.3%, 1.1% и 5.8%.

**4. Заключение.** Проведенные в работе численные эксперименты показывают на возможность идентификации свойств анизотропных упругих и пьезоэлектрических материалов с помощью ГА, при этом в качестве дополнительной информации может выступать как граничное поле смещений [3,4], так и набор собственных частот, однако, как показывают данные табл. 1, при выборе мод колебаний необходимо учитывать влияние на их собственную частоту определенных модулей. Представляется перспективным использование в качестве целевой функции линейную комбинацию функционалов (4) и (6) с применением регуляризационных алгоритмов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 05-01-00690, 05-01-00734, 06-01-08041).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *X.H. Lin, Y.L. Kang, Q.H. Qin, D.H. Fu* Identification of interfacial parameters in a particle reinforced metal matrix composite Al6061–10%  $Al_2O_3$  by hybrid method and genetic algorithm. // Computational Materials Science 32 (2005) 47–56.
- [2] *Z. Zhang, K. Friedrich* A combined genetic algorithm and nonlinear least squares method for material characterization using elastic waves. // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 1909–1921.
- [3] *Баранов И.В., Ватумлян А.О., Соловьев А.Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих тел. // Вычислительные технологии 2006. Т. 11, № 3. С. 14–26.

- [4] Баранов И.В., Соловьев А.Н., Стрельникова А.В., Шевцов С.Н. К задаче определения неоднородных упругих свойств поверхностно упрочненного лонжерона. // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященной памяти Академика НАН Украины А.С. Космодамианского Донецк-Мелекино 12-14 июля 2006. Донецк ООО «Юго-Восток», 2006. С. 172–174.
- [5] G.R. Liu, X. Han, K.Y. Lam Artificial neural networks applied to polymer composites: a review. // Composites Science and Technology. 63 (2003) 2029–2044.
- [6] F. Amiot, F. Hild, J.P. Roger Identification of elastic property and loading amelds from full-field displacement measurements. // International Journal of Solids and Structures (2006), (Accepted Manuscript).
- [7] C.R. Lee, T.Y. Kam Identification of mechanical properties of elastically restrained laminated composite plates using vibration data. // Journal of Sound and Vibration Volume 2006, 295, I. 3–5, P. 999–1016.
- [8] J. Cugnoni, Th. Gmur, A. Schorderet Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements. // Composites: Part A. 35 (2004) 977–987.
- [9] Белокозь А.В., Бычков А.А., Васильченко К.Е., Надолин Д.К., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Разработка кластерной версии КЭ комплекса ACELAN. // Параллельные вычисления в задачах математической физики. Сборник трудов всероссийской научно-технической конференции, 21-25 июня 2004, г. Ростов-на-Дону. Ростов-на-Дону изд-во РГУ, 2004. С. 24–35.

**Baranov I.V., Strelnikova A.V., Soloviev A.N.** *Definition of properties of polymer-composites and piezoelectric materials on the basis of dynamic experiments and genetic algorithms.* The modal and harmonic analysis problems of polymer-composite construction and piezoelectric ceramic transformer in the FEM package ACELAN are considered. Spectrum of eigenfrequencies and amplitude of displacements fields on the free boundary is input data for determination of elastic modulus, damping coefficient and piezoelectric constants of these materials on the basis of genetic algorithm.

# АСИМПТОТИКА ВТОРИЧНЫХ РЕЖИМОВ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СЛИЯНИИ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ

**Батищев В. А., Белов К. Л.**

*Ростовский государственный университет*

Построена асимптотика вторичных режимов, возникающих в результате ветвления нестационарных термокапиллярных течений жидкости в тонком слое с твердой нижней и свободной верхней границами при воздействии потока тепла на твердую поверхность. Рассмотрен случай, когда при изменении параметров происходит слияние двух близких точек ветвления с образованием двусторонней бифуркации. При дальнейшем изменении этих параметров ветви вторичных режимов отделяются и удаляются от ветви основного режима.

Изучаются осесимметричные термокапиллярные течения жидкости в тонком слое, толщиной порядка  $O(\sqrt{\nu})$  с подвижной свободной поверхностью, удаляющейся от твердой стенки ( $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости). Решение задачи строится на основе уравнений Прандтля теории нестационарного пограничного слоя. Предполагая, что поля скорости  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ , давления  $p$  и температуры  $T$  в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  не зависят от окружной координаты  $\theta$ , приведем систему уравнений движения жидкости в приближении пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Система уравнений (1) изучается при краевых условиях на твердой стенке  $z = 0$  и свободной границе  $z = \zeta(r, t)$

$$\begin{aligned} v_r = v_z = v_\theta = 0, \quad k \frac{\partial T}{\partial z} &= q_s \quad (z = 0) \\ 2\nu\rho(\mathbf{\Pi}\mathbf{n} - (\mathbf{n}\mathbf{\Pi}\mathbf{n})\mathbf{n}) &= \nabla_\Gamma \sigma \quad (z = \zeta) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} = v_z, \quad \frac{\partial T}{\partial n} &= 0, \\ p = P_* - \sigma(k_1 + k_2) + \rho g z + \nu\rho \frac{\partial v_r}{\partial n} & \quad (z = \zeta) \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ;  $\mathbf{\Pi}$  — тензор скоростей деформации;  $\nabla_\Gamma = \nabla - (\mathbf{n}, \nabla)\mathbf{v}$  — градиент вдоль  $\Gamma$ ;  $k_1, k_2$  — главные

кривизны поверхности  $\Gamma$ ;  $\chi$ ,  $k$  — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности. Коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  считается линейной функцией температуры  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$ , где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_T$ ,  $T_*$  известные постоянные.

Течение жидкости вызвано действием теплового потока  $q_s$  на твердую стенку  $z = 0$  и термокапиллярным эффектом на свободной границе из-за неравномерного распределения температуры на  $\Gamma$ . Градиент температуры на  $\Gamma$  заранее не известен и подлежит определению. Предположим, что поток тепла  $q_s$  задан по степенному закону от времени и радиальной координаты по формуле  $q_s = Q_s r^2 (t + t_0)^{-2}$ , где  $Q_s$ ,  $t_0$  постоянные ( $t_0 > 0$ ). Построим точное решение системы (1)–(2), для которого начальное поле скоростей определяется видом самого решения

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{r\psi'(\xi)}{t + t_0}, & v_\theta &= \frac{rG(\xi)}{t + t_0}, & v_z &= -\frac{2\psi(\xi)\sqrt{\nu}}{\sqrt{t + t_0}} \\ T &= A_0 + \frac{\rho\sqrt{\nu r^2 T_1(\xi)}}{2|\sigma_T|(t + t_0)^{3/2}}, & \zeta &= h\sqrt{\nu(t + t_0)} \\ p &= c_p - \frac{\rho q_0 r^2}{2(t + t_0)^2}, & \xi &= z/\sqrt{\nu(t + t_0)} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $h$  безразмерный параметр, пропорциональный толщине слоя,  $c_p$  — постоянная. Точное решение (3) существует, если давление на свободной границе  $p_*$  есть степенная функция координат  $r$ ,  $t$  и, в частности  $p_* = const$ . Функции (3) описывают осесимметричное термокапиллярное течение жидкости только вблизи оси симметрии  $Oz$  и не распространяются на случай больших значений радиальной координаты. Постоянная  $q_0$  зависит от параметров задачи и подлежит определению.

Введем преобразование растяжения:  $\psi = hF(\eta)$ ,  $\xi = \eta h$ . Подставляя (3) в систему (1), (2) и исключая давление, для функций  $F$ ,  $T_1$  выводим краевую задачу

$$\begin{aligned} F^{(4)} &= -h^2(2FF''' + 1.5F'' + 0.5\eta F''' + 2GG') \\ G'' &= h^2(2F'G - 2FG' - G - 0.5\eta G') \\ T_1'' &= h^2 Pr(2F'T_1 - 2FT_1' - 1.5T_1 - 0.5\eta T_1') \\ F(0) &= F''(0) = G(0) = 0, & T_1'(0) &= \alpha h, \\ F(1) &= -1/4, & F''(1) + hT_1(1) &= 0, & G'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $Pr = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $\alpha = 2|\sigma_T|Q_s/(\rho k\sqrt{\nu})$  — безразмерный параметр, пропорциональный потоку тепла на твердой стенке.

Основные режимы системы (4) обозначим через  $F_0$ ,  $T_0$ ,  $G_0 \equiv 0$ . Эти решения описывают течение жидкости с нулевой окружной компонентой скорости ( $v_\theta = 0$ ). Для конечных значений параметров основные режимы получены численно. Отметим свойство неединственности решений краевой задачи (4).

При определенных значениях параметров  $h$ ,  $\alpha$ ,  $Pr$  от основного режима  $F_0$ ,  $T_0$  ответвляются по два вторичных режима с ненулевой окружной компонентой скорости  $v_\theta \neq 0$  ( $G \neq 0$ ). Точки бифуркации находятся при решении краевой задачи на собственные значения. Эта задача получается линеаризацией системы (4) вблизи основного режима. Обозначив через  $f_1$ ,  $T_{10}$ ,  $g_1$  решение линеаризованной



задачи, получим  $f_1 = 0$ ,  $T_{10} = 0$ , а функция  $g_1$  определяется из краевой задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} g_1'' &= h^2(2F_0'g_1 - 2F_0g_1' - g_1 - 0.5\eta g_1') \\ g_1(0) &= 0, \quad g_1'(1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная задача исследована численно. Обозначим через  $h_0$  собственное значение параметра  $h$ . Очевидно, что  $h_0$  — функция параметров  $\alpha$ ,  $Pr$ . Зависимость  $h_0(\alpha)$  найдена численно при  $Pr = 0.023$  (известно, что малые значения  $Pr$  соответствуют жидким полупроводникам). Отметим точку  $B_0$  на кривой  $h_0(\alpha)$  со значениями  $\alpha_0 = -0.02889$  и  $h(\alpha_0) = 4.1639$ . Вблизи точки  $B_0$  при каждом значении  $\alpha$  близком к  $\alpha_0$  и при  $\alpha > \alpha_0$  найдено по два собственных значения  $h_1$  и  $h_2$ , которые при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  приближаются к значению  $h_0(\alpha_0)$  и при  $\alpha = \alpha_0$  сливаются с ним. Собственное число  $h_0(\alpha_0)$  двукратное, а близкие к нему числа  $h_1$  и  $h_2$  простые. Собственную функцию задачи (5) обозначим через  $g_1 = \varphi(\eta)$ .

Уравнение разветвления для краевой задачи (4) выводится методом работ [1,2]. Решение задачи (4) представим в виде

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \beta f(\eta, h, \alpha, Pr, \beta) \\ G &= \beta g(\eta, h, \alpha, Pr, \beta), \quad T_1 = T_0 + \beta T_{11} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $f, g, T_{11}$  новые неизвестные функции, которые выбираются так, чтобы  $g' = 1$  при  $\eta = 0$ . Подставляя (6) в (4) для функций  $f, g, T_{11}$  выводим нелинейное уравнение

$$L\mathbf{w} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{w} = (f, g, T_{11})$ ,  $L$  — нелинейный дифференциальный оператор, который не приводится ввиду его громоздкости. Для (7) ставятся краевые условия получаемые из (4). Далее, для (7) рассматриваем задачу Коши с начальными условиями при  $\eta = 0$ , при этом вводятся дополнительные параметры  $p_1, p_2, p_3$ . Решение задачи Коши подставляем в краевые условия при  $\eta = 1$ , используем теорему о неявных функциях, исключаем параметры  $p_1, p_2, p_3$  и приходим к уравнению разветвления

$$b(\beta, h) = 0, \quad (8)$$

где функция  $b(\beta, h)$  известна  $b(\beta, h) = g'(1, h, \alpha, Pr, \beta)$ . Функцию  $b(\beta, h)$  разлагаем в ряд Тейлора вблизи точки  $\beta = 0, h = h_0$ . Рассмотрим случай, когда  $\partial b / \partial h = 0$  при  $\beta = 0, h = h_0$ . Уравнение разветвления при приводится к виду

$$(h - h_0)^2 b_{hh} + \beta^2 b_{\beta\beta} + \dots = 0. \quad (9)$$

Здесь коэффициенты  $b_{hh}, b_{\beta\beta}$  — это вторые производные функции  $b(\beta, h)$  по параметрам  $h, \beta$ , вычисленные в точке  $\beta = 0, h = h_0$ . Приведем их значения  $b_{hh} = 4.5687; b_{\beta\beta} = -0.3012$ . Уравнение разветвления (9) имеет два решения при  $h > h_0$  и два решения при  $h < h_0$ . Это означает, что в точке  $A_0$  при  $\beta = 0, h = h_0$  возникает двусторонняя бифуркация. Численные расчеты показывают, что вблизи точки  $A_0$  при  $\alpha > \alpha_0$  имеются две близкие точки бифуркации  $A_1$  и  $A_2$ , которые при  $\alpha \rightarrow \alpha_0, h \rightarrow h_0$  стремятся друг к другу и при  $\alpha = \alpha_0, h = h_0(\alpha_0)$  сливаются

с точкой  $A_0$ , образуя двустороннюю бифуркацию. При дальнейшем уменьшении параметра  $\alpha$  и при  $\alpha < \alpha_0$  точка двусторонней бифуркации исчезает, а ветви вторичных режимов отрываются и удаляются от ветви основного режима (теперь при  $\alpha < \alpha_0$  вторичные режимы "возникают из воздуха а не ответвляются от основного, как при  $\alpha > \alpha_0$ ). Отметим, что каждые два вторичных режима отличаются между собой только направлением окружной компонентой скорости и имеют одну и ту же радиальную и окружную компоненты скорости.

Построим асимптотику вторичных режимов вблизи точки двусторонней бифуркации при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ ,  $h \rightarrow h_0(\alpha_0)$ , а также при  $\alpha = \alpha_0$ ,  $h \rightarrow h_0(\alpha_0)$ . Пусть сначала  $\alpha > \alpha_0$ , причем значение  $\alpha$  близко к  $\alpha_0$ . В этом случае, как уже отмечено, имеются две близкие точки бифуркации со значениями  $h_1$ ,  $h_2$ . Введем малый параметр по формуле  $\varepsilon = \sqrt{(h - h_1)(h - h_2)}$ .

Можно показать, что параметр  $\varepsilon$  преобразуется к формуле

$$\varepsilon = \sqrt{(h - h_0)^2 + 2(\alpha - \alpha_0)b_\alpha^0/b_{hh}^0}$$

Коэффициенты  $b_{hh}^0$ ,  $b_\alpha^0$  есть значения производных по параметрам при  $h = h_0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ . Коэффициент  $b_\alpha$  определяется функцией  $b_\alpha = \partial^2 g / \partial \eta \partial \alpha$ . Отметим, что  $\varepsilon$  зависит от двух малых независимых параметров  $h - h_0$  и  $\alpha - \alpha_0$ . Для построения асимптотических рядов введем параметр  $q = (\alpha - \alpha_0)/\varepsilon^2$  и переходим от параметров  $(h, \alpha)$  к параметрам  $(\varepsilon, q)$ , считая, что  $q = O(1)$ . Строим асимптотические ряды по степеням  $\varepsilon$ . Далее переходим от параметра  $q$  к параметру  $\alpha$ . В результате получим асимптотические разложения вторичных режимов при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ , в которых параметр  $h$  есть функция  $\varepsilon$  и  $\alpha$

$$\begin{aligned} F(\eta, h, \alpha) &= F_0(\eta, h, \alpha) + \varepsilon^2 F_2(\eta, h, \alpha) + \dots \\ T(\eta, h, \alpha) &= T_0(\eta, h, \alpha) + \varepsilon^2 T_2(\eta, h, \alpha) + \dots \\ G(\eta, h, \alpha) &= \varepsilon g_1(\eta, h, \alpha) + \varepsilon^2 g_2(\eta, h, \alpha) + \dots \\ h &= h_0 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 2(\alpha - \alpha_0)b_\alpha^0/b_{hh}^0} \end{aligned} \quad (10)$$

Функция  $g_1$  находится по формуле  $g_1 = c_1 \varphi(\eta, h_0, \alpha_0)$ , где  $\varphi$  — собственная функция задачи (5). Для коэффициента  $c_1$  находим значение  $c_1^2 = -b_{hh}^0/b_{\beta\beta}^0$ . Функции  $F_2$ ,  $T_2$  представим в виде  $F = c_1^2 \Phi_2$ ,  $T_2 = c_1^2 T_{20}$ , где  $\Phi_2$ ,  $T_{20}$  определены через  $F_0$ ,  $T_0$ ,  $\varphi$ . Формулы (10) построены для значений  $h \geq h_1$ . При  $h \leq h_2$  следует в (10) знак плюс перед квадратным корнем в формуле для  $h$  заменить на минус. Асимптотические формулы при  $\alpha = \alpha_0$  ( $q = 0$ ) строятся по формулам (10), в которых  $\varepsilon = h - h_0$ . При  $h_2 < h < h_1$  вторичные режимы отсутствуют.

Формулы (10) несправедливы при в малых окрестностях точек бифуркации  $A_1$  и  $A_2$  при значениях  $h$ , близких к  $h_1$  или  $h_2$ . Пусть  $h \rightarrow h_1$  и  $|h - h_1| \ll |h_1 - h_0| \ll 1$  при  $q \gg 1$ . Введем малые параметры  $\varepsilon_1 = \sqrt{h - h_1}$  и  $\delta = (\alpha - \alpha_0)^{1/4}$ . В рассматриваемой окрестности  $\varepsilon \ll \delta$ . Асимптотические разложения вторичных режимов получаются из формул (10) заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_1$  при  $c_1 = A\delta$ , где коэффициент  $A$  вычисляется по формуле  $A = \sqrt[4]{-8b_\alpha^0 b_{hh}^0 (b_{\beta\beta}^0)^{-2}}$ . Приведем главный член асимптотики функции  $G$  при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} G(\eta, h, \alpha) &= \pm \varepsilon_1 \delta A \varphi(\eta, h_0, \alpha_0) + O(\varepsilon^2 \delta^2) \\ h &= H_1 + \varepsilon_1^2, \quad \alpha = \alpha_0 + \delta^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Вторичные режимы течений жидкости рассчитаны по формулам (10),(11) в малых окрестностях точек бифуркаций, а вне этих окрестностей рассчитаны численно методом пристрелки решения краевой задачи (4). Относительная погрешность численных значений и первого члена асимптотических формул (10),(11) составляет  $O(10^{-2})$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В.И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. 1965. Т.29, вып. 3. С. 453-467.
- [2] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М: Наука, 1969. 527 с.

**Batischev V.A., Belov K.L.** *Asimptotics of secondary regimes the thermo-capillary fluid flow at junction of bifurcation points.* The paper is focused on thermo-capillary flows in a narrow horizontal layer. We find exact solution of Prandtl equations. We examine the branching of main regimes with the case of branching equations. We show that a generic bifurcations creates two secondary counter-rotating flows. While in the case of degenerations two-side bifurcations generate four secondary regimes. The secondary regimes constructed asymptotically in the small neighborhoods of the bifurcation points and continued numerically on the exterior of these neighborhoods.

# КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ, ПОКРЫТОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ПЛЕНКОЙ

Белов К. Л.\* , Еремеев В. А.\*\* ,

\* *Ростовский государственный университет*

\*\* *Ростовский государственный университет*

✉ *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Исследовано распространение капиллярных волн в плоском слое жидкости, поверхность которой обладает поверхностным натяжением, чувствительным к изменению ориентации частиц. Для поверхностной энергии использованы уравнения состояния двумерной упругой микрополярной жидкости.

Капиллярные волны представляют собой хорошо известный случай поверхностных волн, существование которых вызвано наличием поверхностного натяжения и которые достаточно хорошо изучены в случае постоянного поверхностного натяжения [1,2]. Вместе с тем хорошо известно, что многие поверхностно-активные вещества, растворенные в воде, приводят к проявлению неклассических свойств жидкости. Примером неклассических жидкостей являются лиотропные жидкие кристаллы [3] или микрополярные жидкости [4]. Микрополярная жидкость представляет собой среду с микровращениями и моментными напряжениями и ведет свое начало от работ [5,6]. Гидродинамика микрополярных жидкостей базируется на определяющих соотношениях континуума Коссера, т.е. среды с моментными напряжениями, каждая частица которой имеет степени свободы абсолютно твердого тела [7,8]. В [9,10] предложена общая модель вязкоупругой жидкости, включающая в себя уравнения состояния упругой микрополярной жидкости. Двумерные модели микрополярной жидкости, могущие описывать поведение тонких микрополярных пленок, на основе теории микрополярных оболочек построены в [11].

В данной работе рассматриваются капиллярные волны в случае, когда поверхностное натяжение зависит от ориентации частиц поверхностного слоя жидкости, а сам поверхностный слой моделируется пленкой упругой микрополярной жидкости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоский слой жидкости толщины  $H$  со свободной границей (рис. 1). Уравнения движения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости имеют вид [1,2]

$$-\nabla p + \rho g \mathbf{i}_2 = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla$  – оператор градиента в эйлеровых координатах,  $\rho$  – плотность среды,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости, в случае плоской задачи  $\mathbf{v} \equiv v_1(X, Y, t)\mathbf{i}_1 + v_2(X, Y, t)\mathbf{i}_2$ ,  $X$  и  $Y$  – декартовы координаты,  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  – координатные орты.

На нижней границе слоя (при  $Y = 0$ ) обращается в нуль нормальная компонента скорости, т.е.

$$v_2 = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим модель свободной границы. Уравнение свободной границы имеет вид  $Y = \eta(x, t)$ , где  $\eta(x, t)$  подлежащая определению функция, описывающая отклонение свободной поверхности от горизонтальной плоскости. Будем считать, что свободная поверхность обладает поверхностным натяжением  $\sigma$ . В рамках предлагаемой модели поверхностная энергия  $\sigma$  зависит от ориентации частиц поверхностного слоя жидкости. Такой вид поверхностной энергии встречается, например, в теории жидких кристаллов [3]. В рамках модели микрополярного континуума ориентация частиц тела задается при помощи тройки ортонормированных векторов – директоров  $\mathbf{D}_k$ . Это позволяет ввести не только линейную скорость частиц  $\mathbf{v}$ , но и учесть микровращение частиц путем введения независимой от  $\mathbf{v}$  угловой скорости вращения частиц  $\boldsymbol{\omega}$  при помощи формулы  $d\mathbf{D}_k/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_k$ , где  $d/dt$  – материальная производная по времени.

В случае плоской задачи ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота  $\alpha$  триэдра  $\mathbf{D}_k$  вокруг некоторой оси, для определенности совпадающей с направлением  $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{i}_3$ ,  $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega \mathbf{i}_3$ , тензор кривизны  $\mathbf{B}$  равен  $(\text{Grad } \alpha) \mathbf{i}_3$ ,  $\text{Grad}$  – поверхностный оператор градиента ( $\mathbf{i}_3$  – координатный орт, перпендикулярный плоскости рис. 1).

Таким образом, поверхностный слой моделируется двумерной микрополярной жидкой пленкой, в которой имеются напряжения и моменты. Используя подход теории оболочек [11], уравнения движения микрополярной пленки, выражающие баланс импульса и момента импульса для произвольной ее части, можно представить в виде

$$\text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}, \quad \text{Div } \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times = \gamma \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{M}$  – тензоры усилий и моментов типа Коши,  $\text{Div}$  – поверхностный оператор дивергенции в эйлеровых координатах,  $\rho_s$  – поверхностная плотность,  $\mathbf{v}_s$  – линейная скорость пленки,  $\mathbf{f}$  – главный вектор сил, действующих на пленку со стороны жидкости и внешней среды,  $\gamma$  – скалярная мера вращательной инерции частиц пленки, символ  $\mathbf{T}_\times$  означает векторный инвариант тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ . В (3) мы не учитываем возможность появления внешних поверхностных моментов.

Уравнения состояния двумерной упругой микрополярной жидкости имеет вид [11]

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p_s \mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad W = W(J, \mathbf{B}), \quad (4)$$

где  $W$  – плотность поверхностной энергии, отнесенная к единице площади поверхности в отсчетной конфигурации,  $p_s$  – двумерное давление,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор на поверхности,  $\mathbf{B}$  – тензор кривизны микроструктуры в текущей конфигурации  $\mathbf{B} = -\frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k$ . Функцию  $W$  примем в виде одноконстантного приближения

$$W = \frac{1}{2} \nu \text{tr} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) + \sigma_0 J, \quad \nu > 0. \quad (5)$$

Здесь  $\nu$  – упругая постоянная имеющая величину и размерность как у постоянных Франка для нематиков [3],  $J = \sqrt{\frac{1}{2} [\text{tr}^2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) - \text{tr} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^2]}$ ,  $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{R}$ ,  $\sigma_0$  – постоянный коэффициент поверхностного натяжения.

Условия совместности на границе раздела пленки и жидкости состоят в совпадении нормальных скоростей пленки и жидкости и в кинематическом условии на свободной поверхности [1], выражающем совпадение нормальных скоростей движения поверхности и частиц пленки.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_s, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1^s \frac{\partial \eta}{\partial X} = v_2^s. \quad (7)$$

Главный вектор сил  $\mathbf{f}$ , действующих на пленку состоит из веса пленки  $-\rho_s g \mathbf{i}_2$  и реакции со стороны идеальной жидкости  $p\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{f} = -\rho_s g \mathbf{i}_2 + p\mathbf{N}. \quad (8)$$

С учетом (8) уравнения движения пленки (3) можно рассматривать как динамическое условие совместности, аналогичное уравнению Лапласа в теории капиллярности.

Таким образом, полная система уравнений движения упругой жидкости, поверхность которой представляет собой микрополярную пленку состоит из нелинейных уравнений движения, уравнений совместности и определяющих соотношений (1)–(8) и содержит в качестве неизвестных функций поле скоростей  $\mathbf{v}$ , поле линейной скорости пленки  $\mathbf{v}_s$ , поле угловых скоростей пленки  $\boldsymbol{\omega}$ , тензорное поле кривизны  $\mathbf{B}$ , определяемое по директорам  $\mathbf{D}_k$ , причем три последние поля заданы на свободной поверхности, форма которой также неизвестна.

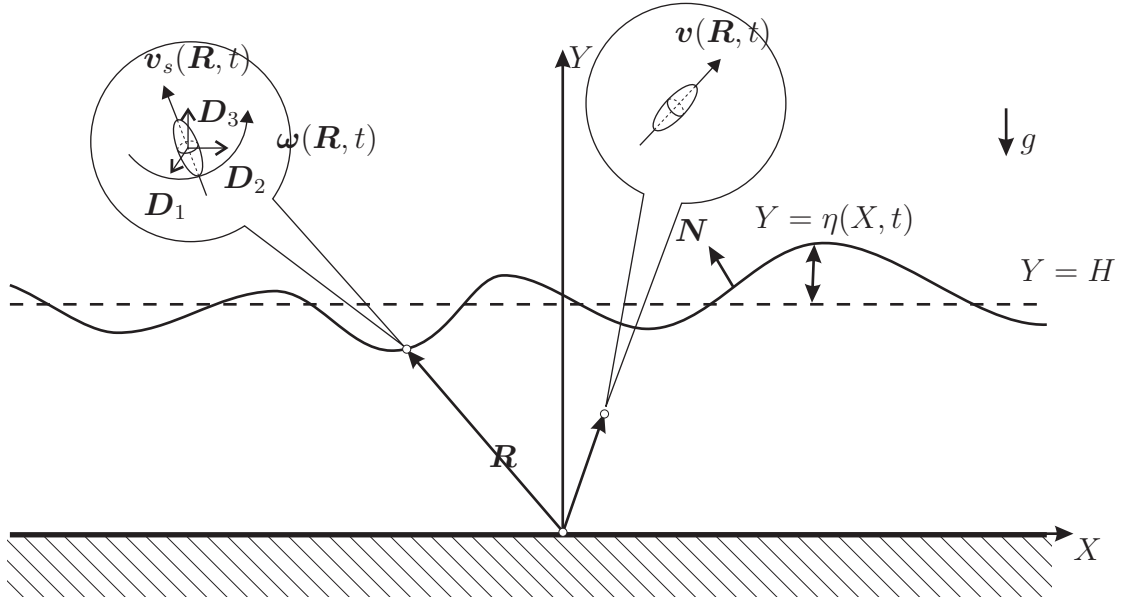


Рис. 1. Слой жидкости со свободной границей.

**2. Поверхностная волна в слое со свободной границей.** Рассмотрим движение микрополярной жидкости в плоском слое со свободной границей в случае бесконечно малых движений  $|\eta| \ll 1$ ,  $|\mathbf{v}| \ll 1$ ,  $|\mathbf{v}_s| \ll 1$ ,  $|\boldsymbol{\omega}| \ll 1$ . Предположим, что

в равновесии  $\alpha = \text{const}$ . Тогда в равновесии  $\mathbf{M} = 0$ ,  $p_s = p_s^0 = \text{const}$ ,  $p = \rho_s g + \rho g Y$ . Запишем линеаризованную в окрестности равновесия систему соотношений (1)–(8). Для отклонений от равновесных значений давления в пленке и давления в жидкости сохраним прежние обозначения.

Внутри жидкости (при  $0 < Y < H$ ) выполняются соотношения

$$-\frac{\partial p}{\partial X} = \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial Y} = \rho \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0. \quad (9)$$

Следуя [1], введем потенциал скорости  $\mathbf{v} = \text{Grad } \varphi$ . Тогда потенциал  $\varphi$  должен удовлетворять уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ , добавочное давление (возмущение давления в окрестности гидростатического значения)  $p$  с точностью до константы совпадает с  $-\rho \partial \varphi / \partial t$ .

На дне выполняется уравнение  $\varphi' = 0$ . Здесь и далее штрихом обозначена производная по  $Y$ . На свободной поверхности  $Y = H$  выполняются уравнения

$$v_2^s = \varphi', \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_2^s, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial p_s}{\partial X} = \rho_s^0 \frac{\partial v_1^s}{\partial t}, \quad p = \rho g \eta - \sigma_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \rho_s^0 \frac{\partial v_2^s}{\partial t}, \quad \nu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} = \gamma \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Здесь учтено, что  $\omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ , а через  $\rho_s^0$  обозначена плотность микрополярной пленки в невозмущенном состоянии.

Из (9)–(11) видно, что линеаризованная краевая задача распадается на независимые системы уравнений: волновое уравнение (11)<sub>1</sub>, описывающее продольные колебания пленки, волновое уравнение (11)<sub>3</sub>, описывающее распространение волны микровращения в микрополярной пленке, причем обе эти волны не связаны с изменением формы свободной поверхности, и краевую задачу относительно потенциала скорости и отклонения свободной поверхности от горизонтали

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = 0 \quad (0 < Y < H), \quad \varphi' = 0 \quad (Y = 0), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \eta - \frac{\sigma_0}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{\rho_s^0}{\rho} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (Y = H). \end{aligned} \quad (12)$$

Именно краевая задача (12) описывает капиллярные волны. Решение (12) будем искать в виде  $\varphi = \Phi(Y) e^{i(kX - \Omega t)}$ ,  $\eta = N e^{i(kX - \Omega t)}$ , где  $k$  – волновое число,  $\Omega$  – частота. Неизвестные  $\Phi(Y)$ ,  $N$  находятся из системы уравнений

$$\Phi'' - k^2 \Phi = 0, \quad (13)$$

$$\Phi' = 0 \quad (Y = 0), \quad -i\Omega N = \Phi', \quad -i\Omega \Phi + gN + \frac{\sigma_0}{\rho} k^2 N - i\Omega \frac{\rho_s^0}{\rho} \Phi' = 0 \quad (Y = H).$$

Решение (13) имеет вид  $\Phi = \Phi_0 \text{ch } kY$ , где  $\Phi_0$  – постоянная интегрирования. При этом должно быть выполнено дисперсионное соотношение, связывающее частоту  $\Omega$  с волновым числом  $k$ :

$$\Omega^2 = gk \text{th } kH \frac{1 + \frac{\sigma_0}{\rho g} k^2}{1 + \frac{\rho_s^0}{\rho} k \text{th } kH}. \quad (14)$$

Сравнивая дисперсионное уравнение (14) с аналогичным уравнением для случая обычной жидкости [1] ( $\Omega^2 = gk \operatorname{th} kH(1 + \frac{\sigma_0}{\rho g} k^2)$ ), можно сказать, что влияние микрополярной пленки сводится к проявлению ее инерционных свойств, которые наиболее проявляются для коротких длин волн ( $kH \rightarrow \infty$ ). Влияние свойств микрополярности (ориентационных эффектов) на распространение капиллярных волн здесь не проявляется, ожидать такого проявления следует в случае неоднородной ориентации частиц поверхностного слоя.

**Заключение.** Полученные результаты представляют интерес в частности для разработки ультразвуковых методов экспериментального определения свойств жидкостей с поверхностно активными веществами.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда содействия отечественной науке.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
- [2] Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
- [3] Жен де П.Ж. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [4] Мизгул Н.П., Прохоренко П.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
- [5] Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1965. Т.29. № 2. С. 297–308.
- [6] Eringen A.C. Theory of micropolar fluids// J. Math. Mech. 1966. Vol. 16. № 1. P. 1–18.
- [7] Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1999. 325 pp.
- [8] Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 2001. 325 pp.
- [9] Зубов Л.М., Еремеев В.А. Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости// Докл. АН (Россия). 1996. Т. 351. № 4. С. 472–475.
- [10] Еремеев В.А., Зубов Л.М. Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.
- [11] Еремеев В.А., Зубов Л.М. Общая нелинейная теория упругих микрополярных оболочек// Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред. С. 124–169.

**Belov K.L., Eremeyev V.A.** *Capillary waves in fluids with micropolar surface film.* We investigated the special case surface tension of a fluid for which a surface energy depends on the orientation of the liquid particles. For the constitutive equations of the surface energy we use the 2D relations of the micropolar liquid films. This model possesses a couple stresses and rotational interaction of particles. The linearized initial-value boundary problem is deduced and its solutions are obtained. The dispersion relation is presented.



## К МОДЕЛИРОВАНИЮ СЕГНЕТОЭЛАСТИКОВ

Белоконь А. В., Скалиух А. С.

*Ростовский государственный университет*

Рассмотрена модель сегнетоэластика определенной структуры методом двухуровневой среды. На микроскопическом уровне на основе Вейссовского распределения механических напряжений и статистики Больцмана получена "ангистерезисная" деформация. На макроскопическом уровне зависимость деформаций от напряжений описывается с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

**Введение.** Поликристаллические сегнетоэластические материалы — это такие среды в которых в каждом кристаллите в результате структурного фазового перехода в определенном температурном интервале спонтанно возникает деформация кристаллической решетки относительно исходной, и которая может быть реориентирована приложенным внешним механическим напряжением. В "начальном" состоянии, т.е. в состоянии когда кристаллиты и сегнетоэластические домены в кристаллитах ориентированы хаотически, материал на макроскопическом уровне не имеет остаточной деформации. Переориентация сегнетоэластических доменов на микроскопическом уровне вследствие приложенного механического напряжения приводит к появлению не только индуцированной (упругой), но и остаточной (пластической) деформации на макроскопическом уровне. Деформации доменных стенок связаны с появлением упругих деформаций, движение доменных стенок связано с пластическими деформациями. В последнем случае процесс становится необратимым. Имеется два направления в исследовании этой проблемы: первое — феноменологическое — оперирует традиционными методами математической теории пластического течения [1], второе — микромеханическое — основано на микромеханических переключениях сегнетоэластических доменов в поле механических напряжений [2]. В предлагаемой работе для описания пластической части использованы приемы моделирования двухуровневой сплошной среды: вначале с применением Вейссовского поля и статистики Больцмана выводится вспомогательное "ангистерезисное" соотношение, а затем с использованием эволюционного закона составляется система обыкновенных дифференциальных уравнений. При моделировании использованы некоторые идеи работы [3]. Рассмотрено одномерное напряженное состояние и отмечено совпадение с численными экспериментами других авторов.

Историческая справка: на возможность существования фазовых переходов со спонтанной деформацией впервые указал отечественный физик В.Л. Инденбом в 1960 г., японский физик К. Аизу ввел термин сегнетоэластик ("ferroelastic") в 1969 г.

**Постановка задачи.** Пусть область  $\Omega$  заполнена "чистым" сегнетоэластическим материалом (например, керамикой  $BaTiO_3$ ), на поверхности которой приложена система нагрузок, вызывающая внутри поле механических напряжений. Объектом исследования является частица: т.е. представительный объем, который

значительно меньше общего объема, но который содержит, в свою очередь, очень большое число доменов. Принимается условие равномерности поля напряжения в частице и требуется установить зависимость между приложенными механическими напряжениями и возникающими остаточными деформациями.

**Метод решения.** С позиции двухуровневой сплошной среды каждую частицу рассматриваем как сплошную среду, в которой каждая атомная ячейка может находиться в сегнетоэластической фазе с собственным тензором спонтанной деформации, который для сегнетоэлектриков — сегнетоэластиков типа "перовскита" может быть описан в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \varepsilon_s \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — тройка ортонормированных векторов, своя для каждой ячейки. Собственные деформации удовлетворяют условию несжимаемости.

Полная деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в частице состоит из упругой и суммарной всех спонтанных деформаций ячеек (1). Согласно теории Вейсса на процесс переключения доменов в частице оказывает не поле истинных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , а "эффективное" поле напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$ , которое определяется видом

$$\boldsymbol{\sigma}_{ef} = \boldsymbol{\sigma} + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}.$$

В настоящей работе для простоты рассматривается случай, когда  $\alpha$  — константа. В более общем случае учета появляющейся анизотропии  $\alpha$  надо считать тензором четвертого порядка. Для геометрической интерпретации вводится в рассмотрение единичная сфера, отнесенная к некоторой фиксированной декартовой системе координат с единичными ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , в которой векторы  $\mathbf{e}_1$  всех ячеек в "начальном" состоянии распределены равномерно во всех направлениях. Ось  $\mathbf{e}_2$  каждой ячейки может принимать любое направление, перпендикулярное  $\mathbf{e}_1$ , положение третьей оси однозначно определено первыми двумя. Потребуем, чтобы оси  $\mathbf{e}_2$  всех ячеек лежали на плоскости  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , что в силу произвольных направлений  $\mathbf{e}_1$  не нарушает общности рассмотрения.

По теореме Больцмана статистической механики заключаем, что в консервативном поле сил  $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$  распределение осей ячеек в частице отличается от их распределения в отсутствии этого поля на величину  $e^{-\frac{U}{kT}}$ , где  $U$  — потенциальная энергия ячейки в поле  $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. Подсчитаем  $U$  из условия, что это есть работа с противоположным знаком, которую совершает поле  $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$ , вызывая деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , т.е.

$$U = -\boldsymbol{\sigma}_{ef} \odot \boldsymbol{\varepsilon}_s.$$

Пусть в каждой частице  $N$  ячеек. Первоначальное равномерное распределение осей  $\mathbf{e}_1$  меняется на неравномерное, а количество элементарных ячеек, описываемых вектором  $\mathbf{e}_1$ , пропорционально площади  $dS$  на сфере. Тогда

$$N = \mu \int e^{\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ef} \odot \boldsymbol{\varepsilon}_s}{kT}} dS = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{\boldsymbol{\sigma}_{ef} \odot \boldsymbol{\varepsilon}_s}{kT}} \sin \psi d\psi, \quad (2)$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная.

Переходя от микроскопического уровня к макроскопическому находим деформацию в частице простым суммированием собственных деформаций ячеек. Однако такой формальный переход не учитывает влияния соседних точек макроскопического уровня на деформирование рассматриваемой частицы, и полученная таким образом деформация не учитывает поправки на упругую составляющую. Поэтому отметим полученную деформацию индексом "an"

$$\varepsilon_{an} = \int \varepsilon_s dN = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{\sigma_{ef} \circ \varepsilon_s}{kT}} \varepsilon_s \sin \psi d\psi.$$

Подставляя сюда значение  $\mu$  из (2) получаем

$$\varepsilon_{an} = \frac{\varepsilon_S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{(\sigma + \alpha \varepsilon) \circ \dot{\varepsilon}}{a}} \dot{\varepsilon} \sin \psi d\psi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{(\sigma + \alpha \varepsilon) \circ \dot{\varepsilon}}{a}} \sin \psi d\psi}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_S = \varepsilon_s N$ ,  $a = \frac{kT}{\varepsilon_s}$ . Полученное выражение назовем "ангистерезисной" деформацией. Такое название связано с физической стороной дела поскольку здесь не учитываются различные физические механизмы (т.е. влияние соседних точек), способствующие закреплению движущихся стенок доменов. Поэтому при обращении механического поля по этой формуле получается обратимая деформация. С другой стороны очевидно, что значения "ангистерезисной" деформации, вычисляемые по (3), представляют собой наиболее возможные, и формально допустимые значения. В реальности остаточные деформации на макроскопическом уровне будут иметь меньшие значения, и для их получения требуются привлекать дополнительные соотношения.

Приведем соответствующие рассуждения и получим рабочие формулы для случая действия осевых напряжений, вызывающих осевые остаточные деформации, связанные с единичным вектором  $\mathbf{k}$ :

$$\sigma_{ef} = \sigma_{ef} \mathbf{k} \mathbf{k} = (\sigma + \alpha \varepsilon) \mathbf{k} \mathbf{k}.$$

Выражение (3) преобразуется к виду

$$\varepsilon_{an} = \frac{3\varepsilon_S}{2} \left[ \frac{\int_0^1 e^{\frac{3(\sigma + \alpha \varepsilon)}{2a} t^2} t^2 dt}{\int_0^1 e^{\frac{3(\sigma + \alpha \varepsilon)}{2a} t^2} dt} - \frac{1}{3} \right]. \quad (4)$$

Этим соотношением фактически исчерпываются возможные сведения, которые можно получить на микроскопическом уровне, и дальнейшее моделирование осуществляется на макроуровне.

Принимаются следующие положения, справедливые в частице:

а) полная деформация складывается из двух частей: обратимой (упругой) и необратимой (остаточной)  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_0$ ;

б) упругая деформация является параметром состояния и может быть вычислена в конечном виде как часть из возможной индуцированной деформации  $\varepsilon_e = c(\varepsilon_{an} - \varepsilon_0)$ ,  $c < 1$ ;

в) остаточная деформация является параметром процесса и определяется только скоростью; учитывая, что скорость остаточной деформации связана со скоростью изменения эффективного поля, воспользуемся эволюционным законом, где скорость роста связана со скоростью изменения эффективного поля функцией, максимально возможной остаточной деформации  $\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{1}{k\delta}(\varepsilon_{an} - \varepsilon_0)\frac{d\sigma_{ef}}{dt}$ .

Здесь  $k$  — некоторый коэффициент, а  $\delta = \text{Sign}(d\varepsilon)$ , причем появление последнего параметра продиктовано гистерезисными свойствами среды, в которой кроме самого значения играют роль и знак приращения поля напряжений.

Для описания "ангистерезисной" деформации (4) введем следующие обозначения

$$\varepsilon_{an} = \frac{3\varepsilon_S}{2} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{3} \right], \quad f(x) = \int_0^1 e^{xt^2} t^2 dt, \quad g(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt, \quad x = \frac{3(\sigma + \alpha\varepsilon)}{2a}.$$

Дифференцируя выражение для полной деформации и заменяя дифференцирование по эффективному полю дифференцированием по истинному полю напряжений, получаем цепочку очевидных равенств

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{d\varepsilon_e}{d\sigma} + \frac{d\varepsilon_0}{d\sigma}, \quad \frac{d\varepsilon_e}{d\sigma} = \frac{c}{1-c} \left( \frac{d\varepsilon_{an}}{d\sigma} - \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right),$$

$$\frac{d\varepsilon_0}{d\sigma} = \frac{1}{k\delta}(\varepsilon_{an} - \varepsilon) \left( 1 + \alpha \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right), \quad \frac{d\varepsilon_{an}}{d\sigma} = \frac{9\varepsilon_S}{4a} \frac{f'g - gf'}{g^2} \left( 1 + \alpha \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right).$$

Подставляя далее три последних соотношения в первое, после некоторых упрощений получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = F(\sigma, \varepsilon), \quad (5)$$

где явный вид функции  $F(\sigma, \varepsilon)$  ввиду ее громоздкости не приводится.

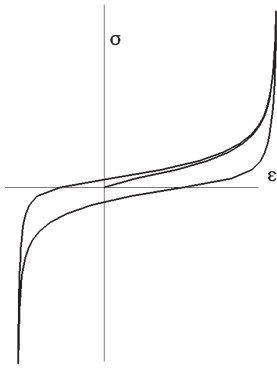


Рис. 1. Большая деформационная петля гистерезиса при следующих значениях параметров:  $a = 6.4 \cdot 10^5$ ,  $c = 0.28$ ,  $k = 3.9 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 3.6 \cdot 10^6$ ,  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ .

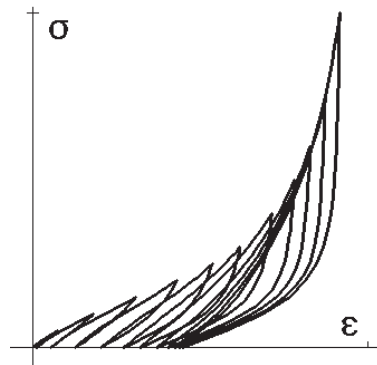


Рис. 2. Малые деформационные петли гистерезиса при следующих значениях параметров:  $a = 4.4 \cdot 10^5$ ,  $c = 0.28$ ,  $k = 3.9 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 3.6 \cdot 10^6$ ,  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$ .

Обыкновенное дифференциальное уравнение (5) интегрируется численно методом Рунге-Кутты от начальной точки  $(\sigma_{old}, \varepsilon_{old})$  при заданном приращении механического напряжения  $\Delta\sigma$  до новой точки  $(\sigma_{new}, \varepsilon_{new})$ ,  $\sigma_{new} = \sigma_{old} + \Delta\sigma$ .

Данная модель имеет пять параметров  $a, c, k, \alpha, \varepsilon_S$ , которые выбираются из условия, чтобы расчетная петля совпадала с экспериментальной. Каждый из параметров отвечает за то или иное поведение кривой, например, увеличение  $a$  приводит к более крутому наклону, увеличение  $c$  — к уменьшению остаточной деформации при одинаковых напряжениях, увеличение  $k$  — к увеличению внутренней области петли, увеличение  $\alpha$  к сдвигу по напряжениям. Подбор этих параметров производится на основе метода наименьших квадратов, когда в качестве целевой функции выбирается квадратичные отклонения в нескольких точках значений петли, полученных из решения уравнения, и снятых экспериментально.

В результате численных расчетов легко получаются большие и малые петли гистерезиса. Если механические напряжения меняются во времени циклически, и их амплитуда достигает большого значения, близкого к разрушению керамики, то после двух циклов получается большая петля гистерезиса. Если механические напряжения то возрастают, то убывают до нуля изменяются так, что их интенсивность все время возрастает до некоторого значения, то получаются малые петли гистерезиса. На рис. 1 и рис. 2, как раз можно видеть большую и малые петли гистерезиса. Отметим, что эти кривые качественно повторяют соответствующие кривые экспериментальных исследований, полученные зарубежными авторами, и которые можно найти в [1] и [4].

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант 05-01-00752-а.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *C.M. Landis* On the fracture toughness of ferroelastic materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. Vol. 51, pp. 1347–1369.
- [2] *S.C. Hwang, R.M. McMeeking* A finite element model of ferroelastic polycrystals // Int. Journal of Solid and Structures. 1999. Vol. 36, pp. 1541–1556.
- [3] *Smith R.C., Hom C.L.* A domain wall model for ferroelectric hysteresis // Conference on Mathematics and Control in Smart Structures, SPIE, V. 3667, Newport Beach, CA, March 1-4, 1999, pp. 150–161.
- [4] *M. Selten, G.A. Schneider, V. Knoblauch, R.M. McMeeking* On the evolution of the linear material properties of PZT during loading history - an experimental study // Int. Journal of Solid and Structures. 2005. Vol. 42, pp. 3953–3966.

**Belokon A.V., Skaliukh A.S.** *On modelling ferroelastics.* The model of the ferroelectric certain structure by a method of two-level continuum media is considered. At a microscopic level on a basis Weiss distribution of mechanical stress and statistics Boltzmann the "anhysteretic" deformation is obtained. At a macroscopic level the dependence of deformations on stress is described with the help of the ordinary differential equation.

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

Беляк О. А.\* , Баранов И. В.\*\*

\* Ростовский государственный университет

\*\* Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены прямые и обратные задачи для ортотропного упругого слоя, ослабленного полостью произвольной конфигурации на основе анализа граничных интегральных уравнений. Исследованы закономерности формирования волновых полей на поверхности слоя. Обратные задачи исследованы в классе эллиптических полостей с помощью генетического алгоритма. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрена задача об установившихся колебаниях ортотропного упругого слоя толщины  $h$  с цилиндрической полостью произвольной формы с гладкой направляющей  $l_0$  и образующей, параллельной оси  $Ox_2$ . Колебания в слое вызываются осциллирующей с частотой  $\omega$  нагрузкой  $p_i(x_1)$ , приложенной на границе слоя  $x_3 = h$ . После отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} u_{k,l}, \\ u_i|_{x_3=0} &= 0, \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i, \\ \sigma_{ij} n_j|_{l_0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных материала,  $n_j$  – компоненты единичного вектора нормали к гладкой кривой  $l_0$ , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [1].

В такой постановке задача распадается на две: плоскую и антиплоскую. Основным способом исследования краевой задачи (1) в плоском и антиплоском случаях является предварительное сведение ее к интегральному уравнению или системе интегральных уравнений на основе идей теории потенциала, аналогично реализованному в работах [2]– [3]. Этот способ требует построения функций Грина  $U_i^{(m)}(x, \xi)$  [2]– [4] для слоя с граничными условиями, порожденными исходной задачей и позволяет снизить размерность исходной исследуемой задачи на единицу. Функции Грина представимы в виде интеграла по контуру  $\sigma$ , который выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и огибает положительные полюса и точки ветвления подынтегральной функции снизу, а отрицательные сверху. При помощи теоремы взаимности [5] получено представление поля перемещений в слое в случае антиплоских ( $j = 1, 3, i, m = 2$ ) и плоских ( $i, j = 1, 3, m = 3$ ) колебаний соответственно.

$$\begin{aligned}u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(x, \xi) u_i(x) dl_x, \\ K_{im}(x, \xi) &= \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j(x), \quad x = (x_1, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_3)\end{aligned}\tag{2}$$

Поле перемещений (2) складывается из двух слагаемых: первое из которых характеризует поле смещения в слое без полости (эталонное поле смещений), а второе обусловлено наличием полости в слое.

Если известны смещения на контуре  $l_0 - u_m(x_1, x_3)$ , то на основании представления (2) можно определить перемещения всюду внутри области, занятой упругой средой. Соотношение (2) дает возможность сформулировать интегральное уравнение только по границе области  $l_0$ , поскольку условия при  $x_3 = 0, h$  выполнены автоматически за счет специального выбора функций Грина. После осуществления предельного перехода  $(\xi_1, \xi_3) \rightarrow (y_1, y_3) \in l_0$  получена система граничных интегральных уравнений (ГИУ) с нерегулярными ядрами по границе дефекта. В антиплоском ( $m = 2, i = 1, 3$ ) и плоском случае ( $m, i = 1, 3$ ) система ГИУ имеет вид:

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_m^*(y) - \int_{l_0} K_{im}(x, y)u_i(x)dl_x, \quad y = (y_1, y_3) \in l_0 \quad (3)$$

причем интеграл по  $l_0$  понимается в смысле главного значения по Коши. Дискретизация ГИУ (3) осуществлялась методом граничного элемента (МГЭ) [2]– [3], [5]– [6], где гладкий контур  $l_0$  аппроксимировался  $N$ – угольником. Неизвестные функции смещений на каждом элементе приближались а) постоянными; б) линейными функциями. Надо отметить, что в первом случае поле перемещений разрывно на контуре  $l_0$ , тогда как при второй реализации получается непрерывным.

На основе выражения для поля перемещений всюду внутри слоя (2) и перемещений на контуре дефекта, рассчитанных при помощи МГЭ (вариант а)), построено волновое поле на его поверхности  $x_3 = h$  в случае антиплоских ( $m, i = 2$ ) и плоских ( $m, i = 1, 3$ ) колебаний:

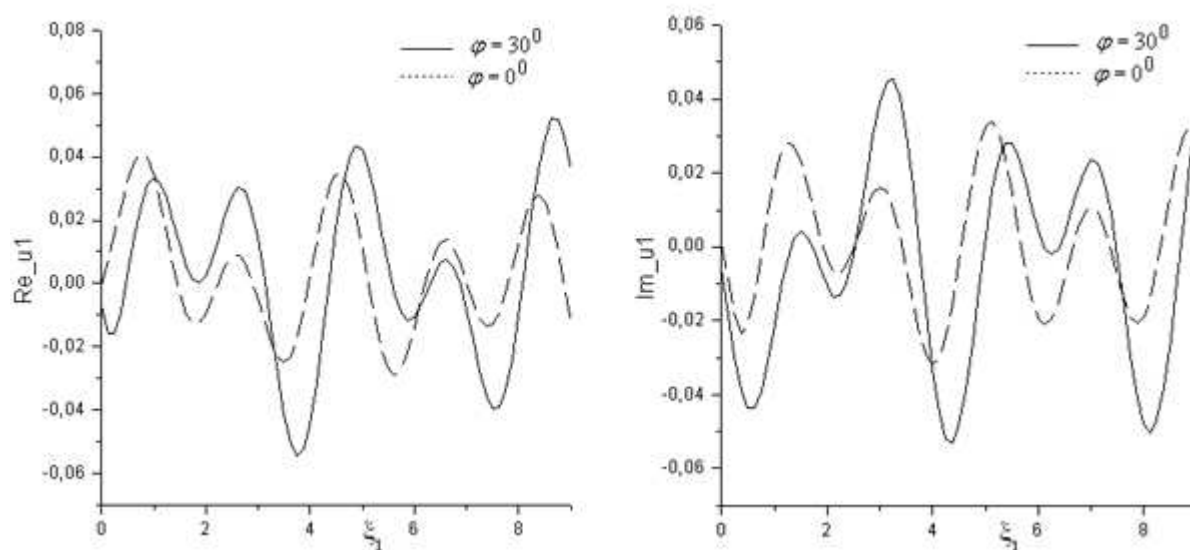
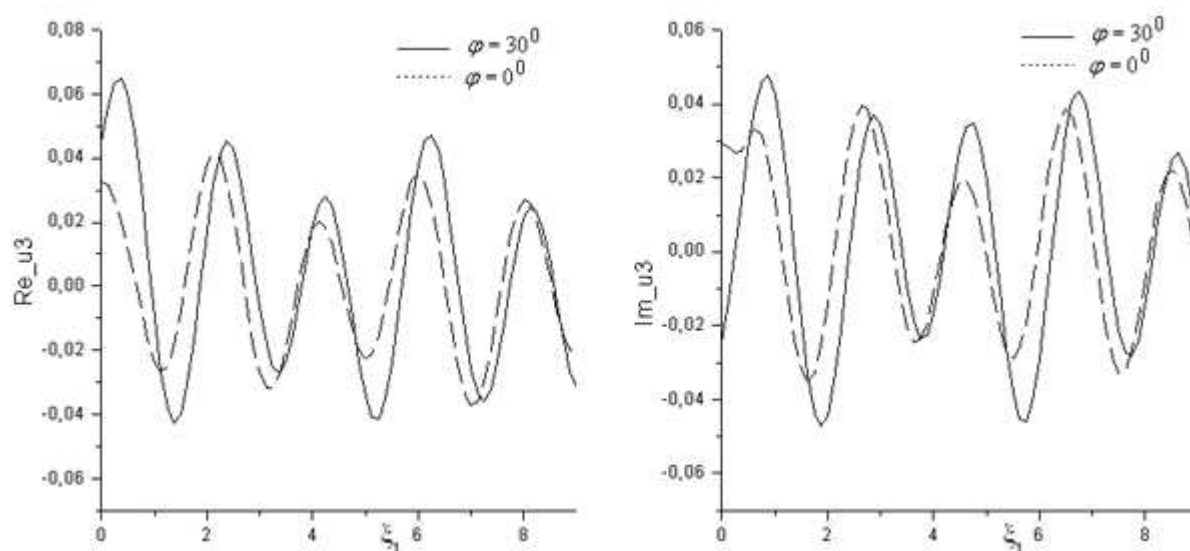
$$u_m(\xi_1, h) = u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{q=1}^N A_{miq} \cdot u_{iq}, \quad (4)$$

$$A_{miq} = \int_{l_q} K_{im}(x, \xi_1, h)dl_x$$

от действия сосредоточенной нагрузки  $p_i(x_1) = -\delta_{i3}p_0\delta(x_1)$ .

На рис. 1-2 представлены вещественная и мнимая части полей смещений на поверхности слоя  $u_m(\xi_1, h)$ ,  $m = 1, 3$  в случае плоских колебаний, рассчитанных по формуле (4), где пунктирной линией изображено поле перемещений в слое эллиптической полостью с полуосями  $a = 0.2$  м,  $0.1$  м и центром в точке  $(0, h/2)$  и углом между большой полуосью и положительным направлением оси  $Ox_1$   $\varphi = 0$ , а сплошной для  $\varphi = \pi/6$ .

В расчетах принято:  $h = 1$  м,  $\rho = 7100$  кг/м<sup>3</sup>, упругие постоянные  $c_{11} = 2.627 \cdot 10^{11}$ ,  $c_{13} = 1.45 \cdot 10^{11}$ ,  $c_{33} = 2.16 \cdot 10^{11}$ ,  $c_{55} = 1.29 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>),  $\kappa = h\omega\sqrt{\rho/c_{33}} = 2$  (две бегущие волны). Число граничных элементов в расчетах по МГЭ –  $N = 16, 32$ . Отметим, что при переходе от 16 к 32 элементам относительная погрешность расчета полей на поверхности слоя не превосходила 1%.

Рис. 1. Поле смещений на поверхности вдоль  $Ox_1$ Рис. 2. Поле смещений на поверхности вдоль  $Ox_3$ 

На основе представленной выше схемы расчета и анализа волновых полей в слое с полостью рассмотрена обратная задача, которая состоит в определении формы контура  $l_0$  по заданным компонентам полей смещений на границе слоя  $u_m(\xi_1, h) = f_m(\xi_{1k})$  в  $N$  точках  $\xi_{1k} \in [c, d]$  при фиксированной частоте  $\omega$ .

$$\begin{aligned}
 f_m(\xi_{1k}) &= u_m^*(\xi_{1k}) - \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi_{1k}) n_j(x) u_i(x) dl_x \\
 \frac{1}{2} u_m(y) &= u_m^*(y) - \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j(x) u_i(x) dl_x r
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Обратная задача на основе предыдущего решения прямой задачи сводится к решению сложной нелинейной системы уравнений (5) относительно  $u_m(x_1, x_3)|_{l_0}$ ,  $l_0$ .



Реконструкция обычно происходит в два этапа. На первом определяется начальное приближение в классе полостей простой формы-эллипсов или окружностей, а на втором происходит уточнение на основе некоторого итерационного процесса. В настоящей работе реализован первый этап.

В серии вычислительных экспериментов считалось, что контур дефекта  $l_0$  представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  и центром в точке  $(x_{10}, x_{30})$ . Таким образом, решение обратной задачи состоит в определении 5-и параметров: координат центра полости, полуосей и угла наклона  $\varphi$ . Поиск неизвестных параметров осуществлялся из условий минимума неквадратичного функционала невязки:

$$\Phi[x_{10}, x_{30}, a, b, \varphi] = \sum_m \sum_{k=1}^N |f_m(\xi_{1k}, h) - u_m(\xi_{1k}, h)|^2, \quad \xi_{1k} \in [c, d]. \quad (6)$$

В случае антиплоских колебаний слоя суммирование по  $m$  отсутствует,  $m = 2$ , в случае плоских колебаний  $m = 1, 3$ .

Поиск минимума предложенного функционала (6) осуществлен при помощи генетического алгоритма, принцип работы которого подробно изложен в [7]. Проведена серия численных экспериментов по восстановлению неизвестных характеристик контура  $l_0$  при различных значениях волнового числа  $\kappa = 2 \div 6$ , результаты которых отражены в таблице 1 для антиплоских колебаний, в таблице 2 для плоских колебаний слоя. Величины со звездочкой — восстановленные значения характеристик контура.

| $\kappa$ | $a$ | $a^*$ | $b$ | $b^*$ | $x_{10}$ | $x_{10}^*$ | $x_{30}$ | $x_{30}^*$ | $\varphi$ | $\varphi^*$ |
|----------|-----|-------|-----|-------|----------|------------|----------|------------|-----------|-------------|
| 4        | 0.2 | 0.19  | 0.1 | 0.97  | 0        | 0.003      | 0.5      | 0.500      | 0         | 0.001       |
| 4        | 0.2 | 0.19  | 0.1 | 0.99  | 0        | 0.001      | 0.5      | 0.501      | 0.523     | 0.521       |
| 6        | 0.2 | 0.201 | 0.1 | 0.11  | 0        | 0.00       | 0.5      | 0.500      | 0         | 0.0004      |
| 6        | 0.2 | 0.201 | 0.1 | 0.11  | 0        | 0.003      | 0.5      | 0.5        | 0.523     | 0.523       |

Таблица 1.

| $\kappa$ | $a$ | $a^*$ | $b$ | $b^*$ | $x_{10}$ | $x_{10}^*$ | $x_{30}$ | $x_{30}^*$ | $\varphi$ | $\varphi^*$ |
|----------|-----|-------|-----|-------|----------|------------|----------|------------|-----------|-------------|
| 2        | 0.2 | 0.195 | 0.1 | 0.96  | 0        | 0.006      | 0.5      | 0.500      | 0         | 0.006       |
| 2        | 0.2 | 0.198 | 0.1 | 0.998 | 0        | 0.002      | 0.5      | 0.501      | 0.523     | 0.520       |
| 4        | 0.2 | 0.2   | 0.1 | 0.101 | 0        | 0.         | 0.5      | 0.503      | 0         | 0.0082      |
| 4        | 0.2 | 0.2   | 0.1 | 0.107 | 0        | 0.007      | 0.5      | 0.50       | 0.523     | 0.5237      |

Таблица 2.

Авторы выражают благодарность научному руководителю профессору Ватульяну А.О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00734).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
- [2] *Ватульян А.О., Суворова О.А.* Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). 2005. № 1. С. 10-16.
- [3] *Ватульян А.О., Кацевич А.Я.* Колебания ортотропного упругого слоя с полостью // ПМТФ.1991.№ 1. С. 95-97.
- [4] *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применение. // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81-85.
- [5] *Бребия К., Теллес Ж., Врробел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир. 1987. 524 с.
- [6] *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1984. 494 с.
- [7] *Баранов И.В., Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред //Вычислительные технологии 2006. № 3. С. 14-26

**Belyak O.A., Baranov I.V.** *The inverse problem for layer with cavity.* The plane and antiplane deformations of orthotropic elastic layer with an internal cavity are considered. These problems are lead to the boundary integral equations. The digitalization of the boundary integral equations is realized on the base of the boundary elements method. Fields of displacements are investigated. The inverse problem of cavity shape reconstruction in layer from the fields of displacements on its boundary are solved. The technique solution is based on genetic algorithm.

# К ОБОСНОВАНИЮ ПРИМЕНЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ МОДЕЛИ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

**Боев Н. В.\* , Бокарева Л. В.\*\***

*\* Ростовский государственный университет,*

*\*\* отдел АСУ ЗАО «Дон-Текс»*

В работе главный член асимптотики амплитуды перемещений получен в случае обратного рассеяния продольной волны в приближении дальнего поля. Практическая важность этого исследования состоит в том, что при обнаружении препятствий в акустических средах и дефектов в упругих средах при ультразвуковом неразрушающем контроле (УЗНК) используется озвучивание высокочастотными акустическими и упругими волнами в эхо-режиме. Такой вид сканирования позволяет получить в любом направлении время прохождения отраженного эхо-сигнала и его амплитуду. Такие данные составляют, например, основу метода реконструкции препятствий сложной формы [1, 2].

Будем рассматривать формирование временно-конечного импульса, вызванного сосредоточенной силой  $Qe^{-i\omega t}$ , изменяющейся во времени по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ . Считаем, что тональное заполнение импульса содержит достаточно длин волн (например, 6 – 8 волн) гармонических колебаний. Это позволяет рассматривать задачу в приближении модели установившихся колебаний упругой среды. При этом полагаем, что дефект расположен на достаточном удалении от источника колебаний, что позволяет использовать на высоких частотах колебаний приближение дальнего поля в расчетах падающих и отраженных от поверхности дефекта волн.

Часто в УЗНК для обнаружения дефектов в элементах конструкций используются раздельно-совмещенные датчики, работающие на продольных волнах как в контактном с поверхностью дефекта режиме, так и в установках, реализующих иммерсионный метод контроля. Такие датчики, как правило, работают в эхо-режиме. В этом случае излучаемая продольная волна взаимодействует с поверхностью препятствия, находящегося в упругой среде, рассеивается на границе препятствия, и датчик фиксирует волну, пришедшую от дефекта. Если поверхность рассеивателя гладкая, то первый пришедший импульс будет отраженным от окрестности точки поверхности, нормаль в которой параллельна направлению распространения высокочастотной излучаемой продольной волны. Существование двух типов волн в упругой среде и их возможная трансформация на граничной поверхности препятствия находящегося в упругой среде, требуют обоснования применяемых моделей в УЗНК. Анализируя формулы [3, 4] для отраженных продольных и поперечных волн от поверхностей препятствий в двумерном и пространственном случаях, покажем, что главный член отраженной пришедшей волны будет определяться продольной волной.

Выпишем явные выражения (в локальных полярной и сферической системах координат в точках зеркального отражения) главных членов амплитуд перемещений в отраженных волнах при  $p-p$  отражении и  $p-s$  трансформации (продольной в поперечную волну), полученные в [3, 4] на основе асимптотической оценки

дифракционных интегралов методом стационарной фазы. Сохраним в формулах обозначения, принятые в этих работах.

В случае двумерной задачи:

$p - p$  — отражение:

$$u_r^{(p)}(x) = V_{pp}(y^*) \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta - 1) \right] \right\}}{\sqrt{\left| L_0 + L - \frac{2L_0L}{\rho \cos \gamma} \right|}}, \quad (1)$$

$$u_\theta^{(p)}(x) = 0; \quad \delta = \text{sign} \left( L_0 + L - \frac{2L_0L}{\rho \cos \gamma} \right).$$

$p - s$  отражение:

$$u_\theta^{(s)}(\tilde{x}) = - \left( \frac{k_s}{k_p} \right)^{3/2} \frac{\cos \gamma_1 V_{ps}(y^*)}{\sqrt{L_0 L_1}} \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p L_0 + k_s L_1 + \frac{\pi}{4}(\delta_{ps} - 1) \right] \right\}}{\sqrt{\left| \frac{\cos^2 \gamma}{L_0} + \frac{k_s \cos^2 \gamma_1}{k_p L_1} + \frac{\cos \gamma}{\rho} + \frac{k_s \cos \gamma_1}{k_p \rho} \right|}} u_r^{(s)}(\tilde{x}) = 0; \quad (2)$$

$$\delta_{ps} = \text{sign} \left( \frac{\cos^2 \gamma}{L_0} + \frac{k_s \cos^2 \gamma_1}{k_p L_1} + \frac{\cos \gamma}{\rho} + \frac{k_s \cos \gamma_1}{k_p \rho} \right).$$

В случае трехмерной задачи:

$p - p$  — отражение:

$$u_r^{(p)}(x) = \frac{B \times V_{pp}(y^*) \exp \left[ i k_p(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2^{(pp)} + 2) \right]}{\sqrt{(L_0 + L)^2 + 2L_0L(L_0 + L)(2H \cos^2 \gamma + \tilde{k} \sin^2 \gamma) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2 L^2 K}},$$

$$u_\theta^{(p)}(x) = 0, u_\psi^{(p)}(x) = 0, \quad \delta_2^{(pp)} = \text{sign} D_2^{(pp)}, \quad B = \frac{Q_q k_p^2}{4\pi \mu k_s^2}, \quad (3)$$

$p - s$  — отражение:

$$u_\theta^{(s)}(\tilde{x}) = \frac{Q_q k_s^2}{4\pi k_p} V_{ps}(y^*) \cos \gamma_1 \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p L_0 + k_s L_1 + \frac{\pi}{4}(\delta_2^{(ps)} + 2) \right] \right\}}{L_0 L_1 \sqrt{|\det(D_2^{(ps)})|}},$$

$$u_r^{(s)}(\tilde{x}) = 0, u_\psi^{(s)}(x) = 0, \quad \delta_2^{(ps)} = \text{sign} D_2^{(ps)}. \quad (4)$$

$$L_0 = |x_0 - y^*|, \quad L = |y^* - x|, \quad L_1 = |y^* - \tilde{x}|,$$

Элементы симметричной ( $d_{12} = d_{21}$ ) матрицы гессиана  $D_2^{(ps)} = d_{ij}, i, j = 1, 2$  приведены в [4].

Здесь  $x$  и  $\tilde{x}$ ,  $k_p = \omega/c_p$ ,  $k_s = \omega/c_s$ ,  $c_p$ ,  $c_s$  — точки приема, волновые числа и скорости продольной ( $p$ ) и поперечной ( $s$ ) волн,  $y^*$  — точка зеркального отражения,  $\rho$  —

радиус кривизны контура в точке  $y^*$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности в  $y^*$ ,  $K = k_1 k_2$  — гауссова кривизна, а  $H = (k_1 + k_2)/2$  — средняя кривизна поверхности в точке зеркального отражения  $y^*$ ,  $\tilde{k}$  — кривизна нормального сечения поверхности отражателя плоскостью луча  $x_0 - y^* - x$ .  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$  — направление падения луча  $x_0 - y^*$ ,  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, \cos \gamma\}$  и  $\{-\cos \alpha_1, -\cos \beta_1, \cos \gamma_1\}$  — направления отраженных  $p$  и  $s$  волн относительно локальной декартовой системы координат в точке  $y^*$ ,  $V_{pp}(y^*)$ ,  $V_{ps}(y^*)$  — коэффициенты отражения и трансформации [5],  $Q_q$  проекция силы  $\mathbf{Q}$  на направление падения луча  $x_0 - y^*$ .

При обратном отражении нас интересуют перемещения в отраженных волнах в точке излучения  $x_0$ . Исследуем предельные значения  $u_r^{(p)}(x)$  и  $u_\theta^{(s)}(\tilde{x})$  при  $x \rightarrow x_0$ . Учтем, что при  $x \rightarrow x_0$  и  $\tilde{x} \rightarrow x_0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ )  $\lim V_{pp}(y^*) = -1$ , а  $\lim V_{ps}(y^*) = 0$ . Получаем, что главный член асимптотики перемещений (1), (3) пришедшей в точку  $x_0$  волны определяется главным членом перемещений в отраженной продольной волне:

в двумерном случае:

$$u_r^{(p)}(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left\{ i \left[ 2k_p L_0 + \frac{\pi}{4} (\delta - 1) \right] \right\}}{\sqrt{2L_0 \left( 1 + \frac{L_0}{\rho} \right)}} \quad (5)$$

в трехмерном случае:

$$u_r^{(p)}(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left\{ i \left[ 2k_p L_0 + \frac{\pi}{4} (\delta_2^{(pp)} + 2) \right] \right\}}{2L_0 \sqrt{1 + 2L_0 H + L_0^2 K}} \quad (6)$$

$$\left( \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1; \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \beta = 1; \gamma = 0 \rightarrow \cos \gamma = 1 \right),$$

В приближении дальнего поля ( $L_0$  достаточно большое) из формул (5) и (6) получаем известные результаты.

В двумерном случае [6]

$$u_r^{(p)}(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left[ i \frac{\pi}{4} (\delta - 1) \right]}{\sqrt{2L_0}} \cdot \sqrt{\rho} \exp(i2k_p L_0). \quad (7)$$

С точностью до множителя

$$u_r^{(p)}(x_0) \sim \sqrt{\rho} \exp(i2k_p L_0). \quad (8)$$

В трехмерном случае [7]

$$u_r^{(p)}(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left[ i \frac{\pi}{4} (\delta_2^{(pp)} + 2) \right]}{2L_0^2} \cdot K^{-\frac{1}{2}} \exp(i2k_p L_0). \quad (9)$$

С точностью до множителя

$$u_r^{(p)}(x_0) \sim \sqrt{R_1 R_2} \exp(i2k_p L_0). \quad (10)$$

Рассмотрим такую же модель эхо-режима звукового обнаружения препятствий пространственной формы в акустической среде. Будем исходить из выражения главного асимптотического члена амплитуды давления в точке  $x$  в отраженной от поверхности акустически твердого рассеивателя волне [8, 9].

$$p(x) = \frac{\exp \left[ ik(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2 + 2) \right]}{\sqrt{(L_0 + L)^2 + 2L_0L(L_0 + L)(2H \cos^2 \gamma + \tilde{k} \sin^2 \gamma) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2L^2K}}.$$

Эта формула с точностью до множителя имеет ту же структуру что и радиальные перемещения (3).

При обратном рассеянии в точке  $x_0$  получаем давление

$$p(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left\{ i \left[ 2kL_0 + \frac{\pi}{4}(\delta_2 + 2) \right] \right\}}{2L_0 \sqrt{1 + 2L_0H + L_0^2K}}. \quad (11)$$

В приближении дальнего поля ( $L_0$  достаточно большое):

$$p(x_0) = -\frac{Q_q \exp \left[ i \frac{\pi}{4}(\delta_2 + 2) \right]}{2L_0^2} \cdot K^{-\frac{1}{2}} \exp(i2k_s L_0). \quad (12)$$

С точностью до множителя

$$p(x_0) \sim \sqrt{R_1 R_2} \exp(i2kL_0). \quad (13)$$

Если озвучивание в эхо-режиме препятствия, находящегося в акустической среде, ведется датчиком, перемещающимся по окружности радиуса  $R$  с центром, расположенным внутри рассеивателя, то  $R = L_0 + p(q)$ , где  $p(q)$  – расстояние до касательной к поверхности, перпендикулярной  $R$ . Расстояние

$$L_0 = R - p(q).$$

Поэтому с точностью до множителя

$$p(x_0) \sim \sqrt{R_1 R_2} \exp(-i2kp(q)). \quad (14)$$

Сравним выражения главных асимптотических членов амплитуд в дальнем поле отраженных волн в акустических (12) и упругих (9) средах. Они отличаются несущественными множителями и определяются одинаковыми зависимостями от произведения главных радиусов кривизны поверхности и расстояния до касательной к поверхности препятствия. Это обстоятельство может существенно использоваться при разработке методов реконструкции препятствий сложной невыпуклой формы, находящихся в акустических и упругих средах.

Выражения главного члена отраженной в эхо-режиме волны определяется формой поверхности (гауссовой кривизной), волновым числом и функцией расстояния от некоторого центра, находящегося внутри препятствия до касательной к поверхности рассеивателя.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ 05-01-00155а

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Обратная задача коротковолновой дифракции для невыпуклых осесимметричных препятствий // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 2. С. 164–168.
- [2] Vorovich I. I., Boyev N. V., Sumbatyan M. A. Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning // Inverse Problems in Engineering. 2001. V. 9. № 4. P. 315–337.
- [3] Sumbatyan M. A., Boyev N. V. High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. № 5. (Part 1). P. 2347–2353.
- [4] Боев Н. В. Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 65–80.
- [5] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка. 1981. 284 с.
- [6] Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение. 1981. 240 с.
- [7] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 352 с.
- [8] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 614–617.
- [9] McNamara D. A., Pistorius C. W. I., Malherbe I. A. G. Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction. Norwood: Artech House. 1990. 372 p.

**Boyev N.V., Bokareva L.V.** *On justification of a scalar model application to the ultrasonic nondestructive evaluation of elastic materials.* In the paper the leading asymptotic term of the displacement amplitude is obtained in the case of a back scattered diffraction of the longitudinal elastic wave in the far-field approximation. The practical importance of this study is explained by the fact that when detecting obstacles in acoustic media as well as defects in elastic media in frames of the ultrasonic nondestructive testing there is used an irradiation by high-frequency acoustic and elastic waves in the echo-regime. Such a scanning allows to determine in arbitrary direction the time of the reflected echo signal and its amplitude. Such data provide a basis for a reconstruction of complex-shape obstacles.

# НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

Бондаренко А. А., Мелешко В. В.

*Киевский национальный университет и.м. Тараса Шевченко, Украина*

Методом суперпозиции построено аналитическое решение задачи о распространении нормальных волн в бесконечном упругом изотропном волноводе прямоугольного поперечного сечения. Представлен график действительных и мнимых частей дисперсионных кривых для случая продольных мод.

Широкое применение твердотельных акустических волноводов, работающих на высоких частотах, в фильтрах, линиях задержки, преобразователях энергии требует детального изучения их дисперсионных характеристик. Изучению особенностей процесса распространения нормальных волн в прямоугольном изотропном упругом волноводе посвящен ряд теоретических [1–3] и экспериментальных [4, 5] исследований. В основном авторы уделяют внимание разработке приближенных методов решения сложной граничной задачи, а не анализу и систематизации полученных данных. В настоящем сообщении описано аналитическое решение задачи о распространении нормальных волн в прямоугольном изотропном волноводе, полученное на основе метода суперпозиции [6, 7], и проведен анализ дисперсионного спектра волновода квадратного поперечного сечения для действительных и мнимых значений постоянной распространения.

Рассмотрим бесконечный в направлении оси  $z$  упругий прямоугольный волновод с размерами  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  со свободными от нагрузок гранями

$$\begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 & \quad \text{при} \quad x = \pm a, \\ \sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 & \quad \text{при} \quad y = \pm b. \end{aligned} \quad (1)$$

Изотропный однородный материал волновода плотности  $\rho$  характеризуется модулем сдвига  $G$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  или скоростями сдвиговых  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  и продольных  $c_1 = \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu\rho}}$  волн. Для распространяющейся нормальной волны  $\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y)e^{i(\gamma z - \omega t)}$  на заданной частоте  $\omega$  требуется определить допустимые значения постоянной распространения  $\gamma$ . При изменении  $\omega$  в широких пределах можно построить дисперсионный спектр для случаев, когда  $\gamma$  принимает действительные, мнимые и комплексные значения.

В силу геометрической симметрии задачи оказывается возможным рассмотреть четыре типа колебаний с различной симметрией вектора перемещений относительно осей  $x$  и  $y$  в  $xOy$  плоскости волновода. Следуя принятым в литературе обозначениям, будем называть их  $L, S_1, S_2, T$ -модами.

Построение решения векторных уравнений движения Ламе в волноводе проводится методом суперпозиции. Кратко укажем основные моменты построения решения. Общее решение, описывающее напряженно-деформированное состояние



волновода, строится в виде суммы двух рядов Фурье по полным системам тригонометрических функций в интервалах  $-a \leq x \leq a$  и  $-b \leq y \leq b$  с произвольными неизвестными коэффициентами. Удовлетворение граничных условий (1) на всех гранях волновода приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. С помощью закона асимптотических выражений, справедливого для неизвестных с большими номерами, проводится корректная редукция бесконечной системы. Равенство нулю определителя конечной системы дает дисперсионное уравнение, которое при заданных размерах поперечного сечения волновода и характеристике материала  $\nu$  связывает значения частоты гармонической волны  $\omega$  и постоянной распространения  $\gamma$ .

Приведем амплитудные компоненты вектора перемещений  $\vec{U}(x, y)$  в случае распространения продольных  $L$ -мод

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= aY_0 \left[ \frac{2\Gamma^2 - \Omega_2^2}{2} \cdot \frac{\text{sh } q_{1,0}x}{\text{sh } q_{1,0}a} - \Gamma^2 \cdot \frac{\text{sh } q_{2,0}x}{\text{sh } q_{2,0}a} \right] + \\
 &+ b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[ \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2 + \Gamma^2}{2p_{1,n}\alpha_n} \cdot \frac{\text{ch } p_{1,n}y}{\text{sh } p_{1,n}b} - \frac{p_{2,n}}{\alpha_n} \cdot \frac{\text{ch } p_{2,n}y}{\text{sh } p_{2,n}b} \right] \sin \alpha_n x + \\
 &+ a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Y_k \left[ \frac{\beta_k^2 + q_{2,k}^2 + \Gamma^2}{2\beta_k^2} \cdot \frac{\text{sh } q_{1,k}x}{\text{sh } q_{1,k}a} - \frac{\beta_k^2 + \Gamma^2}{\beta_k^2} \cdot \frac{\text{sh } q_{2,k}x}{\text{sh } q_{2,k}a} \right] \cos \beta_k y; \\
 u_y(x, y) &= -bX_0 \left[ \frac{2\Gamma^2 - \Omega_2^2}{2} \cdot \frac{\text{sh } p_{1,0}y}{\text{sh } p_{1,0}b} - \Gamma^2 \frac{\text{sh } p_{2,0}y}{\text{sh } p_{2,0}b} \right] - \\
 &- b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[ \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2 + \Gamma^2}{2\alpha_n^2} \cdot \frac{\text{sh } p_{1,n}y}{\text{sh } p_{1,n}b} - \frac{\alpha_n^2 + \Gamma^2}{\alpha_n^2} \cdot \frac{\text{sh } p_{2,n}y}{\text{sh } p_{2,n}b} \right] \cos \alpha_n x - \\
 &- a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Y_k \left[ \frac{\beta_k^2 + q_{2,k}^2 + \Gamma^2}{2q_{1,k}\beta_k} \cdot \frac{\text{ch } q_{1,k}x}{\text{sh } q_{1,k}a} - \frac{q_{2,k}}{\beta_k} \cdot \frac{\text{ch } q_{2,k}x}{\text{sh } q_{2,k}a} \right] \sin \beta_k y; \\
 u_z(x, y) &= -i\Gamma b X_0 \left[ \frac{2\Gamma^2 - \Omega_2^2}{2p_{1,0}} \cdot \frac{\text{ch } p_{1,0}y}{\text{sh } p_{1,0}b} - p_{2,0} \cdot \frac{\text{ch } p_{2,0}y}{\text{sh } p_{2,0}b} \right] + \\
 &+ i\Gamma a Y_0 \left[ \frac{2\Gamma^2 - \Omega_2^2}{2q_{1,0}} \cdot \frac{\text{ch } q_{1,0}x}{\text{sh } q_{1,0}a} - q_{1,0} \cdot \frac{\text{ch } q_{2,0}x}{\text{sh } q_{2,0}a} \right] - \\
 &- i\Gamma b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n \left[ \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2 + \Gamma^2}{2p_{1,n}\alpha_n^2} \cdot \frac{\text{ch } p_{1,n}y}{\text{sh } p_{1,n}b} - \frac{p_{2,n}}{\alpha_n^2} \cdot \frac{\text{ch } p_{2,n}y}{\text{sh } p_{2,n}b} \right] \cos \alpha_n x + \\
 &+ i\Gamma a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Y_k \left[ \frac{\beta_k^2 + q_{2,k}^2 + \Gamma^2}{2q_{1,k}\beta_k^2} \cdot \frac{\text{ch } q_{1,k}x}{\text{sh } q_{1,k}a} - \frac{q_{1,k}}{\beta_k^2} \cdot \frac{\text{ch } q_{2,k}x}{\text{sh } q_{2,k}a} \right] \cos \beta_k y; \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b}, \quad p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 + \Gamma^2 - \Omega_l^2, \quad q_{l,n}^2 = \beta_k^2 + \Gamma^2 - \Omega_l^2, \quad \Omega_l = \frac{\omega b}{c_l}, \quad l = 1, 2, \quad \Gamma = b\gamma.$$

Компоненты тензора напряжений определяются по закону Гука.

Бесконечная система линейных уравнений для определения неизвестных коэф-

фициентов в (2), получаемая описанным выше путем, имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_0 a \Delta_0(q_0) - X_0 \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{2(\Gamma^2 - \Omega_1^2)} - \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\alpha_n^2 p_{1,n}^2} &= 0, \\ X_0 b \Delta_0(p_0) - Y_0 \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{2(\Gamma^2 - \Omega_1^2)} - \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\beta_k^2 q_{1,k}^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Y_k a \Delta_k(q_k) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left( \frac{2\beta_k^2}{\alpha_n^2 + q_{1,k}^2} - \frac{2\beta_k^2}{\alpha_n^2 + q_{2,k}^2} - \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 + q_{1,k}^2)} \right) - X_0 \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{q_{1,k}^2} &= 0, \\ X_n b \Delta_n(p_n) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \left( \frac{2\alpha_n^2}{\beta_k^2 + p_{1,n}^2} - \frac{2\alpha_n^2}{\beta_k^2 + p_{2,n}^2} - \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{\beta_k^2 (\beta_k^2 + p_{1,n}^2)} \right) - Y_0 \frac{\Omega_0^2 (2\Gamma^2 - \Omega_2^2)}{p_{1,n}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{\nu \Omega_1^2}{1 - 2\nu}, \quad \Delta_0(q_0) = q_{2,0} \Gamma^2 \operatorname{cth} q_{2,0} a - \frac{(q_{2,0}^2 + \Gamma^2)^2}{4q_{1,0}} \operatorname{cth} q_{1,0} a, \\ \Delta_0(p_0) &= p_{2,0} \Gamma^2 \operatorname{cth} p_{2,0} b - \frac{(p_{2,0}^2 + \Gamma^2)^2}{4p_{1,0}} \operatorname{cth} p_{1,0} b, \\ \Delta_k(q_k) &= \frac{q_{2,k} (\Gamma^2 + \beta_k^2)}{\beta_k^2} \operatorname{cth} q_{2,k} a - \frac{(q_{2,k}^2 + \beta_k^2 + \Gamma^2)^2}{4q_{1,k} \beta_k^2} \operatorname{cth} q_{1,k} a, \\ \Delta_n(p_n) &= \frac{p_{2,n} (\Gamma^2 + \alpha_n^2)}{\alpha_n^2} \operatorname{cth} p_{2,n} b - \frac{(p_{2,n}^2 + \alpha_n^2 + \Gamma^2)^2}{4p_{1,n} \alpha_n^2} \operatorname{cth} p_{1,n} b. \end{aligned}$$

Алгоритм корректной редукции бесконечной системы детально описан в работе [8].

Рассмотрим распространение продольных волн в волноводе квадратного поперечного сечения,  $a/b = 1$ . Следует отметить, что в этом случае в зависимости от типа симметрии или антисимметрии волнового поля относительно диагонали квадрата  $x = y$  продольные моды разделяются на два типа, которые в литературе принято называть “дышащие” ( $L$ ) и “винтовые” ( $S$ ) [1, 6, 7].

Конкретные расчеты выполнены при  $\nu = 0.248$  для действительных и мнимых значений постоянной распространения  $\gamma$  при изменении  $\omega$  в широком диапазоне. Определитель конечной системы вычислялся при удержании  $N = K = 10$  неизвестных. График зависимости безразмерной постоянной распространения  $2\Gamma/\pi$  от безразмерной частоты  $\Omega = 2\Omega_2/\pi$  приведен на рис.1. Нормальным продольным волнам  $L$ -типа соответствуют непрерывные линии, штриховые линии относятся к  $S$ -типу.

Данные рис. 1 показывают, что для каждого значения частоты  $\Omega$  дисперсионные уравнения (3) обладают конечным числом действительных и мнимых корней. Первые корни соответствуют распространяющимся модам, переносящим энергию, вторые - нераспространяющимся, для которых средний поток энергии через поперечное сечение волновода равен нулю. В связи с конечным числом этих корней более четкой становится роль комплексных корней дисперсионных уравнений для

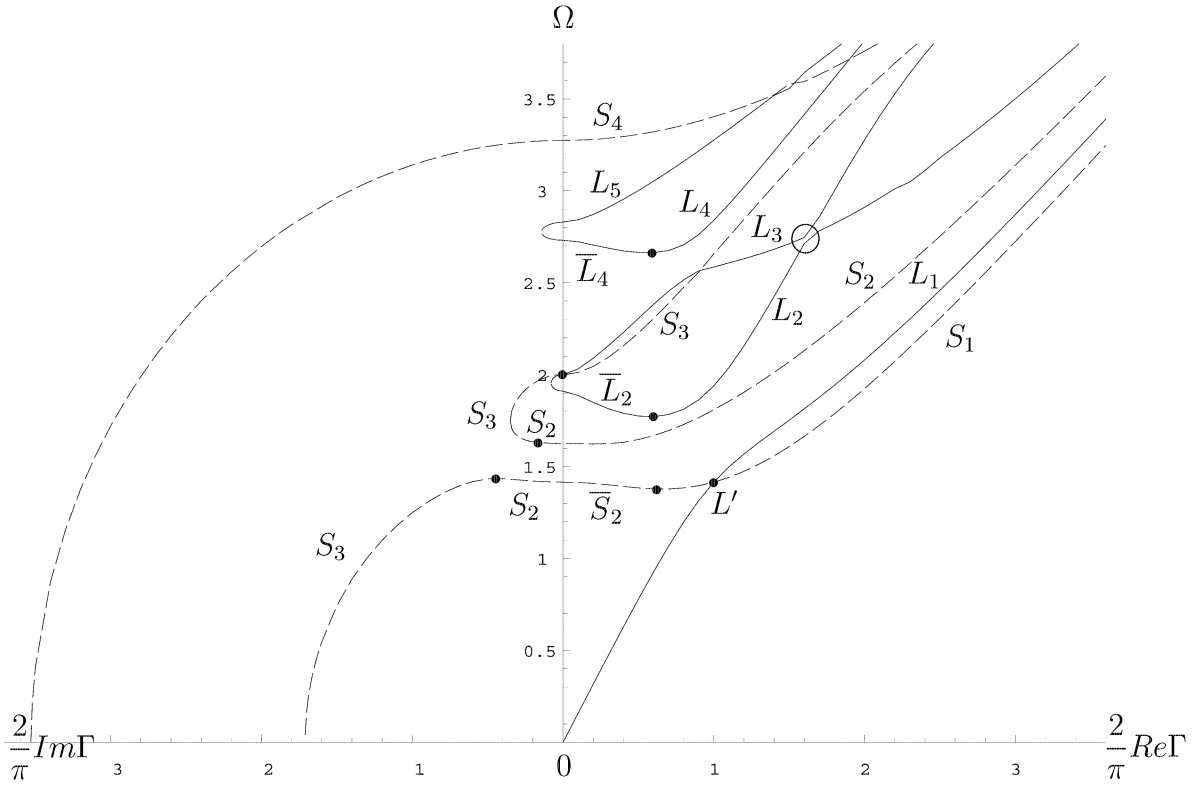


Рис. 1. Дисперсионный спектр продольных мод квадратного волновода,  $\nu = 0.248$ .

построения полных наборов частных решений, дающих возможность удовлетворить произвольные граничные условия на торцах волновода. Знание особенностей поведения действительных и мнимых участков спектра является очень важным для дальнейшего построения комплексных частей дисперсионных ветвей. По известным величинам  $\omega$  и  $\gamma$  определяют фазовую скорость нормальной волны  $c_p = \omega/\gamma$ .

На рис.1 видно, что возможно сближение кривых как одного, так и различных типов симметрии, однако характер взаимодействия при этом различен. Ближайшее рассмотрение участков сближения показывает, что  $L$ - и  $S$ -кривые всегда пересекаются друг с другом (что естественно для независимых типов движений), а с модами одного вида ( $L$ ) такого никогда не происходит. В последнем случае кривые близко подходят друг к другу и расходятся, не пересекаясь [9]. Точка пересечения первых двух дисперсионных ветвей различного типа соответствует частоте моды Ламе, при этом фазовые скорости этих мод совпадают и равны  $c_{p,L_2} = c_{p,S_1} = \sqrt{2}c_2$ .

Расчеты показывают, что фазовые скорости первой дышащей  $L^{(2)}$  и первой винтовой  $S^{(1)}$  мод с увеличением  $\gamma$  асимптотически приближаются к фазовой скорости волны Рэлея в полупространстве  $c_R = 0,932c_2$  и скорости угловой моды клина с прямым углом в вершине  $c_E = 0,905c_2$ , как и предсказано в работе [7].

Интересной особенностью рассматриваемого спектра является наличие общей частоты запираения  $\Omega = 2$  для третьих по порядку  $L$  и  $S$  ветвей, которая соответствует частоте запираения для симметричной  $SH$ -волны в бесконечной пластине.

С целью получения полного представления о дисперсионных свойствах прямоугольного волновода предметами дальнейших исследований на основе предложенной методики являются изучение кинематических характеристик каждой моды, установление фазовых и групповых скоростей для высших ветвей спектра, оценка влияния геометрических и механических параметров на нормальные моды волновода, а также построение и анализ комплексных ветвей, отвечающих нераспространяющимся волнам.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Fraser W.B.* Stress wave propagation in rectangular bars // *Int. J. Solids Struct.* 1969. Vol. 5. № 2. P. 379–397.
- [2] *Nigro N.J.* Steady-state wave propagation in infinite bars of non-circular cross-section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1966. Vol. 40. № 5. P. 1501–1508.
- [3] *Medick M.A.* Extensional waves in elastic bars of rectangular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. Vol. 43. № 1. P. 152–161.
- [4] *Morse R.W.* Dispersion of compressional waves in isotropic rods of rectangular cross-section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1948. Vol. 20. № 9. P. 833–838.
- [5] *Хертеленди П.* Приближенная теория симметричных колебаний упругих стержней прямоугольного или квадратного сечения // *Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.* 1968. т. 35. № 4. С. 289–299.
- [6] *Костржицкая Е.В., Мелешко В.В.* Распространение гармонических волн в упругом прямоугольном волноводе // *Прикл. механика.* 1990. т. 26. № 8. С. 69–78.
- [7] *Мелешко В.В.* Распространение высокочастотных продольных волн в прямоугольном волноводе // *Доклады АН УССР. Серия “А”.* 1982. № 2. С. 36–39.
- [8] *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 284 с.
- [9] *Мелешко В.В., Бондаренко А.А.* Явление “рассталкивающихся” кривых – взгляд 30 лет спустя // *Вестник Днепропетровского ун-та. Серия “Механика”.* 2006. т. 2 № 2. С. 123–128.

**Bondarenko A.A., Meleshko V.V.** *Normal waves in rectangular elastic waveguide.* The paper deals with analytical solution by means of the method of superposition of the problem of normal wave propagation in an infinite rectangular elastic waveguide. The calculated results for real and imaginary dispersion curves are presented graphically in the case of extensional wave propagation.

# СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ ДЕФЕКТОВ СО СКОРОСТЬЮ ДЕФОРМАЦИИ И ТИПОМ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Буйло С. И.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

На примере акустической эмиссии (АЭ) при деформации материала рассмотрена связь параметров сопутствующего излучения со скоростью (частотой) деформации. Получены алгоритмы восстановления количества потерянных актов АЭ ниже порога дискриминации при изменении динамического диапазона регистрируемых сигналов АЭ. Экспериментально исследована связь параметров АЭ растущей трещины с коэффициентом интенсивности напряжений в условиях плоского напряженного состояния и плоской деформации. Результаты предложено использовать для повышения достоверности АЭ метода диагностики предразрушающего состояния материалов.

Суть метода АЭ состоит в анализе параметров чрезвычайно слабого ультразвукового излучения, сопровождающего любое изменение, либо повреждение структуры металлов, их сплавов, композиционных материалов. Метод позволяет проводить обнаружение (а во многих случаях и идентификацию) фазовых переходов, зарождения дефектов и других наноструктурных изменений по сигналам АЭ, т.к. фиксирует единичные акты с энергией до  $10^{-15}$  Дж.

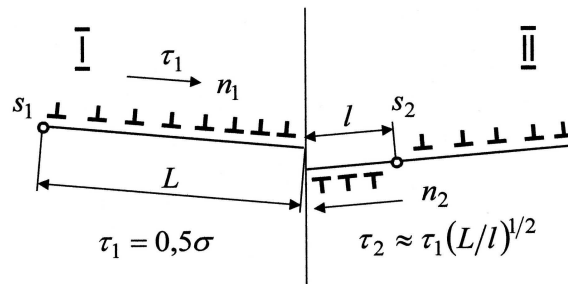


Рис. 1. Физическая природа акта АЭ.

Рассмотрим более подробно физическую природу и тонкую структуру акта АЭ. Известно, что при деформировании материалов приложенным напряжением  $\sigma$  движущиеся дислокации скапливаются у препятствий, что приводит к появлению касательного напряжения  $\tau_2 n_2$ , большего, чем активирующее источник (рис. 1):  $\tau_2 n_2 \approx n_2 \tau_1 (L/l)^{1/2} = 0,5 n_2 \sigma (L/l)^{1/2}$ . (Здесь  $\tau_1$  – сдвиговое напряжение в линии скольжения длиной  $L$  первого дислокационного источника;  $\tau_2$ ,  $n_2$ ,  $l$  – соответственно сдвиговое напряжение, число дислокаций и длина линии скольжения вторичного источника). При большом количестве дислокаций во вторичном скоплении  $n_2$  и учитывая, что обычно  $(L/l) \gg 1$ , напряжения на границе легко превышают критические даже при малом приложенном напряжении  $\sigma$ . Релаксация этого напряжения сопровождается излучением импульсов АЭ.

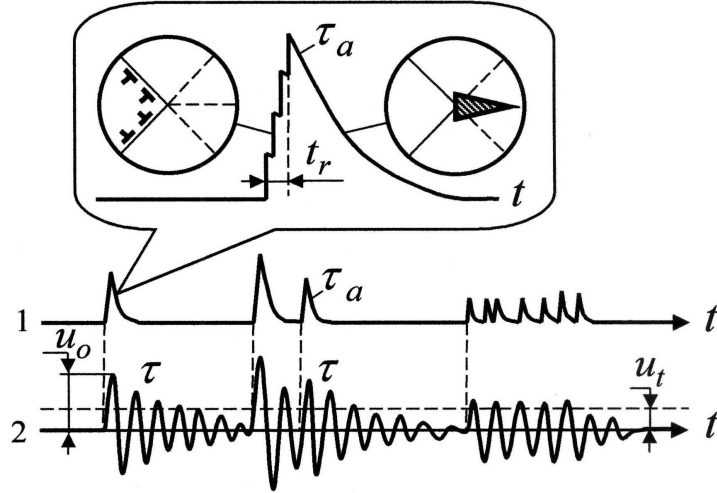


Рис. 2. Тонкая структура акта АЭ: 1 – поток излученных актов АЭ; 2 – поток регистрируемых радиоимпульсов АЭ.

Полагая, что каждая дислокация при пересечении границы в момент времени  $t_i$  излучает короткий экспоненциальный импульс амплитудой  $x_{oi}$  и, учитывая, что их суперпозиция дает регистрируемый импульс амплитудой  $X$ , нормированную амплитуду  $A$  суммарного импульса АЭ можно представить (перейдя от суммирования к интегрированию и проведя соответствующие преобразования) в следующем виде [1]:

$$A = \frac{X}{nx_{oi}} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda l}{n}\right) \simeq \frac{\dot{\epsilon}}{C} \left[1 - \exp\left(-\frac{C}{\dot{\epsilon}}\right)\right]; \quad \lambda^{-1} \sim \bar{v}; \quad \dot{\epsilon} = M\rho_0 b\bar{v}, \quad (1)$$

где  $n$  – количество дислокаций в скоплении;  $\lambda = t_r/\tau_a$  – отношение времени пересечения границы скоплением  $t_r$  к постоянной времени релаксации напряжения  $\tau_a$ ;  $\bar{v}$  – средняя скорость дислокаций;  $\dot{\epsilon}$  – скорость деформации;  $M$  – ориентационный фактор;  $\rho_0$  – плотность подвижных дислокаций;  $b$  – модуль вектора Бюргерса;  $C$  – некоторая постоянная.

На рис. 2 показана реализация такой модели тонкой структуры акта АЭ на примере зарождения микротрещины по дислокационному механизму Коттрелла при пересечении двух плоскостей скольжения в металлах с ОЦК решеткой. Результаты наших последних экспериментов показывают, что постоянная  $C$  в формуле (1) хорошо оценивается из соотношения  $C \approx \sqrt{\dot{\epsilon}_{min}\dot{\epsilon}_{max}} \approx \sqrt{F_{min}F_{max}}$ , и с достаточной для практики точностью эта зависимость аппроксимируется следующими простыми соотношениями:

$$A^*(\dot{\epsilon}) = m_u(\dot{\epsilon}_{max}) \sqrt[m]{\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_{max}}; \quad A^*(F) = m_u(F_{max}) \sqrt[m]{F/F_{max}}; \quad 2,5 \leq m \leq 3. \quad (2)$$

Здесь  $m_u(\dot{\epsilon}_{max})$ ,  $m_u(F_{max})$  – соответственно измеренные средние значения пиковых амплитуд АЭ при максимальных в эксперименте скоростях ( $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{max}$ ) или частотах ( $F = F_{max}$ ) деформации.

Таким образом, удается учесть зависимость амплитуды АЭ от скорости (частоты) деформации и, как следствие, попытаться учесть потерянные акты АЭ с амплитудами ниже порога отсечки аппаратуры. Дело в том, что усталостные испытания обычно сопровождаются большим количеством акустических помех, что вынуждает устанавливать достаточно высокий порог  $u_t$  дискриминации регистрируемых сигналов АЭ (рис. 2). Это приводит к тому, что значительная часть актов АЭ не может быть зарегистрирована и теряется, т.к. их амплитуды лежат ниже порога дискриминации.

Для решения этой проблемы нами предложен и развивается метод восстановления количества актов АЭ с амплитудами ниже порога дискриминации по известной плотности амплитудного распределения АЭ [1,2]. В случае наиболее часто встречающегося на практике степенного вида  $w(x) = (u_0/u_t)^{-m}$ , ( $1 < m < 3$ ) плотности функции распределения амплитуд АЭ получена следующая зависимость между зарегистрированным выше порога дискриминации количеством актов АЭ  $N_a$  и настоящим (излученным) количеством актов АЭ  $N_a^*$ :

$$N_a = N_a^* \int_1^{D_2} w_n(x) dx = \frac{1-m}{D_1^{1-m} - 1} N_a^* \int_1^{D_2} x^{-m} dx = \frac{D_2^{1-m} - 1}{D_1^{1-m} - 1} N_a^*; \quad D_1 > D_2. \quad (3)$$

Здесь  $w_n$  – нормированная на единичную площадь плотность амплитудного распределения АЭ;  $D_1$  – исходный, а  $D_2$  – регистрируемый динамический диапазон сигналов АЭ.

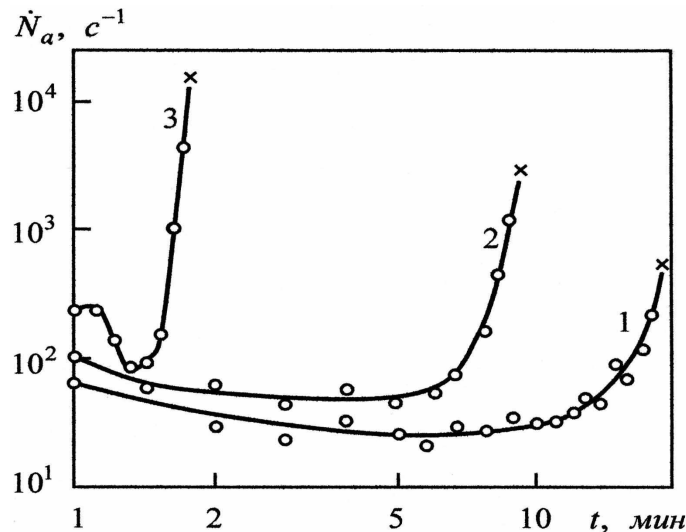


Рис. 3. Интенсивность потока актов АЭ при усталостном нагружении. Материал – Сталь 07X16Н6. x – моменты разрушения.

На рис. 3 приведены результаты измерения суммарного количества актов АЭ  $N_a$  до разрушения при усталостных испытаниях образцов типа БНИ при трех частотах нагружения: 1 –  $F = 10^2$  Гц; 2 –  $F = 2 \cdot 10^2$  Гц; 3 –  $F = 10^3$  Гц. Восстановление полного количества актов АЭ до разрушения  $N_a^*$  показало, что если привести эти



результаты к единому референсному уровню отсечки  $u_t^{ref} = 10\text{мкВ}$  (т.е. учесть и потерянные акты АЭ с амплитудами ниже уровня отсечки  $u_t = 100\text{мкВ}$ ), то получим, что при изменении частоты нагружения в 10 раз, восстановленное нами количество актов АЭ до разрушения  $N_a^*$  имеет разброс всего в пределах 10%. Регистрируемое же количество актов АЭ  $N_a$  при этом изменяется более, чем в 2 раза!

Таким образом, используя полученные результаты можно восстановить количество потерянных актов АЭ ниже порога дискриминации аппаратуры и скорректировать параметры регистрируемого потока актов АЭ при различном пороге дискриминации, частоте и скорости нагружения.

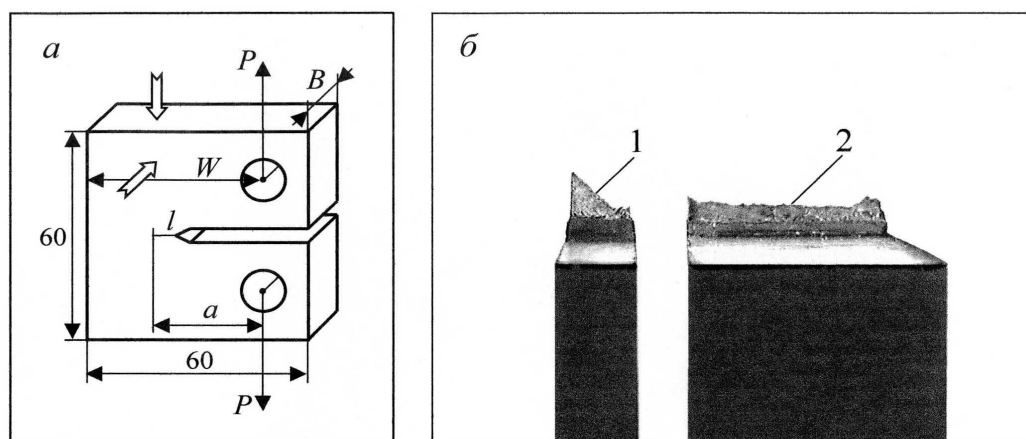


Рис. 4. Форма образцов (а) и вид излома после их разрушения (б): 1 – тонкие образцы (косой излом); 2 – толстые образцы (плоский излом). Стрелками показаны места крепления датчиков АЭ.

Проведено экспериментальное исследование связи параметров АЭ, излучаемой растущей трещиной с коэффициентом интенсивности напряжений и типом напряженного состояния [2,3]. Эксперименты проводились на стандартных плоских образцах с надрезом типа ВР размером 60 на 60 миллиметров (рис. 4) из высокопрочной стали 07Х16Н6 при внецентренном растяжении.

Установлено, что связь суммарного количества актов АЭ  $N_a$  с коэффициентом интенсивности напряжений  $K$  достаточно хорошо описывается степенной зависимостью вида  $N_a = \beta K^\alpha$ . Для тонких образцов  $\alpha = 7 \dots 9$ , для толстых –  $\alpha = 4 \dots 5$ . Таким образом, имеется возможность АЭ диагностики типа напряженного состояния в материале по результатам измерения показателя степени  $\alpha$ .

На начальных стадиях роста трещины зависимость суммарного количества актов АЭ от длины трещины имеет экспоненциальный, либо степенной вид и начинается с некоторого (отличного от нуля) значения. На среднем участке эта зависимость близка к линейной. На заключительных стадиях разрушения наблюдается отклонение этой зависимости от линейного вида, связанное с уменьшением объема областей релаксации напряжений при скачках трещины перед разрушением образца.

В случае плоского напряженного состояния излучение АЭ начинается при высоких значениях коэффициента интенсивности напряжений. Разрушение носит



вязкий характер и по данным АЭ осуществляется достаточно большим количеством малых скачков. Перед разрушением трещина часто переходит в стадию, когда ее рост контролируется границами зон структурной гетерогенности. Это позволяет диагностировать момент наступления предразрушающего состояния по появлению максимумов регистрируемой плотности амплитудных распределений АЭ.

В условиях плоской деформации АЭ излучается с меньшей интенсивностью и начинается при более низких значениях коэффициента интенсивности напряжений. При этом по данным АЭ рост трещины носит в основном случайный характер и осуществляется посредством относительно малого количества достаточно больших скачков.

Полученные результаты позволяют заметно (обычно почти вдвое) повысить достоверность АЭ диагностики предразрушающего состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 06-08-01039а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буйло С.И. Зависимость амплитуды акустического излучения скопления дислокаций и микротрещин от частоты и скорости нагружения твердых тел // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 9-ой Междунар. конф. Ростов-на-Дону. 2005. Т. 1. С. 51–54.
- [2] Буйло С.И. Повышение достоверности результатов метода АЭ диагностики предразрушающего состояния материалов // Современные методы и средства неразрушающего контроля и технической диагностики: Материалы 14-ой Междунар. конф. Ялта–Киев. 2006. С. 14–17.
- [3] Builo S.I. Correlation between Acoustic Emission Parameters of a Growing Crack, the Stress Intensity Factor, and the Type of Stressed State. // Rus. J. of Nondestructive Testing. 2006. Vol. 42. № 3. pp. 181–184.

**Builo S.I.** *Correlation between Acoustic Emission Parameters of a Growing Defects, the Strain Rate and the Type of Stressed State*. On an example of Acoustic Emission (AE) for want of strains of a material the correlation between acoustic accompanying radiation and the rate (frequency) of a strain is considered. The algorithms of restoring of an amount of the lost AE acts below than threshold of discrimination for want of change of signals АЭ dynamic range are obtained. The connection of AE parameters of a growing crack with the stress intensity factor at conditions of the plane stress and the flat strain is experimentally investigated. The results are offered for using for increase reliabilities of an AE diagnostic method of pre-destructive stages of materials.

# ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Ватульян А. О., Двоскин М. А., Сатуновский П. С.

*Ростовский государственный университет*

Рассмотрены прямые и обратные задачи для упругого неоднородного по толщине слоя при установившихся колебаниях в плоском и антиплоском случаях. Разработан метод построения точек дисперсионных множеств, полей перемещений на верхней границе слоя при произвольном законе неоднородности при помощи сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Построена итерационная схема восстановления неизвестных коэффициентов Ляме как функций поперечной координаты по известным полям перемещений на части верхней границе слоя на основе обращения на каждом шаге интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Приведены примеры реконструкции модуля сдвига в антиплоском случае при известном поле на всей верхней границе слоя.

**Введение.** Прямые и обратные задачи для неоднородных упругих волноводов в настоящее время актуальны и имеют большое практическое приложение в различных областях: геофизике, механике слоистых композитов, нано- и биомеханике. При решении таких задач для различных законов неоднородностей как функций координат возникают различные проблемы, которые вызывают существенные затруднения, как в анализе прямых задач, так и при решении вопроса о реконструкции характеристик материалов по известным волновым полям на верхней границе слоя.

**Постановка задач.** Рассматривается задача об установившихся колебаниях с частотой  $\omega$  для неоднородного изотропного слоя  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$  с жестко закрепленным основанием под действием распределенной нагрузки на верхней границе (плоский и антиплоский случаи), параметры Ляме  $\lambda = \lambda(x_3)$ ,  $\mu = \mu(x_3)$  и плотность  $\rho = \rho(x_3)$  слоя являются произвольными положительными ограниченными кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты.

Постановка прямых задач и сведение к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода подробно изложены и изучены в [1], в [2] описан метод построения полей перемещений на верхней границе слоя и приведен способ решения обратной задачи в случае антиплоских колебаниях слоя.

В настоящей работе предложен новый подход к решению важного класса одномерных обратных задач для слоистой среды, характеристики которой являются функциями поперечной координаты, получены линеаризованные интегральные уравнения, построен итерационный процесс. Представлены примеры реконструкции модуля сдвига в случае антиплоских колебаниях слоя при различных законах изменения модуля сдвига и плотности.

Будем считать известными закон изменения плотности и поле перемещений на верхней границе слоя. Требуется восстановить  $\lambda = \lambda(x_3)$ ,  $\mu = \mu(x_3)$ .

**Плоский случай.** В этом случае уравнения движения и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (\lambda(u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu u_{1,1})_{,1} + (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\
 & (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,1} + (\lambda(u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu u_{3,3})_{,3} + \rho\omega^2 u_3 = 0. \\
 & u_1|_{x_3=0} = u_3|_{x_3=0} = 0, \quad u_i|_{x_3=h} = f_i(x_1) \quad i = 1, 3, \\
 & \mu(u_{1,3} + u_{3,1})|_{x_3=h} = 0, \quad (\lambda(u_{1,1} + u_{3,2}) + 2\mu u_{3,3})|_{x_3=h} = p_3(x_1).
 \end{aligned} \tag{1}$$

При помощи преобразования Фурье по переменной  $x_1$  задача (1) сведена к итеративной процедуре на основе модификации подхода, предложенного в [3]. При этом на каждом шаге необходимо решать уравнение Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами относительно функций  $L(x_3)$ ,  $M(x_3)$  следующего вида (ядра выражаются через трансформанты Фурье вектора перемещений на предыдущем шаге)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 L^{(m)}(z)(V_{3,3}^{(m-1)} - i\beta V_1^{(m-1)})((V_{3,3}^{(m-1)})^* + i\beta(V_1^{(m-1)})^*)dz + \\
 & + \int_0^1 M^{(m)}(z)(V_{1,3}^{(m-1)} - i\beta V_3^{(m-1)})((V_{1,3}^{(m-1)})^* + i\beta(V_3^{(m-1)})^*)dz + \\
 & + 2 \int_0^1 M^{(m)}(z)(\beta^2(V_{1,3}^{(m-1)})^2 + (V_{3,3}^{(m-1)})^2)dz = P_3(V^{(m-1)}(\beta, 1) - F_3), \quad \beta \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $z = x_3/h$ ,  $\beta = \alpha h$ ,  $\kappa^2 = \mu_0^{-1}\rho_0\omega^2 h^2$ ,  $R(z) = \rho_0^{-1}\rho(hz)$ ,  $M^{(m)}(z) = \mu_0^{-1}\mu^{(m)}(hz)$ ,  $L^{(m)}(z) = \mu_0^{-1}\lambda^{(m)}(hz)$ ,  $P_3(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_3(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1$ ,  $F_i(\beta) = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1$ ,  $V_i^{(k)}(\beta, z) = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{(k)}(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1$  (здесь  $i = 1, 3$ ).  $\alpha$  – параметр преобразования Фурье;  $\mu_0$  и  $\rho_0$  – характерные модуль сдвига и плотность; второе уравнение такого же типа для замыкания системы строится при изменении вида нагрузки или ее носителя.

**Антиплоский случай.** Уравнение движения и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (\mu u_{,1})_{,1} + (\mu u_{,3})_{,3} + \rho\omega^2 u = 0, \\
 & u|_{x_3=0} = 0, \quad \mu u_{,3}|_{x_3=h} = p(x_1), \quad u|_{x_3=h} = f(x_1).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично предыдущему в обратной задаче построен итерационный процесс, на каждом этапе которого необходимо решать следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 M^{(m)}(\beta^2(V^{(m-1)})^2 + (V_3^{(m-1)})^2)dz = V^{(m-1)}(\beta, 1) - F(\beta), \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где  $F(\beta) = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1$ ,  $V^{(k)}(\beta, z) = P(\beta)^{-1}h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(k)}(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1$ ,

$$P(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1)e^{i\beta x_1/h}dx_1.$$

Отметим, что функцию  $V^{(k)}(\beta, z)$  можно найти из решения уравнения Фредгольма второго рода, которое не зависит от вида приложенной нагрузки,

$$V^{(k)}(\beta, z) = \int_0^1 K^{(k)}(\beta, z, \xi) V^{(k)}(\beta, \xi) d\xi + g^{(k)}(\beta, z),$$

где  $K^{(k)}(\beta, z, \xi) = (\kappa^2 R(\xi) - \beta^2 M^{(k)}(\xi)) \int_0^{\min\{z; \xi\}} \frac{d\tau}{M^{(k)}(\tau)}$ ,  $g^{(k)}(\beta, z) = \int_0^z \frac{d\xi}{M^{(k)}(\xi)}$ .

В качестве примера подробно разберем особенности итерационной схемы при восстановлении модуля сдвига в случае антиплоских колебаний, в основе которой лежит решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (4).

На первом этапе ищется нулевое приближение  $M^{(0)}$  для точного закона изменения модуля сдвига либо в классе положительных ограниченных линейных функций, либо в классе положительных ограниченных кусочно-постоянных функций. Далее, посредством итерационной схемы происходит уточнение закона изменения модуля сдвига.

Поскольку определение функции  $M^{(m)}$  из уравнения (4) является некорректной задачей, то получаемые решения могут быть сколь угодно большими, в то время как добавка  $M^{(m)}$  относительно предыдущего решения  $M^{(m-1)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) должна быть малой. Поэтому после определения решения  $M^{(m)}$  производится проверка малости его нормы  $H^{(m)} = \|M^{(m)}\|$ , и если величина  $H^{(m)}$  оказывается больше заданного малого числа  $\delta > 0$ , то производится нормирование решения и осуществляется переход к следующей итерации. В случае, если  $H^{(m)}$  оказывается меньше некоторого числа  $\varepsilon > 0$  (причем  $\varepsilon < \delta$ ), то решение  $M^{(m)}$  считается тождественно равным нулю, а  $M^{(m-1)}$  – искомым приближением точного закона и итерационный процесс останавливается. Если последнее условие не выполняется, то итерационный процесс продолжается, пока не будет сделано заданное число итераций, а оптимальным приближением выбирается то, для которого величина  $J_k = \|(U^{(k)} - U^{\text{ТОЧ}})^2\|$  окажется наименьшей (здесь  $U^{(k)}$  – поле перемещений на верхней границе слоя для закона  $M^{(k)}$ , а  $U^{\text{ТОЧ}}$  – для точного закона изменения модуля сдвига), при этом нулевое приближение не рассматривается.

Что касается самого решения уравнения (4), то здесь можно применять различные методы решения некорректных задач. В работе были применены четыре различных метода:

- 1). метод А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации на основе принципа обобщенной невязки;
- 2). метод Paige-Saunders (LSQR – разреженные линейные уравнения и метод наименьших квадратов) с постоянным параметром демпфирования;
- 3). предыдущий метод с автоматическим выбором параметра демпфирования на основе принципа обобщенной невязки;
- 4). метод, разработанный на основе первых двух методов.

Рассмотрим два примера законов изменения модуля сдвига и плотности:

$$M_1^{\text{ТОЧ}}(z) = 2(1 - z)^2 + 2z^3 - 0,$$

$$R_1(z) = 0.5 + 3 \sin(2.5z^2).$$

$$M_2^{\text{точ}}(z) = \begin{cases} 1.5, & \text{при } 0 \leq z < 0.3, \\ 0.5, & \text{при } 1 \geq z \geq 0.3. \end{cases}$$

$$R_2(z) = \begin{cases} 1 - 0.8z, & \text{при } 0 \leq z < 0.5, \\ 0.2 + 0.8z, & \text{при } 1 \geq z \geq 0.5. \end{cases}$$

На основе перечисленных четырех методов применялись последовательно четыре итерационные схемы для рассматриваемых законов неоднородностей по три раза. При этом максимальное число итераций бралось равным тридцати. Результаты такого подхода представлены на рисунках 1, 2. На рис. 1, 2 изображены точный закон изменения модуля сдвига (сплошная линия), нулевое приближение закона изменения модуля сдвига (пунктир с точкой), восстановленный закон изменения модуля сдвига (пунктир) для законов 1 и 2 соответственно.

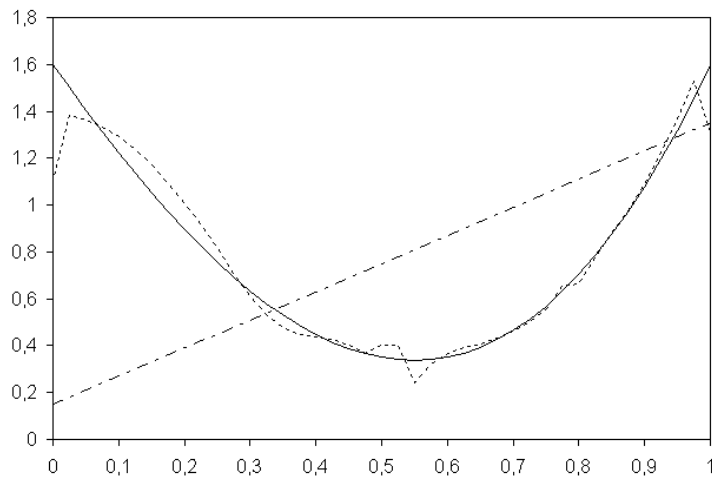


Рис. 1. Восстановление закона изменения модуля сдвига 1.

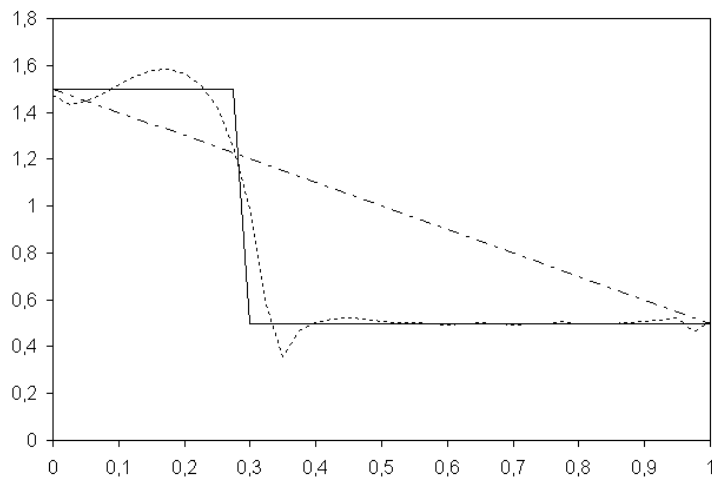


Рис. 2. Восстановление закона изменения модуля сдвига 2.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 05-01-00734).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А.О., Двоскин М.А., Сатуновский П.С. О колебаниях неоднородного упругого слоя. // Журнал "Прикладная механика и техническая физика". 2006. № 3. С. 157–164.
- [2] А.О. Ватульян, П.С. Сатуновский. SH-колебания неоднородного упругого по толщине слоя. // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела. Материалы IV Международной научной конференции, посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского. - Донецк: ООО "Юго-Восток, Лтд". 2006. № 3. С. 187–189.
- [3] Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости.// Докл. РАН 2005. Т. 405. № 3. С. 343–345.

**Vatulyan A.O., Dvoskin M.A., Satunovsky P.S.** *The primal and inverse problems for the elastic throughout the height heterogeneous layer.* The primal and inverse problems for the elastic throughout the height heterogeneous layer at the steady state vibration for the plain and antiplain case. The method, for the construction of the points of dispersing multitude displacement fields on the upper boundary of the layer for the optional non-uniformity principle, was developed. The solution based on the reduction to the system of integral equation of second kind by Fredholm. The integral scheme reclaims the unknown Lamé's coefficients as a functions of transverse coordinate by known waving fields on the upper boundary of the layer in terms of converse on each step for the integral equation of second kind by Fredholm. The praxis of reconstruction modulus of elasticity in shear for the antiplain case when displacement field is known on the upper boundary of the layer, adduced.

# БЛОКИРОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН НАКЛОННЫМИ ПОЛОСОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

*e-mail: evg@math.kubsu.ru*

Для задачи о дифракции нормальных мод на наклонной полосовой трещине в упругом слое решено интегральное уравнение с явным представлением Фурье-символа ядра в виде произведения матриц. Реализованный на основе аналитических представлений алгоритм расчета волновых полей позволяет проводить быстрый параметрический анализ влияния размеров и ориентации трещины на прохождение бегущих волн. Анализируется влияние наклона трещины на выявленные ранее для случая горизонтальной трещины эффекты резонансного захвата и локализации волновой энергии, а также блокирующие свойства трещины.

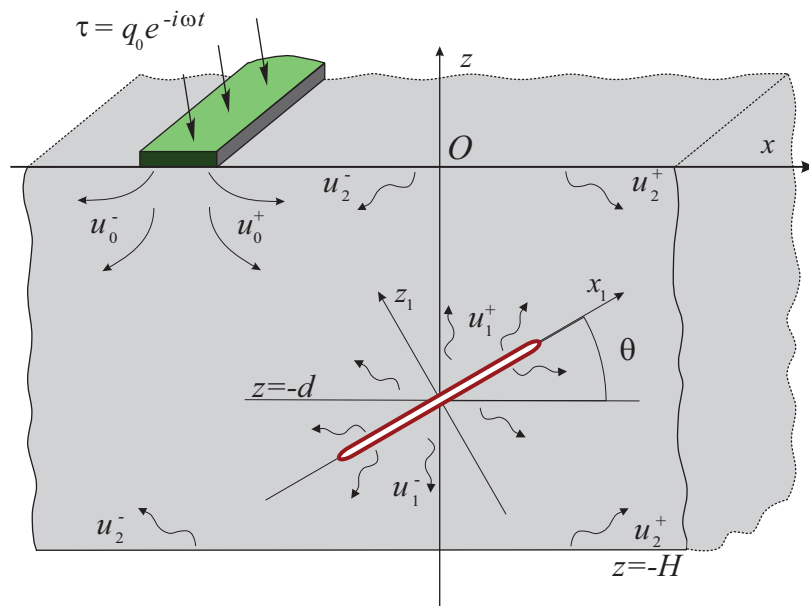


Рис. 1. Постановка задачи

1. *Математическая модель.* В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u} \exp(-i\omega t)$ ,  $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\}$  свободного упругого волновода толщины  $H$ , занимающего в декартовой системе координат  $\mathbf{x} = \{x, z\}$  полосовую область  $|x| < \infty, -H \leq z \leq 0$ . Полосовая трещина (бесконечно тонкий прямолинейный разрез ширины  $2a$ ) образует угол  $\theta$  с горизонтальной осью  $Ox$ ; берега трещины не контактируют друг с другом. Границы слоя и берега трещины предполагаются свободными от напряжений за исключением локальной области приложения заданной нагрузки  $\mathbf{q}_0 \exp(-i\omega t)$ . В качестве источника может также

рассматриваться заданное исходное поле  $\mathbf{u}_0$ , например для волн, набегающих на трещину из бесконечности.

Предполагается, что на трещине поле смещений, выписанное в связанных с трещиной локальных координатах  $\mathbf{x}_1 = \{x_1, z_1\}$ ,

$$\mathbf{x}_1 = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \quad C = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right\|, \quad \mathbf{x}_c = \{0, -d\}$$

терпит разрыв с неизвестным скачком  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v}(x_1) = C(\mathbf{u}|_{z_1=0^-} - \mathbf{u}|_{z_1=0^+}), \quad |x_1| \leq a \quad (1)$$

В силу линейности используемых соотношений гармонический множитель  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейшем опущен, а относительно комплексной амплитуды смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  формулируется следующая краевая задача:

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \mathbf{q}_0, \quad \boldsymbol{\tau}|_{z=-H} = 0 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_1|_{z_1=0} = 0, \quad |x_1| \leq a \quad (4)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе,  $\rho$  – плотность упругой среды;  $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \sigma_z\}$  – вектор напряжений на горизонтальной поверхности, а  $\boldsymbol{\tau}_1$  – на берегах трещины в локальных координатах. В дополнение к условиям (3), (4) на решение  $\mathbf{u}$  накладываются условия излучения на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), вытекающие из принципа предельного поглощения.

2. *Волновые поля.* Поле  $\mathbf{u}$  в волноводе с трещиной складывается из исходного поля  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ , возбуждаемого в волноводе без трещины заданной нагрузкой  $\mathbf{q}_0$  или приходящего из бесконечности, из рассеянного трещиной поля  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1)$  и переотраженного от границ слоя поля  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$  (рис. 1):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + C_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (5)$$

Вывод для каждого из полей  $\mathbf{u}_i$ , удовлетворяющих уравнениям (2), интегральных представлений базируется на хорошо известных решениях для полуплоскости и слоя в виде обратного преобразования Фурье. Техника вывода матриц Грина дана, например, в [4], явный вид их элементов в используемых далее обозначениях приведен в [2]. В результате Фурье-символ полей отраженного от границ слоя и трещины  $\mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{u}_1$  выражается через  $\mathbf{V}$ , что делает возможным вывод интегрального уравнения относительно  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{u}_0$  определяется однозначно из граничных условий).

Поле  $\mathbf{u}_0$  удовлетворяет условиям (3), но дает на берегах разреза ненулевое поле напряжений; поле  $\mathbf{u}_1$  дает требуемый скачок (1), но не удовлетворяет условиям (3), (4) (поле трещины во всем пространстве); поле  $\mathbf{u}_2$  вводится для выполнения условий на границах слоя.

Применяя к (5) закон Гука, подставляя результат в условие (4) и меняя порядок интегрирования, приходим к матричному интегральному уравнению, имеющему в операторной записи вид

$$\mathcal{L}\mathbf{v} \equiv \mathcal{L}_1 \mathbf{v} + \mathcal{L}_2 \mathbf{v} = \mathbf{f}_0, \quad |x_1| < a \quad (6)$$



Оператор  $\mathcal{L}_1$  – хорошо известный гиперсингулярный интегральный оператор для задачи о дифракции на трещине в безграничном пространстве. Оператор  $\mathcal{L}_2$  описывает влияние волн, переотраженных от границ волновода. Известной корневой особенностью напряжений в окрестности краев трещины соответствует разложение  $\mathbf{v}$  по системе базисных функций  $\varphi_k$  ортогональных с весом  $\sqrt{1-x^2}$  с последующим определением коэффициентов  $\mathbf{c}_k$  по схеме Бубнова-Галеркина. Ортогональность невязки  $\mathcal{L}\mathbf{v}_N - \mathbf{f}_0$  системе проекторов  $\psi_j$  приводит к линейной алгебраической системе

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (7)$$

относительно  $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N\}$ . Здесь  $A = [a_{jk}] = (\mathcal{L}\varphi_j, \psi_j)_{L_2}$ ,  $\mathbf{f}_j = (\mathbf{f}, \psi_j)_{L_2}$  – векторы длины 2. Элементы  $\mathbf{f}_j$  выписываются из условий ортогональности в явном виде, в то время как определение элементов матрицы  $A$  требует численного вычисления сингулярных интегралов.

Отметим, что коэффициенты интенсивности напряжений (КИН)

$$\mathbf{k}^\pm : \tau_1(x_1) \sim \mathbf{k}^\pm / \sqrt{a \mp x_1}, x_1 \rightarrow \pm a$$

однозначно выражаются через  $\mathbf{v}$  [1].

3. *Численный анализ.* Достоверность полученных результатов контролировалась численной проверкой граничных условий и энергетического баланса, а также сопоставлением с численными результатами других авторов. Для наклонной трещины в полуплоскости примеры сопоставления с результатами работы [1] даны в [5], а для трещины в слое в качестве контроля использовались результаты статьи [6].

Результаты приводятся в безразмерном виде в единицах, выраженных через величины  $H$ ,  $v_s$  и  $\rho$ . Здесь безразмерная круговая частота  $\omega = 2\pi fH/v_s$  связана с размерной  $f$ ,  $H$  – толщина слоя, к которой отнесены все линейные размеры,  $v_s$  – скорость  $S$ -волн в нем, кроме того, далее всюду коэффициент Пуассона  $\nu = 1/3$ .

Рассмотрим, как влияет наклон трещины  $\theta$  на поведение ближайших к вещественной оси резонансных полюсов  $\omega_n$  (спектральных точек интегрального оператора  $\mathcal{L}$ ), которые численно аппроксимируются корнями характеристического уравнения  $\det A(\omega) = 0$ , где  $A$  – матрица системы (7). С этой целью был проведен анализ значений  $\omega_n$ , полученных для трещин различной полуширины  $a$  и глубины  $d$  при различных углах наклона  $\theta$ . Оказалось, что  $\operatorname{Re} \omega_n$  слабо зависят от  $\theta$ , в то время как все  $|\operatorname{Im} \omega_n|$ , кроме полюсов второго рода [7], увеличиваются с ростом  $\theta$ , т.е. при наклоне трещины они удаляются от вещественной оси.

Было установлено, что в случае горизонтальной трещины на частотах  $\omega \approx \operatorname{Re} \omega_n$  возможен резкий захват энергии набегающей волны, приводящий к заперению волновода и росту КИН [2], [3].

Для срединной трещины проявление этих эффектов зависит от типа набегающей волны. Так, при набегании нулевой антисимметричной моды  $a_0$  на рассмотренную выше горизонтальную трещину блокирование, т.е. резкое уменьшение коэффициента прохождения  $\kappa^+$  (здесь и далее  $\kappa^+$  определяется как отношение энергии прошедших волн к энергии набегающей волны) наблюдается только в окрестности полюса второго типа (подробнее см. [7]). При набегании же нулевой симметричной

моды  $s_0$ , наоборот, блокирование происходит на всех  $\omega_n$  первого типа, но имеет место в очень узком частотном диапазоне. Интересно, что резонансный рост КИН происходит только на частотах второй группы, причем при набегании нормальных мод обоих типов.

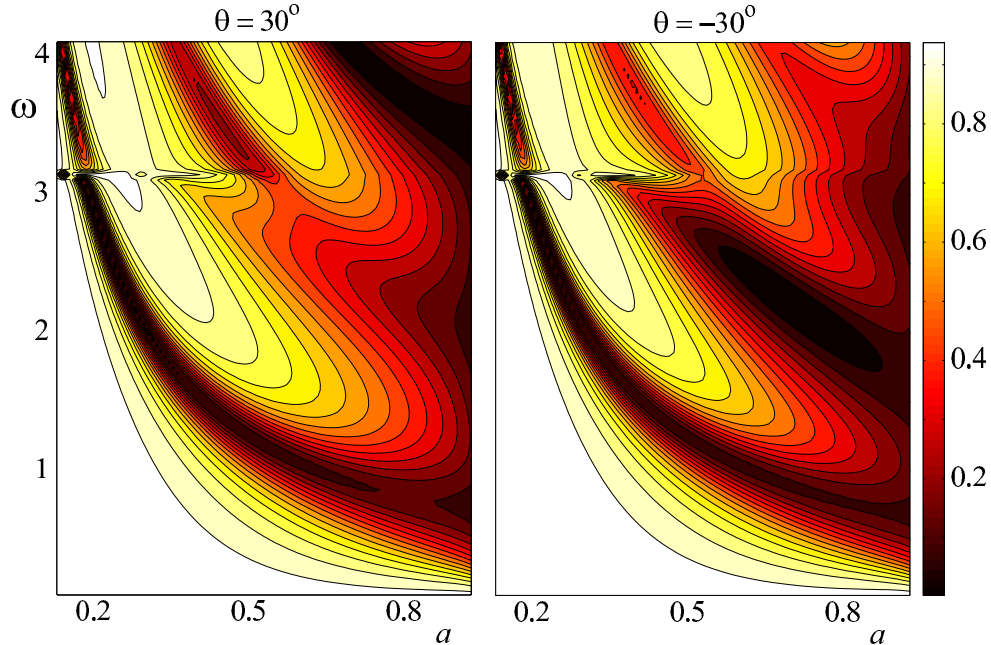


Рис. 2. Линии уровня коэффициента прохождения  $\kappa^+(\omega, a)$  для набегающей на наклонную трещину ( $\theta = \pm 30^\circ$ ,  $d = a \sin(\theta) + 0.01$ ) нулевой антисимметричной нормальной моды  $a_0$ .

Не менее интересный эффект наблюдается при наклоне трещины. Если для горизонтальной трещины полюса первой группы ни коим образом не проявляют себя, то уже при  $\theta = 4.5^\circ$  они дают резонансное блокирование моды  $a_0$ . В то же время как полюс второй группы никак не проявляется на графиках КИН в обоих случаях. Изучая вид поверхностей  $\kappa^+(\theta, \omega)$  и  $k_2^+(\theta, \omega)$ , построенных для набегающих фундаментальных мод  $a_0$  и  $s_0$ , можно видеть, что резонансное блокирование связано с полюсами второй группы, также как и рост КИН с полюсами второго набора, прослеживается примерно до  $\theta = 15^\circ$ . В то же время проявляющиеся не сразу блокирующие свойства второго набора сохраняются вплоть до  $\theta = 30^\circ$ , когда поперечное сечение волновода полностью перекрывается наклонной трещиной ( $a \sin \theta = d$ ).

Не меньший практический интерес представляет случай трещины, практически выходящей на поверхность. В некоторых случаях трещина может оставаться прозрачной для прохождения волновой энергии даже при перегораживании до 95% толщины слоя [7]. В качестве примера на рис. 2. приведены линии уровня коэффициента прохождения  $\kappa^+(\omega, a)$  для антисимметричной моды ( $\theta = \pm 30^\circ$ ,  $d = a \sin(\theta) + 0.01$ ) набегающей на трещину, которая почти касается поверхности волновода ( $a \sin \theta - d = 0.01$ ). Обращает на себя внимание тот факт, что даже еще при  $d = 0.4$ , т.е. при перегораживании 80% волновода блокирование имеет место преимущественно вблизи резонансных частот, которые можно идентифици-

ровать по каньонам, оставляемым на поверхности (темные зоны). Важным также оказывается направление распространения волны, что можно видеть при сравнении коэффициентов прохождения для трещин, составляющих с поверхностью угол  $\theta = \pm 30^\circ$ . В случае  $\theta = 30^\circ$  блокирующие свойства проявляются сильнее на высоких частотах, а при  $\theta = -30^\circ$  на низких (см. например зону  $1.5 < \omega < 3$ ,  $0.4 < a < 0.8$ ).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00801, 06-01-96607) и Международной ассоциации INTAS (проект 05-1000008-7979).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Van der Hijden J.H.M.T., Neerhoff F.L.* Diffraction of elastic waves by a sub-surface crack (in-plane motion) // *J. Acoust. Soc. America.* 1984. V. 75. N6. P. 1694-1704.
- [2] *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // *Акуст. ж.* 2006. Т. 52. Вып. 3. С. 314-325.
- [3] *Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A.* Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // *J. Acoust. Soc. America.* 2006. V. 119. N6. P. 3589-3598.
- [4] *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зимченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
- [5] *Glushkov E., Glushkova N., Ekhlakov A., Shapar E.* An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection // *Wave Motion.* 2006. V.43. N6. P.458-473.
- [6] *Liu G.R.* A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates // *Comput. Mech.* 2002. V. 28 P. 76-81.
- [7] *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В.* Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // *Прикладная математика и механика.* (принята к печати)

**Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V.** *Elastic wave diffraction and blocking by an inclined strip-like crack in a layer.* The diffraction of elastic waves in isotropic waveguide with an inclined strip-like crack is investigated. The problem leads to integral equation with kernel represented by the Fourier transform. We observe diffraction and blocking dependence on depth, width and angle of inclination of the crack, frequency and type of an incident field using algorithms embodied as a set of routines for PC. The connection between crack inclination and resonance frequencies is also analyzed.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЛОИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОДОВ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В.,  
Ерёмин А. А., Кириллова Е. В.**  
*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Рассматривается возможность применения численно устойчивых полуаналитических алгоритмов вычисления Фурье-символа матрицы Грина для слоистых структур [1, 2] к построению фундаментальных решений, аппроксимирующих волновые поля как в ограниченных композитных структурах, так и в волноводах с жёсткими включениями или полостями. В противоположность граничным элементам, основанным на фундаментальных решениях для однородного пространства, такие элементы в точности удовлетворяют условиям на плоско-параллельных границах. Таким образом, остаётся удовлетворить граничные условия только на неоднородностях, полостях, негоризонтальных краях. Предлагаемый подход требует гораздо меньшего числа элементов по сравнению с классическим МГЭ.

1. Проблемы ультразвукового неразрушающего контроля композитных материалов зачастую приводят к необходимости решения задач об определении динамических характеристик волноводов с дефектами. Аналогичные задачи возникают и при сейсмическом зондировании. Одним из методов решения таких задач является метод фундаментальных решений (МФР), идея которого состоит в разложении искомого решения по базисным функциям, тождественно удовлетворяющим рассматриваемым уравнениям и, при возможности, некоторым из граничных условий. Одним из вариантов МФР является и широко используемый в настоящее время метод граничных элементов (МГЭ). Однако, классический МГЭ базируется на использовании в качестве базисных функций фундаментальных решений для бесконечного однородного пространства, которые не удовлетворяют граничным условиям. Поэтому применение МГЭ к расчету волноводов с дефектами требует распределения базисных функций вдоль всех границ слоев, как внутренних, так и внешних (в том числе и уходящих на бесконечность), что неизбежно приводит к росту вычислительных затрат и потере точности вычислений.

В предлагаемом подходе в качестве базисных функций используются фундаментальные решения для слоистых структур (слоистые элементы — СЭ) [3]. Тем самым автоматически удовлетворяются граничные условия на всех плоскопараллельных внутренних и внешних границах волновода, и учитывается информация о внутренней волновой структуре решения при любом градиенте полей.

2. В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$  ( $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ ) N-слоеного упругого волновода с дефектами, занимающего область  $\Omega$ . Пусть  $\beta_0$  — часть границы области  $\Omega$ , совпадающая с границами N-слоеного изотропного волновода,  $\beta_1$  — границы дефектов ( $\partial\Omega = \beta_0 \cup \beta_1$ ). Перемещения  $\mathbf{u}$  в каждом из слоёв удовлетворяют уравнениям Ламе с различными в общем случае значениями упругих констант и плотности.

Обозначим через  $\mathbf{u}_0$  поле, возбуждаемое поверхностным источником колебаний в волноводе без дефектов. Под  $\mathbf{u}_0$  можно также понимать поле набегающей из бесконечности нормальной моды.

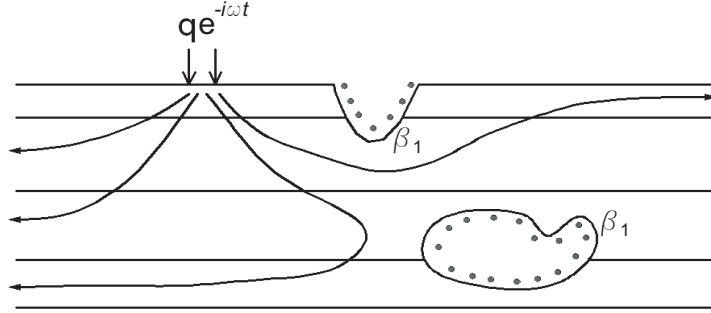


Рис. 1. Постановка задачи

По аналогии с МГЭ волновое поле  $\mathbf{u}$  ищется как сумма заданного поля  $\mathbf{u}_0$  и поля  $\mathbf{u}_1$ , отраженного от  $\beta_1$ , которое аппроксимируется СЭ, расположенными во внешней по отношению к  $\Omega$  области на некотором расстоянии от  $\beta_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, & \mathbf{u}_1 &\approx \sum_{j=1}^{N_s} L_j \mathbf{c}_j \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1, & \boldsymbol{\tau}_1 &\approx \sum_{j=1}^{N_s} T_j \mathbf{c}_j \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{n})\mathbf{u}(\mathbf{x})$  — поле напряжений, связанное с внешней к  $\beta_1$  нормалью;  $N_s$  — число точечных источников;  $\mathbf{c}_j = \{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}$  — неизвестные коэффициенты разложения;  $L_j, T_j$  — слоистые элементы, то есть матрицы  $2 \times 2$ , столбцами которых являются перемещения (для  $L_j$ ) и напряжения (для  $T_j$ ), вызванные в слоистом волноводе без дефекта элементарными источниками, заданными в точке  $s_j = (x_j, z_j)$  (на рис. 1 показаны точками вдоль границы  $\beta_1$ ). В рассматриваемом случае [3]:

$$L_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_j(\alpha, z) e^{-i\alpha(x-x_j)} d\alpha; \quad T_j = T(\mathbf{n})L_j, \quad (2)$$

где  $K_j(\alpha, z)$  — Фурье-символ матрицы Грина для  $(N+1)$ -слоистого упругого волновода с точечным скачком напряжений на добавочной дополнительной границе раздела слоёв, проходящей по прямой  $z = z_j$ .

Неизвестные коэффициенты  $\mathbf{c}_j$  выбираются так, чтобы приближённо удовлетворить граничным условиям, заданным на контуре  $\beta_1$ . Для определения  $\mathbf{c}_j$  можно воспользоваться как методом коллокаций, так и методом Петрова-Галёркина. Важно, что граничные условия на  $\beta_0$  выполняются автоматически в силу того, что столбцы  $K_j$  — Фурье-символы решения задачи для соответствующего многослойного волновода. В результате дискретизации приходим к линейной алгебраической системе

$$B\mathbf{c} = \mathbf{g} \quad (3)$$

относительно неизвестного вектора  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{N_s})$  длины  $2N_s$ ;  $B = (B_{ij})_{i,j=1}^{N_s}$ , где  $B_{ij}$  — блоки  $2 \times 2$ ;  $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{N_s})$  — известная из граничных условий правая часть,  $\mathbf{g}_i = \{g_i^{(1)}, g_i^{(2)}\}$ . В частности, с использованием метода коллокаций имеем:

$$B_{ij} = \begin{cases} L_j(\mathbf{p}_i), & \mathbf{p}_i \in \beta_u \\ T_j(\mathbf{p}_i), & \mathbf{p}_i \in \beta_\tau \end{cases} \quad \mathbf{g}_i = \begin{cases} -\mathbf{u}_0(\mathbf{p}_i), & \mathbf{p}_i \in \beta_u \\ -\boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{p}_i), & \mathbf{p}_i \in \beta_\tau \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{p}_i$  — точки коллокации на  $\beta_1 = \beta_u \cup \beta_\tau$ , где  $\beta_u$  и  $\beta_\tau$  — участки границы, на которых заданы перемещения и напряжения соответственно.

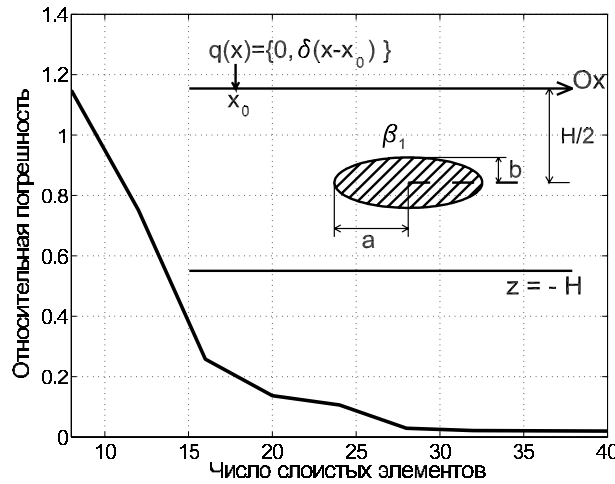


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности от числа элементов;  $\omega = 2.0$ ;  $x_0 = -3.0$

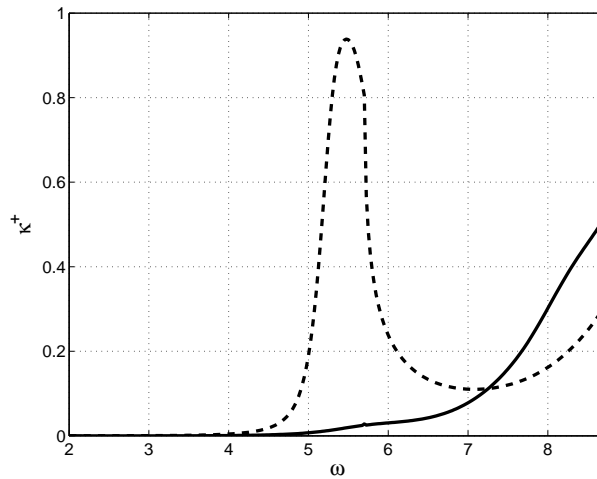


Рис. 3. Коэффициенты прохождения  $\kappa^+(\omega)$  для набегающей первой симметричной моды  $s_0$  (пунктирная линия) и антисимметричной моды  $a_0$  (сплошная линия)

3. В качестве примера рассматривалась задача о гармонических колебаниях упругого слоя с неподвижным жёстким включением эллиптической формы ( $\mathbf{u}|_{\beta_1} = 0$ ). Источником колебаний служит сосредоточенная вертикальная поверхностная нагрузка  $\boldsymbol{\tau}(x, 0) = \{0, \delta(x - x_0)\}$ . Результаты, представленные на

рис. 2 и рис. 3, получены при следующих безразмерных значениях параметров:  $\nu = 1/3$ ;  $\mu = 1$ ;  $\rho = 1$ ;  $H = 1$ ;  $a = 1$ ;  $b = 0.2$ .

Ошибка выполнения граничного условия на  $\beta_1$  контролировалась по величине относительной погрешности  $\int_{\beta_1} |u|/|u_0| ds$  (Для точного решения её значение равно нулю). Как видно из рис. 2, с увеличением числа слоистых элементов наблюдается монотонное уменьшение относительной погрешности.

На рис. 3 приводится зависимость коэффициентов прохождения  $\kappa^+ = E^+/E_0$  для набегающих из бесконечности симметричной  $s_0$  и антисимметричной  $a_0$  мод от круговой частоты  $\omega$ ;  $E_0$  — осреднённая за период колебаний энергия, переносимая бегущей волной;  $E^+$  — энергия, уходящая вправо на бесконечность через боковое сечение волновода. Для набегающей волны предполагалось  $\tau = \{0; \delta(x-x_0)\}$ ,  $x_0 \rightarrow -\infty$ . Как и ожидалось, заметное увеличение  $\kappa^+$  наблюдается при  $\omega > \omega_1$ , где  $\omega_1 = \pi/2h_1 \approx 5.23$  — частота появления первой бегущей волны в волноводе толщины  $h_1 = H/2 - b$ , образуемом между включением и поверхностью слоя.

Работа поддержана грантами РФФИ № 04-01-00801 и INTAS Nr. 05-1000008-7979.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [2] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Методы вычисления матрицы Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Вып. 27 № 1. С. 93–101.
- [3] E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, D. V. Timofeev A layered element method for simulation elastodynamic behaviour of laminate structures with defects. In monograph: Advances in the Meshless Method /edited by: J. Sladek, V. Sladek, and S.N. Atluri, Tech Science Press, USA, 2006.

**Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A., Kirillova E.V.** *Application of a layered element method for simulation waveguides with inhomogeneities.* Fast and stable semi-analytical algorithms elaborated and implemented earlier for calculation Fourier symbols of Green's matrices for laminate structures are used to derive fundamental solutions approximating wave fields in infinite waveguides with surface irregularities and hidden cavities. In contrast to the conventional boundary elements relying on the fundamental solutions for an infinite homogeneous space, such elements exactly satisfy the boundary conditions at plane-parallel interfaces and horizontal parts of exterior surfaces, so that only conditions at the irregularities, cavities and non-horizontal edges remain to be approximated. This approach requires a much smaller number of elements in comparison with the classical BEM.

# СПЕКТР ФЛОКЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Гуда С. А.

*Ростовский государственный университет*

Исследуется совместная задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения внутри сосуда, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Жесткость момента упругой силы, действующего на тело, периодически меняется со временем. Изучается спектр Флоке линеаризованной на состоянии покоя задачи. Спектральная задача сводится к отысканию нулей определителя Хилла. Исследуется структура спектра Флоке.

**Введение.** В настоящей работе исследуется совместная задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения внутри сосуда произвольной формы, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. При таком движении область течения жидкости не меняется со временем. Момент упругой силы  $M_{elastic}$ , действующий на тело, заставляет его совершать крутильные колебания около положения равновесия. Жесткость упругого момента периодически меняется со временем. Данную ситуацию нетрудно реализовать в эксперименте. Сила упругости создается тонким подвесом, влиянием которого на жидкость можно пренебречь. Периодическое изменение жесткости подвеса создается путем изменения длины его закручивания при помощи небольшого зажима.

При определенном сочетании параметров: частоты, амплитуды и формы модуляции — упругий момент может сильно раскачать тело, произойдет так называемое параметрическое возбуждение неустойчивости. А иногда модуляция жесткости заставляет колебания тела затухать еще быстрее, чем в ее отсутствие. Обо всех этих явлениях можно судить по спектру Флоке линеаризованного оператора.

В линеаризованной системе уравнений, описывающей совместное движение жидкости и тела, можно исключить скорость течения жидкости и получить интегро-дифференциальное уравнение для угла поворота  $\varphi$  тела

$$\ddot{\varphi} + \nu\eta\overset{\circ}{m}_0\dot{\varphi} + \nu\eta \int_0^t J_1(t-\tau)\ddot{\varphi}(\tau) d\tau + (1 + h(\omega t))\varphi = -\nu\eta J_2(t). \quad (1)$$

где ядро интегрального оператора  $J_1(t) > 0$  обладает особенностью при  $t = 0$ :  $J_1(t) \sim \frac{c}{\sqrt{t}}$ , функция  $J_2(t)$  экспоненциально убывает и определяется начальным условием. Свойства задачи о вращении тела в жидкости похожи на свойства ее упрощенной модели — маятника с трением:

$$\ddot{\varphi} + \nu\dot{\varphi} + (1 + h(\omega t))\varphi = 0. \quad (2)$$

Об устойчивости состояния покоя  $\varphi = 0$  будем судить по спектру Флоке. Число  $\sigma$  называется показателем Флоке, если уравнение (1) имеет решение вида  $\varphi(t) = e^{\sigma t}\psi(t)$ , где  $\psi$  —  $T$ -периодическая функция ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ).

Г. В. Хилл применил интересный метод для поиска показателей Флоке уравнения (2) без трения (см. [3], §19.41). Он записал уравнение для функции  $\psi$  в базисе



Фурье и составил определитель  $D(\sigma)$  полученной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, предварительно умножив каждое уравнение на некоторый постоянный множитель для обеспечения сходимости. Г. В. Хиллу удалось вычислить данный определитель, точнее представить его значение в произвольной точке через значение в нуле.

В задаче о вращении тела в жидкости тоже можно вывести соответствующую формулу — это разложение определителя Хилла на простейшие дроби. Оказывается, что вычеты в полюсах имеют один и тот же знак так же, как и у дисперсионной функции невозмущенной задачи (задачи с  $h = 0$ ). Это позволило доказать, что дисперсионное уравнение имеет счетное число корней на положительном луче действительной оси и еще два корня, которые могут быть комплексно сопряженной парой, могут вместе лежать на отрицательном луче действительной оси или на одном из интервалов между полюсами определителя. Таким образом неустойчивость может возникнуть тогда и только тогда, когда один из этих двух корней окажется внутри единичного круга.

### § 1. Постановка задачи

Безразмерная линеаризованная система уравнений, описывающая совместное движение жидкости и тела, имеет вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{u}|_{S_r} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\phi, \quad \vec{u}|_{S_c} = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{\varphi} - \nu \eta M(\vec{u}) + (1 + h(\omega t))\varphi = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{u}$  — поле скорости жидкости,  $p$  — давление,  $\varphi$  — угол отклонения тела от положения равновесия  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi}$  — угловая скорость вращения тела,  $\vec{e}_\phi$  — один из трех координатных ортов  $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ ,  $h(\tau)$  —  $2\pi$ -периодическая относительная модуляция жесткости с нулевым средним,  $\omega$  — круговая частота модуляции,  $\nu$  — безразмерная вязкость жидкости (величина, обратная к числу Рейнольдса  $\nu = Re^{-1}$ ),  $\eta$  — отношение плотностей жидкости и тела. Безразмерный момент  $M(\vec{u})$  силы вязкого трения вычисляется по формуле

$$M(\vec{u}) = - \int_{S_r} r \Sigma_{ij}(\vec{u}) n_i e_{\phi j} dS, \quad \Sigma_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Здесь принято обычное соглашение о суммировании по  $i, j$  от 1 до 3.

### § 2. Спектр Флоке.

Об устойчивости состояния покоя будем судить по спектру Флоке линеаризованной задачи для возмущений, несмотря на отсутствие обоснования линеаризации для задач такого типа. Монография В.И. Юдовича [2] о методе линеаризации для течений с неподвижной границей, а также статья [1], в которой линеаризация обосновывается для задачи с постоянной жесткостью упругой силы, позволяют надеяться на то, что метод линеаризации применим и в этом случае.

Комплексное число  $(-\sigma)$  (показатель Флоке) принадлежит спектру Флоке, если система (3)-(5) имеет решение вида

$$\vec{u}(x, t) = e^{-\sigma t} \vec{v}(x, t), \quad \varphi(t) = e^{-\sigma t} \psi(t), \quad (6)$$

где  $\vec{v}(x, t)$  и  $\psi(t)$  –  $T$ -периодические по времени функции,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Каждому такому решению отвечает мультипликатор Флоке  $\rho^{-1} = e^{-\sigma T}$ . Разложим  $T$ -периодические функции  $\vec{v}(x, t)$  и  $\psi(t)$  из формулы (6) в ряды Фурье

$$\vec{u}(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{v}_k(x) e^{-(\sigma - i\omega k)t}, \quad \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k e^{-(\sigma - i\omega k)t}.$$

Подставляя данные выражения в уравнения (3)-(5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, приходим к задаче

$$(\sigma - i\omega k) \vec{v}_k + \nu \Pi \Delta \vec{v}_k = 0, \quad \vec{v}_k \cdot \vec{n} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{v}_k|_{S_r} = -r(\sigma - i\omega k) \psi_k \vec{e}_\phi, \quad \vec{v}_k|_{S_c} = 0, \quad (8)$$

$$(\sigma - i\omega k)^2 \psi_k - \nu \eta M(\vec{v}_k) + \psi_k + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j} \psi_j = 0, \quad (9)$$

где  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  – коэффициенты Фурье функции  $h$ . Упростим систему (7)-(9). Для этого из уравнений (7)-(8) определим компоненту  $\vec{v}_k$

$$\vec{v}_k = -(\sigma - i\omega k) \psi_k (\vec{\chi} - (\sigma - i\omega k) R_{\sigma - i\omega k} \vec{\chi}),$$

где поле  $\vec{\chi}$  определяется из задачи

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\chi} &= \nabla q, \quad \operatorname{div} \vec{\chi} = 0, \\ \vec{\chi}|_{S_r} &= r \vec{e}_\phi, \quad \vec{\chi}|_{S_c} = 0. \end{aligned}$$

Момент силы вязкого трения течения  $\vec{v}_k$  есть

$$M(\vec{v}_k) = (\sigma - i\omega k) \psi_k \left[ \overset{\circ}{m}_0 + (\sigma - i\omega k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \chi_n^2}{\sigma - i\omega k - \lambda_n} \right],$$

где  $\overset{\circ}{m}_0 = -M(\vec{\chi}) > 0$ ,  $\{\vec{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$  – собственные функции ( $\|\vec{\Phi}_n\|_{\mathbb{L}_2(D_f)} = 1$ ),  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  – собственные значения оператора Стокса  $S$ ,  $\chi_n = (\vec{\chi}, \vec{\Phi}_n)_{\mathbb{L}_2(D_f)}$ . Подставляя данное выражение в уравнение (9), приходим к упрощенной спектральной задаче

$$d_k(\sigma) \psi_k + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_{k-j} \psi_j = 0, \quad (10)$$

где  $d_k(\sigma) = d_0(\sigma - i\omega k)$ ,  $d_0$  – дисперсионная функция невозмущенной задачи (задачи с  $h = 0$ ), исследованная в [1]

$$d_0(\sigma) = \sigma^2 + \nu \eta \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n^2}{1 - \frac{\sigma}{\lambda_n}} - \overset{\circ}{m}_0 \nu \eta \sigma + 1.$$

Г.В. Хилл изучая движение лунного перигея (см. [3], §19.41), использовал для отыскания показателей Флоке бесконечный определитель. Следуя ему, разделим  $k$ -тое уравнение (10) на  $d_k(0)$  и составим определитель полученной системы

$$D(\sigma) = \det \left( \frac{d_k(\sigma)}{d_k(0)} \delta_{kj} + \frac{h_{k-j}}{d_k(0)} \right)_{k,j=-\infty}^{+\infty}, \quad (11)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера. Таким образом, спектральная задача (10) сводится к решению дисперсионного уравнения  $D(\sigma) = 0$ . Удобно сделать замену переменных  $\rho = e^{\frac{2\pi}{\omega}\sigma}$  и перейти к исследованию функции  $\tilde{D}(\rho) = D(\frac{\omega}{2\pi} \ln \rho)$ . Так как определитель  $D(\sigma)$  периодическая функция  $D(\sigma + i\omega) = D(\sigma)$ , то функция  $\tilde{D}$  однозначная.

Разложение функции  $\tilde{D}$  на простейшие дроби имеет вид

$$\tilde{D}(\rho) = \frac{c_{-1}}{\rho} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{1}{r_n - \rho} - \frac{1}{r_n} \right). \quad (\text{Ddrobi})$$

Примечательно, что вычеты в полюсах  $r_n = e^{\frac{2\pi}{\omega}\lambda_n}$  имеют один и тот же знак  $c_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , как и вычеты в полюсах  $\lambda_n$  дисперсионной функции  $d_0$  невозмущенной задачи (задачи с  $h = 0$ ). На основе данного представления доказывается

**Теорема.** Множество корней дисперсионного уравнения  $D(\sigma) = 0$  состоит из бесконечной последовательности чисел  $\rho_n \in (r_{n-1}; r_n)$ ,  $n \geq 2$ , а также двух чисел  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , которые могут а) располагаться на отрицательном луче действительной оси:  $\rho_{0,1} < 0$ ; б) быть комплексно сопряженной парой  $\rho_0^* = \rho_1$ ; в) находиться вместе на одном из интервалов  $(0; r_1)$ ,  $(r_1; r_2)$ ,  $(r_2; r_3)$ , ... Других случаев нет.

Работа выполнена при финансовой помощи гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-5747.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гуда С.А., Юдович В.И. Совместная задача о вращении твердого тела в вязкой жидкости под действием упругой силы // Сибирский матем. ж., 2007г. В печати.
- [2] Юдович В.И. Метод линеаризации в теории гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону.: РГУ, 1984.
- [3] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н Курс современного анализа. Часть 2. М. 1963.

**Guda S.A.** *Floquet spectrum of torsional oscillations of solid in viscous fluid.* Annotation. The problem about quiescent state stability of torsion pendulum swinging in a volume filled with viscous incompressible fluid is discussed. Axisymmetric body is affected by momentum of elastic force with periodic (in time) rigidity coefficient. Floquet spectrum of linearized problem is investigated. Spectral problem is reduced to searching zeros of Hill determinant. Possible spectrum structures are determined.

# МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОМЕРНОЙ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ МОДЕЛИ НА РАЗЛИЧНЫХ МАСШТАБАХ

Гузев М. А.\* , Израильский Ю. Г.\*\* , Шепелов М. А.

\* Президиум ДВО РАН, Владивосток

\*\* Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

На основе точного решения для одномерной цепочки гармонических осцилляторов вычислены механические характеристики модели на различных масштабных уровнях. Получено представление для модуля Юнга как функции числа частиц на данном масштабе и стационарное распределение температуры.

## 1. Введение

В механике деформируемого твердого тела существует проблема построения модели для описания свойств материалов на различных пространственно-временных масштабах. Возможное решение связано с рассмотрением деформации твердого тела как иерархии структурных элементов различного пространственного масштаба. При этом новое качество накапливается на каждом масштабном уровне и при достижении некоторого критического значения происходит его перенос на новый масштабный уровень.

Однако, существует противоречие между дискретностью иерархической структуры и континуальным подходом при ее описании. Преодоление указанного противоречия может быть осуществлено с помощью молекулярно-динамического моделирования и процедуры усреднения для сопоставления с результатами механики сплошной среды [?, ?].

При применении метода молекулярной динамики для расчета механических характеристик материала нельзя считать решенным до конца вопрос о достоверности получаемых результатов. Один из вариантов тестирования численных расчетов основан на использовании точных решений соответствующих задач, поэтому с позиций континуальной механики представляет значительный интерес детальный анализ молекулярных моделей, допускающих аналитические решения. Классической моделью является одномерная цепочка гармонических осцилляторов.

Целью данной работы является исследование на различных масштабных уровнях механических характеристик указанной выше системы.

## 2. Вычисление механических характеристик материала

Для расчета среднего значения напряжения  $\sigma_\Delta$  на интервале  $\Delta$  используется формула, приведенная авторами [?]:

$$\sigma_\Delta = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_j \frac{p_j^2}{m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} F_{ij} x_{ij} \right). \quad (1)$$

Здесь  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $F_{ij}$  — сила, действующая между частицами с номерами  $i$  и  $j$ , потенциал взаимодействия  $U = U(x_{ij})$ :  $F_{ij} = -\partial U / \partial x_{ij}$ . Уравнения движения для

системы попарно взаимодействующих частиц имеют вид [?]:

$$m\ddot{x}_j = c(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $x_j$  — координата  $j$  — частицы,  $m$  — масса частицы,  $c$  — постоянная взаимодействия.

Пусть в начальном состоянии частицы равноудалены и их начальная скорость равна нулю:

$$u_j|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_j|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Выбираем начало отсчета, совпадающим с начальным положением нулевой частицы. Тогда координата  $x_j$  представима в виде  $x_j = ja + u_j$ , где функция  $u_j$  определяет смещение  $j$  — частицы из положения равновесия и является решением уравнения (2). Поскольку кристалл подвергается квазистатическому одноосному растяжению, при этом первая частица движется с постоянной скоростью, а последняя закреплена,  $u_j$  удовлетворяет условиям:

$$x_0 = ut, \quad u_{n+1} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим статический вклад в напряжение, определяемый вторым слагаемым в (1):

$$\sigma_{st} = \frac{-c}{\Delta} \sum_{j=N_1}^{N_2} (x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_j - a). \quad (5)$$

В (4) следует подставить решение (2) при условиях (3), (4), которое записывается в виде:

$$u_j = \frac{ut}{n+1}(n-j+1) - \frac{u}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k t} \sin \omega_k t \sin \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} \quad (6)$$

$$\omega_k = 2\lambda \sin \pi k / 2(n+1), \quad \lambda = \sqrt{c/m}.$$

В результате подстановки получаем:

$$\sigma_{st} = \frac{-c}{\Delta} \left[ Na^2(\varepsilon_L + \varepsilon_L^2) + a(2\varepsilon_L + 1) \sum_{j=N_1}^{N_2} \Omega_j + \sum_{j=N_1}^{N_2} \Omega_j \Omega_j \right], \quad (7)$$

$$\Omega_j = -\frac{u}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k t \left[ \sin \frac{\pi k(j+1)}{n+1} - \sin \frac{\pi k j}{n+1} \right] \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)}.$$

Следует так же учесть, что рассматриваемая задача имеет два временных масштаба. Первый  $t_{out}$  определяет время изменения расстояния между частицами при внешнем воздействии. Второй масштаб  $t_{int}$  характеризует минимальное время изменения нормальной моды. При переходе к безразмерной переменной  $s = t/t_{int}$ , имеем быстроменяющийся аргумент в нормальных модах. По нему можно выполнить усреднение по времени, полагая

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds f.$$

Усредненные величины являются естественными характеристиками континуальной механики на интервалах времени, значительно превышающих молекулярную единицу времени.

Далее обозначим через  $L_0 = a(n + 1)$  длину кристалла в начальный момент времени. Локальное значение деформации  $\varepsilon_j$  рассчитывается по формуле:  $\varepsilon_j = u_{j+1} - u_j/a$ . Относительное удлинение кристалла как целого определяется  $\varepsilon_L = L - L_0/L_0 = -ut/a(n + 1)$ .

Величины  $\varepsilon_j$  являются дискретными характеристиками, а  $\varepsilon_L$  — характеристика континуальной механики, переход к которой определяется некоторой процедурой усреднения микрохарактеристик на пространственном уровне. Для этого выделим интервал  $\Delta$ , содержащий  $N$  частиц с  $N_1$ , по  $N_2$  соответственно. Деформацию  $\varepsilon_\Delta$  на масштабном уровне  $\Delta$  определим как среднее значение локальной деформации на интервале  $\Delta$ :

$$\varepsilon_\Delta = \frac{\sum \varepsilon_j}{N} = \frac{u_{N_2+1} - u_{N_1}}{N} = \varepsilon_L + \frac{\sum \Omega_j}{aN}.$$

На основе этого следует, что  $\langle \varepsilon_\Delta \rangle = \varepsilon_L$ .

Формула (1) содержит также кинетическое слагаемое. При дальнейшем сопоставлении получаемых результатов с выводами континуальной теории необходимо выделить конвективный вклад из кинетического члена. С этой целью находим  $\langle \dot{u}_j \rangle = u(n - j + 1)/(n + 1)$  и  $\dot{u}_j - \langle \dot{u}_j \rangle = -\frac{u}{n+1} \sum_{k=1}^n \left[ \cos \omega_k t \sin \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} \right]$ . Усредняя по времени, получаем с точностью до множителя безконвективный кинетический вклад в напряжение:

$$m \sum_{N_1}^{N_2} (\dot{u}_j - \langle \dot{u}_j \rangle)^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{u}{n+1} \right)^2 \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{k=1}^n \left[ \sin^2 \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2(n+1)} \right].$$

Объединяя вычисления, в результате получаем:

$$\langle \sigma_\Delta \rangle = -\frac{N}{N-1} ca (\langle \varepsilon_\Delta \rangle + \langle \varepsilon_\Delta \rangle^2) + \frac{mu^2 N}{2a(N-1)} S(N_1, N_2, n), \quad (8)$$

$$S(N_1, N_2, n) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin N z_k}{N \sin z_k/2} \cos(N_1 + N_2 + 1/2) z_k \operatorname{ctg}^2 z_k/2.$$

### 3. Анализ результатов

Формула (7) определяет уравнение состояния одномерной системы, которая является континуальной моделью стержня длины  $L_0$ . Уравнение состояния стержня в линейном приближении запишем в виде [?]:

$$\sum \approx E \left\{ -\frac{L - L_0}{L_0} + \alpha(T - T_0) \right\}, \quad (9)$$

где  $\sum$  — напряжение в стержне,  $E$  — модуль Юнга,  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  — температура.

Сравним формулы (7) и (8) в указанном приближении. С этой целью перейдем к статическому пределу в (7), полагая  $u \rightarrow 0$  и оставляя линейный вклад по

деформации, тогда

$$\langle \sigma_{\Delta} \rangle \approx -\frac{Nca}{N-1} \langle \varepsilon_{\Delta} \rangle.$$

С точки зрения физики статический предел соответствует  $T = T_0$ , то есть (8) редуцируется к  $\sum \approx -E \frac{L-L_0}{L_0}$ .

Из последних соотношений сразу следует, что величина

$$E(N) = \frac{Nca}{N-1} \equiv \frac{N}{N-1} E$$

имеют смысл модуля Юнга на масштабном уровне  $\Delta$ .

Дальнейшее сравнение (7), (8) дает:  $\frac{mu^2}{2ca^2} S = \alpha(T - T_0)$ .

Отсюда видно, что функция  $S$  характеризует распределение температуры вдоль стержня.

#### 4. Заключение

Выполненное исследование показывает, что переход от дискретной модели к континуальной основан на использовании процедуры усреднения по пространственно-временному масштабу. При этом временное усреднение дает возможность рассматривать эволюцию системы и получать характеристики на интервалах, значительно превышающих молекулярную единицу времени. Дальнейшее усреднение по масштабу позволяет получить зависимость от параметров внутренней структуры тела (числа частиц) и при предельном переходе дает характеристики континуальной механики.

Работа выполнена при поддержке интеграционного гранта 06-П-СО-01-002 и частично при поддержке гранта РФФИ, № 05-01-00618-а.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Головнев И.Ф., Головнева Е.И., Конев А.А., Фомин В.М. Физическая мезомеханика и молекулярно-динамическое моделирование // Физ. мезомех. 1998. Т1. № 2. С. 21–33.
- [2] Головнева Е.И., Головнев И.Ф., Фомин В.М. Особенности применения методов механики сплошных сред для описания наноструктур // Физ. мезомех. 2005. Т8. № 5. С. 47–54.
- [3] Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Новосибирск.: Изд-во Новосиб. ун-та: Сиб. унив. изд-во, 2001. 608 с.

**Guzev M.A., Izrailskii Yu.G., Shepelov M.A.** *Molecular dynamic characteristics of a 1D exactly solved model at different scale.* Based on an exact solution for 1D chain of harmonic oscillators, we have calculated mechanical characteristics of the model at different scale levels. Young's modulus is represented as a function of the number of particles at a given scale and stationary temperature distribution is obtained.

# АПРИОРНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОРРЕКТНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА

Драги́лев В. М.

*Донской государственнй технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается задача о восстановлении стационарной контактной нагрузки, действующей на упругое тело прямоугольного сечения, по данным измерений на свободной поверхности. Применяется оригинальная методика, позволяющая оценить перспективы реконструкции при заданном уровне входных погрешностей.

В работах [1-3] и др. изучались т.н. обратные граничные задачи (ОГЗ), в которых стационарное волновое поле, возбуждаемое в линейно-упругой среде, требуется восстановить по данным о смещениях и контактных напряжениях, заданных на отдельном участке границы. Ввиду некорректности ОГЗ их практической постановке должен предшествовать известного рода априорный анализ. А именно, необходимо каким-то образом выяснить, насколько широким является класс волновых полей (оригиналов), допускающих адекватную реконструкцию при заданном уровне входных погрешностей. Простейшим средством для такого анализа служат численные эксперименты с имитацией случайных погрешностей и модельными оригиналами, предположительно "похожими" на искомый. Этот прием является традиционным, но вместе с тем он имеет и очевидные недостатки (качество реконструкции двух оригиналов, на первый взгляд вполне однотипных, может быть весьма различным; затруднена обработка и интерпретация результатов в многопараметрических ОГЗ). Альтернативная схема априорных прогнозов (САП) развивается в работах [3-5]. В настоящем докладе освещаются некоторые результаты применения упомянутой схемы к следующей модельной ОГЗ.

Пусть тело из упругого изотропного материала в декартовых координатах  $(x_1, x_2, x_3)$  занимает область  $[-l, l] \times [-h, h] \times (-\infty, \infty)$ . На боковых границах тела ( $x_1 = \pm l$ ) обеспечивается скользящий контакт с твердыми гладкими поверхностями; нижняя граница ( $x_2 = -h$ ) свободная. К верхней границе ( $x_2 = h$ ) приложена нормальная внешняя нагрузка вида  $\exp[-i\omega Q(x_1)]$ , под воздействием которой тело совершает установившиеся колебания в условиях плоской деформации.

Обозначим:  $U_k$  ( $k = 1, 2$ ) — компоненты вектора бесконечно малых перемещений,  $\rho$  — плотность;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Перейдем к безразмерным переменным  $x = x_1/h$ ,  $y = x_2/h$ ,  $u_k = U_k/h$ ,  $q(x) = Q(x_1)/(\lambda + 2\mu)$  и введем безразмерные параметры

$$\theta = \frac{l}{h}; \quad \sigma = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}; \quad \kappa = \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{1/2} h\omega.$$

Прямая задача о колебаниях тела при заданной нагрузке решается в замкнутом виде методом суперпозиции [6]. Поставим обратную задачу об отыскании нагрузки  $q(x)$ , распределенной на заданном участке  $x \in [a, b]$  верхней границы ( $y = 1$ ) по



данным о нормальных смещениях  $u(x) \equiv u_2(x, y) |_{y=-1}$  на нижней границе. Приближения  $\tilde{q}(x)$  к оригиналу  $q(x)$  естественно отыскивать как обобщенные решения интегрального уравнения (ИУ) первого рода

$$[A q](x) \equiv \int_a^b G(x, s) q(s) ds = \tilde{u}(x), \quad x \in [-\theta, \theta], \quad (1)$$

где  $G(x, s)$  — функция Грина корректно поставленной прямой задачи,  $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$ ,  $\delta u(x)$  — погрешность, возникшая в процессе измерений. Важную роль играет ниже относительная погрешность  $\Delta = \|\delta u\|_{L_2} / \|u\|_{L_2}$ , которая считается априорно известной. Функция  $G(x, s)$  представима равномерно сходящимся рядом

$$G(x, s) = \frac{a_0}{2\theta} + \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(p_n s) \cos(p_n x) + b_n \sin(r_n s) \sin(r_n x)], \quad (2)$$

где  $a_n, b_n$  — зависящие от  $\kappa, \sigma, \theta$  коэффициенты, выражения для которых здесь для краткости не приводятся,  $p_n = \pi n / \theta$ ,  $r_n = (n - 1/2)\pi / \theta$ .

Применимость САП [3-5] в данной ОГЗ обеспечивается следующими свойствами ядра (2). Обозначим:  $G_M(x, s)$  — сумма первых  $M$  членов ряда (2),  $G_r(x, s)$  — остаток ряда; разбиению  $G(x, s) = G_M(x, s) + G_r(x, s)$  отвечает разбиение интегрального оператора  $A = A_M + A_r$ . Норма  $\|A_r\|$  легко оценивается сверху; отношение  $\|A_r\| / \|A_M\|$  является экспоненциально малым по параметру  $\theta$  при  $\theta \rightarrow 0$ . В указанном пределе, а фактически уже при значениях  $\theta$ , близких к 1 и меньших, в разложении (2) доминирует несколько младших членов, число которых составляет около  $2\bar{n} + 1$ , где  $\bar{n}$  — целая часть от  $\kappa\theta / (\pi\sqrt{\sigma})$ . Тем самым, при  $\theta < 1$  имеет место аналогия со случаем дальней зоны [3]: основной вклад в наблюдаемое граничное поле дают ведущие длинноволновые гармоники, количество которых растет с повышением частоты  $\omega$ .

Формулировка используемой САП опирается на анализ воображаемой процедуры реконструкции, в которой ядро  $G(x, s)$  заменяется вырожденной аппроксимацией  $G_M(x, s)$ , а обобщенные решения ИУ (1) отыскиваются обобщенным (т.е. не регуляризирующим, — см. [4]) проекционным методом, в виде

$$\tilde{q}(s) = \sum_{n=1}^N c_n f_n(s), \quad (N \leq M), \quad (3)$$

где  $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  — стандартная система полиномов Лежандра, ортонормированных в  $L_2[a, b]$ :  $f_1(s) = const.$  и т.д. Упорядоченность базисных функций "по степени сложности т.е. по количеству нулей и экстремумов, отвечает целям априорного анализа, призванного дать представление о возможностях восстановления "наиболее простых т.е. слабо осциллирующих оригиналов  $q(x)$  [3, 5]. Во избежание недоразумений отметим, что в априорных прогнозах из поля зрения частично выпадают такие, не представляющие большого прикладного интереса оригиналы  $q(x)$ , у которых в разложении по базису  $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  подавлено несколько младших членов, начиная с первого (эти вопросы подробнее обсуждаются в [5]).

Согласно [3-5], априорные прогнозы сводятся к численным расчетам конечного набора величин  $C_N$ ,  $\chi_N$  и  $\bar{\Delta}$ . Здесь  $N = 1, 2, \dots, M$ ;  $C_N$  — число обусловленности [3-5], монотонно растущее вместе с  $N$ ;  $\chi_N$  — норма некоего линейного оператора, порождаемого аппроксимирующим ядром  $G_M(x, s)$  и базисом  $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  [4]; параметр  $\bar{\Delta}$  представляет собой удобную оценку сверху для  $(\|A_r\|/\|A_M\|)^{1/2}$  [5].

При соотношении  $\chi_N \gg 1$  обобщенный метод проекций скорее всего будет малоэффективен по сравнению с регуляризирующими методами, и основанные на нем априорные прогнозы утрачивают объективность. Поэтому для успешного применения САП значения нормы  $\chi_N$  должны быть меньше или порядка единицы; с долей условности запишем последнее требование в краткой форме

$$\chi_N < 1, \quad (N = 1, 2, \dots, M). \quad (4)$$

Условие (4) неявным образом налагает определенные ограничения на параметры ОГЗ; одна из целей настоящей работы как раз и заключалась в том, чтобы уточнить эти ограничения в ходе численных расчетов. Прямое вычисление нормы  $\chi_N$  затруднено; взамен этого предлагается исследовать величину  $\chi'_N$  — верхнюю оценку для  $\chi_N$ , завышенную не более, чем в  $\sqrt{N}$  раз [4].

Параметр  $\bar{\Delta}$  позволяет контролировать применимость САП в той части, что касается аппроксимации интегрального оператора. Качественное условие, при котором допустимо пренебречь остаточными членами  $A_r$ , имеет вид  $\Delta \gg \bar{\Delta}$ ; практически достаточно, чтобы отношение  $\Delta/\bar{\Delta}$  составляло порядка 10 и более [5].

Непосредственным результатом прогноза является число  $N_{\max}$  — максимальная размерность  $N$  решения (3), совместимая с уровнем входных погрешностей, которая может быть приближенно найдена по критерию [1, 3]

$$N_{\max} = \max\{N : C_N \Delta < 1\}. \quad (5)$$

Исходя из качественных соображений утверждается [5], что в типичном случае примерно столько же младших членов обобщенного Фурье-разложения по выбранному базису  $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  будет адекватно восстановлено при решении ИУ (1) регуляризирующими методами. Отметим, что критерий (5) установлен феноменологически [1, 3] и может быть обоснован только лишь с привлечением неких эвристических гипотез [3], учитывающих случайную природу входных погрешностей. Критическое значение  $C_N \Delta = 1$  является, разумеется, отчасти условным.

Численные расчеты проводились для  $\nu = 0.3$ , при различных значениях параметра  $\theta$ , лежащих в интервале от 0.3 до 1, и безразмерной частоты  $\kappa$ , которая варьировалась в пределах от 5 до 15. При конкретных значениях  $\theta, \kappa$  изучались зависимости величин  $C_N, \chi'_N$  от  $N$ , а также от ширины отрезка  $[a, b]$  — носителя нагрузки. В большинстве примеров отрезки  $[a, b]$  выбирались с общим центром в точке  $x = 0$ ; при несимметричном расположении отрезков все результаты выглядят аналогично. Значения размерности  $M$  задавались близкими к характерному числу  $2\bar{n} + 1$  и, в зависимости от  $\kappa, \theta$ , составляли от 7 до 15. При этом вычисляемые значения параметра  $\bar{\Delta}$  во всех примерах не превышали  $10^{-8} \div 10^{-6}$ .

В отличие от случая дальней зоны [3], в обсуждаемой модели определение размерности  $M$  сопряжено с некоторым произволом, т.к. разделение членов ряда (2)

на "ведущие" и "малые" становится четким только в пределе при  $\theta \rightarrow 0$ . Последовательное увеличение размерности  $M$  позволяет расширить допустимый интервал погрешностей  $\Delta$ , уменьшив значение параметра  $\bar{\Delta}$ , но рано или поздно приводит к нарушению условия (4) (по этому поводу см. ниже интерпретацию численных результатов для нормы  $\chi_N$ ). Неопределенность в выборе размерности  $M$  не столь существенна, т.к. значения числа обусловленности  $C_N$  с заданным номером  $N$  получаются достаточно устойчивыми к вариациям числа  $M$  в области  $M \geq N$ .

В исследованных примерах отчетливо прослеживается быстрое уменьшение нормы  $\chi_N$  при сужении отрезка  $[a, b]$ . Эта тенденция закономерна: оказывается, что при использовании базисной системы полиномов Лежандра и при достаточно общих предположениях об аппроксимирующем ядре  $G_M(x, s)$  норма  $\chi_N$  стремится к нулю при  $|a - b| \rightarrow 0$ . Доказательство последнего свойства автор намерен изложить в отдельной публикации. В настоящей работе важно было подтвердить, что условие (4) может выполняться уже при конечной ширине отрезка  $[a, b]$ , равной размеру тела  $2\theta$  (тогда, как правило, оно будет выполнено также и при  $|a - b| < 2\theta$ ). Численные результаты показывают, что (за исключением, быть может, каких-то особых случаев) это обеспечивается на не слишком высоких частотах, на которых число ведущих мод  $2\bar{n} + 1$  меньше или порядка 10. Последнее вполне понятно, т.к. выход на асимптотику  $\chi_N \rightarrow 0$  должен начинаться при значениях  $|a - b|$ , сравнимых с характерными длинами волн; на низких же частотах доминируют длинноволновые гармоники. Элементарные оценки говорят о том, что на более высоких частотах постановка ОГЗ вряд ли будет продуктивной: в этой области резонансный спектр становится квазинепрерывным, что предъявляет особые требования к точности используемой математической модели упругих колебаний.

Несомненно, что возможности реконструкции во многом зависят от уровня входных погрешностей  $\Delta$ , а также от частоты и от геометрических расстояний. Предложенная САП в области ее применимости создает алгоритмическую основу для количественного исследования и описания подобных зависимостей, причем результаты прогнозов удается представить в сравнительно компактной форме, при помощи графиков числа обусловленности. Простейшие закономерности, наблюдаемые по результатам предпринятых численных расчетов, легко предсказуемы из качественных соображений и состоят в том, что при прочих равных условиях число  $N_{\max}$  (5) обычно уменьшается при сужении априорно заданной области  $[a, b]$  и возрастает при увеличении частоты  $\omega$  (вторая из этих тенденций, по всей видимости, должна нарушаться вблизи резонансных частот).

На практике значения  $\Delta$  могут составлять порядка  $10^{-2}$  [1]. При таком реалистическом уровне входных погрешностей в большинстве изученных числовых примеров значения  $N_{\max}$  (5) находятся в интервале от 4 до 8. Это означает, что в рассмотренной области физических параметров успешной реконструкции поддаются, как правило, только лишь такие распределения нагрузки  $q(x)$ , которые с приемлемой для практических целей точностью могут быть аппроксимированы полиномами степени  $4 \div 8$  и менее. Зависимость числа обусловленности  $C_N$  от  $N$  чаще всего позволяет сделать вывод о том, что даже значительное (на несколько десятичных порядков) уменьшение входных погрешностей  $\Delta$  не привело бы к радикальным улучшениям. Справедливость этих априорных прогнозов под-

тверждается численными экспериментами в духе работы [3], в которых модельные распределения нагрузки восстанавливались разными способами, — методом А.Н. Тихонова и с применением обобщенного проекционного алгоритма.

Одна из упрощающих гипотез, принимаемых при обосновании критерия (5), заключается в том, что можно пренебречь наличием невязки, возникающей при подстановке обобщенного решения (3) в ИУ (1) [3, 5]. Как показано в [7], при отказе от этой гипотезы могут возникать, вообще говоря, дополнительные ограничения на размерность  $N$ , более жесткие по сравнению с условием  $C_N \Delta < 1$ . Эти уточнения обещают быть существенными в некоторых специальных случаях, в первую очередь — на частотах, близких к резонансным. Применительно к исследованным числовым примерам расчеты введенного в работе [7] параметра  $\tau_N$ , характеризующего относительную невязку, не приводят к сколь-нибудь значительному пересмотру априорных предсказаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бобровницкий Ю.И. Задача восстановления поля в структурной интенсивности: постановка, свойства, численные аспекты // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 3. С. 367–376.
- [2] Ватульян А.О., Ворович И.И., Соловьёв А.Н. Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // Прикл. матем. и мех. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 373–380.
- [3] Ватульян А.О., Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 829–834.
- [4] Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. О применении метода проекций в обратной граничной задаче для упругого слоя // Вестник ДГТУ. 2004. Т. 4. № 3. С. 282–289.
- [5] Драгилев В.М. О редукции интегрального уравнения первого рода к уравнению с вырожденным ядром // Вестник ДГТУ. 2006. Т. 6. № 4. (В печати).
- [6] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
- [7] Драгилев В.М. О невязке интегрального уравнения первого рода в методе проекций // Вестник ДГТУ. 2006. Т. 6. № 3. (В печати).

**Dragilev V.M.** *The a priori analysis of the ill-posed inverse boundary problem for the elastic body.* The problem under consideration is the reconstruction of a stationary contact load acting on the elastic body of the rectangular cross-section from the free surface measurements data. The original method is applied which allows to estimate the perspectives of the reconstruction at the given level of the initial data errors.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В ПРОБЛЕМЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Евдокимова О. В., Бабешко В. А.,  
Федоренко А. Г., Бабешко О.М.

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Излагаются некоторые аспекты дифференциального метода факторизации (ДМФ). Обсуждается эффективность его использования для исследования широкого спектра краевых задач для систем дифференциальных уравнений с целью анализа поведения материалов многокомпонентного блочного строения.

Дифференциальный метод факторизации (ДМФ), развиваемый для исследования краевых задач для систем дифференциальных уравнений [1], применяется с целью анализа поведения материалов многокомпонентного блочного строения. Известно, что ДМФ опирается на использование свойств аналитических функций, порождаемых интегральными преобразованиями, быть регулярными в определенных областях комплексных плоскостей в зависимости от их носителей. Последнее обстоятельство позволяет сводить в ДМФ краевые задачи, рассматриваемые в произвольных областях, к функциональным уравнениям определенного типа. К достоинствам ДМФ следует отнести представление решений изучаемых краевых задач в интегральной форме, позволяющей осуществлять как исследование самого решения, так и возможность «управления» его свойствами. Некоторые аспекты метода и указанных возможностей обсуждаются в настоящей работе.

1. ДМФ демонстрируется на примере следующей, достаточно общей, краевой задачи для системы  $P$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных произвольного порядка дифференцирования в выпуклой трехмерной области  $\Omega$ .

$$\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmkn} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, P$$

$$A_{spmkn} = \text{const}, \quad \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_P\}$$

$$\varphi = \{\varphi_s\}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

На границе  $\partial\Omega$  задаются следующие граничные условия

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{K_1} \sum_{p=1}^P B_{spmkn} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = f_s \quad (2)$$

$$s = 1, 2, \dots, s_0 < P, \quad M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

Применение ДМФ к системам краевых задач включает в себя выполнение некоторых действий [1]. Последовательно излагаем их ниже.

2. Сведение дифференциальных уравнений преобразованием Фурье к функциональному уравнению.

Трехмерным преобразованием Фурье вида

$$\Phi_n(\alpha) = \iiint_{\Omega} \varphi_n(\mathbf{x}) e^{i\langle \alpha \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} \equiv F\varphi_n, \quad \Phi_m = F\varphi_m$$

она сводится к функциональному уравнению вида

$$\mathbf{K}(\alpha)\Phi = \iint_{\partial\Omega} \omega, \quad \mathbf{K}(\alpha) \equiv -\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{nm}(\alpha)\| \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\alpha)$  — полиномиальная матрица-функция порядка  $P$ .

Вектор внешних форм  $\omega$  имеет в качестве компонент двумерные функции вида

$$\omega = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \dots, P$$

$$\omega_s = P_{12s} dx_1 \wedge dx_2 + P_{13s} dx_1 \wedge dx_3 + P_{23s} dx_2 \wedge dx_3 \quad (4)$$

Операции внешней формы имеют обозначения

$$dx_1 \wedge dx_2 = dx_1^1 dx_2^2 - dx_1^2 dx_2^1$$

$$dx_1 \wedge dx_3 = dx_1^1 dx_3^3 - dx_1^3 dx_3^1$$

$$dx_2 \wedge dx_3 = dx_2^2 dx_3^3 - dx_2^3 dx_3^2$$

Здесь введены векторы произвольной системы координат из покрытий касательного расслоения поверхности тела. В декартовой системе координат для касательных векторов произвольного элемента покрытия приняты обозначения

$$x_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}$$

$$x_2 = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\}$$

Вид коэффициентов внешних форм приведен в [1].

$$\langle \alpha \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \varphi = \{\varphi_n\}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \Phi = \{\Phi_m\}$$

3. Удовлетворение заданным граничным условиям (2).

Последнее достигается внесением в представление внешних форм значений решения  $\varphi(\partial\Omega)$  и его производных по нормали на  $\partial\Omega$ , взятых из граничных условий. Наличие производных по касательным во внимание не принимается. Внешние формы содержат значения решения  $\varphi_n$  и его производных на границе  $\partial\Omega$ . Из граничных условий (4) подбором и обращением невырожденной матрицы находятся функции или производные по нормали на границе и вносятся в соответствующие представления внешних форм  $\omega$ . Остальные функции или производные по нормали должны быть найдены из псевдодифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании функциональных уравнений.

Для нахождения остальных неизвестных в представлении решения требуется выполнить следующие шаги.

4. Факторизация матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha)$  функционального уравнения.

Обозначим через  $\lambda_+$  область, содержащую все нули  $z_{s+}^\nu$ ,  $Im z_{s+}^\nu > 0$ ,  $z_{s-}^\nu$ ,  $Im z_{s-}^\nu < 0$ ,  $s \pm = 1, 2, \dots, G_\pm$  определителя  $K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ , а через  $\lambda_-$  — ее дополнение до всей плоскости с разделяющей области границей  $\Gamma$ . Несколько позже положение контура будет уточнено.

Тогда, используя результаты работы [2], можем осуществить факторизацию матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$  в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -) \mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu) \tag{5}$$

Здесь матрица-функция  $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$  регулярна в области  $\lambda_-$ , ее определитель не имеет в этой области нулей. Матрица-функция  $\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu)$  имеет в качестве элементов полиномы переменного  $\alpha_3^\nu$ , а ее определитель не зависит от этого параметра. Таким образом, все нули по параметру  $\alpha_3^\nu$  определителя матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$  совпадают с нулями определителя матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$ , находящимися в области  $\lambda_+$ .

Элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$  представимы в интегральной форме. Для их получения введем обозначения для матрицы-функции  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$ , сопряженной к матрице-функции  $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ , положив

$$\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu) = \|M_{pn}(\alpha_3^\nu)\|$$

Выберем матрицу-функцию  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)$  порядка  $P - 1$ , получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером  $m$  у матрицы-функции  $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$ , такую, что нули  $\xi_n^\nu$  ее определителя  $Q(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)$  не совпадают с нулями  $z_{s+}^\nu$ ,  $z_{s-}^\nu$ .

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$[\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)]^{-1} = \|Q^{-1}Q_{ps}\|$$

Тогда элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ , имеющей вид

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right\| \tag{6}$$



допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\mp} \sum_{s=1}^N \frac{Q_{ps}(u_3) M_{sm}(u_3) du_3}{Q(u_3) K(u_3) (u_3 - \alpha_3^\nu)} - \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)}, \quad m \neq p$$

$$\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu) K(\alpha_3^\nu)} + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu) K(\xi_n^\nu) (\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)} \quad (7)$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = \sum_{s=1}^N Q_{ps}(\alpha_3^\nu) M_{sm}(\alpha_3^\nu)$$

Здесь замкнутый контур  $\Gamma_+$  занимает положение, при котором область  $\lambda_+$  содержит только нули  $z_{s+}^\nu, z_{s-}^\nu$ , а область  $\lambda_-$  — только нули  $\xi_n^\nu$ . Замкнутый контур  $\Gamma_-$  охватывает область, содержащую все нули  $z_{s+}^\nu, z_{s-}^\nu, \xi_n^\nu$ .

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$  являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули  $z_{s+}^\nu, z_{s-}^\nu$ , причем член, содержащий их,  $K^{-1}(\alpha_3^\nu)$ , явно выделен.

5. Сведение функционального уравнения к системе псевдодифференциальных уравнений.

Деформируем контур  $\Gamma_-$  таким образом, чтобы, не нарушив свойств по содержанию нулей  $z_{s+}^\nu, z_{s-}^\nu, \xi_n^\nu$  он бы ограничивал бесконечную полосу, содержащую вещественную ось. Будем рассматривать функциональное уравнение на вещественной оси в предположении, что на ней нет нулей  $z_{s+}^\nu, z_{s-}^\nu$ . Очевидно, нули  $z_{s+}^\nu$  лежат в верхней полуплоскости, а  $z_{s-}^\nu$  — нижней.

В дальнейшем используем локальную систему декартовых координат  $\mathbf{x}^\nu = \{x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\}$ , где первые две компоненты лежат в касательной плоскости к границе  $\partial\Omega$ , а третья — лежит на внешней нормали. В каждой локальной системе координат осуществим операцию, которая обеспечивает автоморфизм многообразия  $\Omega$ . С этой целью, осуществив факторизацию (5), представим функциональное уравнение (3) в форме

$$\Phi = \mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu) \mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) \iint_{\partial\Omega} \omega \quad (8)$$

Применяя к этому функциональному матричному уравнению обратное трехмерное преобразование Фурье, потребуем, чтобы исходная вектор-функция  $\varphi$  обращалась бы в нуль при  $x_3^\nu > 0$ , т.е. вне  $\Omega$ . Опуская выкладки, приходим к соотношениям вида

$$\sum_{p=1}^P \iint_{\partial\Omega} \omega_p Z_{mp}(z_{s-}^\nu) = 0, \quad s- = 1, 2, \dots, G_- \quad (9)$$

$$Z_{mm}(\alpha_3^\nu) = -Q(\alpha_3^\nu)$$



Простроенная система является псевдодифференциальными уравнениями.

6. Получение представления решения краевой задачи.

Допустим, с учетом пункта 3, удалось решить систему псевдодифференциальных уравнений (9). Внесем найденные составляющие в вектор внешних форм (8) и используем трехмерное обращение Фурье к функции  $\Phi(\alpha)$ . В результате получим соотношение

$$\varphi(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu) \mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) \int_{\partial\Omega} \omega e^{-i(\alpha_3^\nu x_3^\nu)} d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3^\nu, \quad \mathbf{x}^\nu \in \Omega$$

Благодаря формулам (7), решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру  $\alpha_3^\nu$  по теории вычетов. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}^\nu) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \left[ \mathbf{K}_r^{-1} \left( i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \mathbf{T}_+ (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right. \\ & \left. - \mathbf{K}_r^{-1} \left( i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \mathbf{T}_- (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu) e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu} \right] d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu \end{aligned} \quad (10)$$

$$t_{m\pm}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s\pm}^\nu) = - \sum_{p=1}^P \int_{\partial\Omega_{\pm}} \frac{\omega_p Z_{mp}(z_{s\pm}^\nu)}{Q(z_{s\pm}^\nu) K'(z_{s\pm}^\nu)}$$

$$T_{\pm} = \{0, 0, \dots, 0, t_{m\pm}, 0, \dots, 0\}$$

В этой формуле граница  $\partial\Omega$  для выбранного  $x_3^\nu < 0$ ,  $\mathbf{x}^\nu \in \Omega$  разбита по следующему правилу:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega_+} \omega + \int_{\partial\Omega_-} \omega$$

$$\int_{\partial\Omega_+} \omega \exp(-i\alpha_3^\nu x_3^\nu) \rightarrow 0, \quad \text{Im } \alpha_3^\nu \rightarrow \infty$$

$$\int_{\partial\Omega_-} \omega \exp(-i\alpha_3^\nu x_3^\nu) \rightarrow 0, \quad \text{Im } \alpha_3^\nu \rightarrow -\infty$$

В случае полупространства или слоистой среды псевдодифференциальные уравнения (9) вырождаются в алгебраические, после обращения которых решение строится в конечном виде.

7. Некоторые примеры материалов, имеющих подложки, рассматриваемые в настоящем докладе, изложены в [3, 4]. В то же время наличие подложек не является обязательным при применении ДМФ. В работах [5-9], имеющих практическое значение, метод применялся к блочным структурам без подложки. С учетом специфики удовлетворения граничных условий в этом методе, связанном с появлением обобщенных функций на некотором этапе, в докладе обсуждаются вопросы

поведения решений в многокомпонентных материалах блочного строения. Выявлены условия, позволяющие управлять поведением физико-механических полей, описываемых краевыми задачами, в блоках, составляющих материал.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, (06-01-00295), (06-01-08017), (06-08-00671), программа Юг России, проекты (06-01-96802)–(06-01-96805), (06-05-96806), (06-01-96634)–(06-01-96638), проект НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168-172.
- [2] Бабешко В.А., Бабешко О.М. Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 26–28.
- [3] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49-52.
- [4] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481-485.
- [5] Евдокимова О.В., Барышев М.Г. / Патент РФ на полезную модель № 43711. Текстильное изделие с электрическим обогревом. ФИПС. Москва, 27.01.2005.
- [6] Барышев М.Г., Евдокимова О.В., Джимаков С.С., Васильев Н.С. / Патент РФ на полезную модель № 53111. Комплекс для обеззараживания одежды и придания ей бактерицидных свойств. ФИПС. Москва, 10.05.2005.
- [7] Барышев М.Г., Евдокимова О.В., Коржов А.Н. / Патент РФ на полезную модель № 49694. Одежда для релаксации. ФИПС. Москва, 10.12.2005.
- [8] Евдокимова О.В., Барышев М.Г. / Патент РФ на полезную модель № 56388. Одежда из трикотажного материала. Москва, 20.07.2006.
- [9] Евдокимова О.В., Басов А.А., Барышев М.Г., Джимаков С.С. / Патент РФ на полезную модель № 56128. Одежда, предохраняющая от воздействия электромагнитного излучения. ФИПС. Москва, 10.09.2006.

**Evdokimova O.V., Babeshko V.A., Fedorenko A.G., Babeshko O.M.** *Differential factorization method in the problem of materials design.* Some aspects of differential factorization method (DFM) are stated. For the purpose of behaviour analysis for materials of multicomponent block construction, the DFM efficiency for the investigation of various boundary-value problems for sets of differential equations is discussed.

## О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМ НАНОТРУБОК

**Еремеев В. А.<sup>\*</sup>, Иванова Е. А.<sup>\*\*</sup>,  
Морозов Н. Ф.<sup>\*\*\*</sup>, Строчков С. Е.<sup>\*\*\*\*</sup>**

*<sup>\*</sup> Ростовский государственный университет  
& Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

*<sup>\*\*</sup> Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

*<sup>\*\*\*</sup> Санкт-Петербургский госуниверситет*

*<sup>\*\*\*\*</sup> Ростовский государственный университет*

В работе рассмотрено обобщение метода определения собственных частот наноразмерных объектов предложенного ранее частью авторов для системы пьезоупругих нанотрубок, лежащих на упругой подложке [1, 2]. Показано, что из спектра “большой системы”, состоящей из подложки нанотрубок, возможно выделение нескольких первых собственных частот, соответствующих изгибным колебаниям одной нанотрубки, что позволяет оценить их изгибную жесткость

Одной из ключевых проблем наномеханики является определение механических и физических характеристик нанообъектов. В настоящее время хорошо известно, что нанообъекты демонстрируют аномальные свойства, весьма привлекательные для приложений и вместе с тем не связанные, вообще говоря, со свойствами макроскопических образцов, даже если таковые и можно получить [3]– [7]. Один из наиболее эффективных методов определения упругих модулей, в частности, изгибной жесткости, используемых в механике макрообъектов, основан на измерении собственных частот исследуемого объекта.

В [1, 2] предложен метод определения собственных частот некоторых наноструктур (нанотрубок и нанокристаллов), основанный на измерении собственных частот “большой системы”, состоящей из высокоориентированного массива (решетки) одинаковых нанотрубок или нанокристаллов, выращенных на подложке и расположенных вертикально по отношению к подложке. Поскольку размеры нанообъектов в массиве, как правило, примерно одинаковы, это позволило использовать макроскопические размеры такого массива для изучения свойств нанообъектов путем определения первых собственных частот системы решетка нанотрубок или нанокристаллов – подложка. В [1, 2] показано, что по найденному спектру “большой системы” (решетка–подложка) и спектру подложки можно определить собственные частоты одного нанообъекта.

Идея метода [1, 2] экспериментального определения собственных частот нанообъектов заключается в следующем. Спектр собственных частот системы решетка нанотрубок или нанокристаллов – подложка делится на две части. Одна часть спектра системы представляет собой спектр собственных частот нанообъектов. При колебаниях нанообъектов с этими частотами подложка остается практически неподвижной. Другая часть спектра системы представляет собой спектр собственных частот, близких к собственным частотам подложки без нанообъектов. При этих частотах амплитуда колебаний нанообъектов оказывается существенно меньше амплитуды колебаний подложки. Все перечисленные выше свойства системы

решетка нанотрубок или нанокристаллов – подложка выявлены в результате теоретического исследования, проведенного в работе [1,2]. На основании теоретически полученных фактов можно предложить методику проведения экспериментов по определению собственных частот нанобъектов в двух модификациях.

*Модификация 1.* Измерить собственные частоты системы решетка нанотрубок или нанокристаллов – подложка. Измерить собственные частоты точно такой же подложки без нанобъектов. Сравнить два полученных спектра. Частоты в спектре системы, близкие к частотам подложки без нанобъектов, не представляют интереса. Частоты в спектре системы, которым не находится соответствия среди частот в спектре подложки, представляют собой частоты нанобъектов.

*Модификация 2.* Измерить резонансные частоты системы зафиксировав излучение нанобъектов (это можно сделать, поскольку нанобъекты представляют собой пьезоэлектрики). Одновременно измерить амплитуду колебаний подложки (это можно сделать, поскольку подложка представляет собой макрообъект). Резонансные частоты, при которых амплитуда колебаний подложки равна нулю, являются собственными частотами нанобъектов.

В случае вертикально расположенных нанотрубок метод [1,2] позволяет оценить собственные частоты, соответствующие первым изгибным собственным модам нанотрубки. По этим частотам можно определить стержневую изгибную жесткость нанотрубки. Для определения изгибной жесткости нанопленки, из которой изготовлена нанотрубка, необходимо знать собственные частоты лежащих нанотрубок. В работах [8,9] развиты методы получения различных нанобъектов из многослойных полупроводниковых нанопленок (GaAs, InAs, GeSi и др.) в том числе и нанотрубок, расположенных горизонтально на подложке. Полупроводниковые нанопленки и изготовленные из них наноструктуры представляют большой интерес для электроники. Дизайн таких наноструктур невозможен без учета действующих в них механических напряжений, в значительной степени определяющих долговечность и прочность наноконструкций.

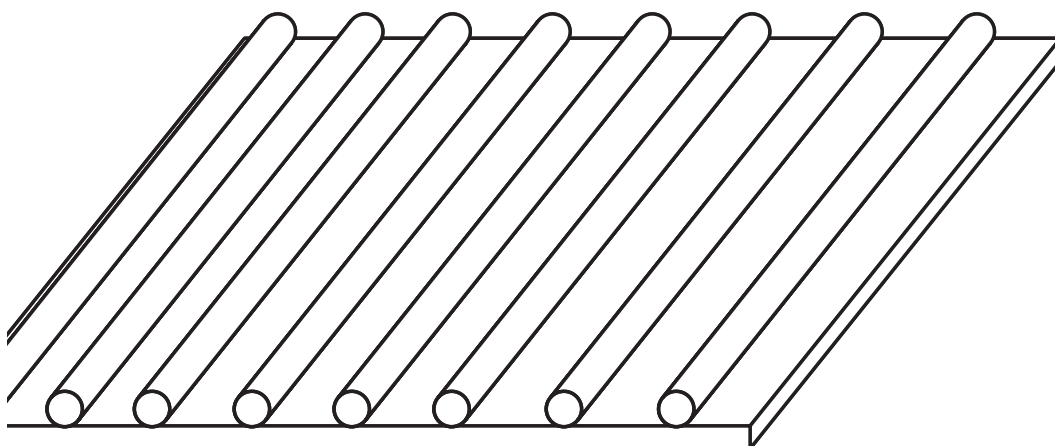


Рис. 1. Система параллельных друг другу нанотрубок, лежащих на подложке.

Целью данной работы является распространение метода определения собственных частот нанобъектов [1,2] на случай нанотрубок, закрепленных горизонтально.

**Модельная задача.** Рассмотрим модель, состоящую из горизонтальной расположенной пластины, моделирующей подложку, и  $N$  лежащих на ней цилиндрических оболочек, моделирующих нанобъекты (см. рис. 1). Пластина занимает область  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq z \leq l$ , толщина пластины  $H$ . Все оболочки имеют одинаковые размеры (длину  $l$ , радиус  $R$  и толщину  $h$ ) и расположены на одинаковом расстоянии  $a = L/(N + 1)$  друг от друга, так что их оси направлены вдоль оси  $z$ . Предполагается, что оболочки жестко прикреплены к пластине.

Основные уравнения теории упругих оболочек имеют вид [10, 11]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, & \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} &= 0, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} &= {}^4\mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, & \mathbf{M}^T &= {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\kappa}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T), & \boldsymbol{\kappa} &= (\nabla \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}) \cdot \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}, \\ \boldsymbol{\varphi} &= -\mathbf{n} \times (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{b} &= -\nabla \mathbf{n}, & \mathbf{c} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}$  – тензоры усилий и моментов, индексом  $\times$  обозначен векторный инвариант тензора второго ранга,  $\nabla$  – двумерный оператор градиента,  $\rho$  – поверхностная плотность массы,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор поворота,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации растяжения–сдвига в касательной плоскости,  $\boldsymbol{\kappa}$  – тензор деформации изгиба–кручения,  ${}^4\mathbf{A}$ ,  ${}^4\mathbf{C}$  – тензоры жесткости оболочки,  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности оболочки,  $\mathbf{a}$  – единичный тензор в касательной плоскости.

Уравнения (1) дополняются краевыми условиями для пластинки: жесткая заделка по двум противоположным краям и свободные остальные края. Для цилиндрических оболочек предполагались выполненными условия периодичности по угловой координате и также края считались свободными от нагрузок. На линии контакта оболочки с пластиной ставились условия сопряжения.

При естественных допущениях о геометрии системы, характере собственных колебаний и виде напряженно-деформированного состояния в оболочках и пластине можно показать, что в спектре пластина – набор цилиндрических оболочек можно выделить спектр, характеризующий собственные колебания цилиндрической оболочки и собственные частоты, порожденные пластиной. Для этого, в частности, необходимо, чтобы толщина оболочек была бы много меньше толщины пластины, а линейные размеры пластины и оболочек различались бы не столь существенно. Проведенный анализ позволил дать оценки для безразмерных параметров, определяющих существование локализованных в нанобъектах собственных колебаний и возможность выделения из спектра “большой системы” спектра колебаний одного нанобъекта. Определяющей является малость величины  $N \left(\frac{h}{H}\right)^3 \left(\frac{L}{R}\right)^2$ .

Поведение системы с горизонтально расположенными нанотрубками существенно отличается от аналогичной системы с вертикально ориентированными нанотрубками [1]. В случае [1] при колебаниях с частотами, близкими к собственным частотам колебаний подложки, амплитуды колебаний нанобъектов оказываются существенно меньше амплитуды колебаний подложки. Для горизонтально расположенных нанотрубок это не так.

**Конечно-элементное моделирование.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из некоторого числа нанотрубок, лежащих параллельно друг другу на подложке. Отметим, что рассматриваемые материалы (GaAs, InAs, GeSi и др.) обладают пьезоэлектрическими свойствами [12, 13]. Поэтому в целом такая система представляет собой составное пьезоэлектрическое тело. Основные уравнения электроупругости в приближении электростатики при отсутствии массовых сил имеют вид [14]

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \mathbf{E} = \nabla \varphi, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля, выраженный через потенциал  $\varphi$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{D}$  – вектор электрической индукции,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций,  $\nabla$  – трехмерный оператор градиента,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\epsilon}$  – матрица жесткости, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные. Уравнения (2), (3) должны быть дополнены соответствующими краевыми условиями [1, 2].

Для модального анализа трехмерной системы, состоящей из консольно закрепленной пластины и лежащими на ней параллельно друг другу нанотрубками, использован конечно-элементный пакет ANSYS. Был проведен ряд вычислительных экспериментов для разного числа нанотрубок (от одного до 10) и разной геометрии системы (отношений толщин подложки и нанопленки, радиуса нанотрубки к длине подложки и др.).

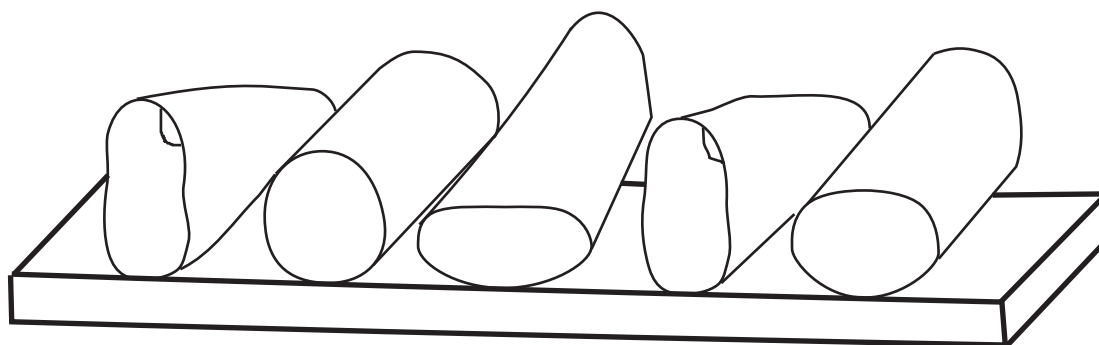


Рис. 2. Собственные колебания нанотрубок на подложке. Масштаб увеличен.

Пример расчета собственных колебаний для пяти нанотрубок показан на рис. 2, который соответствует собственным колебаниям, локализованным в нанотрубках. Как и в случае [1, 2] удалось подобрать геометрические параметры “большой системы” таким образом, чтобы было возможно разделить спектр на собственные частоты, порожденные собственными колебаниями нанотрубок, и собственные частоты подложки. Следует отметить, что в отличие от случая вертикального массива нанокристаллов, рассмотренного в [1, 2], здесь перемешивание собственных частот подложки и нанотрубок происходит в большей степени. Возможность выделения из спектра собственных первых нескольких частот нанотрубки в большей степени зависит как от геометрии системы, так и от ее механических характеристик. Таким образом, для данной задачи проведение компьютерного моделирования в

значительной степени позволяет оптимизировать процесс постановки натурального эксперимента. Детектировать же собственные колебания “большой системы”, состоящей из пьезоактивных нанотрубок представляется возможным путем измерения электрических полей, возникающих в окрестности системы при возбуждении колебаний нанотрубок.

**Заключение.** Описанный выше метод при правильном соотношении геометрических и физических характеристик “большой системы” позволяет с высокой точностью экспериментально определить первые собственные частоты одной нанотрубки по спектру системы решетка–подложка и одной подложки, соответствующие изгибным колебаниям нанопленки, образующей нанотрубку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 03-07-90411, 05-01-00094), Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ № МД-3475.2005.1 и гранта Президента РФ № НШ-4518.2006.1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н. Об определении собственных частот нанобъектов // Докл. РАН. 2006. Т. 406. № 6. С. 756–759.
- [2] Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н. Об одном методе определения собственных частот упорядоченной системы нанобъектов // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 1. С. 3–8.
- [3] Гуткин М.Ю., Овидько И.А. Дефекты и механизмы пластичности в наноструктурных и некристаллических материалах. СПб.: “Янус”, 2003. 194 с.
- [4] Гуткин М.Ю., Овидько И.А. Физическая механика деформируемых наноструктур. Т. 1. Нанокристаллические материалы. СПб. 2003. 194 с.
- [5] Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // Докл. РАН. 2001, Т. 381. № 3. С. 345–347.
- [6] Bhushan, B. (ed.) Springer Handbook of Nanotechnology. Berlin et al: Springer-Verlag. 2004. XXXVI, 1222 p.
- [7] Goddard, W., A. et al. (eds.) Handbook of Nanoscience, Engineering, and Technology. Boca Raton: CRC Press. 2003. 824 p.
- [8] Golod S. V., Prinz V. Ya., Mashanov V. I., Gutakovski A. K. Fabrication of conducting GeSi/Si micro- and nanotubes and helical microcoils // Semiconductor Science and Technology. 2001. Vol. 16. Pp. 181–185.
- [9] Prinz V. Ya. A new concept in fabricating building blocks for nanoelectronics and nanomechanics devices // Microelectronics Eng. 2003. Vol. 69. No 2–4. Pp. 466–475.
- [10] Жилин П. А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.

- [11] Альтенбах Х., Жилин П. А. Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. 1988. № 4. С. 107–148.
- [12] Акустические кристаллы. Справочник. Блистанов А.А., Бондаренко В.С., Чкалова В.В. и др. Под.ред. М.П.Шаскольской. М.: Наука, 1982, 632 с.
- [13] *Dargys A., Kundrotas J.* Handbook of physical properties of Ge, Si, GaAs and InP. Vilnius: Science and Encyclopedia Publishers, 1994. 264 p.
- [14] *Мозсен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.

**Eremeyev V.A., Ivanova E.A., Morozov N.F., Storchkov S.Eu.** *On natural oscillations of an ordered system of a nanotubes.* In this paper we extend the method of determination of eigenfrequencies of a nanosized objects for a system of nanotubes lying on a substrate.



# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Жорник В. А., Прокопенко Ю. А.,  
Рыбинская А. А., Савочка П. А.**

*Таганрогский государственный педагогический институт*

Рассматривается нестационарная задача термоупругости для сплошного цилиндра неограниченной длины, рабочая поверхность которого в процессе ее обработки охлаждается (нагревается) по всей поверхности, вызывая градиенты температур и соответствующие им термоупругие напряжения. На поверхности цилиндра имеется кольцевая трещина, которая может развиваться под действием этих термоупругих напряжений. Получено аналитическое выражение для коэффициента интенсивности напряжений (КИН), управляющего ростом трещины.

В процессе термообработки рабочие поверхности цилиндрических деталей подвергаются нестационарным тепловым воздействиям (закалка, нанесение защитных и упрочняющих покрытий, обработка поверхности детали шлифованием с доведением её до необходимых размеров и т.д.). В результате этих воздействий в цилиндрах возникают температурные градиенты и соответствующие им термоупругие напряжения. Поскольку на поверхности цилиндра всегда имеются трещиноподобные дефекты, то под действием этих напряжений они могут прорасти, становясь опасными при дальнейшей эксплуатации изделия.

Для исследования в качестве модели в работе выбран цилиндр неограниченной длины. Предполагая, что термообработка ведется равномерно по всей поверхности цилиндра, а при обработке шлифованием одновременно по всей длине цилиндра он вращается с относительно большой скоростью, угловым распределением температуры в цилиндре при всех способах обработки поверхности можно пренебречь. Кроме того, считаем, что торцы цилиндра теплоизолированы и, следовательно, температура в цилиндре также не зависит от осевой координаты. Таким образом, нестационарное температурное поле цилиндра и соответствующие ему термоупругие напряжения оказываются зависящими только от радиуса.

На поверхности цилиндра имеется кольцевая трещина, которая под действием термоупругих напряжений, развиваясь вглубь цилиндра, может превратиться из безопасной в опасную.

Нужно отметить, что поскольку тепловые потоки радиальны, то кольцевая трещина не оказывает влияния на температурное поле в цилиндре. Поэтому задача теплопроводности рассматривается для цилиндра в отсутствии трещины.

Обобщение вышеуказанных процессов термообработки поверхности цилиндрических деталей и последующей её обработки с доведением до необходимых размеров приводит к граничному условию на поверхности цилиндрической детали в задаче теплопроводности цилиндра, которая рассматривается ниже:

$$-\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = \alpha [T(r, t) - \varphi(t)] - Q(t) + c_v m T(r, t), r = r_c, t > 0, \quad (1)$$

где  $r_c$  — радиус цилиндра;  $\lambda$  — теплопроводность материала цилиндра;  $c_v$  — его удельная теплоемкость;  $Q(t)$  — тепловой поток, входящий в цилиндр за счет трения поверхности цилиндра о шлифовальный инструмент;  $m$  — масса материала цилиндра, которая удаляется в процессе шлифования с единицы поверхности цилиндра за единицу времени;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена между поверхностью цилиндра и охлаждающей средой температуры  $\varphi(t)$ .

Простое преобразование граничного условия (1) приводит его к граничному условию третьего рода:

$$-\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = -h[T(r, t) - \theta(t)], r = r_c, t > 0, \quad (2)$$

где  $h = \frac{\alpha + cm}{\lambda}$  — обобщенный относительный коэффициент теплообмена;  $\theta(t) = \frac{\alpha}{\alpha + cm} [\varphi(t) + \frac{Q(t)}{\alpha}]$  — обобщенная температура среды.

Температурное поле в цилиндре получено в [1] и имеет вид:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-y_n^2 \frac{at}{r_c^2}} J_0 \left( y_n \frac{r}{r_c} \right), \quad (3)$$

$$A_n = \frac{2y_n^2}{r_c^2 J_0^2(y_n)(y_n^2 + Bi^2)} \left\{ \int_0^t e^{y_n^2 \frac{a\eta}{r_c^2}} d\eta \left[ Bi \cdot a J_0(y_n) \theta(\eta) + \frac{1}{\rho_v c_v} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^{r_c} \rho q(\rho, \eta) J_0 \left( y_n \frac{\rho}{r_c} \right) d\rho \right] \int_0^{r_c} \rho f(\rho) J_0 \left( y_n \frac{\rho}{r_c} \right) d\rho \right\}, \quad (4)$$

где  $a = \frac{\lambda}{\rho_v c_v}$  — температуропроводность материала;  $\rho_v$  — его массовая плотность;  $Bi = hr_c$  — критерий Био;  $q(r, t)$  — удельная мощность внутренних источников теплоты;  $f(r)$  — начальная температура цилиндра;  $y_n$  — корни уравнения

$$y J_1(y) = Bi \cdot J_0(y). \quad (5)$$

Расчет термоупругих напряжений, возникающих в цилиндре, дан в [1].

Для дальнейшего исследования приведем лишь осевое напряжение  $\sigma_{zz}^T(r, t)$ :

$$\sigma_{zz}^T(r, t) = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-y_n^2 \frac{at}{r_c^2}} \left[ \frac{2}{y_n} J_1(y_n) - J_0 \left( y_n \frac{r}{r_c} \right) \right], \quad (6)$$

где  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного расширения материала цилиндра;  $E$  — его модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Если внутренние источники теплоты отсутствуют,  $\theta(t) = \theta - \text{const}$  и  $f(r) = T_0 - \text{const}$ , то осевое напряжение имеет вид:

$$\sigma_{zz}^*(\rho, Fo) = \frac{\sigma_{zz}^T(\rho, Fo)(1 - \nu)}{\alpha_T E(T_0 - \theta)} = 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-y_n^2 Fo}}{J_0(y_n)(y_n^2 + Bi^2)} \left[ \frac{2}{y_n} J_1(y_n) - J_0(y_n \rho) \right], \quad (7)$$

где  $Fo = \frac{at}{r_c^2}$  — критерий Фурье;  $\rho = \frac{r}{r_c}$  — относительный текущий радиус.

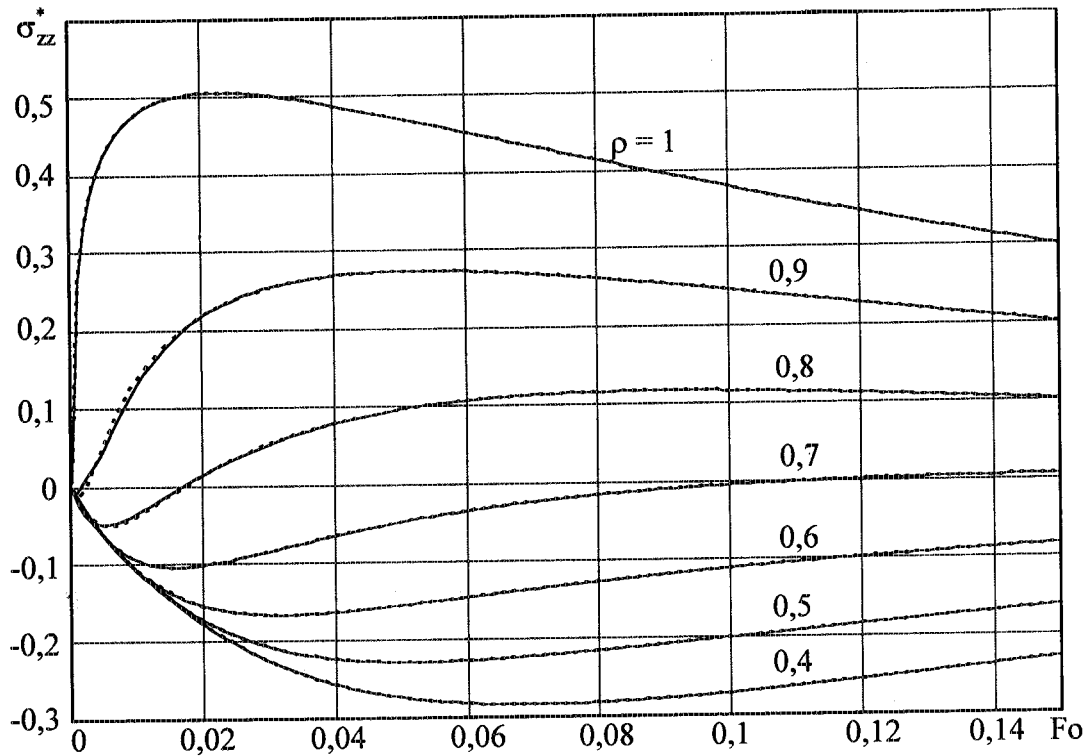


Рис. 1. Зависимость осевого напряжения  $\sigma_{zz}^*$  от времени  $Fo$  в различных точках сечения цилиндра  $\rho$  при интенсивности теплообмена  $Bi = 10$ .

На рис. 1 приведены графики зависимости  $\sigma_{zz}^*(\rho, Fo)$  от времени  $Fo$  по сечению цилиндра (пунктирные линии) при  $Bi = 10$ .

Если считать, что берега кольцевой трещины свободны от нагрузок, то в этих пределах необходимо компенсировать осевые напряжения  $\sigma_{zz}^T(r, t)$ , приложив к ним нагрузки противоположного знака.

В связи с этим возникает смешанная задача изотермической теории упругости  $(\sigma_{ij}^P, u_i^P)$ , в которой на торце полубесконечного цилиндра (сечение неограниченного цилиндра в месте расположения кольцевой трещины) заданы следующие граничные условия. Осевое перемещение на продолжении трещины  $(0 < r < r_d)$  равно нулю и осевая нагрузка в пределах трещины  $(r_d < r < r_c)$  равна  $-\sigma_{zz}^T(r, t)$ , где  $r_d$  — радиус фронта трещины.

Эта смешанная задача решалась в [1] и свелась к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции  $G(\tau, Fo)$ :

$$G(\tau, Fo) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_1^\alpha y \sigma_{zz}^*(y, Fo) \arcsin \frac{\alpha}{y} dy - \frac{1}{\alpha} \int_1^\alpha y \sigma_{zz}^*(y, Fo) dy - \frac{2}{\pi} \int_1^\alpha \frac{y \sigma_{zz}^*(y, Fo) dy}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_1(\xi)}{I_1(\xi)} \left[ \frac{\sinh \xi \alpha}{\xi \alpha} - \cosh \xi \tau \right] d\xi \int_1^\alpha y \sigma_{zz}^*(y, Fo) I_0(\xi y) dy +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty G(\nu, Fo) d\nu \int_0^\infty \frac{K_1(\xi)}{I_1(\xi)} \cosh \xi \nu \left[ \frac{\sinh \xi \alpha}{\xi \alpha} - \cosh \xi \tau \right] d\xi, 0 < \tau < \alpha, \quad (8)$$

где  $\alpha = \frac{r_d}{r_c}$  — относительный радиус фронта трещины. Функция  $G(\tau, Fo)$  связана с коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I(\alpha, Fo)$ , управляющим ростом трещины, следующей зависимостью:

$$K_I(\alpha, Fo) = - \frac{\sqrt{\pi r_c} \alpha_T E (T_0 - \theta)}{1 - \nu} \frac{G(\alpha, Fo)}{\sqrt{\alpha}}. \quad (9)$$

Интегральное уравнение (8) относительно  $G(\tau, Fo)$  решалось методом последовательных приближений аналогично [2], причем второе приближение находилось в "вилке" между нулевым и первым приближениями и давало погрешность менее 1%. При решении интегрального уравнения (8)  $\sigma_{zz}^*(\rho, Fo)$  аппроксимировалось полиномом четной степени от нулевой до восьмой включительно. Приближенные зависимости  $\sigma_{zz}^*(\rho, Fo)$  от  $Fo$  при  $Bi = 10$  даны на рис. 1 в виде сплошных линий.

На рис. 2 приведены графики зависимости безразмерного КИН  $K_I^*$  от безразмерного времени  $Fo$  для различных размеров кольцевой трещины  $\alpha$  для  $Bi = 10$ , где

$$K_I^*(\alpha, Fo) = \frac{2K_I(\alpha, Fo)(1 - \nu)}{\sqrt{\pi r_c} \alpha_T E (T_0 - \theta)} = - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} G(\alpha, Fo). \quad (10)$$

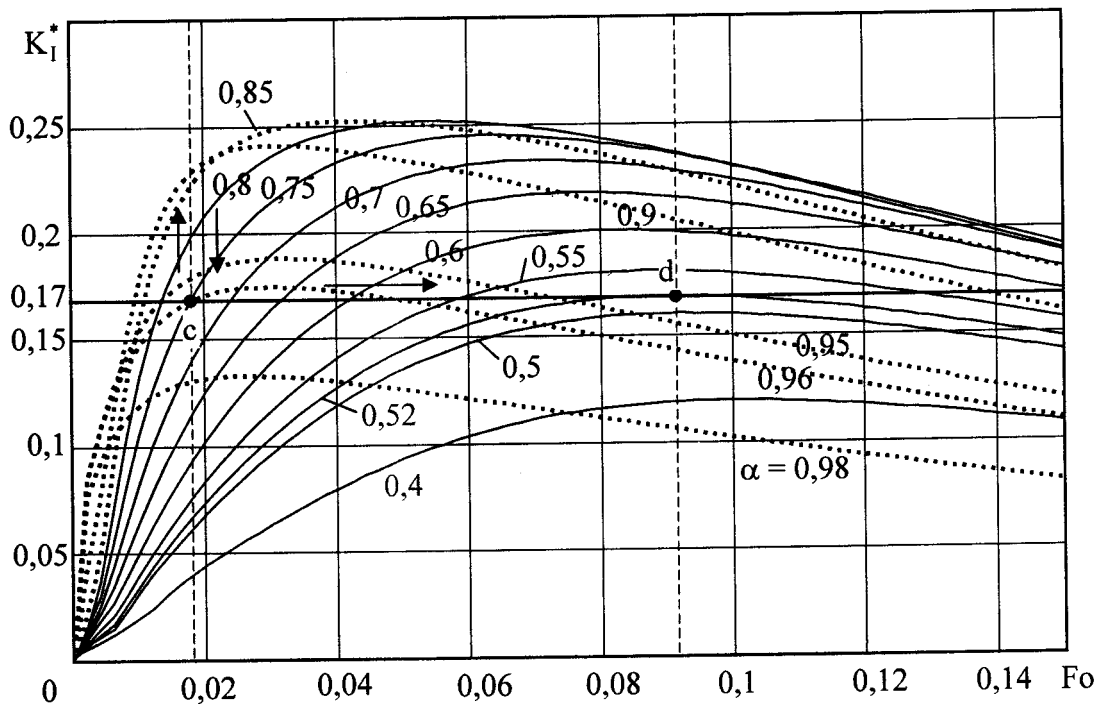


Рис. 2. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_I^*$  от времени  $Fo$  для различных размеров кольцевой трещины  $\alpha$  при интенсивности теплообмена  $Bi = 10$  и трещиностойкости  $K_{IC}^* = 0,17$ .

Проведем анализ зависимостей  $K_I^*(\alpha, Fo)$  от  $Fo$ , приведённых на рис. 2, задав постоянную материала цилиндра трещиностойкость (вязкость разрушения, критический коэффициент интенсивности напряжений)  $K_{IC}^* = 0,17$ . Тогда кольцевая трещина, например относительного размера  $\alpha = 0,96$ , покоится до времени  $Fo \sim 0,018$  (точка на рис. 2), потом растёт скачком (см. вертикальные стрелки в точке  $c$ ) до размера  $\alpha = 0,75$  и далее, по мере развития градиентов температур, продолжает расти относительно медленно (см. горизонтальную стрелку до точки  $d$ ) до размера  $\alpha = 0,52$ , останавливаясь на этом размере в момент времени  $Fo = 0,091$  (цилиндр лопнул). Такое прорастание трещин необходимо учитывать при различных термообработках рабочих поверхностей деталей машин и конструкций, так как в процессе их эксплуатации развившиеся трещины могут привести к разрушению этих изделий.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жорник В.А., Карташов Э.М. Рост осесимметричных трещин при механических и тепловых воздействиях. Таганрог: ТГПИ, 2001. 143 с.
- [2] Zhornik A.I. Nonsteady problem of the theory of elasticity for a solid infinite cylinder with a penny-shaped crack, enclosed in a thin shell // International Applied Mechanics, 1993. Jule. P. 47–52.

**Zhornik V.A., Prokopenko Yu.A., Rybinskaya A.A., Savochka P.A.** *Nonstationary Thermoelasticity Problem for a Cylinder with a Coaxial Crack.* Nonstationary thermoelastic problem for a solid unlimited cylinder is considered. The working surface of the cylinder is cooled (heated) during it's treatment which causes temperature gradients and corresponding thermoelastic stresses. There is a ring-shaped crack on the cylinder surface which can grow under the action of thermoelastic stresses. Analytic expression for a stress intensity factor (SIF) is obtained.

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ГРАНИЦЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Залётов В. В.\* , Сторожев В. И.\*\* , Хапилова Н. С.\*

\* *Институт прикладной математики и механики НАНУ, Донецк, Украина*

\*\* *Донецкий национальный университет, Украина*

Получены аналитические формулы для напряжений и перемещений в упругом полупространстве, на границе которого действует сосредоточенная сила, нормальные напряжения пропорциональны вертикальным перемещениям, касательные напряжения отсутствуют.

Математическая постановка задачи о расчёте трехмерного напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке пластов полезных ископаемых приводит к решению смешанной задачи теории упругости для полупространства, лежащего на упругом основании [1,2]. В статье [3] осесимметричная задача Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство обобщена на случай, когда в точках граничной плоскости выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений. Ниже приведено решение этой смешанной задачи в декартовой системе координат.

Функции Буссинеска в прямоугольной системе координат обычно находят из известных общих решений трехмерных уравнений теории упругости [4]. В настоящей работе аналитические формулы для напряжений в случае смешанной задачи получены непосредственно из решения осесимметричной задачи с помощью формул преобразования компонент тензора напряжений при переходе от цилиндрической к прямоугольной системе координат.

Рассматривается смешанная задача теории упругости для верхнего полупространства  $z \geq 0$ . Перпендикулярно плоскости, ограничивающей полупространство, к упругой области приложена сосредоточенная сила  $P$ . В точках плоскости  $z = 0$  выполняется условие пропорциональности напряжений и смещений. Касательные напряжения на границе отсутствуют. Напряжения в бесконечно удаленных точках обращаются в нуль.

В цилиндрической системе координат  $r, \Theta, z$ , начало которой совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы, формулы для перемещений и напряжений согласно [3] имеют вид

$$u_r(r, z) = -\frac{P(1+\nu)}{2E\pi} \left[ (1-2\nu)\frac{1}{r}\left(1 - \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{rz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{P(1+\nu)\chi}{2Er\pi} \int_0^\infty (1-2\nu-zt)J_1(rt)\frac{e^{-tz}}{t+\chi}dt; \quad (1)$$

$$w(r, z) = \frac{P(1 + \nu)}{2E\pi} \left[ \frac{2(1 - \nu)}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{P(1 + \nu)\chi}{2E\pi} \int_0^\infty (2\nu - 2 - zt)J_0(rt) \frac{e^{-tz}}{t + \chi} dt. \quad (2)$$

$$\sigma_r(r, z) = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1 - 2\nu}{r^2} \left( 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{3zr^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right] + \frac{P\chi}{2r\pi} \int_0^\infty \left[ rt(1 - zt)J_0(rt) - (1 - zt - 2\nu)J_1(rt) \right] \frac{e^{-tz}}{t + \chi} dt; \quad (3)$$

$$\sigma_\theta(r, z) = \frac{P(1 - 2\nu)}{2\pi} \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \frac{P\chi}{2r\pi} \int_0^\infty \left[ 2\nu t^2 J_0(rt) + \frac{1}{r} (1 - zt - 2\nu)J_1(rt) \right] \frac{e^{-tz}}{t + \chi} dt. \quad (4)$$

$$\sigma_z(r, z) = -\frac{3Pz^3}{2\pi(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{P\chi}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + zt)tJ_0(rt)}{t + \chi} e^{-tz} dt. \quad (5)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{P\chi}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_1(rt)t^2 e^{-tz}}{t + \chi} dt. \quad (6)$$

Здесь  $E, \nu$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона среды,  $P$  - интенсивность сосредоточенной силы,  $J_0, J_1$  - функции Бесселя нулевого и первого порядка. Параметр  $\chi$  определяется формулой

$$\chi = 2k \frac{(1 - \nu^2)}{E}, \quad (7)$$

где  $k$ - коэффициент пропорциональности нормальных напряжений  $\sigma_z$  и вертикальных перемещений  $w$  в точках граничной плоскости. Решение (1)-(6) для изотропного полупространства получено при следующих граничных условиях:

$$\sigma_z(r, 0) = kw(r, 0) - P\delta(r), \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad (8)$$

где  $\delta(r)$ - дельта-функция Дирака. Если  $k = 0$ , то соотношения (1)-(6) совпадают с известным решением задачи Буссинеска [5].

Введем прямоугольную систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой совпадает с вертикальной осью цилиндрической системы. Тогда

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Проектируя радиальное перемещение  $u_r(r, z)$ , определяемое формулой (1), на оси  $x, y$ , найдем

$$u(x, y, z) = u_r(r, z) \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P(1 + \nu)x}{2E\pi} T(x, y, z), \quad (10)$$

$$v(x, y, z) = u_r(r, z) \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P(1 + \nu)y}{2E\pi} T(x, y, z), \quad (11)$$

где

$$T(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ \left( \frac{1 - 2\nu}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{z(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \chi \int_0^\infty (1 - 2\nu - tz) J_1(t(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}) e^{-tz} \frac{dt}{t + \chi} \right) \right]. \quad (12)$$

Обозначим

$$r_1 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

После преобразований запишем функцию  $T(x, y, z)$  следующим образом:

$$T(x, y, z) = \frac{1 - 2\nu}{r_1(r_1 + z)} - \frac{z}{r_1^3} - \frac{\chi}{r} \int_0^\infty (1 - 2\nu - tz) J_1(rt) e^{-tz} \frac{1}{t + \chi} dt. \quad (14)$$

Здесь величины  $r, r_1$  через координаты  $x, y, z$  выражаются равенствами (9), (13).

Чтобы найти вертикальное перемещение  $w$  в прямоугольной системе координат достаточно в формуле (2) радиальную координату  $r$  заменить величиной  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$w(x, y, z) = \frac{P(1 + \nu)}{2E\pi} \left[ \frac{2(1 - \nu)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \chi \int_0^\infty (2\nu - 2 - tz) J_0((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} t) \frac{e^{-tz}}{t + \chi} dt \right]. \quad (15)$$

Если перемещения  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  известны, то компоненты напряжений могут быть найдены из закона Гука, записанного в прямоугольной системе координат. Чтобы избежать дифференцирования громоздких выражений при вычислении компонент деформаций, входящих в соотношения закона Гука, используем формулы преобразования компонент тензора напряжений при переходе от цилиндрической к прямоугольной системе координат. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{3zx^2}{r_1^5} + \frac{1 - 2\nu}{r^2 r_1} \left[ \frac{zy^2}{r_1^2} + \frac{x^2 - y^2}{r_1 + z} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\chi}{2} \int_0^\infty [(1 + 2\nu - tz) J_0(rt) - \frac{x^2 - y^2}{r^2} (1 - 2\nu - tz) J_2(rt)] e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \right], \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{3zy^2}{r_1^5} + \frac{1 - 2\nu}{r^2 r_1} \left[ \frac{zx^2}{r_1^2} - \frac{x^2 - y^2}{r_1 + z} \right] + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty \left[ (1 + 2\nu - zt)J_0(rt) + \frac{x^2 - y^2}{r^2}(1 - 2\nu - zt)J_2(rt) \right] e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi}, \\
 \sigma_z(x, y, z) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{3z^3}{r_1^5} + \chi \int_0^\infty (1 + zt)J_0(rt)e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \right], \\
 \tau_{xy}(x, y, z) &= \frac{P}{2\pi} \frac{xy}{r^2} \left[ \frac{2(1 - 2\nu)}{r_1} \left( \frac{1}{r_1 + z} - \frac{z}{2r_1^2} \right) - \frac{3zr^2}{r_1^5} - \right. \\
 & \quad \left. - \chi \int_0^\infty (1 - 2\nu - zt)J_2(rt)e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \right], \\
 \tau_{xz}(x, y, z) &= \frac{Px}{2\pi} \left[ -\frac{3z^2}{r_1^5} + \frac{z\chi}{r} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tz}}{t + \chi} J_1(rt) dt \right], \\
 \tau_{yz}(x, y, z) &= \frac{Py}{2\pi} \left[ -\frac{3z^2}{r_1^5} + \frac{z\chi}{r} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tz}}{t + \chi} J_1(rt) dt \right]. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Полагая в соотношениях (10)-(16) координату  $z$  равной нулю, найдем распределение напряжений и перемещений на границе полупространства

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= -\frac{P(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2E\pi} \frac{x}{r} \left[ \frac{1}{r} - \chi \int_0^\infty J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi} \right], \\
 v(x, y, 0) &= -\frac{P(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2E\pi} \frac{y}{r} \left[ \frac{1}{r} - \chi \int_0^\infty J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi} \right], \\
 w(x, y, 0) &= \frac{P(1 - \nu^2)}{E\pi} \int_0^\infty J_0(rt) \frac{dt}{t + \chi}, \\
 \sigma_x(x, y, 0) &= \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{(1 - 2\nu)(x^2 - y^2)}{r^4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty \left[ (1 + 2\nu)J_0(rt) - (1 - 2\nu) \frac{x^2 - y^2}{r^2} J_2(rt) \right] \frac{tdt}{t + \chi} \right], \\
 \sigma_y(x, y, 0) &= \frac{P}{2\pi} \left[ -\frac{(1 - 2\nu)(x^2 - y^2)}{r^4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty \left[ (1 + 2\nu)J_0(rt) + (1 - 2\nu) \frac{x^2 - y^2}{r^2} J_2(rt) \right] \frac{tdt}{t + \chi} \right], \\
 \sigma_z(x, y, 0) &= \frac{P\chi}{2\pi} \int_0^\infty J_0(rt) \frac{tdt}{t + \chi}, \\
 \tau_{xy}(x, y, 0) &= \frac{P(1 - 2\nu)}{2\pi} \frac{xy}{r^2} \left( \frac{2}{r^2} - \chi \int_0^\infty J_2(rt) \frac{tdt}{t + \chi} \right), \\
 \tau_{xz}(x, y, 0) &= \tau_{yz}(x, y, 0) = 0. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Из соотношений (17) видно, что касательные напряжения в плоскости  $z = 0$  обращаются в нуль, а вертикальное перемещение  $w$  пропорционально нормальному напряжению  $\sigma_z$ .

Таким образом, решение смешанной задачи для упругого полупространства с граничными условиями

$$\sigma_z(x, y, 0) = kw(x, y, 0) - P\delta(x, y)$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0$$

дается формулами (10)-(17). В частном случае, когда коэффициент  $k$  обращается в нуль, формулы (10)-(17) совпадают с решением задачи Буссинеска в прямоугольной системе координат [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кавлакан М.В., Михайлов А.М. Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 184–188.
- [2] Хапилова Н.С. Теория внезапного отжима угольного пласта. К.: Наукова думка, 1992. 232 с.
- [3] Залётов В.В. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании // Труды ИПММ НАН Украины. 2004. Т. 9. С. 61–67.
- [4] Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971. 288 с.
- [5] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

**Zaletov V.V., Storozhev V.I., Khapilova N.S.** *Mixed problem of theory of elasticity for a half-space when a concentrated force acts to its boundary.* Analytical formulas for the stresses and the displacements in elastic half-space are obtained in case when on its boundary concentrated force acts, normal stresses are proportional vertical displacements, tangent stresses are absent.

# О ВЛИЯНИИ РАЗНОТИПНОСТИ НИЖНЕГО ОСНОВАНИЯ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ НА МАНТИЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

**Зарецкая М. В.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

В работе проводится оценка воздействия со стороны верхней мантии на нижнее основание литосферной плиты с учетом плоско-параллельных движений и разнотипности нижнего основания литосферных плит. Для моделирования данного процесса развит метод исследования переноса субстанций (СБ) в многослойной среде и оседания на разнотипные подстилающие поверхности. Поставленные краевые задачи сведены к системе интегральных уравнений. Получены решения для случая полуплоскостей.

В последнее десятилетие определились два главных направления исследований в науках о Земле — глубинная геодинамика и ранняя история Земли.

Глобальная геодинамическая модель учитывает многоблочное строение Земли, автономность протекающих в каждой из оболочек процессов, их взаимодействие. В объеме всей Земли признается равноправным конвективный и адвективный (плюм-тектоника) теплоперенос [1].

В Земле выделяется три главных области: тектоносфера, охватывающая кору и верхнюю мантию с переходной зоной, нижняя мантия, ядро. В тектоносфере справедлива тектоника плит, в нижней мантии — плюм-тектоника мантийных струй, в ядре — «тектоника роста», выражающаяся в разрастании внутреннего ядра за счет внешнего.

Основные положения геодинамической модели были предложены в 1994 г. С. Маруямой в Журнале японского географического общества.

Согласно этой модели литосферные плиты, погружаясь в глубь Земли, застревают на границе между верхней и нижней мантией. Холодный материал плит копится здесь сотни миллионов лет, пока не прорвет границу. Погружаясь до границы ядра, он охлаждает железо-никелевый расплав, который опускается во внешнее жидкое ядро Земли. Вытесненный им наверх горячий суперплюм вызывает континентальный раскол и дрейф вновь образовавшихся континентов. После этого тектоника плит становится независимой от тектоники плюмов до повторения процесса.

Основной недостаток и тектоники плит, приводимых в движение мантийной конвекцией, и тектоники плюмов, ответственных за движения в мантии, заключается в том, что обе теории не принимали во внимание влияние движущихся континентов на мантийные процессы.

Так как плюм достигает подошвы литосферы, растекается вдоль нее на большие расстояния, концентрируется в виде слоя чистого расплава мощностью несколько километров, распределенного по большой площади, и происходит наращивание (подслаивание) коры снизу, нельзя говорить о равномерном воздействии на нижнее основание литосферных плит со стороны мантии.

Проведем исследование воздействия со стороны верхней мантии на нижнее основание литосферной плиты с учетом плоско-параллельных движений, вызываемых вращением Земли и торможением в связи с вязкостью среды. Нижнее основание литосферных плит является разнотипным, так как имеются океанические участки, участки суши и рифтовые участки. Для моделирования данного процесса развит метод исследования переноса субстанций (СБ) в многослойной среде и оседания на разнотипные подстилающие поверхности [2].

Считается, что слоистая среда, в которую попадает СБ, может в течение продолжительного времени (часы и даже сутки) сохранять набор слоев и их параметров постоянными. В этом случае все функции, входящие в краевую задачу, можно считать не зависящими от времени и задача значительно упрощается. Дифференциальные уравнения переноса принимают вид

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + (w_n - w_{ng}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \sigma_0 \varphi_n - \\ - \nu_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} - \mu_n \left( \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right) = \delta_{nk} C \delta(x - x_{0n}, y - y_{0n}, z - z_{0n}),$$

$$f(x, y, z, t) = C \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad C = \text{const.}$$

Здесь  $\mathbf{A}_n = \{u_n, v_n, w_n\}$  — векторы скоростей;  $w_{ng}$  — скорость подъема или опускания СБ, связанная с влиянием сил тяжести и архимедовых сил выталкивания;  $\mu_n, \nu_n$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузий соответственно;  $\sigma_n$  — коэффициент поглощения;  $f_n$  — функция, описывающая внутренние источники выброса СБ.

Параметр  $\delta_{nk}$  равен 1 для совпадающих индексов и нулю — для различающихся.

Векторы скоростей должны удовлетворять уравнениям неразрывности

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial v_n}{\partial x_2} + \frac{\partial w_n}{\partial x_3} = 0,$$

выполняющимся при принятых предположениях автоматически.

На границах сопряжения слоев задаются следующие граничные условия:

$$\varphi_k(x, y, z, t) = \varphi_{k+1}(x, y, z, t), \quad z = h_k,$$

$$\nu_k \frac{\partial \varphi_k(x, y, z, t)}{\partial z} = \nu_{k+1} \frac{\partial \varphi_{k+1}(x, y, z, t)}{\partial z}, \quad z = h_k.$$

Решения краевых задач отыскиваются в классе функций, убывающих на бесконечности. На границе многослойной среды в разных ее зонах ставятся разнотипные граничные условия, свидетельствующие о разных механических свойствах нижнего основания литосферных плит, что приводит к разнотипному их поведению, т. е.

$$d_{NS} \frac{\partial \varphi_N}{\partial z} - \tau_{NS} \varphi_N = 0, \quad z = H, \quad x_1, x_2 \in \Omega_S.$$

Здесь  $d_{NS}, \tau_{NS}$  — параметры, характеризующие степень «прилипания» субстанций к нижней поверхности литосферных плит.

Поставленная краевая задача известными методами может быть сведена к системе интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^N \iint_{\Sigma_n} k_m(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_n(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_m(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega_m,$$

$$k_m(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} K_m(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

$$\mathbf{K} = \{k_m\}_1^N.$$

Функции  $f_m(x_1, x_2)$  имеют сложное строение, зависят от типа источника и здесь не приводятся.

Приближенное решение системы интегральных уравнений можно представить в виде

$$q_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^N K_m^{-1} F_m + O(e^{-\xi|\mathbf{x}-\tau|}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_n, \quad \tau \in \partial\Omega_n.$$

В том случае, если области являются полупространствами, система сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа и решается в замкнутом виде.

Выражение для решения принимает вид

$$q_p(x_1) = \mathbf{V}^{-1}(x_1) \left\{ \frac{F_n^+}{K_{n1}} + \frac{F_m^-}{K_m} - \frac{1}{K_n^+(\alpha_1) K_m^-(\alpha_1)} \left[ \left( \frac{K_m^- F_n^+}{K_n^-} \right)^- + \left( \frac{K_n^+ F_m^-}{K_m^+} \right)^+ \right] \right\}.$$

Методом факторизации строятся общие представления решений задачи и приближенные формы.

Работа выполнена при поддержке гранта президента НШ-4839.2006.1, грантов РФФИ (06-01-96635, 06-08-00671, 06-01-00295, 06-01-96641).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хаин В.Е. Основные проблемы современной геологии. М.: Наука, 1994.
- [2] Зарецкая М.В. Моделирование процесса массопереноса в средах со сложным характером распределения параметров // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 5. С. 58–62.

**Zaretskaya M.V.** *About the action of heterogeneity of lower base of lithosphere plates on mantle processes.* The work is aimed to assess the effects acting from the upper mantle on the lower base of the lithosphere plate taking into account plane-parallel movements and poly-typical character of the lower base of lithosphere plates. To model this process, a method has been developed to study substances transfer in multi-layered medium and their settlement on poly-typical underlying surfaces. The boundary-value problems stated are reduced to a system of integral equations. Solutions have been found for the case of half-planes.

# ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТОРЦЕ

**Захарова С. В., Наседкин А. В., Шихман В. М.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Методом конечных элементов исследованы амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) чувствительности преобразователей акустической эмиссии при подаче на торец цилиндрического пьезопреобразователя механических нагрузок различного вида. Обнаружено, что в зависимости от граничных условий на торце существенно изменяется АЧХ преобразователя, проведен анализ причин этих изменений в окрестности второй антирезонансной частоты.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) чувствительности является одним из важнейших параметров приемной акустико-эмиссионной (АЭ) системы. Для моделирования работы пьезопреобразователя будем использовать метод конечных элементов (МКЭ) и созданные ранее программы для пакета ANSYS [1], [2]. Рассмотрим пьезоэлемент в форме цилиндра диаметра  $D = 8$  мм и толщины  $H = 8,25$  мм. Будем считать, что цилиндрический пьезопреобразователь выполнен из пьезокерамики ЦТС-83Г, поляризованной в направлении толщины, а торцевые поверхности электродированы. При исследовании задачи в осесимметричной постановке удобно ввести цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  и рассматривать задачу в прямоугольной области  $0 \leq r \leq R = D/2, 0 \leq z \leq H$ . Электрофизические параметры пьезокерамики ЦТС-83Г, необходимые для расчета, приведены в [3]. Отметим, что пьезоматериал ЦТС-83Г часто применяются в производстве преобразователей акустической эмиссии (ПАЭ), вследствие достаточно высоких значений электрофизических параметров  $\varepsilon_{33}^T$  и  $g_{33}$ , определяющих соответственно емкость и чувствительность ПАЭ.

Начальным этапом в разработке преобразователей обычно является определение резонансных частот пьезокерамического элемента, среди которых важнейшее значение имеют частоты электрических резонансов и антирезонансов. Резонансные частоты можно определить, решая задачи об установившихся колебаниях пьезопреобразователя и вычисляя или измеряя АЧХ электрического импеданса  $Z = \Delta V/I$ , где  $\Delta V$  – разность потенциалов между электродами,  $I$  – ток на одном из электродов. При исследовании задачи об установившихся колебаниях с помощью конечно-элементного пакета ANSYS была построена каноническая сетка из прямоугольных конечных элементов PLANE13 с опциями осесимметричного пьезоэлектрического анализа. Каноническая сетка формировалась при равномерном размещении  $n_r$  конечных элементов вдоль радиуса и  $n_z$  конечных элементов по толщине, причем при конкретных расчетах было принято  $n_r = 20, n_z = 15$ .

Как известно, при гармонических колебаниях преобразователя по закону  $\exp(i\omega t)$  с частотой  $f = \omega/(2\pi)$  систему МКЭ можно записать в виде:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\varphi \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

и матрица  $\mathbf{C}$  при учете только механического демпфирования по Релею имеет структуру, аналогичную матрице  $\mathbf{M}$ , причем  $\mathbf{C}_{uu} = \alpha\mathbf{M}_{uu} + \beta\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\alpha, \beta$  – константы демпфирования. Здесь  $\mathbf{U}$  – вектор узловых перемещений;  $\mathbf{\Phi}$  – вектор узловых электрических потенциалов;  $\mathbf{F}_u$  – вектор узловых сил;  $(-\mathbf{F}_\varphi)$  – вектор узловых значений электрических зарядов. Матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  являются аналогами матриц масс, демпфирования и жесткости в конечно-элементном анализе упругих тел.

Рассматривая колебания механически свободного пьезоэлемента при подаче разности потенциалов  $\Delta V$  на торцевые электроды, из решения задачи (1), (2) найдем ток на электроде, и, следовательно, комплекснозначную функцию электрического импеданса  $Z = Z(\omega)$ . Для численного построения АЧХ импеданса был выбран частотный отрезок  $f \in [f_b, f_e]$ ,  $f_b = 80$  (кГц),  $f_e = 360$  (кГц); и задача (1), (2) решалась  $n_f$  раз ( $n_f = 140$ ) для частот  $f = f_b + (j - 1)(f_e - f_b)/(n_f - 1)$  при  $j = 1, 2, \dots, n_f$ . Константы демпфирования  $\alpha$  и  $\beta$  были выбраны по обычной для МКЭ методике при учете демпфирования по Релею, исходя из задаваемого значения механической добротности  $Q$  ( $Q = 80$ ) и частотного интервала  $[f_b, f_e]$  [1]:  $\alpha = 2\pi f_b f_e / [(f_b + f_e)Q]$ ,  $\beta = 1 / [2\pi(f_b + f_e)Q]$ .

Амплитуда функции электрического импеданса  $Z$  в децибеллах, т.е. функция  $10\lg|Z|$ , полученная в результате расчетов, показана на рис. 1. Отметим, что расхождение расчетной АЧХ электрического импеданса с АЧХ, полученной экспериментально, не превысило 5 % в исследуемой частотной области. Из численных данных были определены приближенные частоты первых трех электрических резонансов и антирезонансов:  $f_{r1} = 170$ ,  $f_{a1} = 198$ ,  $f_{r2} = 254$ ,  $f_{a2} = 258$ ,  $f_{r3} = 336$ ,  $f_{a3} = 342$  (в кГц).

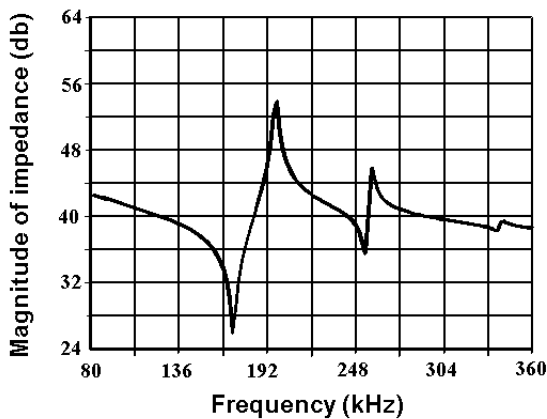


Рис. 1. Амплитуда импеданса при электрическом воздействии.

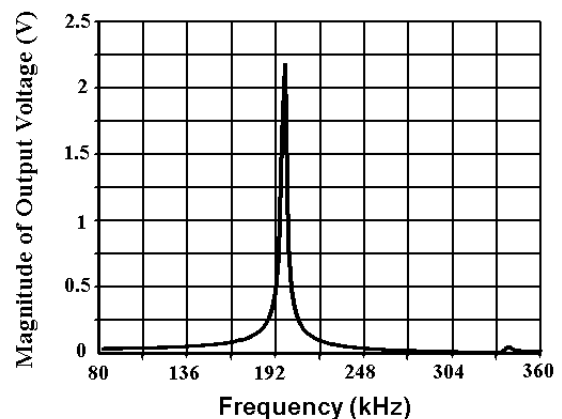


Рис. 2. Амплитуда потенциала при механическом воздействии на торец.

Для применений пьезопреобразователей в акустодиагностике важной характеристикой является чувствительность преобразователя. АЧХ чувствительно-

сти преобразователя принято определять как отношение выходного напряжения (электрического напряжения на электродах) к действующему на рабочую поверхность давлению или перемещению. Для анализа чувствительности рассмотрим равные между собой сосредоточенные в узлах конечно-элементной сетки механические силы  $F_{uzk} = 1 \cdot 10^{-3}$  (Н), действующие на торце  $z = 0$  пьезоэлемента и направленные вдоль оси симметрии (по координате  $z$ ). Отметим, что задание сосредоточенной силы  $F_{uzk}$  в узле  $r = r_k, z = 0$  меридионального сечения означает задание распределенной по окружности радиуса  $r_k$  нагрузки интенсивности  $F_{uzk}/(2\pi r_k)$  (Н/м); и, таким образом, набор сосредоточенных сил  $F_{uzk}$  в узловых точках торца моделирует некоторую распределенную нагрузку различной интенсивности, уменьшающейся при увеличении радиальной координаты. Для данного примера один электрод считается заземленным ( $\varphi = 0, z = 0$ ), а второй электрод — свободным:  $\varphi = \text{const}, Q = 0, z = H$  ( $Q$  — электрический заряд на электроде,  $I = i\omega Q$ ). Вычисленная амплитуда электрического напряжения  $|\varphi|$  на торце  $z = H$ , пропорциональная чувствительности, показана на рис. 2.

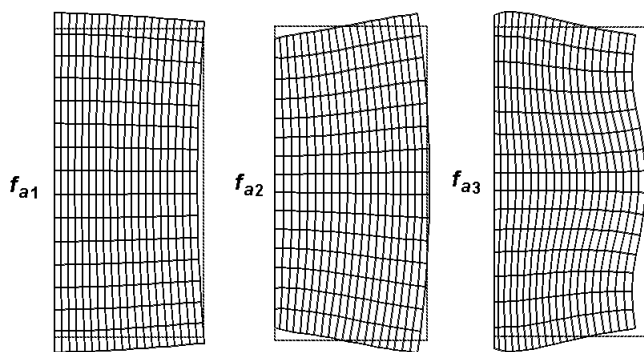


Рис. 3. Формы колебаний для первых трех антирезонансных частот.

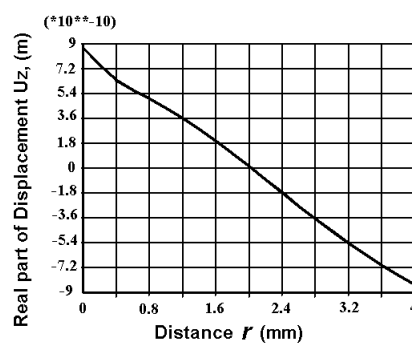


Рис. 4. Перемещения  $u_z$  на торце для частоты  $f_{a2}$ .

Анализ рис. 2 показывает, что резонансы чувствительности совпадают с антирезонансами электрического импеданса или тока полной проводимости. Особый интерес представляет отсутствие второго резонанса на частоте  $f = 258$  кГц. Для выяснения причины этого явления найдем смещения пьезопреобразователя для первых резонансных частот. Формы колебаний на частотах антирезонанса  $f_{aj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) электрического импеданса показаны на рис. 3. Из приведенных мод следует, что именно на второй антирезонансной частоте колебания точек плоской поверхности пьезоэлемента  $z = 0$  вдоль оси  $z$  антисимметричны относительно значения  $r = R/2$  (Рис. 4). Действительно, из рис. 4 видно, что знаки смещений при изменении координаты  $r$  меняют знак. Это приводит к тому, что при одинаковых сосредоточенных силах, заданных в конечно-элементных узлах на нижнем торце преобразователя, индуцируемые на электродах пьезоэлемента заряды имеют на данной моде колебаний в областях  $r \leq R/2$  и  $r \geq R/2$  противоположную фазу, что в итоге и приводит к исчезновению второго резонанса. Приложим одинаковые узловые силы в области, где перемещения на рис. 4 имеют один знак, например, в области от  $r = 0$  до точки изменения знака перемещения  $r = R/2$ . Результаты



показаны на рис. 5, 6. Из графика амплитуды наведенного потенциала на рис. 5 видно, что второй резонанс появился и имеет достаточно большую амплитуду. Рассмотрим теперь нагрузку, приложенную по кольцу в области от точки  $r = R/2$  перемены знака на рис. 4 до  $r = R$ . Результаты расчета показаны на рис. 7, 8. На графике амплитуды наведенного потенциала на рис. 7 также хорошо виден второй резонанс. Важно отметить, что амплитуда этого резонанса примерно равна соответствующей амплитуде на рис. 5. Это объясняет отсутствие второго резонанса на рис. 2, поскольку они имеют разные знаки и складываются в противофазе (см. значения фазовых углов на рис. 6 и рис. 8). Примерно та же картина, но менее ярко выраженная, наблюдается и на третьем резонансе. При точечном возбуждении торца сосредоточенной силой в одном узле меридионального сечения наблюдается существенная зависимость АЧХ от места положения источника. Объяснение этих эффектов хорошо укладывается в использованные выше модели.

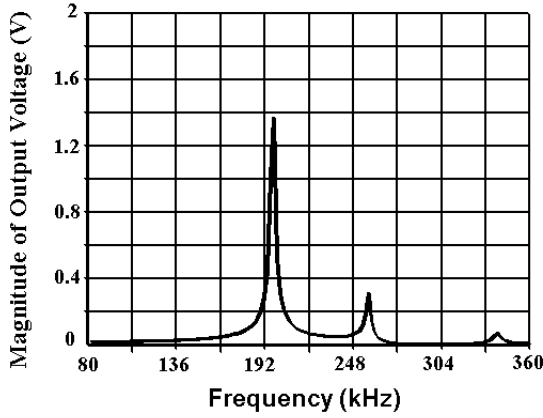


Рис. 5. Амплитуда потенциала при механическом воздействии в центре.

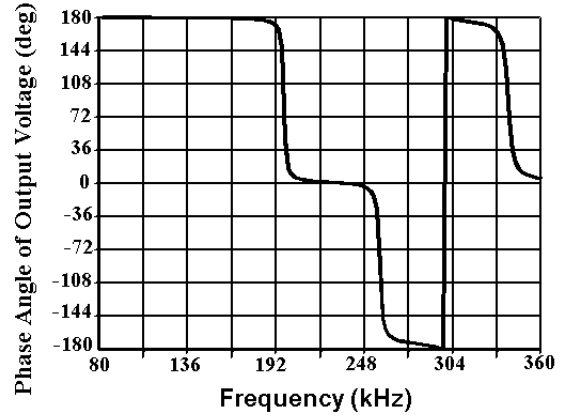


Рис. 6. Сдвиг фаз потенциала при механическом воздействии в центре.

Заметим, что отсутствие возрастания АЧХ наведенного потенциала на рис. 2 вблизи антирезонансной частоты  $f_{a2}$  фактически определяется ортогональностью вектора механических нагрузок  $\mathbf{F}_u$  вектору собственных колебаний  $\mathbf{U} = \mathbf{W}_{a2}$ , что может быть объяснено по методу разложения по модам. Действительно, пусть  $\omega_{ak}$ ,  $\{\mathbf{W}_{ak}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  — порядок матриц  $\mathbf{M}_{uu}$ ,  $\mathbf{C}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{uu}$ ) — набор собственных частот электрических антирезонансов и собственных форм колебаний на этих частотах соответственно, причем векторы  $\mathbf{W}_{ak}$  ортогональны по матрице жесткости  $\bar{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\varphi u}^T$  и ортонормированны по матрице масс  $\mathbf{M}_{uu}$ :

$$\mathbf{W}_{am}^T \cdot \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{W}_{ak} = \delta_{mk}, \quad \mathbf{W}_{am}^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_{uu} \cdot \mathbf{W}_{ak} = \omega_{ak}^2 \delta_{mk}. \quad (3)$$

Тогда, разыскивая решение задачи (1), (2) в виде разложения по собственным формам  $\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n z_k \mathbf{W}_{ak}$ , после умножения (1) скалярно на  $\mathbf{W}_{am}^T$  и учета (3), получим:

$$(-\omega^2 + \omega_{am}^2)z_m + i\omega \sum_{k=1}^n \mathbf{W}_{am}^T \cdot \mathbf{C}_{uu} \cdot \mathbf{W}_{ak} z_k = \mathbf{W}_{am}^T \cdot \mathbf{F}_u. \quad (4)$$

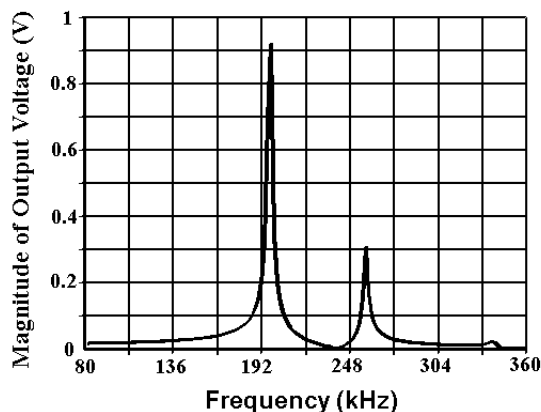


Рис. 7. Амплитуда потенциала при механическом воздействии по кольцу.

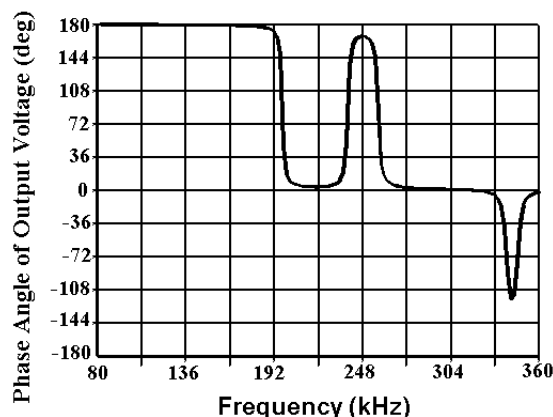


Рис. 8. Сдвиг фаз потенциала при механическом воздействии по кольцу.

Как видно из (4),  $z_m$  не будет возрастать при  $\omega \rightarrow \omega_{am}$  в случае  $\mathbf{W}_{am}^T \cdot \mathbf{F}_u \approx 0$ , т.е. в случае приближенной ортогональности формы колебаний  $\mathbf{W}_{am}$  вектору узловых внешних воздействий  $\mathbf{F}_u$ , что и имеет место для АЧХ на рис. 2 в окрестности второй антирезонансной частоты.

Исследованные особенности могут быть полезны при моделировании и калибровке преобразователей АЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белоконь А.В., Наседкин А.В. Моделирование пьезоизлучателей ультразвуковых волн с использованием программного комплекса ANSYS // Известия ТРТУ. "Матер. научн.-техн. конф. – МИС-98". Таганрог: ТРТУ, 1998. № 4(10). С. 147–150.
- [2] Наседкин А.В., Шихман В.М., Захарова С.В., Иванюков И.В. Применение конечно-элементных методов для расчета приемных систем акустико-эмиссионного контроля // Дефектоскопия. 2006. № 2. С. 16–27.
- [3] Крамаров О.П., Богущ М.В., Сокалло А.И., Шихман В.Л. Исследование упругих диэлектрических и пьезоэлектрических модулей керамики на основе титаната висмута // Пьезоэлектрические материалы и преобразователи. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1985. С. 4–8.

Zacharova S.V., Nasedkin A.V., Shikhman V.M. *Amplitude-frequency response dependence of the transducer characteristics from the boundary conditions on the end-wall.* By means of the finite-element modeling method amplitude-frequency characteristics of the acoustic emission transducers sensitivity when applying distributed or point load to the transducer end-face have been studied. Depending on the boundary conditions on the end-face transducers amplitude-frequency characteristics change. The analysis of the reasons of these changes has been carried out.

# ТЕРМОУПРУГАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ СУХОГО ТРЕНИЯ С УЧЕТОМ ИЗНАШИВАНИЯ

**Иваночкин П. Г., Флек Б. М.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

Получено приближенное решение термоупругой контактной задачи для цилиндрического подшипника скольжения с деформируемым двухслойным вкладышем. Предполагается, что подшипник нагревается вследствие генерации тепла в области контакта от сил кулоновского трения, хотя сами силы трения не учитываются при определении контактных давлений.

Рассматривается подшипниковый узел, включающий следующие детали: стальной вал радиуса  $r_0$ , двухслойный вкладыш наружный радиус которого  $r_3$ , внутренний  $r_1$ , ( $r_2 - r_1 = h_1$  — толщина антифрикционного слоя вкладыша,  $r_3 - r_2 = h_2$  — толщина подложки); стальная обойма внутренний радиус которой  $r_3$ . Вал вдавливается во внутреннюю поверхность вкладыша силой  $P$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При этом происходит изнашивание вкладыша, сопровождающееся тепловыделением в области контакта.

Задача решается при следующих упрощающих предположениях: 1) вязкостью втулки можно пренебречь; 2) вал и обойма жесткие, причем износ вала пренебрежимо мал по сравнению с износом втулки; 3) образующие втулку слои жестко соединены между собой и с недеформируемой обоймой. В указанных соединениях выполняется условие идеального теплового контакта; 4) инерционными эффектами во вкладыше можно пренебречь; 5) при определении напряженно-деформированного состояния втулки используются формулы плоской линейной теории упругости 6) сила трения связана с контактным давлением законом Кулона  $\tau(r_\theta)(\theta, t) = fq(\theta, t)$ , при этом касательные напряжения  $\tau_{r_\theta}$  мало влияют на распределение контактного давления  $q(\theta, t)$  и величину угла контакта  $\alpha(t)$ , поэтому при определении радиальных перемещений они не учитываются.

Условие контакта между валом и втулкой, записанное применительно к рассматриваемому случаю, (радиусы вала и внутренней поверхности втулки близки) ( $r_1 = r_0 + \Delta$ ,  $\Delta/r_0 \ll 1$ ) принимает вид [1]

$$u(\theta, t) + r(\theta, t) - r_0 = [\delta(t) + \Delta] \cos \theta; |\theta| \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq t^* \leq \infty \quad (1)$$

где  $r(\theta, t)$  — уравнение внутренней поверхности втулки (контур внутренней поверхности втулки меняется вследствие износа),  $u(\theta, t)$  — упругое перемещение втулки,  $\delta(t)$  — жесткая осадка вала. Величина  $t^*$  такова, что  $\delta(t)$  имеет порядок перемещений в линейной теории упругости. Упругие перемещения внутренней поверхности втулки получим, используя предложенный в [2] метод построения вырожденного (в асимптотическом смысле) решения термоупругой контактной задачи для

цилиндрического подшипника скольжения сухого трения с двухслойным вкладышем. Связь между перемещением точек внутренней поверхности антифрикционного слоя вкладыша и контактным давлением будет выражаться формулой

$$u(\theta, r, t) = -\frac{1}{2}\gamma_1\mu q(\theta, t)(r_2 - r)^2 + \frac{h_1s_1 + s_2(r_2 - r)}{s_1 + s_2}\left(\frac{1}{h_1}\delta(\theta, t) + \frac{1}{2}\gamma_1\mu q(\theta, t)\right) + \frac{(r_2 - r) - h_1}{h_1}\left(\frac{s_2\gamma_2 - s_1\gamma_1}{s_1 + s_2}\Phi(\theta, t) + \frac{(s_2\gamma_2 - s_1\gamma_1)\lambda_1(2\lambda_2 + \alpha_2h_2) - \alpha_2\gamma_1\lambda_1s_1h_2}{2\alpha_2\lambda_2(s_1 + s_2)}\mu q(\theta, t)\right) \quad (2)$$

где

$$\mu = (1 - \chi)\omega r_1 f \lambda_1^{-1}, \quad \gamma_i = \frac{(1 + \nu_i)\alpha_{Ti}h_i}{1 - \nu_i}, \quad s_i = \frac{2G_i(1 - \nu_i)}{(1 - 2\nu_i)h_i}, \quad (i = 1, 2)$$

где  $\nu_i, G_i$  — коэффициент Пуассона и модуль сдвига слоев втулки,  $\alpha_{Ti}$  — коэффициенты теплового расширения слоев втулки,  $\lambda_i$  — коэффициенты теплопроводности,  $\alpha_i$  — коэффициенты теплоотдачи слоев втулки,  $\Phi(\theta, t)$  — заданное распределение температуры на внутренней поверхности обоймы. Температура антифрикционного слоя вкладыша при этом примет вид

$$T_1(\vartheta, r, t) = \mu q(\theta, t)(r_2 - r) + \mu\lambda_1(\alpha_2h_2 + \lambda_2)(\alpha_2\lambda_2)^{-1}q(\theta, t) + \Phi(\theta, t) \quad |\theta| \leq \alpha(t) \quad (3)$$

Приближенное значение температуры втулки при  $|\theta| \leq \alpha(t), r = r_1$  запишем в виде

$$\bar{T}_1(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} T_1(\theta, r_1, t) d\theta = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi(\theta) d\theta + \mu(h_1 + \lambda_1(\alpha_2h_2 + \lambda_2)(\alpha_2\lambda_2)^{-1})\bar{q}. \quad (4)$$

Для определения функции  $\Phi(\theta, t)$  нужно исследовать задачу теплопроводности для обоймы. Из рассмотрения экстремальных данных о распределении температуры на ее внутренней поверхности в первом приближении заключаем, что это распределение дается зависимостью [3]

$$\Phi(\theta, t) = (D_0 + D_1 \cos \theta)(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$$

Воспользуемся полученным в [4] решением задачи теплопроводности для вала

$$\tilde{T} = \chi f \omega r_1^2 \bar{q} \lambda_0^{-1} \beta. \quad (5)$$

где  $\tilde{T} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_1(\theta, t) d\theta$  — осредненная температура вала,  $\beta$  — безразмерная постоянная, выражение которой может быть подсчитано по формулам указанной работы. Приравнявая между собой средние температуры втулки (3) и вала (5) в области контакта, с учетом соотношения (4) придем к уравнению для определения коэффициента разделения потоков тепла

$$(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}(D_0 + D_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha}) + \mu(h_1 + \lambda_1(\alpha_2h_2 + \lambda_2)(\alpha_2\lambda_2)^{-1})\bar{q} = \chi f \omega r_1^2 \lambda_0^{-1} \beta \bar{q}$$

Второй и третий члены левой части (1) представим в виде

$$r(\vartheta, t) - r_0 = \Delta + v(\theta, t)$$

где  $v(\theta, t)$  — линейный износ внутренней поверхности втулки. Условие контакта между валом и втулкой запишется в виде

$$u(\theta, t) + v(\theta, t) = [\delta(t) + \Delta] \cos \theta - \Delta \quad |\theta| \leq \alpha(t), \quad (6)$$

При заданной нормальной нагрузке  $P(t)$ , действующей на вал и неизвестной величине смещения вала  $\delta(t)$  к уравнению (2) и условию контакта (6) следует добавить условие квазиравновесия вала, связывающее контактные напряжения с внешней нагрузкой. Последнее имеет вид

$$P(t) = r_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} q(\theta, t) d\theta \quad (7)$$

Для определения неизвестной области контакта вала и втулки необходимо использовать условие обращения в нуль контактных давлений на границах области контакта вала и втулки

$$q(\theta_0, t) = 0. \quad (8)$$

Для замыкания системы уравнений износоконтактной задачи необходимо задать соотношение, связывающее линейный износ втулки  $v(\theta, t)$  с контактным давлением  $q(\theta, t)$  и скоростью скольжения  $V = \omega r_0$ . В качестве такого соотношения необходимо использовать уравнение износа, виды которого для разных механизмов изнашивания приведены в [5]. Воспользуемся в качестве локального закона изнашивания, справедливого в каждой точке зоны контакта выражением

$$\dot{v}(\theta, t) = f\omega r_0 m [T_1(\theta, t)] [q(\theta, t) G_1^{-1}]^n \quad (9)$$

где  $m [T_1(\theta, t)]$  — коэффициент интенсивности износа, являющиеся функцией контактной температуры  $T_1(\theta, t)$ . Если рассматривать такие режимы работы подшипника, при которых область контакта  $\alpha(t)$  является монотонно возрастающей функцией, то может быть найдена обратная ей функция  $t = a(\alpha)$ , однозначность которой позволяет использовать  $\alpha(t)$  в качестве нового временного параметра. Поэтому примем зависимость соответствующих величин от времени следующим образом:

$$\tilde{u}(\theta, t) = u(\theta, \alpha(t)), \quad \tilde{v}(\theta, t) = v(\theta, \alpha(t)) \quad \tilde{q}(\theta, t) = q(\theta, \alpha(t))$$

$$\tilde{T}(\theta, t) = T(\theta, \alpha(t)), \quad \tilde{\delta}(t) = \delta(\alpha(t))$$

и опустим далее над ними волнистую линию. Будем для упрощения предполагать, что в уравнении (9) вместо  $T_1(\theta, t)$  стоит его среднее значение  $\tilde{T}$ , даваемое формулой (4). Продифференцируем (6) по  $\alpha$  и получим дифференциальное уравнение для определения контактного давления в сопряжении

$$\vartheta p'_\alpha(\theta, \alpha) + \kappa(\alpha) a'(\alpha) p^n(\theta, \alpha) = \delta'(\alpha) \cos \theta$$

$$p(\theta, \alpha) = q(\theta, \alpha)G_1^{-1}, \quad \kappa(\alpha) = f\omega r_1 m[\tilde{T}_1(\alpha)]$$

$$\vartheta = \frac{\Psi}{2s_1 s_2 \alpha_2 \lambda_2} \quad (10)$$

Из уравнения (6) с помощью соотношения (8) найдем

$$\delta(\alpha_0) = \frac{\Delta - \Phi(\alpha) + \zeta}{\cos \alpha} - \Delta \quad (11)$$

Подстановка  $\alpha = \alpha_0$  в уравнение (6) дает начальное условие для уравнения (10)

$$\begin{cases} p(\theta, \alpha_0) = \vartheta^{-1}[\delta(\alpha_0) + \Delta](\cos \theta - \cos \alpha_0), & |\theta| \leq \alpha_0 \\ p(\theta, \alpha_0) = 0 & |\theta| > \alpha_0 \end{cases} \quad (12)$$

Умножим равенство (10) на  $\cos \theta$  и проинтегрируем его по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\alpha$ . Используя выражение (7) и приближенное равенство

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p^n(\theta, \alpha) \cos \theta d\theta \approx \left(\frac{N}{2}\right)^n \sin^{1-n} \alpha, \quad N = \frac{P}{r_1 G_1}^{-1}$$

получим соотношение

$$a'(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)(\alpha + 0,5 \sin 2\theta) \sin^{n-1} \alpha}{2\kappa(\alpha)\left(\frac{N}{2}\right)^n} \quad (13)$$

связывающее время и текущий угол контакта

$$t = \int_{-\alpha_0}^{\alpha} a'(\theta) d\theta \quad (14)$$

Решение уравнения (10) с начальным условием (10) может быть получено с использованием метода, использованного в работе [6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00306, 06-08-01257)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В.М., Бабешко В.А., Белоконов А.В. и др. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины // Известия РАН МТТ. 1966. № 1. С. 135–139.
- [2] Александров В.М., Губарева Е.А. Решение термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения // Трение и износ. 2005. Т26. № 4. С. 347–357.

- [3] Коваленко Е.В., Евтушенко А.А. Износ подшипника скольжения с учетом тепло-выделения от трения // Трение и износ. 1993. Т.14. № 2. С. 259–269.
- [4] Бабешко В.А., Ворович И.И. К расчету контактных температур, возникающих при вращении вала в подшипнике // ПМТФ.1968. № 2. С. 135–137.
- [5] Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.:Наука, 2001.478 с.
- [6] Колесников В.И., Иваночкин П.Г. Расчетно-экспериментальный метод оценки долговечности двухслойного вкладыша радиального подшипника скольжения // Вестник машиностроения, 1990. № 3. С. 13–15.

**Ivanochkin P.G., Flek B.M.** *Thermoelastic contact problem for the cylindrical sliding bearing of dry friction taking account of wear process.* The approximate solutions of thermoelastic contact problems for cylindrical bearing of sliding with deformable two-layer bush is obtained. It is supposed that bearings are heated up owing to generation of heat in the contact region from forces of Coulomb's friction though forces of friction are not taken into account at definition of contact pressure.

# НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОСТОЯННЫХ В ОБЩИХ ИНТЕГРАЛАХ

**Илюхин А. А.**

*Тагарогский государственный педагогический университет*

Уравнения движения тяжелого гиростата в векторном виде имеют вид

$$(\mathbf{x} + \lambda)^* = (\mathbf{x} + \lambda) \times \omega + \Gamma(\mathbf{e} + \nu), \quad \nu^* = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Здесь  $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  — угловая скорость тела-носителя;  $\lambda$  — кинетический момент гиростата;  $\nu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  — единичный вектор силы тяжести;  $e$  — единичный вектор, идущий из неподвижной точки  $O$  в центр тяжести гиростата;  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — гиростатический момент;  $\Gamma$  — произведение веса гиростата и расстояния от неподвижной точки до его центра тяжести. Звездочка означает дифференцирование по времени в осях, связанных с телом-носителем гиростата. Величины  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) линейно зависят от компонент вектора угловой скорости

$$x_i = A_{i1}\omega_1 + A_{i2}\omega_2 + A_{i3}\omega_3, \quad (2)$$

где  $A$  — тензор инерции гиростата в неподвижной точке.

Система дифференциальных уравнений (1) допускает три интеграла

$$v \cdot v = 1 \quad (\mathbf{x} + \lambda) \cdot \nu = k \quad x \cdot \omega - 2\Gamma(e \cdot \nu) = 2H \quad (3)$$

В работе [1] указано частное решение уравнений (1), при получении которого предполагалось:  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0$ ,  $e_3 = 0$ ,  $A_{22} = A_{33}$ ,  $A_{ij} = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ . Введем безразмерные величины:

$$x_1 = \lambda_2 x, \quad x_2 = \lambda_2 y, \quad x_3 = \lambda_2 z, \quad \tau = \lambda_2 t / A_{22}, \quad l = A_{22} / A_{11}$$

$$p = A_{22} \Gamma / \lambda_2^2, \quad k = pK / \lambda_2, \quad h = A_{22} H / \lambda_2^2, \quad \lambda_1 = r \lambda_2$$

Наложим на постоянные интегралов ограничения:

$$p^2 = [(b - 2a(a + 1))^2 + a^2(1 - a)^2 n^4 + (2a(1 - a)b + a^3(a + 1)(a^2 - 3a + 4)) n^2] / (1 - a^2)^4,$$

$$k = a(a - 2)n [-b + a(a - 1)n^2 - (a + 1)(a^2 + 1)] / (1 - a^2)^3,$$

$$2h = [2(a^2 + a - 1)b + a^2(1 - a)(a + 3)n^2 + 4a(a + 1)] / (1 - a^2)^2,$$

$$\text{где } a = (1 \mp \sqrt{l^2 - l + 1}) / (1 - l), \quad n = r(1 - a^2) / (a^2 - a + 1). \quad (4)$$



Тогда система дифференциальных уравнений (1) допускает решение, в котором основные безразмерные переменные связаны равенствами:

$$\begin{aligned}
 y &= (ax^2 - anx + b)/(1 - a), \\
 z^2 &= \left[ -a^2x^4 + 2a^3nx^2 - a(a(a+1)(a-3) + a^3n^2 + 2b)x^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2a^2n(b-a-1)x - b^2 + 2a(a+1)b + a^2(1-a^2)n^2 \right] / (1-a^2)^2, \\
 Pv_1 &= [-a(a+1)x^2 + a^2(a+1)nx - b + a^2(1-a)n^2 + 2a(a+1)] / (1-a^2)^2, \quad (5) \\
 Pv_2 &= \left[ ax^3 + a(1-2a)nx^2 + (b + a^2(a-1)n - 2a(a+1))x + \right. \\
 &\quad \left. + (a^2(a+1) + (1-a)b)n \right] / (1-a^2)^2, \\
 Pv_3 &= [x + (1-a)n]z / (1-a^2).
 \end{aligned}$$

В решении (5) переменная  $x$  выступает в качестве независимой. Зависимость ее от времени  $t$  устанавливается обращением эллиптического интеграла

$$t - t_0 = \frac{A_{22}}{\lambda_2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{z}, \text{ получаемого интегрированием первого уравнения системы (1).}$$

Из неравенств для компонент тензора инерции вытекают ограничения:

$$a < -1, \quad 2 - \sqrt{3} < a < 1, \quad a > 2 + \sqrt{3} \quad (6)$$

Если предположить, что гиростат имеет полости, заполненные вращающейся жидкостью, то  $l > 0$  и параметр  $a$  изменяется в пределах:

$$a < -1, \quad 0 < a < 1, \quad a > 2 \quad (7)$$

Стационарные решения системы дифференциальных уравнений (1) описывают в динамике гиростата равномерные вращения. При  $A_{22} = A_{33}$  следует равенство  $\omega_3 = 0$ . Равномерные вращения возможны [4] только вокруг вертикальной оси:  $\omega_i = \omega\nu_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Из соотношения  $\omega_3 = 0$  следует равенство  $\nu_3 = 0$ . Рассмотрим совместно первое и третье уравнение системы (1) и получим еще одно условие существования стационарного решения  $\frac{d\omega_3^2}{d\omega_1} = 0$ . На траекториях, определяемых соотношениями (5), условия  $\omega_3 = 0$ ,  $\nu_3 = 0$  выполняются, если уравнение  $z^2(\nu) = 0$  имеет кратный корень  $\nu = c$ . Для системы дифференциальных уравнений (1) соотношения (5) и уравнение

$$A_{11} \frac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2 \omega_3 = 0 \quad (8)$$

можно рассматривать как граничные условия при некотором  $t = t_*$ . Следуя работе [2] назовем (8) граничным функционалом и запишем следующим образом  $B(\bar{u}, \bar{d}, \bar{t}) = 0$ , где  $\bar{d} = (A_{11}, A_{22}, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma)$ ,  $\bar{u} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ . Система (1) допускает стационарное решение  $\bar{u}_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \nu_{10}, \nu_{20}, \nu_{30})$  при определенном значении  $d$ . Запишем необходимое условие ветвления [2] стационарного решения

$\bar{u}_0$  на функционале  $B(\bar{u}, \bar{d}, \bar{t})$  в виде равенства нулю якобиана  $B_{\bar{u}}(\bar{u}_0, \bar{d}_0, t) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left( A_{11} \frac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2 \omega_3 \right) & -\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial \omega_1} & -\frac{\partial f_3}{\partial \omega_1} & -\frac{\partial f_4}{\partial \omega_1} & -\left[ f_5 \frac{\partial \omega_3}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial f_5}{\partial \omega_1} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2\omega_3 & 0 & 0 & -f_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и дополнительных условий

$$\left[ 2\omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left( A_{11} \frac{d\omega_1}{dt} - \lambda_2 \omega_3 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \omega_1} \right] \Big|_{\omega_3=0} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3^2}{\partial \omega_1} \Big|_{\omega_3=0} = 0, \quad (9)$$

где  $f_i$  — функции, стоящие в правых частях соотношений (5).

Если в качестве функционала  $B(u, d, t)$  использовать соотношения (5), то условие (5) в безразмерных переменных записывается в виде

$$z^2(c) = 0, \quad \frac{dz^2(\nu)}{d\nu} \Big|_{\nu=c} = 0 \quad (10)$$

Таким образом, необходимые условия ветвления стационарного решения в силу соотношений  $\frac{d\omega_3^2}{d\omega_1} = 0$ ,  $\omega_3 = 0$  совпадают с достаточными условиями существования таких решений. Эти условия будут достаточными для существования ответвляющихся нестационарных решений  $\bar{u} = (\bar{d}, t)$ , если выполняются требования теоремы I, приведенной в работе [2] на стр. 20. В изучаемой постановке эти требования эквивалентны условию непрерывности нестационарного решения (6) в окрестности точки  $\nu = c$ .

Бифуркация и устойчивость решения в стационарном случае.

Теория бифуркации стационарных решений создана А. Пуанкаре и Н.Г. Четаевым для лагранжевых консервативных механических систем. В работах В.Н. Рубановского показано, что эта теория применима также для исследования систем с известными первыми интегралами. Рассмотрим функцию

$$W = 2h - \omega \left( \sum_{i=1}^3 (A_{ii}\omega_i + \lambda_i)v_i - K \right) + \frac{1}{2}q\omega^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 1), \quad (11)$$

которая является интегралом системы дифференциальных уравнений (1). Значения переменных  $\omega_i$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), для которых интеграл (11) имеет стационарные значения при условии (4) и данной величине  $K$  интеграла площадей, соответствуют равномерным вращениям гиростата, и определяются по методу неопределенных множителей Лагранжа из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \omega_i} = 0 \quad (12)$$

Из последних шести уравнений (12) находим  $\omega_i = \omega v_i$ ,  $v_i = (e_i - \omega \lambda)_i / \omega^2 (A_{ii} - q)$ . Подставив эти значения в соотношения (3) получим уравнения:

$$\Phi(\omega, q) = \omega^4 - \sum_{i=1}^3 \frac{(e_i - \omega \lambda_i)^2}{(A_{ii} - q)^2} = 0, \quad (13)$$

$$K(\omega, q) = \frac{1}{\omega^3} \sum_{i=1}^3 \frac{(A_{ii} e_i - q \omega \lambda_i)(e_i - \omega \lambda_i)}{(A_{ii} - q)^2} = 0. \quad (14)$$

В пространстве  $K$ ,  $\omega_i$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) уравнения (13), (14) определяют кривую  $Q$ . В окрестности точки самопересечения  $Q$  совпадают, по меньшей мере, два вещественных корня (12), а значит, равен нулю гессиан  $D$  функции  $W$  по переменным  $\omega$ ,  $q$ ,  $\omega_i$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Множество решений (13), (14) геометрически можно представить в пространстве  $K, \omega, q$  в виде кривой  $\tilde{Q}$ . Между точками кривой  $Q$  и  $\tilde{Q}$  устанавливается биективное отображение, а значит точками бифуркации кривой  $Q$  соответствуют точки ветвления кривой  $\tilde{Q}$ , где уничтожается якобиан  $\tilde{D}$  уравнений (14).

Используем результаты работы [3] и запишем выражения для производных  $\frac{dK}{dq}$  и  $\frac{d\omega}{dq}$ :  $\frac{dK}{dq} = -\frac{D}{D^{(2)}}$ ,  $\frac{d\omega}{dq} = \frac{D^{(1)}}{D^{(2)}}$ , где:

$$\begin{aligned} D &= A_{11} A_{22} A_{33} \omega^6 (B_1 + \omega^2 B_2 B_3); & D^{(1)} &= -A_{11} A_{22} A_{33} \omega^8 B_3 \\ D^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{11} A_{22} A_{33} \omega^4 (q - A_{11})(q - A_{22})(q - A_{33}) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}; \\ B_1 &= \sum_{(1,2,3)} (q - A_{11}) [2\omega(A_{22} - A_{33})v_2 v_3 + \lambda_2 v_3 - \lambda_3 v_2]^2; \\ B_2 &= \sum_{i=1}^3 A_{ii} v_i^2; & B_3 &= \sum_{(1,2,3)} (q - A_{22})(q - A_{33}) v_1^2. \end{aligned}$$

Соотношение между якобианами  $D$  и  $\tilde{D}$  имеет вид

$$D = \frac{1}{2} A_{11} A_{22} A_{33} \omega^4 (A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q) \tilde{D}.$$

Достаточные условия устойчивости движений (14) в случае, когда

$$\sum_{(1,2,3)} [2\omega(A_{22} - A_{33})v_2 v_3 + \lambda_2 v_3 - \lambda_3 v_2]^2 \neq 0$$

приводятся к неравенствам  $B_1 > 0$ ,  $D > 0$ . При выполнении условия  $D < 0$  невозмущенное движение неустойчиво [3]. Исследуем бифуркацию и устойчивость стационарных движений, для точного решения [1]. Введем дополнительный параметр  $\mu$  вместо параметра  $c$  с помощью равенства

$$\mu^2 = (a + 1) / [a + 1 + (1 - a)c^2].$$

Перепишем ограничения, которые дают условия существования стационарных решений

$$n = c[2\mu(1-a)\mu], \quad b + a(c-n)c = \frac{a(a+1)}{\mu}(-\mu \pm 1), \quad c = \sqrt{\frac{(a+1)(1-\mu^2)}{(1-a)\mu^2}}. \quad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) получим зависимость

$$q = l \frac{y(c) + 1}{y(c)} = l \frac{\mu \pm a}{a(\mu \pm 1)}, \quad \omega = (1-a^2) \frac{P(\mu \pm 1)}{c(-a\mu \pm 1)}. \quad (16)$$

Второе равенство (16) определяет кривую  $\omega = \omega(\mu)$ . Точки  $\mu_{1,2} = \mu l/a$  на оси  $O\mu$  являются предельными и недостижимыми. Постоянную в интеграле, которая в безразмерном виде дана второй формулой (9), запишем следующим образом

$$K = -\frac{a(a-2)\lambda_1}{a^2 - a + 1} \frac{b + (a+1)^3}{\sqrt{b^2 + a^2(a+1)^2 n^2}}. \quad (17)$$

В силу соотношений (15) величина  $K$  определяемая равенством (17), является функцией одного свободного параметра  $\mu$ . Множество стационарных движений (14) геометрически можно представить на плоскости  $(K, \mu)$  кривой  $\tilde{Q}$ , определяемой уравнением (17) на соотношениях (15). Между точками кривой  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{\tilde{Q}}$  устанавливается взаимнооднозначное соответствие формулами (16). Из равенств, связывающих  $D$ ,  $\tilde{D}$ ,  $K$  и  $\Phi$  следует, что в точках бифуркации обращается в нуль производная  $\frac{dK}{d\mu} = 0$ .

Для анализа условий устойчивости равномерных вращений можно использовать соотношения

$$D = \frac{1}{2} A_{11} A_{22} A_{33} \omega^4 (A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{dK}{dq}$$

$$\omega^4 B_2 = \frac{1}{2} (A_{11} - q)(A_{22} - q)(A_{33} - q) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dq}$$

Анализ знака величины  $D$ , установленный с помощью производных  $\frac{dK}{d\mu}$  и  $\frac{d\omega}{d\mu}$  при условиях существования стационарных движений, показал, что для всех реализуемых случаев  $D < 0$ , а значит, не выполняется необходимое условие устойчивости равномерных вращений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Докшевич А.И. Новое частное решение уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. 1970. Вып. 2. С. 12–15.

- [2] Келлер Дж., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1969. С. 87–102.
- [3] Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. Задачи исслед. устойчивости и стабилизации движения. 1975. Вып. 1. С. 121–200.
- [4] Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 158–159

**Плукхин А.А.** *Bifurcations of stationary Euler-Kirchhoff's equations with definite values of general integrals constants.* The conditions of existence stationary solutions for symmetrical gyrostats moving equations were found. The cases then asymptotical solutions bifurcate from these solutions and conditions then several solutions correspond to integration constants were described.

# ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ "ЗДАНИЕ-ГРУНТ"

**Кадомцев М. И.\* , Ляпин А. А.\*\* , Селезнев Н. М.\***

*\* Ростовский государственный строительный университет*

*\*\* Ростовский военный институт ракетных войск*

Рассматривается подход, позволяющий более точно учитывать реальные условия и резонансный характер динамического взаимодействия геологической среды и массивного объекта при набегании сейсмической волны или воздействии техногенных колебаний. Предлагается использовать сочетание методов граничных интегральных уравнений (ГИУ) с методом конечных элементов (МКЭ). При построении конечноэлементной модели предусматривается использование любого существующего программного комплекса, позволяющего проводить расчет на динамические воздействия.

При проектировании зданий и сооружений в сейсмоопасных регионах требуется проводить их расчет на воздействие сейсмической волны, распространяющейся в грунте. Характер ее воздействия на конкретное сооружение в значительной степени определяется строением и свойствами верхней части разреза грунтового массива. При решении конкретных модельных задач в основном используют аналитические и аналитико-численные методы. Это объясняется тем, что исследуемая область полуограничена, а использование метода конечных элементов при решении подобных модельных задач связано с необходимостью ее аппроксимации конечными телами, что может вызвать большую погрешность расчета. Моделирование реальной ситуации требует учета заглубления фундамента в грунт, а также нарушения (хотя бы локального) плоскопараллельной ориентации границ раздела слоев. Методика граничных интегральных уравнений зарекомендовала себя наиболее перспективной для решения задач генерации и распространения колебаний в полуограниченных слоистых средах с локальным нарушением структуры слоистости и наличием локальных нарушений плоской поверхности среды. Последние факты определяют необходимость разработки новых подходов, позволяющих более точно учитывать реальные условия и резонансный характер динамического взаимодействия геологической среды и массивного объекта при набегании сейсмической волны или воздействии техногенных колебаний. В настоящей работе предлагается использовать сочетание методов граничных интегральных уравнений (ГИУ) с методом конечных элементов (МКЭ). При разработке такого гибридного алгоритма целесообразно предусмотрена возможность использования МКЭ программных комплексов, используемых в строительстве, и получения на промежуточном этапе расчетов достаточно полной информации о распределении динамических контактных напряжений вдоль границы (в том числе не плоской) контакта фундамента объекта с грунтом. Остановимся подробнее на описании предлагаемого алгоритма и особенностях его практической реализации.

Грунтовой массив представляет собой многослойное полупространство (рис. 1), граница которого в некоторой области отличается от плоской и описывается поверхностью  $S$ , являющейся областью контакта грунта с объектом. Эта

поверхность непрерывна, но может иметь угловые линии и точки. На поверхность слоистого полупространства вне области  $S$  может действовать сосредоточенная или распределенная в некоторой области  $D$  система усилий  $P(x, y)$ , изменяющаяся во времени по закону  $F(t)$ .

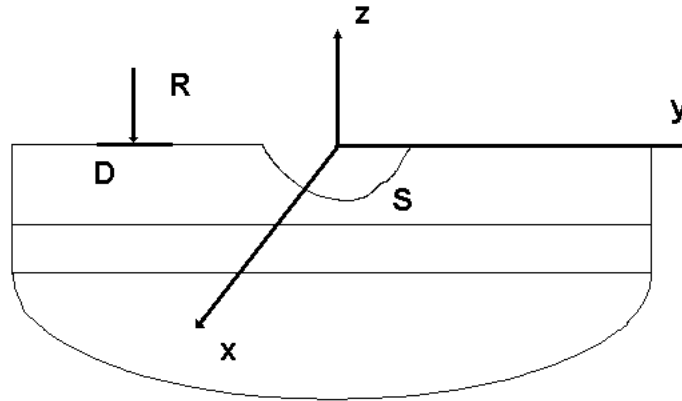


Рис. 1. Полупространство с выемкой

Построение системы ГИУ для слоистого полупространства с выемкой заданной формы (в том числе при наличии локализованных неоднородностей) проводим в соответствии с разработанной нами ранее методикой. В результате ее использования общая задача приводится к систем ГИУ следующей структуры:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_l^{(1)} + \iint_S \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 T_{ijk}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) \right\} u_k^{(1)}(\mathbf{r}) ds = \\ = \iint_S \sum_{j=1}^3 U_{ij}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \mathbf{p}_j(\mathbf{r}) ds - \iint_D \sum_{j=1}^3 U_{ij}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) R_j^{(1)}(x, y) dx dy \quad (1) \end{aligned}$$

Решение полученного ГИУ на основе МГЭ предполагает разбиение криволинейной поверхности  $S$  на граничные элементы. Это разбиение проводим таким образом, чтобы узлы ГЭ совпадали с соответствующими узлами конечных элементов в расчетной МКЭ схеме здания вдоль границы контакта. В результате производим расчет решений ГИУ (1) для набора единичных нагрузок, приложенных в каждом из узлов ГЭ. В результате итоговое решение задачи для произвольно распределенной в области контакта здания и грунтового массива нагрузки получаем в виде:

$$\vec{u}^{(1)}(x, y, z, \omega) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (p_{kj} \vec{u}_{kj}^{(1)}(x, y, z, \omega) + \vec{u}_{kj}^{(1p)}(x, y, z, \omega)) \quad (2)$$

где  $u_{kj}^{(1)}(x, y, z, \omega)$  — решение ГИУ (1) при единичной нагрузке, приложенной в узле с сетки ГЭ с номером  $kj$  ( $k=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M$ ) — решение того же уравнения

при задании нагрузки  $F(t)$  вне области контакта. Величины коэффициентов  $p_{ij}$  определяют неизвестный закон распределения контактных напряжений.

При разработке КЭ модели здания используем любой программный комплекс, позволяющий проводить расчет здания на динамическое воздействие. При разбиении его на КЭ выполняем условие совмещения вдоль поверхности  $S$  узлов КЭ с узлами ГЭ, в которых задаются единичные усилия. Аналогично предыдущему, проводим расчет здания последовательно при воздействии в узлах сетки КЭ вдоль поверхности  $S$  единичных усилий, осциллирующих с частотой  $\omega$ . В результате получаем набор решений  $u_{kj}^{(2)}(x, y, z, \omega)$ , по которым в любом узле области контакта объекта с грунтом можем восстановить вектор полного смещения точек объекта  $\vec{u}^{(2)}(x, y, z, \omega)$  в области контакта при заданной нагрузке в виде

$$\vec{u}^{(2)}(x, y, z, \omega) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{kj} \vec{u}_{kj}^{(2)}(x, y, z, \omega) \quad (3)$$

Практическая реализация описанного алгоритма для реальных объектов связана с большим объемом вычислений по блокам МКЭ и МГЭ моделей, с последующим решением системы ЛАУ вида

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{kj} \left[ \vec{u}_{kj}^{(1)}(x, y, z, \omega) - \vec{u}_{kj}^{(2)}(x, y, z, \omega) \right] = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{u}_{kj}^{(1p)}(x, y, z, \omega) \quad (4)$$

для всех совпадающих узлов КЭ объекта и ГЭ грунтового массива. При этом важным является вопрос обусловленности получаемых систем ЛАУ. Опыт использования подобного подхода при решении динамических контактных задач для жесткого штампа с плоским основанием показывает, что существенное сгущение сетки разбиения определяет ухудшение обусловленности систем. Оптимальное разбиение зоны контакта определяется на основе численного эксперимента и соответствует 6-8 узлам на длину волны колебаний, распространяющихся в среде под штампом. Т.е. подобный подход достаточно эффективен при исследовании относительно низкочастотных колебаний (размер штампа соизмерим с длиной волны). При исследовании сейсмических воздействий наиболее распространенные размеры фундаментов, как правило, меньше длины волны в грунте. Дополнительно следует отметить, что учет податливости штампа (фундамента) улучшает обусловленность получаемой при использовании данного алгоритма системы ЛАУ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.



- [2] Дерюшев В.В., Ляпин А.А., Селезнев С.М. Исследование динамики поверхностных и слабозаглубленных массивных объектов при нестационарном сейсмическом воздействии // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1999. № 1. С. 41–42.
- [3] Ляпин А.А. О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 5. С. 87–91.
- [4] Ляпин А.А. К исследованию динамики слоистой среды с дефектами // Современные проблемы механики сплошной среды. Международная научная конференция. Тезисы докладов. г.Ростов-на-Дону, 19–21 июня. 1995. С. 32–33.
- [5] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.

**Kadomtsev M.I., Lyapin A.A., Seleznev N.M.** *Algorithm of solution of dynamical problem for system "Building-ground" under seismic or thechnogenic influence.* The article offers an approach combining the boundary elements method with a finite element method. The approach is used to analyze dynamic interaction of the geological environment and massive object at a seismic wave propagation or influence of thechnogenic vibration. It allows to consider a real conditions and resonant character of the interaction most strictly. To construct finite element model any existing programs that allow to solve dynamic problems can be used.

# ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

**Калашников В.В., Карякин М.И.**

*Ростовский государственный университет*

Предложена новая модификация полуобратного представления деформации чистого изгиба стержня, пригодная для применения метода последовательных приближений. С точностью до эффектов второго порядка построено решение для двух видов моделей нелинейно упругого поведения: полулинейного материала и материала Блейтца и Ко. Проведено сравнение полученного решения с численным решением для всех рассмотренных материалов, а также с аналитическим решением для полулинейного материала. Определено положение нейтральной линии стержня после деформации, исследовано изменение толщины стержня.

Изгиб, наряду с растяжением и кручением, является одним из основных типов деформаций самых разных элементов конструкций, поэтому задача изгиба исследована достаточно широко. В рамках линейной теории упругости задача изгиба призматического тела была решена Сен-Венаном в 1856 году. Постановка задачи плоского изгиба в рамках теории больших деформаций несжимаемых материалов допускает универсальное решение, т.е. решение, не зависящее от конкретного вида нелинейно-упругого потенциала. Решение плоской задачи о чистом изгибе нелинейной полосы из полулинейного материала изложено в [1,2]. В [3] в рамках теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию, исследована плоская задача об изгибе предварительно сжатого или растянутого прямоугольного бруса. Пространственная теория чистого изгиба призматического бруса в условиях больших деформаций разработана в [4]. В [5] исследованы эффекты второго порядка в задаче изгиба предварительно изогнутого стержня.

Однако в этой известной задаче изгиба тоже есть некоторая особенность. Неслучайно, в работах, связанных с линеаризацией задачи, рассматривается предварительно нагруженное тело. Особенность кроется в соотношениях, описывающих деформацию тела при изгибе, и выражается в невозможности предельного перехода в недеформированное состояние, и, как следствие, в неприменимости методов последовательных приближений.

Рассмотрим деформацию тела при плоском чистом изгибе стержня (рис. 1).

Лагранжева декартова система координат после деформации становится цилиндрической,  $\rho$  – расстояние от начала координат до центра тяжести поперечного сечения стержня (после деформации). Стержень испытывает конечную деформацию, описываемую следующими полуобратными соотношениями [2]:

$$R = P(x), \Phi = By, Z = z. \quad (1)$$

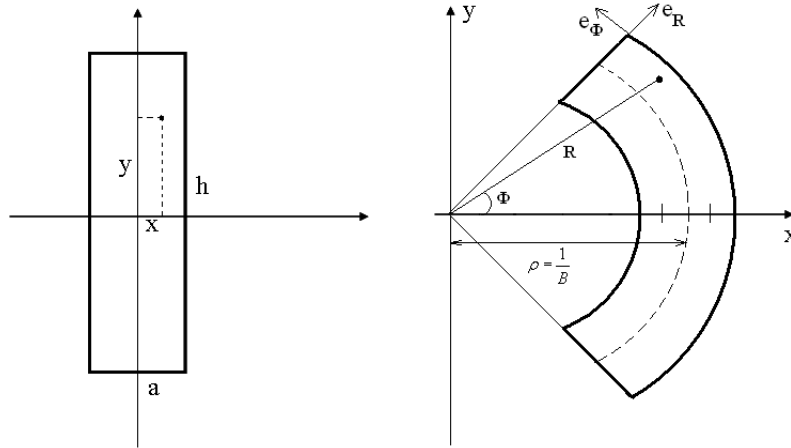


Рис. 1. Деформация чистого изгиба.

Однако при попытке использовать метод последовательных приближений для анализа такой задачи, становится очевидна проблема: соотношение (1) нельзя линеаризовать по параметру  $B$ , т.к., положив  $B = 0$ , мы не получим исходное недеформированное состояние тела.

Кроме того, при решении задачи полуобратным методом для полулинейного материала, оказывается, что функция  $P(x)$  сингулярна в окрестности  $B = 0$ . Действительно, записав уравнения равновесия и граничные условия отсутствия напряжений на боковых поверхностях,

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ D_{xR} |_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0 \end{cases}$$

решим задачу для полулинейного материала, энергия деформации которого имеет вид:

$$W = 2\mu \left( \left( \frac{\nu}{1-2\nu} s_1 - 1 \right) \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{C}$$

где  $s_1 = \text{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})$ ,  $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T}$ ,  $\mathbf{C}$  – градиент деформации,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор.

Краевая задача для определения  $P(x)$  получается линейной

$$\begin{cases} P''(x) = P(x)B^2 - \frac{\nu}{1-\nu}B \\ (\nu - 1)(P'(x) - 1) - \nu P(x)B |_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0 \end{cases}$$

и позволяет определить функцию  $P(x)$  в явном виде:

$$P(x) = e^{-Bx}C_1 + e^{Bx}C_2 - \frac{1}{B(\nu - 1)}$$

$$C_1 = e^{\frac{Ba}{2}} \frac{\nu - 1}{B} \left( e^{\frac{B^2 a^2}{4}} + 1 \right)^{-1}, \quad C_2 = (2\nu - 1)C_1$$

При разложении  $P(x)$  в ряд по степеням  $B$  видно наличие особенности:

$$P(x) = \frac{1}{B} + x + \frac{\nu(4x^2 - a^2)}{8(\nu - 1)}B + \frac{(4x^2 - 3a^2)x}{24}B^2 + O(B^3)$$

Слагаемое  $\frac{1}{B}$  определяет положение линии, проходящей через центр тяжести поперечного сечения стержня, иными словами, оно выражает смещение начала координат при увеличении угла изгиба.

Для выделения особенности модифицируем полуобратное представление, положив :

$$R = \frac{1}{B} + A(x)$$

Такая замена означает с математической точки зрения то, что мы выделяем особенность из рассмотрения, а с геометрической – разделяем расстояние до точки деформированной конфигурации на расстояние до нейтральной линии до деформации и функцию  $A(x)$ , геометрический смысл которой – изменение толщины стержня.

В случае отсутствия деформации,  $B \rightarrow 0$ , при этом  $\Phi \rightarrow 0$ , а  $R \rightarrow \infty$ . Предельное состояние является прямоугольником конечной высоты, а начало координат находится на бесконечности.

Задачу определения функции искажения формы поперечного сечения  $A(x)$  допустимо решать задачу методом последовательных приближений, отыскивая ее в виде

$$A(x) = A_0(x) + A_1(x)B + A_2(x)B^2 + \dots$$

Получаем набор линейных краевых задач вида:

$$\begin{cases} A_n''(x) = F(A_n', A_n, x), \\ D_{xR}^{(n)}(a/2) = 0, \\ D_{xR}^{(n)}(-a/2) = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение каждой из таких линейных систем уравнений содержит одну неопределенную константу. Это происходит потому, что система краевых условий при линеаризации становится линейно-зависимой.

Оказалось, что существует два способа отыскания этих неизвестных констант, для которых решение следует отыскивать с учетом более высоких степеней разложения. Во-первых, константа  $i$ -го приближения находится из условия разрешимости краевой задачи для  $(i+2)$ -го приближения. Во-вторых, константу  $i$ -го приближения можно определить из условия отсутствия продольной силы, при учете в ней слагаемых порядка  $(i+1)$ . Второй вариант является предпочтительным, поскольку требует учета слагаемых меньшего порядка.

Результаты получены для двух типов материалов. Найденное решение  $A(x)$  совпадает с аналитическим решением для полуполинейного материала и численным решением для материала Блейтца и Ко в достаточно большом диапазоне изменения параметра  $B$ .

Получены аналитические формулы определения координаты нейтральной линии. Здесь под нейтральной линией понимается линия, не изменяющая своей длины после деформации стержня в целом. В частности, для упрощенной модели материала Блейтца и Ко она имеет вид:

$$x_c = -\frac{2}{9}a^2B + \frac{47}{648}a^4B^3$$

Именно эта линия недеформированного прямоугольника переходит в линию  $R = 1/B$  в деформированной конфигурации.

Исследовано относительное изменение толщины стержня при изгибе. Для материала Блейтца и Ко:  $\delta = -\frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{k^2}$ , где  $\alpha = Bh$  – угол изгиба,  $h = ka$  – высота стержня. В приведенном на рис. 2 диапазоне изменения параметра  $\alpha$  численно найденное значение этого изменения практически совпадает с квадратичным решением.

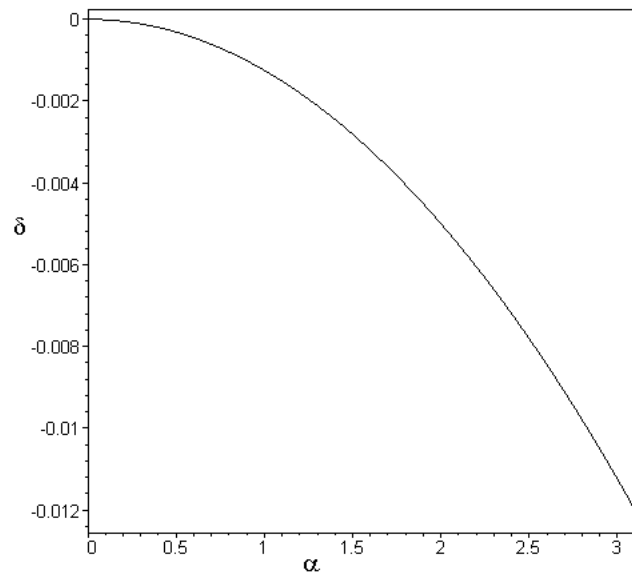


Рис. 2. Относительное изменение толщины цилиндра при  $k = 10$

Построена зависимость изгибающего момента от параметра  $B$ . Нелинейность выражается в эффектах третьего порядка. Для материала Блейтца и Ко

$$M_z = \frac{2}{9}a^3B - \frac{143}{1215}a^5B^3$$

Рис. 3 иллюстрирует диапазоны применимости линейной теории и теории, учитывающей эффекты второго и третьего порядков.

Для полуплинейного материала при достаточно больших значениях  $B$  (при утоньшении стержня порядка 7%) на графике зависимости момента от кривизны существует точка экстремума, связанная, по-видимому, с одной из форм потери устойчивости при изгибе [6].

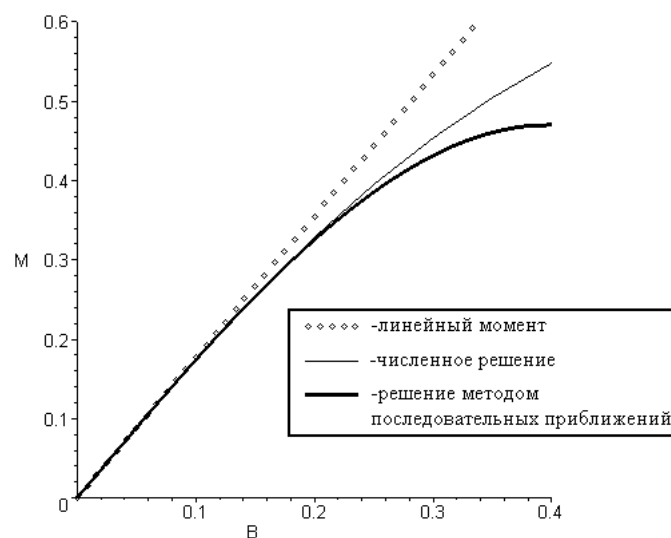


Рис. 3. Зависимость изгибающего момента от кривизны. Материал Блейтца и Ко

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
- [2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [3] Зубов Л.М. Линеаризованная задача изгиба и принцип Сен-Венана // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки, 1985. № 4. С. 34–38.
- [4] Зеленина А.А., Зубов Л.М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел. // ПММ., 2000. Т 64. вып. 3.
- [5] R.S. Batra, F. dell'Isola, G.C.Ruta. Second-order solution of Saint-Venant's problem for an elastic bar predeformed in flexure. // International Journal of Non-Linear Mechanics 40 (2005) 411-422.
- [6] Spyros A. Karamanos. Bending instabilities of elastic tubes. // International Journal of Solids and Structures 39 (2002) 2059-2085.

**Kalashnikov V.V., Karyakin M.I.** *Second order effects in a two-dimensional problem of bending of nonlinear elastic shaft.* The new modification of semi-inverse presentation of pure bending deformation of the bar which is available for using convergence method is suggested. The solutions accurate within second order effects for the two models of nonlinearly elastic media (harmonic material and Bleits and Ko material) are obtained. These solutions are compared with numerical solutions and also with analytical solution for the harmonic material. The position of neutral axis of the bar after deformation is determined, the variation of bar thickness is investigated.

# ДИНАМИКА УПРУГИХ ГРАДИЕНТНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

**Калинчук В. В.\***, **Белянкова Т. И.\*\***, **Богомолов А. С.\*\***

\* Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

\*\* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского государственного университета

Представлены результаты исследования широкого класса задач динамики полугораничных сред с плавно изменяющимися по глубине свойствами. Обсуждаются вопросы целенаправленного выбора структуры материалов, обладающих заранее заданными свойствами.

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания неоднородной среды под действием распределенной в области  $\Omega$  на ее поверхности нагрузки  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}e^{-i\omega t}$ . Среда представляет собой слой  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$  упругие параметры  $\lambda^{(1)}(x_3), \mu^{(1)}(x_3)$  которого — произвольные функции координаты  $x_3$ , жестко сцепленный с однородным полупространством  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$ , упругие параметры  $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}$  которого — константы.

Динамика неоднородной среды определяется [1 – 3] представлением:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}^{(1)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1)$$

$$\mathbf{k}^{(1)}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2)$$

с функцией  $\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \left\| K_{mn}^{(1)} \right\|_{m,n=1}^3$ , элементы которой восстанавливаются численно на основе решения некоторой системы задач Коши.

Далее предполагается, что упругие модули изменяются по закону

$$\lambda^{(1)}(x_3) = f(x_3)\lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)}(x_3) = f(x_3)\mu^{(2)}$$

Рассмотрены следующие типы неоднородности:

1. неоднородный слой с монотонно изменяющимися свойствами (Рис. 1 и Рис. 2) на поверхности однородного полупространства;

2. неоднородный слой с "высокоскоростным" (Рис. 3) или "низкоскоростным" (Рис. 4) включением на поверхности однородного полупространства. Графики функции  $f(x_3)$ , характеризующие изменение свойств рассматриваемых типов сред представлены на Рис. 1–4.

Исследования показали [1 – 3], что динамические свойства неоднородной среды с монотонно изменяющимися свойствами (Рис. 1 и 2) характеризуются:

— типом неоднородности ("нормальная", когда упругие модули возрастают по глубине (кривые 1 и 3), и "аномальная", когда упругие модули убывают по глубине (кривые 2));

- локализацией неоднородности (приповерхностная (кривые 2 и 3) или придонная (кривые 1) области);
- градиентностью неоднородности – скоростью изменения свойств среды (кривые (а) или (б));
- интегральным коэффициентом неоднородности – осредненным по толщине слоя значением функции  $f(x_3)$

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_0^h f(x_3) dx_3 \quad (3)$$

Анализ динамических свойств градиентно-неоднородных сред с монотонно изменяющимися свойствами показал, что определяющую роль в формировании поверхностного волнового поля играет тип неоднородности ("нормальный" или "аномальный"). Например, представленный кривыми 1 и 2 на Рис. 1. По сути это

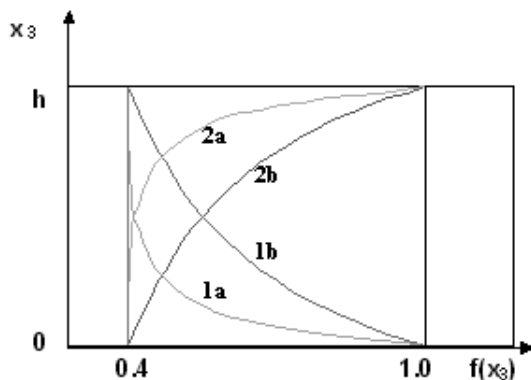


Рис. 1

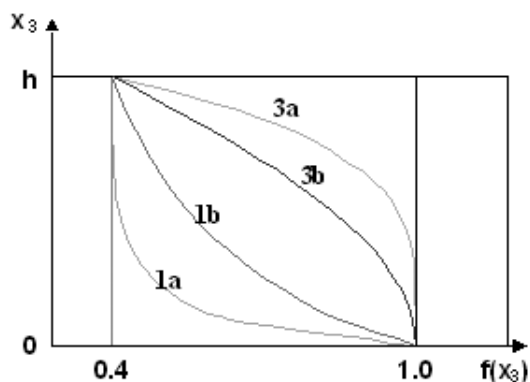


Рис. 2

один и тот же материал (значение  $f_0$  для пар с одинаковыми буквами одно и то же), который лишь различным образом ориентирован по отношению к полупространству: в одном случае (кривая 2б) слой сцеплен с жестким полупространством податливой гранью, в другом (кривая 1б) — жесткой гранью. Как показали расчеты, фазовые скорости волн в обоих случаях возросли за счет того, что придонная область слоя ужесточается за счет контакта с полупространством, однако "аномальная" ориентация слоя приводит к значительно большему их изменению.

Особое место занимает значение интегрального коэффициента  $f_0$ . В представленных на Рис. 1 и 2 случаях изменения свойств среды имеет место закономерность: чем больше значение  $f_0$ , тем ближе свойства неоднородной среды приближаются к свойствам однородного полупространства.

Особый интерес представляют динамические свойства неоднородных сред, моделирующих "высокоскоростное" (Рис. 3) или "низкоскоростное" (Рис. 4) включение. Исследования показали [3 – 6], что вид дисперсионных кривых в случае "низкоскоростного включения" характерен для среды "нормального" типа. Наличие такого включения приводит к появлению счетного множества мод поверхностных волн, каждая из которых характеризуется "частотой отсечки". При этом определяющую роль играет интегральный коэффициент  $f_0$  — его увеличение приводит к



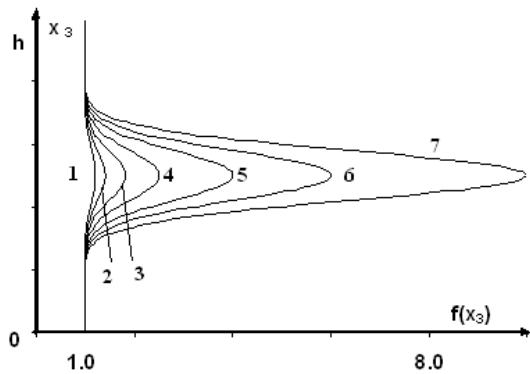


Рис. 3

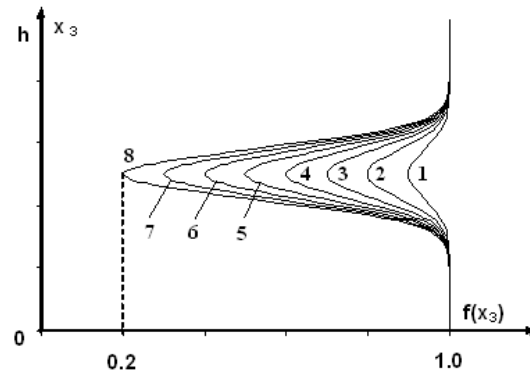


Рис. 4

увеличению количества мод поверхностных волн, уменьшение — соответственно к уменьшению их количества. При этом каждая мода с момента ее появления существует лишь в ограниченном диапазоне частот. Вне этого диапазона она подавляется за счет того, что на соответствующий полюс функции Грина накладывается ноль.

Иное наблюдается в случае "высокоскоростного включения". Поведение дисперсионных кривых резко отличается от поведения кривых в "аномальном" случае — когда на поверхности низкоскоростного полупространства лежит высокоскоростной слой. Как известно, в этом случае поверхностная волна существует лишь в ограниченном диапазоне частот. Частота отсечки, на которой мода исчезает, с увеличением перепада жесткости слоя и полупространства понижается, с уменьшением перепада — увеличивается. В случае жесткого включения ситуация несколько изменяется. Для каждой кривой существует две частоты отсечки: в низкочастотном диапазоне кривая исчезает, в высокочастотном диапазоне кривая появляется вновь. При этом с увеличением  $f_0$  нижняя частота отсечки уменьшается, верхняя — увеличивается, диапазон частот, в котором вещественный полюс отсутствует увеличивается. При малых значениях  $f_0$  поверхностная волна существует во всем диапазоне, частота отсечки отсутствует.

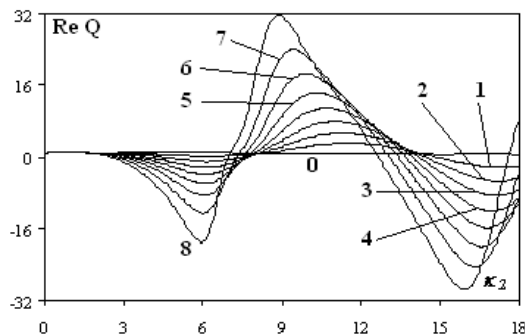


Рис. 5

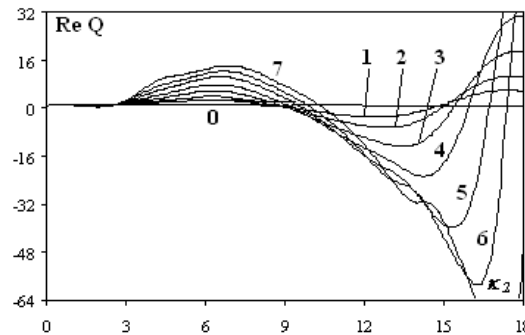


Рис. 6

Существенно влияет вид неоднородности среды на ее динамическую жесткость. На Рис. 5 и 6 представлены графики, иллюстрирующие влияние жесткости вклю-

чения (коэффициента неоднородности  $f_0$ ) на действительную составляющую динамической жесткости. Номера линий на Рис. 5 и 6 соответствуют номерам кривых на Рис. 3 и 4. Из графиков следует, что уже незначительное изменение (кривая 6) параметров поверхностного слоя приводит к существенному изменению динамической жесткости среды. Плавный переход от слоя к полупространству определяет слабо выраженную осцилляцию жесткости по частоте. Отсутствие плавности в переходе от слоя к полупространству приводит к тому, что динамическая жесткость среды приобретает ярко выраженный осциллирующий по частоте характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-08-65499\_а, 06-01-00726\_а, 06-08-96635-р\_юг\_а).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.:Физматлит, 2002. 240 с.
- [2] Калинчук В.В., Белянкова Т.И. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. ВУЗов. Сев.-Кав. регион. Естест. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49
- [3] Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Tosecky A. The effective approach to the inhomogeneous media dynamics modeling // Proceedings of the 5th International Conference on Structural Dynamics "Structural Dynamics — EUROODYN2005". Paris. France. 4–7 Sep. 2005. Vol. 2. pp. 1309–1314.
- [4] Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 276 с.
- [5] Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Богомолов А.С. К проблеме моделирования неоднородных материалов с заданными свойствами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 26–32.
- [6] Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамика структурно-неоднородных сред и резонансные явления // Тр. IX Всеросс. Съезда по теор. и прикл. механике. Нижний Новгород. 2006. Т. 3. С. 35–36.

**Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Bogomolov A.S.** *Dynamics of elastic gradient-nonuniform media.* Analysis results are submitted for a wide class of dynamics problems for semi-infinite media, whose properties are smoothly varying depending on depth. The problems of a purposeful choice of the structure for materials having preset properties are discussed.

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТРУБКАХ И ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПУЛЬСОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИАМЕТРА АРТЕРИЙ

**Кизилова Н. Н.**

*Харьковский национальный университет, Украина*

Исследуется задача о распространении волн давления в заполненных вязкой несжимаемой жидкостью многослойных трубках из анизотропного вязкоупругого материала. Модель рассматривается в применении к распространению пульсовых волн по артериям. Параметры жидкости и материала стенки соответствуют крови и слоям стенки артерии. На внешней поверхности трубки заданы условия отсутствия напряжений (поверхностные артерии) или перемещений (глубокие артерии). Решение задачи получено в виде разложений по степеням малого параметра, равного отношению радиальных перемещений стенки к внутреннему радиусу трубки. В аналитической форме получены выражения для нулевого, первого и второго приближения. Проведены расчеты объемного расхода  $Q(t)$ , напряжения сдвига на внутренней поверхности трубки  $\tau(t)$  и осцилляций внутреннего диаметра  $D(t)$  в произвольном сечении трубки. Теоретические результаты сравниваются с данными ультразвуковых измерений осцилляций диаметра сонных артерий здоровых пациентов и пациентов со стенозом и атеросклерозом. Исследованы зависимости давление-расход  $P(Q)$ , а также кривые  $dD/dt(D)$ . Показано, что площадь, ограниченная кривыми  $P(Q)$  и  $dD/dt(D)$ , а также угол наклона наибольшей оси кривых являются важными показателями для определения патологических изменений толщины, модуля упругости и вязкости материала стенки.

Колебания стенок артерий вызваны распространением волн давления и скорости, генерируемых при сокращении сердечной мышцы. Регистрация колебаний диаметра артерии  $D(t)$  и скорости кровотока  $U(t)$  или объемного расхода  $Q(t)$  в фиксированном сечении сосуда проводится в клинике с помощью ультразвуковой аппаратуры (УЗИ). Сложный вид регистрируемых кривых связан с колебаниями внутрисосудистого давления, вызванными многочисленными отражениями волн в местах ветвления сосудов и с податливостью стенки артерии, в которой проводится регистрация. Анализ полученных зависимостей  $D(t)$  и  $U(t)$  чрезвычайно важен для выявления сердечно-сосудистых патологий. В клинике используется, чаще всего, анализ расположения отдельных точек на кривых (контурный анализ), вычисление интегральных характеристик и специальных показателей, а также спектральный анализ. Детальное понимание физических закономерностей, которые лежат в основе генерации пульсовых кривых той или иной формы, связано с моделями распространения волн в податливых трубках. Наиболее распространенной является двумерная модель Уомерсли, в которой кровь рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость, а сосуд – как толстостенный цилиндр постоянного кругового сечения из несжимаемого вязкоупругого материала с продольным закреплением внешней поверхности к окружающим неподвижным тканям [1]. Получено обобщение модели Уомерсли на случай сужающихся трубок [2], разных граничных условиях на внешней поверхности [3], учете сжимаемости и нелинейных

свойств материала стенки [4-5], многослойного строения и трансверсальной изотропии материала слоев [6-7]. Рассмотрение задачи в упрощенной квазиодномерной постановке (плоские волны) в предположении, что кровь является невязкой жидкостью, позволяет проводить вычисления для сложных систем трубок, которые моделируют артериальные русла [8]. Существенный интерес для диагностики представляют кривые колебаний внутрисосудистого давления  $P(t)$ , которые могут быть измерены только путем введения в артерию катетера. В последнее время используется методика пересчета значений  $P(t)$  на основе измеренных неинвазивно кривых  $D(t)$ , однако погрешность метода возрастает при наличии сосудистых патологий [9]. Таким образом, актуальной является задача расчета зависимостей  $D(t)$ ,  $U(t)$  и  $P(t)$  по модели, которая учитывала бы детальное строение стенки артерии и ее возможные патологические изменения. В данной работе используется модель многослойной толстостенной трубки, исследованная ранее в [10], и проводится биомеханический анализ показателей пульсовых кривых.

Регистрация кривых  $D(t)$  проводилась с помощью ультразвукового аппарата Siemens, а синхронная запись кривых  $P(t)$  и  $U(t)$  — аппаратом Aloka. Исследовались пациенты с различными патологиями сонных артерий и кровоснабжения головного мозга, а также здоровые испытуемые. Типичная картина нескольких последовательных колебаний стенки сонной артерии в норме приведена на Рис. 1а, а зависимости  $P(U)$  — на Рис. 1б. При патологиях зависимости  $D(t)$  характеризуются большей вариабильностью формы и ритма, нерегулярностью расположения отдельных максимумов и минимумов. В норме структура последовательных циклов регулярна с некоторыми отличиями на уровне малых колебаний с частотами  $f \leq 0.2$  при частоте колебаний  $f_0 = 1$  Гц, что соответствует нормальному пульсу 60 уд./мин. Вид кривых  $P(U)$  характеризуется начальным практически линейным участком, который соответствует режиму работы стенки сосуда в линейном диапазоне (при малых значениях внутрисосудистого давления); вытянутой формой, аппроксимирующей эллипсом с осями  $a$  и  $b$ ; неоднозначной зависимостью  $P(U)$  в конце диастолы, что приводит к появлению нерегулярного "хвоста" при наименьших значениях  $U$  (Fig. 1b). Типичными параметрами, которые можно легко оценить на зависимости  $P(U)$ , являются длины  $a$  и  $b$  осей петли, площадь  $S$ , ограниченная петлей, и угол наклона линейной части  $\theta = \arctg((dP/dU)|_{P=P_{min}})$ . Кроме этого, если в клинике возможна регистрация только одной кривой  $D(t)$ , то ее диагностический анализ может быть проведен по зависимости  $dD/dt(D)$ . Аналогичный подход, связанный с анализом зависимостей  $dP/dt(P)$ , построенных по результатам внутрисосудистой регистрации кривых давления  $P(t)$ , был предложен в работе [11]. Было показано, что на характерный вид петель  $dP/dt(P)$  влияет инъекция некоторых сосудистых препаратов [12]. Биомеханическая интерпретация зависимостей  $dD/dt(D)$  и  $dP/dt(P)$  в настоящее время отсутствует.

Для интерпретации показателей кривых  $P(U)$ ,  $dD/dt(D)$  и  $dP/dt(P)$  рассмотрим осесимметричную задачу о распространении волн в заполненной жидкостью толстостенной многослойной трубке с постоянным круговым сечением. Толщины слоев  $h_1, h_2, h_3$  и внутренний радиус  $R_0$  в невозмущенном состоянии и длина трубки  $L$  заданы. Будем считать, что материал слоев трансверсально изотропный, так что упругие свойства каждого слоя описываются модулями Юнга  $E_{1,2}^j$ , коэффи-

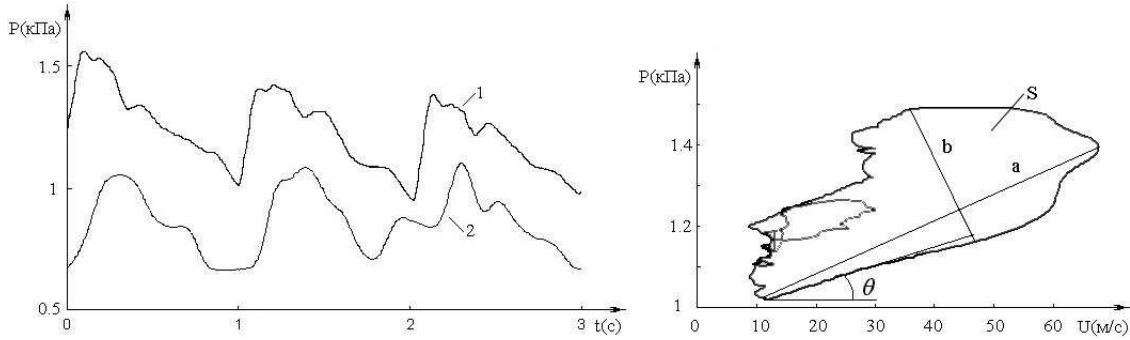


Рис. 1. Осцилляции диаметра сонной артерии в норме (кривая 1) и при стенозе (кривая 2) (а) и зависимость  $P(U)$  в норме (б).

циентами Пуассона  $\nu_{1,2}^j$ , модулями сдвига  $G_{1,2}^j$ , а также вязкостями материала  $\mu^j$ , где  $j = 1 - 3$  – номер слоя. Значения указанных параметров для разных типов артерий приведены в обзоре к статье [6].

Будем использовать модель, приведенную в работе [10]:

$$\begin{aligned} \rho_f \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) &= -\nabla p + \mu_f \Delta \vec{v} \\ \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, \quad \operatorname{div}(\vec{u}^j) = 0, \\ \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^j \frac{\delta^k}{\delta t^k} \right) \left( \rho_s^j \frac{\partial^2 \vec{u}^j}{\partial t^2} + \nabla p_s^j \right) &= 2G^j \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^j \frac{\delta^k}{\delta t^k} \right) \Delta \vec{u}^j \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{u}^j$  – перемещение слоев стенки,  $\vec{v}$  – скорость жидкости,  $p, p_s^j$  – гидростатическое давление в жидкости и в стенке,  $\lambda_{1k}^j, \lambda_{2k}^j$  – реологические коэффициенты,  $\rho_f$  и  $\rho_s^j$  – плотности жидкости и материала слоев.

Граничные условия для задачи (1) есть условие симметрии профиля скорости жидкости на оси трубки, условия непрерывности поля скоростей и напряжений на поверхности раздела жидкость-стенка и поверхностях раздела слоев (соотношения (9)–(11) в работе [10]), а на внешней поверхности трубки зададим условие отсутствия напряжений (для поверхностных артерий):

$$\begin{aligned} \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^2 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( p_s^3 - 2G^3 \frac{\partial u_r^3}{\partial r} \right) &= 0 \\ \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^2 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left( \frac{\partial u_r^3}{\partial x} + \frac{\partial u_x^3}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

или условия закрепления стенки к неподвижным окружающим тканям (глубокие артерии):

$$r = R_0 + u : \quad u_r^3 = 0, u_x^3 = 0 \quad (3)$$

где  $u = (u_r^1 + u_r^2 + u_r^3) |_{r=R_0}$ . В начальном сечении трубки  $x = 0$  задана входящая волна  $p = p_0(t, r, x)$ , а на конце трубки  $x = L$  задан коэффициент отражения волны  $G = G_1 + iG_2$ , который равен отношению амплитуд отраженной и падающей волн.

Решение задачи будем искать в виде разложений  $f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$ , где  $f = \{v_r, v_x, p, u_r^{1-3}, u_x^{1-3}, p_s^{1-3}\}$  – неизвестные задачи. Тогда из (1)–(2) и (1)–(3) получим соответствующие задачи, решение которых представляется в аналитической форме. Выражения для  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$  и  $f^{(2)}$  получены для обеих задач в аналитической форме и не приведены здесь в силу громоздкости. На основе полученных соотношений рассчитывались напряжение сдвига на стенке  $\tau(t, x)$ , амплитуда  $Q^*$  и фаза  $\psi$  объемного расхода жидкости  $Q(t) = Q^* e^{i\psi t}$  в заданном сечении трубки, осцилляции диаметра трубки  $D(t) = 2(R_0 + u(t))$ , а также построены зависимости  $P(Q)$ ,  $dD/dt(D)$  и  $dP/dt(P)$ .

Проведен анализ полученных зависимостей при вариации упругих и вязких коэффициентов материала слоев трубки, толщин слоев, вязкости крови и коэффициента отражения. В качестве иллюстрации зависимости  $dD/dt(D)$ , рассчитанные для сонных артерий, приведены на Рис. 2. Для нормальной артерии было принято  $R_0 = 2.5$  мм,  $E_1 = E_2 = 5 \cdot 10^6$  Па,  $\rho_s = \rho_f = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_f = 10^{-3}$  Па·с,  $G = 0$ . Патология артерии моделировалась увеличением жесткости стенки до  $E_1 = E_2 = 10^7 - 10^8$  Па и коэффициента отражения до  $G = 0.5 - 1$  при неизменных остальных параметрах.

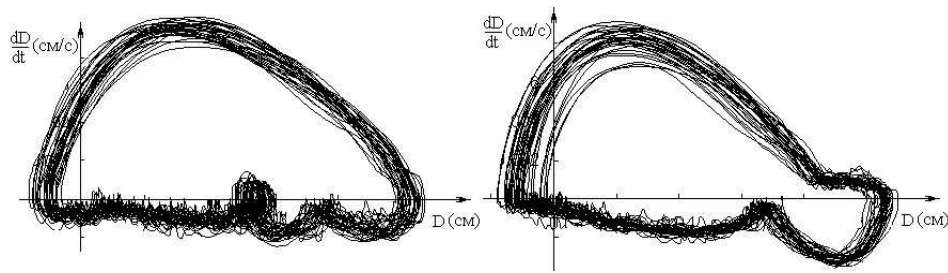


Рис. 2. Зависимость  $dD/dt(D)$ , рассчитанная для нормальной (а) и патологически измененной (б) артерии.

Различные зависимости на Рис. 2а,б получены путем вариации вязкости и плотности жидкости и стенки. Таким образом, изменение этих параметров вызывает незначительные изменения расположения, формы и площади петли  $dD/dt(D)$ , в то время как вариации жесткости стенки и коэффициента отражения вызывают характерные изменения вида кривой, что может быть использовано для диагностики сосудистых патологий. Путем компьютерного моделирования получены типы кривых  $dD/dt(D)$  и  $dP/dt(P)$ , характерные для различных патологий. Выявлено также соответствие ряда патологий определенному набору параметров  $\{a, b, S, \theta\}$  кривых  $P(U)$ , что может быть использовано для медицинской диагностики.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Womersley J.R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. Tech.Report TR-56-614, 1957.

- [2] *Shoenberg M.* Pulse wave propagation in elastic tubes having longitudinal changes in area and stiffness. // *Biophys.J.* 1968. v.8, № 6. P. 991–1008.
- [3] *Cox R.H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis. // *J.Biomech.* 1969. v.2, № 3. P. 251–265.
- [4] *McDonald D.A.* Blood flow in arteries. Baltimore:Williams and Wilkins. 1974. 480 p.
- [5] *Demiray H.* Nonlinear waves in a prestressed elastic tube filled with a layered fluid. // *Intern. J. Eng. Sci.* 2002. v.40, № 5. P. 713–726
- [6] *Hamadiche M., Kizilova N.N.* Temporal and Spatial Instabilities of the Flow in the Blood Vessels as Multi-Layered Compliant Tubes. // *Int.J.Fluid.Dyn.* 2005. v.1, № 1. P. 1–23.
- [7] *Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W.* A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. // *J.Elasticity.* 2000. v. 61. P. 1–48.
- [8] *Sherwin S.J., Franke F., Piero J., Parker K.H.* One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. // *J.Eng.Math.* 2003. v. 47, № 2. P. 217–250.
- [9] *Belani K., Ozaki M., Hynson J., et al* A new noninvasive method to measure blood pressure. // *Anesthesiology.* 1999. v. 91, No 3. P. 686-692.
- [10] *Кизилова Н.Н.* Распространение волн давления в заполненных жидкостью двухслойных вязкоупругих трубках. // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича.* т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР». 2005. С. 103-107.
- [11] *Sugawara M., Uchida K., Kondoh Y.* Aortic blood momentum : the more the better for the ejecting heart in vivo? // *Cardiovasc. Res.* 1997. v.33, No 2. P. 433-446.
- [12] *Michoux N., Joannides R., Gouesbet G., et al* Physical determinism in human arterial dynamics. // *Eur. Phys. J.* 1999. v.8, No 2. P. 265-268.

**Kizilova N.N.** *Wave propagation in the multilayered tubes form an anisotropic viscoelastic material filled with a viscous incompressible liquid is considered.* The model is applied to the pulse wave propagation in the arteries and the fluid and wall material properties correspond to the blood and the layers of the arterial wall. The no-stress (superficial arteries) and no-displacement (deep arteries) boundary conditions are assigned at the outer surface of the tube. Solution of the problem is obtained as power series in the small parameter which is the ratio of the radial displacement of the wall and the inner radius of the tube. The expressions for the zero, first and second order terms are obtained for the pressures in the fluid and wall, fluid velocity and wall displacement. The volumetric rate of the fluid  $Q(t)$ , shear stress at the inner surface of the wall  $\tau(t)$  and diameter oscillations  $D(t)$  are calculated in an arbitrary cross-section of the tube. Numerical calculations are compared to the ultrasound measurements of the diameter oscillations of the carotid artery of the healthy people and the patients with stenosis and atherosclerosis. The pressure-flow relationships as well as the curves  $dD/dt(D)$  are investigated. It is shown that the areas enclosed by the curves  $P(Q)$  and  $dD/dt(D)$  and the slope of the big axes of the loops give important diagnostic information on pathological variation of the thickness, elasticity modules and viscosity of the wall material.



# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

**Кизилова Н. Н.**

*Харьковский национальный университет, Украина*

Проведен сравнительный анализ применимости моделей растущих биологических сплошных сред как вязкоупругих Максвелловских жидкостей с распределенными источниками массы. Результаты теоретических расчетов сравниваются с данными экспериментов о влиянии продольных механических нагрузок на рост квазиодномерных (корень и стебель растений) и двумерных (лист растений) объектов. Показано, что растягивающие нагрузки вызывают заметное ускорение роста в направлении приложенной внешней силы, однако результат сильно зависит от условий приложения нагрузки и концентрации растворенных компонент в питающем растворе. На основании решения обратной задачи механики проведена идентификация реологических параметров модели растущего растительного биокомпозита. Компьютерный анализ модели позволяет определить условия для выращивания волокнистых армированных биологических материалов с заданными прочностными характеристиками для последующего применения в технике, медицине и биотехнологии.

Механические нагрузки влияют на рост и развитие биологических объектов. Моделирование ростовых деформаций при заданных внешних условиях роста составляет предмет исследования биомеханики роста и развития. В последнее время это направление становится особенно актуальным в связи с новыми биотехнологиями выращивания материалов с определенными свойствами для имплантации (tissue engineering), генетической модификацией растений, получением гибридов с заданными механическими свойствами (прочностью древесины, например). Скорость роста растений, неравномерность роста разных участков, образование реактивной древесины, прочность ствола (стебля) зависят от внешней постоянной или динамической нагрузки и наличия силы тяжести [1]. Ветровая нагрузка влияет на регулярность образования ветвлений в растущих лишайниках [2] и на спиральное закручивание продольных волокон в стволе и ветвях деревьев [3]. Периодические деформации побегов и листьев растений в эксперименте приводили к существенному снижению размера и массы растения по сравнению с контролем [4]. Механизм механочувствительности растений и адаптации к нагрузке связан с процессами на клеточном уровне [5] и с соответствующими электрокинетическими явлениями [6].

В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований влияния механических нагрузок на рост органов растений. Растения *Tropaeolum majus*, листья которых имеют форму, близкую к округлой, а черешок листа прикреплен в центре листовой пластинки (Рис. 1а), выращивались в фитотроне в стандартных условиях. Часть листьев на каждом из растений подвергалась механическому ограничению роста по периметру. После выхода листа из почки и полного развертывания его поверхности по периметру листовой пластинки наносился тонкий слой жидкого полимера, который после нескольких минут высыхания



образовывал нерастяжимую тонкую нить, прочно связанную с краем листа. Таким образом, плоский рост листовой пластинки был ограничен, и через некоторое время наблюдалось выпячивание растущего листа, который принимал трехмерную куполообразную форму (Рис. 1б). Цифровые изображения листьев получали ежедневно в одно и то же время суток. На изображениях измерялись начальный диаметр листа  $D_0$  в момент ограничения роста, прогиб пластинки в центре  $H(t)$  и краевой угол  $\theta(t)$  (Рис. 2а), а также строились последовательные серии изображений (Рис. 1а, 2а). На контрольных листьях измеряли диаметр пластинки  $D(t)$ . По результатам измерений рассчитывались абсолютная  $dD/dt$  и относительная  $g = 1/D * dD/dt$  скорости роста контрольных листьев. Аналогичные параметры для листьев с ограничением роста измерялись по суммарной длине кривой  $P$  на двумерных изображениях:  $dP/dt$ ,  $g = 1/P * dP/dt$ . В качестве иллюстрации зависимости  $g(D_0)$  приведены на Рис. 2б для контрольных листьев (отмечены треугольниками) и для листьев, рост которых ограничен по периметру (отмечены квадратами). Линейные аппроксимации зависимостей, полученные методом наименьших квадратов, показаны на Рис. 2б линиями 1 и 2 соответственно.

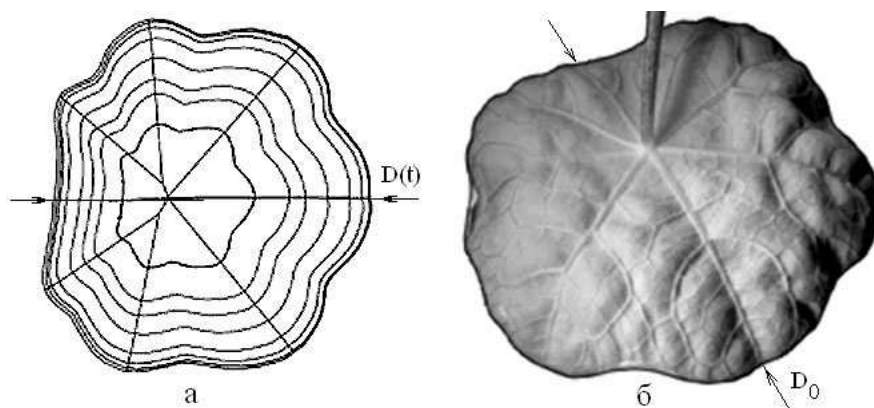


Рис. 1. Ростовые деформации листа без ограничения роста (прямые линии соответствуют главным жилкам) (а) и деформированная листовая пластинка, рост которой ограничен по периметру(б).

Результаты эксперимента показали, что механические напряжения, возникающие в листе при ограничении роста, приводят к заметному увеличению скорости роста. Многочисленные эксперименты, выполненные на различных растущих тканях и органах животных и растений, показали, что сжимающие нагрузки угнетают, а растягивающие – стимулируют рост [7]. В исследованном нами случае стимуляция роста может быть связана с появлением растягивающих напряжений на наружной стороне листовой пластинки. Расчеты, выполненные методом конечных элементов [8,9] и путем решения осредненной по толщине пластинки задачи об изгибе круглой пластины из растущего материала [10] показали, что возникающие при этом растягивающие напряжения превышают пороговые значения, которые вызывают реакцию растения на клеточном уровне.

Аналогичные результаты получены нами также в экспериментах по влиянию постоянной растягивающей нагрузки на рост корней и стеблей проростков. Полученные в ходе измерений изменения длины  $L(t)$  и среднего диаметра  $d(t)$  корня

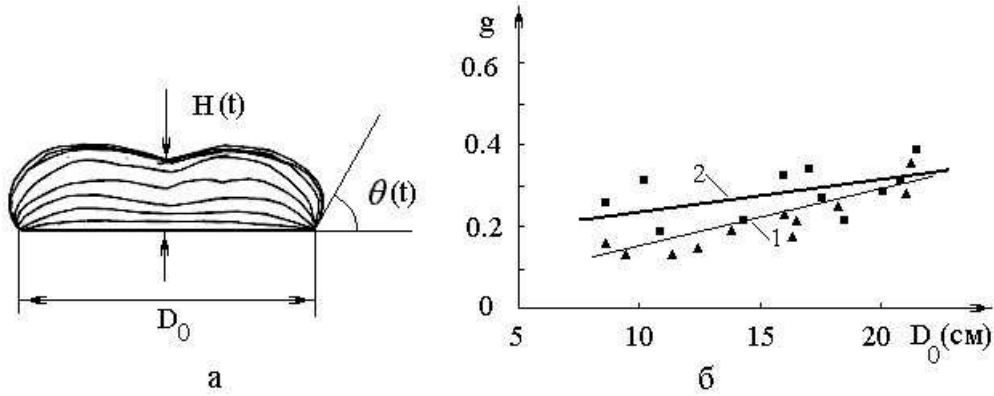


Рис. 2. Деформации пластины при ограничении роста и измеряемые параметры (а). Зависимости  $g(D_0)$  для контроля и в эксперименте по ограничению роста (пояснения в тексте)(б).

в зависимости от величины нагрузки, а также зависимости  $H(t)$ ,  $P(t)$  и  $\theta(t)$  для листьев с ограничением роста, позволяют провести оценку реологических коэффициентов модели растущего биологического материала.

Континуальные модели растущих биологических тканей основываются на квазиоднофазных моделях сплошных сред с источниками массы или на моделях многофазных сред, включающих твердую фазу, увеличение массы (объема) которой обеспечивается массопереносом из жидкой фазы (доставляющая жидкость) [7]. Система уравнений квазиодномерной модели растущей сплошной среды и граничные условия в смешанной форме имеют вид [7,11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= \theta, & \text{div}(\hat{\sigma}) &= \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\sigma}, & & (1) \\ \vec{\sigma}_n|_{\Gamma_1} &= \vec{\sigma}_0, & \vec{v}|_{\Gamma_2} &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

где  $\theta$  – интенсивность источников массы,  $\rho$  – плотность материала,  $\vec{v}$  – скорость роста,  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\hat{\mathbf{e}}$  – тензор скоростей деформаций,  $\hat{\mathbf{A}}$  – собственная скорость роста (при  $\sigma \equiv 0$ ),  $\hat{\mathbf{B}}$  – тензор обратных ростовых вязкостей,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  – граница области.

При отсутствии внешней нагрузки ( $\vec{\sigma}_0 = 0$ ) или при отсутствии ограничения роста задача (1) имеет тривиальное решение

$$\sigma \equiv 0, \quad v_x = \int_0^x A_{xx} dx, \quad v_y = \int_0^y A_{yy} dy$$

При этом измеренные нами зависимости  $D(t)$  позволяют оценить значения  $A_{xx}$ , а аналогичные зависимости, полученные для разных фиксированных точек листа (места пересечения жилок), позволяют вычислить также и значения  $A_{yy}$ . Анализ результатов, полученных по измерениям 80 листьев *Тгораеolum major*, дал следующие оценки:

$$A_{xx} = A_{yy} = 0.09 - 0.16, \quad A_{xy} = 0$$

Полученный результат согласуется с условием, которое накладывается на величины  $A_{xx}$ ,  $A_{yy}$ ,  $A_{xy}$  условием совместности деформаций [11]:

$$\frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Таким образом, несмотря на то, что листовая пластинка армирована системой жилок, рост которых анизотропен и определяется удлинением клеток в соответствующем направлении, рост пластинки является изотропным и однородным.

Идентификация компонент тензора ростовых вязкостей  $\hat{\mathbf{V}}$  может быть проведена по модели (1) только в том случае, если  $\sigma \neq 0$ , что имеет место при ограничении роста или наличии внешней нагрузки. Используя решение задачи об изгибе круглой пластины [10] и результаты регистрации кривых  $H(t)$ ,  $\theta(t)$ , можно провести идентификацию компонент  $B_{ik}$  в предположении, что  $B_{11} = B_{22} = b$  и  $B_{12} = B_{21} = -\nu b$ , где коэффициент  $\nu$  показывает, в какой мере сжимающие нагрузки, приложенные вдоль заданного направления, стимулируют рост в перпендикулярном направлении (компенсаторный рост). При этом два семейства экспериментальных кривых  $H(t)$  и  $\theta(t)$  позволяют однозначно определить параметры  $b$  и  $\nu$ .

В литературе представлены также модели растущих биоматериалов, построенные в рамках моделей термоупругости [12–13], адаптивных упругих материалов и ряд других [14–15], однако решение обратных задач с целью идентификации реологических параметров моделей растущих континуумов дает лучшее соответствие с результатами экспериментов для рассмотренной выше модифицированной модели Максвелла. На основании полученных результатов можно поставить и решить задачи о влиянии растягивающих, изгибных и сдвиговых нагрузок, а также кручения на рост. После этого могут быть идентифицированы компоненты  $B_{ik}$  без сделанных выше допущений о структуре матрицы. При этом можно решать задачу об определении вида нагрузки, необходимой для получения материалов с заданными механическими характеристиками.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Раздорский В.Ф. Архитектоника растений. М.:Советская наука, 1955. 432 с.
- [2] Prinzig A.J. Wind-acclimated thallus morphogenesis in a lichen probably favored by grazing disturbances. // Amer. J. Botany. 1999. v.86, No 2. p. 173–183.
- [3] Leelavanichkul S., Cherkaev A. Why the grain in tree trunks spirals: a mechanical perspective. // Struct. Multidisc. Optimiz. 2004. v.28, No 2-3. p. 127–135.
- [4] Turgeon R., Webb J.A. Growth inhibition by mechanical stress. // Science. 1971. v.174. p. 961–962.

- [5] *Zandomeni K., Scgopfer P.* Mechanosensory microtubule reorientation in the epidermis of maize coleoptiles subjected to bending stress. // *Protoplasma*. 1994. v.182, No 2. p. 96–101.
- [6] *Nogata F.* Biological strain/stress sensing power in plants and modelling mechanisms. // *Strain*. 2000. v.36, No 2. p. 3–8.
- [7] *Механика роста и морфогенеза.* Современные проблемы биомеханики. Вып.10. М.:Изд-во МГУ. 2000. 412 с.
- [8] *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Исследование плоского напряженно-деформированного состояния растущих биологических материалов при ограничении роста. // *Вестник ХНУ. Сер."Математика, прикладная математика и механика"*. 2003. т. 582, № 52. С. 107–120.
- [9] *Kizilova N.N.* Analysis of stress distribution and leaf blade bending during bounded growth. // *Summer Bioengineering Conference. FL. Book of Abstracts*. 2003.
- [10] *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Деформации круглой пластины из растущего биоматериала при ограничении роста // *Теоретич. и приклад. механика*. 2003. No 37. С. 130–135.
- [11] *Кизилова Н.Н.* О постановках задач механики растущих вязкоупругих сплошных сред. // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича.* т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР». 2005. С. 146-150.
- [12] *Epstein, M., and Maugin, G.A.* Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. // *Intern. J. Plasticity*. 2000. v. 16. P. 951–978.
- [13] *Volokh K.Y.* A simple phenomenological theory of tissue growth. // *Mech. Chem. Biosyst.* 2004. v.1, No 2. p. 147–160.
- [14] *Klisch S.M.* A theory of volumetric growth for compressible elastic biological materials. // *Math. Mech. Solids*. 2001. v. 6. P. 551–576.
- [15] *Volokh K.Y.* Stresses in growing soft tissues. // *Acta Biomater.* 2006. v.2, No 5. p. 493-504.

**Kizilova N.N.** *A comparative study of the models of growing biological continuous media as viscoelastic Maxwell body with distributed mass sources is carried out.* Results of the theoretical calculations are compared to the experiments on the influence of longitudinal mechanical loading on growth of 1D organs (plant root and stem) and 2D bodies (plant leaf). It is shown that stretching produces noticeable growth acceleration in the corresponding direction and the result depends on conditions of the load application and concentration of the nutrients. Basing on the solution of the inverse problem the rheological parameters of the model of the growing biocomposite are identified. Computer analysis of the model reveals the necessary external conditions for growing the fibre-reinforced biological materials with certain elasticity and strength for applications in technique, medicine and biotechnology.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ПОЛОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГИУ

**Колосова Е. М.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского госуниверситета*

На основе подхода ГИУ исследованы установившиеся колебания неограниченной упругой ортотропной среды с полостью, свободной от нагрузок, под действием плоской волны. Для анализа системы использован МГЭ. Осуществлена дискретизация системы в предположении, что перемещения постоянны на элементе. Коэффициенты алгебраической системы представлены в виде однократных интегралов по конечному отрезку. Представлены результаты анализа полей на границе полости.

Анализ систем граничных интегральных уравнений, возникающих при анализе волновых полей в неограниченных средах, опирается в основном на два подхода — метод последовательных приближений и метод граничных элементов (МГЭ). Остановимся на втором подходе, основные идеи которого достаточно подробно освещены в [1].

Отметим важное отличие классического варианта МГЭ от предлагаемого в задачах о колебаниях анизотропных тел. Если в классическом варианте коэффициенты алгебраических систем выражаются в виде интегралов по элементам от фундаментальных решений, то в анизотропном случае эти представления получаются в виде двукратных интегралов [2,3], что в значительной степени увеличивает затраты машинного времени на реализацию метода и снижает его эффективность. Однако оказывается возможным проинтегрировать в явном виде по прямолинейному элементу и представить коэффициенты алгебраических систем в виде однократных интегралов по конечному отрезку.

Эту идеологию будем использовать при решении задачи об установившихся колебаниях упругой ортотропной плоскости, ослабленной полостью произвольной формы с кусочно-гладкой границей  $l_0$ . Компоненты вектора перемещений  $u_j$  будем искать в виде суммы  $u_j = u_j + u_j$ , где падающая волна известна и имеет вид плоской волны:

$$u_j = M_j \exp[i(k_1 x_1 + k_3 x_3 - \omega t)].$$

Опишем способ сведения системы интегральных уравнений относительно перемещений  $u_j$  на границе полости, полученных в [2, 4]

$$\frac{1}{2} u_m(y_1, y_3) + \int_{l_0} \sigma_{ik}^{(m)}(x, y) n_k u_i(x) dl_x = F_m(y), \quad y \in l_0 \quad (1)$$

где

$$F_m(y) = \frac{1}{2} u_m(y) - \int_{l_0} \sigma_{ik}^{(m)}(x, y) n_k u_i(x) dl_x$$

к системе линейных алгебраических уравнений и приведем вид коэффициентов системы. В (1) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши,  $\sigma_{ik}^{(m)}(x, y)$ -сингулярные решения.

На первом этапе граница полости  $l_0$  аппроксимируется  $N$ - угольником, стороны которого называются элементами. Рассмотрим  $q$ -ый элемент  $l_q$ : пусть  $(x_{1q}^-, x_{3q}^-)$  и  $(x_{1q}^+, x_{3q}^+)$  соответственно его координаты начала и конца в соответствии с выбранной ориентацией. Введем параметризацию  $x_1 = y_{1q} + \beta_{1q}t$ ,  $x_3 = y_{3q} + \beta_{3q}t$ ,  $t \in [-1, 1]$ , где  $y_{1q}$ ,  $y_{3q}$  — середина отрезка  $l_q$

$$y_{jq} = \frac{1}{2}(x_{jq}^- + x_{jq}^+), \beta_{jq} = \frac{1}{2}(x_{jq}^- - x_{jq}^+)$$

что соответствует линейному элементу.

Предполагаем, что неизвестные функции  $u_i$  постоянны на элементе. Неизвестные узловые значения  $u_{iq}$  определяются методом коллокаций на основе системы уравнений (1) путём удовлетворения в серединах отрезков  $(y_{1p}, y_{3p})$ .

Таким образом, учитывая, что (1) при разбиении  $l_0$  на  $N$  элементов примет вид, получим

$$\frac{1}{2}u_m(y_1, y_3) + \sum_{q=1}^N \int_{l_q} \sigma_{ik}^{(m)}(x, y) n_k u_i(x) dl_x = F_m(y). \quad (2)$$

Используя тот факт, что на  $q$ -том линейном элементе  $n_j(x)$  постоянно, находим  $n_{1q} = \beta_{3q}/\Delta_q$ ,  $n_{3q} = -\beta_{1q}/\Delta_q$ ,  $\Delta_q = (\beta_{1q}^2 + \beta_{3q}^2)^{1/2}$ . Итак, получим систему линейных уравнений

$$\frac{1}{2}u_m(y_p) + \sum_{q=1}^N B_{mipq} u_{iq} = F_m(y_p), \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$F_m(y_p) = \frac{1}{2}u_m(y_p) - \sum_{q=1}^N B_{mipq} u_i(y_q)$$

$$B_{mipq} = \int_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y_p) n_j dl_x$$

или, переходя к отрезку  $[-1, 1]$ ,  $dl_x = \Delta_q dt$ , преобразуем коэффициенты матрицы системы к виду:

$$B_{mipq} = \Delta_q \int_{-1}^1 \sigma_{ij}^{(m)}(y_q + \beta_{qt}t, y_p) n_{jq} dt. \quad (4)$$

Учитывая интегральное представление фундаментальных решений, полученное в [3], представим коэффициенты (4) в форме

$$B_{mipq} = \frac{ik}{4\pi^2} \int_{-1}^1 \iint_{\Gamma_2} \frac{q_{im}^*(\beta_1, \beta_3)}{p_0^*(\beta_1, \beta_3)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp(ik[\beta_1(y_{1p} - y_{1q} - \beta_{1q}t) + \beta_3(y_{3p} - y_{3q} - \beta_{3q}t)])\tilde{n}_{jq}d\beta_1d\beta_3dt \\ & \tilde{n}_{1q} = \beta_{3q}, \tilde{n}_{3q} = -\beta_{1q}, \cos \eta_q = \beta_{1q}/\Delta_q, \sin \eta_q = \beta_{3q}/\Delta_q \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, вычисляя интеграл по элементу в явном виде, переходя к полярной системе координат в (5)  $\beta_1 = \beta \cos \varphi$ ,  $\beta_3 = \beta \sin \varphi$ , и используя представление

$$\frac{q_{ijm}^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi)}{p_0^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi)} = \beta A_0^{-1}(\varphi) \sum_{k=1}^2 \frac{b_{kijm}(\varphi)}{\beta^2 - \zeta_k^2(\varphi)}, \quad (6)$$

преобразуем коэффициенты к виду

$$\begin{aligned} B_{mirq} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\sigma_+} \frac{1}{A_0(\varphi)} \sum_{k=1}^2 \frac{b_{kijm}(\varphi)}{\beta^2 - \zeta_k^2(\varphi)} \frac{n_{jq}}{\cos(\varphi - \eta_q)} \times \\ & \times [\exp(ik\beta z_{pq}^+(\varphi)) - \exp(ik\beta z_{pq}^-(\varphi))] \beta d\beta d\varphi \\ z_{pq}^\pm(\varphi) &= (y_{1p} - y_{1q} \mp \beta_{1q}) \cos \varphi + (y_{3p} - y_{3q} \mp \beta_{3q}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Разбивая интегралы от 0 до  $2\pi$  на 0 до  $\pi$  и от  $\pi$  до  $2\pi$  и делая во втором замену переменных, получим, учитывая  $b_{kijm}(\pi + \varphi) = -b_{kijm}(\varphi)$

$$\begin{aligned} B_{mirq} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{1}{A_0(\varphi)} \sum_{k=1}^2 \frac{b_{kijm}(\varphi) n_{jq}}{\cos(\varphi - \eta_q)} \times \\ & \times [F_2(k\hat{z}_{pqk}^+(\varphi)) - F_2(k\hat{z}_{pqk}^-(\varphi))] d\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где введены следующие функции

$$F_2(z) = \int_{\sigma_+} \frac{\beta \cos \beta z}{\beta^2 - 1} d\beta, \quad (9)$$

$$\hat{z}_{pqk}^\pm(\varphi) = z_{pq}^\pm(\varphi) \zeta_k(\varphi).$$

Используя контурное интегрирование, аналогично [3,5], нетрудно показать, что

$$F_2(z) = \frac{\pi i}{2} \exp(i|z|) - (\text{ci}|z| \cos |z| + \text{si}|z| \sin |z|). \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты системы (3) представлены в виде однократных интегралов по отрезку  $[0, \pi]$ . Проанализируем подынтегральные выражения, используя асимптотики функции  $F_2(z)$  при малых  $z$

$$F_2(z) = -\ln |z| + O(1) \quad (11)$$

Отметим также, что точки, где  $\cos(\varphi - \eta_q) = 0$  не являются особыми для подынтегральных функций в (8), ибо при этих значениях  $\varphi$ ,  $z_{pq}^+(\varphi) = z_{pq}^-(\varphi)$  и обращаются в нуль выражения в квадратных скобках в (8). В силу асимптотики (11)

интегралы в (8) оказываются сходящимися, и при их вычислении использовались традиционные приемы, основанные на квадратурных формулах типа Гаусса [6].

Были проведены расчёты поля перемещений на круговых и эллиптических полостях под действием волны, падающей горизонтально, вертикально и под произвольным углом; варьировалось волновое число.

На рисунках 1-2 приведены результаты вычисления суммарного волнового поля для сегнетовой соли на границе круговой полости единичного радиуса. Графики построены в полярной системе координат, сплошной линией отмечены положительные значения, пунктирной — отрицательные. Плоская волна с компонентами  $u_1 = \exp[i(x_1 - \omega t)]$ ,  $u_3 = 0$  падает слева (волновое число  $k = 1$ ). Расчеты проведены для  $N = 32$ . Отмечается достаточная точность расчетов при уменьшении и увеличении  $N$ .

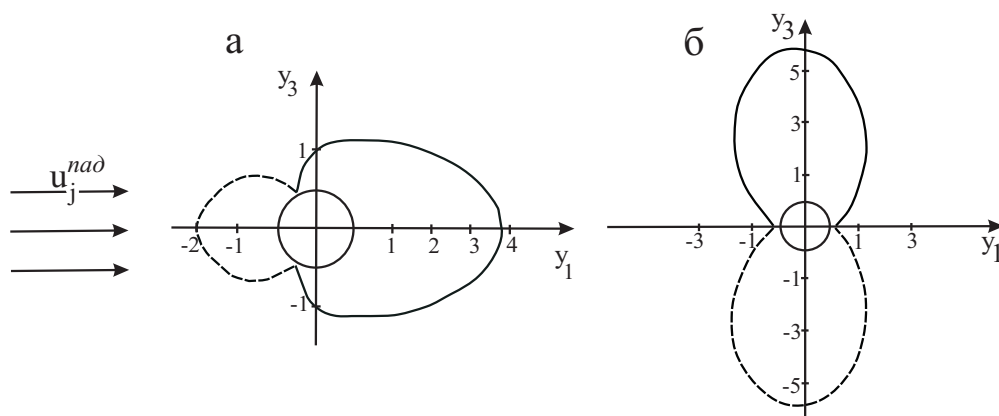


Рис. 1. Действительная часть суммарного поля а)  $\text{Re}(u_1 + u_3)$ , б)  $\text{Re}(u_3)$

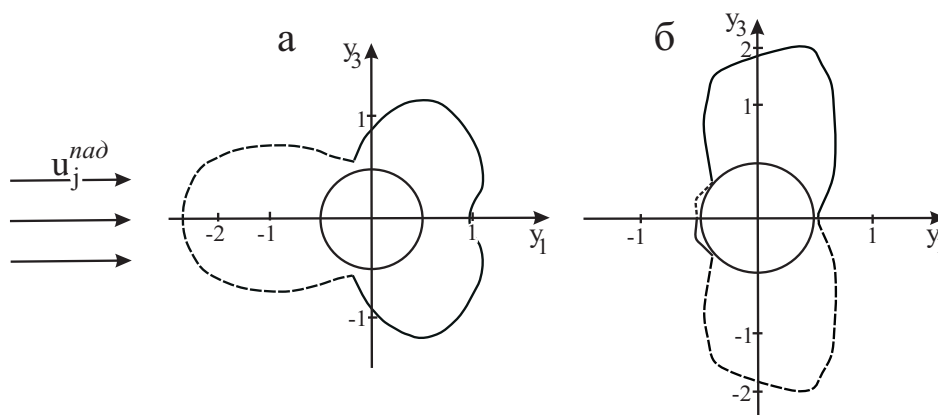


Рис. 2. Мнимая часть суммарного поля а)  $\text{Im}(u_1 + u_3)$ , б)  $\text{Im}(u_3)$

Рассчитанные на основании (3), (8)-(10) перемещения  $u_{iq}$  можно использовать для исследования концентрации напряжений на границе полости, для расчета диаграмм направленности и решения обратных задач реконструкции полости.

Автор благодарит профессора Ватульяна А.О. за постоянное внимание к работе.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [2] Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
- [3] Ватульян А. О., Чебакова Е. М. Фундаментальные решения для ортотропной упругой среды в случае установившихся колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 6. С. 131–139.
- [4] Чебакова Е.М. О реализации МГЭ в задаче о колебаниях ортотропной плоскости с полостью // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VIII Международной конференции, Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2002 г. Т. 2. Ростов-н/Д: "Новая книга", 2003. С. 204–208.
- [5] Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. № 5. С. 135–142.
- [6] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1. 632 с.

**Kolosova E.M.** *The investigation of the vibrations of orthotropic environment with a cavity on the basis of the method of the boundary integral equation (BIE).* The established vibrations of the unbounded elastic orthotropic environment with a cavity, deprived of the loads, under the action of the plane wave are investigated on the basis of the approach of the boundary integral equations. The boundary elements method (BEM) is exploited for the system analysis. The system discretization is realized on the assumption that the displacement is fixed on the element. The coefficients of the algebraic system are represented in the form of the single integrals on the finite interval. The results of the fields analysis on the bound of the cavity are represented.

# ОБ АНАЛИЗЕ ЖЕСТКОСТИ НА ИЗГИБ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

**Курбатова Н. В., Романова Н. М.**

*Ростовский государственный университет*

В статье описываются эффективные приемы получения системы линейных алгебраических уравнений в результате МКЭ–дискретизации задачи Сен-Венана и построения на их основе решения в случае чистого изгиба естественно-закрученного стержня (ЕЗС). Приводятся графики жесткостей на изгиб в зависимости от изменяющихся параметров (геометрии прямоугольного сечения и крутки); выявлены области экстремального поведения.

В [1] разработаны методы построения решений задачи Сен-Венана для ЕЗС, представляемых в виде суммы двенадцати элементарных решений, шесть из них определяют перемещения ЕЗС как твердого тела, построение остальных сводится к краевым задачам на поперечном сечении стержня. Они соответствуют задачам растяжения-сжатия, решение которой построено и исследовано в [2]– [3]; кручению – в [4]– [6]; чистому изгибу – в предлагаемой работе, а также изгибу перерезывающими силами.

Пусть с прямоугольным сечением ЕЗС связаны оси координат,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ориентированные вдоль его сторон и совпадающие с главными осями;  $\xi$  – ось, перпендикулярная сечению. Решение, соответствующее изгибу имеет вид [7]:

$$U = cu + c^*u^*,$$

здесь  $u(\xi_1, \xi_2, \xi) = e^{i\xi\tau}(\frac{\xi^2}{2}a_1 + \xi a_2 + a(\xi_1, \xi_2))$  – элементарное решение (ЭР);  $a_1 = \{1, i, 0\}$ ,  $a_2 = \{0, 0, -\xi_1 - i\xi_2\}$  – собственный и присоединенный векторы спектральной задачи, соответствующие собственному значению  $i\tau$ ;  $a_3 = a(\xi_1, \xi_2) = \{a_1(\xi_1, \xi_2), a_2(\xi_1, \xi_2), a_3(\xi_1, \xi_2)\}$  – присоединенный вектор, подлежащий определению на сечении;  $\mu$  – модуль сдвига;  $c$  – произвольная постоянная;  $M_{\xi_1}$ ,  $M_{\xi_2}$  – проекции главного момента, действующего в сечении; произвол устраняется из соотношения  $\mu dc = M_{\xi_2} + iM_{\xi_1}$  [1] при чистом изгибе в отсутствии перерезывающих сил.

В соответствии с результатами, описанными в [1],  $a_3$  может быть определен на основе вариационного уравнения:

$$\delta\Phi = \delta\left(\int_S \sigma(u) \cdot \varepsilon(u^*)dS\right) = 0,$$

при дополнительном условии [2]

$$(a, a_1) = 0, \text{ где } (a, a_1) = \int_S aa_1^*dS, \quad (1)$$

– скалярное произведение,  $*$  – знак комплексного сопряжения. Тензор напряжений  $\sigma$  в сопутствующей системе координат определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu[(1 + \varkappa)\partial_1 u_1 + \varkappa\partial_2 u_2 + \varkappa(\partial + \tau D)u_3], \\ \sigma_{12} &= \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \\ \sigma_{22} &= 2\mu[(1 + \varkappa)\partial_2 u_2 + \varkappa\partial_1 u_1 + \varkappa(\partial + \tau D)u_3], \\ \sigma_{13} &= \mu(\partial_1 u_3 - \tau u_2 + (\partial + \tau D)u_1), \\ \sigma_{23} &= \mu(\partial_2 u_3 + \tau u_1 + (\partial + \tau D)u_2), \\ \sigma_{33} &= 2\mu[\varkappa\partial_1 u_1 + \varkappa\partial_2 u_2 + (1 + \varkappa)(\partial + \tau D)u_3],\end{aligned}\quad (2)$$

здесь  $\varkappa = \frac{\nu}{1-2\nu}$ , а  $\varepsilon$  – тензор малых деформаций Коши определяется:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}[\partial_1 u_3 + (\partial + \tau D)u_1 - \tau u_2], \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}[\partial_2 u_3 + (\partial + \tau D)u_2 + \tau u_1], \quad \varepsilon_{33} = (\partial + \tau D)u_3,\end{aligned}\quad (3)$$

$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$ ,  $\partial = \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,  $D = \xi_2 \partial_1 - \xi_1 \partial_2$  – введенные в [1] дифференциальные операторы. Решение в случае изгиба, в отличие от растяжения и кручения, является комплекснозначным, поэтому при построении конечно-элементного решения с каждым узлом связывается шесть неизвестных обобщенных перемещений:  $a_k = \mathbf{a}_{k1} + i\mathbf{a}_{k2}$ ,  $k = 1 \dots 3$ ,  $a_{km} \in \mathbf{R}$ . В результате подстановки ЭР в (2) и (3) полученные компоненты напряжений и деформаций преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) &= \varepsilon_{ij0}(\mathbf{a}) + v_{ij} \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) &= \sigma_{ij0}(\mathbf{a}) + w_{ij},\end{aligned}\quad (4)$$

и с учетом (4) вариационное уравнение будет иметь вид:

$$\delta \left( \int_S [\sigma_0 \varepsilon_0^* + (\sigma_0 v^* + w \varepsilon_0^* + w v^*)] dS \right) = 0. \quad (5)$$

Стационарное значение функционала

$$\begin{aligned}\delta(\Phi + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) &= 0, \quad \text{здесь} \\ F_1 &\equiv \int_S (a_{11} + a_{22}) dS = 0, \quad F_2 \equiv \int_S (a_{12} - a_{21}) dS = 0,\end{aligned}$$

где с помощью множителей Лагранжа  $\lambda_1 + i\lambda_2$  обеспечивается удовлетворение условию (1), является искомым решением на сечении. Вариационное уравнение (5) – основа построения конечно-элементной (КЭ) аппроксимации. Область разбивается на соприкасающиеся прямоугольные элементы  $S^e$ , с каждым узлом разбиения связываются шесть обобщенных перемещений  $a_{km}$ ,

$$a_{km}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi_1, \xi_2) a_{km}^j, \quad k = 1, \dots, 3, \quad m = 1, 2, \quad (6)$$

и решение в произвольной точке  $(\xi_1, \xi_2)$  области  $S^e$  ищется как линейная комбинация обобщенных перемещений в узлах; здесь  $N_j(\xi_1, \xi_2) = C_j \frac{(\xi_1 - \xi_1^{0j})(\xi_2 - \xi_2^{0j})}{ab}$  – базисные функции,  $C = \{1, -1, 1, -1\}$ ,  $\xi_1^0 = \{a, 0, 0, a\}$ ,  $\xi_2^0 = \{b, b, 0, 0\}$ . Таким образом, задача сводится к СЛАУ относительно узловых перемещений, в которой первое слагаемое из (5) порождает саму систему, а последующие – ее правую часть. Введя обозначения  $d = \{d_i\}_{i=1}^n$  – вектора узловых неизвестных локального элемента  $d = \{a_{11}^1, a_{12}^1, a_{21}^1, a_{22}^1, a_{31}^1, a_{32}^1, \dots, a_{11}^4, a_{12}^4, a_{21}^4, a_{22}^4, a_{31}^4, a_{32}^4\}$ , получение системы из вариационного уравнения как тривиальной линейной комбинации относительно независимых вариаций (нулевой индекс соответствует постоянным слагаемым) представляется:

$$\sum_{j=1}^{24} \sum_{i=0}^{24} d_i A_{ij} \delta d_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{24} d_i A_{ij} = 0, \quad j = 1 \dots, 24, \quad (7)$$

Матрица локальной системы (7) имеет блочную структуру и состоит из  $(4 \times 4)$  блоков  $b^{IJ}$  шестого порядка, элементы которого связаны с матрицей системы соотношением  $b_{km}^{IJ} = A(6(I-1)+k, 6(J-1)+m)$ . При определении элементов текущего блока можно выделить фиксированный набор подынтегральных функций:

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} (I) \quad \partial_1 N_i \partial_1 N_j \\ (II) \quad \xi_2^2 \partial_1 N_i \partial_1 N_j \\ (III) \quad \xi_2 \partial_1 N_i \\ (IV) \quad \xi_2 \partial_1 N_i \partial_1 N_j \end{array} & \begin{array}{l} (\partial_2 N_i \partial_2 N_j) \\ (\xi_1^2 \partial_2 N_i \partial_2 N_j) \\ (\xi_1 \partial_2 N_i) \\ (\xi_1 \partial_2 N_i \partial_2 N_j) \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} (V) \quad \partial_1 N_i \\ (VI) \quad \xi_2^2 \partial_1 N_i \\ (VII) \quad \xi_2 \\ (VIII) \quad \xi_2^2 \end{array} & \begin{array}{l} (\partial_2 N_i) \\ (\xi_1^2 \partial_2 N_i) \\ (\xi_1) \\ (\xi_1^2) \end{array} \end{array} \quad (8)$$

Очевидно, что только функции (I,V) инвариантны при интегрировании относительно переноса координат; в этом заключается характерное отличие задач для ЭЗС, усложняющее процесс ансамблирования системы. Получение аналитических выражений элементов блочной матрицы осуществлялось средствами MatLab. При программировании процедура варьирования сводится к дифференцированию, для этого обобщенные перемещения выбираются зависимыми от искусственно введенной переменной  $y$ ,  $a_{km}^j$  в (6) преобразуется к  $a_{km}^j(y)$  и процесс преобразования функционала представим схемой:

$$\begin{aligned} \dots \quad \delta a_{m,ij}^k &\equiv (\partial_y(a_{m,ij}^k(y))) \equiv g_{m,ij}^k \dots \rightarrow N_k(\xi_1, \xi_2) a_{m,ij}^k(y) \rightarrow a_{m,ij}(\xi_1, \xi_2) \\ \dots \quad &\rightarrow a_{ij}^{\mathfrak{R}}(\xi_1, \xi_2) + i a_{ij}^{\mathfrak{S}}(\xi_1, \xi_2) \rightarrow a_{ij}(\xi_1, \xi_2), \end{aligned} \quad (9)$$

преобразования здесь следуют справа налево, с подстановками – по стрелке. Коэффициенты при вариациях являются строками текущего блока, из которого строится локальная матрица, а коэффициенты в строке при обобщенных перемещениях – ее столбцами. Пусть произведены преобразования (9) и необходимые упрощения, получены все элементы блоков; в результате, например, элемент  $p(1)$  правой части имеет вид  $4 * \text{кара} * \text{xi1} * \text{diff}(\text{Nm}(\text{xi1}, \text{xi2}), \text{xi1})$ , он является типичным для слагаемых, составляющих коэффициенты блоков. Очевидно, что без применения семантического анализа и преобразования к виду  $\alpha G_a R_b$ , приемлемому для программирования, эти коэффициенты не внедрить в код КЭ–программы; здесь  $\alpha$  – коэффициент;  $G_a$ ,  $R_b$  – результаты интегрирования функций типа (8);  $a$ ,  $b$  – параметры интегрирования. Суть семантического анализа заключается в определении

принадлежности множителей  $G_a, R_b$  одному из типов (8); такой анализ может быть представлен последовательностью операций:

- формирование кодов функциональных множителей  $G_a, R_b$ ; каждому элементу, составляющему сомножители, соответствует свой уникальный код – степень десятки;
- получение кода слагаемого суммированием кодов элементов сомножителей;
- удаление конструкций, идентифицированных кодом;
- окончание процесса – определение коэффициента  $\alpha$  по "истощению" редуцируемой строки.

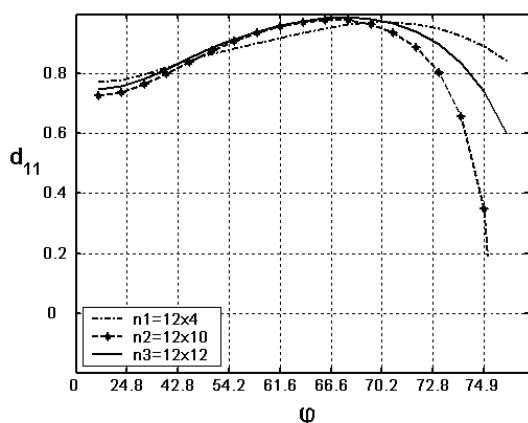
Рассмотрим  $\int_0^a \xi_1 \partial_2 N_m d\xi_1 \int_0^b \xi_2 \partial_1 N_m \partial_1 N_k d\xi_2$ ; приведем таблицу, в которой предложены все возможные конструкции и соответствующие реакции семантического анализа, так в приведенной таблице наличие множителя  $\xi_1^2$  соответствует

| для $G_a$ :      |                  |           |         |           | для $R_b$ :      |                  |           |         |           |
|------------------|------------------|-----------|---------|-----------|------------------|------------------|-----------|---------|-----------|
| $\partial_2 N_k$ | $\partial_2 N_m$ | $\xi_1^2$ | $\xi_1$ | $\xi_1^0$ | $\partial_1 N_k$ | $\partial_1 N_m$ | $\xi_2^2$ | $\xi_2$ | $\xi_2^0$ |
| 0                | 1                | 0         | 1       | 0         | 1                | 1                | 0         | 1       | 0         |

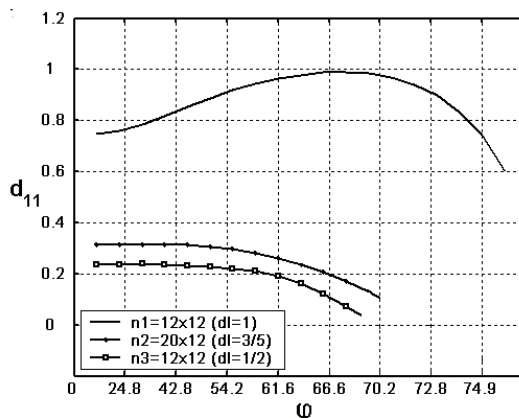
код – 100,  $\partial_2 N_k – 10000$  и так далее; в результате кодам 1010 и 11010 соответствует произведение функций типа (III) и (IV) –  $f3a, f4b$  и  $\alpha = 1$ .

Авторами был проведен анализ сходимости решения на сечении в характерных точках для серии разбиений, а также для зависимости  $d_{11}$  от  $\tau$  ( $\arctg(\tau) = \varphi$ ), которые представлены на рис.1 (а); на рис.1 (b) представлены графики зависимости  $d_{11}$  для различных  $dl$  – отношений сторон сечений.

|                 | $N = 10$      | $N = 12$     | $N = 14$     |                 | $N = 10$      | $N = 12$      | $N = 14$      |
|-----------------|---------------|--------------|--------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| $\tau_{max}$    | 2.3           | 2.26         | 2.2          | $\tau_{lim}$    | 3.7           | 3.9           | 5.3           |
| $\varphi_{max}$ | $65.55^\circ$ | $66.7^\circ$ | $66.5^\circ$ | $\varphi_{lim}$ | $74.84^\circ$ | $75.61^\circ$ | $79.31^\circ$ |



(a)



(b)

Рис. 1. Поведение жесткости на изгиб

Расчеты показали, что увеличение разбиения позволяет вычислять жесткость на изгиб для больших углов "намотки" и приближаться к предельному ( $\varphi = 90^\circ$ ) значению, а также, что при  $dl = 1$  ЕЗС обладает наибольшей жесткостью на изгиб и существует значение крутки, при котором достигается максимальная жесткость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00069).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука. 2003. 128 с.
- [2] Устинов Ю.А., Курбатова Н.В. Задачи Сен-Венана с физической и геометрической анизотропией. // Изв. ВУЗов.Северо-Кавказ. Регион. Мат. Моделирование. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 154-157.
- [3] Natalya V. Kurbatova. On a stretching-torsion of a naturally twisted rod.// XXXIII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics" June-July 5, St. Peterburg, Russia, 2005. P. 59-60
- [4] Курбатова Н.В., Романова Н.М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно-закрученного стержня.// Труды IX международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды 11-15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону. Изд. "ЦВВР" Т. 1. С. 123-126
- [5] Natalya M. Kuznetcova, Natalya V. Kurbatova. On the FEM approach for a bending of a naturally twisted rod.// XXXIII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics" June-July 5, St.Peterburg, Russia, 2005. P. 61
- [6] Курбатова Н.В., Романова Н.М. Численный анализ решений задачи Сен-Венана для естественно-закрученного стержня.// IX Всероссийский Съезд по Теоретической и Прикладной Механике, Нижний Новгород, Издательство Нижегородского госуниверситета, 2006., т. 3. С. 128-129
- [7] Друзь А.Н., Поляков Н.А., Устинов Ю.А. Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ, 1996. Т. 60. вып. 4. С. 660–668.

**Kurbatova N. V., Romanova N. M.** *On an analysis the bending rigidity for a naturally twisted rod.* The effective ways to apply a technique of the construction of linear equations system as a result of FEM- digitalization for the bending problem of the naturally twisted rod are presented in this paper. The bending rigidity is shown by graphs for various geometry of cross-section and parameters of twisting; the extreme-behavior areas are discovered.

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Курбатова П. С., Сапрунов Н. И., Соловьев А. Н.

*Ростовский государственный университет*

С помощью нейросетевой технологии производится реконструкция трещин и сквозных отверстий в упругих телах. Дополнительной информацией для решения обратных задач реконструкции дефектов является спектр собственных частот или поле смещений на свободной поверхности тела при его установившихся колебаниях.

**1. Введение.** Проблеме реконструкции дефектов в упругих телах посвящено большое количество работ в отечественной и зарубежной литературе. В последнее время в этих задачах эффективно применяются генетические алгоритмы и нейронные сети (НС). Так в работе [1] техника НС на основе адаптивного многослойного персептрона (МСП) применяется для определения трещин в многослойных анизотропных пластинах. В качестве определяемых параметров выступают размеры и положение трещин, входной информацией является отраженное поле смещений на поверхности, возникающее в результате гармонического воздействия. В работе [2] НС с двумя скрытыми слоями применяется для идентификации трещин и отверстий в пластине в режиме *on-line*. Входной информацией для решения обратной задачи является статическая деформация, измеренная на свободной поверхности пластины регулярно расположенными датчиками. Схема их расположения и метод решения таких задач на основе МГЭ изложены в [3]. В работе [4] на основе техник НС и лазерного воздействия на образцы построен алгоритм обнаружения поверхностных трещин на недоступной для измерения стороне образца. Метод основан на трех шагах: измерении АЧХ перемещений точек в местах расположения датчиков на свободной поверхности; обучении сети с помощью конечно-элементного моделирования этого динамического поведения; использовании обученной НС для идентификации.

В данной работе решается обратная задача идентификации трещин выходящих на поверхность и сквозных отверстий в упругих телах, в постановках плоской теории упругости. Предполагается, что берега трещин не взаимодействуют между собой и внутренние поверхности отверстий свободны от напряжений. Определяемым параметром является глубина трещины и радиус отверстия. В качестве дополнительной информации для решения обратных задач выбираются первые собственные частоты колебаний и компоненты вектора смещений, измеренные на части свободной границе тела. Обратная задача решается с помощью, разработанной и реализованной программно на основе сочетания с МКЭ, НС технологии.

**2. Постановка прямой и обратной задач.** В прямой задаче рассматриваются собственные и установившиеся колебания упругих тел, которые описываются следующей краевой задачей

$$\sigma_{ij,j} = -\rho\omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_t} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_d} = 0 \quad (2)$$

где  $u_i$  – компоненты векторов смещений,  $\sigma_{ij}$  и  $c_{ijkl}$  – компоненты тензоров напряжения и упругих постоянных;  $\rho$  – плотность;  $\omega$  – круговая частота,  $S_d$  – берега трещины или внутренняя поверхность отверстия.

Дополнительной информацией для решения обратной задачи реконструкции трещины служит набор

$$\omega = \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

первых собственных частот краевой задачи (1)–(2).

В задаче реконструкции отверстия этой информацией является поле смещений

$$u_i|_{S_0} = u_i^0 \quad (4)$$

где  $S_0 \subset S_t$  – часть свободной поверхности тела, доступная для измерения амплитуды смещения, например лазерным интерферометром.

**3. Схема решения обратной задачи.** Для решения обратной задачи в качестве модели сети был выбран многослойный персептрон, архитектура которого представлена на рис. 1.

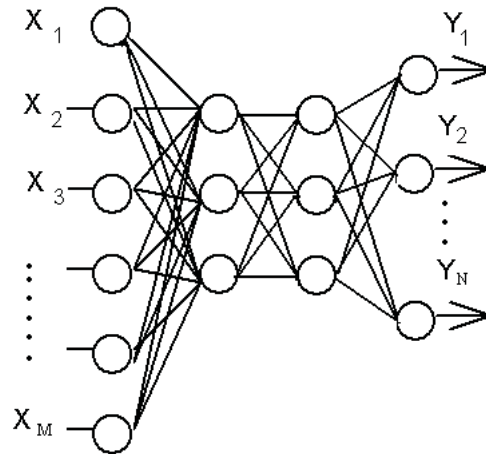


Рис. 1. Многослойный персептрон

Обучение персептрона происходит с помощью алгоритма обратного распространения ошибки (с учителем) [6]. Эта схема предполагает наличие обучающей выборки, которая может быть построена на основе решения прямых задач (1)–(2) с известными размерами дефектов.

В результате решения серии прямых задач в конечно-элементном пакете ACELAN определяются ряд собственных частот, для серии трещин, выходящих на поверхность с изменяющейся малым шагом глубиной, а так же АЧХ компоненты вектора смещений в некоторых узлах на поверхности тела, измеренные на границе тела, имеющего отверстие с изменяющимся малым шагом диаметром (Рис. 2).



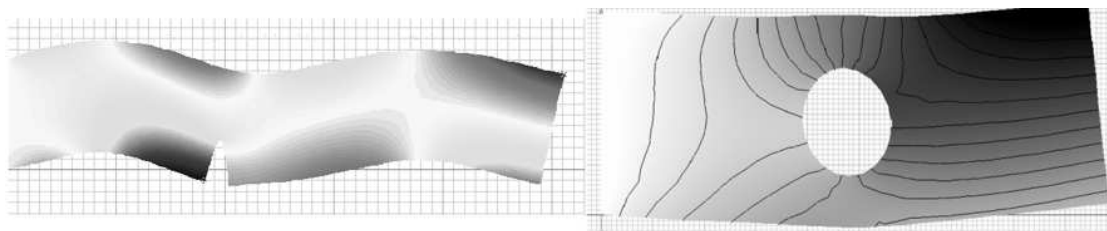


Рис. 2. Пятая собственная форма прямоугольника с трещиной. Распределение вертикального смещения в теле с отверстием

Обучение методом обратного распространения ошибки (ВР) предполагает: прямой и обратный проход по всем слоям сети. Содержанием обратного прохода является коррекция ошибок. При прямом проходе входной вектор подается на входной слой и распространяется от слоя к слою, в результате генерируется набор выходных сигналов – реакция сети на данный входной образ.

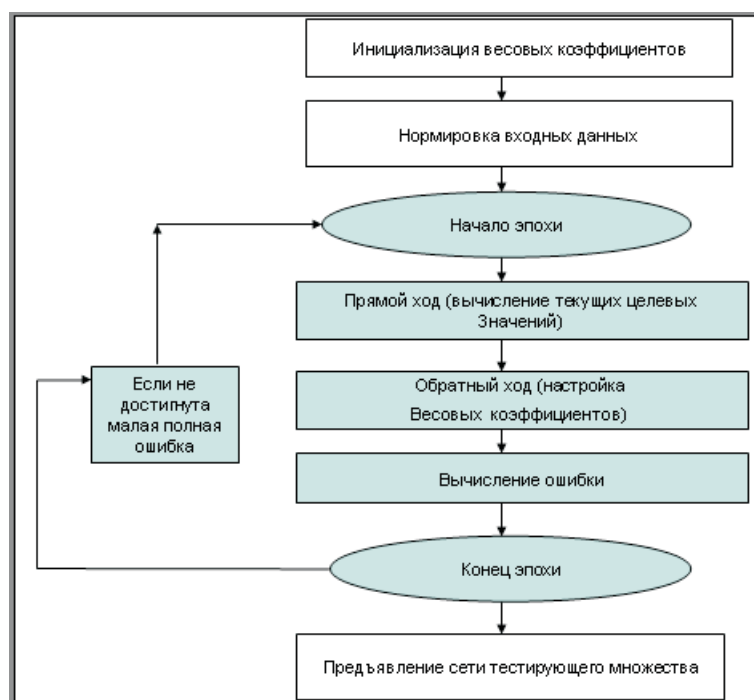


Рис. 3. Схема функционирования сети

Синаптические веса настраиваются в соответствии с правилом коррекции ошибок во время обратного хода и формируется сигнал ошибки от слоя к слою в обратном направлении, а также по всем входным сигналам. Осуществлены программные реализации описанного выше НС алгоритма в виде независимых приложений в среде MatLab и C++ [7].

Программа, реализует сеть с любым заданным количеством скрытых слоев и возможным варьированием вида функций активации и алгоритм ВР. Алгоритм работы соответствует предлагаемой на рис. 3 блок-схеме.

#### 4. Численный эксперимент

**4.1. Определение геометрии дефектов трещин.** В пакете ACELAN строится плоская область прямоугольной формы (рис.2 слева), жестко закрепленной на стороне ( $x = 0$ ) с трещиной переменной глубины, у вершины трещины – сгущение сетки ввиду наличия особенности решения; в качестве упругого материала выбрана сталь; в задаче модального анализа определены первые десять частот. В качестве обучающей выборки используется множество собственных частот, глубина трещины которых изменяется от 0 до 0.5 см с шагом 0.01, таким образом, обучающая выборка состоит из 50 векторов, размер каждого вектора определяется количеством рассматриваемых собственных частот.

В результате обучения персептрон делит входное пространство на четыре класса, с глубиной трещины, не превосходящей 0.125, (0.25, 0.375, 0.5). Векторы цели (выходы) состоят из четырехмерных векторов, которые являются единичными базисами четырехмерного пространства. Процессы сходимости и оптимизации представлены на рисунках 4, 5 ось ординат – соответствует ошибке при настройке весов сети; ось абсцисс – количеству эпох, в течение которых осуществлялась оптимизация; из рис. 4 следует, что достигнута точность, равная 0.0066, за 71 эпоху, при этом в сети использовались 12 слоев с чередующимися функциями активации (линейной и сигмоидальной).

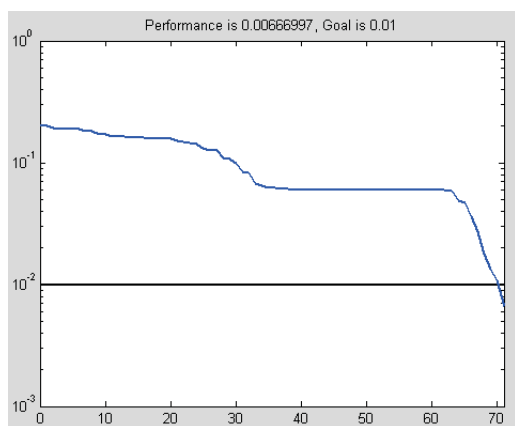


Рис. 4. Процесс оптимизации

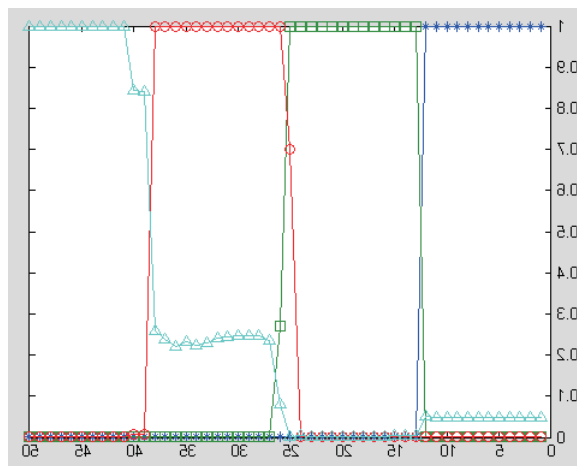


Рис. 5. Результат классификации

Результат классификации представлен на рисунке 5; Для изображения каждого класса выбран соответствующий маркер. Первый класс, изображенный \*, классифицирован четко со значениями, равными единице; второй класс – □, равно как и третий – ◇ не внесли своего вклада в функционал ошибок, а вот четвертый класс – △ классифицирован так, что существует некоторая низкая вероятность попадания как в первый, так и в третий класс.

**4.2. Определение радиуса сквозных отверстий.** Рассматривается установившиеся колебания с частотой 12860 Гц прямоугольника, изготовленный из стали со сторонами 10см и 4см соответственно (рис. 2 справа). На верхней грани было выбрано девять точек, равноудаленных друг от друга на расстоянии 1см, ампли-

тудные значения смещений которых представляют обучающий вектор. При генерации обучающей выборки радиус кругового отверстия, вырезанного в центре, изменяется от 0 см до 1 см, с шагом 0.05 см.

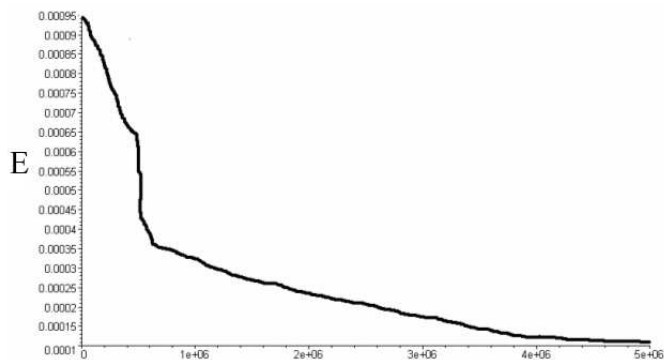


Рис. 6. Уменьшение квадратичной ошибки для  $E=0.0001$

Решение прямой задачи для определения смещений проводилось в ACELAN (общее количество узлов при разбиении равнялось 250). Обученной нейронной сети было представлено поле смещений для неизвестных радиусов. Расчеты по нахождению неизвестного радиуса были проведены для различных значений квадратичной ошибки. При работе программ точность вычислений равнялась 0.001. На графике (рис. 6) показано убывание квадратической ошибки в зависимости от числа циклов обучения. Проведенные численные эксперименты показали, что время обучения значительно возрастает с уменьшением погрешности в ошибке НС при ее обучении, это связано с градиентной схемой обучения, следует отметить, что в последнее время при обучении НС применяются генетические алгоритмы.

Таблица 1.

| Искомый радиус | Результат работы программы |               |              |
|----------------|----------------------------|---------------|--------------|
|                | При $E=0.0001$             | При $E=0.001$ | При $E=0.01$ |
| 0.0            | 0.016506                   | 0.030340      | 0.051752     |
| 0.05           | 0.043600                   | 0.032420      | 0.050491     |
| 0.10           | 0.099849                   | 0.097987      | 0.087814     |
| 0.15           | 0.152461                   | 0.151787      | 0.126447     |
| 0.20           | 0.195268                   | 0.197852      | 0.247280     |
| 0.25           | 0.250088                   | 0.251322      | 0.483163     |
| 0.30           | 0.307989                   | 0.320501      | 0.303377     |
| 0.35           | 0.343948                   | 0.340646      | 0.305505     |
| 0.40           | 0.400302                   | 0.403105      | 0.380939     |
| 0.45           | 0.450077                   | 0.447951      | 0.455971     |
| 0.50           | 0.499881                   | 0.501753      | 0.504106     |
| 0.55           | 0.552064                   | 0.549489      | 0.499499     |

В таблице 1 представлены результаты реконструкции радиуса отверстия (точное значение первая колонка) по предъявляемым обученной НС входных данных, полученных также, как и набор обучаемых векторов в результате решения прямых задач в ACELAN.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 05-01-00690, 05-01-00734, 06-01-08041).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Xu Y.G., Liu G.R., Wu Z.P. Huang X.M. Adaptive multilayer perceptron networks for detection of cracks in anisotropic laminated plates. // Int Journal of Solids and Structures 38 (2001), pp. 5625-5645.
- [2] Y C Liang, Chyanbin Hwu. On-line identification of holes/cracks in composite structures. // Smart Mater. Struct. 10 (2001), pp. 599-609
- [3] Hwu C. A new BEM for the two-dimensional anisotropic elastic solids containing multiple holes, cracks and inclusions Discontinuous Materials and Structures. // (Advances in Boundary Element Series) ed M B Bush (Southampton: WIT-Computational Mechanics) 1999. ch 2.
- [4] A. Oishi, K. Yamada, S. Yoshimura, G. Yagawa, S. Nagai, Y. Matsuda Neural Network-Based Inverse Analysis for Defect Identification with Laser Ultrasonics // Res Nondestr Eval (2001). pp. 79-95.
- [5] Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости. // ПММ. 2000. Т. 64. № 3. С. 381-393.
- [6] Сальмон Хайкин Нейронные сети. // Университет McMaster, Гамильтон, Онтарио, Канада.
- [7] Медведев В.С., Потемкин В.Г. Нейронные сети. MatLab 6. Москва. 2002. 489 с.

**Kourbatova P.S., Saprunov N., Soloviev A.N.** *Applying the neural networks to flaw detection problems in elastic materials.* The neural network technology is used to locate a crack and a through hole in elastic materials. The spectrum of eigenfrequencies and displacement measured on the free surface under steady-state vibration is the supplementary data for solving of the inverse problem of defects detection.

# АЛГОРИТМ ЗАДАЧИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРИСОЕДИНЁННОГО ВИХРЯ

Лежнёв М. В.

*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар*

Предлагается общее интегральное представление функции тока задачи обтекания профиля, которое также определяет плотность присоединённого вихря. Дается алгоритм вычисления плотности, классом единственности которой является подпространство гармонических функций. Для полукруга приводятся картины обтекания с различными значениями циркуляции на профиле.

1. Обозначим внешность ограниченной односвязной области  $Q = Q^-$  с границей  $S$  через  $Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}$ . В области  $Q^+$  требуется построить векторное поле  $\bar{w}(x) = \{u(x), v(x)\}$ ,  $x = (x_1, x_2) \in R^2$ , удовлетворяющее условиям: а)  $div \bar{w}(x) = 0$ ,  $rot \bar{w}(x) = 0$ ,  $x \in Q^+$ ; б) на бесконечности задан вектор  $\bar{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$ ; в)  $S$  — линия тока поля  $\bar{w}(x)$ .

Векторное поле  $\bar{w}(x)$  можно трактовать как поле скоростей плоскопараллельного потенциального потока несжимаемой жидкости, обтекающего профиль  $S$ . Из соленоидальности поля скоростей следует существование функции тока  $\psi(x)$ ,  $\bar{w}(x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \right\} \psi(x)$ ; будем обозначать правую часть последнего равенства через  $\nabla_{\perp} \psi(x)$ . Условие в) переписывается в виде  $\psi|_S = B = const$ .

2. Обозначим через  $E(x)$  фундаментальное решение уравнения Лапласа. Далее нам потребуется потенциал Робена

$$R(x) = \int_S g^*(y) E(x - y) ds_y,$$

где  $g^*(y)$  — его плотность. По определению  $R(x) = const$  при  $x \in \bar{Q}$ .

Пусть  $G(Q)$  — подпространство гармонических в  $L_2(Q)$  функций, тогда имеет место следующая лемма [1].

**Лемма (Новиков).** Если  $Q$  — ограниченная односвязная в  $R^2$  область с границей Ляпунова  $\partial Q = S$ , и её потенциал Робена не равен нулю,  $R(x) \neq 0$  при  $x \in S$ , то пространство  $L_2(Q)$  имеет следующее разложение в прямую сумму

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где  $G(Q)$  — подпространство гармонических функций, а функция  $h(x)$  принадлежит  $N(Q)$  тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y) E(x - y) dy = 0, \quad x \in S.$$

Справедливо следующее утверждение.

**3. Лемма 1.** Линейная функция  $l(x)$  может быть представлена на границе  $S$  логарифмическим потенциалом с некоторой плотностью  $g_0(y)$

$$l(x) = \int_Q g_0(y) E(x-y) ds_y, \quad x \in S,$$

и это представление единственно, если потенциал Робена на  $S$  не равен нулю,  $R(x) \neq 0$ ,  $x \in S$ .

*Доказательство.* Рассмотрим интегральное представление [2] достаточно гладкой функции  $z(x)$

$$z(x) = \int_Q \Delta z(y) E(x-y) dy + \int_S \left[ z(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - \frac{\partial z(y)}{\partial n_y} E(x-y) \right] ds_y$$

для  $x \in Q$ , на границе  $S$  имеем

$$\frac{1}{2} z(x) = \int_Q \Delta z(y) E(x-y) dy + \int_S z(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} ds_y - \int_S \frac{\partial z(y)}{\partial n_y} E(x-y) ds_y, \quad x \in S.$$

Если  $z(x)$  — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta^2 z(x) = 0, & x \in Q, \\ z(x) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = b(x), & x \in S, \end{cases} \quad (1)$$

то на  $S$  справедливо равенство

$$\int_Q \Delta z(y) E(x-y) dy = \int_S b(y) E(x-y) ds_y.$$

Докажем теперь, что линейная функция  $l(x)$  может быть представлена потенциалом простого слоя на  $S$ , если  $R(x) \neq 0$  при  $x \in S$ .

Функция  $l(x)$ , рассмотренная в  $Q$ , является гармонической; обозначим её производную по внешней к  $S$  нормали через  $f(x)$ , т.е.  $\frac{\partial l(x)}{\partial n} = f(x)$ ,  $x \in S$ , и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta l(x) = 0, & x \in Q, \\ \frac{\partial l}{\partial n} = f(x), & x \in S. \end{cases} \quad (2)$$

Решение этой краевой задачи представляется в виде [3]

$$l(x) = \int_S a(y) E(x-y) ds_y, \quad x \in Q,$$

где  $a(y)$  — решение интегрального уравнения

$$-\frac{a(x)}{2} + \int_S a(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_x} ds_y = f(x), \quad x \in S, \quad (3)$$

которое разрешимо по теореме Фредгольма, так как  $f(x) \perp 1$  в  $L_2(S)$ .

Таким образом, линейная функция может быть представлена в виде

$$l(x) = \int_Q g(y)E(x-y)dy,$$

где  $g(y) = \Delta z(y)$  — гармоническая функция,  $z(x)$  — решение задачи (1) с  $b(x) = a(x)$ ,  $a(x)$  — решение интегрального уравнения (3).

Для доказательства единственности представления предположим противное, что существует представление с другой плотностью  $g_2 \in G(Q)$ . Вычитая, получим

$$0 = \int_Q (g(y) - g_2(y))E(x-y)dy, \quad x \in S.$$

По лемме Новикова функция  $(g - g_2)$  принадлежит  $N(Q)$  и одновременно является гармонической, т.е.  $g(y) - g_2(y) = 0$ . Лемма доказана.

Из доказательства леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

**4. Теорема.** Функция тока  $\psi(x)$  задачи обтекания а)-с) может быть представлена в виде

$$\psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \int_Q g(y)E(x-y)dy, \quad x \in Q^+,$$

и это представление единственно в подпространстве  $G(Q)$ , если потенциал Робена не равен нулю на  $S$ .

Функция  $\psi(x)$  гармоническая в  $Q^+$ , и условие а) в формулировке задачи обтекания выполняется по построению. Выполнение условия б) следует из убывания к нулю при  $x \rightarrow \infty$  градиента от интеграла по  $Q$  в представлении  $\psi_0$ , что имеет место вследствие оценок

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Q g(y)E(x-y)dy \right| &= \left| \int_Q g(y) \frac{x_i - y_i}{2\pi|x-y|^2} dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\|g\|}{2\pi} \left[ \int_Q \frac{1}{|x-y|^2} dy \right]^{1/2} \leq \frac{\|g\|}{2\pi} \frac{|Q|^{1/2}}{\rho(x, Q)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где  $\rho(x, Q) = \text{dist}(x, Q) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $|Q|$  — площадь  $Q$ . Плотность вихрей  $g(y)$  определяется решением задач (1) - (3). Условие с) выполнено по лемме 1.

5. Циркуляция векторного поля равна по определению

$$\Gamma = \int_S (\bar{w}(x), \bar{\tau}) ds = \int_S (\nabla \psi_0(x), \bar{n}) ds = \int_S \frac{\partial \psi_0}{\partial n_x} ds,$$

где  $\bar{\tau}$  и  $\bar{n}$  — касательный и нормальный единичные векторы к  $S$  соответственно. Подставим в последнее равенство представление функции тока, получим

$$\Gamma = \int_S \left[ \int_Q g(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_x} dy \right] ds_x = \int_Q g(y) \int_S \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_x} ds_x dy = \int_Q g(y) dy,$$

где использовалось свойство  $\int_S \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_x} ds_x = 1$  при  $y \in Q$ . Замена интегрирования возможна, так как все интегралы сходятся абсолютно, если  $S \in C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .

6. Внутренний вихрь с условием прилипания на границе. Рассмотрим следующую функцию  $\psi_H = \int_Q h(y) E(x-y) dy$ , где  $h(y) \in N(Q)$  из разложения Новикова.

По лемме Новикова  $\psi_H \equiv 0$  при  $x \in Q^+$ , и, так как  $\psi_H \in C^1(R^2)$ , то  $\psi_H = 0$  и  $\nabla \psi_H = 0$  на  $S$ , т.е. на  $S$  выполнено условие прилипания для течения  $\nabla_{\perp} \psi_0$ ,  $x \in Q$ . Функции тока  $\psi_H$  определяет внутренний в  $Q$  вихрь, не влияющий на внешнее обтекающее течение; скорость векторного поля такого вихря равна нулю на границе, т.е. он не влияет ни на циркуляцию, ни на кинетическую энергию обтекающего течения. Интеграл по  $Q$  от  $h(y)$  равен нулю.

Таким образом, представление функции тока присоединённого вихря можно написать в виде  $\psi_1 = \psi_0 + \psi_H$ . В области  $Q^+$  функции тока  $\psi_0$  и  $\psi_1$  (и, как следствие, векторные поля, определяемые ими) совпадают; в  $Q$  к внутреннему вихрю с плотностью  $g_0$  можно добавить любой вихрь с условием прилипания на границе.

7. Алгоритм задачи обтекания. Обозначим через  $z^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ограниченную в  $Q^+$  последовательность точек, удовлетворяющую условию единственности гармонических функций. Справедливы следующие леммы [5].

**Лемма 2.** Система функций  $\gamma_k(x) = \ln |z^k - x|^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , линейно независима и замкнута в подпространстве  $G(Q)$ .

**Лемма 3.** Система функций  $\mu_k(x) = \int_Q \gamma_k(y) E(x-y) dy$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , линейно независима и замкнута в  $L_2(S)$ , если потенциал Робена для  $S$  не равен нулю.

Аппроксимацию  $\psi_0^N$  функции тока  $\psi_0$  будем представлять в виде

$$\psi^N(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \sum_{n=1}^N c_n \int_Q \gamma_n(y) E(x-y) dy, \quad x \in Q^+.$$

Для определения коэффициентов  $c_n$  используется граничное условие  $\psi|_S = B = const$ , т.е. решается вариационная задача

$$\|\psi^N - B\|_c^2 \rightarrow \min.$$

Необходимое условие экстремума функции  $F(c) = \|\psi^N - const\|_c^2$  приводит к необходимости решения СЛАУ с матрицей Грама  $Ac = b$ , где элемент матрицы имеет вид  $a_{ji} = \int_S \mu_j \mu_i ds$ , элемент правой части —  $b_j = \int_S (B - l(x)) \mu_j ds$ .

На рисунках 1, 2 представлены линии тока присоединённых вихрей для полукруга, соответствующие обтекающим течениям с различными значениями скорости на бесконечности  $\bar{w}(x)$  и циркуляции.



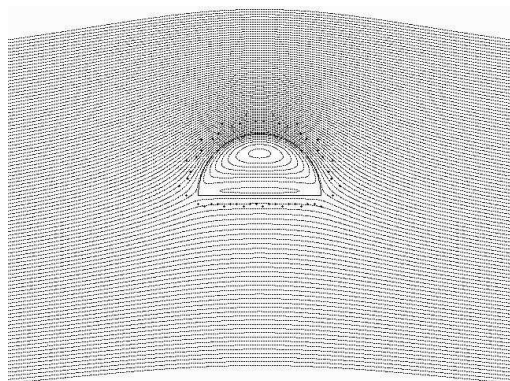


Рис. 1

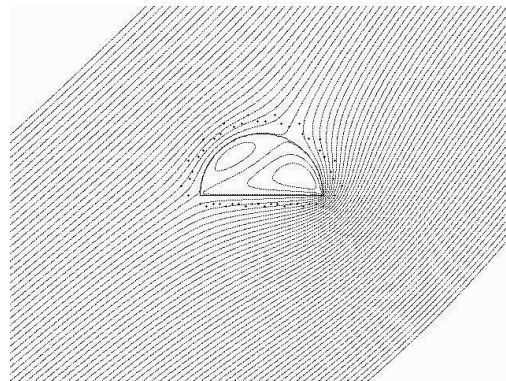


Рис. 2

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 06-01-96648.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР, 1938. Том XVIII, № 3. С. 165–168.
- [2] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.
- [4] Лежнёв В.Г. Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле // ДАН, 2004. Т.394, № 5. С.615–617.
- [5] Лежнёв В.В., Лежнёв М.В., Рябченко В.И. Задача плоскопараллельного обтекания профиля и представление функций потенциалами // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества, 2005. № 2. С. 23–30.

**Lezhnev M.V.** *Algorithm of adjoint vortex plane-parallel flow.* There is suggested common integral flow function representation of profile streamline task, which is define density of adjoint vortex. Computation algorithm of adjoint vortex is given.

# INTERIOR NOISE IN THE AIRCRAFT STREAMLINED BY THE TURBULENT FLOW

**Marulo F.\* , Ricci F.\* , Sumbatyan M.A.\*\***

\* *University of Naples Federico II, Italy*

\*\* *Rostov State University, Russia*

The paper is concerned with the application of the structural acoustic methodology for the prediction of the interior noise level of closed volumes such as the fuselage cavity of the aircraft cabin. Regardless the size of the aircraft, any passenger has certain requirements related to the on board comfort. On the other hand, structural design aims at large weight reduction and innovative manufacturing techniques to reduce fabrication costs. The utilization of composite materials allow to meet such requirements even though allow an increased noise transmission inside the cabin because of the reduced mass and damping and the increased stiffness properties. The validation of the procedures is able to predict vibration and noise levels inside the fuselage cabin and will help the airframes and the airline operators to define an efficient way to improve the comfort requirements. The main objective of the paper is the setup of the numerical approach and the correlation with the theoretical results. We also aim at the study of the airframe interaction with the turbulent flow streamlined. For this purpose we develop a semi-analytical approach based on an explicit construction of Green's function in the turbulent channel of constant width. Green's function is written out explicitly in quadratures. This also allows us to develop full solution to the problem at each iteration step in time as an explicit-form single integral over the flow.

## Methodology

The structural acoustic analogy appears to be a valuable approach to the computation of the acoustic pressure in closed volumes. It allows such computation in the framework of the same finite element program provided the interest in the low-medium frequency range of the structure under examination. The method is based on the relationship between the structural displacement and the acoustic pressure. The scalar acoustic wave equation in terms of variation of pressure from the equilibrium position is

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad \implies \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1)$$

The equation governing the dynamic stresses in the material, along a particular direction ( $x$ , for example) is

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

These last two equations are mathematically similar and an *analogy* can be established if

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{p}{c^2} = \rho_s u. \quad (3)$$

Using this structural-acoustic analogy it becomes possible to solve acoustic problems using the finite element approach of the typical structural problems. Moreover it is

possible to perform these calculations inside the same program. In order to complete the analogy and to give practical ideas of its application in a FEM framework, let us consider the general stress-strain relationship  $\{\sigma\} = [B]\{\varepsilon\}$ .

If now we consider the displacement in the  $x$ -direction only ( $u \neq 0, v = w = 0$ ), the previous equation, considering the analogy equalities, can be written as

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & 0 \\ & & B_{33} & 0 & B_{35} & 0 \\ & & & 1 & B_{45} & 0 \\ & & & & B_{55} & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ 0 \\ 0 \\ \partial u / \partial y \\ 0 \\ \partial u / \partial z \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

where the terms  $B_{ij}$  are arbitrary, and it may result convenient to choose  $B_{ij}$  so that matrix  $[B]$  is isotropic and therefore invariant for any coordinate system. Taking advantage of such formulation the free equation of motion of an acoustic enclosure with rigid walls can be written, along with Finite Element notation, as

$$[M_a]\{\ddot{p}\} + [K_a]\{p\} = \{0\}, \quad (5)$$

where  $[M_a]$  is the acoustic *mass* matrix,  $[K_a]$  is the acoustic *stiffness* matrix, and  $\{p\}$  is the vector of pressure values at the nodal points. This equation of motion results in a classical eigenvalue problem and can be solved using the standard numerical methods (Lanczos, for example). Removing the hypothesis of rigid wall, the fluid-structure interaction problem may be written, again in terms of finite element models, as

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ -(\rho c)^2 [A]^T & [M_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & [A] \\ [0] & [K_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

where the matrix  $[A]$  ensures the proper coupling between structural and acoustic models. At the fluid-structure interface the boundary condition is  $\partial p / \partial n = -\rho \ddot{u}$ , where  $n$  is the normal, positive outward, unit vector at the interface and  $\rho$  is the mass density of the fluid. For the present finite element application, the force exerted by the structure on the fluid is  $(\rho c)^2 A \ddot{u}_n$  at each grid point located along the fluid-structure interface. Here,  $A$  is the surface area associated with the node and  $\ddot{u}_n$  is the normal component of the fluid particle acceleration. The force of the fluid acting on the structure is expressed as a surface pressure force equal to  $-pA$  applied to each interface structural node.

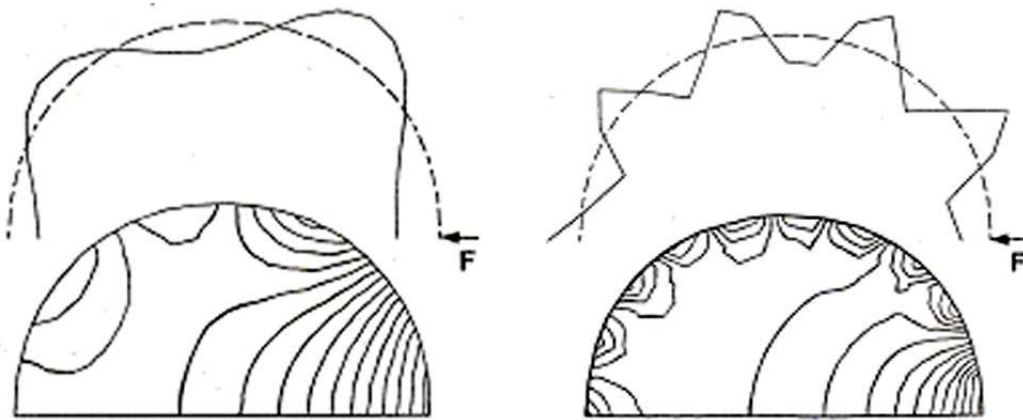
### Numerical applications

The methodology previously outlined has been checked with some simple models whose theoretical solutions are known. Additionally the dimensions of the models have been selected in order to criticize the numerical methods. In Table 1 the comparison between the values of the natural frequencies and mode shapes of two- and three-dimensional models, numerically and theoretically computed, are presented:

| 2-D Square Section ( $10^3 \times 10^3 \text{ mm}^2$ )<br>Frequency, Hz |        |        | 3-D Rectangular Enclosure ( $10^4 \times 10^3 \times 10^3 \text{ mm}^3$ )<br>Frequency, Hz |        |        |
|---|--------|--------|--|--------|--------|
| Mode Shape  | Theory | FEM    | Mode Shape   | Theory | FEM    |
| 0,0   | 0.00   | 0.00   | 0,0,0  | 0.00   | 0.00   |
| 0,1   | 170.10 | 169.40 | 0,0,1  | 17.01  | 16.92  |
| 1,0   | 170.10 | 169.40 | 0,0,2  | 31.02  | 33.33  |
| 1,1   | 240.56 | 239.57 | 0,0,3  | 51.03  | 48.73  |
| 2,0   | 340.21 | 334.64 | 0,0,4  | 68.04  | 62.65  |
| 0,2   | 340.21 | 334.64 | ...  | ...    | ...    |
| 2,1   | 380.36 | 375.07 | 1,0,0  | 170.10 | 165.77 |
| 1,2   | 380.36 | 375.07 | 0,1,0  | 170.10 | 165.77 |
| 2,2   | 481.12 | 473.25 | 1,0,1  | 170.95 | 166.58 |

**Table 1. Natural frequencies for two geometries**

Furthermore some examples of fluid-structure interaction have been also carried out, and the next figure presents the first results of a 2-D circular section excited by a point force on its structural part.



**Fig. 1. Dynamic shapes of structure and acoustic volume predicted via FEM using the fluid-structural interaction equations**

If the airframe is placed in a turbulent stream, this predetermines a specific character of the outer forcing. For this aim we develop a semi-analytical approach to calculate turbulent pressure and velocity oscillations, which we present here, to be more specific, to the case of turbulent flow in a channel of constant width  $2h$ .

#### Calculation of turbulent oscillating forces affecting the airframe

Let us write the Navier-Stokes equations in terms of the pair "vorticity – stream function":

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \Delta \zeta, \quad \zeta = \Delta \psi. \quad (7)$$

Let us apply the Euler scheme in time:  $(\partial\zeta^0/\partial t)_n \approx (\zeta_n^0 - \zeta_{n-1}^0)/\tau$ , where  $\tau$  is the step in time. The substitution of this relation to Eq. (7) which can be rewritten with the homogeneous boundary conditions, reduces the problem to an elliptic boundary value problem of the fourth order regarding the stream function:

$$\Delta\psi_n^0 - \nu\tau\Delta^2\psi_n^0 = g_{n-1}, \quad g_{n-1} = \zeta_{n-1}^0 + \tau f_{n-1}, \quad (8)$$

where  $g_{n-1}$  is a certain function known from the previous step of iterations.

In the case of the channel of constant width equation (8) possesses an exact explicit solution. In order to construct it let us first construct Green's function, i.e. the solution to the following boundary value problem

$$\Delta G - \varepsilon\Delta^2 G = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y), \quad G|_{\eta=\pm h} = \frac{\partial G}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\pm h} = 0, \quad (9)$$

where  $G = G(\xi, \eta, x, y)$ , and the Laplace operator is applied with respect to variables  $(\xi, \eta)$ .

Application of the Fourier transform with respect to variable  $\xi$  ( $\xi \Rightarrow \alpha$ ) reduces equation (9) to a linear ordinary differential equation of the fourth order with constant coefficients (Fourier images are designated by tildes)

$$\varepsilon \frac{d^4 \tilde{G}}{d\eta^4} - (1 + 2\varepsilon\alpha^2) \frac{d^2 \tilde{G}}{d\eta^2} + (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^4) \tilde{G} = -e^{i\alpha x} \delta(\eta - y), \quad (10)$$

$$\tilde{G}|_{\eta=\pm h} = \frac{d\tilde{G}}{d\eta}\bigg|_{\eta=\pm h} = 0.$$

After some transformations, the Fourier image of the Green's function can be represented as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\eta, x, y) = e^{i\alpha x} H; \quad H(\eta, y) = & \frac{\text{ch}[(2h - |\eta - y|)\alpha_1] - \text{ch}[(\eta + y)\alpha_1]}{2\alpha_1 \text{sh}(2h\alpha_1)} \\ & - \frac{\text{ch}[(2h - |\eta - y|)\alpha_2] - \text{ch}[(\eta + y)\alpha_2]}{2\alpha_2 \text{sh}(2h\alpha_2)} + \\ & + \{[\alpha_2 \text{sh}(2\alpha_1 h) - \alpha_1 \text{sh}(2\alpha_2 h)][G_0(y)G_0(-\eta) + G_0(-y)G_0(\eta)] + \\ & + [\alpha_2 \text{sh}(2\alpha_1 h) \text{ch}(2\alpha_2 h) - \alpha_1 \text{sh}(2\alpha_2 h) \text{ch}(2\alpha_1 h)] \times \\ & \times [G_0(y)G_0(\eta) + G_0(-y)G_0(-\eta)]\} \frac{1}{D_0}, \\ G_0(y) = & \frac{\text{sh}[(h + y)\alpha_1]}{\text{sh}(2\alpha_1 h)} - \frac{\text{sh}[(h + y)\alpha_2]}{\text{sh}(2\alpha_2 h)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$D_0 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \text{sh}(2\alpha_1 h) \text{sh}(2\alpha_2 h) + 2\alpha_1 \alpha_2 [1 - \text{ch}(2\alpha_1 h) \text{ch}(2\alpha_2 h)]$$

Obviously, Green's function itself can be obtained by the inverse Fourier transform applied to Eq. (11):

$$G(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos[\alpha(x - \xi)] H(\eta, y) d\alpha. \quad (12)$$

As a result, exact solution to equation (8) is expressed in quadratures:

$$\psi_n^0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-h}^h G(\xi, \eta, x, y) \hat{g}_{n-1}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (13)$$

We thus can conclude from the results of the present section that in the classical iteration processes in time, used to calculate turbulent flows in the channel of constant width, at each step of iterations there arises a linear elliptic boundary value problem of the fourth order with singular perturbations, containing a small factor at highest derivatives. In the present work this elliptic problem is solved in quadratures. This reduces the iteration process to calculation of integrals of some functions defined at previous steps of iteration.

It should be noted that the method proposed in the present paper can easily be extended to the three-dimensional problem for the channel of constant width. In this case the exact explicit solution of the elliptic boundary value problem, arising at each step in time, is constructed by the two-dimensional Fourier transform.

It should also be noted that the constructed Green's function permits reduction of the problem on arbitrary-shaped airframe placed into the turbulent flow in the channel of constant width to a simple boundary integral equation.

The paper has been supported by INTAS, Grant 04-80-7043.

**Маруло Ф., Риччи Ф., Сумбатян М.А.** *Шум внутри самолета, обтекаемого турбулентным потоком.* В работе рассматриваются приложения методов структурной акустики к предсказанию уровня внутреннего шума в замкнутом объеме, таком как фюзеляж корпуса самолета. Независимо от размеров самолета любой пассажир предъявляет требования, связанные с комфортом полета на борту. С другой стороны, структурный дизайн ставит своей целью сокращение веса и современную технологию для снижению общей стоимости корпуса. Применение композитных материалов позволяет удовлетворить таким требованиям, хотя это и приводит к увеличению внутреннего шума за счет сокращения массы и уменьшения демпфирования при возрастающей жесткости. Предлагаемый метод позволяет предсказать вибрацию и уровень шума внутри фюзеляжа, это поможет специалистам и операторам найти эффективные пути улучшения комфортности. Главной целью работы является развитие численного подхода и его тестирование на сравнении с теоретическими результатами в модельных случаях. Мы также ставим целью исследовать динамическое взаимодействие корпуса самолета с набегающим турбулентным потоком. Для этого мы развиваем полу-аналитический подход, основанный на явном построении функции Грина в турбулентном канале постоянной ширины. Функция Грина выписывается в виде явного выражения в квадратурах. Это также позволяет выписать полное решение задачи на каждом шаге итерационного по времени процесса в виде однократных квадратур по потоку.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мелехов А. П., Ревина С. В.

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается задача устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности (волновое число  $\alpha$  стремится к нулю). Для основного течения вида:  $\mathbf{v} = (\alpha V_1(z), 0, V_3(x_1))$ ,  $\langle V_3 \rangle = 0$  получены явные формулы главных членов асимптотики. Показано, что в отсутствие вырождений, происходит колебательная потеря устойчивости.

**1. Введение.** Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном пространстве  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  под действием поля внешних сил  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , периодического по пространственным переменным  $x_1, x_2$  и  $x_3$  с периодами  $L_1, L_2$  и  $L_3$  соответственно. Поле скоростей  $\mathbf{v}$  и давление  $p$  удовлетворяют системе уравнений Навье – Стокса и условию несжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\nu$  — безразмерная вязкость.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости  $\mathbf{v}$  по пространственным переменным  $x_1, x_2, x_3$  с периодами  $L_1, L_2, L_3$  соответственно. Предполагается, что  $L_3 = 2\pi/\alpha$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ . Пусть  $z = \alpha x_3$ . Тогда поле скоростей периодически по  $z$  с периодом  $2\pi$ .

Всюду в дальнейшем через  $\langle f \rangle$  будем обозначать среднее по переменным  $x_1, x_2$ :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2,$$

а через  $\langle\langle f \rangle\rangle$  — среднее по параллелепипеду периодов:

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, 2\pi].$$

Среднее значение скорости  $\mathbf{v}$  считается заданным:

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Длинноволновая асимптотика ( $\alpha \rightarrow 0$ ) задачи устойчивости двумерных параллельных течений  $\mathbf{v} = (0, V_2(x))$  получена в [1]. Исследованию автоколебаний,

возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида  $\mathbf{v} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$ ,  $\langle V_3 \rangle \neq 0$  рассмотрена в [3]. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [4–7].

Настоящая работа посвящена исследованию задачи устойчивости стационарного течения вида

$$\mathbf{v} = (\alpha V_1(z), 0, V_3(x_1)), \quad \langle V_3 \rangle = 0. \quad (1)$$

Явно найдены первые члены асимптотики по параметру  $\alpha$  собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Показано, что в отсутствие вырождений происходит колебательная потеря устойчивости.

**2. Линейная задача устойчивости.** Для нормальных возмущений вида  $u = \varphi(x_1, x_2, z)e^{\sigma t}$  получается спектральная задача:

$$\sigma \varphi_1 + \alpha V_1(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \alpha V_3(x_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \alpha^2 \varphi_3 \frac{dV_1}{dz} - \nu_c \left( \Delta_0 \varphi_1 + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (2)$$

$$\sigma \varphi_2 + \alpha V_1(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \alpha V_3(x_1) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \nu_c \left( \Delta_0 \varphi_2 + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (3)$$

$$\sigma \varphi_3 + \alpha V_1(z) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \alpha V_3(x_1) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varphi_1 \frac{dV_3}{dx_1} - \nu_c \left( \Delta_0 \varphi_3 + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} \right) = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad \langle \langle \varphi_j \rangle \rangle = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  — плоский оператор Лапласа, индекс  $j$  изменяется в пределах от 1 до 3.

Критическое значение вязкости  $\nu_c$ , собственные значения  $\sigma$ , а также собственные функции  $(\varphi, p)$  будем разыскивать в виде рядов по степеням  $\alpha$ :

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varphi^k, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k p_k, \quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sigma_k, \quad \nu_c = \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \nu_k.$$

Приравнивая в (2)–(5) выражения при  $\alpha^0$ , приходим к следующим задачам для нахождения  $\varphi_1^0$ ,  $\varphi_2^0$  и  $\varphi_3^0$ :

$$\sigma_0 \varphi_s^0 - \nu^* \Delta_0 \varphi_s^0 = -\frac{\partial p_0}{\partial x_s}, \quad (6)$$

$$\sigma_0 \varphi_3^0 + \varphi_1^0 \frac{dV_3}{dx_1} - \nu^* \Delta_0 \varphi_3^0 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_s^0}{\partial x_s} = 0, \quad \langle \langle \varphi_j^0 \rangle \rangle = 0. \quad (8)$$



Здесь и в дальнейшем индекс  $s$  изменяется от 1 до 2, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Из (6), (8) следует, что

$$\sigma_0 = 0, \quad p_0 = p_0(z), \quad \varphi_s^0 = \varphi_s^0(z),$$

а из (7) получаем, что  $\varphi_3^0$  имеет вид:

$$\varphi_3^0(x_1, z) = \frac{1}{\nu^*} \varphi_1^0(z) \frac{\partial \theta_3}{\partial x_1},$$

где  $\theta_3$  есть решение задачи:  $\theta_3''(x_1) = V_3(x_1)$ ,  $\langle \theta_3 \rangle = 0$ .

Теперь приравняем в (2)–(5) выражения при  $\alpha^1$ :

$$\sigma_1 \varphi_s^0(z) + V_3(x_1) \frac{d\varphi_s^0}{dz} - \nu^* \Delta_0 \varphi_s^1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x_s}, \quad (9)$$

$$\sigma_1 \varphi_3^0 + V_1(z) \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial x_1} + V_3(x_1) \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial z} + \varphi_1^1 \frac{dV_3}{dx_1} - \nu^* \Delta_0 \varphi_3^1 - \nu_1 \Delta_0 \varphi_3^0 = -\frac{dp_0}{dz}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_s^1}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial z} = 0, \quad \langle \langle \varphi_j^1 \rangle \rangle = 0. \quad (11)$$

После осреднения по  $x_1, x_2$  (9) принимает вид:  $\sigma_1 \varphi_s^0(z) = 0$ , следовательно,  $\sigma_1 = 0$ , функции  $\varphi_s^0(z)$  — остаются неопределенными.

Из уравнений (9), (11) находим:

$$p_1 = -2 \frac{d\varphi_1^0}{dz} \theta_3'(x_1) + \langle p_1 \rangle,$$

$$\varphi_1^1(x_1, z) = -\frac{1}{\nu^*} \frac{d\varphi_1^0}{dz} \theta_3(x_1) \langle \varphi_1^1 \rangle, \quad \varphi_2^1(x_1, z) = \frac{1}{\nu^*} \frac{d\varphi_2^0}{dz} \theta_3(x_1) \langle \varphi_2^1 \rangle.$$

Из уравнения (10) получаем:  $p_0 = \text{const}$ ,

$$\varphi_3^1(x_1, z) = \frac{1}{\nu^{*2}} \varphi_1^0(z) V_1(z) \theta_3(x_1) + \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{d\varphi_1^0}{dz} G(x_1) + \frac{\langle \varphi_1^1 \rangle}{\nu^*} \theta_3'(x_1) - \frac{\nu_1}{\nu^{*2}} \varphi_1^0(z) \theta_3'(x_1),$$

где  $G$  определяется как решение задачи  $G''(x_1) = (\theta_3'^2 - \theta_3 \theta_3'')$ ,  $\langle G \rangle = 0$ .

Осреднив (2), (3) по переменным  $x_1, x_2$  и приравняв выражения при  $\alpha^2$ , приходим к равенствам:

$$\sigma_2 \varphi_1^0(z) + \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} \left( \frac{\langle \theta_3'^2 \rangle}{\nu^*} - \nu^* \right) = 0, \quad \sigma_2 \varphi_2^0(z) - \frac{d^2 \varphi_2^0}{dz^2} \left( \frac{\langle \theta_3'^2 \rangle}{\nu^*} + \nu^* \right) = 0. \quad (12)$$

Из уравнений (12) получаем:

$$\sigma_2 = 0, \quad \nu^{*2} = \langle \theta_3'^2 \rangle, \quad \varphi_2^0 = 0. \quad (13)$$

Далее явно находятся  $p_2, \varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2$ .

Условие разрешимости уравнения (2) при  $\alpha^3$  имеет вид:

$$\sigma_3 \varphi_1^0(z) - \frac{3}{\nu^{*2}} \langle \theta_3 \theta_3'' \rangle \frac{d^3 \varphi_1^0}{dz^3} - 2\nu_1 \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим два случая.

**1-й случай:**  $\langle \theta \theta'^2 \rangle = 0$ . Из уравнения (14) имеем:  $\nu_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$ ,  $\varphi_1^0(z)$  — не определяется.

**2-й случай:**  $\langle \theta \theta'^2 \rangle \neq 0$ . Тогда решение уравнения (14) имеет вид:  $\nu_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = \frac{3im^3}{\nu^{*2}} \langle \theta \theta'^2 \rangle$ ,  $\varphi_1^0(z) = e^{-imz}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  — волновое число.

Из условия разрешимости уравнения (3) при  $\alpha^3$  получаем  $\varphi_2^1 = 0$ , из самого уравнения (3) при  $\alpha^3$  находим:

$$\varphi_2^3 = \frac{1}{\nu^*} \frac{d\varphi_2^2}{dz^2} \theta_3(x_1) + \langle \varphi_2^3 \rangle. \quad (15)$$

Условие разрешимости уравнения (2) при  $\alpha^4$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_3 \langle \varphi_1^1 \rangle - \frac{3}{\nu^{*2}} \frac{d^3 \langle \varphi_1^1 \rangle}{dz^3} \langle \theta_3 \theta_3'^2 \rangle = & -\sigma_4 \varphi_1^0(z) + \frac{1}{\nu^{*3}} \frac{d^4 \varphi_1^0}{dz^4} \langle \theta Q' \rangle - \frac{3}{\nu^*} \frac{d^4 \varphi_1^0}{dz^4} \langle \theta^2 \rangle + \\ & + \frac{1}{\nu^{*3}} \frac{d^3}{dz^3} (\varphi_1^0 V_1) \langle \theta S' \rangle + \frac{1}{\nu^{*3}} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d\varphi_1^0}{dz} V_1 \right) \langle \theta G \rangle + \frac{1}{\nu^{*3}} \frac{d^2}{dz^2} (\varphi_1^0 V_1^2) \langle \theta^2 \rangle + 2\nu_2 \frac{d^2 \varphi_1^0}{dz^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $Q(x)$ ,  $S(x)$ ,  $G(x)$  — известные функции.

В случае  $\langle \theta \theta'^2 \rangle = 0$  левая часть уравнения (16) равна нулю и функция  $\langle \varphi_1^1 \rangle$  из него не определяется. В частном случае  $V_1(z) = V_1 = \text{const}$  находим решение этого уравнения:  $\varphi_1^0(z) = e^{-imz}$ , где  $m$  — целое,

$$\begin{aligned} \nu_2 = \frac{1}{2\nu^{*3}} [(\langle \theta Q' \rangle - 3\nu^{*2} \langle \theta^2 \rangle) m^2 - V_1^2 \langle \theta^2 \rangle], \\ \sigma_4 = \frac{im^3 V_1}{\nu^{*3}} \langle \theta (S' + G) \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае  $\langle \theta \theta'^2 \rangle \neq 0$  уравнение (16) можно переписать в виде:

$$\frac{3}{\nu^{*2}} \langle \theta \theta'^2 \rangle \left( im^3 \langle \varphi_1^1 \rangle - \frac{d^3 \langle \varphi_1^1 \rangle}{dz^3} \right) = f(z), \quad (18)$$

где  $f(z)$  — известная функция.

Из условия разрешимости уравнения (18) находим  $\nu_2$  и  $\sigma_4$ . Выражения для  $\nu_2$  и  $\sigma_4$  получаются из (17) заменой  $V_1$  на  $\langle V_1 \rangle$ , а

$$\langle \varphi_1^1 \rangle = c(z) e^{-imz},$$

где  $c(z)$  находится из уравнения ( $\lambda_{1,2} = \frac{m}{2} (\pm \sqrt{3} + 3i)$ ):

$$c'(z) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^z [e^{\lambda_1(z-s)} - e^{\lambda_2(z-s)}] f(s) ds + a e^{\lambda_1 z} + b e^{\lambda_2 z},$$

$$\text{где } a = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda_1(2\pi-s)} - 1}{e^{\lambda_1 2\pi} - 1} f(s) ds, \quad b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda_2(2\pi-s)} - 1}{e^{\lambda_2 2\pi} - 1} f(s) ds.$$

Из условия разрешимости уравнения (3) при  $\alpha^4$  получаем  $\varphi_2^2 = 0$ .

**Заключение.** Для основного течения (1) в случае  $\langle \theta \theta'^2 \rangle \neq 0$ , а также если  $\langle \theta \theta'^2 \rangle = 0$  и  $V_1 = \text{const}$  показано, что при уменьшении вязкости, происходит колебательная потеря устойчивости. Найдены главные члены асимптотики линейной задачи устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05–01–00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ–5747.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости двумерного стационарного пространственно-периодического течения относительно длинноволновых возмущений // Совр. пробл. мех. сплош. среды: Тр. V Междунар. конф. Ростов н/Д, 2000. Т. 1. С. 119–123.
- [5] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Там же. С. 157–161.
- [6] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [7] Мелехов А. П., Ревина С. В. Неустойчивость двумерных стационарных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 170–173.

**Melekhov A.P., Revina S.V.** *The stability problem of 3-D streams of viscous flow with respect to long-wave length disturbances.* We consider the stability problem of stationary 3-D spatially-periodic stream  $\mathbf{v} = (\alpha V_1(z), 0, V_3(x_1))$ ,  $\langle V_3 \rangle = 0$ , with respect to long-wave length disturbances, when one of the periods goes to infinity (the wave number  $\alpha$  goes to zero). The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained. When nondegeneracy conditions are fulfilled the oscillating loss of stability takes place.

# МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СТЕРЖНЕ С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

Милосердова И. В.\* , Потапов И. А.\*\* , Филичев М. Е.\*\*

\* Нижегородский государственный технический университет

\*\* Нижегородский филиал Института машиноведения РАН

Рассматриваются процессы модуляции продольных колебаний в упругом стержне, один конец которого закреплен жестко, а другой опирается на нелинейно-упругую пружину. С помощью метода многих масштабов и процедуры усреднения удастся избавиться от быстрых осцилляций и получить эволюционные уравнения в частных производных. Эти уравнения описывают нелинейную взаимосвязь между быстрыми и медленными движениями в колебательной системе и её влияние на эффекты модуляции.

Рассмотрим продольные колебания в стержне, один торец которого) жестко заделан, а другой нагружен на нелинейно-упругую пружину. В безразмерных переменных динамические процессы в такой системе описываются волновым уравнением с нелинейным граничным условием

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \mu u_x + u + \alpha u^3|_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь параметр  $\mu$  определяет отношение жесткости стержня к жесткости линейной пружины, а  $\alpha$  — параметр нелинейности, которые считаются малыми величинами. Волновое поле представим в виде суперпозиции бегущих волн

$$u(x, t) = f(t + x) - f(t - x) \tag{2}$$

Тогда краевая задача (1) сведется к нелинейному дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом нейтрального типа:

$$\mu \frac{d}{dt} [f(t + 1) + f(t - 1)] + [f(t + 1) - f(t - 1)] + \alpha [f(t + 1) - f(t - 1)]^3 = 0 \tag{3}$$

Оно описывает взаимодействие бегущих волн на нелинейно упругой границе. В системе конечной длины особенности колебаний во многом определяются характером спектра ее собственных частот. В рассматриваемом случае собственные частоты находятся из уравнения  $\tan \omega = -\mu \omega$ . При  $\mu \sim 1$  собственные частоты не эквидистантны и гармоники, возникающие из-за взаимодействия волны с нелинейной границей, не будут находиться в резонансе с собственными колебаниями резонатора. В итоге установившиеся в колебания будут квазигармоническими. При  $\mu \ll 1$  первые собственные частоты можно считать кратными. В этом случае гармоники основного колебания будут находиться в резонансе частотами с собственными колебаниями резонатора. Последнее приводит к возбуждению большого числа сфазированных между собой гармоник и установлению колебаний импульсной

формы [1,2]. При отражении волны от нелинейно-упругой границы возникают гармоники и при этом каждая гармоника приобретает сдвиг фаз зависящий от её частоты. Наличие частотно-зависимого сдвига фаз между гармониками не позволяет сигналу превратиться в бесконечно узкий импульс. Следовательно, зависимость сдвига фаз от частоты волны можно рассматривать как дисперсию. Дисперсия резонатора проявляется слабо в двух предельных случаях:  $\mu \gg 1$  и  $\mu \ll 1$ . В первом случае можно воспользоваться методом, изложенным в работе [2], здесь же мы рассмотрим второй случай [3], для которого развитый в [2] подход неприменим.

Периодические волны не изменяют своей формы при отражении от границ системы и испытывают лишь общую задержку на время взаимодействия с границей. Такие процессы являются аналогами стационарных волн в нелинейных средах с дисперсией [4]. Период волны представим в виде  $T = T_n (1 + \nu)$ , где  $T_n = 2\pi/\omega_n$  совпадает с периодом одного из собственных колебаний системы, а  $\nu$  — нелинейная расстройка, которая должна быть определена в процессе решения задачи. При  $\mu \ll 1$  время пробега волны вдоль системы близко к целому числу полупериодов стационарной волны, поэтому функции, входящие в уравнение (5), можно преобразовать к виду:

$$f(t \pm 1) = f[t \pm (nT/2 - \Delta)], \quad \Delta = 1 - nT/2 = \mu \left[ 1 - \frac{3}{4} \mu^2 \nu^2 \omega_1 \right] + \nu(1 + \nu),$$

где  $\Delta$  — малое отклонение аргумента искомой функции. Введем новое время  $\zeta = t + nT/2$ , тогда из (3) получим функционально-дифференциальное уравнение с малым отклонением аргумента:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{dt} [f(\zeta - \Delta) + f(\zeta + \Delta)] + f(\zeta - \Delta) - \\ - f(\zeta + \Delta) + \alpha [f(\zeta - \Delta) - f(\zeta + \Delta)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Его решение описывает форму волны на одном периоде, которые после отражения от нелинейной границы не изменяют своей формы, а испытывают лишь общую задержку на время  $2\Delta$ . Будем считать, что нестационарные процессы также удовлетворяют уравнению (4), но медленно изменяются с течением времени. Это означает, что искомая функция будет зависеть от двух переменных  $\zeta$  и  $\tau = \varepsilon\zeta$ , ( $\varepsilon \ll 1$ ) имеющих различные масштабы [4,5]. Тогда колебания будут описываться уравнением

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\zeta} [f(\zeta - \Delta, \tau - \varepsilon\Delta) + f(\zeta + \Delta, \tau + \varepsilon\Delta)] + f(\zeta - \Delta, \tau - \varepsilon\Delta) - \\ - f(\zeta + \Delta, \tau + \varepsilon\Delta) + \alpha [f(\zeta - \Delta, \tau - \varepsilon\Delta) - f(\zeta + \Delta, \tau + \varepsilon\Delta)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Разложим функцию  $f(\zeta, \tau)$  и её производную в двойные ряды Тейлора. Параметр  $\varepsilon$  характеризует медленность изменения огибающей по сравнению с периодом колебаний и заранее его связь с величиной  $\Delta$ , вообще говоря, не очевидна. Чтобы учесть эффекты нелинейной модуляции колебаний положим  $\varepsilon \sim \Delta^2$  и удержим в разложении члены с порядком малости не выше чем  $\Delta^3$ . В результате получим

уравнение в частных производных, описывающее модуляцированные колебания в резонаторе

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial^3 f}{\partial \zeta^3} - \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^3 = 0; \quad (6)$$

Здесь обозначено  $\lambda = 4\alpha\Delta^3/(\mu - \Delta)$ , а  $\sigma = 1/2(\mu\Delta^2 - \Delta^3/3)/(\mu - \Delta)$  — параметр, характеризующий дисперсию системы. Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение (10) описывает профиль стационарной волны [2]. Решение уравнения (6) будем искать в виде квазистационарной волны с медленно меняющейся амплитудой и фазой

$$f(\zeta, \tau) = A(\zeta, \tau) F[\zeta + \varphi(\zeta, \tau)] \quad (7)$$

Здесь  $F(\eta)$  — периодическая несущая волна, удовлетворяющая уравнению (5),  $A$  — амплитуда, а  $\varphi$  — модуляция фазы несущей волны. Подставим (7) в (6) и усредним по периодическим функциям [6], в результате получим два уравнения для амплитуды и фазы:

$$A_\tau + UA_\zeta = g_1 \left( A_\zeta \delta + \frac{1}{2} A \delta_\zeta \right), \quad (8)$$

$$\delta_\tau + U\delta_\zeta = g_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{A_\zeta \zeta}{A} \right) + 2g_3 AA_\zeta - g_1 \delta \delta_\zeta,$$

где обозначено  $\partial\varphi/\partial\zeta = \delta$ ,  $U = \gamma^{-1} [(\mu - \Delta) \langle F_\eta^2 \rangle - 3/2\Delta^2 (\mu - \Delta/3) \langle F_{\eta\eta}^2 \rangle]$  — параметр имеющий смысл скорости волны модуляции, а  $g_{1,2,3}$  — коэффициенты содержащие информацию о несущей волне. Угловые скобки обозначают среднее по аргументу. Уравнения (8) хорошо известны в нелинейной теории модуляции [4]. Получить общее решение нелинейной системы (8) нельзя, однако можно проанализировать так называемые стационарные "волны огибающих". Представляя  $A$  и  $\delta$  как функции "бегущей" переменной  $z = x - Vt$  (где  $V = \text{const}$  — скорость волны огибающей) получаем:

$$(U - w) A_z - g_1 \left( A_z \delta + \frac{1}{2} A \delta \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\delta}{dz} \left[ (U - w) \delta - \frac{1}{2} g_1 \delta^2 - g_2 \left( \frac{A_{zz}}{A} \right) - g_3 A^2 \right] = 0.$$

Из первого уравнения находится связь между амплитудой и частотной расстройкой

$$\delta = \frac{D_1}{A^2} + \frac{(U - w)}{g_1}, \quad (10)$$

где  $D_1$  — постоянная интегрирования. Подставляя (10) во второе уравнение (9) и интегрируя его по  $z$ , получаем уравнение для амплитуды:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + B_1 A + B_2 A^3 + \frac{B_3}{A^3} = 0 \quad (11)$$

где обозначено  $B_1 = D_2 - 1/2(U - V)^2/g_1g_2$ ,  $B_2 = D_2 - 1/2(U - V)^2/g_1g_2$ ,  $B_3 = D_1^2g_1/2g_2$ ; а  $D_2$ - еще одна постоянная интегрирования. Заметим, что входящие в уравнение коэффициенты  $B_1$  и  $B_3$  по существу являются произвольными, и лишь коэффициент при кубическом слагаемом определяется параметрами несущей волны. Уравнение (11) описывает различные типы волн огибающих, поэтому дальнейший анализ задачи сводится к исследованию его решений в зависимости от знака нелинейности и постоянных интегрирования  $D_1$  и  $D_2$  [1,2]. Заметим, что при стремлении амплитуды к нулю, возникает особенность, соответствующая скачку производной от фазы волны. Чтобы избавиться от нее, нужно положить  $D_1 = 0$ , тогда в уравнении (11) пропадает слагаемое, содержащее нелинейность в отрицательной степени. В этом случае без ограничения общности можно считать, что фазовая модуляция в несущей волне отсутствует и скорость волны амплитудной огибающей равна  $V = U$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-02-17156)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Сложные режимы генерации импульсов в резонаторе с нелинейными границами //Изв. Вузов. Радиоэлектроника. 1979 Т. 22. № 11 С. 88–89
- [2] *Милосердова И.В., Потапов А.И.* Продольные колебания в стержне с нелинейно упругим закреплением //Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1980. № 6. С. 178–180.
- [3] *Милосердова И.В., Потапов И. А.* Модуляция колебаний в упругой системе с нелинейной границей.// IX Всероссийский съезд по теор. и прикл. мех. Ан-нот. докл. Т. 1. Н.Новгород. Изд-во Нижегород. ун-та. 2006. С. 88
- [4] *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит. 2003. 400 с.
- [5] *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [6] *Рабинович М.И.* О методе усреднения по стационарным волнам // Изв. Вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 2. С. 214–223.

**Miloserdova I.V., Potapov I.A., Filichev M.E** *Modulated oscillations in rod with nonlinear boundary.* Modulation of longitudinal oscillations in an elastic rod, which one end is rigidly fixed, and another one is supported by a non-linear elastic spring, is considered. Using the multiscale method and averaging, one can derive the evolution equations in partial derivatives. These equations describe the nonlinear correlation between fast and slow motions in the system. Amplitudes and phases of traveling waves can substantially vary on intervals, which are more larger than their temporal scales.

# ДЕЙСТВИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД С ВЫРАБОТКОЙ И ТРЕЩИНАМИ ВОКРУГ НЕЕ

Нескородев Н. М., Нескородев Р. Н.

*Донецкий национальный университет, Украина*

Проведение подземных выработок связано с разрушением горных пород, которое сопровождается образованием вокруг выработок трещин. Учет трещиноватости изменяет концентрацию напряжений вокруг выработки по сравнению со случаем, когда трещин в массиве нет. Рассмотрена протяженная выработка глубокого заложения. Она имеет круговое сечение с сетью трещин радиального направления. Трещины могут быть незаполненные и заполненные естественно или искусственно нагнетаемым заполнителем. Для моделирования трещин используются вытянутые эллипсы. Действие заполнителя на стенки трещины моделируется нормальными и касательными усилиями, создающими внутреннее давление. Массив подвергается воздействию длинных сейсмических волн. В силу большого заглубления выработки в работе не учитывается взаимодействие поверхностных и отраженных от дневной поверхности волн. Динамическая задача взаимодействия выработки с длинными волнами сводится к ряду статических задач о напряженном состоянии массива с выработкой.

**Постановка задачи. Основные соотношения.** Массив горных пород в виде анизотропного упругого полупространства отнесем к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Начало системы поместим на большой глубине  $H$ , ось  $Ox_2$  направим вверх, а плоскость  $Ox_1x_3$  параллельна горизонтальной плоскости, ограничивающей полупространство. Массив ослаблен протяженной выработкой кругового сечения  $L_0$ , вокруг которой имеется сеть трещин радиального направления с контурами  $L_r$  ( $r = \overline{1, m}$ ). Выработка пройдена в направлении оси  $Ox_3$  на глубине  $H$ . Предполагаем линейную связь между напряжениями и деформациями, выраженную обобщенным законом Гука [1,2]:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik}\sigma_k \quad \text{или} \quad \sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik}\varepsilon_k \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (1)$$

Массив подвергается сейсмическому воздействию так, что напряжения и перемещения вдали от краев выработки зависят только от координат  $x_1$  и  $x_2$ . В этом случае массив находится в условиях обобщенной плоской деформации (ОПД) [1]. Уравнения движения в перемещениях в условиях ОПД без учета объемных сил в безразмерных координатах можно записать так [2]:

$$L_{i1}u_1 + L_{i2}u_2 + L_{i3}u_3 = p^2 \partial^2 u_i / \partial \tau^2 \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Здесь  $p^2 = \omega^2 \rho R^2 / E$ ;  $\tau = \omega t$ ;  $R$  — характерный линейный размер.

Пусть в направлении вектора  $\bar{n} = (l_1, l_2, 0) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  движется плоская сейсмическая волна. Здесь  $\theta$  угол между осью  $Ox_1$  и направлением движения волны. Состояние массива представим состоящим из двух составляющих:



1. поля смещений и напряжений, которое существует в нетронutom массиве;
2. поля смещений и напряжений, которое формируется за счет выработок.

**Смещения и напряжения в нетронutom массиве.** Смещения в нетронutom массиве, удовлетворяющие уравнениям (2), представим в форме:

$$u_n^0 = \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} c_k \sin(\lambda_k \bar{x}_1) \sin(\tau), \quad \lambda_k = \omega R / v_k. \quad (3)$$

Здесь  $v_k$  скорости распространения волн в направлении вектора  $\bar{n} = (l_1, l_2, 0)$ ;  $\alpha_{nk}$  — собственные векторы;  $c_k$  — произвольные постоянные;  $\bar{x}_1 = x_1 l_1 + x_2 l_2$ .

Из решения (3) видно, что в массиве в любом заданном направлении распространяются три волны. Волну с наибольшей скоростью распространения  $v_1$  называют квазипродольной, а две другие — квазипоперечными (их скорости —  $v_2, v_3$ ). Напряжения, вызванные перемещениями (3), определим из уравнений (1):

$$\sigma_p^0 = \pm \frac{g}{\omega} \sum_{k=1}^3 P_{kp} \frac{r_k}{v_k} \cos(\lambda_k \bar{x}_1) \sin(\tau). \quad (4)$$

Здесь  $P_{kp} = l_1(A_{p1}\alpha_{1k} + A_{p6}\alpha_{2k} + A_{p5}\alpha_{3k}) + l_2(A_{p6}\alpha_{1k} + A_{p2}\alpha_{2k} + A_{p4}\alpha_{3k})$   $p = \overline{1, 6}$ ; постоянные  $c_k$ , входящие в представления (3), находятся через коэффициенты сейсмичности  $K_n$  в направлении осей  $x_n$  и определяются из соотношений [3]

$$c_k = \pm \frac{g}{\omega^2 R} r_k, \quad \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} r_k = K_n. \quad (5)$$

Формулы (3) и (4) дают возможность определить значения перемещений и напряжений в нетронutom массиве в зависимости от упругих свойств пород, направления распространения волны, а также от балльности землетрясения.

**Смещения и напряжения учитывающие влияние выработок.** Поле перемещений, формирующееся за счет выработок, описывается функциями  $u_i(x_1, x_2, \tau) = u_i^*(x_1, x_2) \sin(\tau)$ , удовлетворяющими уравнениям движения (2).

Сейсмические волны отличаются большой длиной, существенно превышающей размеры поперечных сечений выработок. Период колебаний частиц породы  $T$  при землетрясениях вдали от очага составляет  $1 \div 2$  сек. [4]. Поэтому нетрудно определить, что величина  $p^2$  будет малой, так как размер  $R$  поперечного сечения выработок составляет 5-6 м, а скорость распространения волны  $v$  имеет значение на два и более порядка выше. Это позволяет при интегрировании уравнений (2) использовать метод малого параметра. Таким параметром является величина  $p^2$ . Разложим функции  $u_i^*$  в ряды по параметру  $p^2$ :

$$u_i^* = u_{i0}^* + p^2 u_{i1}^* + \dots + p^{2n} u_{in}^*. \quad (6)$$

Для функций  $u_{ik}$  этого разложения, из уравнений (2) находим соотношения

$$L_{k1} u_{10}^* + L_{k2} u_{20}^* + L_{k3} u_{30}^* = 0, \quad (7)$$

$$L_{k1} u_{1r}^* + L_{k2} u_{2r}^* + L_{k3} u_{3r}^* = -u_{k,r-1}^* \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Общее представление решения уравнений (7) находим через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных [3]

$$u_{n0}^* = 2Re \sum_{j=1}^3 R_{jn} \Psi_j(z_j). \quad (9)$$

При исследовании напряженно-деформированного состояния массива пород вблизи выработок ограничимся в представлении (6) слагаемым, содержащим малый параметр в нулевой степени, т. е.  $u_n^* = u_{n0}^*$ . В соответствии с найденным решением (9), представления для напряжений (1) можно записать так [3]:

$$\sigma_p^* = 2Re \sum_{k=1}^3 S_{pk} \Phi_k(z_k) \quad (p = \overline{1,6}), \quad \Phi_k(z_k) = d\Psi_k/dz_k. \quad (10)$$

Таким образом, поля перемещений и напряжений вблизи выработок определяются как сумма найденных составляющих (3), (4) и (9), (10):

$$u_n = u_n^0 + u_n^* \quad (n = \overline{1,3}), \quad \sigma_p = \sigma_p^0 + \sigma_p^* \quad (p = \overline{1,6}). \quad (11)$$

**Граничные условия.** Для определения напряжений в массиве с неподкрепленной выработкой и трещинами нужно определить функции  $\Phi_k(z_k)$ . Они находятся из граничных условий на контурах выработки  $L_0$  и трещин  $L_r$  [5]:

$$\begin{aligned} n_{1r}\sigma_1 + n_{2r}\sigma_6 &= n_{1r}P_r - n_{2r}T_r, \\ n_{1r}\sigma_6 + n_{2r}\sigma_2 &= n_{2r}P_r + n_{1r}T_r, \\ n_{1r}\sigma_5 + n_{2r}\sigma_4 &= N_r \quad (r = \overline{0,m}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $n_{1r} = \cos(n_r, x_1)$ ,  $n_{2r} = \cos(n_r, x_2)$ ,  $n_r$  — внешняя нормаль к контуру  $L_r$ ;  $P_r$  — нормальная,  $T_r$  и  $N_r$  — касательные составляющие усилий, действующих со стороны заполнителя на стенки  $r$ -той трещины.

**Численные исследования.** Вычисления напряженно-деформированного состояния проводились для массива горных пород с выработкой, вокруг которой образовалась сеть радиальных трещин в зависимости от количества трещин, их длины, расположения, материала, из которого сложены горные породы и степени заполнения трещин. В качестве материала выбирался Алевролит1, Алевролит2 и гранит изотропный, которые будем обозначать через А1, А2 и ГИ соответственно. Упругие постоянные этих материалов приведены в работе [5]. При проведении исследований для изотропных сред были использованы алгоритмы, разработанные для анизотропных материалов с учетом методики, предложенной в работе [6]. Рассматривался массив, ослабленный выработкой кругового сечения с радиусом  $r = 1.5$  м. Количество  $m$  и длина  $l$  трещин варьировались. Начало и конец  $n$ -той трещины ( $n = \overline{1,m}$ ) располагаются в точках плоскости  $(x_{1n}, x_{2n})_{нач} = (\cos(\frac{2n-1}{m}\pi), \sin(\frac{2n-1}{m}\pi))r$ ,  $(x_{1n}, x_{2n})_{кон} = (\cos(\frac{2n-1}{m}\pi), \sin(\frac{2n-1}{m}\pi))(r+l)$ .

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов для выработок, пройденных в породе, составленной из материала А2. В таблице 1 приведены результаты расчетов для различного количества трещин, когда задавались: длина трещины  $l = 2$

метра;  $T_n = N_n = 0$ , а  $P_n = [-1, -0.5, 0]$  МПа — варьировалось. Верхняя строка для каждого значения  $v_k$  — это максимальные  $\max(\sigma_\theta)$ , а нижняя — минимальные  $\min(\sigma_\theta)$  значения напряжений на площадках, нормальных к контуру выработки в МПа.

Таблица 1

|              |       | $m$   |       |       |       |       |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|              |       | 0     | 2     | 6     | 10    | 14    |
| $P_n = -1$   | $v_1$ | -0.35 | -0.23 | -0.97 | -0.97 | -0.97 |
|              | $v_2$ | -3.97 | -1.05 | -1.51 | -1.26 | -1.14 |
|              |       | 1.03  | 0.39  | -0.99 | -0.95 | -0.96 |
| $P_n = -0.5$ | $v_1$ | -0.35 | -0.13 | -0.39 | -0.48 | -0.48 |
|              | $v_2$ | -3.97 | -0.50 | -0.66 | -0.61 | -0.56 |
|              |       | 1.03  | 0.53  | -0.48 | -0.46 | -0.48 |
| $P_n = 0$    | $v_1$ | -0.35 | 0.18  | 0.27  | 0.06  | 0.01  |
|              | $v_2$ | -3.97 | -0.04 | 0     | 0     | -0.02 |
|              |       | 1.03  | 0.69  | 0.11  | 0.03  | 0.02  |
|              |       | -1.03 | -0.69 | -0.11 | -0.03 | -0.02 |

В таблице 2 для тех же параметров приведены максимальные и минимальные значения нормальных к контуру перемещений  $u_n$ , заданные в метрах.

Таблица 2

|              |       | $m$    |        |        |        |        |
|--------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|              |       | 0      | 2      | 6      | 10     | 14     |
| $P_n = -1$   | $v_1$ | -0.002 | 0      | 0.012  | 0.012  | 0.012  |
|              | $v_2$ | -0.009 | -0.015 | -0.014 | -0.015 | -0.015 |
|              |       | 0.004  | 0.011  | 0.021  | 0.025  | 0.025  |
| $P_n = -0.5$ | $v_1$ | -0.002 | 0.002  | 0.006  | 0.005  | 0.004  |
|              | $v_2$ | -0.009 | -0.018 | -0.018 | -0.019 | -0.020 |
|              |       | 0.004  | 0.008  | 0.017  | 0.020  | 0.019  |
| $P_n = 0$    | $v_1$ | -0.002 | 0.004  | -0.001 | -0.003 | -0.004 |
|              | $v_2$ | -0.009 | -0.022 | 0.019  | -0.023 | -0.024 |
|              |       | 0.004  | 0.006  | 0.014  | 0.015  | 0.014  |
|              |       | -0.004 | -0.006 | -0.014 | -0.015 | -0.014 |

Набегающая волна характеризуется параметрами:  $T=1$ сек;  $K=0.1$ , что соответствует землетрясению силой в 9 баллов;  $\theta = 0^0$ ; скорости распространения  $v_1 = 2537$ м/сек и  $v_2 = 686.2$ м/сек; соответствующие скоростям напряжения в нетронутом массиве  $\sigma_{p1}^0 = [-0.9904, -0.3013, -0.5316, 0, 0, 0]$  МПа,  $\sigma_{p2}^0 = [0, 0, 0, 0, 0, -0.2678]$  МПа.

Данные таблицы 1 показывают, что с увеличением количества трещин, значения максимальных и минимальных напряжений сближаются, образуя равномерное поле напряжений вокруг выработки. Трещины без заполнителя приводят к

появлению зоны растягивающих напряжений и, по существу, к отсутствию напряжений на контуре выработки. Однако, как следует из данных таблицы 2, величины нормальных к контуру перемещений возрастают, что приводит к более интенсивному заполнению выработанного пространства, особенно в зонах кровли и почвы. Это свидетельствует о разрушении пород у выработки.

Исследование полей напряжений и перемещений для других материалов и длин трещин к качественным изменениям по сравнению с приведенными в таблицах данными не привело.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
- [2] *Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н.* Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. Донецк: ДонНУ, 2003. 148 с.
- [3] *Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н.* Напряженное состояние горного массива с выработками при воздействии сейсмических волн // Вестник ДонНУ. Сер. А. Природничі науки. 2004. № 1. С. 119–124.
- [4] *Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К.* Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 212 с.
- [5] *Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н.* Напряжения в массиве горных пород с выработкой и трещинами вокруг неё // Материалы XIV Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках" (Крым, Алушта, 20-26 сентября 2004 г.). Симферополь. 2004. С. 109–115.
- [6] *Космодамианский А.С., Нескородев Н.М.* Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикладная математика и механика. 1998. Том 62. No 2. С. 344–346.

**Neskorodev N.M., Neskorodev R.N.** *Action of seismic waves in the rock mass with the excavation and cracks around of her.* Article is devoted to research of a stress state of a massif about an extended excavation with a network of cracks of the radial direction which are taking place on the big depth. The massif is subject to influence concerning long seismic waves which represent the fluctuations raised by earthquakes or explosions. The dynamic problem of interaction excavation with long waves is reduced to a number of static problems about a mechanical condition of a rock mass with a excavation and cracks. It is achieved by use of small parameter at integration of the equations of movement. Examples of numerical researches are resulted.

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ УДАР ДИСКА О НЕОДНОРОДНУЮ ЖИДКОСТЬ

**Островская И. В.**

*Ростовский государственный университет*

В работе рассматривается центральный удар диска о неоднородную жидкость. С помощью метода вариационных оценок получены оценки присоединенной массы в случае экспоненциальной стратификации  $\rho = \rho_0 e^{-2\kappa z}$ . А также асимптотика присоединенной массы диска при ударе о слабо стратифицированную ( $\kappa \rightarrow 0$ ) жидкость.

В работе, на примере круглого диска, рассматривается удар о слой неоднородной, вертикально стратифицированной жидкости (плотность  $\rho = \rho(z)$ ). Импульсное давление  $\varphi$  —  $\rho$ -гармоническая функция, удовлетворяющая смешанным краевым условиям Дирихле–Неймана

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) &= \frac{1}{\rho} \Delta \varphi - \frac{\rho_z}{\rho^2} \varphi_z = 0 \\ \varphi \Big|_{S_f} &= 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_r} = V_n, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_b} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $S_r = \{(r, \theta, z) | z = 0, r \leq a, \theta \in [0, 2\pi]\}$  — смоченная поверхность диска;  $S_f = \{(r, \theta, z) | z = 0, r > a, \theta \in [0, 2\pi]\}$  — свободная поверхность жидкости;  $S_b = \{(r, \theta, z) | z = h\}$  — твердое дно.  $V_n$  нормальная компонента скорости пластинки.

Введем в рассмотрение два функционала: интеграл Дирихле

$$\mathcal{D}(\varphi) = \int_D \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi)^2 dx \quad (2)$$

и полный функционал энергии

$$\mathcal{J}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi)^2 dx + \int_{S_r} \varphi V_n dS = \frac{1}{2} \mathcal{D}(\varphi) + \int_{S_r} \varphi V_n dS. \quad (3)$$

Отметим, что интеграл Дирихле от решения  $\varphi_*$  задачи (1) в случае, когда  $V_n = -1$ , имеет смысл присоединенной массы диска.

Имеют место оценки интеграла Дирихле снизу  $\mathcal{D}(\varphi_*)$

$$-2\mathcal{J}(\varphi_1) \leq \frac{\left( \int_{S_r} \varphi_1 V_n dS \right)^2}{\mathcal{D}(\varphi_1)} \leq \mathcal{D}(\varphi_*). \quad (4)$$

Здесь  $\varphi_1$  — пробная функция, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \varphi_1 \right) = 0, \quad \varphi_1 \Big|_{S_f} = 0. \quad (5)$$

Справедлива также оценка интеграла Дирихле  $\mathcal{D}(\varphi_*)$  сверху

$$\mathcal{D}(\varphi_*) \leq \mathcal{D}(\varphi_2). \quad (6)$$

Функция  $\varphi_2$  —  $\rho$ -гармоническая и удовлетворяет условиям на твердых стенках (подвижных и неподвижных)

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \varphi_2 \right) = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_r} = V_n, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_b} = 0. \quad (7)$$

Подробно метод двусторонних вариационных оценок изложен в статье В.И. Юдовича [1]. Все неравенства представленные в (4), (6) точны в том смысле, что равенства имеют место тогда и только тогда, когда пробные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  совпадают с решением  $\varphi_*$  задачи (1). Таким образом, интеграл Дирихле  $\mathcal{D}(\varphi_*)$ , а вместе с ним и присоединенная масса, является максимумом (минимумом) некоторых функционалов, и для его вычисления используется вариационный метод Ритца. Доопределим  $\varphi_1$  дополнив задачу (5) условием Дирихле на границе  $S_r$ , а для  $\varphi_2$  — поставим в свою очередь условие Неймана  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$  на  $S_f$ . В последнем случае необходимо также потребовать выполнения условия разрешимости задачи Неймана. Далее будем полагать

$$\varphi_1 \Big|_{S_r} = \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} (c_0 + c_1 r^2 + c_2 r^4), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_f} = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \arcsin \frac{a}{r} \right). \quad (8)$$

Такой выбор пробных функций обусловлен тем, что известно точное решение задачи об ударе круглого диска о слой однородной жидкости бесконечной глубины. Выбор его в качестве главного приближения дает нам лучшие результаты в случае слабо стратифицированной жидкости или слоя большой глубины. Число вариационных параметров  $c_i$ , говорит о том, что далее для оценки снизу используется три координатные функции.

#### Неоднородная, экспоненциально стратифицированная жидкость.

Уравнение импульсного давления (1) при ударе об экспоненциально стратифицированную  $\rho = e^{2\kappa z}$  жидкость примет вид

$$\Delta \varphi - 2\kappa \varphi_z = 0. \quad (9)$$

Для определения пробной функции  $\varphi_1$  имеем задачу Дирихле с условиями

$$\varphi \Big|_{S_f} = 0, \quad \varphi_1 \Big|_{S_r} = \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} (c_0 + c_1 r^2 + c_2 r^4). \quad (10)$$

Ее решение в случае слоя бесконечной глубины имеет вид

$$\varphi(r, z) = 2\pi \int_0^{+\infty} \alpha f(\alpha) e^{-z(\sqrt{\kappa^2 + \alpha^2} - \kappa)} J_0(\alpha r) d\alpha, \quad f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi_1(r, 0) J_0(\alpha r) r dr. \quad (11)$$

Коэффициенты  $c_0, c_1, c_2$  определим из условия максимума функционала  $\mathcal{J}(\varphi_1)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\varphi_1)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (12)$$

а затем подставим их во вторую оценку снизу (4)

$$\frac{\left( \int_{S_r} \varphi_1 dS \right)^2}{\mathcal{D}(\varphi_1)} \leq \mathcal{D}(\varphi_*).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varphi_1) &= 8\pi^3 \int_0^\infty \alpha f^2(\alpha) \left( \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2} - \varkappa \right) d\alpha \\ \int_{S_r} \varphi_1 dS &= \frac{4}{3} a^3 c_0 + \frac{8}{15} a^5 c_1 + \frac{32}{105} a^7 c_2 \end{aligned}$$

Тогда для определения  $c_0, c_1, c_2$  имеет место система линейных уравнений

$$8\pi^3 \int_0^\infty \alpha f(\alpha) \frac{\partial f(\alpha)}{\partial c_i} \left( \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2} - \varkappa \right) d\alpha - \int_{S_r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_i} dS, \quad i = 0, 1, 2. \quad (13)$$

Решая эту систему, и подставляя найденные параметры в выше приведенные неравенства, получим оценки присоединенной массы (см. таблицу 1).

Сверху присоединенная масса диска  $\varphi_*$  оценивается интегралом Дирихле от пробной функции  $\varphi_*$ , которую находим решая задачу Неймана

$$\Delta \varphi_2 - 2\varkappa \varphi_z = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_r} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{S_f} = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \arcsin \frac{a}{r} \right). \quad (14)$$

Интеграл Дирихле  $\mathcal{D}(\varphi_2)$  равен

$$\mathcal{D}(\varphi_1) = 8\pi^3 \int_0^\infty \alpha f^2(\alpha) \left( \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2} - \varkappa \right) d\alpha, \quad (15)$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \varkappa^2} - \varkappa} \int_0^\infty r \frac{\partial \varphi_2(r, 0)}{\partial n} J_0(\alpha r) dr$$

Отметим, что метод вариационных оценок помимо численных результатов дает возможность также получить асимптотические оценки. Ограничиваясь главным приближением, т.е. в случае  $c_0 = 1, c_1, c_2 = 0$ , получим при  $k \rightarrow 0$  следующие асимптотические неравенства

$$m \gtrsim \frac{4}{3} a^3 + \frac{2}{\pi} a^4 k + \frac{45 - 4\pi^2}{15\pi^2} a^5 k^2 - \frac{8\pi^2 - 45}{40\pi^5} a^6 k^3 + O(k^4) \quad (16)$$

$$m \lesssim \frac{4}{3} a^3 + \frac{2}{\pi} a^4 k + \frac{4}{15} a^5 k^2 + O(k^4) \quad (17)$$

Таблица 1.

| $k$ | $c_0$  | $c_1$   | $c_2$   | $\mathcal{J}(\varphi_1)$ | $\frac{\left(\int_{S_r} \varphi_1 V_n dS\right)^2}{\mathcal{D}(\varphi_1)}$ | $\mathcal{D}(\varphi_2)$ |
|-----|--------|---------|---------|--------------------------|---|--------------------------|
| 0.1 | 1.0564 | -0.0198 | -0.0019 | 1.3962                   | 1.3962  | 1.3996                   |
| 0.3 | 1.1713 | -0.0521 | -0.0189 | 1.5179                   | 1.5179  | 1.5459                   |
| 0.5 | 1.2906 | -0.0889 | -0.0372 | 1.6333                   | 1.6338  | 1.7081                   |
| 0.7 | 1.4139 | -0.1301 | -0.0567 | 1.7415                   | 1.7432  | 1.8831                   |
| 1   | 1.6051 | -0.1981 | -0.0889 | 1.8892                   | 1.8958  | 2.1648                   |

**Слой неоднородной, экспоненциально стратифицированной жидкости.**

В случае, когда слой экспоненциально стратифицированной  $\rho = e^{2kz}$  жидкости имеет конечную глубину  $h$  решение уравнения (1) примет вид

$$\varphi(r, z) = 2\pi \int_0^{+\infty} \alpha f(\alpha) Z(\alpha, z) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (18)$$

$$Z(\alpha, z) = \frac{e^{kz} [\sqrt{\alpha^2 + k^2} \operatorname{ch}(h-z) \sqrt{\alpha^2 + k^2} + k \operatorname{sh}(h-z) \sqrt{\alpha^2 + k^2}]}{\sqrt{\alpha^2 + k^2} \operatorname{ch} h \sqrt{\alpha^2 + k^2} + k \operatorname{sh} h \sqrt{\alpha^2 + k^2}}$$

Решение (18) также удовлетворяет условию на твердой стенке  $S_b = \{(r, \theta, z) | z = h\}$ .

Пробные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будем из условий (5), (7), (8). Оценки присоединенной массы в этом случае принимают вид

$$\mathcal{D}(\varphi_*) \geq \frac{\left(\frac{4}{3}a^3 c_0 + \frac{8}{15}a^5 c_1 + \frac{32}{105}a^7 c_2\right)^2}{\mathcal{D}(\varphi_1)} \quad \mathcal{D}(\varphi_*) \leq -8\pi^3 \int_0^{\infty} \alpha^2 f_2^2(\alpha) Z'(\alpha, 0) d\alpha$$

$$\mathcal{D}(\varphi_1) = -8\pi^3 \int_0^{\infty} \alpha f_1^2(\alpha) Z'(\alpha, 0) d\alpha \quad f_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi_1(r, 0) J_0(\alpha r) r dr, \quad (19)$$

$$f_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{Z'(\alpha, 0)} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_1(r, 0)}{\partial n} J_0(\alpha r) r dr,$$

На рисунке 1 приведены результаты вычислений, для  $\varkappa = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$  (им отвечают разные линии) найдены оценки присоединенной массы при различных глубинах слоя. Для оценки снизу (сплошная линия) использованы 3 координатные функции, для оценки (пунктир) сверху одна. Следует отметить, что поправка к нижней оценке при переходе от двух координатных функций к трем незначительна. При росте параметра стратификации, имеет место увеличение присоединенной массы, а при больших глубинах для вычисления присоединенной массы достаточно использовать лишь несколько координатных функций.

Метод вариационных оценок используется также и для вычисления присоединенного момента инерции в случае нецентрального удара. Нормальная компонента скорости  $V_n$  в задаче (1) в этом случае равна  $V_n = -x$ . В качестве нулевой



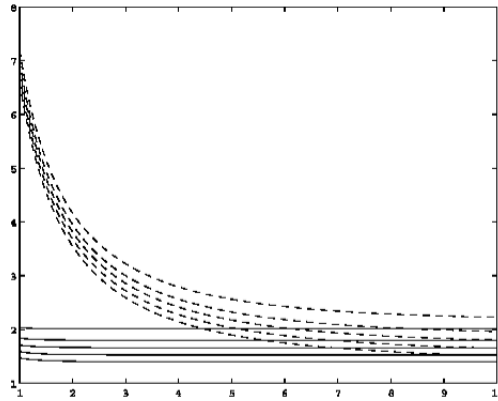


Рис. 1. Присоединенная масса круглого диска при ударе об экспоненциально-стратифицированную жидкость

координатной функции, как и в случае центрального удара берется точное решение задачи удара о слой однородной жидкости бесконечной глубины. Асимптотика при  $k \rightarrow 0$  имеет вид

$$I_x \gtrsim \frac{8}{45}a^5 + \frac{4}{27\pi}a^6k + \frac{2(175 - 12\pi^2)}{2835\pi^2}a^7k^2 - \frac{24\pi^2 - 175}{6804\pi^5}a^8k^3 + O(k^4) \quad (20)$$

$$I_x \lesssim \frac{8}{45}a^5 + \frac{4}{27\pi}a^6k + \frac{8}{945}a^7k^2 + O(k^4). \quad (21)$$

Аналогичные результаты получены и для случая, когда диск  $S_r$  имеет эллиптическую форму.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05–01–00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ–5747.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В.И. О двусторонних вариационных оценках присоединенных масс и моментов инерции // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического Сообщества. №2 (2005).

**Ostrovskaya I. V.** *Estimates of virtual mass in the problem of impact of a disk on a heterogeneous fluid.* In this paper the problem of impact of a disk on a heterogeneous fluid layer is considered. We present upper and lower estimates for the virtual mass in the case of vertically stratified fluid  $\rho = e^{2kz}$ . In particular, for different values of stratification parameter  $k$  investigate their dependence on the layer depth.

# К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМ НА СТЫКАХ СЛОЕВ

**Павлова А. В., Рубцов С. Е.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

В работе рассматривается динамическая задача о гармонических колебаниях пакета упругих слоев на недеформируемом основании при наличии внутренней трещины. При этом предполагается макроскопическая однородность и бесконечная протяженность слоев, а также идеально плоская граница раздела, где выполняются разрывные граничные условия для амплитуд вектора перемещений (в области трещины). Применение формулы Бетти, описывающей интегральные соотношения между напряжениями и перемещениями на границах упругих сред, приводит к необходимости решения интегральных уравнений I рода. В качестве частного случая рассмотрена задача о круглой трещине в двухслойном пакете.

В настоящее время в различных областях техники широкое применение получают композиционные конструкции, материалы, покрытия. Одним из типов таких являются слоистые структуры, свойства которых изменяются лишь вдоль одной координаты. Проблеме разработки эффективных методов расчета слоистых структур посвящено много работ [1–3], демонстрирующих различные подходы. Особый интерес представляет исследование динамических процессов в слоистых упругих телах при наличии нарушений сплошности межслойного контакта.

В [4] излагается общий подход к исследованию динамических процессов слоистых упругих средах при наличии плоских трещин на стыках слоев. В настоящей работе рассматривается динамическая задача о гармонических колебаниях с частотой  $\omega$  пакета из двух слоев, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, при наличии трещины, занимающей в плане область  $\Omega$  в плоскости раздела упругих свойств ( $\rho_k, \lambda_k, \mu_k, k = 1, 2$ ) на высоте  $h_2$ . В плоскости  $x_3 \rightarrow h_2 \pm 0$  для амплитуд напряжений справедливы соотношения  $\tau_2^+ = \tau_2^- = \tau_2$ , перемещения в области трещины терпят разрыв

$$\mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^- = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \Omega, \\ \mathbf{u}_2, & (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

Такого рода дефекты названы вирусами вибропрочности второго класса [5]. Перемещения при  $x_1 = h_1$  равны нулю, напряжения на поверхности ( $x_3 = h_3$ ) определяются вектором  $\tau_3 e^{-i\omega t}$ .

В отличие от предложенного в [3], данный подход основан на применении формулы Бетти [6], описывающей интегральные соотношения между напряжениями и перемещениями. На основе этих соотношений выписываются системы функционально-матричных уравнений на поверхности среды и в плоскостях раздела слоев.

Используя обозначения, введенные в [4], система матрично-функциональных уравнений для рассматриваемого случая может быть представлена

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{T}. \quad (1)$$

Матрицы  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y}$  имеют блочную структуру, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,1} &= -\mathbf{R}_1^+, & \mathbf{Q}_{1,2} &= -\Psi_1^+ \mathbf{N}_1^+, & \mathbf{Q}_{2,1} &= \Psi_1^-, & \mathbf{Q}_{2,2} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{Q}_{1,3} &= \Psi_2^+ \mathbf{P}_3^+, & \mathbf{Q}_{2,3} &= -\Psi_1^+, & \mathbf{Q}_{3,j} &= \Psi_{3-j}^-, & \mathbf{Q}_{3,3} &= -\mathbf{I}, \quad j = 1, 2; \\ \mathbf{Y}_{1,1} &= -\mathbf{I}, & \mathbf{Y}_{22} &= \mathbf{N}_1^0, & \mathbf{Y}_{3,3} &= -\mathbf{R}_3^-, & \mathbf{Y}_{1,2} &= -\Psi_1^+, \\ \mathbf{Y}_{2,1} &= \Psi_1^- \mathbf{P}_1^-, & \mathbf{Y}_{1,3} &= \Psi_2^+, & \mathbf{Y}_{2,3} &= -\Psi_1^+ \mathbf{P}_3^+, & \mathbf{Y}_{3,j} &= \Psi_{3-j}^- \mathbf{N}_j^-, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь, согласно введенным [4] обозначениям,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= (\mathbf{L}_{k+1,k+1}^-)^{-1} \mathbf{D}_{k,k+1}^-; & \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{L}_{k,k+1}^+)^{-1} \mathbf{D}_{k+1,k+1}^+; & \Psi_k^- &= \prod_{l=1}^k \mathbf{G}_{k-l+1}^-; & \Psi_k^+ &= \prod_{l=1}^k \mathbf{G}_l^+; \\ \mathbf{G}_k^+ &= (\mathbf{L}_{k,k+1}^+)^{-1} \mathbf{L}_{k+1,k+1}^+; & \mathbf{G}_k^- &= (\mathbf{L}_{k+1,k+1}^-)^{-1} \mathbf{L}_{k,k+1}^-; & \mathbf{N}_k^\pm &= \mathbf{R}_{k+1}^\pm - \mathbf{R}_k^\pm; \\ & & \mathbf{N}_k^0 &= \mathbf{R}_{k+1}^+ - \mathbf{R}_k^-; \\ \mathbf{R}_k^\pm &= (\mathbf{L}_{n,k}^\pm)^{-1} \mathbf{D}_{n,k}^\pm; & \mathbf{U} &= (\mathbf{T}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3^-)^T, & \mathbf{T} &= (0, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3)^T. \end{aligned}$$

Через  $\mathbf{T}_1, \mathbf{U}_3^-, \mathbf{U}_2$  обозначены соответственно Фурье-образы амплитуд напряжений на нижнем основании, перемещений на поверхности и скачка перемещений на берегах трещины;  $\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$  – интегральные характеристики амплитуд напряжений в плоскости раздела слоев и на поверхности. Если принять  $\tau_3 = 0$ , получим задачу о колебаниях двухслойного пакета, вызванных вибрацией только берегов трещины. Относительно интегральной характеристики неизвестного скачка перемещений на берегах трещины в плоскости  $x_3 = h_2$  система матрично-функциональных уравнений (1) может быть записана в виде

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_2 = \mathbf{F}. \quad (2)$$

В качестве частного случая рассматривается задача для круглой трещины отрыва в двухслойной среде ( $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ). Тогда от системы (2) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, & (3) \\ \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, \omega) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 &= k(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Для решения уравнения выбран метод фиктивного поглощения [7], основанный на сведении уравнений с осциллирующими ядрами к уравнениям с экспоненциально убывающими с ростом аргумента ядрами. Здесь  $K(\alpha_1, \alpha_2) = C\alpha + O(1)$ ,  $C = const$

при  $\alpha \rightarrow \infty$ , где  $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ . Вынося в области  $\Omega$  из обеих частей уравнения (3) дифференциальный оператор  $\Delta - l^2$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ , где  $l$  – некоторое число, можно получить интегральное уравнение с убывающим на бесконечности символом ядра, что является необходимым условием применения метода фиктивного поглощения.

После выноса дифференциального оператора, переходим к полярной системе координат, после чего интегральное уравнение с правой частью  $f(r) = J_n(\eta r)$  преобразуется к виду

$$\int_0^a k_*(r, \rho) u_*(\rho) \rho d\rho = L_1 J_n(lr) + L_2 I_n(lr), \quad (4)$$

$$L_1 = (\eta^2 + l^2)^{-1}, \quad L_2 = L + aL_1(\eta J_{n+1}(\eta a) K_n(la) - lJ_n(\eta a) K_{n+1}(la)).$$

Приближенное решение (4) строится путем преобразований, аналогичных изложенным в [7,8]. При этом модификация метода в части подбора базисных функций  $\varphi_k$  позволяет облегчить построение решения для различных областей контакта. Так как вводимые  $\varphi_k$  в окончательных формулах присутствуют лишь под знаком операторов, в качестве таковых могут быть взяты производные от  $\delta$ -функций

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(r), \quad \varphi_k(r) = G_k(L_N) C_k \delta(r - a), \quad L_N = -\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + \frac{N^2}{r^2}\right),$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2), \quad k = 1, \dots, N.$$

Здесь  $p_k$  составляют полярное множество  $K_*(\alpha)$ .

Искомое решение интегрального уравнения (4), полученное с использованием решения статической осесимметричной задачи [8], имеет вид

$$u_*(r) = L_1 \left[ u_1(r) - \left( D(l) + i\sqrt{\frac{a\pi}{2}} \sum_{k=1}^N C_k \frac{H_n^{(1)}(ap_k)}{\sqrt{B - ip_k}} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left( D_1(\eta) + i\sqrt{\frac{a\pi}{2}} \sum_{k=1}^N S_k \frac{H_n^{(1)}(ap_k)}{\sqrt{B - ip_k}} \right) u_2(r) \right],$$

$$u_1(r) = \frac{J_n(\eta r)}{K(\eta)} + \frac{ia\pi}{2K_0(\eta)} \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k J_n(z_k r)}{\eta^2 - z_k^2} \left( \eta J_{n+1}(a\eta) H_n^{(1)}(az_k) - z_k J_n(a\eta) H_{n+1}^{(1)}(az_k) \right) + \\ + F_1(r, \mathbf{S}).$$

$$u_2(r) = \frac{I_n(lr)}{K(il)} + \frac{ia\pi}{2K_0(il)} \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k J_n(z_k r)}{l^2 + z_k^2} \left( iJ_{n+1}(al) H_n^{(1)}(az_k) + z_k I_n(al) H_{n+1}^{(1)}(az_k) \right) + \\ + F_1(r, \mathbf{C}),$$

$$F_1(r, \mathbf{C}) = D_1(\eta) \left( \frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2 - r^2}} + i\pi \sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{k=1}^N \beta_k H_n^{(1)}(az_k) J_n(z_k r) \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{S_k H_n^{(1)}(ap_k)}{\sqrt{B^2 - ip_k}} \left( i \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{a\pi}{2} \sqrt{\pi\varepsilon} \sum_{k=1}^N \beta_k H_n^{(1)}(az_k) J_n(z_k r) \right),$$

$$\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_N), \quad \mathbf{C} = (C_1, \dots, C_N), \quad \varepsilon = B^{-1},$$

$z_i$  – нули функции  $K_*(\alpha)$ .

В соответствии со схемой метода фиктивного поглощения для определения неизвестных получается система линейных алгебраических уравнений, решаемая численно

$$\sum_{k=1}^N C_k F(\alpha, p_k) = -E(il) J_n^{-1}(a\alpha) (lI_{n+1}(a\alpha) J_n(a\alpha) + \\ + \alpha I_n(a\alpha) J_{n+1}(a\alpha) - \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} D(l),$$

$$\sum_{k=1}^N S_k F(\alpha, p_k) = E(\eta) J_n^{-1}(a\alpha) (\eta J_{n+1}(a\alpha) J_n(a\alpha) - \\ - \alpha J_n(a\alpha) J_{n+1}(a\alpha) - \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} D_1(\eta).$$

$$D_1(\eta) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left( H_n^{(1)}(a\eta) \sqrt{B + i\eta} + H_n^{(2)}(a\eta) \sqrt{B - i\eta} \right),$$

$$F(\alpha, p_k) = \frac{J_n^{-1}(a\alpha)}{\alpha^2 - p_k^2} \left( p_k H_{n+1}^{(1)}(ap_k) J_n(a\alpha) - \alpha H_n^{(1)}(ap_k) J_{n+1}(a\alpha) \right) - 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{H_n^{(1)}(ap_k)}{\sqrt{B - ip_k}},$$

$$E(\eta) = \frac{2}{i\pi K_0(\eta) (\alpha^2 - \eta^2)}, \quad D(l) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} I_0(al) \sqrt{B + l}, \quad \alpha = z_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Особый интерес вызывает изучение динамики полостей, не имеющих в плане правильную форму круга или полосы. С помощью метода фиктивного поглощения может быть построено решение для произвольной, в том числе невыпуклой, области, которая с помощью некоторого разбиения представляется системой выпуклых областей  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$  с общими границами, а применяемый для вывода систем интегральных уравнений метод позволяет получить общее представление матрицы-функции системы интегральных уравнений – символа соответствующего оператора.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (06-01-00295, 06-01-96802, 06-01-08017, 06-08-00671, 06-01-96638) и гранта Президента РФ НШ-4839.2006.1

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В.М., Пожарский Д.А. К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.
- [2] Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г., Емельянов А.И. Оптимальное проектирование и численный расчет конструкций с применением композиционных и традиционных материалов // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 9. С. 71–77.
- [3] Прякина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып 3. С. 500–507.
- [4] Павлова А.В., Рубцов С.Е. Исследование многослойных материалов при наличии нарушений сплошности соединений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества (ЧЭС). 2004. № 3. С. 19–22.
- [5] Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
- [6] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [7] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [8] Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

**Pavlova A.V., Rubtsov S.E.** *To solution of dynamic problems of layered media with discontinuous boundary conditions at the turns of the layers.* The work is devoted the dynamic problems of vibration of an elastic layers package containing a crack parallel the surface. The algorithm of integral equations constructing is based on the using Betti's formula. Particularly the problem of round crack vibration in two-layer package is considered.

# РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРОСА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

**Пинчук Н. А., Столяр А. М.**

*Ростовский государственный университет*

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений математической физики гиперболического типа, которая описывает колебания троса переменной длины. Для численного исследования применяются алгоритмы, основанные на явной схеме метода конечных разностей и методе Рунге–Кутты. Приводятся результаты расчетов.

Работы по определению напряжений в тросах переменной длины появились около 70 лет назад и были вызваны потребностями угольной отрасли в проектировании надежных подъемных устройств. Одно из первых математических исследований продольных колебаний упругой нити переменной длины принадлежат А.Ю. Ишлинскому [1]. В трудах Г.Н. Савина и О.А. Горошко даны разнообразные механические постановки подобных задач и их решения [2]. Теории волновых процессов в упругих системах с изменяющимися во времени параметрами посвящена монография А.И. Весницкого [3], в которой, кроме того, содержится подробная библиография по изучаемым проблемам.

Особенностью упомянутого класса задач является то, что область изменения независимой переменной сама является величиной переменной и должна определяться в процессе решения. В работе [4] для решения уравнений А.Ю. Ишлинского [1] предложены два численных алгоритма, которые применяются в настоящей работе для решения задачи о продольно-поперечных колебаниях.

**Методы расчета модельной задачи.** Начально краевую задачу о продольных колебаниях троса переменной длины запишем в виде [1]

$$\rho F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F g \quad (1)$$

$$\frac{d\ell}{dt} \left( 1 + k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} \right) = -V(t) \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + mg \quad (3)$$

$$\xi(t) = \ell(t) + u(\ell, t) \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \frac{g}{E} \left( \frac{\rho}{2} x^2 + \frac{m}{F} x \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \quad \ell(0) = \ell_0 \quad (7)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала троса,  $F$  — площадь его поперечного сечения,  $E$  — модуль упругости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\ell_0$  — начальная длина троса

в недеформированном состоянии,  $\ell(t)$  — длина троса в текущий момент времени  $t$  в недеформированном состоянии,  $u(x, t)$  — продольное перемещение сечения троса  $x$  в момент времени  $t$ . Механическая система, которую описывает задача (1)–(7), изображена на Рис. 1. Здесь  $m$  — масса груза, с которым связано начало подвижной системы координат  $Ox$ .

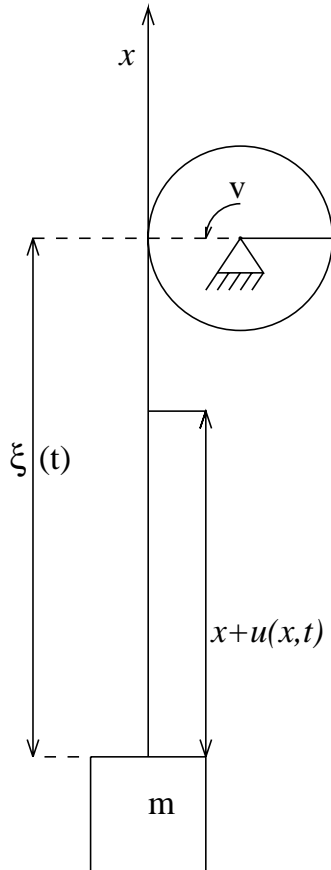


Рис. 1.

Коротко опишем алгоритмы решения. Первый численный алгоритм состоит в сведении задачи (1)–(7) к задаче Коши относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого длина троса  $\ell(t)$  разбивается на  $N$  частей узлами  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , где  $h(t) = \ell(t)/N$  — шаг сетки. Пространственные производные аппроксимируются центрально-разностными формулами численного дифференцирования. Тогда, например, уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \alpha_1 - g, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

где  $\alpha_1$  — некоторая функция времени. В результате, путем введения дополнительных переменных, получаем задачу Коши для системы  $2N + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Второй численный алгоритм основан на применении явной схемы метода конечных разностей. Аналогично предыдущему, в каждый момент времени  $t_j = j\Delta t$ , где  $\Delta t$  — шаг по временной координате, область  $\ell(t)$  разбивается на  $n$  частей узлами  $x_i(t_j) = ih_j$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $h_j = \ell(t_j)/N$ .

Производные по пространственной и временной координате заменяются центрально-разностными аппроксимациями; для последовательного вычисления неизвестной функции  $u$  на временных слоях получаем соотношения вида

$$u^{j+1}(x_i^{j+1}) = 2u^j(x_i^{j+1}) - u^{j-1}(x_i^{j+1}) + (\Delta t)^2 \alpha_2$$

где  $\alpha_2$  — конечно-разностное выражение, содержащее известные значения функции  $u$ .

Оба описанных алгоритма были использованы для расчета задачи (1)–(7). При этом принимались следующие значения параметров задачи:  $F = 4.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $E = 100 \text{ ГПа}$ ,  $\rho = 5200 \text{ кг/м}^3$ ,  $m = 100 \text{ кг}$ ,  $\ell_0 = 50 \text{ м}$ ,  $V(t) = -2t$ ,  $k = 0$ . На рис. 2 приводятся графики зависимости от времени функции  $u$  в точке  $x = \ell(t)$  — схода троса с колеса. Пунктирная кривая отвечает расчету по методу конечных разностей, а сплошная — методом Рунге–Кутты. Как видно, результаты расчетов практически не отличаются.



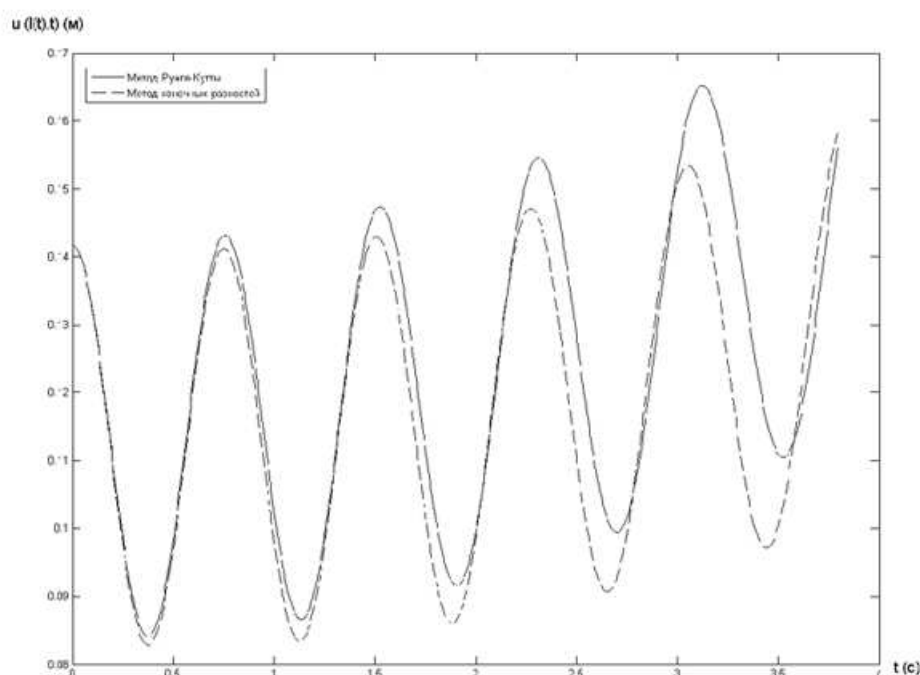


Рис. 2.

**Продольно-поперечные колебания.** Задачу о колебаниях троса переменной длины в плоской постановке можно записать в виде

$$\rho F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = \frac{\partial N_u}{\partial x} - \rho F g \quad (8)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial N_w}{\partial x} + q(x, t) \quad (9)$$

$$w \Big|_{x=0} = f_1(t), \quad w \Big|_{x=\ell} = f_2(t) \quad (10)$$

$$w \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

К равенствам (8)–(11) следует добавить соотношения (2)–(7). Здесь  $N_u$  и  $N_w$  — проекции силы натяжения в тросе в продольном и поперечном направлениях соответственно;  $w$  — поперечное смещение элемента троса;  $q(x, t)$  — нагрузка, действующая на трос в поперечном направлении.

С применением алгоритма, основанного на явной схеме метода конечных разностей, проводились расчеты задачи (2)–(11). На рис. 3 представлены результаты расчета при условиях

$$f_1(t) = f_2(t) = 0, \quad q(x, t) = \begin{cases} 70,7t \text{ Н} & t < 0,76 \text{ с} \\ 53,73 \text{ Н} & t \geq 0,76 \text{ с} \end{cases}$$

Здесь приводятся (продольное смещение)  $u(x)$  в различные моменты времени. По оси абсцисс отложены узлы пространственной сетки. На рис. 4 представлены результаты расчета задачи (2)–(11) при условиях  $f_1(t) = 0$ ,  $f_2(t) = w_* \cos \omega t$ ,  $q(x, t) = 0$ , где  $w_* = 10^{-2}$  м,  $\omega = \sqrt{\frac{EF}{\ell_0 m}}$ .

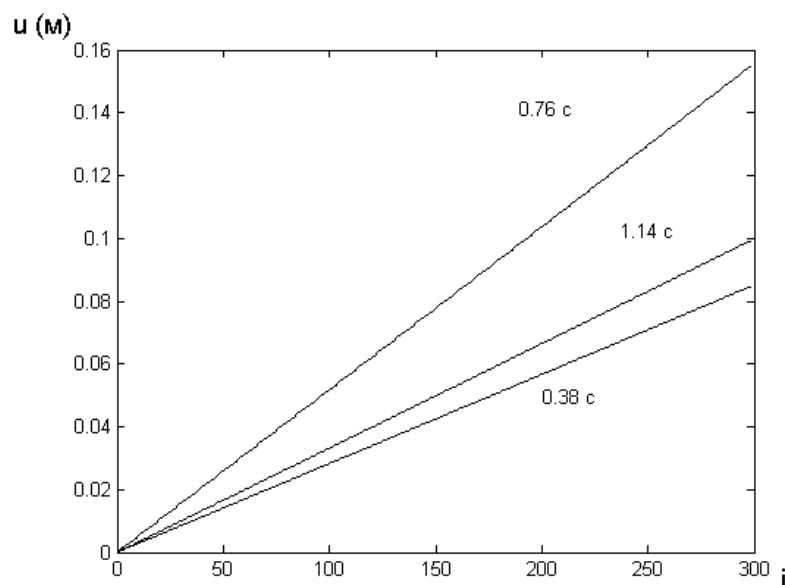


Рис. 3

Здесь по оси ординат отложено поперечное смещение  $w(x)$  в различные моменты времени, а по оси абсцисс — также узлы сетки. Результаты на рис. 3 показывают, что (как, например, полагалось в работе [1]) хорошим приближением для функции продольных смещений может быть линейная зависимость по  $x$ . Результаты на рис. 4 позволяют предположить, что функцию  $w$  можно аппроксимировать параболической зависимостью по  $x$ .

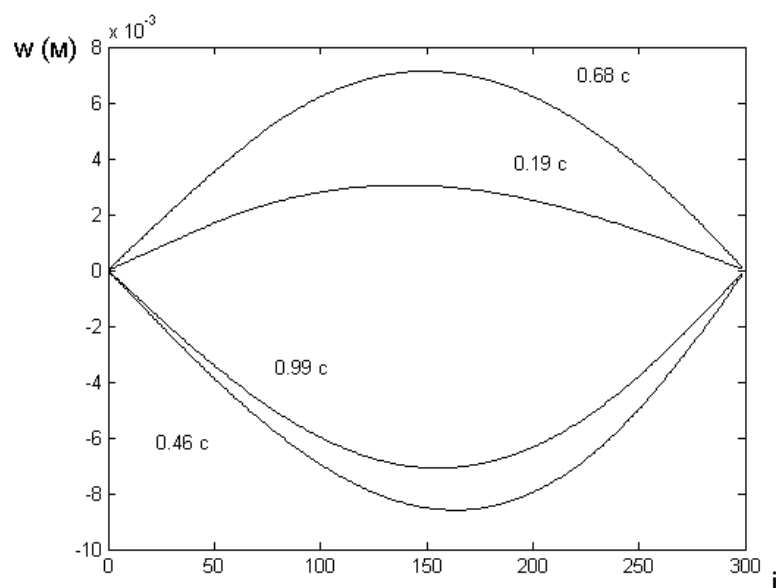


Рис. 4

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ишминский А.Ю.* Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины // Докл. АН СССР. 1954. № 5. С. 939–941.
- [2] *Горошко О.А., Савин Г.М.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 224 с.
- [3] *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
- [4] *Бермус И.М., Бернштейн Л.А., Прошкин С.Г., Срубцик Л.С., Столяр А.М.* Продольные колебания груза на канате переменной длины // Докл. расшир. заседаний семинара инст. прикл. матем. им. И.Н. Векуа. Тбилиси, 1989. Т. 4, № 3. С. 29–32.

**Pinchuk N.A., Stolyar A.M.** *Computation of longitudinal–transverse oscillations of the cable of variable length.* Initial boundary–value problem for the system of hyperbolic equations of mathematical physics which describes the oscillations of the cable of variable length is considered in the paper. Algorithms based on the explicit scheme of the finite difference method and the Runge–Kutta method are used for numerical analysis. The results of calculations are given.

# ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ПОЗИЦИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

**Потапов А. А.\* , Лисина С. А.\*\***

\* *Нижегородский государственный технический университет*

\*\* *Нижегородский филиал Института машиноведения РАН*

Анализируется понятие структуры представительного объема, лежащее в основе построения различных моделей механики сплошной среды. Установлено, что в рамках классической механики существует четыре типа представительных объемов с различной кинематикой. Показывается, что все известные в настоящее время теории обобщенных континуумов можно классифицировать по типу представительного объема и характеру межчастичного взаимодействия.

При изучении сред с наноструктурой существуют два различных подхода к построению математических моделей, которые можно условно назвать как переход от «от микро к мезо» и переход «от макро к мезо». В первом случае осуществляется переход от моделей атомарного уровня, построенных по законам квантовой теории, к моделям мезомасштаба. На этом пути универсальная модель материальной среды, представляет собой дискретную систему частиц, связанных силами взаимодействия, найденных из первых принципов [1,2]. Анализ таких моделей для реальных систем, состоящих из большого числа частиц ( $10^6 - 10^{10}$ ), представляет неразрешимую задачу даже при наличии высокопроизводительных вычислительных систем. Второй подход направлен на уточнение континуальных моделей среды путем введения в них новых характеристик присущих дискретным структурам. При таком подходе наноструктура рассматривается как сплошная среда с дополнительными (внутренними) степенями свободы, отражающими свойства дискретной структуры вещества [3,4]. В данной работе в рамках классической механики рассматривается вопрос о классификации моделей континуума на основе анализа понятий представительного объема среды и характера силовых взаимодействий между её частицами.

Все модели сплошной среды опираются на аксиомы (гипотезы) о структуре представительного объема среды и о силах внутреннего взаимодействия между материальными частицами. С помощью представительного объема (ПО) задается структура материальной среды на разных масштабных уровнях, другими словами определяется «геометрический каркас» среды. Внутренние силы и связанная с ними энергия деформации устанавливают характер силового взаимодействия между структурными элементами различных масштабов, т.е. задают «силовой каркас» среды, от которого во многом зависит тип материальных соотношений в среде [5].

Материал имеет иерархически организованную структуру, которая по-разному эволюционирует при внешних воздействиях. Для адекватного описания динамических процессов в структурно-неоднородном материале требуется рассмотрение нескольких масштабных (структурных) уровней, которые находятся в непрерывном взаимодействии между собой за счет внутренних связей. В настоящее время

в механике деформируемого твердого тела приняты четыре масштабных уровня описания среды [4, 5].

*Макроскопический*: на этом уровне рассматривается непрерывная среда и учитываются лишь усредненные эффекты. *Субмакроскопический*: пространственная структура среды считается кусочно-неоднородной, представленной структурными элементами (доменами, зёрнами), не имеющими внутренних степеней свободы. *Мезоскопический*: микронеднородная среда, состоящая из структурных элементов, обладающих внутренними степенями свободы. *Микроскопический*: пространственная структура среды состоит из структурных элементов (частиц), размеры которых много меньше периода решетки.

Для задания структуры среды и её кинематики необходимо определить, что понимается под представительным объемом среды.

**Представительный объем** – это минимальный объем среды, содержащий достаточно большое количество взаимодействующих микрочастиц так, что бы можно было ввести статистически устойчивые физические характеристики материала, такие как плотность, давление, температура, энтропия и т.п. Добавление к этому объему других частей материала не должно приводить к изменению его характеристик. Геометрические размеры представительного объема должны быть малы по сравнению с областью изменения макроскопических параметров среды. Значения характеристик считаются однородными в пределах представительного объема [5].

Микрочастицы заполняющие представительный объем представляют собой материальные точки. Под *материальной точкой*, понимается малая частица материи (атом, молекула, зерно или домен), при описании движения которой можно пренебречь её размерами и вращением [6]. В механике сплошных сред материальной точке приписывают единственную динамическую (физическую) характеристику, называемую массой. В физических приложениях материальную точку часто наделяют еще зарядом, магнитным моментом, и т.п.

Для описания движения представительного объема вводятся понятия центра масс, скорости центра масс, количества движения (импульса) и момента количества движения (кинетического момента). Из теоремы об изменении импульса следует, что, если главный вектор внешних сил, действующих на систему равен нулю, то центр масс системы покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим движение частиц относительно центра масс ПО. Такие движения будем называть *внутренними*. Для анализа внутренних движений удобно ввести две системы координат – лабораторную (ЛСК), связанную с неподвижным наблюдателем и сопутствующую, связанную с центром масс системы и движущуюся поступательно относительно ЛСК. Координаты и скорости материальных точек в этих системах связаны преобразованиями

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  – соответственно, координата и скорость МТ в лабораторной СК,  $cR$ ,  $\mathbf{V}$  – координата и скорость центра масс, а  $\mathbf{r}'_i$ ,  $\mathbf{v}'_i$  – координата и скорость МТ в сопутствующей системе координат. Полный импульс представительного объема

$$\mathbf{P} = \sum m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) = M\mathbf{V}, \quad M = \sum m_i, \quad (2)$$

совпадает с импульсом его центра масс, а суммарный импульс внутренних движений равен нулю. Следовательно, импульс определяет движение центра масс ПО, но не может служить характеристикой его внутренних движений.

В отличие от импульса момент количества движения (кинетический момент), реагирует на внутренние движения представительного объема. Кинетический момент ПО относительно некоторой точки  $O$  равен:

$$\mathbf{K}_o = \sum m_i (\mathbf{R}_o + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{V}_o + \mathbf{v}'_i) = \mathbf{R}_o \times M\mathbf{V} + \sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (3)$$

Он состоит из двух частей. Первое слагаемое  $\mathbf{L}$  – это орбитальный кинетический момент, характеризующий движение центра масс ПО относительно точки  $O$ . Второе слагаемое  $\mathbf{S}$  – кинетический момент внутренних движений. Он характеризует вращение частиц относительно центра масс ПО и его можно назвать механическим спином структурного элемента среды. Если точка  $O$  совпадает с центром масс представительного объема, то изменение его внутреннего кинетического момента описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \sum (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}) \quad (4)$$

Справа в (4) стоит главный момент внешних сил относительно центра масс ПО, в качестве которых здесь выступают силы, действующие со стороны частиц других представительных объемов. Уравнение (4) можно назвать уравнением движения механического спина среды. В классических моделях сплошной среды подобное уравнение тождественно равно нулю [7].

Рассмотрим полную механическую энергию ПО, равную сумме кинетической энергии и потенциальной энергии частиц  $U^{int}(r_{ij})$ , зависящей от расстояния между взаимодействующими частицами. Используя преобразования (1), выделим энергию связанную с движением центра масс ПО и внутренними движениями

$$E = \sum \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 + U^{int}(r_{ij}) = \frac{M}{2} V^2 + \left[ \sum \frac{m_i}{2} v_i'^2 + U^{int}(r_{ij}) \right] \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части (5) определяет кинетическую энергию движения центра масс ПО, а слагаемые в квадратных скобках – полную механическую энергию внутренних движений.

Таким образом, у представительного объема среды можно выделить *макро-* и *микродвижения*. Первые представляют собой поступательные движения центра масс ПО, а вторые – движения микрочастиц относительно центра масс (внутренние движения). Можно выделить две независимые коллективные формы внутренних движений:

– вращение частиц вокруг центра масс – ротационные степени свободы (ротатор);

– радиальное движению частиц относительно центра масс – осцилляторные степени свободы (осциллятор). В общем же случае внутреннее движение состоит из «смеси» ротационных и осцилляторных движений.

Если можно пренебречь геометрическими размерами и внутренними движениями в представительном объеме, то его можно считать *материальной точкой*,

обладающей тремя степенями свободы. Данное приближение используется при построении классических моделей механики сплошной среды. Однако на наномасштабах необходимо учитывать конечность размеров представительного объема среды и принимать во внимание внутренние движения частиц в ПО. В этом случае возможны три различных ситуации:

|                              |                            | Материальная точка (3 степени свободы)               | «Дышащая» материальная точка  | Твердое тело (6 степеней свободы)                               | Деформируемое тело (12 степеней свободы)                   |
|------------------------------|----------------------------|--|---|---|--|
| Центральное взаимодействие   | Локальный                  | Классическая теория упругости (О. Коши-1830)         | Упругая среда с «внутренними» осцилляторами<br>Жидкость с пузырьками газа | Не существует   | Не существует  |
|                              | Нелокальный<br>Градиентный | Нелокальная теория упругости.<br>Градиентные теории. | Нелокальная теория упругой среды с «внутренними» осцилляторами            | Не существует   | Не существует  |
| Нецентральное взаимодействие | Локальный                  | ?  | ?   | Континуум Коссера<br>Гидродинамическая теория жидких кристаллов | Микроморфная теория упругости Эрингена.<br>Модель Миндлина |
|                              | Нелокальный<br>Градиентный | ?  | ?   | Нелокальная теория континуума Коссера                           | Нелокальная теория микроморфной среды                      |

Таблица 1.

– частицы поворачиваются вокруг центра масс. В этом случае представительный объем моделируется *абсолютно твердым телом* с шестью степенями свободы — тремя трансляционными и тремя угловыми.

– частицы двигаются по радиальным направлениям относительно центра масс. В этом случае представительный объем моделируется «дышащей» *материальной точкой*, обладающей тремя трансляционными и дополнительными осцилляторными степенями свободы [3].

– частицы совершают как радиальные, так и окружные движения относительно центра масс. В этом случае представительный объем рассматривается как *малое деформируемое тело*, испытывающее аффинные деформации. Кинематика такого представительного объема описывается 12 переменными: три смещения, три угловые переменные и шесть компонент тензора аффинной деформации [3].

Силловые взаимодействия частиц описываются с помощью потенциалов. Центральные взаимодействия частиц описываются парными потенциалами. Нецентральные же взаимодействия описываются, либо с помощью многочастичных потенциалов, либо с помощью потенциалов, учитывающих моментные взаимодействия. Кроме того, в зависимости от радиуса действия потенциалов выделяют среды с локальными и нелокальными взаимодействиями.

По типу представительного объема и виду межчастичного взаимодействия, можно дать классификацию всех известных в настоящее время моделей обобщенных континуумов. В рамках предложенной аксиоматики, о виде представительного объема и типе взаимодействия частиц существует не более 12 различных типов моделей упругого континуума (табл. 1). Все известные в настоящее время теории обобщенных континуумов укладываются в эти классы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-02-17156)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Blank X., Bris C.Le, Lions P.-L. From molecular models to continuum mechanics. Arch. Rational Mech. Anal. 2002, v. 164. P. 341–381.
- [2] Потапов А.И. Волны деформации в среде с внутренней структурой // “Нелинейные волны 2004” / Отв. ред. А.В. Галонов-Грехов, В.И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2004, с. 125–140.
- [3] Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. 1: Foundation and solids. Springer Verlag. New York Inc. 1999. 326 p.
- [4] Введение в микромеханику. / Под ред. М. Онами. М.: Металлургия.1987. 280 с.
- [5] Грусков П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений: Курс лекций. Ч. 1. Общая теория / Перм. гос. тех. ун-т. Пермь, 2006. 173 с.
- [6] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 1997. 320 с.
- [7] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука. 1973. 536 с. Particles // Int. J. of Solids and Structures, 2006 V. 43, P. 6194–6207.

**Potapov A. I., Lisina S. A.** *Substantiation of the Continuum Models from Positions of Classical Mechanics.* The concept of structure of the representative volume, underlying build-up of various models of the continuum mechanics is analyzed. The concept of structure of the representative volume, underlying build-up of various models of the continuum mechanics is analyzed. Within the framework of classical mechanics exists four types of representative volumes with a various kinematics. It is shown, that all theories of the generalized continua can be classified by types of representative volume and interpartical interaction.



# УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

**Попов А. В.**

*Ростовский государственный университет*

В рамках пространственной теории упругости рассматривается задача устойчивости двухслойного цилиндра, нагруженного продольной сжимающей силой. Составной цилиндр содержит внутренние напряжения, обусловленные посадкой с предварительным натягом.

Для изотропного несжимаемого материала выведены уравнения нейтрального равновесия, линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на границе раздела слоёв. Невозмущённое состояние равновесия определяется из точного решения нелинейной задачи Ламе для составного цилиндра. Определение критических значений сжимающей силы сведено к решению однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для неогуковской модели материала проведены численные расчёты. Они позволяют сделать определённые выводы о влиянии величины натяга на критические значения сжимающей силы.

Рассматривается задача устойчивости составного изотропного нелинейно упругого цилиндра под действием продольной сжимающей силы. Составной цилиндр образован следующим образом.

Полый цилиндр с внутренним радиусом  $a_1$  и внешним радиусом  $b_1$  вставлен в другой полый цилиндр внутреннего радиуса  $a_2$  и внешнего радиуса  $b_2$  таким образом, что  $b_1 > a_2$ . К торцам составного цилиндра приложена сжимающая нагрузка, которая сводится к равнодействующей силе  $P$ , причём линия её действия совпадает с осью цилиндра. Пусть  $r_1$  — радиальная координата первого цилиндра,  $r_2$  — радиальная координата второго цилиндра. Очевидно,  $a_1 \leq r_1 \leq b_1$  и  $a_2 \leq r_2 \leq b_2$ .

Предполагается, что обе части составного цилиндра сделаны из несжимаемого изотропного нелинейно-упругого материала. Их деформация описывается следующим преобразованием координат:

$$R_k = R_k(r_k), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \lambda z; \quad k = 1, 2.$$

Здесь  $r_k, \varphi, z$  и  $R_k, \Phi, Z$ , соответственно, цилиндрические координаты недеформированной и деформированной конфигурации составного цилиндра,  $\lambda$  — коэффициент осевого удлинения. Соответствующий этим преобразованиям тензор градиента деформации:

$$\mathbf{C}_k = R'_k(r_k) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R_k(r_k)}{r_k} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z; \quad k = 1, 2.$$

Используя условие несжимаемости  $\det \mathbf{C}_k = 1$ , находим функции  $R_k(r_k)$ , ( $k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} R_1(r_1) &= \sqrt{R_i^2 - \frac{a_1^2 + r_1^2}{\lambda}}, \quad R_i = R_1(a_1) \\ R_2(r_2) &= \sqrt{R_e^2 - \frac{b_2^2 + r_2^2}{\lambda}}, \quad R_e = R_2(b_2) \end{aligned} \tag{1}$$

Используется неогоуковская модель материала с одинаковым модулем сдвига для обоих цилиндров:

$$\mathbf{D}_k = \mu \mathbf{C}_k + p_k(r_k) \mathbf{C}_k^{-T}, \quad k = 1, 2 \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{D}_k$  — тензоры напряжений Пиолы,  $\mu$  — модуль сдвига,  $p_k(r_k)$  — функции гидростатического давления в несжимаемом теле. Уравнения равновесия для обоих цилиндров:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь  $\nabla$  — набла-оператор в недеформированной конфигурации.

Граничные условия следующие. Боковые поверхности составного цилиндра считаются свободными от нагрузок:

$$\mathbf{D}_{1,rr}(a_1) = 0; \quad b_2 \mathbf{D}_{2,rr}(b_2) = 0. \quad (4)$$

Далее, радиальное нормальное напряжение  $\sigma_R$  текущей конфигурации и радиальная координата считаются равными на граничной боковой поверхности:

$$\frac{b_1}{\lambda R_1(b_1)} \mathbf{D}_{1,rr}(b_1) = \frac{a_2}{\lambda R_2(a_2)} \mathbf{D}_{2,rr}(a_2); \quad R_1(b_1) = R_2(a_2). \quad (5)$$

Физически условия (5) означают, что в процессе деформации между цилиндрами не образуется разрывов.

Используя уравнение (3) и граничные условия (4)-(5), находим функции гидростатического давления:

$$p_2(r_2) = -\mu \left[ \frac{b_2^2}{\lambda^2 R_e^2} + \frac{(R_e^2 - b_2^2)(R_2^2(r_2) - R_e^2)}{2\lambda^2 R_e^2 R_2^2(r_2)} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{b_2 R_2(r_2)}{r_2 R_e} \right], \quad (6)$$

$$p_1(r_1) = p_2(a_2) - \mu \left[ \frac{b_1^2 - a_2^2}{\lambda^2 R_1^2(b_1)} + \frac{(R_1^2 - a_2^2)(R_1^2(r_1) - R_1^2(b_1))}{2\lambda^2 R_1^2(b_1) R_1^2(r_1)} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{b_1 R_1(r_1)}{r_1 R_1(b_1)} \right]. \quad (7)$$

Подстановка  $R_1(r_1)$ ,  $R_2(r_2)$  из (1) во второе граничное условие (5) даёт соотношение между внутренним  $R_i$  и внешним  $R_e$  радиусами:

$$R_i(R_e) = \sqrt{R_e^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{\lambda}} \quad (8)$$

Величина  $P$  сжимающей силы вычисляется по формуле

$$P = 2\pi \left( \int_{a_1}^{b_1} \sigma_{Z,1}(r_1) r_1 dr_1 + \int_{a_2}^{b_2} \sigma_{Z,2}(r_2) r_2 dr_2 \right);$$

$$\sigma_{Z,k}(r_k) = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{C}_k^T \cdot \mathbf{D}_k) \cdot \mathbf{e}_z, \quad k = 1, 2.$$

Здесь  $\sigma_{Z,k}(r_k)$ ,  $k = 1, 2$  — нормальные напряжения вдоль оси, соответственно, внутреннего и внешнего цилиндров;  $\mathbf{e}_z$  — базисный вектор, направленный вдоль оси составного цилиндра. Используя формулы (6)–(8) и граничные условия (4), можно вывести соотношение между коэффициентом  $\lambda$  осевого удлинения и внешним

радиусом  $R_e$ , тогда сила  $P$  запишется как функция параметра  $\lambda$  и радиусов  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . Окончательная формула для  $P$  довольно громоздкая, поэтому она не приводится.

Пусть равновесное напряженно-деформированное состояние составного цилиндра, определяемое радиус-вектором  $\mathbf{r}$  частицы, считается докритическим. Предположим, что наряду с ним существует бесконечно близкое равновесное состояние, которое определяется радиус-вектором  $\mathbf{r} + \eta\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  – вектор добавочного перемещения,  $\eta$  – малый параметр. Возмущённое состояние равновесия несжимаемого тела описывается уравнениями [1], [2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k^\bullet = 0, \quad \text{tr}(\mathbf{C}_k^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}_k) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (9)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \left[ \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{r} + \eta\mathbf{w}) \right]_{\eta=0}. \quad (10)$$

Линеаризованные граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1^\bullet(a_1) = 0; \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_2^\bullet(b_2) = q \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{C}_2^{-T}(b_2))^\bullet; \quad (11)$$

$$\left( \mathbf{D}_1 \frac{d\sigma}{d\Sigma} \right)^\bullet \Big|_{r_1=b_1} = \left( \mathbf{D}_2 \frac{d\sigma}{d\Sigma} \right)^\bullet \Big|_{r_2=a_2}; \quad \mathbf{w}_1(b_1) = \mathbf{w}_2(a_2); \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{e}_r$  – радиальный базисный вектор;  $d\sigma, d\Sigma$  – элементарные материальные площадки в недеформированной и деформированной конфигурации, соответственно. Из (2), (10) получаем

$$\mathbf{D}_k^\bullet = \mu \nabla \mathbf{w}_k + p (\mathbf{C}_k^{-T})^\bullet + q_k \mathbf{C}_k^{-T}; \quad q_k = p_k^\bullet, \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Запишем компонентное представление векторов  $\mathbf{w}_k$  и тензоров  $\mathbf{D}_k^\bullet$  ( $k = 1, 2$ ) в базисе  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ :

$$\mathbf{w}_k = u_k \mathbf{e}_r + v_k \mathbf{e}_\varphi + w_k \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{D}_k^\bullet = D_{k,rr}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + D_{k,r\varphi}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi + \dots, \quad k = 1, 2. \quad (14)$$

Из (9), (13), (14) получаем две системы четырёх уравнений (9), в каждую из которых входят по четыре неизвестные функции  $u_k, v_k, w_k, q_k$ , ( $k = 1, 2$ ). Обе системы допускают решения следующего вида:

$$u_k = U_k(r) \cos(n\varphi) \cos(\alpha z), \quad v_k = V_k(r) \sin(n\varphi) \cos(\alpha z) \quad (15)$$

$$w_k = W_k(R) \cos(n\varphi) \sin(\alpha z), \quad q_k = Q_k(r) \cos(n\varphi) \cos(\alpha z), \quad k = 1, 2$$

Здесь  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $\alpha$  – действительное число.

Используя (15), переменные  $\varphi, z$  отделяются, и возникает краевая задача для двух систем четырёх обыкновенных уравнений с неизвестными  $U_k, V_k, W_k, Q_k$ , ( $k = 1, 2$ ) и граничными условиями (11), (12). Исключая неизвестные функции  $W_1, Q_1$  и  $W_2, Q_2$  из соответствующих им систем, получаем две системы шести уравнений первого порядка, матричная запись которых выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'^i + \mathbf{A}^i(\rho) \mathbf{X}^i &= 0, \quad \mathbf{X}^i = \{U_1, U_1', U_1'', V_1, V_1', V_1''\}, \\ \mathbf{X}'^e + \mathbf{A}^e(\rho) \mathbf{X}^e &= 0, \quad \mathbf{X}^e = \{U_2, U_2', U_2'', V_2, V_2', V_2''\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^e$  — векторы-столбцы неизвестных функций;  $\mathbf{A}^i(\rho), \mathbf{A}^e(\rho)$  — матрицы коэффициентов систем. Применяя конечно-разностную запись [3] и используя граничные условия (12), обе системы (16) можно свести к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Y} = 0, \quad (17)$$

где  $\mathbf{Y}$  является вектором-столбцом неизвестных, в качестве которых выбраны значения  $U_1(a_1), U_1'(a_1), V_1(a_1), U_2(b_2), U_2'(b_2), V_2(b_2)$ . Остальные значения  $U_1''(a_1), V_1'(a_1), V_1''(a_1), U_2''(b_2), V_2'(b_2), V_2''(b_2)$  выражаются через компоненты вектора  $\mathbf{Y}$  с использованием граничных условий (11). Система (17) является однородной относительно искомых неизвестных. Условием существования нетривиального решения такой системы является обращение в нуль определителя матрицы коэффициентов:

$$\det \mathbf{S} = 0. \quad (18)$$

Условие (18) является характеристическим уравнением для определения критических значений продольной сжимающей силы  $P$ . Оно позволяет найти значения  $\lambda, R_e, a_1, b_1, a_2, b_2$ , при которых имеет место потеря устойчивости.

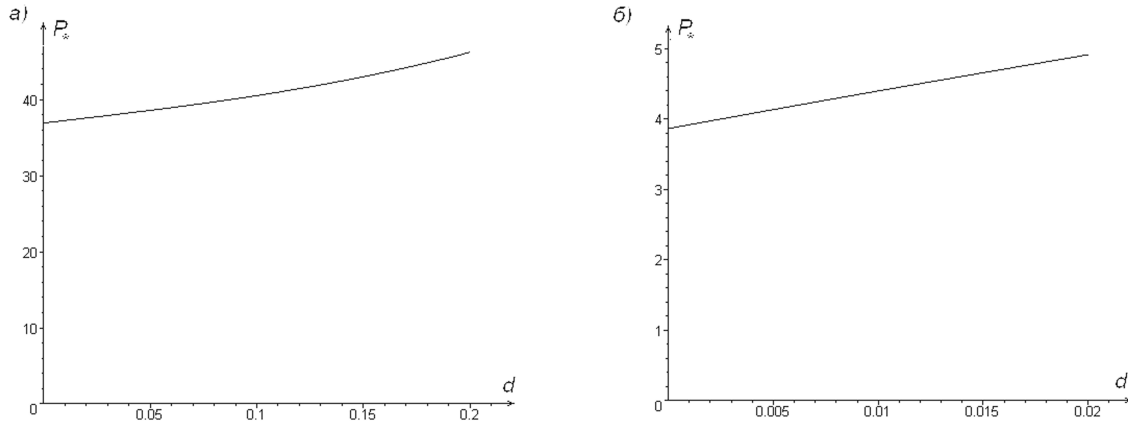


Рис. 1. График критических значений сжимающей силы для длинного цилиндра ( $\nu = 0, 1$ ): а)  $a_1 = 0, 4; a_2 = 0, 7$ ; б)  $a_1 = 0, 9; a_2 = 0, 95$ .

На приведённых графиках по оси абсцисс отложена величина натяга  $d$ , равная разнице радиусов  $b_1$  и  $a_2$ , а по оси ординат — безразмерная сжимающая сила  $P_* = 2P/\pi\mu b^2$ . При построении кривых  $b_2$  полагалось равным единице;  $\nu = \alpha b_2$ . Параметр  $\nu$  можно считать относительной толщиной цилиндра, если  $\alpha = \pi m/l$ , где  $l$  — длина недеформированного составного цилиндра,  $m$  — число полуволин вдоль

образующей цилиндра. (При численных расчётах принималось  $m = 1$ , так как бóльшие значения  $m$  приводят к тем же результатам, что и меньшие значения  $l$ , если отношение  $m/l$  остаётся постоянным.)

Графические результаты представлены для относительно длинного цилиндра ( $\nu = 0, 1$ ; то есть диаметр к длине относится как 1 к  $5\pi$  при  $m = 1$ ). Легко видеть, что с увеличением величины  $d$  натяга растёт критическое значение сжимающей силы, а значит повышается устойчивость составного цилиндра. Для относительно коротких цилиндров (например,  $\nu = 1, 0$ ) результаты качественно мало отличаются от представленных. Таким образом, можно сделать общий вывод о том, что увеличение величины натяга приводит к увеличению устойчивости составного цилиндра, нагруженного продольной силой.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
- [2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [3] Зубов Л.М., Моисеенко С.И. Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 78–84.

**Ропов А.В.** *The Stability of the Compound Cylinder With Initial Strain.* The problem of stability of a compound pipe-in-pipe cylinder under axial compression is investigated within spatial theory of elasticity. The cylinder contains initial strain due to the difference between outer radius of the inner pipe and inner radius of the outer pipe.

The equations of neutral balance, linearised boundary conditions and conditions at the border of two pipes are derived using the model of an isotropic incompressible material. The subcritical state solution is obtained from the exact solution of a nonlinear Lamé's problem for such a compound cylinder. The problem of finding the critical values of the compressive force yields homogenous boundary-value problem for ODE-system.

For the neo-Hookean material model the numerical results are obtained. These results make it possible to conclude on the influence of initial strain values on the critical values of the compressive force.

# ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В. С., Украинец Н. А.

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ"  
Харьков, Украина*

С помощью обобщенного метода Фурье найдено решение первой основной задачи теории упругости для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью. Использование полученных авторами теорем сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра позволило свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. При этом оператор системы является вполне непрерывным в пространстве  $l_2$  при условии непересечения граничных поверхностей. Система решена методом редукции. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния рассматриваемой области для различных значений параметров и заданных на граничных поверхностях функций.

Рассмотрим упругое полупространство, имеющее круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе. Среду, заполняющую полупространство, будем считать однородной и изотропной. Введем одинаково ориентированные декартову  $\{x, y, z\}$  и цилиндрическую  $\{\rho, \varphi, z\}$  системы координат с совмещенными центрами. Ось  $z$  направим вдоль оси цилиндра, а ось  $y$  - перпендикулярно границе полупространства. обозначим радиус цилиндра через  $a$ , расстояние от его оси до поверхности полупространства через  $h$ . Тогда уравнения границы полупространства  $S_1$  и цилиндрической полости  $S_2$  запишем в виде  $y = h$  и  $\rho = a$  соответственно.

Найдем решение однородного уравнения Ламе

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

в полупространстве  $y < h$  ( $h > a$ ) вне цилиндра, удовлетворяющее на указанных поверхностях граничным условиям:

$$F\vec{u}|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x, z), \quad (2)$$

$$F\vec{u}|_{S_2} = F\vec{u}_{02}(\varphi, z), \quad (3)$$

где  $\vec{u}$  и  $F\vec{u}$  — векторы упругих перемещений и напряжений,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

Для граничных поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  введем системы базисных решений уравнения Ламе, записанные в декартовой и цилиндрической системах координат, как это было сделано в работе [1]:

$$\vec{u}_1^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_1^{(1)} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu), \quad \vec{u}_3^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_3^{(1)} u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu),$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z; \lambda, \mu) &= \frac{4}{\lambda}(\sigma - 1)u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)\vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda}\nabla(yu^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)), \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(2)}r_m(\rho, \varphi, z; \lambda), \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(2)}s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_1^{(j)} &= \frac{1}{\lambda}\nabla, \quad N_3^{(j)} = \frac{i}{\lambda}rot(\vec{e}_3^{(j)} \cdot), \quad (j = 1, 2) \\ N_2^{(2)} &= \frac{1}{\lambda}\left[\nabla(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + 4(\sigma - 1)(\nabla - \vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z})\right]. \end{aligned}$$

Здесь функции  $u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu)$ ,  $r_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$ ,  $s_m(\rho, \varphi, z; \lambda)$  - декартовы и цилиндрические базисные решения уравнения Лапласа:

$$u^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) = e^{i\lambda z \pm \gamma y + i\mu x}, \quad r_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{i\lambda z + im\varphi}I_m(\lambda\rho),$$

$$s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) = e^{i\lambda z + im\varphi}(\text{sign}\lambda)^m K_m(|\lambda|\rho), \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

$\vec{e}_j^{(k)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — орты декартовой ( $k = 1$ ) и цилиндрической ( $k = 2$ ) систем координат,  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  - модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода.

Векторные функции  $\vec{R}_{k,m}$  ( $\vec{S}_{k,m}$ ) ( $k = 1, 2, 3$ ), регулярные в области  $\{\rho < R\}$  ( $\{\rho > R\}$ ), где  $R > 0$ , — внутренние (внешние) решения уравнения Ламе для цилиндра, а векторные функции  $\vec{u}_k^{(-)}$  ( $\vec{u}_k^{(+)}$ ), регулярные в области  $\{y > h\}$  ( $\{y < h\}$ ), — решения уравнения Ламе для полупространства.

Используя соотношение [2]

$$F\vec{u} = 2G\left(\vec{n}div\vec{u}\frac{\sigma}{1-2\sigma} + (\vec{n}, grad)\vec{u} + \frac{1}{2}[\vec{n}, rot\vec{u}]\right),$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\vec{n}$  — вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности, запишем формулы для напряжений, действующих на поверхности  $S_1$  с нормалью  $\vec{n}_1^\pm = \pm\vec{e}_y$ :

$$\begin{aligned} F\vec{u}_1^{(\pm)} &= 2G\left[\pm\frac{i\mu\gamma}{\lambda}\vec{e}_x + \frac{\gamma^2}{\lambda}\vec{e}_y \pm i\gamma\vec{e}_z\right]u^\pm, \\ F\vec{u}_2^{(\pm)} &= 2G\left[\frac{i\mu}{\lambda}(2\sigma - 1 \pm \gamma y)\vec{e}_x \pm \frac{\gamma}{\lambda}(2\sigma - 2 \pm \gamma y)\vec{e}_y \pm i(2\sigma - 1 \pm \gamma y)\vec{e}_z\right]u^\pm, \quad (4) \\ F\vec{u}_3^{(\pm)} &= 2G\left[i\left(\frac{\gamma^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}\right)\vec{e}_x \pm \frac{\mu\gamma}{\lambda}\vec{e}_y \pm \frac{i\mu}{2}\vec{e}_z\right]u^\pm, \end{aligned}$$

и на поверхности  $S_2$  с нормалью  $\vec{n}_2^+ = \vec{e}_\rho$ :

$$\begin{aligned} F\vec{R}_{1,m} &= 2G\lambda\left[\frac{\partial r_{m-1}}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_+ + \frac{\partial r_{m+1}}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_- + i\frac{\partial r_m}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_z\right], \\ F\vec{R}_{2,m} &= 2G\lambda\left[\left(|\lambda|\rho + \frac{(m-1)(m-1+2\sigma)}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-3)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)}\right)r_{m-1}\vec{e}_+ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial r_m}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_- + i\frac{\partial r_m}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_z\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( |\lambda|\rho + \frac{(m+1)(m+1-2\sigma)}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-3)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)} \right) r_{m+1}\vec{e}_- + \\
& + i \left( |\lambda|\rho + \frac{m^2}{|\lambda|\rho} + (2\sigma-2)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)} \right) r_m\vec{e}_z \Big], \quad (5)
\end{aligned}$$

$$F\vec{R}_{3,m} = -2G\lambda \left[ \frac{m-1}{|\lambda|\rho} r_{m-1}\vec{e}_+ + \frac{m+1}{|\lambda|\rho} r_{m+1}\vec{e}_- + i\frac{m}{2|\lambda|\rho} r_m\vec{e}_z \right],$$

где  $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{e}_1^{(2)} + i\vec{e}_2^{(2)})e^{i\varphi}$ ,  $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{e}_1^{(2)} - i\vec{e}_2^{(2)})e^{-i\varphi}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{e}_3^{(2)}$ .

Формулы для напряжений  $F\vec{S}_{k,m}$  ( $k = 1..3$ ), действующих на поверхности  $S_2$  с нормалью  $\vec{n}_2^- = -\vec{e}_\rho$ , получаются из приведенных заменой  $r_m$  на  $s_m$ ,  $r_{m\pm 1}$  на  $-s_{m\pm 1}$ .

Решение задачи будем искать в виде суперпозиции внешних решений уравнения Ламе для цилиндра и внутренних решений для полупространства:

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{km}(\lambda) \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) d\mu d\lambda. \quad (6)$$

Здесь  $B_{km}(\lambda)$  и  $H_k(\lambda, \mu)$  — неизвестные интегральные плотности, которые определим в результате удовлетворения граничных условий.

Предположим, что заданные на граничных поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  функции (2) и (3) можно представить в виде абсолютно сходящихся рядов и интегралов:

$$F\vec{u}_{01}(x, z) = \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_j(\lambda, \mu) e^{i\lambda z + i\mu x} d\lambda d\mu \vec{e}_j^{(1)},$$

$$F\vec{u}_{02}(\varphi, z) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda) e^{i\lambda z + im\varphi} d\lambda \vec{e}_j,$$

причем функции  $C_j(\lambda, \mu)$  являются ограниченными, а ряд  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda)$  абсолютно сходится при всех  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

Для решения задачи используем теоремы сложения или формулы переразложения базисных решений для полупространства и цилиндра. Доказательство этих теорем основано на соотношениях, связывающих гармонические функции в декартовой и цилиндрической системах координат [3]. С помощью теорем сложения решение задачи можно записать в системе координат, связанной с рассматриваемой граничной поверхностью.

Так, с помощью интегральных представлений внешних решений уравнения Ламе для цилиндра через решения для полупространства:

$$\vec{S}_{k,m} = \frac{(-i \operatorname{sign}\lambda)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2^m(\lambda, \mu) \vec{u}_k^{(-)} \frac{d\mu}{\gamma}, \quad (k = 1, 3)$$



$$\vec{S}_{2,m} = \frac{(-i \operatorname{sign} \lambda)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2^m(\lambda, \mu) \left[ \left( m\mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \vec{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(-)} + 4\mu(1 - \sigma) \vec{u}_3^{(-)} \right] \frac{d\mu}{\gamma^2},$$

где  $\omega_2(\lambda, \mu) = (\mu - \gamma)/|\lambda|$ ,  $y > 0$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , запишем решение задачи (6) в декартовой системе координат. Переходя в полученном выражении к напряжениям по формулам (4), удовлетворим на поверхности  $S_1$  граничному условию (2). Получим систему уравнений относительно функций  $H_k(\lambda, \mu)$ , определитель которой  $D_1(\lambda, \mu) = \frac{\gamma}{\lambda^2}(3 - 4\sigma)e^{3\gamma h}$  отличен от нуля.

Используя разложения решений уравнения Ламе для полупространства  $\vec{u}_k^{(+)}$  по внутренним решениям для цилиндра:

$$\vec{u}_k^{(+)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i\omega_1)^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3)$$

$$\vec{u}_2^{(+)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(i\omega_1)^m}{\lambda^2} \left[ m\mu \vec{R}_{1,m} + \gamma \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1 - \sigma) \vec{R}_{3,m} \right],$$

где  $\omega_1(\lambda, \mu) = (\mu - \gamma)/\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , представим функцию  $\vec{u}$  в цилиндрической системе координат. Переходя в полученном выражении к напряжениям, удовлетворим на поверхности  $S_2$  граничному условию (3). Определитель полученной системы  $D_2^m(|\lambda|a, \sigma)$  при  $\sigma \in [0, \frac{1}{2})$  отличен от нуля. При  $|m| \geq 2$  для него справедлива оценка [4]:

$$|D_2^m(|\lambda|a, \sigma)| > C(\sigma)(m^2 + \lambda^2 a^2) K_{m-1}(|\lambda|a) K_m(|\lambda|a) K_{m+1}(|\lambda|a).$$

Подставляя функции  $H_k(\lambda, \mu)$ , выраженные из первой системы, придем к трем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно интегральных плотностей  $B_{km}(\lambda)$ . Запишем их в операторной форме в виде матричного уравнения:

$$(I + G)\vec{b} = \vec{q}. \tag{7}$$

Здесь  $G$  — оператор, определяемый матрицей системы,  $I$  — единичный оператор, а  $\vec{b}$  и  $\vec{q}$  — соответственно векторы-столбцы неизвестных и правых частей системы.

Оператор  $G$  является вполне непрерывным оператором в пространстве  $l_2$  при условии непересечения граничных поверхностей  $h > a$ , а правые части системы (7) принадлежат пространству  $l_2$ . Доказательство этих утверждений проводится аналогично тому, как это было сделано в работе [5] для задачи Дирихле, рассмотренной для той же пространственной области.

Из альтернативы Гильберта следует, что система рассмотренной задачи разрешима и имеет единственное решение в пространстве  $l_2$ . Приближенное решение системы может быть получено методом редукции.

Численные расчеты проводились для случая, когда на цилиндрической поверхности заданы равномерно распределенные нормальные напряжения, а на границе полупространства — функция  $F\vec{u}_{01}(x, z)/(2G) = (0, -\cos(\lambda z)/(1 + (x/l)^2), 0)$ , при различных значениях  $\varepsilon = a/h$ ,  $\lambda$ ,  $l$  и  $\sigma = 0.25$ .

Для разных значений  $\varepsilon$  найден порядок системы  $n$ , при котором граничные условия удовлетворяются с точностью  $10^{-6}$ . Так, для  $\varepsilon = 0.3$  указанная точность

достигается при  $n \geq 7$ , для  $\varepsilon = 0.7$  — при  $n \geq 15$ , а для  $\varepsilon = 0.9$  — при  $n \geq 25$ . Эти данные свидетельствуют о быстрой сходимости метода редукции рассматриваемой задачи.

Проанализировано влияние  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $l$  на напряжения и деформации в описанной области.

Использованный в настоящей работе обобщенный метод Фурье позволяет находить решение задачи при любых значениях геометрических параметров, в частности, при сближении граничных поверхностей путем сравнительно небольшого увеличения количества уравнений системы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Проценко В.С., Попова Н.А. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью. // Доповіді НАН України. 2004. № 12. С. 52–58.
- [2] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [3] Ерофеев В.Т. Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989. 255 с.
- [4] Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей. // Доповіді НАН України. 1998. № 2. С. 78–83.
- [5] Проценко В.С., Попова Н.А. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью. // Вісник ХНУ. Математика, прикладна математика і механіка. 2002. № 542. С. 42–51.

**Protchenko V.S., Ukrainetz N.A.** *The first boundary-value problem of elasticity theory for the semispace with the circular cylindrical cavity.* The first boundary-value problem of elasticity theory for the semispace with the circular cylindrical cavity is solved by means of the general Fourier method. The use of addition theorems of the basis solutions of the homogeneous Lamé equations for the semispace and the cylinder allowed reducing this problem to the infinite system of the linear algebraic equations. Operator of this system is quite continuous in  $l_2$  in case boundary surfaces are not intersect. This system is solved by means of the reduction method. The theorems are proved by authors. The stress-strained state of the semispace with the circular cylindrical cavity is studying for the concrete parameter values and the boundary functions.

# К УЧЕТУ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОИСТЫХ СРЕД

**Пряхина О. Д., Смирнова А. В.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Приводятся новые аналитические представления определителей матриц-символов ядер систем интегральных уравнений динамических смешанных задач для многослойных термоэластостатических сред с неоднородностями различной природы.

Динамические задачи для полуграниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, являются на сегодняшний день малоизученными. Сложность их исследования обусловлена тем, что вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния системы от большого числа параметров традиционные аналитические и численные методы анализа становятся неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. В работе приводятся новые аналитические представления элементов и определителей матриц-символов ядер систем интегральных уравнений (ИУ), позволяющих эффективно реализовать алгоритмы численного анализа условий возникновения резонансных режимов колебаний.

Гармонические колебания многослойной полуграниченной среды, вызванные вибрацией берегов трещин и границ включений, описываются краевой задачей для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных [1], которая методом, изложенным в [2,3], сводится к системе интегральных уравнений I рода. Матрица-символ ядра указанной системы  $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$  является блочной, размерность ее элементов — матриц  $\mathbf{K}_{ij}$  определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности  $3 \times 3$ , а в общем случае для термоэластостатических сред —  $5 \times 5$ . Размерность системы ИУ равна  $5 \times (P + M)$ ,  $P, M$  — соответственно общее количество включений и трещин в среде. Элементы матриц  $\mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta, \omega)$  кроме параметров преобразования Фурье  $\alpha, \beta$  и частоты гармонических колебаний  $\omega$  зависят от геометрических и физико-механических параметров слоев, а также от параметров, характеризующих положение неоднородностей в среде. Кроме того, параметрами задачи являются размеры и относительное расположение областей, занятых включениями и трещинами.

Для представления  $\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$  в форме, удобной для проведения дальнейшего анализа и допускающей простую интерпретацию результатов, введены специальные матрицы, характеризующие положение дефектов в среде. Не нарушая общности, предположим, что дефекты расположены в плоскостях раздела физико-механических свойств слоев.

Для трещины, расположенной в плоскости  $z = -2 \sum_{k=1}^p h_k$ , вводится матрица

$$\mathbf{S}_{Np} = \mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \dots, h_p) - \mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N),$$

для включения в той же плоскости — матрица

$$\mathbf{G}_{Np} = [\mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \dots, h_p)]^{-1} - [\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N)]^{-1}.$$

Здесь  $\mathbf{K}_p^-$  — матрица Грина пакета  $p$  слоев со свободной верхней гранью,  $\mathbf{K}_{N-p}$  — матрица Грина пакета  $(N-p)$  слоев на жестком основании,  $h_i$  — полутолщина  $i$ -го слоя.

В этих обозначениях матрица-символ системы ИУ построена в форме [3]: при наличии в среде только включений

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{G}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ -\mathbf{K}_i^- \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_{N-j}, & i < j, \\ -\mathbf{K}_{N-i}^- \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_j^-, & i > j, \end{cases} \quad (1)$$

при наличии в среде только трещин

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i > j, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{K} = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$ , матрицы  $\mathbf{R}_{km}$  и  $\mathbf{R}_{km}^-$  даются формулами

$$\mathbf{R}_{km} = (-1)^{(k-m)} \prod_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i) \mathbf{B}_+(-h_i),$$

$$\mathbf{R}_{km}^- = \prod_{i=k+1}^m \Phi_i^{-1}(h_1, h_2, \dots, h_i) \mathbf{B}_-(h_i).$$

Рекуррентная процедура вычисления матриц  $\mathbf{K}_m^-(h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $\mathbf{K}_{N-m}(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$ ,  $\Phi_m(h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $\mathbf{F}_{N-m}(h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$  приведена в [4]. Вспомогательные матрицы  $\mathbf{B}_\pm$  даются в [1, 3].

Соотношения (1)–(2) позволяют моделировать любое сочетание дефектов в среде, обладающей сложными физико-механическими свойствами. Доказана теорема:

**Теорема.** Определитель матрицы-символа ядра системы ИУ при наличии включений и трещин, расположенных соответственно между слоями с номером  $p$  и  $p+1$ ,  $i$  и  $i+1$ , равен

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \begin{cases} \det \mathbf{P}_{ip}^{-1}(h_1) \det \mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & p < i, \\ \det \mathbf{S}_{pi}^{-1}(h_1) \det \mathbf{G}_{Np}^{-1}, & p > i. \end{cases}$$

Матрица  $\mathbf{S}_{Ni}$  описывает положение трещины, а  $\mathbf{G}_{Np}$  — включения в  $N$ -слойной среде;  $\mathbf{S}_{pi}$ ,  $\mathbf{P}_{ip}$  — матрицы, характеризующие относительное расположение неоднородностей:

$$\mathbf{S}_{pi} = \mathbf{K}_i^-(h_1, h_2, \dots, h_i) - \mathbf{K}_{p-i}(h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_p),$$

$$\mathbf{P}_{ip} = [\mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \dots, h_p)]^{-1} - [\mathbf{K}_{(p-i)}^+(h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_i)]^{-1};$$

$\mathbf{K}_p^\pm(h_1, h_2, \dots, h_p)$  — матрица Грина пакета  $p$  слоев со свободной верхней (–) или нижней (+) гранью,  $\mathbf{K}_N(h_1, h_2, \dots, h_N)$  — матрица Грина пакета  $N$  слоев на жестком основании.

Используя приведенные теоремы, можно построить определитель системы ИУ при произвольном количестве, сочетании и взаимном расположении дефектов в слоистой среде. Отметим, что если включение или трещина находится внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к ней слоев положить равными. Для однородной среды, содержащей многоуровневые дефекты, равными принимаются физико-механические параметры всех слоев. Дальнейшее преобразование выражений для определителей систем ИУ проводится при наличии симметрии свойств материалов слоев. Метод построения  $\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$  в виде отношения целых функций для изотропных и трансверсально изотропных упругих сред и примеры его использования приведены в [4].

Достоинством полученных формул для определения  $\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$  является четкое представление о структуре его особых множеств (нулей и полюсов), что позволяет путем целенаправленного подбора комплекса геометрических и физико-механических параметров управлять волноводными свойствами, проектировать системы с заданными спектральными характеристиками, минуя трудоемкую часть решения краевых задач и построения систем ИУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017-офи), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
- [2] Бабешко В.А., Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. № 2. С. 3–10.
- [3] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
- [4] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 44–53.

**Pkyakhina O.D., Smirnova A.V.** *To the account of the action of inhomogeneities of various nature on spectral characteristics of layered media.* The work describes new analytical representations of determinants of matrices-symbols of kernels of integral equations systems of dynamic mixed problems for multilayered thermoelectroelastic media with inhomogeneities of various nature.

# О РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЦЕДУРЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ГРИНА МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

**Пряхина О. Д., Смирнова А. В.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

В работе получены новые рекуррентные формулы, определяющие элементы и определитель матрицы-символа Грина динамической задачи о колебаниях многослойной среды.

Задачи механики контактного взаимодействия имеют особое значение, так как условия передачи давления в зоне контакта являются определяющим фактором в расчетах на прочность, при оценке рисков разрушения конструкций и их элементов, фундаментных и коммуникационных сооружений, литосферных плит и т. д. Контактные задачи в общем случае приводят к необходимости решения систем интегральных уравнений (СИУ)

$$\int_{\delta_1} \int_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

ядра которых определяются краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями [1–3]. В (1)  $f(x, y)$  — вектор, компонентами которого являются заданные в области  $\Omega$  перемещения. а  $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$  — трансформанта Фурье неизвестного вектора напряжений.

Для решения рассматриваемого класса задач необходимы эффективные методы построения матриц-символов ядер СИУ, методы построения элементов и определителей этих матриц, обеспечивающие проведение всестороннего анализа их свойств, а также методы построения решения СИУ с осциллирующими ядрами.

Метод построения элементов матриц-символов Грина многослойных сред, основанный на специальном представлении решения для одного слоя, предложен в [1]. Такой подход является эффективным при вычислении значений элементов  $\mathbf{K}$ , например, на контурах интегрирования  $\delta_1, \delta_2$ , так как не содержит растущих экспоненциальных составляющих. Однако при построении множества нулей и полюсов более эффективным является представление элементов матрицы  $\mathbf{K}$  в виде отношения целых функций.

Для пакета  $N$  слоев с жестко заземленной нижней гранью, либо жестко сцепленного с упругим полупространством, матрица-символ Грина представима в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_N(\alpha, \beta, \omega) = \left\| K_{ij}^N \right\|_{i,j=1}^3, \\ K_{11}^N &= \frac{\alpha^2}{\lambda^2 \Delta_{2N}(\lambda)} k_{11}^N(\lambda) + \frac{\beta^2}{\lambda^2 \Delta_{1N}(\lambda)} \tilde{k}_{11}^N(\lambda), \\ K_{22}^N &= \frac{\beta^2}{\lambda^2 \Delta_{2N}(\lambda)} k_{11}^N(\lambda) + \frac{\alpha^2}{\lambda^2 \Delta_{1N}(\lambda)} \tilde{k}_{11}^N(\lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

$$K_{33}^N = \frac{k_{22}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$

$$K_{12}^N = K_{21}^N = \frac{\alpha\beta}{\lambda^2} \left( \frac{1}{\Delta_{2N}(\lambda)} k_{11}^N(\lambda) - \frac{1}{\Delta_{1N}(\lambda)} \tilde{k}_{11}^N(\lambda) \right),$$

$$K_{13}^N = -K_{31}^N = i\alpha \frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)}, \quad K_{23}^N = -K_{32}^N = i\beta \frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)}, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Вид функций  $k_{11}^N, \tilde{k}_{11}^N, k_{12}^N, k_{22}^N, \Delta_{1N}, D_{1N}$  определяется конкретной моделью среды.

Элементы  $K_{ij}^N$  зависят от параметров преобразования Фурье  $\alpha, \beta$ , частоты гармонических колебаний  $\omega$ , а также геометрических и физико-механических параметров слоев — толщины  $2h_k$ , плотности  $\rho_k$ , модуля сдвига  $\mu_k$ , коэффициента Пуассона  $\nu_k, k = 1, 2, \dots, N$ .

Для произвольного количества слоев  $N$  впервые получены рекуррентные формулы, определяющие элементы и определитель матрицы-символа Грина  $\mathbf{K}_N(\alpha, \beta, \omega)$ .

Приведем рекуррентные формулы для вычисления функций  $\tilde{k}_{11}^N, \Delta_{1N}, D_{1N}$

$$\tilde{k}_{11}^N = \tilde{k}_{11}^1(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2, h_3, \dots, h_N) + \Delta_{11}(h_1)\tilde{k}_{11}^{N-1}(h_2, h_3, \dots, h_N),$$

$$\Delta_{1N} = \Delta_{10}(h_1)D_{1(N-1)}(h_2, h_3, \dots, h_N) + \Delta_{11}(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2, h_3, \dots, h_N),$$

$$D_{1N} = \Delta_{11}(h_1)D_{1(N-1)}(h_2, h_3, \dots, h_N) + D_{11}(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2, h_3, \dots, h_N),$$

при этом

$$\Delta_{11}(h_k) = \text{ch}(2\sigma_{2k}h_k), \quad D_{11}(h_k) = \tilde{k}_{11}^1(h_k), \quad \Delta_{10}(h_k) = \sigma_{2k} \text{sh}(2\sigma_{2k}h_k),$$

$$\tilde{k}_{11}^1(h_k) = \frac{\text{sh}(2\sigma_{2k}h_k)}{\sigma_{2k}}, \quad \sigma_{2k}^2 = \lambda^2 - \kappa_{2k}^2, \quad \kappa_{2k}^2 = \rho_k\omega^2/\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функции  $\Delta_{2N}, D_{2N}$  и элементы матрицы  $\mathbf{K}_N$ , отличные от  $\tilde{k}_{11}^N$ , даются рекуррентными формулами, имеющими аналогичную структуру.

Установлено, что определитель матрицы-символа Грина пространственной задачи для пакета  $N$  слоев, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, представим в виде отношения целых функций

$$\det \mathbf{K}_N = \prod_{m=1}^2 \frac{D_{mN}(h_1, h_2, \dots, h_N)}{\Delta_{mN}(h_1, h_2, \dots, h_N)},$$

где  $m = 1$  отвечает антиплоской, а  $m = 2$  — плоской задачам.

В полученных представлениях элементов  $k_{ij}^N$  и  $\det \mathbf{K}_N$  уже исключены общие множители в числителе и знаменателе этих функций, дающие пересечения корней и полярных множеств при произвольных значениях параметров механической системы, что является важным при определении спектральных характеристик волновых полей, возбуждаемых в многослойной среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017-офи), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
- [2] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
- [3] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.

**Рyakhina O.D., Smirnova A.V.** *About recurrent procedure of calculating elements of a Green's matrix for multilayered media.* In the work the new recurrent formulas defining elements and a determinant of a Green's matrix-symbol of a dynamic problem about vibrations of the multilayered media are obtained.



# УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКОНЕСУЩЕГО ЖИДКОГО ЦИЛИНДРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Руднев Ю. И.

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

Рассматривается задача об устойчивости кондукционного подвеса жидкого цилиндра, удерживаемого в горизонтальном положении с помощью внешнего магнитного поля. Предложен метод исследования устойчивости на основе анализа спектра частот свободных колебаний рассматриваемой системы. Проведены расчеты границы области устойчивости в пространстве безразмерных параметров системы.

**Введение** Вопросы устойчивости свободной поверхности токонесущей жидкости, взаимодействующей с внешним магнитным полем, возникают во многих технологических процессах. Большой интерес проявляется, в частности, к технологиям получения сверхчистых материалов методами зонной плавки и левитационного переплава с использованием электромагнитных сил для удержания расплава во взвешенном состоянии [1] – [5]. Классическая задача об устойчивости равновесия жидкой зоны горизонтально расположенного цилиндрического проводника с током рассматривалась в [2], где получена приближенная формула для критической длины зоны, и в [3], где исследовалась устойчивость бесконечного жидкого цилиндра относительно периодических возмущений. В данной работе предложен численно-аналитический метод исследования этой задачи.

**Постановка задачи** Рассмотрим кондукционный подвес электропроводной жидкости, при котором сила тяжести компенсируется электромагнитной силой, возникающей при взаимодействии внешнего однородного магнитного поля с пропускаемым через жидкость постоянным электрическим током. Пусть  $\Omega_1$  – об-

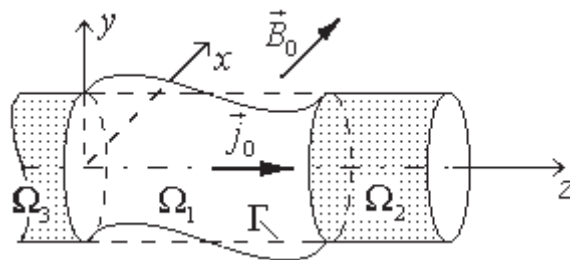


Рис. 1. Схема кондукционного подвеса

ласть, занимаемая жидкостью,  $\Omega_2, \Omega_3$  – цилиндрические электроды радиуса  $R$ ,  $\Omega_0 := \mathbb{R}^3 / \bigcup_{k=1}^3 \Omega_k$  – область вне проводников с током (см. рис.1). Боковую поверхность каждой из областей  $\Omega_k, k = \overline{1, 3}$  обозначим  $\Gamma_k$ , поверхности контакта жидкой зоны с твердыми проводниками –  $S_{12}, S_{13}$ . Контуры, ограничивающие поверхности  $S_{12}$  и  $S_{13}$ , обозначим  $\gamma_{12}, \gamma_{13}$ , соответственно.

Пусть  $j_0$  – объемная плотность тока, протекающего по рассматриваемому проводнику,  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$  – индукция внешнего однородного магнитного поля. Условия равновесия жидкости имеют вид:

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \vec{j}_0 \times \vec{B} = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad P - P^0 = -2\alpha K \text{ на } \Gamma_1, \quad (\vec{B} := \vec{B}_J + \vec{B}_0). \quad (1)$$

где  $P$  – гидростатическое давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma_1$ ,  $K$  – средняя кривизна свободной поверхности жидкости,  $\vec{B}_J$  – индукция магнитного поля собственных токов. Давление  $P^0$  в области  $\Omega_0$  предполагается постоянным.

Нетрудно убедиться, что цилиндрическая жидкая зона радиуса  $r = R$  будет находиться в состоянии равновесия при выполнении равенства:

$$\rho g = j_0 B_0, \quad (j_0 = \text{const}, B_0 = \text{const}). \quad (2)$$

Обозначим через  $\zeta(t, \vartheta, z)$  радиальное отклонение поверхности раздела от равновесного положения, через  $\vec{v}(t, \vec{x})$  – поле скоростей жидкости. Функции  $\zeta$ ,  $\vec{v}$  будем считать малыми величинами первого порядка малости. Гидродинамическое давление, плотность электрического тока, потенциал электрического поля, индукцию магнитного поля представим в виде суммы равновесных значений этих величин и их малых возмущений.

Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве характерных величин радиус цилиндра  $R$  – для линейных размеров,  $(R/g)^{1/2}$  – для времени,  $j_0$  – для плотности тока. Для безразмерных координат  $r/R$ ,  $z/R$  сохраним прежние обозначения  $r$ ,  $z$ . Малые движения жидкости вблизи равновесного состояния описываются линеаризованной системой уравнений и граничных условий магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{\mathbf{Re}} \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{e}_x + W \left( \frac{r}{2} \vec{j} \times \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_z \times \vec{b} \right) \text{ в } \Omega_1, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_r, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$-p + \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{\mathbf{Bo}} (\Delta_\Gamma \zeta + \zeta) - \frac{W}{2} \zeta \text{ на } \Gamma_1, \quad (6)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ на } S_{12} \cup S_{13}, \quad \zeta = 0 \text{ на } \gamma_{12} \cup \gamma_{13}, \quad (7)$$

$$\mathbf{Bo} := \frac{\rho g R^2}{\alpha}, \quad \mathbf{Re} := \frac{R^{3/2} g^{1/2}}{\nu}, \quad W := \frac{\mu_0 j_0^2 R}{\rho g}.$$

Здесь  $\mathbf{Bo}$  – число Бонда,  $\mathbf{Re}$  – число Рейнольдса,  $W$  – безразмерный параметр, характеризующий отношение электромагнитных сил к силе тяжести,  $\Delta_\Gamma$  – оператор Лапласа – Бельтрами.

В дальнейшем удельные электропроводности электродов будем считать одинаковыми,  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Введем безразмерный потенциал электрического поля  $\psi' = \sigma_1 \psi / (j_0 R)$ . Линеаризованные уравнения и граничные условия для безразмерного потенциала возмущений электрического поля имеют вид (штрихи опущены):

$$\vec{j}^{(1)} = -\nabla \psi^{(1)}, \quad \vec{j}^{(k)} = -\bar{\sigma} \nabla \psi^{(k)}, \quad k = 2, 3 \quad (8)$$

$$\Delta\psi^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}; \quad \psi \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r} = -\frac{\partial\zeta}{\partial z} \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial r} = 0 \text{ на } \Gamma_k, \quad k = 2, 3, \quad (10)$$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(k)}, \quad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} = \bar{\sigma} \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial z} \text{ на } S_{1k}, \quad k = 2, 3, \quad (11)$$

где  $\bar{\sigma} = \sigma_2/\sigma_1 = \sigma_3/\sigma_1$  – безразмерный коэффициент электропроводности электродов. Верхний индекс в круглых скобках в (8)–(11) и далее означает номер области, к которой относится та или иная величина.

Возмущения индукции магнитного поля должны удовлетворять следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\operatorname{rot} \vec{b}^{(k)} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \vec{j}^{(k)}, & k = \overline{1, 3} \end{cases}, \quad \operatorname{div} \vec{b}^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega_k, \quad k = \overline{0, 3}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{b}^{(k)} &= \vec{b}^{(0)} \text{ на } \Gamma_k, \quad \vec{b}^{(k)} = \vec{b}^{(1)} \text{ на } S_{1k}, \quad k = \overline{2, 3}, \\ b_r^{(1)} &= b_r^{(0)}, \quad b_z^{(1)} = b_z^{(0)}, \quad b_\vartheta^{(1)} + \frac{\partial B_J^{(1)}}{\partial r} \zeta = b_\vartheta^{(0)} + \frac{\partial B_J^{(0)}}{\partial r} \zeta \text{ на } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем считать, что в начальный момент времени заданы поле скоростей и форма поверхности раздела жидкостей:

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \text{ на } \Gamma_1; \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 \text{ в } \Omega_1. \quad (14)$$

Вопрос об устойчивости равновесного состояния жидкостей сводится к исследованию устойчивости тривиального решения эволюционной задачи (3)–(13) относительно начальных возмущений  $\zeta_0, \vec{v}_0$ .

**Спектральный признак устойчивости** Решение задачи (3)–(13) будем отыскивать с помощью метода Галеркина. Для этого выберем в качестве базиса полную систему соленоидальных вектор-функций  $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^\infty$ , определенных в  $\Omega_1$ , и систему функций  $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$ , определенных на  $\Gamma_1$  равенством  $\zeta_i := \vec{n} \cdot \vec{u}_i|_{\Gamma_1}$ . Функции  $\vec{u}_i, \zeta_i$  должны удовлетворять условиям (5), (7).

По отклонению свободной поверхности  $\zeta = \zeta_i$  можно найти отвечающие ему возмущения потенциала электрического поля  $\psi_i(\vec{x})$  и индукции магнитного поля  $\vec{b}_i(\vec{x})$  как решения задач (8)–(11), (12)–(13), соответственно. Решение эволюционной задачи будем отыскивать в виде:

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^N \dot{c}_i(t) \vec{u}_i(\vec{x}), \quad \{\zeta, \psi, \vec{b}\}(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \{\zeta_i, \psi_i, \vec{b}_i\}(\vec{x}), \quad (15)$$

где  $c_i(t)$  – подлежащие определению функции времени.

Подставляя (15) в уравнение (3) и умножая скалярно обе части полученного равенства на  $\vec{u}_i^*$  (звездочка означает комплексное сопряжение), после интегрирования по области  $\Omega_1$  с использованием условий (5) – (7) получим систему линейных ОДУ с постоянными коэффициентами относительно функций  $c_i(t)$ :

$$\mathcal{A}\ddot{c} + \mathcal{D}\dot{c} + (\mathcal{P} + \mathcal{M})c = 0, \quad c := (c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t))^T. \quad (16)$$

Здесь  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}$  – матрицы кинетической и потенциальной энергий,  $\mathcal{D}$  – матрица вязкой диссипации,  $\mathcal{M}$  – матрица МГД-взаимодействия, элементы которых имеют вид:

$$a_{ij} = \int_{\Omega_1} \vec{u}_i^* \vec{u}_j d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (17)$$

$$p_{ij} = \int_{\Gamma_1} \zeta_i^* \left( -\frac{1}{\text{Bo}} (\Delta_\Gamma \zeta_j + \zeta_j) + \frac{W}{2} \zeta_j \right) d\Gamma, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (18)$$

$$m_{ik} = - \int_{\Omega_1} \vec{u}_i^* (\vec{J}_k \times \vec{e}_x + W (\frac{r}{2} \vec{J}_k \times \vec{e}_\vartheta + \vec{e}_z \times \vec{b}_k)) d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

$$d_{ij} = D(\vec{u}_i, \vec{u}_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (20)$$

где  $D(\vec{u}, \vec{v})$  билинейный функционал, определяемый в декартовой системе координат следующим равенством:

$$D(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega_1} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Таким образом, метод Галеркина позволяет свести задачу о МГД-устойчивости цилиндрической зоны расплава к исследованию устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16), которая, в свою очередь, сводится к исследованию алгебраической спектральной задачи

$$((\lambda^2 \mathcal{A} + \lambda \mathcal{D} + (\mathcal{P} - \mathcal{M})) a = 0. \quad (21)$$

Спектральный признак устойчивости тривиального решения системы (16), а, следовательно, и рассматриваемой МГД - системы имеет вид:

$$\max_k \text{Re}(\lambda_k) < 0. \quad (22)$$

В качестве базисных функций  $u_i$  выбирались собственные функции задачи о малых колебаниях невесомой жидкой зоны в отсутствие магнитного поля и токов. Построение  $u_i$  осуществлялось с использованием метода пограничного слоя. Это позволило выразить в явном виде элементы всех матриц, входящих в (21). Решение спектральной задачи (21) осуществлялось численно с использованием  $QR$  – алгоритма.

**Результаты вычислений.** На рис.2а представлены графики зависимости  $L_{\text{кр}}$  от  $W$  при фиксированном значении параметра  $\bar{\sigma}$  для трех различных значений числа Бонда (область устойчивости расположена ниже соответствующей кривой). Хорошо известно, что в условиях невесомости ( $\text{Bo} = 0$ ) в отсутствие тока ( $W = 0$ ) максимальная безразмерная длина жидкой зоны составляет  $2\pi$ . Как видно из приведенных графиков, наличие тока и магнитного поля вызывает уменьшение  $L_{\text{кр}}$ , причем  $L_{\text{кр}} \rightarrow 0$  при  $W \rightarrow \infty$ . Изломы критических кривых на приведенных графиках объясняются сменой мод опасных возмущений свободной поверхности

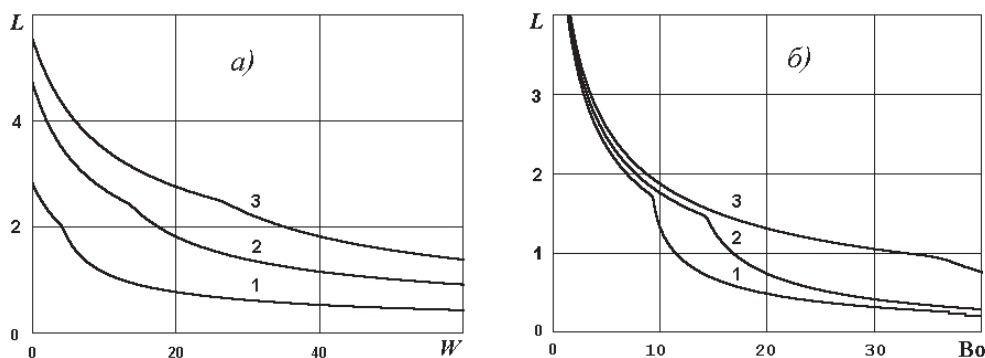


Рис. 2. Граница области устойчивости. а)  $\bar{\sigma} = 0,5$ ; 1 –  $Bo = 4$ ; 2 –  $Bo = 1$ ; 3 –  $Bo = 0,5$ . б)  $W = 0,2$ ; 1 –  $\bar{\sigma} = 0,1$ ; 2 –  $\bar{\sigma} = 1$ ; 3 –  $\bar{\sigma} = 10$ .

жидкости, приводящих к потере устойчивости. Для начальных участков критических кривых (до излома) основной вклад в опасные возмущения вносит мода вида  $\zeta = \sin(2\pi z/L)$ , а после излома – вида  $\zeta = \sin(\pi z/L) \cos \vartheta$ . На рис.2б показаны графики зависимости  $L_{кр}$  от  $Bo$  для различных значений параметра  $\bar{\sigma}$ . Как видно из приведенных результатов, с ростом  $Bo$  критическая длина зоны убывает, причем  $L_{кр} \rightarrow 0$  при  $Bo \rightarrow \infty$ . Отметим также, что  $L_{кр}$  возрастает с увеличением  $\bar{\sigma}$ , причем этот эффект в определенном диапазоне чисел Бонда весьма значителен и может представлять практический интерес.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пфанн В. Зонная плавка. М.: Мир, 1970. 348 с.
- [2] Меркулов В. И. Управление движением жидкости. Новосибирск: Наука, 1981. 174 с.
- [3] Ладиков Ю. П., Ткаченко В. Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. М.: Наука, 1983. 248 с.
- [4] Bojarevics V., Pericleous K. Magnetic levitation fluid dynamics // Magnetohydrodynamics. 2001. Vol. **37**, N 1/2. P. 93–102.
- [5] Bojarevics V., Pericleous K., Cross M. Modeling the dynamics of magnetic semilevitation melting // Metallurgical and Materials Transactions. 2002. Vol. **31B**. P. 179–186.

**Rudnyev Yu.I.** *Stability of current-carrying liquid cylinder in magnetic field.* Stability problem of conductive suspension of liquid cylinder holding horizontally by external magnetic field is considered. The method of stability investigation on the base of analysis of free oscillation frequencies is proposed. The boundary of stability region in the space of dimensionless parameters of system is constructed.

# РАСЧЁТ ЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

**Санников С. В.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского госуниверситета*

Представлена методика расчета звукового излучения модельной пластической деформации дислокационной природы. Рассматривается деформация чистого сдвига у вершины трещины в плоскостях легкого скольжения бесконечного ОЦК монокристалла. Эволюция деформации вызывает непрерывное изменение числа связанных с ней дислокаций и соответствующие немонотонные во времени изменения дислокационного упругого поля, которые полагаются источником данного излучения.

В плоскости скола  $\{010\}$  бесконечного монокристалла, имеющего объёмно-центрированную кубическую решётку, расположена трещина  $-2L \leq x \leq 0$ ,  $-\infty \leq z \leq \infty$ . К плоскостям кристалла  $y = \pm\infty$  приложено однородное растягивающее напряжение  $\sigma_{YU} = \sigma_a$ , достаточное для его пластического деформирования, но недостаточное для роста трещины. Оно вызывает в кристалле плоскую (независящую от координаты  $z$ ) деформацию с пластической составляющей

$$\varepsilon(\vec{R}, t) = \varepsilon_{12}(\vec{R}, t)(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) \quad (1)$$

в окрестностях  $D(t)$  вершин трещины, являющейся деформацией чистого сдвига вдоль его плоскостей лёгкого скольжения  $\{110\}$ . Выше использованы обозначения:  $x, y, z$  — декартовы координаты точки;  $\vec{R} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ ;  $x_1, x_2$  — координаты точки плоскости  $XU$  в декартовой прямоугольной системе  $X_1O X_2$ , повернутой относительно  $XOY$  на угол  $\pi/4$ ;  $\vec{e}_j$  — орты осей  $OX_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Плоскости  $\{110\}$ , пересекаясь с плоскостью  $XU$ , образуют на ней два семейства линий скольжения  $x_j = \text{const}$  ( $j = 1, 2$ ).

В плоскостях  $\{110\}$  располагаются и перемещаются скольжением под действием сдвигового напряжения

$$\tau(\vec{R}, t) = \sigma_{12}(\vec{R}, t)(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) \quad (2)$$

прямолинейные, параллельные оси  $OZ$  краевые дислокации с векторами Бюргерса  $\pm b\vec{e}_j$  ( $j = 1, 2$ ).

За счёт концентрации у вершин трещины напряжения, релаксирующего путём пластической деформации, в областях  $D(t)$  достигаются значительные плотности эффективных дислокаций (избыточных дислокаций одного знака среди дислокаций с параллельными векторами Бюргерса) и, следовательно, возникает суммарное дислокационное упругое поле, существенно влияющее на эволюцию деформации (1).

Плотность эффективных дислокаций с вектором Бюргерса  $b\vec{e}_k$  определяется известным [1] соотношением

$$\Delta\rho_k(\vec{R}, t) = -\frac{1}{b} \frac{d\epsilon_{12}(\vec{R}, t)}{dx_k}. \quad (3)$$

В случае использования при численных расчётах вычислительной сетки с размером квадратной ячейки  $\Delta x, \Delta y = \sqrt{2}h$ , из (3) следует, что в каждом элементарном прямоугольнике  $h \times 2h$ , вытянутом вдоль  $OX_k$  от одного узла сетки до другого и имеющем проходящую через эти узлы ось симметрии  $x_j = x'_j = \text{const}$  ( $j \neq k$ ), должно находиться

$$\Delta N = N_l - N_r = -(h \times 2h) \frac{1}{b} \frac{\epsilon_{12}(x_k + 2h, t) - \epsilon_{12}(x_k, t)}{2h} \quad (4)$$

таких дислокаций, и далее, что каждый интегральный пластический сдвиг вида

$$\vec{e}_k \int_{x'_j-h/2}^{x'_j+h/2} \epsilon_{12}(\vec{R}, t) dx_j = \vec{e}_k h \epsilon_{12}(\vec{R}, t) \quad (5)$$

является суммой  $N$  мгновенных микроскопических величин  $b$ :

$$\vec{e}_k h |\epsilon_{12}(\vec{R}, t)| = \vec{e}_k N b. \quad (6)$$

Количество эффективных дислокаций в прямоугольниках  $h \times 2h$  и в областях  $D(t)$  в целом меняется в процессе эволюции пластической деформации (1), вызывая предполагающиеся ступенчатыми во времени изменения суммарного дислокационного упругого поля и соответствующие изменения  $\Delta\sigma_{12}(\vec{R}, t)$  напряжения (2).

Подробные описания расчёта эволюции деформации (1), учитывающего такие изменения, приведены в [4, 5]. В его рамках для вычисления этой деформации используется очевидная трансформация конечно-разностного представления её скорости:

$$\epsilon_{12}(\vec{R}, t_{i+1}) = \dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_i) \Delta t_i + \epsilon_{12}(\vec{R}, t_i) \quad (7)$$

( $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ). Скорость же рассматриваемой деформации в соответствии с [2, 3] определяется феноменологическим соотношением

$$\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t) = \dot{\epsilon}_0 \exp \left\{ -\frac{U_0 \langle 1 - |\sigma_{12}^e(\vec{R}, t)/\tau_0|^{1/2} \rangle}{KT} \right\} \text{sgn}(\sigma_{12}^e(\vec{R}, t)). \quad (8)$$

В нём  $\dot{\epsilon}_0, U_0, \tau_0, K, T$  — постоянные ( $U_0$  — энергия активации,  $K$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура);  $\sigma_{12}^e(\vec{R}, t)$  — величина превышения напряжением  $\sigma_{12}(\vec{R}, t)$  предела текучести при сдвиге по Сен-Венану, называемая эффективным напряжением;  $\text{sgn}$  — функция передачи знака.

Характер задаваемой (8) функциональной зависимости  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t)$  от  $\sigma_{12}^e(\vec{R}, t)$  таков, что неизменному  $\sigma_{12}^e(\vec{R}, t)$  соответствует неизменная скорость  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t)$ , а любое происходящее в момент времени  $t = t_i$  ступенчатое изменение эффективного

напряжения  $\Delta\sigma_{12}^e(\vec{R}, t) = \sigma_{12}^e(\vec{R}, t_i) - \sigma_{12}^e(\vec{R}, t_{i-1})$  влечёт за собой изменение  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t)$  с  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_{i-1})$  до  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_i)$  и порождает ускорение

$$\ddot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t) = (\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_i) - \dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_{i-1}))/\Delta t^*. \quad (9)$$

Величина  $\Delta t^*$  в (9) определяется с помощью следующего рассуждения. Пусть подстановка  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$  вместо  $\epsilon_{12}(\vec{R}, t)$  в (6) даёт  $\vec{e}_k N_1 b$ , а подстановка  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t_i)(t_{i+1} - t_i) - \vec{e}_k N_2 b$ ; и пусть на временных отрезках  $(t_{i-1}, t_i), (t_i, t_{i+1})$ , внутри которых  $\dot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t) = const$ , мгновенные микроскопические сдвиги, фигурирующие в правой части (6), располагаются равномерно. Тогда внутри этих временных отрезков они будут следовать через промежутки  $\Delta t_1^* = (t_i - t_{i-1})/(N_1 - 1)$  и  $\Delta t_2^* = (t_{i+1} - t_i)/(N_2 - 1)$  соответственно, а при переходе через  $t_i$  — отстоять не более чем на  $(\Delta t_1^* + \Delta t_2^*)/2 = \Delta t^*$ .

В дополнение к уже изложенному предполагается, что общее динамическое воздействие на плоскость  $XY$ , оказываемое ступенчатым напряжением  $\Delta\sigma_{12}(\vec{R}, t)$ , ответственным за появление ускорения (9), складывается из его собственной динамической составляющей  $\Delta'\sigma_{12}(\vec{R}, t)$  и динамической добавки за счёт упомянутого ускорения

$$\Delta^* \sigma_{12}(\vec{R}, t) = \Delta'\sigma_{12}(\vec{R}, t) + \rho A \ddot{\epsilon}_{12}(\vec{R}, t), \quad (10)$$

( $\rho$  — плотность,  $A$  — коэффициент пропорциональности необходимой размерности и величины). Это сводит построение математического описания звукового излучения, порождаемого напряжением  $\Delta\sigma_{12}(\vec{R} = \vec{R}', t = t')$  к решению динамической задачи теории упругости

$$\begin{aligned} \mu \nabla_1^2 \vec{U}^* + (\lambda + \mu) \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \vec{U}^*) + \vec{F} &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{U}^* \\ \vec{U}^*(\vec{R}, \vec{R}', t \leq t') &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^*(\vec{R}, \vec{R}', t \leq t') = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

со специальными объёмными силами

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{R}, \vec{R}', t, t') &= \vec{F}^{(1)}(\vec{R}, \vec{R}', t, t') + \vec{F}^{(2)}(\vec{R}, \vec{R}', t, t') \\ \vec{F}^{(1)}(\vec{R}, \vec{R}', t, t') &= \Delta^* \sigma_{12}(\vec{R}', t') \delta(x_1 - x'_1) \frac{\delta(x_2 - x'_2)}{(x_2 - x'_2)} \delta_+(t - t') \vec{e}_1 \\ \vec{F}^{(2)}(\vec{R}, \vec{R}', t, t') &= \Delta^* \sigma_{12}(\vec{R}', t') \frac{\delta(x_1 - x'_1)}{(x_1 - x'_1)} \delta(x_2 - x'_2) \delta_+(t - t') \vec{e}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

моделирующими воздействие на плоскость напряжения  $\Delta^* \sigma_{12}(\vec{R}', t')$ . В (11, 12)  $\nabla_1 = \vec{e}_1 \partial / \partial x_1 + \vec{e}_2 \partial / \partial x_2$ ,  $\delta$  и  $\delta_+$  — симметричная и односторонняя дельта функции.

После определения перемещений  $\vec{U}^*(\vec{R}, \vec{R}', t, t')$ , удовлетворяющих (11), можно получить и перемещения  $\vec{U}(\vec{R}, t)$ , которые будут описывать звуковое излучение, обусловленное пластическим деформированием у вершины трещины в целом:

$$\vec{U}(\vec{R}, t) = \int_0^t dt' \int_{D^+(t')} \vec{U}^*(\vec{R}, x', y', t, t') dx' dy' \quad (13)$$



Здесь  $D^+(t')$  — расширение  $D(t')$ , позволяющее в достаточной степени учесть вклад  $\Delta'\sigma_{12}(\vec{R}', t')$  в перемещения (13);  $x', y'$  — проекции  $\vec{R}'$  на координатные оси  $OX$  и  $OY$  соответственно.

Задача, непринципиально отличающаяся от (11, 12) была поставлена и решена автором ранее [5] с целью изучения главным образом зависимости  $\vec{U}(\vec{R}, t)$  и соответствующей плотности энергии рассматриваемого звукового излучения от времени в волновой области. Источник излучения предполагался точечным.

На данном этапе планируется провести аналогичное исследование с использованием усовершенствованной расчётной модели (9–13).

Работа проводится при частичной финансовой поддержке РФФИ (Грант №06-08-01039а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Kroner E.* Kontinuumtheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin.: Springer-Verlag, 1958. 198 p.
- [2] *Spitzig W.A.* Analysis of the plastic deformation in iron single crystals // *Acta Met.*, 1970. V. 18. p. 1275–1282.
- [3] *Бернер Р., Кронмюллер Г.* Пластическая деформация монокристаллов. М.: Мир, 1969. 272 с.
- [4] *Карпинский Д.Н., Санников С.В.* Моделирование на ЭВМ пластической деформации у вершины трещины // *Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки.* 1984. № 3.
- [5] *Санников С.В.* Расчёт пластического деформирования у вершин трещины и связанных с ним явлений.: Автореферат канд. дисс., Ростов-на-Дону, РГУ, 1991. 18 с.

**Sannikov S.V.** *Sound radiation calculation for the plastic deformation at the crack tip.* It is assumed the sound radiation calculations for the model plastic deformation by the dislocation origin. It is considered the pure shear deformation at the crack tip in the active slip planes of the unlimited BCC crystal. The deformation evolution induces the continuous variations of the related dislocation amount and the proper nonmonotonic variations (in time) of the dislocation elastic field, which supposes as the sound radiation source.

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДИССИПАТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ПО ТИПАМ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

**Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского госуниверситета*

Рассмотрены гармонические колебания круговой цилиндрической оболочки из однонаправленного волокнистого композита с полимерной матрицей. Численно исследовано распределение диссипативной энергии по типам деформаций в зависимости от механических характеристик волокна и матрицы в различных частотных диапазонах.

Разработка тонкостенных композитных конструкций, обладающих, наряду с заданными жесткостными параметрами, высокими демпфирующими свойствами, является весьма актуальной задачей. Оценка демпфирующей способности композитной оболочки связана с расчетом коэффициента поглощения энергии в теле оболочки определяемого как

$$\eta = D/(2\pi\Pi), \quad (1)$$

где  $D$  — диссипативная энергия, осредненная за цикл колебаний,  $\Pi$  — среднее значение механической энергии. В дальнейшем рассмотрим композитную цилиндрическую оболочку, находящуюся под воздействием гармонически изменяющейся поверхностной нагрузки. Предметом исследования является распределение энергии диссипации по типам деформаций в зависимости от механических характеристик волокна и матрицы в различных частотных диапазонах.

В дальнейшем используем теорию оболочек типа Тимошенко, в соответствии с которой амплитуды перемещений и деформаций будут представлены в виде [1]:

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2, z) &= u(\alpha_1, \alpha_2) + z\phi_1(\alpha_1, \alpha_2); & V(\alpha_1, \alpha_2, z) &= v(\alpha_1, \alpha_2) + z\phi_2(\alpha_1, \alpha_2); \\ W(\alpha_1, \alpha_2, z) &= w(\alpha_1, \alpha_2); & & \\ \varepsilon_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= E_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{ij}(\alpha_1, \alpha_2); & \varepsilon_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= E_{i3}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \varepsilon_{33}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= 0; & (i, j) &= 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_{ii}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{i3}$ ,  $K_{ii}$ ,  $K_{12}$  — соответственно деформации растяжения-сжатия, тангенциального и поперечного сдвига, изменения кривизн и кручения.

$$\begin{aligned} E_{11} &= u' + k_1w; & E_{22} &= v^\bullet + u\psi + k_2w; & E_{12} &= u' + u^\bullet - v\psi; \\ K_{11} &= \phi_1'; & K_{22} &= \phi_2 + \phi_1\psi; & K_{12} &= \phi_2' - \phi_2\psi + \phi_1^\bullet; \\ E_{13} &= \phi_1 - \theta_1; & E_{23} &= \phi_2 - \theta_2; & \theta_1 &= -w' + uk_1; & \theta_2 &= -w^\bullet + vk_2; \\ \varepsilon_1 &= h_*/R_*, & \psi &= A_2'/A_2, & (..)' &= (..)_{,\alpha_1}/A_1, & (..)^\bullet &= (..)_{,\alpha_2}/A_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения гармонических колебаний, полученные из вариационного принципа Гамильтона для оболочки вращения, в общепринятых обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} T'_{11} + \psi(T_{11} - T_{22}) + S^\bullet + k_1 Q_{11} + \omega^2(bu + c\phi_1) + p_1 &= 0; \\ S' + 2\psi S + T_{22}^\bullet + k_2 Q_{22} + \omega^2(bv + c\phi_2) + p_2 &= 0; \\ Q'_{11} + \psi Q_{11} + Q_{22}^\bullet - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + \omega^2 bw + p_3 &= 0; \\ M'_{11} + \psi(M_{11} - M_{22}) + H^\bullet - Q_{11} + \omega^2(cu + d\phi_1) &= 0; \\ H' + 2\psi H + M_{22}^\bullet - Q_{22} + \omega^2(cv + d\phi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Эффективные физико-механические характеристики композита определяются по свойствам составляющих его изотропных компонент, в данном случае упругого высокомодульного волокна ( $E_f, \nu_{12f}, G_f, V_f$ ) и полимерной матрицы, термовязкоупругие свойства которой для случая малых колебаний определяются через вязкоупругие аналоги модуля Юнга, коэффициент Пуассона и модуля сдвига ( $E_m, \nu_{12m}, G_m, V_m = 1 - V_f$ ). Для слоя композита с укладкой волокон вдоль оси симметрии эффективные характеристики представлены в работах [2,3].

Связь усилий и моментов с деформациями, записываются в виде:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} + A_{11}K_{11} + A_{12}K_{22} + 2L_{16}E_{12} + 2N_{16}K_{12}; \\ &\dots\dots\dots \\ M_{11} &= A_{11}E_{11} + A_{12}E_{22} + D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} + 2N_{16}E_{12} + 2R_{16}K_{12}; \\ &\dots\dots\dots \\ Q_{11} &= J_{13}E_{13} + J_{45}E_{23}; \end{aligned} \tag{5}$$

где  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  — комплекснозначные жесткости, зависящие от эффективных характеристик композита и структурных параметров оболочки [4]. Для численного исследования используется подход связанный с последовательным применением метода рядов Фурье и метод ортогональной прогонки. После отделения окружной координаты диссипативная энергия может быть представлена в виде:

$$D = D_R + D_I + D_K + D_S + D_Z, \tag{6}$$

где  $D_R, D_I, D_K, D_S, D_Z$  — составляющие диссипативной энергии, соответствующие деформациям растяжения-сжатия, изгиба, кручения, тангенциальным и поперечным деформациям.

$$\begin{aligned} D_R &= \pi^2 \int_0^L \sum_{n=0}^N (T_{11n}^R E_{11n}^I - T_{11n}^I E_{11n}^R + T_{22n}^R E_{22n}^I - T_{22n}^I E_{22n}^R) d\alpha_1; \\ D_I &= \pi^2 \int_0^L \sum_{n=0}^N (M_{11n}^R K_{11n}^I - M_{11n}^I K_{11n}^R + M_{22n}^R K_{22n}^I - M_{22n}^I K_{22n}^R) d\alpha_1; \\ D_K &= 2\pi^2 \int_0^L \sum_{n=0}^N (H_n^R K_{12n}^I - H_n^I K_{12n}^R) d\alpha_1; \end{aligned} \tag{7}$$

$$D_S = \pi^2 \int_0^L \sum_{n=0}^N (S_n^R E_{12n}^I - S_n^I E_{12n}^R) d\alpha_1;$$

$$D_Z = \pi^2 \int_0^L \sum_{n=0}^N (Q_{11n}^R \varphi_{1n}^I - Q_{11n}^I \varphi_{1n}^R + Q_{22n}^R \varphi_{2n}^I - Q_{22n}^I \varphi_{2n}^R) d\alpha_1;$$

где  $T_{11}^R, T_{11}^I$  и т.д. — соответственно действительные и мнимые части комплексных амплитуд усилий, моментов и перерезывающих сил,  $n$  — номер окружной гармоники.

Численный анализ проведен на примере жестко защемленной 5-слойной круговой цилиндрической оболочки из однонаправленного волокнистого композита. Примем следующие значения исходных параметров:  $L = 5R$ ;  $h = 0.01R$ , где  $R, L, h$  — радиус, длина, толщина оболочки;  $E_f = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_f = 0,3$ ;  $\rho_f = 1730 \text{ kg/m}^3$  — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала упругого волокна;  $E_m^* = E_m^R(1 - i\chi)$ ;  $\nu_m^* = \nu_m^R - i\nu_m^I$  — комплексные аналоги модуля Юнга и коэффициента Пуассона полимерной матрицы. Положим  $E_m^R = 2 \cdot 10^9$  Па;  $\nu_m^R = 0,33$ ;  $h = 0,05$ ;  $\nu_m^I = 0,01$ ;  $\rho_m = 1214 \text{ kg/m}^3$ . Объемное содержание волокна в композите примем  $V_f = 0,6$ . Поверхностная нагрузка распределена по цилиндрической панели в центральной части оболочки с амплитудой  $P = 100$  кПа.

На рис. 1-3 представлены некоторые результаты расчетов частотных зависимостей энергии диссипации при различных соотношениях  $K_E = \text{Re}(E_m^*)/E_f$ . Рис. 1 соответствует значению  $K_E = 10^{-3}$ , рис. 2 —  $K_E = 10^{-4}$ . На рис. 3 приведен вклад  $D_Z$  в суммарную энергию  $D$  в процентном отношении.

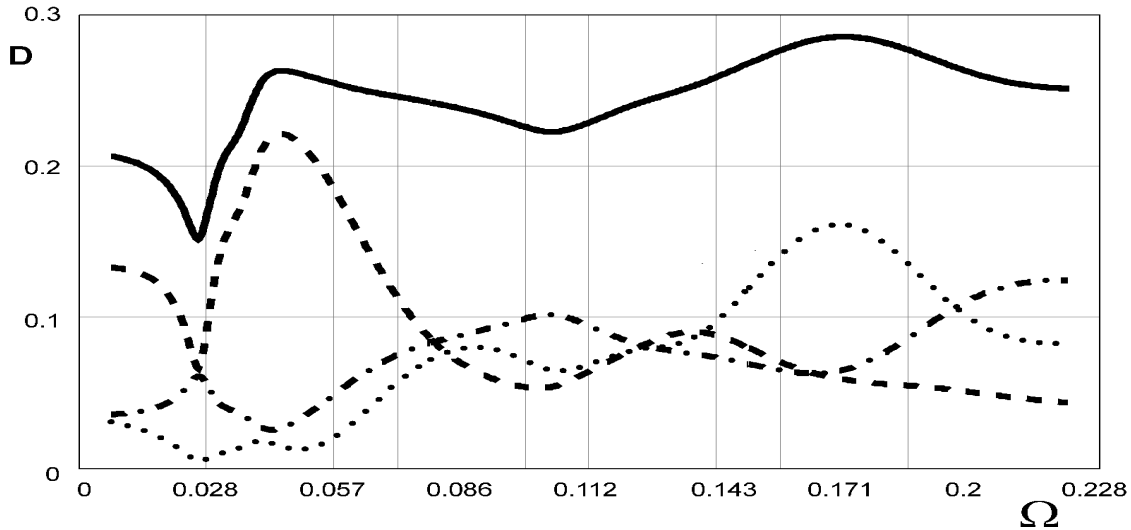


Рис. 1.  $D$  (сплошной),  $D_R$  (точечный),  $D_S$  (пунктирный),  $D_Z$  (точечно-пунктирный)

Приведенные численные результаты указывают на то, что основной вклад в энергию диссипации при заданных параметрах вносят деформации растяжения-сжатия, тангенциальные деформации и деформации поперечного сдвига. Диссипация энергии при изгибе и кручении пренебрежимо мала. При этом для жестких

полимеров при  $K_E = 10^{-3}$  (рис. 1) в низкочастотном диапазоне  $\Omega < 0,057$  рассеяние энергии происходит в основном за счет тангенциальных деформаций. С повышением частоты вклады всех трех деформаций приблизительно одинаковые. С уменьшением жесткости полимера  $K_E = 10^{-4}$  (рис. 2) уровень диссипации энергии на низких частотах определяют все три типа деформаций. В средне- и высокочастотном диапазоне преобладают деформации поперечного сдвига и растяжения-сжатия. Для мягких полимеров  $K_E = 10^{-5}$  на нижних частотах диссипация осуществляется при растяжении-сжатии и поперечном сдвиге. С повышением частоты основной вклад вносят деформации поперечного сдвига.

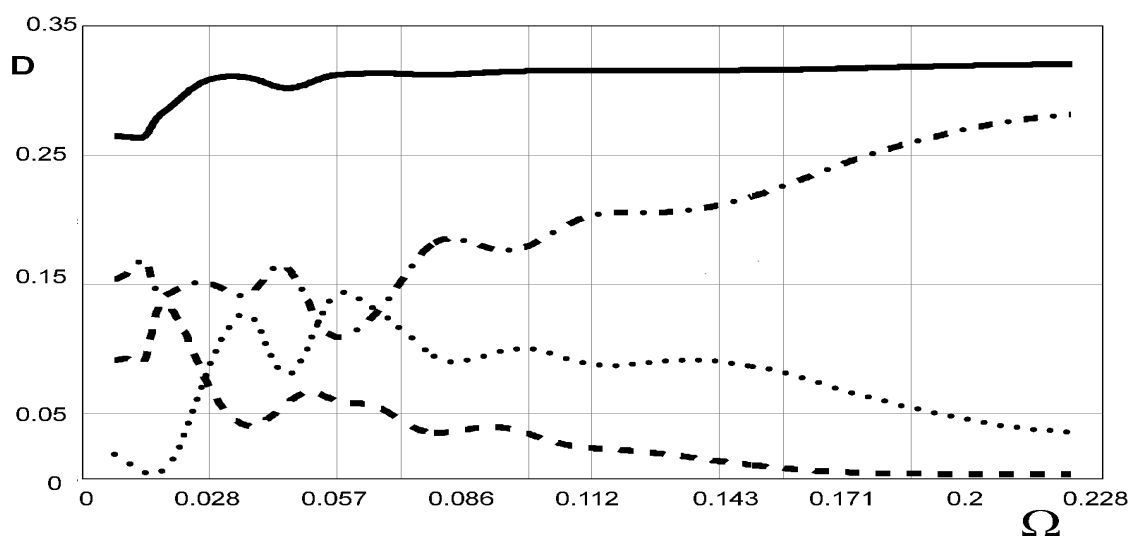


Рис. 2.  $D$  (сплошной),  $D_R$  (точечный),  $D_S$  (пунктирный),  $D_Z$  (точечно-пунктирный)

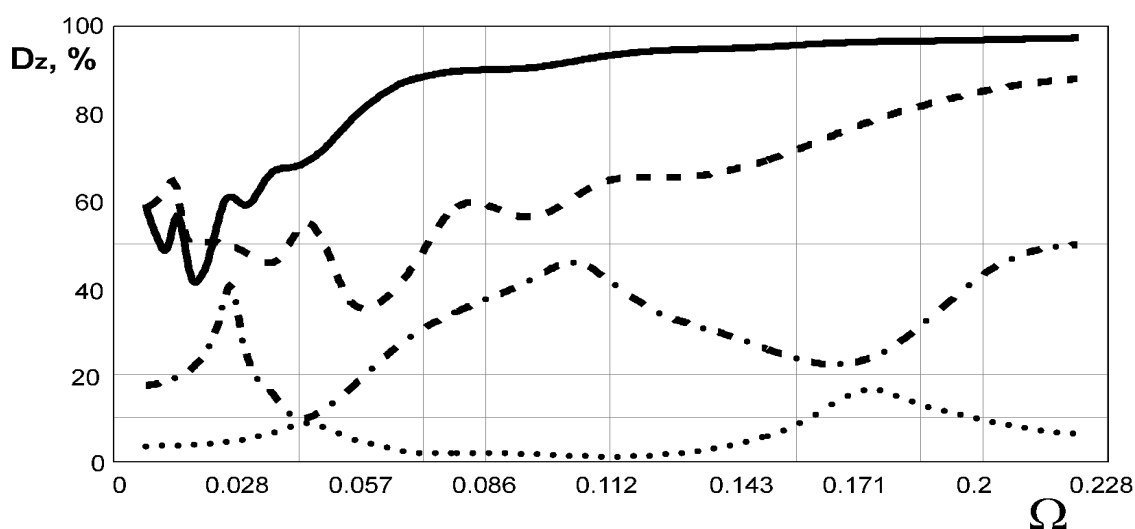


Рис. 3.  $K_E = 10^{-2}$  (точечный),  $K_E = 10^{-3}$  (точечно-пунктирный),  $K_E = 10^{-4}$  (пунктирный),  $K_E = 10^{-5}$  (сплошной)

Результаты расчетов показывают, что с уменьшением коэффициента  $K_E$  и ростом частоты нагружения диссипация энергии в теле оболочки почти полностью осуществляется за счет поперечных сдвиговых деформаций. Это также указывает на необходимость использования при определении диссипативных характеристик оболочек из полимерных композитных материалов уточненных теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига. Расчеты, производимые в рамках классической теории Кирхгофа-Лява, приводят к количественным и качественным ошибкам.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Москва: Машиностроение. 1988. С. 79–90.
- [2] Ван Фо Фы Г.А. Теория армированных материалов. Киев:Наукова думка. 1971. 232 с.
- [3] Малмайстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне. 1980. 573 с.
- [4] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир. 1982. 334 с.

**Safronenko V.G., Trifonov V.V., Shutko V.M.** *Distribution of dissipation energy according to the deformation type under harmonic vibrations of a cylindric composite shell.* Harmonic vibrations of a circular cylindric shell made of a reinforced unidirectional fibrous composite with a polymeric matrix have been studied. Distribution of dissipation energy according to the deformation type depending on mechanical characteristics of fibre and matrix in various frequency ranges have been numerically analysed.

# О РАСЧЕТЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗДЕЙСТВИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ЗДАНИЯ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ ВБЛИЗИ БЕРЕГОВОГО СКЛОНА

Селезнев М. Г., Селезнев Н. М., Ву Тхи Бик Куен  
*Ростовский государственный строительный университет*

Рассмотрены проблемы построения решения и анализа колебаний объектов, расположенных вблизи областей с нерегулярным строением структуры, например береговых и оползневых склонов, откосов и т.д. Дается анализ напряженно-деформированного состояния среды при различных типах динамического воздействия.

Расчет характеристик динамического взаимодействия массивного объекта (здания) с элементами слоистой структуры, включающей склон, приводит к постановке и решению достаточно сложных динамических контактных задач. Основная трудность связана с наличием участка поверхности (склона), пересекающего один или несколько приповерхностных слоев. В силу этого в настоящей работе используется подход, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений [1-2]. В первом приближении считаем, что здание заданной массы контактирует с поверхностью грунта в условиях жесткого сцепления. Деформациями здания, учитывая его существенно более высокие прочностные характеристики по отношению к грунту, можно пренебречь. В качестве моделируемой структуры выбран склон, включающий два полубесконечных слоя, жестко сцепленных между собой и с подстилающим полупространством (рис. 1). Рассмотрена задача в плоской постановке.

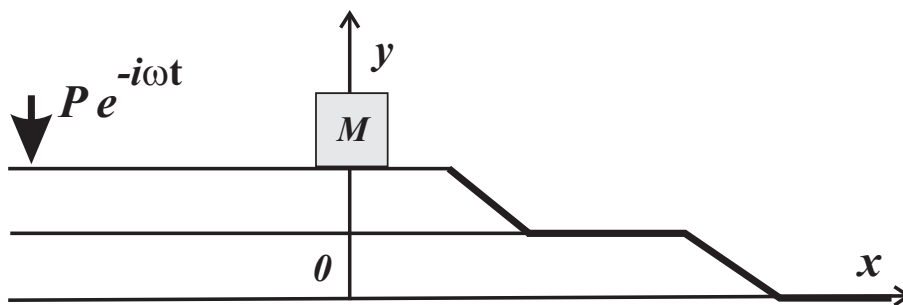


Рис. 1. Схематическое строение участка берегового склона, на котором расположено здание

Сейсмическое или техногенное воздействие можно моделировать колебаниями от поверхностного или заглубленного источника в грунте или поверхностной волной, распространяющейся из бесконечности.

## **Постановка модельной задачи.**

Упругое полупространство, характеризуемое плотностью  $\rho$  и постоянными Ламе  $\lambda, \mu$  занимает в декартовой системе координат область  $y \leq 0$ , вдоль части

границы ( $x \leq a$ ) заданы условия жесткого сцепления с вышележащим полуслоем, остальная часть границы свободна от усилий. Средний полуслой имеет толщину  $h_1$ , характеризуется плотностью  $\rho_1$  и постоянными Ламе  $\lambda_1, \mu_1$ . Движение упругой среды описывается уравнениями Ламе [4] Верхняя плоская граница слоя  $x \leq a_1 \leq a$  для  $x \leq a_2 < a_1$  жестко сцеплена с поверхностным полуслоем (толщина  $h_2$ , плотность  $\rho_2$  и постоянные Ламе  $\lambda_2, \mu_2$ ), на остальной части свободна от усилий. Верхняя грань поверхностного слоя  $x \leq a_3$  в области  $x \in [-b, b]$  жестко сцеплена с плоской поверхностью жесткого массивного штампа, в области  $x \in [c_1, c_2]$  действует равномерно распределенная осциллирующая с частотой нагрузка, остальная часть поверхности свободна от усилий. Вдоль наклонных торцов полуслоев напряжения отсутствуют.

Для построения приближенного решения сформулированной контактной задачи используем следующий алгоритм. Аппроксимируем закон распределения контактных напряжений под штампом  $\vec{q}(x) = \{q_x, q_y\}$  отрезком ряда следующей структуры

$$q(x) = \sum_{i=0}^n C_i T_i(x/b), \quad (1)$$

где  $C_i$  — неопределенные постоянные,  $T_0(x/b) = 1/\sqrt{b^2 - x^2}$ ,  $T_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  — система полиномов. Подобное представление точным образом учитывает особенность контактных напряжений вдоль кромки штампа. Для каждого слагаемого правой части (1)  $q_{ky}(x) = T_k(x/b)$  реализуем схему решения ГИУ задачи с однородными граничными условиями (воздействие, генерирующее колебания и распределенное по закону  $q_{kx}(x)$  осциллирующее усилие на отрезке  $x \in [-b, b]$ ). Решению каждой такой задачи соответствует вектор перемещений  $\vec{u}_k = \{u_{kx}, u_{ky}\}$ . Итоговое представление для вектора смещения получаем в виде

$$\vec{u}(x) = \sum_{k=0}^n C_k \vec{u}_k(x).$$

Для определения неопределенных постоянных  $C_k$  приравняем компоненты вектора смещения поверхности среды в узлах  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ;  $x_1 = -b$ ,  $x_n = b$  смещению соответствующих точек плоской поверхности массивного штампа с учетом уравнения его движения. Учитывая малость поворота массивного объекта при воздействии длинных волн малой амплитуды, для вертикальных смещений получаем

$$\sum_{j=0}^n C_j \vec{u}_{jy}(x_k) = -\frac{\sum_{j=0}^n C_j \int_{-b}^b T_j(x/b) dx}{\omega^2 M}; k = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Последнее представление определяет систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных  $C_j$  определяющих по соотношению (1) закон распределения вертикальных контактных напряжений.

Для практической реализации этого подхода необходимо построить решение систем ГИУ для представленной структуры с однородными граничными условиями в напряжениях.

В результате использования подхода, разработанного в [2], приводим задачу к системе ГИУ по полубесконечному контуру  $L$  (на рис. 1 выделен жирной линией),



конечная часть которого является кривой или ломаной линией, а полубесконечная — частью прямолинейной границы полуплоскости.

$$\frac{1}{2} \vec{u}_k(\mathbf{r}_0) + \int_L \mathbf{q}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \vec{u}_k(\mathbf{r}) dl = \int_{-b}^b \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \vec{q}_{ky} dx \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{q}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  и  $\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  — система фундаментальных напряжений и перемещений для трехслойной полуплоскости, удовлетворяющая условиям свободной границы на дневной поверхности рассматриваемой области и условиям жесткой стыковки разнородных компонент слоистой структуры.

При решении используется метод граничных элементов, причем на полуограниченной прямолинейной части контура для моногармонических колебаний вводится полубесконечный элемент, для реализации которого используется асимптотическое представление решения при  $x \rightarrow \infty$ .

Пробные расчеты, связанные с реализацией изложенного алгоритма, показали, что для относительно низких частот колебаний (длина поверхностной волны много больше протяженности штампа) для получения результата достаточно ввести 3-5 узловых точек. Для большего числа точек обусловленность СЛАУ быстро ухудшается. Следует ожидать, что учет деформируемости штампа (массивного поверхностного объекта) приведет к улучшению обусловленности системы для большего числа узлов.

Следует отметить, что при практических расчетах задач воздействия сейсмических или техногенных колебаний на поверхностные фундаменты, распространяющиеся в грунтовом массиве волны имеют длину, многократно превосходящую линейные размеры фундамента. При подобных условиях, как правило, можно получить достаточно высокую точность результата при малом числе слагаемых представления (1) и соответствующего им числа узлов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
- [2] Ляпин А.А., Селезнев М.Г., Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л. Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. ГНТП "Глобальные изменения природной среды и климата". М.: ГНИЦ ПГК, 1999. 294 с.
- [3] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.

**Seleznev M.G., Seleznev N.M., Vu Thi Bik Quyen** *About calculation of characteristics of influence seismic fluctuations on the buildings located near to a coastal slope.* Problems of construction of the decision and the analysis of fluctuations of the objects located near to areas with an irregular structure, for example coastal slopes, are considered. The analysis of the intensity of the deformed condition of environment is given at various types of dynamic influence.

# МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ

**Сметанин Б. И.**

*Ростовский государственный университет*

Метод ортогональных многочленов в задачах гидроупругости о взаимодействии пластинок и оболочек с идеальной жидкостью в линейной постановке излагается на примере решения двух осесимметричных задач: задачи о собственных колебаниях упругой круглой пластинки и задачи о вынужденных колебаниях упругой цилиндрической оболочки конечных размеров в идеальной несжимаемой жидкости. Использование метода интегральных преобразований позволило свести эти задачи к совместному решению дифференциального и интегрального уравнений. Решение дифференциального уравнения строится в виде ряда по системе многочленов, обобщенное условие ортогональности которых учитывает входящий в уравнение дифференциальный оператор. Идея метода предложена И.И. Воровичем и В.М. Александровым.

Пусть тонкая упругая пластинка радиуса  $a$  постоянной толщины  $h$  ( $h \ll a$ ) находится в идеальной несжимаемой жидкости. Оси цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$  расположим так, чтобы координаты точек срединной плоскости пластинки в недеформированном состоянии удовлетворяли условиям:  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z = 0$ . Пластинка при  $r = a$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  скреплена жестким кольцом радиуса  $a$ . Осесимметричная задача о взаимодействии пластинки с жидкостью в линейной постановке сводится к решению следующих уравнений.

$$D\Lambda_r w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \Big|_{z=-0} - p \Big|_{z=+0} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1)$$

Здесь  $w = w(r, t)$  — прогиб срединной плоскости пластинки, жесткость пластинки  $D$  при изгибе определяется формулой

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  — плотность пластинки,  $t$  — время,  $p$  — гидродинамическое давление,

$$\Lambda_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

Силами, влияющими на изгиб пластинки, являются силы инерции  $-\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  и давление жидкости на пластинку  $p \Big|_{z=-0} - p \Big|_{z=+0}$ . Граничные условия, обусловленные наличием жесткого кольца, имеют вид

$$w(a, t) = \frac{\partial w(a, t)}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Движение жидкости считается потенциальным. Потенциал скоростей точек жидкости  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

Интеграл Коши–Лагранжа будем брать в линеаризованной форме

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p_\infty$  — давление на бесконечности.

Условие безотрывного обтекания жидкостью пластинки имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (0 \leq r \leq a, z = 0) \quad (6)$$

С удалением от пластинки скорость точек жидкости должна исчезать. Следовательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Функции  $w$  и  $\varphi$  представим в виде

$$w(r, z) = w_*(r) e^{-i\omega t}, \quad \varphi(r, z, t) = \varphi_*(r, z) e^{-i\omega t}. \quad (8)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота,  $i$  — мнимая единица.

Используя интегральное преобразование Ханкеля, будем иметь

$$\varphi_*(r, z) = \varphi_1(r, z) = \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (z \geq 0) \quad (9)$$

$$\varphi_*(r, z) = \varphi_2(r, z) = \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{\xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (z \leq 0) \quad (10)$$

В этих формулах  $A(\xi)$  и  $B(\xi)$  — достаточно произвольные функции,  $J_0(z)$  — функция Бесселя.

Из (1)–(10) может быть получено следующее интегро–дифференциальное уравнение

$$\widehat{\Lambda}_r \left\{ \int_0^a \eta g(\eta) d\eta \int_0^\infty J_0(\xi r) J_0(\xi \eta) d\xi \right\} = 2i\omega w_*(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (11)$$

$$g(r) = \varphi_*(r, -0) - \varphi_*(r, +0), \quad \widehat{\Lambda}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (12)$$

Формула обращения уравнения (11) имеет вид

$$g(r) = -\frac{4i\omega}{\pi a} \int_r^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \int_0^\xi \frac{x w_*(x)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} dx \quad (13)$$

Полученное соотношение (13) позволяет исключить из рассмотрения функцию  $g(r)$  и привести задачу к решению одного интегро-дифференциального однородного уравнения относительно функции  $w_*(r)$ . В этом уравнении введем безразмерные переменные и новые обозначения по формулам

$$\begin{aligned} r &= ar', & \xi &= a\xi', & x &= ax', & w_*(r) &= h\tilde{w}(r'), \\ \hat{\Lambda}_r &= \frac{1}{a^4}\Lambda_{r'}, & \omega^2 &= \frac{D\tilde{\omega}^2}{\rho_0 h a^4}, & \beta &= \frac{4\rho a}{\pi\rho_0 h}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда указанное уравнение преобразуется к виду

$$\Lambda_r w(r) - \omega^2 w(r) - \beta \omega^2 \int_r^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \int_0^\xi \frac{xw(x)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} dx = 0 \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (15)$$

$$w(1) = w'(1) = 0 \quad (16)$$

В (15), (16) и ниже знаки «штрих» и «волна» опущены.

Решение уравнения (15) будем искать в следующем виде

$$w(r) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Q_n(r), \quad (17)$$

где  $X_n$  — подлежащие определению коэффициенты,

$$Q_n(r) = (1 - r^2)^2 H_n P_n^{(2,0)}(2r^2 - 1), \quad H_n = \frac{\sqrt{2(2n+3)}}{(2n+2)(2n+4)},$$

$P_n^{(2,0)}(r)$  — многочлены Якоби. Можно показать, что для многочленов Якоби  $P_n^{(2,0)}(2r^2 - 1)$  справедлива формула

$$\Lambda_r [(1 - r^2)^2 P_n^{(2,0)}(2r^2 - 1)] = 16(n+1)^2(n+2)^2 P_n^{(2,0)}(2r^2 - 1), \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (18)$$

В этом случае

$$\Lambda_r Q_n(r) = 4(n+1)(n+2)\sqrt{2(2n+3)}P_n^{(2,0)}(2r^2 - 1) \quad (19)$$

Из (19) и условия ортогональности многочленов Якоби  $P_n^{(2,0)}(r)$  следует

$$\int_0^1 r Q_m(r) \Lambda_r Q_n(r) dr = \delta_{mn} \quad (20)$$

Здесь  $\delta_{mn}$  — символы Кронекера.

Реализация процедуры метода ортогональных многочленов к уравнению (15) с учетом формул (17)–(20) приводит задачу к решению бесконечной однородной алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов  $X_n$ , к которой применялся метод редукции. В таблице 1 приведены значения приведенной собственной частоты при  $\beta = 60$  для различных значений порядка  $M$  урезанной системы

| $M$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ |
|-----|------------|------------|------------|------------|
| 3   | 1.522      | 9.108      | 30.54      | —          |
| 4   | 1.522      | 9.087      | 25.81      | 74.21      |
| 5   | 1.522      | 9.087      | 25.37      | 55.26      |
| 6   | 1.522      | 9.087      | 25.35      | 52.31      |

Таблица 1.

В аналогичной постановке рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки длины  $2a$ , радиуса  $R$  в идеальной несжимаемой жидкости. При этом используется уравнение изгибных колебаний технической теории оболочек

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 \cos \omega t + p(R + 0, z, t) - p(R - 0, z, t) \quad (|z| \leq a) \quad (21)$$

где  $w$  — радиальное перемещение точек оболочки,  $R$  радиус оболочки,  $q_0$  — интенсивность внешней нагрузки. Ось  $z$  направлена вдоль оси оболочки. Торцы оболочки свободны. Исходной формулой здесь для реализации метода ортогональных многочленов в уравнении (21) является следующая формула

$$w_*''(z) = \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n^{(4,4)}\left(\frac{z}{a}\right), \quad w(z, t) = w_*(z) \cos \omega t$$

В таблице 2 приведены значения функции  $W(z) = w_*(z) \frac{D}{q_0 a^4} \cdot 10^3$ , вычисленные при  $\frac{12(1-\nu^2)a^2}{\lambda^2 h^2} = 1000$ ,  $\frac{\rho a}{\rho_0 h} = 30$ ,  $\frac{R}{a} = 2$ ,  $\omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_0 h}{D}} = 10$  для различных значений порядка  $M$  урезанной соответствующей системы уравнений

| $M \setminus \frac{z}{a}$ | 0     | 0.25   | 0.5     | 0.75   | 1      |
|---------------------------|-------|--------|---------|--------|--------|
| 3                         | 1.177 | 0.4734 | -0.8710 | -1.504 | -1.254 |
| 4                         | 1.176 | 0.4761 | -0.8705 | -1.504 | -1.254 |
| 5                         | 1.178 | 0.4720 | -0.8699 | -1.504 | -1.252 |

Таблица 2.

**Smetanin B.I.** *Method of orthogonal multinomials in some problems of hydroelasticity.* The method is stated on an example of the decision of two axisymmetric problems in linear statement: problems about own fluctuations of an elastic round plate and a problem about the compelled fluctuations of an elastic cylindrical environment of the final sizes in an ideal incompressible liquid. Use of a method of integrated transformations allows to reduce these problems to the joint decision of the differential and integrated equations. The decision of the differential equation is under construction in the form of some on system of the multinomials, generalized which condition of orthogonality is considered by the differential operator entering into the equation.

# ДИАБАТИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ ГАЗОВОГО ОБЛАКА

**Снопов А. И.**

*Ростовский государственный университет*

В работе [1] представлено точное решение уравнений Навье–Стокса для совершенного теплопроводного газа, обладающего постоянной вязкостью, описывающее одномерное неустановившееся течение газа и содержащее три произвольные постоянные, на основе которого проведено исследование процесса адиабатического расширения газового облака. Формулы, определяющие это течение, пригодны и для исследования сходящегося потока газа. Ниже на основе этого точного решения представлен анализ адиабатического сжатия газового облака.

Рассматривается случай одномерного сжатия газового облака, при котором все частицы газа движутся к «центру» облака, следуя закону

$$r = \xi \sqrt{1 - \tau}, \quad (1)$$

где  $\xi$  — лагранжева координата частицы газа,  $\tau = 2ct$  — безразмерное время,  $t$  — время,  $c > 0$  — размерный параметр. «Центру» облака отвечает  $\xi = 0$ , внешней границе облака отвечает  $\xi = r_0$ , где  $r_0$  — начальный «радиус» облака. При таком процессе сжатия плотность газа в облаке возрастает равномерно со временем по закону

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 - \tau)^{n/2}}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность газа в облаке.

Давления газа в облаке распределены неравномерно в соответствии с формулой

$$p = \frac{\rho_0 \xi^2 c^2}{2(1 - \tau)^{1+n/2}} - \frac{nc(\mu(\varkappa - 2 \operatorname{Pr}(\varkappa - 1)) + \lambda n \operatorname{Pr}(\varkappa - 1))}{2 \operatorname{Pr}(\varkappa n/2 - 1)(1 - \tau)} + \frac{A}{(1 - \tau)^{\varkappa n/2}} + B, \quad (3)$$

содержащей еще две произвольные постоянные  $A$  и  $B$ , которые могут быть определены по начальным и конечным значениям давления на границе облака.

Температура в газовом облаке в процессе его сжатия также распределена неравномерно и определяется по формуле

$$T = \frac{p}{R\rho}. \quad (4)$$

Рассматриваемое адиабатическое сжатие газового облака возможно лишь при непрерывном обмене каждой частицей газа тепловой энергией с внешней средой в соответствии с формулой

$$Q = \frac{\rho_0 \xi^2 c^3 (2 + n - \varkappa n)}{2(\varkappa - 1)(1 - \tau)^{2+n/2}} - \frac{cn\varkappa B}{(\varkappa - 1)(1 - \tau)}. \quad (5)$$

Коэффициент  $\varkappa = c_p/c_\nu$ , входящий в эту формулу, является показателем степени адиабаты Пуассона,  $n = 1$  отвечает случаю продольного расширения цилиндрического облака,  $n = 2$  отвечает случаю радиального расширения круглого цилиндрического облака,  $n = 3$  отвечает случаю расширения сферического облака.

Как следует из представленного решения за конечный промежуток времени  $t = 1/c$  облако стягивается в точку. Так как облако обладает конечной массой, то его сжатие в точку невозможно, и поэтому решение пригодно для описания динамики облака лишь при  $0 \leq 2t < 1/c_{\max}$ , где  $c_{\max}$  — значение коэффициента  $c$ , допускаемое физикой процесса сжатия газового облака.

Скорости частиц газа при рассматриваемом diabaticком сжатии облака возрастают со временем по закону

$$u = \xi c / \sqrt{1 - \tau}. \quad (6)$$

Отметим особенность представленного решения. В формуле (5) первое слагаемое обращается в нуль только при  $n = 3$  и  $\varkappa = 5/3$ , из чего следует, что все частицы шарового облака одноатомного газа в исследуемом случае сжатия должны излучать тепло независимо от их места расположения в облаке. В остальных случаях частицы газа, находящиеся в «центре» облака и некоторой его окрестности, при сжатии все время излучают тепловую энергию а остальные частицы — поглощают её. Масса частиц газа, которые излучают энергию, убывает со временем и определяется из неравенства

$$m < K_n \rho_0 \left( \frac{2n\varkappa B(1 - \tau)^{1+n/2}}{\rho_0 c^2(2 + n - \varkappa n)} \right)^{n/2}, \quad K_1 = S, \quad K_2 = \pi L, \quad K_3 = \frac{4}{3}\pi. \quad (7)$$

Из равенства (5) следует, что в случаях, когда

$$B \geq r_0^2 \rho_0 c^2 \frac{2 + n - \varkappa n}{2n\varkappa}$$

в начальный момент сжатия облака все частицы газа находятся в состоянии излучения. В случаях нарушения этого неравенства периферийные частицы газа и в начале сжатия находятся в состоянии поглощения внешней радиационной энергии, а внутренние — в состоянии излучения. Масса газа, находящегося в состоянии излучения, убывает со временем, а его область стягивается в «точку» в «центре» облака.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Снопов А.И. Диабатическая модель расширения газового облака под воздействием радиационного притока тепла. Современные проблемы механики сплошной среды // Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г., т. I. Из-во ООО «ЦВВР», Ростов-на-Дону, 2005. С.186–188.

**Snopov A.I.** *The diabatic compression of the gas cloud.* The one-dimension model of the compression of a gas cloud based on one new exact solution of Navier–Stokes and thermodynamic equations is suggested.

# ЗАДАЧА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗГИБА НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ТРУБЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Соколов А. В.

*Ростовский государственный университет*

В рамках теории больших деформаций разработана постановка задачи о пространственном изгибе полого цилиндра, нагруженного внутренним давлением. Материал цилиндра предполагается несжимаемым. Деформация, описывающая пространственный изгиб цилиндра, задается в виде двухпараметрического семейства, предложенного Л.М. Зубовым. Доказывается, что реализация указанной деформации цилиндра с внутренним давлением требует приложения к торцам цилиндра внешней силы и внешнего момента, векторы которых ортогональны оси цилиндра. Исследуемая пространственная задача нелинейной теории упругости сведена к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций от двух независимых переменных.

Решение данной задачи представляет интерес в связи с приложениями к проблеме описания механического поведения крупных артериальных сосудов некоторых млекопитающих, в том числе человека, в физиологических условиях.

## 1 Двухпараметрическое семейство деформаций

Пусть упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму полого кругового цилиндра внутренним радиусом и внешним радиусом  $r_1$ . В отсчетной конфигурации введем базис цилиндрических координат  $\{r, \varphi, z\}$ , где ось  $Oz$  - параллельна образующей цилиндра.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство деформаций, описывающее пространственный изгиб цилиндрического тела [1] :

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(r, \varphi) + lz \\ X_2 &= u_2(r, \varphi) \cos \omega z - u_3(r, \varphi) \sin \omega z \\ X_3 &= u_2(r, \varphi) \sin \omega z + u_3(r, \varphi) \cos \omega z \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_k(r, \varphi)$ ,  $k = 1, 2, 3$  - неизвестные функции,  $\omega, l$  - некоторые заданные параметры.

При деформации такого вида каждая материальная прямая, параллельная в отсчетной конфигурации оси цилиндра, после деформации превращается в простую винтовую линию, осью которой является прямая  $X_2 = X_3 = 0$ .

В данном случае тензор градиента деформации  $\mathbf{C}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{C}(r, \varphi, z) = C_{sk}(r, \varphi) \mathbf{e}_s \mathbf{j}_k,$$

где  $s, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{j}_2 &= (\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \cos \omega z + \mathbf{e}_z \sin \omega z, \\ \mathbf{j}_3 &= -(\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \sin \omega z + \mathbf{e}_z \cos \omega z, \end{aligned} \quad (2)$$



$$C_{1k} = \frac{\partial u_k}{\partial r}, \quad C_{2k} = \frac{\partial u_k}{\partial \varphi}, \quad C_{31} = l, \quad C_{32} = -\omega u_3, \quad C_{33} = \omega u_2.$$

Здесь  $\mathbf{e}_k$  – орты базиса цилиндрических координат в отсчетной конфигурации,  $\mathbf{j}_k$  – орты базиса декартовых координат в текущей конфигурации.

Очевидно, что мера деформации Коши

$$\mathbf{G}(r, \varphi, z) = G_{sk}(r, \varphi) \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = C_{sm} C_{km} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \quad (3)$$

не зависит от координаты  $z$ .

## 2 Постановка краевой задачи

Определяющие соотношения для нелинейно упругого несжимаемого материала имеют вид:

$$\mathbf{P} = \frac{dW}{d\mathbf{G}} - p\mathbf{G}^{-1}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений Кирхгофа,  $p$  – функция гидростатического давления в несжимаемом материале.

Из (2) и (3) следует, что если упругое тело однородно по координате  $z$  то тензор напряжений Кирхгофа, а, следовательно, и тензор напряжений Пиолы  $\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}$  будут функциями только координат  $(r, \varphi)$  поперечного сечения цилиндрической трубы. Под однородностью тела по координате  $z$  понимается то, что удельная упругая энергия  $W$  может явно зависеть от координат  $r$  и  $\varphi$  но не зависит явно от  $z$ :  $W = W(\mathbf{G}, r, \varphi)$ .

Таким образом, предположения (1) о виде деформации цилиндрического тела приводят исходную пространственную задачу нелинейной эластостатики к двумерной нелинейной краевой задаче для сечения цилиндрического бруса. В этом случае уравнение равновесия можно представить в следующем инвариантном виде [2]:

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{D}_* + \omega \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_* \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{D}_* = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_1 = D_{sk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{j}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{j}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{j}_3 \mathbf{e}_3$  – собственно ортогональный тензор,  $\mathbf{e} = -\mathbf{E} \times (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi)$ ,  $\nabla_2 = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  – двумерный оператор в плоскости поперечного сечения цилиндра.

Из (5) получаем систему трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных  $u_k(r, \varphi)$ ,  $k = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{21}}{\partial \varphi} - \omega D_{33} \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial D_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{22}}{\partial \varphi} - \omega D_{33} \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial D_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{23}}{\partial \varphi} - \omega (D_{32} \cos \varphi - D_{31} \sin \varphi) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда внешняя поверхность цилиндрической трубы свободная от нагрузок, а внутренняя загружена равномерно распределенным гидростатическим давлением.

В этом случае граничные условия записываются в виде:

i) На внешней поверхности:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_{\gamma_0} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}|_{\gamma_0} = 0$$

или

$$D_{11}|_{\gamma_0} = D_{12}|_{\gamma_0} = D_{13}|_{\gamma_0} = 0. \quad (7)$$

ii) На внутренней поверхности:

$$\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{D}|_{\gamma_1} = -\mathbf{f} = -f\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{B}|_{\gamma_1}$$

или

$$D_{11}|_{\gamma_1} = -f B_{11}|_{\gamma_1}, D_{12}|_{\gamma_1} = -f B_{12}|_{\gamma_1}, D_{13}|_{\gamma_1} = -f B_{13}|_{\gamma_1}. \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}^1$  – вектор положительной нормали к внутреннему граничному контуру  $\gamma_1$ ,

$\mathbf{B}$  – тензор, обратный градиенту деформации,

$f$  – величина (интенсивность) внутреннего гидростатического давления,

$\gamma_0, \gamma_1$  – внешний и внутренний граничные контуры поперечного сечения соответственно.

Легко проверить, что функции

$$u_1 = u_1^0 + L, u_2 = u_2^0 \cos(K) - u_3^0 \sin(K), u_3 = u_2^0 \sin(K) + u_3^0 \cos(K),$$

где  $K$  и  $L$  – произвольные действительные постоянные, также удовлетворяют уравнениям равновесия (6) и граничным условиям (7), (8).

Следовательно, положение упругого тела после деформации определяется с точностью до поворота вокруг оси  $X_1$  – аи поступательного смещения вдоль той же оси.

Такую неоднозначность решения можно устранить, наложив на неизвестные функции дополнительные условия, исключающие возможность произвольного поворота вокруг оси и произвольного смещения вдоль этой же оси.

В качестве таких условий можно использовать следующие интегральные соотношения [1]:

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} (u_1 - r \cos \varphi) r dr d\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} (\cos \Theta - 1) r dr d\varphi = 0, \quad (10)$$

где

$$\cos \Theta = \frac{u_{2,1} \cos \varphi - u_{2,2} \frac{1}{r} \sin \varphi + u_{3,2} \sin \varphi + u_{3,2} \frac{1}{r} \cos \varphi}{\sqrt{A}},$$

$$\begin{aligned}
A &= (u_{2,1} \cos \varphi - u_{2,2} \frac{1}{r} \sin \varphi + u_{3,2} \sin \varphi + u_{3,2} \frac{1}{r} \cos \varphi)^2 + \\
&+ (u_{3,1} \cos \varphi - u_{3,2} \frac{1}{r} \sin \varphi - u_{2,1} \sin \varphi + u_{2,2} \frac{1}{r} \cos \varphi)^2, \\
u_{k,1} &= \frac{\partial u_k}{\partial r}, \quad u_{k,2} = \frac{\partial u_k}{\partial \varphi}, \quad k = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Соотношения (6), (7), (8), (9), (10) представляют формулировку двумерной краевой задачи на поперечном сечении полого цилиндра.

Решение двумерной краевой задачи на сечении бруса позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия и совместности в объеме цилиндрической трубы и граничным условиям на ее боковых поверхностях. Но граничные условия на торцевых поверхностях цилиндра  $z = const$  могут быть выполнены лишь приближенно, за счет подбора постоянных параметров  $\omega$  и  $l$ .

### 3 Краевые условия на торцах бруса

Вычислим главный вектор  $\mathbf{F}$  и главный момент  $\mathbf{M}$  сил, действующих в произвольном поперечном сечении цилиндрической трубы, испытывающей деформацию вида (1), в случае, когда внешняя ее поверхность свободная от нагрузок, а внутренняя загружена равномерно распределенным гидростатическим давлением.

В отсчетной конфигурации введем декартову систему координат, ось  $x_3$  которой параллельна оси цилиндрической трубы.

$$\mathbf{F} = \iint_{\sigma} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} d\sigma + \oint_{\gamma_1} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{D} d\gamma = (F_1 + P_1)\mathbf{i}_1 + (F_2 + P_2)\mathbf{j}_2 + (F_3 + P_3)\mathbf{j}_3, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}^1$  — вектор положительной нормали к внутреннему граничному контуру  $\gamma_1$ ,

$$F_k = \iint_{\sigma} D_{3k} d\sigma, \quad P_k = \oint_{\gamma_1} [-f(n_1^1 B_{1k} + n_2^1 B_{2k})], \quad k = 1, 2, 3 \quad (12)$$

Используя необходимое условие равновесия  $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(b)$  части цилиндрической трубы, ограниченной боковыми поверхностями и сечениями  $x_3 = a$ ,  $x_3 = b$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные действительные числа, получаем следующие соотношения:

$$s_2(F_2 + P_2) - s_3(F_3 + P_3) = 0, \quad s_3(F_2 + P_2) + s_2(F_3 + P_3) = 0, \quad (13)$$

где  $s_2 = \cos \omega b - \cos \omega a$ ,  $s_3 = \sin \omega b - \sin \omega a$ .

Определитель системы (13) относительно величин  $F_2 + P_2$  и  $F_3 + P_3$  отличен от нуля, следовательно,  $F_2 + P_2 = F_3 + P_3 = 0$ .

Таким образом, главный вектор сил в сечении при деформации цилиндрической трубы под внутренним давлением вида (1) одинаков для всех сечений  $x_3 = const$  и направлен вдоль оси  $X_1$ .

Вычислим главный момент  $\mathbf{M}$  сил в сечении  $x_3 = \text{const}$  относительно некоторой точки на оси  $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ .

Учитывая, что  $F_2 + P_2 = F_3 + P_3 = 0$ , получаем:

$$\mathbf{M}(x_3) = - \iint_{\sigma} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \times \mathbf{X} d\sigma - \oint_{\gamma_1} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{D} \times \mathbf{X} d\gamma = (M_k + T_k) \mathbf{j}_k, \quad (14)$$

Выражения для  $M_k, T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) не приводятся в силу своей громоздкости, но могут быть легко получены из (14)

Так как величины  $M_k, T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) постоянны, из условия равновесия  $\mathbf{M}(a) = \mathbf{M}(b)$  получаем:

$$s_2(M_2 + T_2) - s_3(M_3 + T_3) = 0, s_3(M_2 + T_2) + s_2(M_3 + T_3) = 0,$$

откуда следует, что  $M_2 + T_2 = M_3 + T_3 = 0$ .

Итак, реализация деформации (1) цилиндрической трубы под действием внутреннего давления требует приложения к ее торцам системы сил, статически эквивалентной силе  $\mathbf{F}_1$  и моменту  $\mathbf{M}_1$ , действующим в точке оси винтовой линии, в которую превращается после деформации образующая цилиндра, и направленным вдоль этой оси.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00638).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Л.М. Зубову за научное руководство при выполнении данной работы

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубов Л.М. О больших деформациях пространственного изгиба призматических тел // ПММ. 2004. том 68. Вып.3. С. 507 - 515.
- [2] Зубов Л.М., Губа А.В. Нелинейная теория кручения призматических упругих тел с винтовыми дислокациями. // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. Нелинейные проблемы механики сплошной среды (спецвыпуск). 2003.

**Sokolov A. V.** *The problem of spatial bending of the non-linear elastic tube under internal pressure.* Within the framework of the large deformation theory the problem of spatial bending the tube, which is loaded by the inner pressure, is developed. The material is assumed to be incompressible. Spatial bending deformation is specified in the form of the two-parameter class of deformation, proposed by Professor L.M. Zubov. It is proved, that the achievement of mentioned deformation of the elastic tube under inner pressure requires presence of outside force and outside torque on the faces of the tube. Directing vectors of this force and torque is orthogonal to the axis of the tube in the undeformed state. The solution of this problem is of interest in connection with description of the mechanical behavior of human large arterial vessels in the physiological range.

# МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РАСЧЕТА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

**Цибулин В. Г.**

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается дискретизация трехмерной задачи фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости, насыщающей пористый массив. Для уравнений Дарси предложен конечно-разностный метод смещенных сеток с узлами пяти типов и неравномерным расположением узлов по координатам. С помощью построенных разностных операторов дана аппроксимация начально-краевой задачи для параллелепипеда с краевыми условиями первого и второго рода для температуры и примесей.

Уравнения конвекции многокомпонентной жидкости с учетом массовых сил, источников тепла и примесей выведены в [1] на основе модели Дарси. Там же показано, что для плоской задачи соответствующая система уравнений может обладать косимметрией и иметь семейства стационарных решений. Для двух- и трехкомпонентной жидкости в прямоугольнике в [2] были проведены вычисления семейств стационарных режимов при помощи численной схемы, сохраняющей косимметрию исходной системы.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений плоской задачи фильтрационной конвекции в естественных переменных развита в [3], где была установлена эквивалентность этого метода и схемы [4], сохраняющей косимметрию. В [5] дана дискретизация трехмерных уравнений фильтрационной конвекции однокомпонентной жидкости задачи в естественных переменных на основе метода смещенных сеток. В данной работе для решения трехмерной задачи конвекции многокомпонентной жидкости предложен конечно-разностный метод смещенных сеток с узлами пяти типов и неравномерным расположением узлов по координатам.

## 1 Постановка задачи

Уравнения свободной гравитационной конвекции жидкости с  $S$  примесями, насыщающей пористую среду, можно записать в виде [1]

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \vec{v} + \sum_{r=1}^S \lambda_r \theta^r \vec{k} + \vec{F}, \quad (1)$$

$$\vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\beta_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^r = \kappa_r \Delta \theta^r + f^r. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{v}(x, y, z, t)$  – векторное поле скорости,  $p(x, y, z, t)$  – давление,  $\theta^1(x, y, z, t)$  – температура, отсчитываемая от среднего значения,  $\theta^r(x, y, z, t)$ ,  $r = 2, \dots, S$  – массовые концентрации,  $(x, y, z)$  – точка области  $D$ , занятой жидкостью,  $t$  – время,  $\vec{F}$  – массовая сила,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  – орт, направленный вертикально вверх;  $f^r$  – плотность

источников  $r$ -й компоненты. Безразмерные комбинации параметров получаются по формулам

$$\varepsilon = \frac{K}{(ml^2)}, \quad \lambda_r = \frac{g\beta_r A_r l^2 K}{\nu^2}, \quad \kappa_r = \chi_r / \nu. \quad (4)$$

Переход к безразмерным переменным производится аналогично [1]. В качестве характерных длины, скорости, времени и давления приняты соответственно высота полости –  $l$ ,  $\nu/l$ ,  $l^2/\nu$  и  $\nu^2 \rho_f / K$ . Для концентрации характерной величиной будет  $A_r l$ , а для плотности источников –  $A_r \nu / l$ , где  $A_r$  – значение градиента концентрации  $r$ -й компоненты.

В уравнениях (1)–(4) параметры имеют следующий смысл:  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\nu$  – вязкость,  $K$  – проницаемость,  $\mu$  – пористость,  $\eta_1$  – коэффициент термического расширения,  $\eta_r$  – коэффициент концентрационного расширения, отвечающий  $r$ -ой компоненте  $r = 1, \dots, S$ ,  $\chi_r$  – коэффициент диффузии,  $\beta_r$  – кинетический коэффициент.

Уравнения рассматриваются в параллелепипеде  $D = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ , здесь  $L_x, L_y, L_z$  – соответственно ширина, глубина и высота. Массовая сила  $\vec{F}$  и плотности источников  $f^r$  далее принимаются нулевыми. На всей границе области  $D$  для скорости принимается краевое условие непротекания, для температуры на двух боковых гранях  $\partial_1 D = \{y = 0\} \cup \{y = L_y\}$  ставится условие отсутствия теплового потока и концентрационных потоков, а на остальной границе  $\partial_2 D = \partial D \setminus \partial_1 D$  поддерживаются равновесные распределения температуры и примесей

$$\vec{n} \cdot \vec{v}|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial \theta^r}{\partial y} \Big|_{\partial_1 D} = 0, \quad \theta^r|_{\partial_2 D} = 0, \quad r = 1, \dots, S. \quad (5)$$

Начальные условия формулируются для вектора скорости  $\vec{v}$  и компонент  $\theta^r$

$$\vec{v}(x, y, z, 0) = \vec{v}_0(x, y, z), \quad \theta^r(x, y, z, 0) = \varphi_0^r(x, y, z), \quad r = 1, \dots, S. \quad (6)$$

## 2 Дискретизация

Для дискретизации краевой задачи (1)–(5) используется метод смещенных сеток с узлами пяти типов: для температуры  $\theta^1$  и примесей  $\theta^r$ , давления  $p$  и трех компонент вектора скорости  $\vec{v}$ .

По пространственным координатам вводятся неравномерные сетки

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x+1} = L_x, \\ y_0 + y_1 &= 0, \quad y_1 < \dots < y_{N_y}, \quad y_{N_y} + y_{N_y+1} = 2L_y, \\ 0 &= z_0 < z_1 < \dots < z_{N_z+1} = L_z, \end{aligned}$$

и вычисляются смещенные на полшага вспомогательные сетки

$$\begin{aligned} x_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N_x, \\ y_{j+1/2} &= \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N_y, \\ z_{k+1/2} &= \frac{1}{2}(z_k + z_{k+1}), \quad k = 0, \dots, N_z. \end{aligned}$$

Температура  $\theta^1$  и концентрации примесей  $\theta^r$ ,  $r = 2, \dots, S$  определяются на основной сетке  $\theta_{i,j,k}^r = \theta^r(x_i, y_j, z_k)$ , а давление – в узлах  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$ . Компоненты вектора скорости  $v^1$ ,  $v^2$  и  $v^3$  находятся в узлах, смещенных относительно точек  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$  на полшага по соответствующей координате. Например, скорость  $v^1$  определяется в узлах  $(x_i, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$ . Сетка введена таким образом, что на границе  $\partial_2 D$  краевые условия для температуры и скорости удовлетворяются автоматически, а на границе  $\partial_1 D$  краевые условия реализуются с помощью законтурных узлов для температуры и скорости  $v^2$ .

Разностные аналоги дифференциальных операторов первого порядка и операторы усреднения по координатам вводятся на двухточечных шаблонах:

$$\begin{aligned} d_1 \theta_{i+1/2,j,k} &= \frac{\theta_{i+1,j,k} - \theta_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_j}, & d_2 \theta_{i,j+1/2,k} &= \frac{\theta_{i,j+1,k} - \theta_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j}, \\ d_3 \theta_{i,j,k+1/2} &= \frac{\theta_{i,j,k+1} - \theta_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k}, \\ \delta_1 \theta_{i+1/2,j,k} &= \frac{(x_{i+1} - x_{i+1/2})\theta_{i+1,j,k} + (x_{i+1/2} - x_i)\theta_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i}, \\ \delta_2 \theta_{i,j+1/2,k} &= \frac{(y_{j+1} - y_{j+1/2})\theta_{i,j+1,k} + (y_{j+1/2} - y_j)\theta_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j}, \\ \delta_3 \theta_{i,j,k+1/2} &= \frac{(z_{k+1} - z_{k+1/2})\theta_{i,j,k+1} + (z_{k+1/2} - z_k)\theta_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k}. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью этих операторов записываются аппроксимация лапласиана  $\Delta_h = d_1 d_1 + d_2 d_2 + d_3 d_3$ , и оператор усреднения по ячейке  $\delta_0 = \delta_1 \delta_2 \delta_3$ . Формулы (7) справедливы как для целых, так и для дробных индексов. Конвективные члены аппроксимируются следующим образом

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla \theta)_{i,j,k} &\approx J(\theta, v)_{i,j,k} = \\ &= \frac{1}{3} [d_1 \delta_1 (\theta \delta_2 \delta_3 v^1) + d_2 \delta_2 (\theta \delta_1 \delta_3 v^2) + d_3 \delta_3 (\theta \delta_1 \delta_2 v^3)]_{i,j,k} \\ &+ \frac{2}{3} [d_1 \delta_2 \delta_3 (\delta_0 \theta \delta_1 v^1) + d_2 \delta_1 \delta_3 (\delta_0 \theta \delta_2 v^2) + d_3 \delta_1 \delta_2 (\delta_0 \theta \delta_3 v^3)]_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для расчета стационарных движений методом установления используется метод искусственной сжимаемости, и вместо (2) рассматривается уравнение

$$\partial_t p + \zeta^{-1} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (9)$$

здесь  $\zeta$  – коэффициент искусственной сжимаемости.

С помощью разностных операторов (7)–(8) записывается аппроксимация урав-

нений (1), (9), (3):

$$\left[ \dot{v}^1 - \varepsilon(-d_1 p - v^1) \right]_{i,j+1/2,k+1/2} = 0, \quad (10)$$

$$\left[ \dot{v}^2 - \varepsilon(-d_2 p - v^2) \right]_{i+1/2,j,k+1/2} = 0, \quad (11)$$

$$\left[ \dot{v}^3 - \varepsilon(-d_3 p - v^3 + \sum_{r=1}^S \lambda_r \delta_1 \delta_2 \theta^r) \right]_{i+1/2,j+1/2,k} = 0, \quad (12)$$

$$\left[ \dot{p} + \frac{1}{\zeta}(d_1 v^1 + d_2 v^2 + d_3 v^3) \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = 0, \quad (13)$$

$$\left[ \beta^r \dot{\theta}^r - \kappa_r \Delta_h \theta^r - \lambda^r \delta_1 \delta_2 v^3 + J(\theta^r, v) \right]_{i,j,k} = 0, \quad r = 1, \dots, S. \quad (14)$$

Полученные в результате дискретизации по пространственным переменным обыкновенные дифференциальные уравнения (10)–(14) удобно переписать в векторном виде:

$$\dot{V}^1 = B_4 P + C_2 V^1, \quad \dot{V}^2 = B_5 P + C_3 V^2, \quad (15)$$

$$\dot{V}^3 = B_6 P + C_4 V^3 - \sum_{r=1}^S \lambda_r C_5 \Theta^r, \quad \dot{P} = B_1 V^1 + B_2 V^2 + B_3 V^3,$$

$$\dot{\Theta}^r = A_1 \Theta^r - \lambda_r C_1 V^3 - F(\Theta^r, V), \quad r = 1, \dots, S,$$

для чего введены векторы узловых переменных:

$$\begin{aligned} V^1 &= (v_{111}^1, \dots, v_{N_x(N_y+1)(N_z+1)}^1), & V^2 &= (v_{111}^2, \dots, v_{(N_x+1)N_y(N_z+1)}^2), \\ V^3 &= (v_{111}^3, \dots, v_{(N_x+1)(N_y+1)N_z}^3), & P &= (p_{111}, \dots, p_{(N_x+1)(N_y+1)(N_z+1)}), \\ \Theta^r &= (\theta_{111}^r, \dots, \theta_{N_x N_y N_z}^r). \end{aligned}$$

Порядок следования членов в уравнениях (15) отвечает использованному в (10)–(14). Матрицы  $A_1$ ,  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ),  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) отвечают соответственно аппроксимации оператора Лапласа, операторам дифференцирования первого порядка и операторам вычисления среднего. Член  $F(\Theta, V)$  представляет аппроксимацию конвективного слагаемого в уравнении (3).

Система (15) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности на равномерной сетке:  $x_i = ih_x$ ,  $i = 0, \dots, N_x + 1$ ;  $y_j = -h_y/2 + jh_y$ ,  $j = 0, \dots, N_y$ ;  $z_k = kh_z$ ,  $k = 0, \dots, N_z$ ;  $h_x = L_x/(N_x + 1)$ ,  $h_y = L_y/N_y$ ,  $h_z = L_z/(N_z + 1)$ .

Интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводилось при помощи метода Рунге-Кутты. Для однокомпонентной жидкости [6] при малой надкритичности (параметр  $\lambda$  чуть больше критического значения) все равновесия на семействе устойчивы. Это позволяет методом установления получить одно из устойчивых равновесий семейства, стартовав из окрестности неустойчивого нулевого равновесия. Вычисление всего семейства производится при помощи алгоритма [4, 7], причем матрица линеаризации находится численно, а ее ядро определяется методом SVD-разложения. Для уточнения равновесия в окрестности семейства применяется метод Ньютона, и



прогнозное значение для следующей точки на семействе вычисляется при помощи экстраполяционного метода Адамса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-5747.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Юдович В.И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Северо-кавказ. регион. Естеств науки. Спецвыпуск. Математ. моделир. 2001. С. 174–178.
- [2] *Кантур О.Ю., Цибулин В.Г.* Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. РАН, МЖГ, 2004. № 3, С. 123-134.
- [3] *Karasözen B., Tsybulin V.G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // *Comp. Phys. Comm.*, 2005. V. 167. P. 203–213.
- [4] *Karasözen B., Tsybulin V.G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // *Phys. Let. A.*, 1999. V.262. P. 321-329.
- [5] *Немцев А.Д., Цибулин В.Г.* Семейство стационарных режимов в трехмерной задаче фильтрационной конвекции // Тез. III Всерос. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики и механики". Екатеринбург. УрО РАН. 2006. С. 84–86.
- [6] *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. Vol. 5. P. 402–441.
- [7] *Говорухин В.Н.* Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН, МЖГ. 1999. № 5. С. 53–62.

**Tsybulin V.G.** *Finite-difference method for multicomponent convection in a porous medium.* Three-dimensional convection of multi-component fluid in a porous medium is considered. Darcy's model equations are approximated by the staggered grid method with five types of nodes and difference operators on nonuniform meshes. The problem in the parallelepiped are discretized with Dirichlet and Neumann boundary conditions for the temperature and concentrations.

# КОЛЕБАНИЯ ШАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОДУЛИРОВАННОЙ УПРУГОЙ СИЛЫ

**Цывенкова О. А.**

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается задача о движении твердого шара в безграничной вязкой жидкости под действием модулированной упругой силы и изучается поведение нейтральных кривых потери устойчивости положения равновесия при малых вязкостях.

Задача о движении твердого шара радиуса  $R$  в безграничной вязкой жидкости вдоль оси  $x$  под действием периодически зависящей от времени силы  $F(x, t)$  рассматривалась в [1] и представляет интерес как модель поведения микроорганизмов в жидкой среде.

Пусть сила  $F(x, t)$  зависит  $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодически от времени  $t$ , и  $F(0, t) \equiv 0$ . Тогда система шар-жидкость допускает равновесие, для которого центр шара покоится в точке  $x = 0$ , жидкость неподвижна и давление в ней постоянно. Для отклонения  $x(t)$  центра шара от нуля с использованием метода линеаризации получается уравнение

$$m\ddot{x} = -K(t)x + F_r, \quad (1)$$

где  $K(t) = -\partial_x F(0, t)$ ,  $F_r$  – гидродинамическая сила, согласно [2],

$$F_r = -\frac{2}{3}\pi\rho_f R^3 \ddot{x} - 6\pi\rho_f \nu R \dot{x} - 6\sqrt{\pi\nu}\rho_f R^2 \int_{-\infty}^t \frac{d^2x}{d\tau^2} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (2)$$

Здесь  $m$  – масса шара,  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости. Первое слагаемое в (2) содержит присоединенную массу шара при движении в потенциальном потоке идеальной жидкости  $2\pi\rho_f R^3/3$ , второе слагаемое есть стоково сопротивление при стационарном обтекании шара, последнее интегральное слагаемое выражает ту часть силы сопротивления, которая определяется историей движения шара.

Далее рассматривается упругая сила с модулированной жесткостью

$$K(t) = K_0 + K_1 \cos \omega t. \quad (3)$$

В результате для неизвестной функции  $x(t)$  получается интегродифференциальное уравнение [1]

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(1 + h \cos \omega t)x(t) - q\nu \dot{x}(t) - \beta\sqrt{\nu} \int_{-\infty}^t \frac{d^2x}{d\tau^2} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  — частота колебаний шара в потенциальном потоке,  $h$  — отношение амплитуды модулированной составляющей жесткости к постоянной, параметры  $\beta$  и  $q$  даются формулами

$$\omega_0^2 = \frac{K_0}{m + m_v}, \quad h = \frac{K_1}{K_0}, \quad q = \frac{6\pi\rho_f R}{m + m_v}, \quad \beta = \frac{6\sqrt{\pi}\rho_f R^2}{m + m_v}, \quad m_v = \frac{2\pi}{3}\rho_f R^3.$$

Решение Флоке уравнения (4) представляется в виде

$$x(t) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \tag{5}$$

где показатель Флоке  $\sigma = i\delta$ ,  $\delta$  — вещественный параметр. Случаю монотонной неустойчивости нулевого положения равновесия отвечает  $\delta = 0$ , а неустойчивости, связанной с удвоением периода, соответствует  $\delta = \omega/2$ .

Подставляя выражение (5) в уравнение (4) получается бесконечная трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $c_n$

$$M_n(\delta) c_n = c_{n-1} + c_{n+1}, \tag{6}$$

здесь

$$M_n(\delta) = M_n = -\frac{2}{\omega_0^2 h} [-(n\omega + \delta)^2 + \omega_0^2 + i(n\omega + \delta)q - \beta(n\omega + \delta)^2 I_n] \tag{7}$$

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{|n\omega + \delta|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(n\omega + \delta)}. \tag{8}$$

Известно, что для трехдиагональных систем с использованием цепных дробей можно записать дисперсионное соотношение в виде [3]

$$M_0 - \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \dots}} = \frac{1}{M_{-1} - \frac{1}{M_{-2} - \dots}}, \tag{9}$$

1. Рассмотрим случай монотонной неустойчивости ( $\delta = 0$ ). Выражение для  $M_n$  в этом случае принимает вид

$$M_n(0) = -\frac{2}{\omega_0^2 h} [-n^2\omega^2 + \omega_0^2 + in\omega q - \beta n^2\omega^2 I_n], \tag{10}$$

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{|n|\omega}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sgn} n}, \quad \omega > 0, n \neq 0 \tag{11}$$

$$M_0 = -2/h, n = 0.$$

С учетом симметрии  $M_n^*(0) = M_{-n}(0)$ , уравнение (9) приводится к вещественной форме

$$M_0 = 2Re \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \frac{1}{M_3 - \dots}}}. \tag{12}$$

2. Неустойчивость, связанная с удвоением периода, возникает при  $\delta = \frac{\omega}{2}$ . Тогда  $M_n(\delta)$  принимает вид

$$M_n\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{2}{\omega_0^2 h} \left[ -\left(n\omega + \frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 + i\left(n\omega + \frac{\omega}{2}\right)q - \beta\left(n\omega + \frac{\omega}{2}\right)^2 I_n \right]$$

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{\left|n\omega + \frac{\omega}{2}\right|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(n\omega + \frac{\omega}{2}\right)}. \quad (13)$$

Для всех  $n$  имеет место равенство

$$M_{-n}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \overline{M_{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \quad (14)$$

Теперь уравнение (9) при  $\delta = \omega/2$  можно записать в виде

$$M_0 - \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \frac{1}{M_3 - \dots}}} = \frac{1}{\overline{M_0} - \frac{1}{\overline{M_1} - \frac{1}{\overline{M_2} - \dots}}}, \quad (15)$$

или

$$\left| M_0 - \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \frac{1}{M_3 - \dots}}} \right|^2 = 1. \quad (16)$$

Из уравнений (12), (16) можно найти зависимости между параметрами задачи, при которых наблюдаются различные типы неустойчивости. В работе численно разыскивались нейтральные кривые зависимости относительного параметра жесткости  $h$  от частоты  $\omega$ , отвечающие случаям  $\delta = 0$  и  $\delta = \omega/2$ , для различных значений коэффициента вязкости  $\nu$ . На Рис. 1 представлены графики  $h = h(\omega)$  для  $\nu = 0.001, 0.0001, 0.00001$ .

При отсутствии вязкости  $\nu = 0$  уравнение представляет собой уравнение Маттье, для которого существуют частоты, отвечающие параметрическому резонансу, когда неустойчивость имеет место при сколь угодно малых значениях амплитуды модуляции. Из Рис. 1 видно, что при малых значениях коэффициента вязкости  $\nu$  происходит смещение "резонансных" частот в сторону меньших  $\omega$ . При этом неустойчивость возникает при ненулевых значениях  $h$ , и с уменьшением  $\omega$  происходит повышение порога неустойчивости. С увеличением коэффициента вязкости  $\nu$  происходит дальнейшее уменьшение "резонансных" частот и повышение порога неустойчивости.

Автор глубоко признателен В.И. Юдовичу за постановку задачи, постоянный интерес и руководство работой. Исследование выполнялось в рамках проекта, финансируемого грантом президента РФ поддержки ведущей научной школы НШ-5747.2006.1.

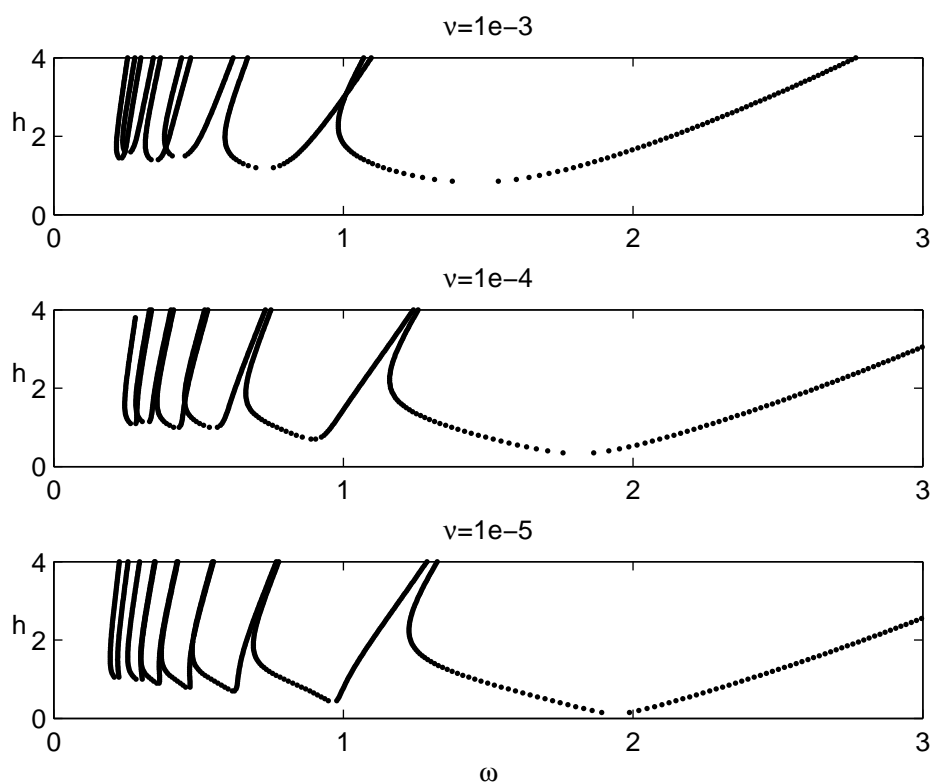


Рис. 1. Нейтральные кривые потери устойчивости

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В.И. Колебания твердого шара в вязкой жидкости под действием модулированной упругой силы и параметрический резонанс // Деп. ВИНТИ, 2006. 26 с.
- [2] Ландау Л.М., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [3] Зеньковская С.М., Юдович В.И. Метод интегро-дифференциальных уравнений в задачах со свободными границами и параметрическое возбуждение волн // ЖВМ и МФ. 2004. № 4. С. 370–384.

**Tsyvenkova O.A.** *The oscillation of a sphere in viscous fluid under modulated force.* The motion of a sphere in viscous fluid under modulated force is considered. Neutral curves of instability for zero equilibrium are analyzed for small values of viscosity.

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОСНОВАНИЯ

**Чебаков М. И.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о взаимодействии абсолютно жесткого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из двух круговых цилиндрических слоев с различными упругими постоянными. Внешняя поверхность основания закреплена, слои между собой жестко соединены. Такие задачи достаточно хорошо моделируют работу композиционного цилиндрического подшипника скольжения особенно при нагрузках, когда угловой размер площадки контакта соизмерим с шириной подшипника, а модуль упругости вкладыша и подложки различны и значительно ниже модуля упругости других деталей подшипника.

Для поставленной задачи теории упругости впервые построены интегральные уравнения, для решения которых использован прямой метод коллокации [1], позволяющий исследовать ее практически при любых значениях параметров. Приведены результаты расчетов.

## 1 Постановка задачи.

В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  рассмотрим два цилиндрических слоя  $R_1 \leq r \leq R_2$  и  $R_2 \leq r \leq R_3$ , которые жестко соединены между собой по границе  $r = R_2$ , а поверхность  $r = R_3$  неподвижна. Пусть в поверхность  $r = R_1$  силой  $P$  вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса  $R_0 = R_1 - \Delta$  с точкой первоначального касания  $\varphi = 0, r = R_1$ . Предполагается, что между штампом и цилиндрическим слоем силы трения отсутствуют, сила  $P$  направлена вдоль луча  $\varphi = 0$ , величина  $\Delta$  мала. В этом случае приходим к решению краевой задачи для уравнений Ламе (плоская деформация) со следующими граничными условиями

$$u_r^{(1)} = \delta \cos \varphi - \Delta(1 - \cos \varphi) \quad (r = R_1, |\varphi| \leq \theta), \quad (1)$$

$$\sigma_r^{(1)} = 0 \quad (r = R_1, |\varphi| > \theta), \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = 0 \quad (r = R_1), \quad (2)$$

$$u_r^{(2)} = u_\varphi^{(2)} = 0 \quad (r = R_3), \quad (3)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\varphi^{(1)} = u_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = \tau_{r\varphi}^{(2)}, \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} \quad (r = R_2), \quad (4)$$

где  $\delta$  — смещение штампа в вертикальном направлении,  $u_r^{(i)}, u_\varphi^{(i)}$  — перемещение в слое  $i$  ( $i = 1, 2$ ) соответственно вдоль осей  $r$  и  $\varphi$ ,  $\sigma_r^{(i)}, \tau_{r\varphi}^{(i)}$  — компоненты тензора напряжений в слое  $i$ ,  $|\varphi| \leq \theta$  — область контакта.

Для определения определения контактных напряжений  $\sigma_r^{(1)}(R_1, \varphi) = -q(\varphi)$  поставленная задача может быть сведена к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} q(t)k(t - \varphi)dt = f(\varphi) \quad (-\theta \leq \varphi \leq \theta) \quad (5)$$

$$k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} K(k) \cos ky, \quad f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1-\nu_1)} [(\delta + \Delta) \cos \varphi - \Delta],$$

$$K(u) = \frac{K_1(u)}{K_2(u)}, \tag{6}$$

где  $G_i$  — модуль сдвига,  $\nu_i$  — коэффициент Пуассона для слоя  $i$ .

В интегральном уравнении (6) трансформанта ядра  $K(u)$  получена с использованием программы аналитических вычислений *Maple*, она довольно громоздка и поэтому не представляется возможным полностью привести ее здесь, но основные ее свойства изучены, например, функции  $K_i(u)$  представимы в виде

$$K_i(u) = G^2 \eta_{i,2}(u) + G \eta_{i,1}(u) + \eta_{i,0}(u), \tag{7}$$

где  $G = G_2/G_1$ , а найденные функции  $\eta_{i,j}(u)$  содержат степенные и экспоненциальные функции, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и отношения радиусов  $r_2 = R_2/R_1$ ,  $r_3 = R_3/R_1$ . В виду их сильной громоздкости здесь они не приводятся.

Отметим, что

$$K(u) = 1/u + O(1/u^2) \quad (u \rightarrow \infty), \quad K(0) = A = \frac{A_1}{A_2}, \tag{8}$$

где

$$A_1 = (1 - 2\nu_1)(r_2^2 - 1)[r_2^2 + (1 - 2\nu_2)r_3^2]G +$$

$$+ (1 - 2\nu_2)(r_2^2 + 1 - 2\nu_1)(r_3^2 - r_2^2),$$

$$A_2 = 2(1 - \nu_1)\{[r_2^2 + (1 - 2\nu_2)r_3^2][1 + (1 - 2\nu_1)r_2^2]G +$$

$$+ (1 - 2\nu_2)(r_2^2 - 1)(r_3^2 - r_2^2)\}. \tag{9}$$

При  $G \rightarrow \infty$  получаем хорошо изученную задачу для однослойного цилиндра (см., например, [2]), при этом функция  $K(u)$  и постоянная  $A$  примут известные значения [2].

## 2 Решение интегрального уравнения.

Если представить

$$K(u) = 1/u + L(u) \tag{10}$$

и воспользоваться значением ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} = -\ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|,$$

то ядро интегрального уравнения (5) примет вид

$$k(t) = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \cos nt \tag{11}$$

Решение интегрального уравнения (11) получим методом коллокации, воспользовавшись результатами работы [1], где приведено соответствующее обоснование.

Для нахождения значений контактных напряжений  $q(\psi)$  в узлах коллокации  $\psi = \psi_j = -\theta + \varepsilon/2 + \varepsilon(j-1)$  получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{i=1}^N a_{ij} q_j = b_i \quad (i = 1, \dots, N), \quad (12)$$

где

$$a_{ij} = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon(i-j)}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \cos n\varepsilon(i-j) \quad (i \neq j),$$

$$a_{ii} = -(\ln \frac{\varepsilon}{2} - 1), \quad b_i = \pi f(\varphi_i), \quad (13)$$

$\varphi_i = -\theta + \varepsilon/2 + \varepsilon(i-1)$ ,  $\varepsilon = 2\theta/N$  – интервал коллокации,  $N$  – число узлов коллокации.

Отличительной особенностью системы (12)-(13) является то, что она имеет диагональную структуру. Между коэффициентами системы существует следующая связь

$$a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \quad (j \geq i), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (14)$$

следовательно достаточно вычислить только коэффициенты первой строки, а именно  $a_{1j}$ , все остальные элементы системы будут выражать через них, что значительно сокращает время вычисления всех коэффициентов матрицы  $a_{ij}$  системы (12)-(13).

Для вычисления силы  $P$ , действующей на штамп, можно использовать следующие соотношение

$$P = \varepsilon R_1 \sum_{i=1}^N q_i \cos \psi_i. \quad (15)$$

### 3 Числовые расчеты.

На основе полученных в п. 2 соотношений были проведены расчеты приведенных контактных напряжений  $q^*(\varphi) = q(\varphi)/G_1$  в точках  $\varphi_n = \theta n/5$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), величины области контакта  $\theta$ , величины приложенной к штампу приведенной силы  $P^* = P/G_1$  при заданном вертикальном перемещении штампа  $\delta$  при некоторых значениях геометрических ( $R_1, r_2 = R_2/R_1, r_3 = R_3/R_1, \Delta$ ) и механических ( $G, \nu_1, \nu_2$ ) параметров задачи.

Предварительно было проведено тестирование алгоритма расчетов путем сравнения числовых результатов в случае равенства механических параметров слоев с результатами, полученными при решении аналогичной задачи для однородного цилиндрического слоя другим аналитическим (асимптотическим) методом в [2]. Вычисления проводились при различных значениях  $N$  с целью контроля сходимости расчетной схемы.

В таблице 1 приведены результаты расчетов приведенных контактных напряжений  $q_n = q^*(\varphi_n)$ , величины области контакта  $\theta$  в градусах и приведенной силы



| $No$  | $\delta$ | $P^*$ | $\theta$ | $q_0$  | $q_1$  | $q_2$  | $q_3$  | $q_4$  | $N$     |
|---|----------|-------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $G = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, r_3 = 1.05, \Delta = 0.05$ |          |       |          |        |        |        |        |        |         |
| 1   | 0.0159   | 0.927 | 40.5     | 0.104  | 0.0997 | 0.0869 | 0.0660 | 0.0372 | 1000    |
| 2   | 0.0159   | 0.961 | 40.3     | 0.108  | 0.103  | 0.0901 | 0.0685 | 0.0388 | 2000    |
| 3   | 0.0159   | 0.978 | 40.3     | 0.110  | 0.105  | 0.0918 | 0.0697 | 0.0395 | 4000    |
| 4   | 0.0159   | 1.000 | 40.2     | 0.112  | 0.107  | 0.0939 | 0.0716 | 0.0410 | 1001[2] |
| 5   | 0.0565   | 4.48  | 61.8     | 0.356  | 0.341  | 0.295  | 0.221  | 0.122  | 1000    |
| 6   | 0.0565   | 4.73  | 61.8     | 0.376  | 0.359  | 0.311  | 0.233  | 0.128  | 2000    |
| 7   | 0.0565   | 4.86  | 61.6     | 0.386  | 0.369  | 0.320  | 0.240  | 0.133  | 4000    |
| 8   | 0.0565   | 5.00  | 61.5     | 0.397  | 0.380  | 0.329  | 0.247  | 0.138  | 1001[2] |
| $G = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, r_3 = 1.05, \Delta = 0.01$ |          |       |          |        |        |        |        |        |         |
| 9   | 0.0113   | 0.945 | 61.8     | 0.0751 | 0.0718 | 0.0662 | 0.0465 | 0.0257 | 2000    |
| 10  | 0.0113   | 1.000 | 61.5     | 0.0795 | 0.0760 | 0.0659 | 0.0495 | 0.0276 | 1001[2] |
| $G = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, r_3 = 1.1, \Delta = 0.01$  |          |       |          |        |        |        |        |        |         |
| 11  | 0.0205   | 0.973 | 70.2     | 0.0706 | 0.0674 | 0.0582 | 0.0434 | 0.0240 | 2000    |
| 12  | 0.0205   | 1.000 | 69.9     | 0.0725 | 0.0693 | 0.0699 | 0.0449 | 0.0251 | 1001[2] |
| 13  | 0.0928   | 4.85  | 83.8     | 0.318  | 0.303  | 0.259  | 0.191  | 0.103  | 2000    |
| 14  | 0.0928   | 5.00  | 83.4     | 0.328  | 0.313  | 0.268  | 0.198  | 0.108  | 1001[2] |

Таблица 1.

| $No$   | $\delta \cdot 10^3$ | $P/G_1$  | $\theta$ | $q_0$   | $q_1$   | $q_2$   | $q_3$   | $q_4$    | $G$ |
|--|---------------------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|----------|-----|
| $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 0.1, r_2 = 1.01, r_3 = 1.05, \Delta = 0.00001$ |                     |          |          |         |         |         |         |          |     |
| 1  | 0.05                | 0.00284  | 80.1     | 0.0191  | 0.0182  | 0.0156  | 0.0115  | 0.00621  | 0.5 |
| 2  | 0.05                | 0.00486  | 80.1     | 0.0327  | 0.0312  | 0.0268  | 0.0197  | 0.0106   | 1   |
| 3  | 0.05                | 0.00756  | 80.1     | 0.0508  | 0.0485  | 0.0416  | 0.0306  | 0.0165   | 2   |
| $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 0.1, r_2 = 1.01, r_3 = 1.05, \Delta = 0.0001$  |                     |          |          |         |         |         |         |          |     |
| 4  | 0.05                | 0.00199  | 47.8     | 0.0193  | 0.0185  | 0.0161  | 0.0122  | 0.00689  | 0.5 |
| 5  | 0.05                | 0.00347  | 48.0     | 0.0336  | 0.0322  | 0.0280  | 0.0212  | 0.0119   | 1   |
| 6  | 0.05                | 0.00554  | 48.0     | 0.0536  | 0.0514  | 0.0447  | 0.0338  | 0.0189   | 2   |
| $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 0.1, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4, \Delta = 0.00001$   |                     |          |          |         |         |         |         |          |     |
| 7  | 0.05                | 0.000254 | 75.4     | 0.00170 | 0.00163 | 0.00142 | 0.00110 | 0.000704 | 0.2 |
| 8  | 0.05                | 0.000474 | 76.5     | 0.00319 | 0.00305 | 0.00265 | 0.00203 | 0.00123  | 0.5 |
| 9  | 0.05                | 0.000689 | 77.4     | 0.00464 | 0.00443 | 0.00384 | 0.00291 | 0.00171  | 1   |
| 10   | 0.05                | 0.000901 | 77.0     | 0.00606 | 0.00579 | 0.00501 | 0.00377 | 0.00218  | 2   |
| 11   | 0.05                | 0.00111  | 78.5     | 0.00747 | 0.00713 | 0.00616 | 0.00461 | 0.00262  | 5   |

Таблица 2.

| $N_0$  | $P/G_1$  | $\theta$ | $q_0$   | $q_1$   | $q_2$   | $q_3$   | $q_4$   | $G$ | $\nu_1$ | $\nu_2$ |
|--|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|---------|---------|
| $\delta = 0.0001, R_1 = 0.1, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4, \Delta = 0.00001$ |          |          |         |         |         |         |         |     |         |         |
| 1  | 0.00228  | 83.0     | 0.0149  | 0.0142  | 0.0122  | 0.00912 | 0.00511 | 5   | 0.3     | 0.3     |
| 2  | 0.00462  | 86.1     | 0.0301  | 0.0286  | 0.0243  | 0.0177  | 0.00954 | 5   | 0.45    | 0.3     |
| 3  | 0.00597  | 89.1     | 0.0385  | 0.0365  | 0.0309  | 0.0221  | 0.0116  | 5   | 0.45    | 0.45    |
| 4  | 0.00522  | 79.8     | 0.00340 | 0.00326 | 0.00284 | 0.00218 | 0.00137 | 0.2 | 0.3     | 0.3     |
| 5  | 0.000540 | 78.7     | 0.00353 | 0.00338 | 0.00296 | 0.00229 | 0.00146 | 0.2 | 0.45    | 0.3     |
| 6  | 0.00121  | 84.4     | 0.00785 | 0.00749 | 0.00644 | 0.00480 | 0.00279 | 0.2 | 0.45    | 0.45    |
| 7  | 0.00345  | 88.7     | 0.0221  | 0.0210  | 0.0179  | 0.0129  | 0.00706 | 1   | 0.45    | 0.45    |

Таблица 3.

$P^*$  при  $G = 1$  и некоторых значениях других параметров. В строках 4, 8, 10, 12 и 14 для сравнения приведены соответствующие результаты из [2] (стр. 146, таблица 3.12) для однородного слоя. В таблице 1 можно наблюдать уточнение результатов с увеличением числа уравнений  $N$  системы (12) и близость результатов расчетов к соответствующим результатам из [2].

В таблицах 2, 3 приведены результаты расчетов тех же величин при  $G \neq 1$  и  $N = 2000$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00002, 05-01-00306, 06-08-01257)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Воронин В.В., Цецехо В.А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 40-53.
- [2] Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.

**Chebakov M.I.** *Contact problem for the two-layer cylindrical base.* The flat contact problem of the elasticity theory on interaction of the absolutely rigid cylinder with an internal surface of the cylindrical base is considered. The base consists from two circular cylindrical layers with various elastic constant. The external surface of the base is fixed. The integral equation for the problem are constructed, the solution of one with help of the direct collocation method is obtained. The results of calculations are given.

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

**Шалдырван В. А., Васильев Т. А.**  
*Донецкий национальный университет, Украина*

С использованием спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов построены решения двух смешанных задач для цилиндрических тел. Предложенный подход является естественным обобщением метода Лурье-Воровича на случай кратных собственных значений спектральной задачи.

При использовании метода однородных решений возникает необходимость разложения компонент НДС по собственным функциям несамосопряженных спектральных задач. Для цилиндрических тел со свободными торцами указанная система обладает свойством двукратной полноты, что позволяет разложить одновременно две разные функции по одному и тому же базису. Проблема полноты однородных решений для ряда граничных условий и в различных аспектах рассматривалась в работах [1,2]. Но в некоторых смешанных задачах система собственных функций не обладает требуемыми свойствами полноты, поэтому необходимо строить разложения компонент НДС по специальному базису, включающему собственные и присоединенные функции [3]. Данная работа посвящена этому вопросу.

**§1 Построение однородных решений.** Рассмотрим упругое равновесие изотропного слоя толщины  $2H$  со смешанными однородными условиями на торцах. При отсутствии объемных сил компоненты вектора перемещений  $\{u_1, u_2, u_3\}$  должны удовлетворять системе уравнений

$$u_{i,jj} + (1 - 2\nu)u_{j,ji} = 0. \quad (1)$$

На поверхностях слоя зададим два типа условий: шарнирное (мембранное) закрепление (задача А)

$$\sigma_{x_3x_3}(x_1, x_2, \pm H) = u_1(x_1, x_2, \pm H) = u_2(x_1, x_2, \pm H) = 0; \quad (2)$$

стеснение без трения (задача Б)

$$u_3(x_1, x_2, \pm H) = \sigma_{x_1x_3}(x_1, x_2, \pm H) = \sigma_{x_2x_3}(x_1, x_2, \pm H) = 0. \quad (3)$$

Однородные решения будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= n(x_3)\Psi_{,1}(x_1, x_2) - p(x_3)\Phi_{,2}(x_1, x_2), \\ u_1(x_1, x_2, x_3) &= n(x_3)\Psi_{,2}(x_1, x_2) + p(x_3)\Phi_{,1}(x_1, x_2), \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= q(x_3)\Psi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

В результате разделения переменных, получаем спектральные задачи:

$$\begin{aligned} n''(x_3) + (k+1)\gamma^2 n(x_3) + kq'(x_3) &= 0, \\ q''(x_3) + \frac{1}{k+1}\gamma^2 q(x_3) + \frac{k}{k+1}\gamma^2 n'(x_3) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} n(\pm H) = q'(\pm H) = 0: \text{Задача А или } n'(\pm H) = q(\pm H) = 0: \text{Задача Б,} \\ p''(x_3) + \delta^2 p(x_3) &= 0, \\ p(\pm H) = 0: \text{Задача А или } p'(\pm H) = 0: \text{Задача Б} \end{aligned} \quad (6)$$

и метагармонические уравнения для определения функций  $\Psi(x_1, x_2)$  и  $\Phi(x_1, x_2)$ :

$$D^2\Psi(x_1, x_2) = \gamma^2\Psi(x_1, x_2), \quad (7)$$

$$D^2\Phi(x_1, x_2) = \delta^2\Phi(x_1, x_2). \quad (8)$$

Уравнения для определения собственных чисел и собственные функции спектральных задач, с учетом разбиения на задачи изгиба и растяжения-сжатия [4], могут быть представлены следующим образом:

|  |  |
|--|--|
| Задача А а) растяжение-сжатие                      | б) изгиб   |
| $\cos^2\gamma H = 0, n_p(x_3) = \cos\gamma_p x_3,$ | $\sin^2\gamma H = 0, n_p(x_3) = \sin\gamma_p x_3,$ |
| $q_p(x_3) = -\gamma_p \sin\gamma_p x_3,$           | $q_p(x_3) = \gamma_p \cos\gamma_p x_3,$            |
| $\cos\delta H = 0, p_k(x_3) = \cos\delta_k x_3;$   | $\sin\delta H = 0, p_k(x_3) = \sin\delta_k x_3;$   |

|   |   |
|---|---|
| Задача Б а) растяжение-сжатие                           | б) изгиб  |
| $\sin^2\gamma H = 0, n_p(x_3) = \cos\gamma_p x_3,$      | $\cos^2\gamma H = 0, n_p(x_3) = \sin\gamma_p x_3,$      |
| $q_p(x_3) = -\gamma_p \sin\gamma_p x_3,$                | $q_p(x_3) = \gamma_p \cos\gamma_p x_3,$                 |
| $\delta \sin\delta H = 0, p_k(x_3) = \cos\delta_k x_3;$ | $\delta \cos\delta H = 0, p_k(x_3) = \sin\delta_k x_3.$ |

Так как ненулевые собственные числа  $\gamma_p$  в задачах А и Б двукратны, то возникает необходимость построения присоединенных функций [5].

## §2 Построение элементарных решений.

**§2.1 Ненулевые кратные собственные числа.** В работе [5] рассматривается операторное уравнение

$$Au = \left( A_0 + A_1 \frac{\partial}{\partial t} + \dots + A_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \right) u = 0.$$

Его решения построены в монографии [6] и названы элементарными. В рассматриваемых задачах речь идет о системе операторных уравнений, структура каждого из которых такова

$$A = A_0 + A_1 D^2 + \dots + A_m D^{2m}.$$

По аналогии с результатами работ [5,6] элементарные решения будем строить в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= n_p^1(x_3)\Psi_{p,1}(x_1, x_2) + n_p(x_3)\Psi_{p,1}^1(x_1, x_2), \\ u_2 &= n_p^1(x_3)\Psi_{p,2}(x_1, x_2) + n_p(x_3)\Psi_{p,2}^1(x_1, x_2), \\ u_3 &= q_p^1(x_3)\Psi_{p(x_1, x_2)} + q_p(x_3)\Psi_{p^1(x_1, x_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $n_p(x_3)$  и  $q_p(x_3)$  – собственные функции (9)-(10),  $\Psi_p(x_1, x_2)$  – метагармонические функции.

Подставляя (11) в систему уравнений равновесия (1) и граничные условия (2) (или (3)), получим граничную задачу для определения присоединенных функций  $n_p^1(x_3)$  и  $q_p^1(x_3)$

$$\begin{aligned} n_{p^1(x_3)}'' + (k + 1)\gamma_p^2 n_p^1(x_3) + kq_p^1(x_3) &= -(k + 1)n_p(x_3), \\ q_{p^1(x_3)}'' + \frac{1}{k + 1}\gamma_p^2 q_p^1(x_3) + \frac{k}{k + 1}\gamma_p^2 n_p^1(x_3) &= -\frac{1}{k + 1}q_p(x_3) - \frac{k}{k + 1}n_p'(x_3), \\ n_{p^1(\pm H)} &= q_{p^1(\pm H)} = 0: \text{Задача А или } n_{p^1(\pm H)}' = q_{p^1(\pm H)} = 0: \text{Задача Б} \end{aligned} \quad (12)$$

и такие уравнения для определения функций  $\Psi_p^1(x_1, x_2)$

$$D^2\Psi_p^1(x_1, x_2) = \gamma_p^2\Psi_p^1(x_1, x_2) + \Psi_p(x_1, x_2). \quad (13)$$

Решение задачи (12) для обоих случаев закрепления торцевых плоскостей слоя можно записать следующим образом

а) растяжение-сжатие

б) изгиб

$$\begin{aligned} n_p^1(x_3) &= -\frac{1}{2\gamma_p^2}\cos\gamma_p x_3, & n_p^1(x_3) &= -\frac{1}{2\gamma_p^2}\sin\gamma_p x_3, \\ q_p^1(x_3) &= -\frac{3 - 4\nu}{2\gamma_p^2}\sin\gamma_p x_3; & q_p^1(x_3) &= -\frac{3 - 4\nu}{2\gamma_p^2}\cos\gamma_p x_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Элементарные решения, связанные со второй спектральной задачей, совпадают с однородными.

**§2.2 Нулевые кратные собственные числа.** Нулевым собственными значениями в задаче А в случае изгиба и в задаче Б в случае растяжения-сжатия, как видно из (9) и (10), также кратны. Поэтому для собственных функций  $n_0(x_3)$ ,  $q_0(x_3)$  и  $p_0(x_3)$  необходимо строить присоединенные. В структуре элементарного решения учтем двукратность нулевого собственного значения спектральной задачи (6):

$$\begin{aligned} u_1 &= n_{0^1}(x_3)\Psi_{0,1}(x_1, x_2) + n_0(x_3)\Psi_{0,1^1}(x_1, x_2) - p_{0^1}(x_3)\Phi_{0,2}(x_1, x_2) - p_0(x_3)\Phi_{0,2^1}(x_1, x_2), \\ u_2 &= n_0^1(x_3)\Psi_{0,2}(x_1, x_2) + n_0(x_3)\Psi_{0,2^1}(x_1, x_2) + p_0^1(x_3)\Phi_{0,1}(x_1, x_2) + p_0(x_3)\Phi_{0,1^1}(x_1, x_2), \\ u_3 &= q_0^1(x_3)\Psi_0(x_1, x_2) + q_0(x_3)\Psi_{0^1}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Прямая подстановка соотношений (15) в уравнения равновесия (1) приводит к выводу, что  $\Psi_0(x_1, x_2)$  и  $\Phi_0(x_1, x_2)$  – гармонические, а  $\Psi_0^1(x_1, x_2)$  и  $\Phi_0^1(x_1, x_2)$  – бигармонические функции.

Введем в рассмотрение сопряженную к  $\Phi_0(x_1, x_2)$  гармоническую функцию  $\Omega_0(x_1, x_2)$ . Воспользуемся функциональным произволом и предположим, что  $\Omega_0(x_1, x_2) = \Psi_0(x_1, x_2)$ . Выразим бигармоническую функцию  $\Phi_0^1(x_1, x_2)$  через две гармонические:  $\Psi_0(x_1, x_2)$  и произвольную  $\Phi_0^*(x_1, x_2)$ . В результате получаем, что

бигармоническое решение имеет такую структуру

$$\begin{aligned} u_1 &= n_0^1(x_3)\Psi_{0,1}(x_1, x_2) + n_0(x_3)\Psi_{0,1}^1(x_1, x_2) - p_0^1(x_3)\Phi_{0,1}^*(x_1, x_2), \\ u_2 &= n_0^1(x_3)\Psi_{0,2}(x_1, x_2) + n_0(x_3)\Psi_{0,2}^1(x_1, x_2) + p_0^1(x_3)\Phi_{0,2}^*(x_1, x_2), \\ u_3 &= q_0^1(x_3)\Psi_0(x_1, x_2) + q_0(x_3)\Psi_{0,1}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (16)$$

**§3 НДС стесненного кольцевого цилиндра.** В качестве иллюстрации представим анализ осесимметричного НДС кольцевого цилиндра со стесненными торцами, свободной внутренней криволинейной поверхностью и нагруженной нормальными усилиями, распределенными по квадратичному закону, внешней криволинейной поверхностью.

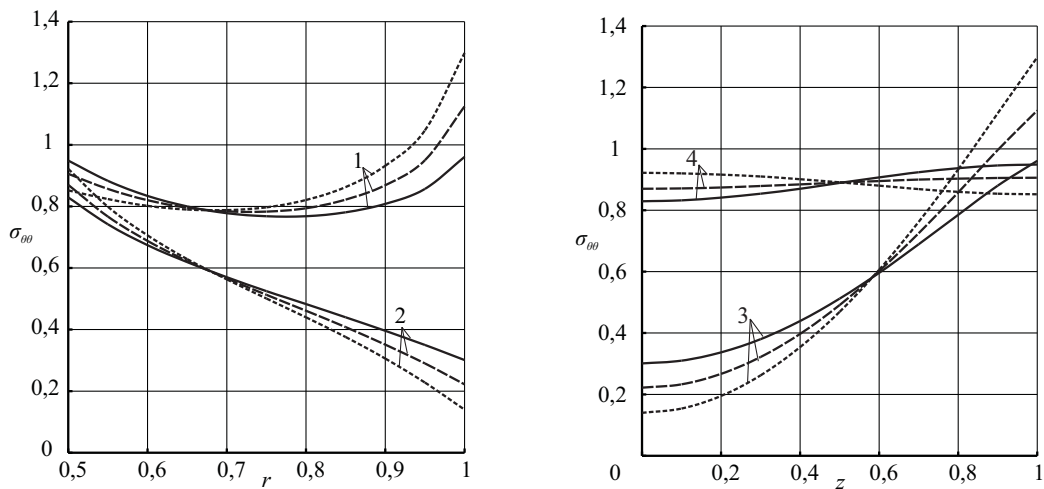


Рис. 1. Распределение значений напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$

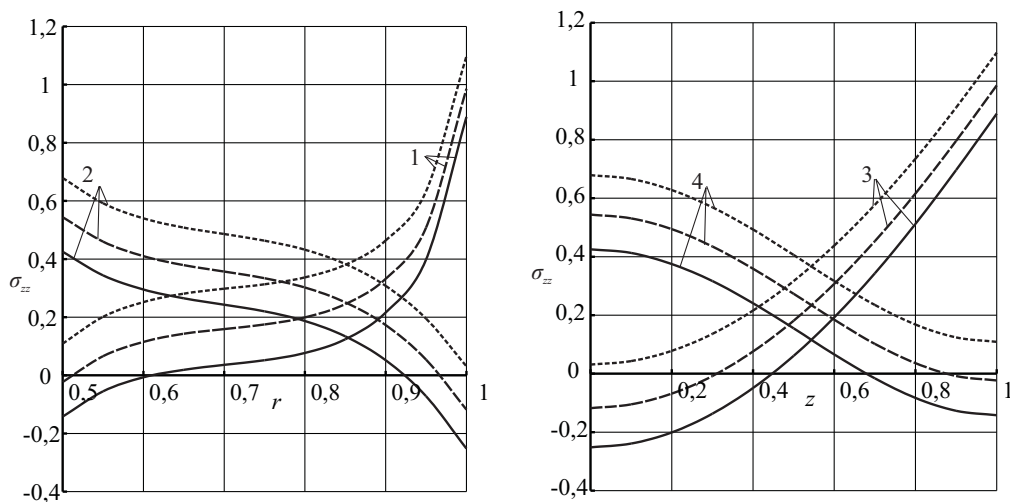


Рис. 2. Распределение значений напряжений  $\sigma_{zz}$

На рис.1 и рис.2 представлены распределения напряжений, возникающих вдоль срединной и граничных поверхностей в кольцевом цилиндре с  $h = 0.5$ ,  $\rho = 0.5$  при

разных значениях упругих модулей. Сплошной линией обозначены эпюры для напряжений в бетоне, пунктирной – в стали и точечной – в свинце. Введены также такие обозначения для распределений напряжений 1 – вдоль торцевой плоскости, 2 – вдоль срединной поверхности, 3 – вдоль внешней криволинейной поверхности, 4 – вдоль внутренней криволинейной поверхности. Анализ результатов показывает, что с увеличением жесткости материала напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  на внешней цилиндрической поверхности возрастают у торцов и убывают вблизи срединной поверхности. На внутренней криволинейной поверхности наблюдается обратный эффект. Напряжения  $\sigma_{zz}$  с увеличением жесткости материала возрастают всюду внутри цилиндра.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И., Ковальчук В.Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений // ПММ. Т. 31. 1967. Вып. 5. С. 861–869.
- [2] Устинов Ю.А., Юдович В.И. О полноте элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. Т. 37. 1973. Вып. 4. С. 706–714.
- [3] Ильин В.А. Базисы, состоящие из корневых функций дифференциальных операторов // СОЖ. 1998. № 4. С. 102–108.
- [4] Шалдырван В.А. Метод однородных решений Лурье-Воровича – оценки бигармонической проблемы, обобщения, приложения // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости смежд. участием. Ростов н/Д: Книга, 2004, С. 401–403.
- [5] Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2001. 384 с.
- [6] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию операторных полиномиальных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986. 260 с.

**Shaldyrvan V.A., Vasiliev T.A.** *Application of the spectral theory of non-selfadjoint operators for definition of strain characteristics in spatial bodies.* By application of the spectral theory of non-selfadjoint differential operators two mixed boundary problems are considered. The offered approach is the natural generalization of the Lur'e-Vorovitch method on a case multiple roots of a spectral problem.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ФОРМОВКИ АРТИФИЦИРОВАННОЙ ХЛОПАЮЩЕЙ МЕМБРАНЫ

Юдин А. С., Юдин С. А.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

Разработана математическая модель, применимая к задаче имитационного моделирования технологии пластической формовки хлопающих предохранительных мембран высокой точности срабатывания. Изготовление оболочки выполняется вытяжкой давлением из плоской круглой пластинки, защемленной по контуру, в сочетании с дополнительным силовым артифицирующим воздействием, которое обеспечивает требуемые характеристики. Получено аналитическое решение этой существенно нелинейной задачи, основанное на качественном анализе результатов экспериментов и применении полубратного метода.

Модель основана на уравнениях, которые допускают большие перемещения и углы поворота, изменение метрики срединной поверхности и обжатие материальной нормали. Используются степенные аппроксимации диаграмм упрочняющегося материала и деформационные физические соотношения с логарифмическими относительными удлинениями [1].

Полагается, что относительные удлинения  $e_k$ ,  $\varepsilon_k = e_k|_{\zeta=0}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , сравнимы с единицей; обжатие материальной нормали  $e_3 = \varepsilon_3$  постоянно по толщине. Кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}e_1 &= (\varepsilon_1 + \zeta\kappa_1), \kappa_1 = \Phi'_o/\alpha_o - \delta_3 K_1, \varepsilon_1 = (w' \sin \Phi + u' \cos \Phi)/\alpha_o + \cos(\Phi - \Phi_o) - 1; \\e_2 &= (\varepsilon_2 + \zeta\kappa_2), \varepsilon_2 = u/r_o, \kappa_2 = (\sin \Phi_o)/r_o - \delta_3 K_2; K_1 = \Phi'/\alpha_o, K_2 = (\sin \Phi)/r_o. \\ \gamma &= \gamma_o/\delta_1, \gamma_o = (w' \cos \Phi - u' \sin \Phi)/\alpha_o - \sin(\Phi - \Phi_o).\end{aligned}$$

Здесь:  $\Phi_o$  и  $\Phi$  - углы наклона материальной нормали к оси вращения до и после деформирования;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  характеристики изменения главных кривизн;  $\delta_k = 1 + \varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;  $(\dots)' = d(\dots)/d\xi$ . Для пластинки в исходном состоянии угол наклона нормали к оси симметрии  $\Phi_o = 0$ . Угол поперечного сдвига  $\gamma$  полагается малым и далее зануляется.

В безразмерной форме [1] дифференциальная система уравнений для пластины, нагруженной равномерным давлением, имеет вид:

$$\begin{aligned}d\bar{T}^o/d\xi &= \alpha_o \xi \delta_1 \delta_2 p \cos \Phi, \quad d\bar{\Psi}^o/d\xi = \alpha_o \bar{N}_2^o - \alpha_o r_o \delta_1 \delta_2 p \sin \Phi, \\dM^o/d\xi &= \alpha_o M_2^o \cos \Phi + \alpha_o r_o \delta_1 \bar{Q}^o/\varepsilon_*, \\dw/d\xi &= \alpha_o \delta_1 \sin \Phi, \quad du/d\xi = \alpha_o (\delta_1 \cos \Phi - 1), \quad d\Phi/d\xi = \alpha_o K_1,\end{aligned}\tag{1}$$

где:

$$\bar{T}^o = r_o \bar{V}^o, \quad \bar{\Psi}^o = r_o \bar{H}^o, \quad M^o = r_o M_1^o;$$



$$\begin{aligned}\bar{V}^o &= \bar{N}_1^o \sin \Phi + Q^o \cos \Phi, & \bar{H}^o &= \bar{N}_1^o \cos \Phi - Q^o \sin \Phi, \\ \bar{N}_1^o &= \bar{V}^o \sin \Phi + \bar{H}^o \cos \Phi, & \bar{Q}^o &= \bar{V}^o \cos \Phi - \bar{H}^o \sin \Phi;\end{aligned}\quad (2)$$

$$\bar{N}_j^o = N_j^o + \varepsilon_*(K_1 M_1^o + K_2 M_2^o)/\delta_j, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

Здесь:  $\xi \in [0, 1]$  независимая радиальная лагранжева координата;  $p$  – интенсивность гидростатического давления;  $\varepsilon_* = h_*/R_*$  – параметр тонкостенности;  $\bar{V}^o$  и  $\bar{H}^o$  внутренние усилия в направлениях оси симметрии и радиуса цилиндрической системы координат;  $\bar{M}_1^o$  – изгибающий момент. Коэффициент Лямэ  $\alpha_o$  полагается равным единице.

При больших пластических деформациях многие металлы и сплавы ведут себя практически как несжимаемые. Поэтому полагается выполняющимся условие  $\delta_1 \delta_2 \delta_3 = 1$ .

Свойства материала характеризуются диаграммой нагружения, которая аппроксимируется степенной функцией на участке упрочнения:

$$\sigma = E\bar{e}, \bar{e} \leq \bar{e}_{0,2}, \sigma = C\bar{e}^\eta = E_c\bar{e}, \bar{e} \geq \bar{e}_{0,2}, \bar{e} = (2/\sqrt{3})\sqrt{\bar{e}_1^2 + \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2^2},$$

где:  $\bar{e}$  – интенсивность логарифмических деформаций несжимаемого материала;  $\bar{e}_j = \ln(1 + e_j)$ ;  $C, \eta$  – константы материала;  $\sigma_{0,2}, \bar{e}_{0,2}$  – напряжение и деформация условного предела текучести,  $E$  – модуль Юнга,  $E_c = \bar{e}^{\eta-1}$  – секущий модуль.

Используются физические соотношения Дэвиса-Надаи для несжимаемого материала, связывающие напряжения и логарифмические деформации в главных осях:

$$\sigma_1 = (4/3)\Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2), \quad \sigma_2 = (4/3)\Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2).$$

Здесь:  $\Lambda = E$  при  $\bar{e} \leq \bar{e}_{0,2}$  (в областях упругости) и  $\Lambda(\bar{e}) = E_c(\bar{e})$  при  $\bar{e}_{0,2} < \bar{e} < \bar{e}_B$  (в пластических зонах).

Диаграмма свойств материала переводится на единичную плоскость в координатах безразмерных напряжений  $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_B$  и относительных истинных деформаций  $\tilde{e} = \bar{e}/\bar{e}_B$ , где  $\sigma_B, \bar{e}_B$  – предельные напряжения и деформации [2, 3]. В безразмерной форме эти соотношения имеют вид:

$$\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_B, \quad \bar{e} = \bar{e}_B\tilde{e}, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{e}) = \tilde{C}\tilde{e}_B^\eta\tilde{e}^\eta = \tilde{C}_B\tilde{e}^\eta, \quad \tilde{C} = \tilde{C}/\sigma_B, \quad \tilde{C}_B = \tilde{C}\tilde{e}_B^\eta = 1,$$

$$\tilde{E}_c(\tilde{e}) = \tilde{C}\tilde{e}_B^{(\eta-1)}\tilde{e}^{(\eta-1)} = \tilde{C}_E\tilde{e}^{(\eta-1)}, \quad \tilde{C}_E = \tilde{C}\tilde{e}_B^{(\eta-1)} = 1/\bar{e}_B.$$

Далее для упрощения записи тильды ( $\sim$ ) убираются. При построении двумерных определяющих соотношений можно положить  $\Lambda(\bar{e}) \approx \Lambda(\bar{\varepsilon})$ . Это оправдано в задаче сильной вытяжки, которая рассматривается. Тогда связи усилий и моментов с компонентами деформаций в безразмерной форме получают относительно простой вид:

$$N_1^o = (k_\sigma/\varepsilon_*)B_1(\bar{\varepsilon}_1 + 0.5\bar{\varepsilon}_2), \quad N_2^o = (k_\sigma/\varepsilon_*)B_2(\bar{\varepsilon}_2 + 0.5\bar{\varepsilon}_1), \quad (4)$$

$$M_1^o = -k_\sigma D_1(\bar{K}_1 + 0.5\bar{K}_2), \quad M_2^o = -k_\sigma D_2(\bar{K}_2 + 0.5\bar{K}_1), \quad (5)$$

где:

$$\bar{\varepsilon}_j = \ln(1 + \varepsilon_j) = \ln \delta_j, \quad \bar{K}_j = K_j/\delta_j, \quad j = 1, 2; k_\sigma = \sigma_B/E_*;$$

$$\bar{B}_1 = \bar{B}/\delta_1, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}/\delta_2, \quad \bar{D}_1 = \delta_3^3\delta_2\bar{D}, \quad \bar{D}_2 = \delta_3^3\delta_1\bar{D},$$

$$\bar{B} = (4/3)\Lambda(\varepsilon)h_o, \quad \bar{D} = (1/9)\Lambda(\varepsilon)h_o^3.$$

Рассмотрим вытяжку давлением из плоской круглой пластинки толщиной  $h_p$ , заземленной по контуру радиуса  $r_p$ , сфероидального купола (сегмента) заданной высоты  $w_o$ . Меридиан сегмента соответствует дуге эллипса с полуосями  $a_e$ ,  $b_e$  и квадратом эксцентриситета  $e_x^2 = 1 - (a_e/b_e)^2$ . Уравнение эллипса имеет параметрическое представление:  $x = a_e \sin \Phi$ ,  $z = b_e \cos \Phi$ . Угол между нормалью к меридиану купола и осью симметрии на границе сегмента обозначим  $\Phi_g$ . При переходе к безразмерным полагаем:  $h_* = h_p$ ,  $R_* = r_p$ ,  $E_* = \sigma_B$ .

На основании анализа физических и вычислительных экспериментов было установлено, что переменную толщину купола вполне можно задавать квадратичной зависимостью вида  $h(\Phi) = h_p\{1 - \delta[1 - (\Phi/\Phi_\Gamma)^2]\}$ , где  $\delta = 1 - h_o/h_p$  — относительное утонение купола в вершине. Тогда  $\varepsilon_3 = -\delta[1 - (\Phi/\Phi_\Gamma)^2]$ .

Величина  $\delta$  определяется из условия равенства объемов пластинки и эллипсоидальной оболочки с малым эксцентриситетом:

$$2\pi a_e \int_0^{\Phi_\Gamma} h(\Phi) a_e [1 - 0.5e_x^2 \sin^2 \Phi] \sin \Phi d\Phi = \pi r_p^2 h_p,$$

откуда  $\delta = [I_0 - 0.5(r_p/a_e)^2]/I_1$ , где:

$$I_0 = C_g \{(e_x^2/6)[(S_g)^2 + 2] - 1\} + 1 - (1/3)e_x^2, \quad I_1 = I_{11} + I_{12},$$

$$I_{11} = [3\Phi_g S_g^3 + C_g S_g^2 + 20(C_g - 1) + 18\Phi_g S_g - 9\Phi_g^2](e_x/\Phi_g)^2/27,$$

$$I_{12} = [2 + \Phi_g^2 - 2(C_g + \Phi_g S_g)]/\Phi_g^2.$$

Условие несжимаемости можно применить фрактально — к частям пластинки и оболочки, отсекаемым параллелями с текущей лагранжевой координатой  $\xi$ . Условие фрактального равенства объемов

$$2\pi a_e \int_0^{\Phi(\xi)} h(\chi) a_e [1 - 0.5e_x^2 \sin^2 \chi] \sin \chi d\chi = \pi \xi^2 h_p$$

после интегрирования можно привести к функциональному уравнению для определения радиального перемещения  $u(\xi)$ :

$$u(\xi) = a_e [S_3 S_\Phi(\xi)^3 + S_2 C_\Phi(\xi) S_\Phi(\xi)^2 + S_0 C_\Phi(\xi) - F_1(\xi)] - \xi, \quad (6)$$

где:

$$x(\xi) = \xi + u(\xi), \quad S_\Phi(\xi) = \sin(\Phi(\xi)) = x(\xi)/a_e, \quad \Phi(\xi) = \arcsin(S_\Phi(\xi)),$$

$$C_\Phi(\xi) = \cos(\Phi(\xi)) = [1 - S_\Phi(\xi)^2]^{1/2}; \quad (7)$$

$$f_1(\xi) = \xi^2/(2a_e^2), \quad f_2 = f_1(\xi) - (1 - \delta)[1 - (1/3)e_x^2] + (2\delta/\Phi_g^2)[1 - (10/27)e_x^2]$$

$$F_1(\xi) = -3\Phi_g^2 f_1(\xi)/[2\delta \cdot \Phi(\xi)(3 - e_x^2)], \quad S_1 = 1/[6(3 - e_x^2)], \quad S_3 = e_x^2 S_1,$$

$$S_2(\xi) = -S_3\{(3/2)\Phi(\xi) + [9(1 - \delta)\Phi_g^2 - 2d]/[6\delta \cdot \Phi(\xi)]\}$$

$$S_0(\xi) = \Phi(\xi)/2 - S_1\{[9(1 - \delta)\Phi_g^2 - 20d]e_x^2 + 27[(d - 1)\Phi_g^2 + 2\delta]\}/\{[3\delta \cdot \Phi(\xi)]\}.$$

Правые части (6) зависят от  $u(\xi)$  через формулы (7). Уравнение (6) приведено к форме, необходимой для применения итерационного метода на основе принципа сжимающих отображений [4]. В качестве начального приближения можно взять функцию  $u_0(\xi) = u_{a0}a_e\Phi(\xi)(1 - \Phi(\xi)/\Phi_\Gamma)$ , где  $u_{a0} = 1/(1 - \delta)^{1/2} - 1$ . Процесс быстро сходится за две итерации. После выхода из процесса определяются геометрические величины (7) и компоненты деформаций:  $\varepsilon_2(\xi) = u(\xi)/\xi$ ,  $\delta_2(\xi) = 1 + \varepsilon_2$ ,  $\delta_1(\xi) = [\delta_2(\xi)\delta_3(\xi)]^{-1}$ ,  $\varepsilon_1(\xi) = \delta_1(\xi) - 1$ , а также внутренние усилия и моменты (2), (3).

Далее интегрируется система (1). Из первого, второго, четвертого и пятого уравнений следуют:

$$\bar{T}^o(\xi) = p \cdot I_{11}(\xi) + P_0/(2\pi), \quad \bar{\Psi}^o(\xi)I_{21}(\xi) - p \cdot I_{22}(\xi) + r_p H_g; \tag{8}$$

$$w(\xi) = -w_o + I_{41}(\xi), \quad u(\xi) = I_{51}(\xi), \tag{9}$$

где:

$$I_{11}(\xi) = \int_0^\xi [\zeta/\delta_3(\zeta)] \cdot \cos \Phi(\zeta) d\zeta; \quad I_{22}(\xi) = \int_0^\xi [\zeta/\delta_3(\zeta)] \cdot \sin \Phi(\zeta) d\zeta,$$

$$I_{41}(\xi) = \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot \sin \Phi(\zeta) d\zeta, \quad I_{51}(\xi) = \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot \cos \Phi(\zeta) d\zeta, \quad I_{21}(\xi) = \int_0^\xi \bar{N}_2^o(\zeta) d\zeta. \tag{10}$$

Перемещения (9) обращаются в нуль на краевом контуре. Величины  $P_0$  и  $H_g$  являются константами интегрирования. При этом  $P_0$  имеет смысл сосредоточенной в вершине силы, управляющей артификацией,  $H_g$  – радиальная погонная сила на контуре.

На основе (7), (2) и (3) из третьего уравнения системы (1) можно определить давление формовки купола заданной высоты  $w_o$ . Это можно сделать двумя способами: дифференциальным и интегральным. Поскольку геометрия получаемой оболочки параметрически известна, то через ее кривизны и полученные выражения относительных удлинений можно определить моменты и их производные. Это первый подход, который дает:

$$p = \frac{[I_{21}(\xi) + r_p H_g] \sin \Phi(\xi) - [P_0/(2\pi)] \cos \Phi(\xi) + \varepsilon_* \tau_1(\xi)/\delta_1(\xi)}{I_{11}(\xi) \cos \Phi(\xi) + I_{22}(\xi) \sin \Phi(\xi)} \approx const \tag{11}$$

где:

$$\tau_1(\xi) = M_1^o(\xi) \{1 - [\delta_1(\xi)/\delta_2(\xi)] \cos \Phi(\xi)\} + \xi \cdot dM_1^o(\xi)/d\xi.$$

Вывод выражения (11) на константу управляется параметрами  $P_0$ ,  $H_g$ ,  $e_x$ .

Во втором способе третье уравнение интегрируется, что дает возможность ввести еще одну константу интегрирования, имеющую смысл изгибающего момента на контуре. Этот способ методически лучше, но более громоздок и ресурсоемок

по времени счета, поскольку связан с вычислениями двойных интегралов. Существенное ускорение счета здесь достигается использованием аппроксимаций для интегралов (10). Вычисления показали, что оба способа приводят к практически одинаковым результатам.

Сравнение результатов математического моделирования с экспериментом дало хорошее согласование.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдин А.С. Большие осесимметричные деформации упруго-пластических оболочек вращения // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1978. № 3. С. 34–37.
- [2] Ахмеров А.Ф. О кривых упрочнения материалов и их аппроксимации // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 1972. № 3. С. 79–86.
- [3] Юдин С.А. Модель формовки оболочки вращения при конечных деформациях // Современ. пробл. мех. спл. среды. Тр. IX Междунар. конф. В 2-х т. Т.2. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР 2005. С. 228–231.
- [4] Ворович И.И., Лебедев Л.П. Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды / Учебное пособие. М.: Вузовская книга, 2000. 320 с.

**Yudin A.S., Yudin S.A.** *Modelling of plastic forming of artificial buckling membrane.* Mathematical model of plastic forming technology of precise artificial buckling membranes is developed. Manufacturing of the shell is carried out by an extract pressure from the flat round plate rigid fixed on the contour, in the combination with additional force which provides required characteristics. Received analytical decision of this essentially nonlinear problem based on the qualitative analysis of results of experiments and application of semi-reversed method.

# УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Юдин С. А., Юдин А. С.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Представлены исходные и разрешающие уравнения для решения задач нелинейной устойчивости оболочек вращения. Модель применяется к сфероидальным оболочкам, получаемым свободной вытяжкой из пластинки гидростатическим давлением в сочетании с сосредоточенной в вершине силой. Таким силовым управлением формой оболочки в процессе изготовления можно настраивать ее свойства на заданную критическую нагрузку внешнего давления и начальную осесимметричную форму потери устойчивости.

При решении задачи устойчивости геометрические параметры формованной оболочки считаются известными. Они задаются в качестве исходных данных оболочки, которая нагружается внешним (со стороны выпуклости) гидростатическим давлением.

Полученная при деформировании пластины зависимость для угла  $\Phi$  имеет смысл начального угла наклона нормали поверхности к оси симметрии в задаче устойчивости. Угол наклона в деформированном состоянии будем обозначать  $\Phi_1$ , компоненты перемещений –  $u_1, w_1$ . Геометрические параметры:  $r = x$  – полярный радиус срединной поверхности;  $\alpha(x)$  – коэффициент Лямэ меридиональной координаты;  $z = w(x)$  – координата срединной поверхности по оси  $Z$ ;  $k_1(x), k_2(x)$  – главные кривизны. Толщина оболочки  $h = h(x)$  является переменной величиной, задаваемой результатом моделирования этапа формовки.

Будем использовать уравнения типа Э. Рейсснера [1] при малых удлинениях. Сводка кинематических соотношений для осесимметричных задач деформирования и устойчивости тонких оболочек вращения имеет вид:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_{11} + \zeta \kappa_{11}, \quad \kappa_{11} = (\Phi' - \Phi'_1)/\alpha, \\ \varepsilon_{11} &= (w'_1 \sin \Phi_1 + u'_1 \cos \Phi_1)/\alpha + \cos(\Phi_1 - \Phi) - 1; \\ e_{22} &= \varepsilon_{22} + \zeta \kappa_{22}, \quad \varepsilon_{22} = u_1/r, \quad \kappa_{22} = (\sin \Phi - \sin \Phi_1)/r; \\ \gamma_{13} &= \gamma_1, \quad \gamma_1 = (w'_1 \cos \Phi_1 - u'_1 \sin \Phi_1)/\alpha - \sin(\Phi_1 - \Phi). \end{aligned} \quad (1)$$

Штрих обозначает дифференцирование по меридиональной координате. Компоненты деформации  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  и  $\gamma_1$  удовлетворяют условию совместности:

$$(r\varepsilon_{22})' - \alpha\varepsilon_{11} \cos \Phi_1 + \alpha\gamma_1 \sin \Phi_1 - \alpha(\cos \Phi_1 - \cos \Phi)/\varepsilon_* = 0.$$

Из выражений  $\varepsilon_{11}$  и  $\gamma_1$  следуют формулы для производных от  $u_1$  и  $w_1$ :

$$\begin{aligned} u'_1 &= \alpha[\varepsilon_{11} \cos \Phi_1 - \gamma_1 \sin \Phi_1 + \cos \Phi_1 - \cos \Phi], \\ w'_1 &= \alpha[\varepsilon_{11} \sin \Phi_1 + \gamma_1 \cos \Phi_1 + \sin \Phi_1 - \sin \Phi]. \end{aligned} \quad (2)$$

Виртуальная работа внутренних сил имеет вид:

$$\delta a_{i1} = - \iint_{\Omega} \{N_{11}\delta\varepsilon_{11} + N_{22}\delta\varepsilon_{22} + Q\gamma_o + M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22}\} \alpha r d\xi d\theta. \quad (3)$$

Работа внешних сил на виртуальных перемещениях.

$$\delta a_{(e)1} = \iint_{\Omega} (p_u \delta u_1 + p_w \delta w_1) \alpha r d\xi d\theta.$$

Вариации компонент деформаций, входящих в (3), в соответствии с их выражениями через обобщенные перемещения (1), имеют вид:

$$\delta\varepsilon_{11} = (\delta w_1)'(\sin \Phi_1)/\alpha + (\delta u_1)'(\cos \Phi_1)/\alpha + \gamma_1 \delta \Phi_1, \quad \delta\varepsilon_{22} = \delta u_1/r,$$

$$\delta\gamma_1 = (\delta w_1)'(\cos \Phi_1)/\alpha - (\delta u_1)'(\sin \Phi_1)/\alpha - \delta \Phi_1, \quad \delta\kappa_{11} = -(\delta \Phi_1)'/\alpha, \quad \delta\kappa_{22} = -(\cos \Phi_1)/r.$$

Далее, из принципа возможных перемещений  $\widehat{\delta} a_{(i)1} + \widehat{\delta} a_{(e)1} = 0$  в силу независимости вариаций  $\delta w_1$ ,  $\delta u_1$ ,  $\delta \Phi_1$  следуют уравнения равновесия и краевые условия:

$$(r_1 V_1)' + \alpha r p_w = 0, \quad (r H_1)' - \alpha N_{22} + \alpha r p_u = 0,$$

$$(r M_{11})' - \alpha M_{22} \cos \Phi_1 + \alpha r [\gamma_1 N_{11} - (1 + \varepsilon_{11}) Q_1] = 0,$$

$$(V_1 \delta w_1 + H_1 \delta u_1 - M_{11} \delta \Phi_1)|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} = 0,$$

где:

$$V_1 = N_{11} \sin \Phi_1 + Q_1 \cos \Phi_1, \quad H_1 = N_{11} \cos \Phi_1 - Q_1 \sin \Phi_1;$$

$$N_{11} = V_1 \sin \Phi_1 + H_1 \cos \Phi_1, \quad Q_1 = V_1 \cos \Phi_1 - H_1 \sin \Phi_1. \quad (4)$$

Здесь  $V_1$  и  $H_1$  – внутренние усилия, ориентированные вдоль оси симметрии и по радиусу цилиндрической системы координат. Для равномерного (гидростатического) внешнего давления интенсивности  $q$  компоненты поверхностной нагрузки  $p_w = q \cdot \cos \Phi_1$ ,  $p_u = -q \cdot \sin \Phi_1$ . В третьем уравнении  $1 + \varepsilon_{11}$  заменяется единицей.

Достаточно тонкие оболочки могут терять устойчивость без выхода за предел линейной упругости. Такое поведение предпочтительно для хлопающих предохранительных мембран, в качестве которых используются оболочки слабой эллиптичности, близкие к сферическим. В принципе, допустимо некоторое влияние пластических деформаций на устойчивость, проявляющееся вблизи критической нагрузки. Поэтому для тонких оболочек целесообразно начинать анализ по линейно-упругой модели с контролем интенсивности напряжений  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\sigma_{13}^2}$ .

В случае упругой задачи определяющие соотношения имеют вид:

$$N_{11} = B(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad N_{22} = B(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}),$$

$$M_{11} = D(\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}), \quad M_{22} = D(\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}), \quad Q_1 = Gh\gamma_1.$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $B = Eh/(1 - \nu^2)$ ,  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  – эффективные жесткости на растяжение-сжатие и изгиб.

Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\alpha}, \tilde{r}\} &= \{\alpha, r\}/R_*, \quad \{\tilde{N}_{11}, \tilde{N}_{22}, \tilde{Q}_1\} = [R_*/(E_*h_*^2)]\{N_{11}, N_{22}, Q_1\}, \\ \{\tilde{T}, \tilde{\Psi}\} &= \{T, \Psi\}/(E_*h_*^2), \quad \{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\} = [R_*/(E_*h_*^3)]\{M_1, M_2\}, \quad \{\tilde{M}\} = \{M\}/(E_*h_*^3), \\ \{\tilde{\kappa}_{11}, \tilde{\kappa}_{22}, \tilde{K}_{11}, \tilde{K}_{22}\} &= R_*\{\kappa_{11}, \kappa_{22}, K_{11}, K_{22}\}, \quad \{\tilde{w}_1, \tilde{u}_1, \tilde{\zeta}\} = \{w_1, u_1, \zeta\}/h_*, \\ \{\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{22}, \tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{22}, \tilde{\gamma}_1\} &= \{e_{11}, e_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_1\}/\varepsilon_*; \quad \varepsilon_* = h_*/R_*, \\ \{\tilde{p}_w, \tilde{p}_u, \tilde{q}\} &= [R_*^2/(E_*h_*^2)]\{p_w, p_u, q\}, \quad \tilde{B} = B/(E_*h_*), \quad \tilde{D} = D/(E_*h_*^3). \end{aligned}$$

Здесь  $E_*$ ,  $h_*$ ,  $R_*$  – характерные (нормирующие) величины,  $\varepsilon_*$  – параметр тонкостенности.

Представим сводку основных соотношений в безразмерной форме. Кинематика:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{11} &= \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\zeta}\tilde{\kappa}_{11}, \quad \tilde{e}_{22} = \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\zeta}\tilde{\kappa}_{22}; \\ \tilde{\varepsilon}_{11} &= (\tilde{w}' \sin \Phi_1 + \tilde{u}' \cos \Phi_1)/\tilde{\alpha} + [\cos(\Phi_1 - \Phi) - 1]/\varepsilon_*, \\ \tilde{\kappa}_{11} &= (\Phi - \Phi_1)'/\tilde{\alpha}, \quad \tilde{\varepsilon}_{22} = \tilde{u}_1/\tilde{r}, \quad \tilde{\kappa}_{22} = (\sin \Phi - \sin \Phi_1)/\tilde{r}, \\ \tilde{\gamma}_1 &= (\tilde{w}' \cos \Phi_1 - \tilde{u}' \sin \Phi_1)/\tilde{\alpha} - [\sin(\Phi_1 - \Phi)]/\varepsilon_*. \end{aligned} \quad (5)$$

Условие совместности деформаций:

$$(\tilde{r}\tilde{\varepsilon}_{22})' - \tilde{\alpha}\tilde{\varepsilon}_{11} \cos \Phi_1 + \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}_1 \sin \Phi_1 - \tilde{\alpha}(\cos \Phi_1 - \cos \Phi) - \varepsilon_* = 0.$$

Из формул (5) для  $\tilde{\varepsilon}_{11}$  и  $\tilde{\gamma}_1$  следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{w}' &= \tilde{\alpha}\tilde{\varepsilon}_{11} \sin \Phi_1 + \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}_1 \cos \Phi_1 + \tilde{\alpha}(\sin \Phi_1 - \sin \Phi)/\varepsilon_*, \\ \tilde{u}' &= \tilde{\alpha}\tilde{\varepsilon}_{11} \cos \Phi_1 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}_1 \sin \Phi_1 + (\tilde{\alpha}/\varepsilon_*)(\cos \Phi_1 - \cos \Phi). \end{aligned} \quad (6)$$

Если учесть малость  $\varepsilon_{11}$  ( $\ll 1$ ) и пренебречь поперечным сдвигом, то соотношения (6) упрощаются до следующих:

$$\tilde{w}' = (\tilde{\alpha}/\varepsilon_*)(\sin \Phi_1 - \sin \Phi), \quad \tilde{u}' = (\tilde{\alpha}/\varepsilon_*)(\cos \Phi_1 - \cos \Phi).$$

Уравнения равновесия в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} (\tilde{r}\tilde{V}_1)' + \tilde{\alpha}\tilde{r}\tilde{p}_w &= 0, \quad (\tilde{r}\tilde{H}_1)' - \tilde{\alpha}\tilde{N}_{22} + \tilde{\alpha}\tilde{r}\tilde{p}_u = 0, \\ (\tilde{r}\tilde{M}_{11})' - \tilde{\alpha}\tilde{M}_{22} \cos \Phi_1 + \tilde{\alpha}\tilde{r}\tilde{Q}_1/\varepsilon_* &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tilde{p}_w = \tilde{q} \cos \Phi_1$ ,  $\tilde{p}_u = -\tilde{q} \sin \Phi_1$ . Внутренние силовые компоненты в цилиндрических координатах ( $\tilde{V}_1$  и  $\tilde{H}_1$ ) и в естественном триедре ( $\tilde{N}_{22}$  и  $\tilde{Q}_1$ ) связаны формулами, аналогичными (4): Краевые условия:  $\left. \left( \tilde{V}_1 \delta \tilde{w}_1 + \tilde{H}_1 \delta \tilde{u}_1 - \tilde{M}_{11} \delta \Phi_1 \right) \right|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi_1} = 0$ .

Соотношения упругости для изотропной оболочки:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{11} &= \tilde{B}(\tilde{\varepsilon}_{11} + \nu\tilde{\varepsilon}_{22}), \quad \tilde{N}_{22} = \tilde{B}(\tilde{\varepsilon}_{22} + \nu\tilde{\varepsilon}_{11}), \\ \tilde{M}_{11} &= \tilde{D}(\tilde{\kappa}_{11} + \nu\tilde{\kappa}_{22}), \quad \tilde{M}_{22} = \tilde{D}(\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{\kappa}_{11}); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{B} = \tilde{E}\tilde{h}/(1 - \nu^2), \quad \tilde{B} = \tilde{E}\tilde{h}^3/[12(1 - \nu^2)].$$

Далее вводятся основные функции:  $\tilde{T} = \tilde{r}_1\tilde{V}$ ,  $\tilde{\Psi} = \tilde{r}_1\tilde{H}$ ,  $\tilde{M} = \tilde{r}_1\tilde{M}_1$ ,  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{w}_1$ ,  $\varphi_1 = \Phi - \Phi_1$ . Или, в унифицированных обозначениях:  $\tilde{z}_1 = \tilde{T}$ ,  $\tilde{z}_2 = \tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{z}_3 = \tilde{M}$ ,  $\tilde{z}_4 = \tilde{w}_1$ ,  $\tilde{z}_5 = \tilde{u}_1$ ,  $z_6 = \varphi_1$ . В качестве шестой основной функции принят угол поворота  $\varphi_1 = \Phi - \Phi_1$ .

На основе (5)-(8) формируется следующая дифференциальная система:

$$\begin{aligned} \tilde{z}'_1 &= -\tilde{\alpha}_1\tilde{r}_1\tilde{q}\cos\Phi_1, \quad \tilde{z}'_2 = -\tilde{\alpha}_1\tilde{N}_{22} + \tilde{\alpha}_1\tilde{r}_1\tilde{q}\sin\Phi_1, \\ \tilde{z}'_3 &= -\tilde{\alpha}_1\tilde{M}_{22}\cos\Phi_1 + \frac{\tilde{\alpha}_1}{\varepsilon_*}\tilde{r}_1\tilde{Q}_1, \quad \tilde{z}'_4 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\varepsilon_*}(\sin\Phi_1 - \sin\Phi), \\ \tilde{z}'_5 &= \frac{\tilde{\alpha}_1}{\varepsilon_*}(\cos\Phi_1 - \cos\Phi), \quad z'_6 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\kappa}_{11}, \end{aligned}$$

где:

$$\tilde{\kappa}_{11} = \frac{1}{\tilde{D}}\tilde{M}_{11} - \nu\tilde{\kappa}_{22}; \quad \tilde{N}_{22} = (1 - \nu^2)\tilde{B}\tilde{\varepsilon}_{22} + \nu\tilde{N}_{11}, \quad \tilde{M}_{22} = (1 - \nu^2)\tilde{D}\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{M}_{11}. \quad (9)$$

Соотношения (9) также можно выразить через введенные основные функции. Соответствующая последовательность подстановок и преобразований приводит к разрешающей системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерной канонической форме:

$$\begin{aligned} \tilde{z}'_1 &= -\tilde{q} \cdot \tilde{\alpha}_1(\xi)\tilde{r}_1(\xi)C_1(\xi, z_6), \\ \tilde{z}'_2 &= \frac{\tilde{\alpha}_1(\xi)}{\tilde{r}_1(\xi)}\{\tilde{B}(\xi)(1 - \nu^2)\tilde{z}_1 + \nu[\tilde{z}_1S_1(\xi, z_6) + \tilde{z}_2C_1(\xi, z_6)] + \tilde{q} \cdot \tilde{r}_1(\xi)^2S_1(\xi, z_6)\}, \\ \tilde{z}'_3 &= \frac{\tilde{\alpha}_1(\xi)}{\tilde{r}_1(\xi)}\{\tilde{D}(\xi)(1 - \nu^2)[S(\xi) - S_1(\xi, z_6)] + \nu\tilde{z}_3C_1(\xi, z_6) + \frac{\tilde{r}_1(\xi)}{\varepsilon_*}[\tilde{z}_1C_1(\xi, z_6) - \tilde{z}_2S_1(\xi, z_6)]\}, \\ \tilde{z}'_4 &= \frac{\tilde{\alpha}_1(\xi)}{\varepsilon_*}[S_1(\xi, z_6) - S(\xi)], \quad \tilde{z}'_5 = \frac{\tilde{\alpha}_1(\xi)}{\varepsilon_*}[C_1(\xi, z_6) - C(\xi)], \\ \tilde{z}'_6 &= \frac{\tilde{\alpha}_1(\xi)}{\tilde{r}_1(\xi)}\left\{\frac{\tilde{z}_3}{\tilde{D}(\xi)} + \nu \cdot [S_1(\xi, z_6) - S(\xi)]\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены функции:  $C_1(\xi, z_6) = \cos(\Phi(\xi) - z_6)$ ,  $C_1(\xi, z_6) = \sin(\Phi(\xi) - z_6)$ . Обозначим:  $S = \sin\Phi$ ,  $C = \cos\Phi$ ;  $S_1 = \sin\Phi_1 = \sin(\Phi - \varphi_1)$ ,  $C = \cos\Phi_1 = \cos\varphi_1$ ,  $s_\varphi = \sin\varphi_1$ ,  $c_\varphi = \cos\varphi_1$ .

Имеют место формулы:  $S_1 = S \cdot c_\varphi - C \cdot s_\varphi$ ,  $C_1 = C \cdot c_\varphi - S \cdot s_\varphi$ . В задаче устойчивости можно ограничиться квадратичным приближением по углам поворота [2], полагая  $c_\varphi = 1 - \varphi_1^2/2$ ,  $s_\varphi = \varphi_1$ , что повышает эффективность вычислений. Тогда в обозначениях введенных функций:

$$\begin{aligned} S_1 - S &\approx -0.5S z_6^2 - C z_6, \quad C_1 - C \approx -0.5C z_6^2 + S z_6, \\ S_1 &\approx S(1 - 0.5z_6^2) - C z_6, \quad C_1 \approx C(1 - 0.5z_6^2) + S z_6. \end{aligned} \quad (11)$$



Подстановка (11) в (10) позволяет перевести уравнения в систему квадратичного приближения, удобную для применения численных алгоритмов погружения краевой задачи в задачи Коши. В качестве независимой координаты здесь удобно принять  $\xi = \Phi$  – угол наклона нормали. Тогда для эллипсоидальной оболочки с безразмерными полуосями  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b} < \tilde{a}$  полярный радиус  $\tilde{r}_1(\xi) = \tilde{a} \sin \xi$ , коэффициент Лямэ  $\tilde{\alpha}_1(\xi) = \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 / \tilde{c}^3$ , где  $\tilde{c}^2 = \tilde{a}^2 (\cos \xi)^2 + \tilde{b}^2 (\sin \xi)^2$ .

Для построения приближенных решений аналитического типа целесообразно минимизировать количество основных функций. Следуя работе [1], можно свести упругую задачу к двум дифференциальным уравнениям второго порядка каждое относительно двух функций – угла наклона  $\Phi_1$  (или угла поворота  $\varphi_1 = \Phi - \Phi_1$ ) и  $\tilde{\Psi}_1 = \tilde{r} \tilde{H}_1$ , называемой функцией напряжений. Эти уравнения также могут быть приведены к уравнениям квадратичного приближения.

С точки зрения технических приложений интересны в первую очередь сплюснутые сфероидальные оболочки. Для таких оболочек задача устойчивости решается методом продолжения решения по параметру нагрузки  $\tilde{q}$  с построением диаграммы нагружения  $\tilde{q}(\tilde{w}_0)$ , где  $\tilde{w}_0$  – перемещение вершины оболочки. Приближение производной  $d\tilde{q}/d\tilde{w}_0$  к нулю означает близость к предельной (критической) нагрузке. Этот способ используется для прогнозирования критической нагрузки аппаратным неразрушающим методом и имитируется при математическом моделировании.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution // *Progr. Appl. Mech., Prager Anniv. Vol.*, 1963. P. 171–178.
- [2] *Юдин А.С.* Применение уравнений Рейсснера к исследованию устойчивости непологой сферической оболочки // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1974. № 3. С. 122–129.

**Yudin S.A., Yudin A.S.** *Stability of spheroidal shells of variable thickness.* The initial and resolving equations for the decision of nonlinear stability problems of shells of revolution submitted. The model is applied to the spheroidal shells received by a free extract from a plate by hydrostatic pressure in a combination to force concentrated in top. Such power action to the form of shell during manufacturing it is possible to adjust its properties on the set critical loading of external pressure and axisymmetric initial buckling form.