

Ростовский государственный университет  
Научно-исследовательский институт  
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

**ТРУДЫ X МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г.

**II**

Ростовский государственный университет  
Научно-исследовательский институт  
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

**ТРУДЫ X МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г.

**II**

---

Издательство ООО «ЦВВР»  
Ростов-на-Дону  
2007

ББК В 25

Ответственный редактор  
д.ф.-м.н. А.В. Наседкин

Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. Т. II. Ростов-на-Дону. Издательство ООО «ЦВВР». 2007 г. 332 стр.

ISBN 5-94153-035-8

Сборник содержит научные доклады, представленные на X Международную конференцию «Современные проблемы механики сплошной среды», (Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006 г.), посвященную 65-летию ректора РГУ, директора НИИ Механики и прикладной математики им. Воровича И.И. РГУ профессору А.В. Белоконю, 35-летию НИИ М и ПМ им. Воровича И.И. и 45-летию кафедры теории упругости РГУ.

#### Программный комитет

Александров В.М., Бабешко В.А., Баженов В.Г., Белоконь А.В. (председатель), Ватульян А.О., Гринченко В.Т., Зубов Л.М., Индейцев Д.А., Манжиров А.В., Морозов Н.Ф., Наседкин А.В., Победря Б.Е., Попов Г.А., Саркисян В.С., Фролов К.В., Улитко А.Ф., Устинов Ю.А., Черный Г.Г., Юдин А.С.

#### Организационный комитет

Ватульян А.О., Ерусалимский Я.М., Карякин М.И., Наседкин А.В., Сафроненко В.Г., Цибулин В.Г., Юдина Л.М., Юдин А.С.

Научная программа конференции включает разнообразные актуальные разделы механики сплошной среды: математические проблемы механики сплошной среды, математические модели в механике разрушения, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций, связанные физико-механические поля в механике сплошной среды, смешанные задачи механики сплошной среды, вычислительная механика и др.

Оригинал-макет подготовлен в системе LaTeX2e  
Ерусалимской Н.Я.

ISBN 5-94153-035-8

---

X Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 5–9-декабря 2006г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

---

© НИИ механики и прикладной математики им. Воровича РГУ, 2007 г.

# Содержание

Белоконь А.В., Наседкин А.В., Сафроненко В.Г., Сурков Ф.А., Юдина Л.М. НИИ механики и прикладной математики имени Воровича И.И. — 35 лет . . . . .	7
Ватульян А.О., Устинов Ю.А. Кафедре теории упругости РГУ — 45 лет	17
Абдрахманова А.А. Моделирование деформирования конструкций из стеклопластиков при тепловом воздействии . . . . .	19
Айзикович С.М., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Термоупругие поля в полупространстве с функционально-градиентным покрытием с учетом температурного воздействия в дискообразной области . . . . .	23
Айзикович С.М., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Исследование влияния функционально-градиентных свойств покрытия на напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины . . . . .	28
Акопьян В.А., Соловьев А.Н., Рожков Е.В., Шевцов С.Н. Экспериментальное и компьютерное моделирование интеллектуальных полимеркомпозитных конструкций с нейросетевым управлением . . . . .	34
Акопьян В.А., Соловьев А.Н., Чмутова Г.Д. Определение эффективных характеристик композиционных материалов регулярной структуры	40
Белоконь А.В. Конечноэлементный комплекс ACELAN: практическое применение и новые возможности . . . . .	46
Белоконь А.В., Белоконь О.А., Болгова А.И. Модельная задача о движении осциллирующей нагрузки, распределенной в произвольной области . . . . .	52
Белянкова Т.И., Лыжов В.А., Калинин В.В. Волны на поверхности пьезоактивного полупространства в условиях неоднородного начального напряженного состояния . . . . .	59
Беркович В.Н. Плоская смешанная задача динамики упругой клиновидной среды . . . . .	64
Бескопыльный А.Н., Кадомцев И.Г. Диагностика материалов действующих сооружений коническим ударником . . . . .	69
Богаченко С.Е., Устинов Ю.А. Модель винтового движения крови в артериальных кровеносных сосудах . . . . .	73
Богущ А.И., Гладышева Т.В., Колосова Е.М., Наседкин А.В. О некоторых особенностях конечно-элементного решения контактных задач для неоднородных сред . . . . .	78
Боев Н.В., Троян Э.А. Коротковолновая асимптотика многократно преотраженных акустических волн . . . . .	83
Болдырев К.Е., Келлер И.Э. Внутренняя ориентационная модуляция кристаллической решетки при прокатке металлической полосы как континуума Коссера . . . . .	87
Бондарчук А.А. Влияние вращения Земли на баланс энергии в тропосфере для закрученных течений . . . . .	91
Бочарова О.В. Идентификация модуля упругости в стержне . . . . .	94

Буравчук Н.И., Гурьянова О.В., Окорочков Е.П., Павлова Л.Н. Прочностные свойства мелкозернистого бетона с тонкодисперсными добавками из техногенных отходов . . . . .	99
Бурцева О.А., Кабельков А.Н., Нефедов В.В. Система гашения колебаний высотных сооружений . . . . .	105
Бычков А.А. Об определении функционально неоднородных свойств упругих материалов . . . . .	110
Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об интегральных уравнениях в обратных коэффициентных задачах для пластин . . . . .	116
Ватульян А.О., Явруян О.В. Идентификация композиционных материалов . . . . .	121
Гольдштейн Р.В., Еремеев В.А. Об изгибе пластинки, покрытой фотохромным соединением . . . . .	126
Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Куров Д.А., Подлесных А.В., Попов А.Л. Неразрушающий метод определения остаточных напряжений в сварном соединении пластиковых стержней . . . . .	132
Даниленко А.С., Наседкин А.В. О некоторых подходах к конечно-элементному моделированию пьезоэлектрических устройств с учетом внешних электрических цепей . . . . .	137
Еремеев В.А., Наседкина А.А. Об условиях баланса на границе раздела фаз в пористых средах . . . . .	142
Жуков М.Ю., Петровская Н.В., Ширяева Е.В. Численное исследование термогравитационной конвекции в плоском горизонтальном слое и круге в случае сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости . . . . .	147
Журавлев Г.А. К выявлению негерцевских взаимосвязей основных факторов контакта тел, моделируемых упругими круговыми цилиндрами . . . . .	152
Зеленин А.А., Зубов Л.М. Представление инвариантных контурных интегралов через комплексные потенциалы нелинейной теории упругости . . . . .	157
Зеленина А.А., Зубов Л.М. Изгиб и кручение нелинейно упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями. . . . .	162
Зеньковская С.М. Длинноволновая асимптотика спектра и критических значений в задаче термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое . . . . .	167
Зотов В.М., Сумбатян М.А. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов в дифракции ультразвуковых волн с переотражениями . . . . .	172
Карапетьян Г.Я. Прохождение поверхностных акустических волн под системой периодических электродов . . . . .	176
Карякин М.И. Об устойчивости деформирования на падающем участке диаграммы нагружения . . . . .	180
Ковалева В.В. О корректной формулировке краевых задач для термоупругих пластин при тепловом нагружении . . . . .	185

Колосова Е.М., Наседкин А.В., Чебаков М.И. Расчет контактного взаимодействия в цилиндрическом подшипнике в двумерных и трехмерных постановках . . . . .	190
Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Колебания упругой мембраны, разделяющей двухслойную жидкость в прямоугольном канале с упругим плоским дном . . . . .	197
Короткин В.И., Онишков Н.П. К вопросу о сферах применения различных типов зубчатых зацеплений . . . . .	201
Костандов Ю.А., Шиповский И.Е. Энергетическая модель множественного разрушения твердого тела . . . . .	204
Кузьменко С.М. К развитию одной модели межфазной границы в задачах равновесия двухфазных упругих тел . . . . .	209
Куреннов С.С. Влияние конструктивных особенностей на динамические напряжения в соединении . . . . .	214
Ляпин А.А. Контактная задача для металлополимерного соединения с учетом температурных полей . . . . .	219
Марк А.В. Движение с постоянной скоростью жесткого штампа по границе вязкоупругого толстого слоя . . . . .	221
Мирошниченко И.П., Паринов И.А., Рожков Е.В., Серкин А.Г., Сизов В.П. О перспективах повышения точности измерений малых длин и перемещений лазерными интерферометрами . . . . .	224
Мирошниченко И.П., Паринов И.А., Рожков Е.В., Серкин А.Г., Сизов В.П. Экспериментальное обоснование технических предложений по совершенствованию лазерных измерителей малых перемещений . . . . .	227
Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. Основной резонанс (Res 1) при пересечении бифуркаций в задаче Куэтта-Тейлора . . . . .	232
Надолин К.А. Исследование редуцированной 3D модели распространения пассивной неконсервативной примеси в мелком широком стационарном потоке . . . . .	237
Новосядлый В.А. Параметрическое возбуждение внутренних волн двухчастотными колебаниями . . . . .	242
Норкин М.В. Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при центральном ударе плавающего тела . . . . .	247
Осяев О.Г., Сахабудинов Р.В., Остапенко А.В. Воздействие протонных пучков на многослойные композитные конструкции . . . . .	251
Пустовалова О.Г. Исследование макрозакручивания несжимаемого цилиндра с клиновой дисклинацией в псевдоконтинууме Коссера . . . . .	256
Сазонов Л.И. Трехмерная стационарная задача обтекания системы тел при малых числах Рейнольдса . . . . .	261
Сафроненко В.Г., Трифонов В.В. К расчету гармонических колебаний цилиндрической композитной оболочки . . . . .	266
Сахабудинов Р.В., Чукарин А.В., Осяев О.Г. Эмпирические уравнения состояния металлов при ударе . . . . .	270

Свистков А.Л., Комар Л.А. Применение континуального подхода для описания процесса формирования ориентированного слоя около поверхности активного наполнителя в полимерных нанокompозитах . . . . .	275
Суворов А.Б., Суворова Т.В. Влияние неоднородности пористо-упругого основания на динамику упругой полосы, дискретно контактирующей с основанием . . . . .	280
Сумбатян М.А., Жестков Ю.Н. Вычисление звукового поля вращающейся лопасти ветроэнергетической установки . . . . .	285
Тодоров Н.Ф. Метод лучевых траекторий с приложением к аурализации в акустике помещений . . . . .	290
Трепачев В.В. Гашение колебаний ортотропной пластины, плавающей на поверхности вязкой жидкости . . . . .	294
Устинов Ю.А., Ватульян К.А. Задача Сен-Венана для графитовых стержней и углеродных нанотрубок . . . . .	299
Фесенко О.Д. Метод обобщенной граничной ортогонализации в задачах стационарной динамики поперечно-анизотропного полуслоя . . . . .	304
Шевченко В.П., Карнаух А.Ю. Свободные колебания кольцевой мембраны, разделяющей жидкость разной плотности . . . . .	308
Шейдаков Д.Н. Устойчивость тяжелого неоднородного слоя при двухосном растяжении и сжатии . . . . .	311
Шехов В.П. Законы Кулона при плоском движении . . . . .	316
Шкуренко Е.Ю. Совместная задача о движении твердого цилиндра и заполняющей его вязкой жидкости . . . . .	320
Шлейкель А.Л. Численное исследование спектральной задачи термокапиллярной конвекции при вертикальных вибрациях . . . . .	325
Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Математическое моделирование термофоретического движения двух аэрозольных частиц с учетом объемных и гидродинамических эффектов . . . . .	330

## НИИ МЕХАНИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ ВОРОВИЧА И.И. — 35 ЛЕТ

Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики при Ростовском государственном университете был создан в 1971 году Постановлением Совета Министров СССР. За годы своей работы Институт стал одним из ведущих научно-исследовательских центров России в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики. Генетически связанный с механико-математическим факультетом и кафедрами теории упругости и математического моделирования, НИИ М и ПМ РГУ активно развивает научные направления, традиционно определенные в научной школе академика И.И. Воровича.

Выдающийся ученый-механик, действительный член Российской академии наук Иосиф Израилевич Ворович являлся инициатором создания Института и его директором на протяжении более 30 лет. В настоящее время Институту присвоено имя И.И. Воровича, и руководит Институтом ученик академика И.И. Воровича, ректор РГУ, профессор А.В. Белоконь.

Основные направления научных исследований, проводимых в стенах Института, связаны с решением проблем механики деформируемого твердого тела, прочности и разрушения, исследованием математических вопросов механики сплошной среды, а также с математическим моделированием эколого-экономических систем.

В рамках основных научных направлений по механике деформируемого твердого тела исследования ведутся по следующим разделам:

- математические модели и компьютерные методы исследования структурно-неоднородных тонкостенных конструкций;
- распространение волн в средах сложного строения, взаимодействие волновых полей и конструкций;
- математическое моделирование процессов возбуждения и распространения волн в средах сложной геометрии и структуры;
- контактное взаимодействие упругих тел сложной формы;
- акустико-эмиссионные методы диагностики прочности и надежности материалов и конструкций;
- механика пьезо-, нано- и сверхпроводящих материалов и композитов;
- неразрушающий контроль и техническая диагностика материалов и элементов конструкций;
- экспериментальная механика: системные разработки по автоматизации научных исследований, активная идентификация математических моделей термомеханического поведения реальных материалов;
- разработка новых строительных материалов на основе промышленных отходов и ресурсосберегающих технологий;

- совершенствование конструкций, методов изготовления и контроля разрушаемых элементов для систем аварийной защиты оборудования, находящегося под внутренним давлением;
- расчет, технология и применение новых пьезоактивных композитных материалов в ультразвуковых устройствах;
- новые технологические решения возведения различных типов фундаментов в сложных грунтовых условиях;
- разработка новых типов зубчатых передач и редукторов с высокими эксплуатационными свойствами;
- создание оригинальных методов расчета и оптимизации передач, систем компьютерного моделирования.

В настоящее время в состав института входят 9 отделов, 4 самостоятельных лаборатории и отдел научно-технической информации.

На базе НИИ М и ПМ РГУ и механико-математического факультета РГУ функционирует Научный совет Министерства образования и науки РФ «Математика, механика», председателем которого является ректор РГУ, директор НИИ М и ПМ РГУ А.В. Белоконь.

Научная продукция НИИ М и ПМ РГУ — это научное открытие нового явления существования высокочастотных резонансов, сделанное академиками И.И. Воровичем, И.Ф. Образцовым и В.А. Бабешко, десятки монографий и сотни научных статей, посвященных актуальным проблемам механики деформируемого твердого тела и математического моделирования. Признанием ведущей роли Института в этих исследованиях явилось получение его сотрудниками десятков научных грантов Российского фонда фундаментальных исследований, их активное участие в Федеральных целевых программах и международных проектах. Неоднократно творческим коллективам сотрудников Института совместно с сотрудниками кафедр теории упругости и математического моделирования РГУ присуждались гранты Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, выполнялся Госконтракт «Развитие системы ведущих научных школ, как среды генерации знаний и подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации».

В 1998 г. за выдающиеся результаты, полученные при исследовании фундаментальных и прикладных проблем механики тонкостенных оболочек, группе авторов во главе с академиком И.И. Воровичем была присуждена Государственная премия Российской Федерации.

По научному направлению «прикладная математика» научные исследования ведутся по следующим разделам: моделирование водных экологических систем, моделирование динамики промысловых рыбных популяций, исследование механизмов устойчивости и адаптации экосистем, решение задач оптимального управления, экология урбанизированных территорий, развитие ГИС технологий картографирования и эколого-геохимического мониторинга на уровне городов и регионов, моделирование пространственно-временной динамики загрязнений водной среды, разработка нормативов платежей за загрязнения природной среды. За время существования Института по этому направлению опубликовано более шестисот

научных трудов, включая статьи в центральных российских и зарубежных изданиях и 6 монографий. Инициаторами развития этих исследований и научными руководителями коллектива сотрудников были член-корреспондент РАН Ю.А. Жданов и академик РАН И.И. Ворович. В 1982 г. результаты этих работ были успешно доложены на Президиуме Академии Наук СССР, а в 1983 г. работа по созданию математической модели экосистемы Азовского моря была удостоена Государственной премии СССР.

В 1996 г. на средства гранта фонда Евразия для осуществления образовательных, научных программ и выполнения пилотных проектов для муниципальных и региональных организаций в Институте был создан центр ГИС-технологий Ростовского госуниверситета. В 2006 г. на базе центра ГИС-технологий создана кафедра глобальных информационных систем факультета высоких технологий РГУ и ведется работа по созданию Центра космического мониторинга РГУ.

В последние годы Институт активно развивается, работая в кооперации с ведущими подразделениями РГУ, институтами РАН, вузами и многими научно-исследовательскими и промышленными организациями. В структуре Института появились совместные лаборатория вычислительной механики РГУ и ИПМ РАН, лаборатория нелинейной механики РГУ и ИПМаш РАН, лаборатория математического моделирования в трибологии РГУ и РГУПС.

Перечислим кратко некоторые из научных результатов отделов и лабораторий Института за последние годы.

В отделе механики контактных взаимодействий были изучены контактные задачи для неоднородных тел, моделирующие взаимодействие колеса и рельса железнодорожного транспорта; контактные задачи для кусочно-неоднородных тел, моделирующих работу цилиндрических и сферических самосмазывающихся подшипников скольжения, а также контактные задачи для слоистых и функционально-градиентных материалов; исследовано влияние изменения по глубине упругих свойств материала на распределение напряжений в приповерхностных слоях неоднородных материалов при контактном взаимодействии, исследовано развитие трещин и дефектов между слоями стратифицированных и функционально-градиентных материалов и процессов усталостного расслаивания и контактной усталости. Были разработаны алгоритмы и пакет вычислительных программ для расчёта и проектирования конических зубчатых передач Новикова, учитывающие фактор неравномерности распределения напряжений по площадкам контакта в многопарном зацеплении, переменность геометрических параметров вдоль длины зуба и возможность введения параметров продольной локализации рабочих поверхностей; разработана принципиальная модель контактно-усталостной долговечности для поверхностно упрочненных зубьев колес по критерию глубинного контактного разрушения и выполнена оценка аппроксимации реальных поверхностей контактирующих зубьев колес поверхностями второго порядка при численном решении пространственной контактной задачи.

В отделе волновых процессов были разработаны математические модели динамических процессов в предварительно напряженных слоисто неоднородных полу-

граниченных средах и в неоднородных средах, механические параметры которых непрерывным образом изменяются по глубине. Выявлены закономерности формирования волнового поля на поверхности неоднородной среды при различной локализации неоднородности среды и для неоднородных тел с криволинейными границами. Разработан и реализован метод исследования колебаний жесткого бандажа на поверхности неоднородного цилиндра, заполненного идеальной жидкостью; исследованы закономерности влияния параметров материала трубопровода на напряженное состояние в зоне контакта при динамических воздействиях.

Разработаны и исследованы 16-битные устройства радиочастотной идентификации на ПАВ, состоящие из приемно-передающего встречно-штыревого преобразователя, нагруженного на полуволновый вибратор и 16 отражателей ПАВ. Отражатели выполнены с возрастающим коэффициентом отражения по мере удаления от ВШП, что позволило получить амплитуды отраженных импульсов, близкие друг к другу по величине. Исследован коэффициент отражения ПАВ в зависимости от величины активного сопротивления на частоте 650 МГц. Разработан и изготовлен импедансный ПАВ фильтр на центральную частоту 812 МГц с вносимым затуханием 3 дБ, полосой пропускания 30 МГц и неравномерностью в полосе пропускания не более 1 дБ.

Исследованы процессы роста полупроводниковых нанокристаллов ZnO, ZnMgO, ZnCoO, ZnMnO с различной степенью допирования магнитными элементами на сапфире методом импульсного лазерного напыления при высоком давлении аргона. Исследованы свойства нанокристаллов, морфология поверхности, состав, структура и оптические свойства полученных нанокристаллов методами растровой электронной микроскопии, высокоразрешающей электронной микроскопии, рентгеноструктурного анализа, ионного микроанализа, атомно-силовой, магнитно-силовой микроскопии, методами электронного парамагнитного резонанса, фото- и катодолюминесценции. Получены высокоориентированные решетки нанокристаллов диаметром 50-100 с осью перпендикулярной подложке. Использование ZnO тонкопленочных подслоев и различных катализаторов позволяло менять плотность нанокристаллов на поверхности подложки от  $10^8$  до  $10^9/\text{см}^2$ .

В отделе тонкостенных конструкций разработаны математические модели и получены теоретические решения задачи формовки куполообразных оболочек типа армированных хлопающих мембран. Создан программно-аппаратный комплекс для изготовления таких оболочек. Проведена подготовка к лицензированию установки и получению разрешения на расширенное производство мембран. Разработан усовершенствованный комплекс автоматизированной системы диагностики систем аварийной регулировки и защит паровых турбин всех типов — АСД «Турбина». Выполнены параметрические исследования гармонических вынужденных колебаний композитной (на полимерной основе, с однонаправленными армирующими волокнами) цилиндрической оболочки. Рассмотрены варианты армирования, объемного содержания волокон, свойств полимерного связующего на уровне вибраций и резонансные частоты. Исследованы два способа компоновки многослойного пакета по толщине оболочки. Проведен сравнительный анализ ре-

зультатов расчета АЧХ композитной цилиндрической оболочки в рамках теорий Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко. Исследовано распределение энергии диссипации по типам деформаций и диапазону частот.

В лаборатории вычислительной механики развитие метода эффективных модулей для определения свойств пьезокомпозиционных пористых и поликристаллических материалов разработаны новые модели представительных объемов, поддерживающие целостность механического каркаса и моделирующие типы связности 3-0, 0-3 и 3-3. Разработаны специальные программы на языке Си++ и макроязыке APDL для конечно-элементного пакета ANSYS, предназначенные для моделирования новых типов представительных объемов и расчета эффективных модулей пьезокомпозиционных материалов. Определен полный набор эффективных модулей пористых и поликристаллических пьезокомпозиционных материалов для ряда конкретных структур, найдены коэффициенты затухания для пористой керамики. Полученные результаты сравнены с экспериментальными. Проведено моделирование эффективных свойств и характеристик при статической работе радиально поляризованных трубчатых пьезокомпозитов. Построены новые конечно-элементные схемы для анализа упругих композиционных материалов с пустотами по модели Ковина-Нунзиато.

Проведены расчеты новых пьезоустройств: пьезодатчиков систем акустико-эмиссионного контроля, ультразвуковых пьезоизлучателей из пористой керамики улучшенной конструкции, многослойных пьезотрансформаторов и вибрационных гироскопов с учетом внешних цепей и тепловых эффектов.

Существенно развиты методы моделирования задач о диссипативном разогреве пьезоэлектрических устройств при установившихся колебаниях и задач о расчете вибрационных пьезоэлектрических гироскопов. С использованием метода конечных элементов решены модельные задачи термоэлектроупругости в слабосвязанных постановках и задачи о диссипативном разогреве пьезоэлектрических трансформаторов при установившихся колебаниях.

Разработаны конечно-элементные методики анализа акустических волновых полей при сильном ультразвуке. Созданные технологии и программные средства применены для анализа задач о колебаниях сферических пьезоэлектрических пьезоизлучателей при генерации сильного ультразвука из плотной и пористой пьезо-керамики, нагруженных на акустическую среду.

Проведен цикл исследований, направленных на разработку конечно-элементных методов, предназначенных для решения широкого класса задач контактного взаимодействия трибомеханических систем. Конкретной прикладной задачей исследований являлась оценка напряженно-деформированного состояния системы "рельс- колесная пара" при учете неоднородностей и дефектов в приповерхностных слоях.

Проведено конечно-элементное моделирование процессов гидродинамического воздействия на многослойные угольные пласты в рамках чисто фильтрационной модели и более общей модели пороупругой среды с учетом нелинейной зависимости коэффициентов фильтрации от порового давления.

В лаборатории нелинейной механики были решены нелинейные задачи Сен-

Венана о кручении, растяжении и изгибе естественно скрученных стержней. Разработана теория кручения призматических и естественно закрученных тел с моментными напряжениями при больших деформациях. В трехмерной постановке изучена устойчивость цилиндрической трубы при осевом растяжении и внутреннем давлении. Вариационным методом исследовано закритическое поведение цилиндра из упрочняющегося материала при одноосном растяжении. Определены форма и амплитуда «шейки» в растянутом стержне, которые хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Развиты математические методы исследования задач наномеханики. Предложен и обоснован метод определения собственных частот нанообъектов (нанокристаллов и нанотрубок), образующих высокоориентированные массивы на подложки путем сравнения спектра системы решетка нанообъектов–подложка и подложки. Получены условия равновесия фаз в оболочках при учете линейного натяжения. Сформулированы дополнительные неравенства в механике микрополярных оболочек. Решена задача о потере устойчивости при раздувании сферической оболочки в аспекте моделирования процессов в полимерных микросферах.

В отделе акустики твердого тела путем математического моделирования получены временные зависимости КИН и направления роста трещины в кристалле в условиях смешанного нагружения. Исследованы условия смены механизма роста газового пузырька на механизм декогезии стеклофазы от зерна. Рассчитаны условия появления волнистой равновесной свободной поверхности полупроводниковой пленки на подложке, которая первоначально была гладкой. Экспериментально исследована связь параметров акустической эмиссии (АЭ) растущей трещины с коэффициентом интенсивности напряжений. Предложен метод идентификации типа напряженного состояния по величине показателя степенной зависимости суммарного количества актов АЭ от коэффициента интенсивности напряжений.

Предложен и реализован принципиально новый метод восстановления количества потерянных актов микродеформации (или микроразрушения) с амплитудами сопутствующего акустического излучения ниже порога дискриминации аппаратуры. Суть метода состоит в вычислении количества потерянных актов микродеформации (или микроразрушения) по площади нормированной плотности функции распределения амплитуд излучения при известном динамическом диапазоне регистрируемых сигналов АЭ. Метод позволяет скорректировать параметры регистрируемого потока АЭ при различном пороге дискриминации, частоте, скорости нагружения и провести диагностику предразрушающего состояния в рамках концентрационного критерия разрушения. Метод до 2-х раз повышает достоверность результатов диагностики предразрушающего состояния и не имеет отечественных и зарубежных аналогов .

Предложен АЭ метод построения деструкционных диаграмм, позволяющий оценивать эксплуатационные и технологические возможности конструкционных материалов.

В рамках метода конечных элементов разработаны пакеты программ, позволяющих рассчитывать преобразователи (в том числе и высокотемпературные) с учетом взаимодействия объектом контроля в форме полупространства. Смодели-

лирован жидкий контактный слой и исследовано его влияние на прием акустических сигналов из твердой среды. Исследовано влияние граничных условий на амплитудно-частотные характеристики приемных преобразователей. Усовершенствованы методики экспериментальных исследований преобразователей для акустических методов обнаружения дефектов в твердых телах.

В отделе ультразвука были разработаны методы исследования дифракции высокочастотных акустических и упругих волн с учетом многократных переотражений на скоплениях препятствий в акустических средах и поверхностях скопления дефектов, находящихся в упругих средах. Дано обоснование применения скалярной модели в проблеме реконструкции формы дефектов по рассеянному волновому полю.

Исследованы многократные переотражения высокочастотных упругих волн от скопления полостей в бесконечной упругой среде вдоль траектории, представляющей собой пространственную ломаную линию. Получены явные выражения главного члена асимптотики перемещений в переотраженной волне при любом виде отражений и трансформаций упругих волн на поверхностях дефектов.

В отделе механики полимеров разработана структура и базовые зависимости математической модели полимерных материалов, ориентированной на описание основных изменений динамических свойств материалов, эксплуатируемых при циклических напряжениях в условиях многоциклового усталости. Сформированы основные математические зависимости, которые формализуют представления о явлении усталости полимерных материалов. Сложная нелинейная модель претендует на описание свойств полимерных материалов в широкой области температур, давлений и частот. Разработанная математическая модель полимера позволяет корректно ставить эксперименты и выявлять сложные реологические и тепловые эффекты в вязкоупругих телах.

В отделе конструктивной прочности выполнен анализ практики контактных расчетов, наглядно иллюстрирующий выявление эффектов кривизны контакта (эффектов большего, относительно классического решения плоской контактной задачи Герца и традиционных представлений теории и практики контактных расчетов, влияния кривизны контактирующих тел на несущую способность их контакта) упругих тел, моделируемых круговыми цилиндрами.

На базе эффектов кривизны контакта сформулированы соответствующие современным тенденциям развития машиностроения физические основы совершенствования зубчатых передач, показывающие возможности значительного увеличения их несущей способности. Разработаны основы создания модели фрикционного контакта круговых цилиндров конечной длины с перекосом осей. Дана оценка взаимосвязи основных факторов задачи определения температурной вспышки фрикционного контакта параллельных круговых цилиндров.

В лаборатории физики прочности и механики разрушения разработан теоретический подход для исследования упругих и проводящих свойств высокотемпературных сверхпроводников ВТСП на основе интервальных оценок Хашина –

Штрикмана. Разработано экспериментальное устройство для изгибных испытаний сверхпроводящих лент и проводов на основе метода акустической эмиссии и использования лазерной системы для оценки возникающих при механических воздействиях малых перемещений и деформаций.

Разработано экспериментальное устройство и проведены экспериментальные исследования интеллектуальной системы демпфирования колебаний (пластинчатого пьезоэлектрического актюатора) на модельной пластине из композиционного материала (подложки) с наклеенными на ней квадратными поляризованными пьезоэлементами.

В отделе механики грунтов и охраны геологической среды на многих объектах в Ростов-на-Дону, Каменске-Шахтинском и др. городах области совместно с НИПП «ИНТРОФЭК» было осуществлено внедрение изобретений по патенту «Способ подготовки основания» при укреплении грунтов армирующими элементами из цементогрунта в основании фундаментов зданий и сооружений. Особенностью научных работ по данным объектам являлось то, что при выполнении расчетов плитных фундаментов, армированных оснований, подпорных стенок, шпунтов, а также монолитных железобетонных конструкций каркасных зданий (особенно в условиях плотной городской застройки) использовались методики расчета, разработанных в отделе, и компьютерных программ ЛИПА, RUNO, SCAD, ANSYS, Structure CAD и др.

Подобраны составы вспененных цементогрунтовых растворов для укрепления слабых водонасыщенных грунтов в основании фундаментов различных сооружений. Результаты НИР использованы при разработке проектной документации по укреплению грунта. При укреплении слабых водонасыщенных грунтов в основании плитных и ленточных фундаментов на 4-х объектах строительства сотрудниками отдела были проведены экспериментальные работы по отработке технологии нагнетания вспененных цементогрунтовых растворов через направленные разрывы. Начаты работы в полевых условиях по опробованию статическими нагрузками армированных водонасыщенных грунтов путем нагружения опытных фундаментов.

Исследования лаборатории ресурсосберегающих технологий в области создания композиционных строительных материалов направлены на максимальную замену традиционного сырья промышленными отходами. Из имеющихся в регионе промышленных отходов больше всего внимания в исследованиях лаборатории уделяется отходам добычи и сжигания углей. Запасы этих отходов в отвалах и терриконах Ростовской области так велики, что позволяют рассматривать их как альтернативный источник минеральных и органоминеральных сырьевых ресурсов для стройиндустрии области.

В ходе выполнения научных исследований в лаборатории ресурсосберегающих технологий разработаны эффективные строительные материалы, которые по физико-механическим свойствам и техническим характеристикам не уступают отечественным и зарубежным аналогам, и конкурентоспособны на рынке строительных материалов. В лаборатории разработана технология получения топлив-

ных брикетов из некондиционных антрацитовых штыбов, каменноугольной мелочи и шлама обогатительных фабрик, растительных отходов сельского хозяйства и деревообрабатывающей отрасли.

Лаборатория ресурсосберегающих технологий предлагает к внедрению ряд технологий получения строительных материалов на основе золошлаковых отходов ТЭС и горелых шахтных пород: технологические схемы по переработке горелых шахтных пород и выпуску из них заполнителей (щебень, песок, щебеночно-песчаные смеси); технологию изготовления тяжелых бетонов широкой номенклатуры для промышленного и гражданского строительства (фундаментные блоки, элементы железобетонной шахтной крепи, камни бетонные стеновые и др.); технологию изготовления мелкозернистых бетонов для производства тротуарной плитки, бортовых камней, брусчатки и других элементов мощения дорог; технологию изготовления керамических масс для строительного кирпича, облицовочной и фасадной плитки; технологию устройства конструктивных слоев дорожных одежд дорог IV и V категорий; технологию изготовления топливных брикетов из углесодержащих отходов производства.

Разрабатываемые материалы на основе отходов добычи и сжигания углей отличаются повышенной прочностью, морозостойкостью и износостойкостью, устойчивостью к атмосферным воздействиям и действию агрессивных сред, долговечностью, улучшенными потребительскими свойствами. По физико-механическим свойствам и техническим характеристикам эти материалы соответствуют всем требованиям нормативных документов. Топливные брикеты по техническим характеристикам и потребительским свойствам не уступают аналогичному топливу, изготавливаемому в ближнем и дальнем зарубежье, а по некоторым показателям превосходят его.

Преимуществом разработанных технологий является экологическая безопасность, сравнительно небольшая энергоемкость, возможность значительной экономии природного сырья. Они рассчитаны на использование отечественного оборудования, имеют небольшой срок окупаемости, обеспечивают рентабельность производства и получение продукции высокого качества.

В отделе математических методов в экологии и экономике разработана технология моделирования сложных эколого-экономических систем и, на примере имитационной модели экосистемы Азовского моря, установлены некоторые общие принципы функционирования таких систем. Наиболее ярким примером является принцип Ле-Шателье-Брауна, который ранее формулировался применительно к объектам неживой природы или к отдельным организмам. Он заключается в том, что при изменении внешних факторов в экосистеме возникают «силы», стремящиеся вернуть систему в первоначальное состояние. Разработанная технология моделирования сложных природных экологических систем была успешно применена для Каспийского, Черного, Охотского морей и для озер Байкал, Севан и Ханка.

Развитием этой технологии явилось математическое моделирование урбанизированных территорий. Для курортов Сочи и Геленджик были разработаны мо-

дели определения критических рекреационных нагрузок на природные экосистемы. Информационно-советующая система «Город», разработанная и внедренная в Ростове-на-Дону была положена в основу аналогичных систем для городов Могилев, Ульяновск, Тверь.

Успешно ведутся работы по созданию теоретических математических моделей популяций совместно с Агрономическим институтом Париж-Гриньон. Разработана демо-генетическая модель эволюции устойчивости особей вредителей к генетически модифицированной сельхозкультуре. Построены модели пространственно-временной динамики стеблевого кукурузного мотылька под воздействием трансгенной кукурузы.

Одними из первых на Юге России сотрудники отдела стали использовать в исследованиях современные технологии геоинформационных систем. В результате была разработана технология совместной работы банка математических моделей и базы данных о состоянии водных ресурсов в рамках единой геоинформационной системы. Создана информационно-аналитическая среда оценки качества поверхностных вод речного бассейна. Для информационного обеспечения исследований по моделированию экологического состояния Южного федерального округа ведутся работы по созданию Центра космического мониторинга РГУ, укомплектованного оборудованием для приема космических снимков высокого разрешения в реальном времени. На базе Центра геоинформационных технологий РГУ – структурного подразделения отдела математических методов в экологии и экономике создана кафедра глобальных информационных технологий факультета высоких технологий РГУ.

Ученые Института активно участвуют в совместных научных исследованиях с коллегами из США, Италии, Франции, Германии, Бельгии и других стран, о чем свидетельствуют престижные международные гранты, полученные сотрудниками Института в разные периоды его деятельности.

Отмечая 35-летие Института, его сотрудники, несмотря на финансовые трудности, вносят свой вклад в развитие отечественной и мировой науки – механики и прикладной математики, принимают активное участие в сотрудничестве с учеными других стран, проведении международных конференций, семинаров, обмене научной информацией. В течение многих лет Институт является организатором международных конференций «Современные проблемы механики сплошной среды» и школ-семинаров «Математическое моделирование и рациональное природопользование».

Как сказал великий Фирдоуси, «тот мощи достигает, кто знания достиг. От знания душой молодеет старик». Истина на все времена!

*А.В. Белоконь, А.В. Наседкин, В.Г. Сафроненко, Ф.А. Сурков, Л.М. Юдина*

## КАФЕДРЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ РГУ — 45 лет

Осенью 2006 года исполнилось 45 лет со дня образования в Ростовском госуниверситете кафедры теории упругости, бессменным заведующим которой с момента создания до своей смерти в 2001 году был выдающийся механик и математик, доктор физико-математических наук, академик РАН Иосиф Израилевич Ворович.

С момента создания кафедры ее деятельность неразрывно связана с его именем, а в основу формирования научной тематики он поставил три фактора: актуальность, фундаментальность и прикладную значимость. В 1958 году И.И. Ворович блестяще защитил в Ленинградском университете докторскую диссертацию на тему "Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек" и к моменту создания кафедры уже был сформирован ряд перспективных научных направлений, среди которых математические проблемы нелинейной теории тонкостенных конструкций, смешанные задачи теории упругости, проблема перехода от трехмерных к двумерным краевым задачам теории упругости, нелинейная теория упругости, динамические задачи теории упругости, математические модели механики связанных полей. Это обстоятельство, а также потребность в высококвалифицированных кадрах для народного хозяйства и образования на юге страны, естественным образом привело к необходимости создания кафедры, выпускники которой получали бы фундаментальное образование в области механики деформируемого твердого тела.

С момента своего создания, как показало дальнейшее развитие, кафедра стала основным центром подготовки специалистов в области механики и прикладной математики, в том числе и высшей квалификации в регионе. Параллельно с фундаментальными исследованиями на кафедре развивались прикладные разработки в области машиностроения, приборостроения, динамической прочности конструкций и механики полимерных материалов. За первые десять лет своего существования кафедра теории упругости под руководством И.И.Воровича сформировала мощный исследовательский потенциал и на ее базе в 1971 году был открыт научно-исследовательский институт механики и прикладной математики РГУ, ставший флагманом фундаментальных и прикладных исследований в области механики, экологии на Юге России.

Большой опыт механика и специалиста в области устойчивости динамических систем позволил И.И. Воровичу сформулировать основные принципы построения математических моделей в экологии, на базе которых была построена модель Азовского моря; за создание которой ее коллектив авторов удостоен Государственной премии СССР.

Многолетняя плодотворная научная работа И.И. Воровича в области математической теории оболочек была высоко оценена правительством и в 1998 году ему была присуждена Государственная премия России.

За время своего существования кафедра подготовила более 800 выпускников в области механики и прикладной математики; ее выпускники работают преподавателями теоретической механики и сопротивления материалов, математики и прикладной механики, программистами, менеджерами, сотрудниками НИИ. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная И.И. Воро-

вичем научно-педагогическая школа ученых-механиков, среди которых более 35 докторов и 140 кандидатов наук. В ее среде сформировались как ученые и педагоги академик РАН, ректор Кубанского Госуниверситета В.А. Бабешко, ректор Ростовского Госуниверситета А.В. Белоконь.

Кафедра теории упругости динамично развивается и имеет высокий авторитет в среде специалистов как в России, так и за ее рубежами. Среди сотрудников кафедры теории упругости РГУ 3 члена Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике — Ю.А. Устинов, Л.М. Зубов, А.О. Ватульян. За большие достижения в научной деятельности Ю.А. Устинову присуждено звание "Заслуженный деятель науки Российской Федерации". В 90-годы научно-педагогическая деятельность сотрудников кафедры была высоко оценена Соросовским фондом: И.И. Ворович — заслуженный Соросовский профессор; на кафедре в настоящее время работают Соросовские профессора Ю.А. Устинов, Л.М. Зубов, А.О. Ватульян.

После ухода из жизни И.И. Воровича в 2001 году остались живы его идеи и созданная им научная школа, частью которой и является коллектив кафедры теории упругости, на которой в настоящее время работают 7 профессоров докторов наук — его учеников, а кафедру возглавил его ученик профессор Ватульян А.О.

В 2005 году была опубликована первая часть задуманной и написанной И.И. Воровичем монографии "Лекции по динамике Ньютона" (Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие).

Неоднократно школа И.И. Воровича по механике деформируемого твердого тела была поддержана грантами Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, ею выполнялся Госконтракт "Развитие системы ведущих научных школ, как среды генерации знаний и подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации".

Продолжает свою работу докторский Диссертационный Совет по механике деформируемого твердого тела, в возглавляет который профессор кафедры теории упругости Ю.А. Устинов, членами Совета являются 5 профессоров кафедры. Сотрудники кафедры активно влияют на научную и образовательную сферу в регионе, являясь членами редколлегий журналов и членами диссертационных Советов.

В настоящее время научная тематика кафедры представлена следующими направлениями. Во-первых — это исследование колебаний и волн, ударных нагрузок в средах со сложными механическими свойствами, при наличии связанности полей, анизотропии и неоднородности. Во-вторых, — это задачи нелинейного деформирования и устойчивости упругих материалов, в-третьих — задачи о реконструкции свойств объектов по косвенным данным (обратные задачи). По этим направлениям на кафедре выполняется три гранта РФФИ.

Кроме традиционного направления подготовки специалистов в области механики деформируемого твердого тела с 2005 года ведется подготовка по специальности "Компьютерная биомеханика".

Кафедра теории упругости живет, продолжая и развивая традиции, заложенные ее основателем И.И. Воровичем.

*Ватульян А.О., Устинов Ю.А.*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

**Абдрахманова А. А.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет*

В работе предлагается метод расчета деформаций конструкций из стеклопластиков при одностороннем высокотемпературном нагреве. В качестве модели принимается стержень, определяется деформация произвольного волокна стержня, по условиям равновесия приложенных сил выводится система двух дифференциальных уравнений, зависящих от перемещения точки базовой линии стержня. Для изучения точности рассматриваемого метода использована модельная задача, имеющая точное аналитическое решение.

Для наружной тепловой защиты космических спускаемых аппаратов (КСА) широко применяются стеклопластики [1]. При этом в режиме спуска на наружной "горячей" поверхности теплозащитной оболочки КСА температура повышается до 1000 и более градусов Цельсия, а температура внутренней "холодной" поверхности на несколько сотен градусов ниже. Таким образом, имеет место односторонний высокотемпературный нагрев.

В настоящее время нет общепринятой методики расчета конструкций из стеклопластиков при одностороннем высокотемпературном нагреве, и это связано с тем, что при высокой температуре происходит интенсивный процесс термодеструкции стеклопластиков, вследствие чего тепловая деформация, модуль упругости и прочность имеют сложную зависимость от закона изменения температуры во времени. В связи с этим задача создания метода расчета деформированного и напряженного состояний конструкций из стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в настоящее время является весьма актуальной.

Одним из вариантов расчетной схемы теплозащитной конструкции является стержень из стеклопластика при одностороннем высокотемпературном нагреве, который рассматривается в предлагаемой работе.

Рассматривается прямой стержень длиной  $l$  с прямоугольным поперечным сечением размером  $b \times h$ . В качестве координатной системы выбирается система ортогональных осей  $X_1, X_2, X_3$ . На левом конце стержень имеет жесткую заделку, а правый конец стержня прикреплен к подвижному шарниру, перемещение  $\Delta$  которого вдоль оси  $X_1$  ограничено упругим элементом с жесткостью  $C_{упр}$ . К верхней поверхности стержня подводится тепловой поток интенсивностью  $q$ . Такой нагрев стержня называется односторонним. Принимается, что температура в стержне является заданной функцией  $T(x_1, x_2, t)$  и допускается, что перемещения  $u, v$  точек стержня вдоль координатных осей  $X_1, X_2$  зависят только от координат  $x_1, x_2$ , времени  $t$ , и не зависят от координаты  $x_3$ .

На недеформированной базовой линии стержня, совпадающей в начальном положении с осью  $X_1$ , рассматриваются две близкие точки  $K(x_1, 0)$  и  $S(x_1 + dx_1, 0)$

и определяется продольная деформация волокна  $KS$ :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x_1, t) = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2} - 1.$$

Для определения деформации произвольного волокна используется гипотеза плоских нормальных недеформируемых сечений стержня. В недеформированном стержне рассматривается волокно  $K_2S_2$ , параллельное координатной оси  $X_1$ , имеющее координаты концов  $K_2(x_1, \tilde{x}_2)$  и  $S_2(x_1 + dx_1, \tilde{x}_2)$  соответственно. В деформированном стержне это же волокно занимает другое положение  $K'_2S'_2$ . Таким образом, продольная деформация произвольного волокна  $K_2S_2$  принимает вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{|K'_2S'_2| - dx_1}{dx_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} - \tilde{x}_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \tilde{x}_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1}\right)^2} - 1,$$

где

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_2 \mathbf{e}_2 = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \mathbf{e}_2}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2}} \quad (1)$$

— орт касательной к деформированной линии в точке  $K'_2$ .

В поперечных сечениях деформируемого стержня возникают нормальные  $\sigma_{11}$  и касательные  $\tau_{12}$  напряжения, которые являются функциями пространственных координат  $x_1, x_2$  и времени  $t$ . Полная деформация  $\varepsilon_{11}$  материала в произвольной точке с координатами  $x_1, x_2$  рассматривается как сумма деформации от напряжения  $\varepsilon_{11}^{(\sigma)}$  и тепловой деформации  $\varepsilon_{11}^{(T)}$ .

На основе закона Гука в линейной форме определяются величина главного вектора  $N_\tau$  от действия нормальных напряжений:

$$N_\tau = N_\tau(x_1, t) = b \int_0^h E_{11} \varepsilon_{11}^{(\sigma)} d\tilde{x}_2, \quad (2)$$

и величина главного момента  $M_{X_3}$  относительно точки  $K'_2$ :

$$M_{X_3} = M_{X_3}(x_1, t) = -b \int_0^h E_{11} \varepsilon_{11}^{(\sigma)} \tilde{x}_2 d\tilde{x}_2, \quad (3)$$

где  $E_{11} = E_{11}(x_1, x_2, t)$  — модуль упругости.

На выделенный элемент стержня  $K'_2S'_2$  действует распределенная нагрузка, касательная составляющая которой  $q_\tau$ , а нормальная —  $q_n$ . Равнодействующие данной распределенной нагрузки  $R_\tau$  и  $R_n$  определяются по формулам

$$\begin{cases} R_\tau = q_\tau |K'_2S'_2| \boldsymbol{\tau} = q_\tau (1 + \varepsilon_1) dx_1 \boldsymbol{\tau}, \\ R_n = q_n |K'_2S'_2| \mathbf{n} = q_n (1 + \varepsilon_1) dx_1 \mathbf{n}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{n} = -\tau_2 \mathbf{e}_1 + \tau_1 \mathbf{e}_2$$

— орт нормали к деформированной линии в точке  $K'_2$ .

Принимая, что выделенный элемент стержня  $K'_2 S'_2$  неподвижен, записываются условия равновесия для приложенной к нему системы сил и в итоге получается система из двух дифференциальных уравнений равновесия

$$\begin{cases} \frac{\tau_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} - \tau_1 \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial M_{X_3}}{\partial x_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \frac{\partial N_\tau}{\partial x_1} - \frac{\tau_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{1 + \varepsilon_1} N_\tau = q_\tau, \\ \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial^2 M_{X_3}}{\partial x_1^2} + \frac{\tau_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial M_{X_3}}{\partial x_1} + \frac{\tau_2 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} - \tau_1 \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}}{1 + \varepsilon_1} N_\tau = q_n. \end{cases} \quad (4)$$

При подстановке в систему (4) выражений (1)–(3) получается система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных: продольной деформации  $\varepsilon_1$  базовой линии и продольной деформации  $\varepsilon_{11}$  произвольного волокна.

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений используется метод сплайнов в интегральной форме, базирующийся на сплайн-функциях пятой степени дефекта 1, методика построения и применения которых для решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел изложена в работе [2]. Для изучения точности рассматриваемого метода использована модельная задача, имеющая точное аналитическое решение.

На рис. 1 в координатах  $\lg(\delta^s) \sim \lg(N - 1)$ ,  $s = 0, 1, 2, 3$  представлены зависимости ошибки расчетов от размерности сетки узлов  $N$  и показателя степени  $k$  для функции перемещения  $\varepsilon_1$ .

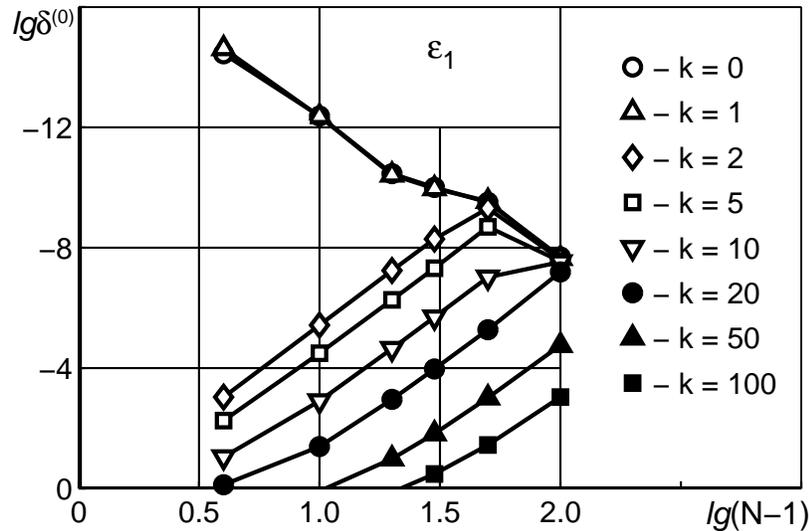


Рис. 1.

Из рис.1 видно, что при  $k = 0$  и  $k = 1$  для сетки с числом узлов  $N = 5$  относительная погрешность расчетов для функции перемещений  $\varepsilon_1$ , характеризу-

ется величиной  $\delta^{(0)} < 1 \cdot 10^{-13}$ , то есть в данном случае метод дает практически абсолютно точные результаты.

В дальнейшем при росте  $N$  для случаев  $k = 0$  и  $k = 1$  погрешность расчетов возрастает и это связано с накоплением арифметической ошибки расчетов. Чтобы эта ошибка увеличивалась менее интенсивно, необходимо более тщательно прорабатывать алгоритм арифметических вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Исаханов Г.В.* Прочность неметаллических материалов при неравномерном нагреве. К., Наукова Думка, 1971.
- [2] *Павлов В.П.* Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкции. Экспериментальные исследования и математическое моделирование. Уфа, Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2004.

**Abdrakhmanova A.A.** *Modeling of fibreglasses designs deformations at high temperatures.* Consider the method of calculation of fibreglasses designs deformations at unilateral high temperatures. The core is accepted as model, is defined any fibre of a core deformation, the system of two differential equations dependent on moving of a point of a base line of a core is deduced on balance of the enclosed forces conditions For studying accuracy of a considered method the modelling problem having the exact analytical decision is used.

# ТЕРМОУПРУГИЕ ПОЛЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В ДИСКООБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

**Айзикович С. М., Кренев Л. И. \*, Трубчик И. С. \*\***

*\* Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

*\*\* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

Рассматривается трехмерная осесимметричная задача термоупругости в изотропном и неоднородном линейно-упругом полупространстве, нагреваемом непрерывным и постоянным по времени тепловым потоком с интенсивностью, равномерно распределенной внутри круговой области на поверхности тела. Модуль Юнга и коэффициент теплопроводности полупространства непрерывно изменяются в приповерхностном слое. Граница полупространства свободна от нормальных и касательных напряжений. Для решения граничной задачи используется аппарат интегральных преобразований Ханкеля. Функция влияния строится численно методом модулирующих функций [2]. Определяется температурное поле и соответствующее ему термоупругое напряженное состояние. Численно анализируется зависимость напряженно-деформированного состояния непрерывно-неоднородного слоя, полученного в результате температурного воздействия, от характерного геометрического параметра задачи.

В качестве теоретической модели, наиболее адекватно описывающей реальные физические процессы, происходящие в функционально-градиентном покрытии при воздействии дуговой сварки в локальной области и связанные с этим явления нагрева, растрескивания и деформации сварного шва, выбрана осесимметричная задача о распределении нестационарных температурных и квазистатических термоупругих полей в однородном и изотропном полуограниченном теле, нагреваемом непрерывно действующим тепловым потоком постоянной интенсивности, равномерно распределенным внутри круговой области.

Считаем, что поверхность полупространства свободна от нормальных и касательных нагрузок, внутренние массовые силы также полагаем пренебрежимо малыми по сравнению с характерными термическими напряжениями.

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , где радиальная ось  $r$  лежит вдоль границы, ось симметрии  $z$  направлена по нормали к поверхности полупространства, а начало координат находится в центре круговой области радиуса  $R$ , которая нагревается непрерывно действующим, произвольно распределенным по радиусу тепловым потоком интенсивности  $q(r)$ . Границу полупространства  $z = 0$  вне области нагрева считаем идеально теплоизолированной. Считаем, что теплофизические и упругие характеристики среды не зависят от температуры и непрерывно изменяются по глубине в пределах прилегающего к поверхности слоя,

а затем стабилизируются:

$$\begin{aligned} E(z) &= E^C(z), \quad \lambda_t(z) = \lambda_t^C(z), \quad -H \leq z \leq 0; \\ E(z) &= E^S(z), \quad \lambda_t(z) = \lambda_t^S(z), \quad -\infty < z < -H; \\ E^C(-H) &= E^S(-H), \quad \lambda_t^C(-H) = \lambda_t^S(-H). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $E(z)$  – модуль Юнга среды,  $H$  – толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим полупространством, точнее, это глубина с которой мы полагаем упругие характеристики полупространства постоянными. Индекс  $S$  соответствует подстилающему однородному полупространству, а  $C$  – неоднородному слою; коэффициент Пуассона  $\nu$  постоянный,  $t$  – температура,  $\lambda_t(z)$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha_t(z)$  – коэффициент линейного расширения.

Обозначим через  $u, v, w$  смещения вдоль осей  $r, \varphi, z$  соответственно, через  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$  – радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно.

Для определения полей перемещений, деформаций, напряжений и температуры в рамках стационарной несвязанной задачи термоупругости в осесимметричном случае мы имеем следующую систему уравнений:

1. Уравнения равновесия неоднородного по глубине полупространства при отсутствии массовых сил, записанные в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (3)$$

Система (2) описывает осесимметричное напряженное состояние, возникающее, например, под действием нормальной к поверхности нагрузки, а уравнение (3) – соответственно равновесие полупространства скручиваемого касательным усилием.

2. Уравнения связи термоупругих напряжений с деформациями (Дюамеля-Неймана) [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2M(z)\varepsilon_r + \Lambda(z)\varepsilon - \gamma(z)\theta, \quad \sigma_\varphi = 2M(z)\varepsilon_\varphi + \Lambda(z)\varepsilon - \gamma(z)\theta, \\ \sigma_z &= 2M(z)\varepsilon_z + \Lambda(z)\varepsilon - \gamma(z)\theta, \quad \tau_{r\varphi} = 2M(z)\varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = 2M(z)\varepsilon_{rz}, \\ \tau_{\varphi z} &= 2M(z)\varepsilon_{\varphi z}, \quad \theta = t - t_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\gamma(z) = \alpha_t(z) (3\Lambda(z) + 2M(z)), \quad M(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \Lambda(z) = \frac{E(z)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Компоненты деформации выражаются через смещения следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

3. Уравнение неоднородной по глубине теплопроводности для стационарного температурного поля в осесимметричном случае:

$$\lambda_t(z) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda_t(z)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Окончательно получаем в случае приложения осесимметричной поверхностной нагрузки систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно перемещений. Эти уравнения могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} M(z) \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{dM(z)}{dz} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \gamma(z) \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ M(z) \nabla^2 w + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + 2 \frac{dM(z)}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d\Lambda(z)}{dz} \varepsilon = \frac{\partial \gamma(z) \theta}{\partial z}; \end{cases} \quad (7)$$

$$M(z) \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{dM(z)}{dz} \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (8)$$

$$\lambda_t(z) \nabla^2 \theta + \frac{d\lambda_T(z)}{dz} \frac{d\theta}{dz} = 0; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Граничные условия, в соответствии с постановкой задачи, примут вид:

$$\frac{d\theta^C}{dz}(r, 0) = -kq(r), \quad r < R; \quad \frac{d\theta^C}{dz}(r, 0) = 0, \quad r > R. \quad (10)$$

Здесь  $k = \lambda_t(0)$  – коэффициент теплопроводности на поверхности полупространства.

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при  $z = -H$ , должны в силу непрерывности выполняться условия сопряжения по смещениям, напряжениям, температуре и тепловому потоку.

$$\begin{aligned} \sigma_z^C(r, -H) &= \sigma_z^S(r, -H), & \tau_{rz}^C(r, -H) &= \tau_{rz}^S(r, -H), \\ u^C(r, -H) &= u^S(r, -H), & w^C(r, -H) &= w^S(r, -H), \\ \theta^C(r, -H) &= \theta^S(r, -H), & \frac{d\theta^C}{dz}(r, -H) &= \frac{d\theta^S}{dz}(r, -H). \end{aligned} \quad (11)$$

На бесконечности, при  $(r, -z) \rightarrow \infty$  смещения, деформации и напряжения исчезают. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю.

С учетом обозначений (11), представим уравнение теплопроводности (9) в виде:

$$\lambda_t^C(z) \nabla^2 \theta^C + \frac{d\lambda_T^C(z)}{dz} \frac{d\theta^C}{dz} = 0, \quad -H \leq z \leq 0; \quad \lambda_t^S \nabla^2 \theta^S = 0, \quad -\infty < z < -H. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) будем разыскивать с помощью преобразования Ханкеля по радиальной координате:

$$\theta^C(r, z) = \int_0^\infty T^C(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad \theta^S(r, z) = \int_0^\infty T^S(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma.$$

Подставляя выражения для  $\theta^C(r, z)$  и  $\theta^S(r, z)$  в (12) и приравняв нулю подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $T^C(\gamma, z)$  и  $T^S(\gamma, z)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_t^C \frac{d^2 \theta^C}{dz^2} + \frac{d\lambda_t^C}{dz} \frac{d\theta^C}{dz} - \gamma^2 \lambda_t^C T^C &= 0, \quad -H \leq z \leq 0; \\ \lambda_t^S \frac{d^2 \theta^S}{dz^2} - \gamma^2 \lambda_t^S T^S &= 0, \quad -\infty < z < -H. \end{aligned} \quad (13)$$

Общее решение второго уравнения в (13) силу ограниченности на бесконечности имеет вид

$$T^S(\gamma, z) = B_1(\gamma) \exp(|\gamma|z) \quad (14)$$

Граничные условия (10), (11) с учетом (14) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T^C(\gamma, -H) &= T^S(\gamma, -H), \quad \frac{dT^C}{dz}(\gamma, -H) = \frac{dT^S}{dz}(\gamma, -H), \\ \frac{dT^C}{dz}(\gamma, -H) &= |\gamma| T^C(\gamma, -H), \\ \frac{dT^C}{dz}(\gamma, 0) &= -kQ(\gamma), \quad Q(\gamma) = \int_0^\infty q(x) J_0(\gamma x) dx, \quad x = z/R. \end{aligned} \quad (15)$$

После ввода вспомогательных переменных  $y_1 = T^C(\gamma z)$ ,  $y_2 = (T^C)'(\gamma z)$  (штрих обозначает первую производную по  $z$ ), первое уравнение (13) перепишем в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \gamma^2 y_1 - \frac{\lambda_t'(z)}{\lambda_t(z)} y_2 \end{cases}$$

с краевыми условиями (15):

$$y_2(\gamma, -H) = |\gamma| y_1(\gamma, -H), \quad y_2(\gamma, 0) = -kQ(\gamma).$$

Решение краевой двухточечной задачи при фиксированном  $\gamma$  строим методом модулирующих функций, выделяя в явном виде экспоненциальные составляющие, т.е. представляя  $y_1$ ,  $y_2$  в виде:

$$\begin{cases} y_1 = B_1(\gamma) a_1(\gamma, z) \exp(|\gamma|z), \\ y_2 = B_1(\gamma) a_2(\gamma, z) \exp(|\gamma|z). \end{cases}$$

Функции  $a_1(\gamma, z)$ ,  $a_2(\gamma, z)$  определяем из задачи Коши при фиксированном  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} &= a_2, \quad -|\gamma| a_1, \quad \frac{da_2}{dz} = \gamma^2 a_1 - \left( \frac{\lambda_t'(z)}{\lambda_t(z)} + |\gamma| \right) a_2, \quad -H \leq z \leq 0; \\ a_1(\gamma, -H) &= 1, \quad a_1(\gamma, -H) = |\gamma|, \quad B_1(\gamma) a_2(\gamma, 0) = -kQ(\gamma). \end{aligned}$$

Отсюда мы находим  $B_1(\gamma)$ , а следовательно, можем определить распределение

температуры внутри неоднородного по глубине полупространства.

$$\begin{aligned}
 B_1(\gamma) &= -kQ(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1}, \\
 \begin{cases} T^C(\gamma, z) = y_1 = -kQ(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} a_1(\gamma, z) \exp(|\gamma|z), \\ (T^C)'(\gamma, z) = y_2 = -kQ(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} a_2(\gamma, z) \exp(|\gamma|z); \end{cases} \\
 \theta^C(r, z) &= -k \int_0^\infty Q(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} a_1(\gamma, z) \exp(|\gamma|z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \\
 (\theta^C(r, z))' &= -k \int_0^\infty Q(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} a_2(\gamma, z) \exp(|\gamma|z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \\
 \theta^S(r, z) &= -k \int_0^\infty Q(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} \exp(|\gamma|z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \\
 (\theta^S(r, z))' &= -k \int_0^\infty Q(\gamma) (a_2(\gamma, 0))^{-1} \exp(|\gamma|z) J_0(\gamma r) \gamma^2 d\gamma.
 \end{aligned}$$

В монографии [2] подробно рассмотрено построение фундаментального решения однородного уравнения. По построенному численно температурному полю определяются правые части разрешающего уравнения (7) или (8). Частное решение неоднородного уравнения строится вариационно-разностным методом.

Авторы благодарят В.М.Александрова за внимание к работе.

Работа написана при поддержке грантов РФФИ № 05-01-00002, № 05-08-18270, № 06-08-01595.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев. Наукова думка. 1965. 204 с.  
 [2] С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконов, Л.И. Кренив, И.С. Трубчик. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

**Aizikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S.** *Thermoelastic fields into the half-space covered by the functional graded coating taking into consideration temperature influence upon the circular region.* The axisymmetrical temperature flow problem was considered through the circular region on the functional-graded half-space. The three-dimensional axisymmetrical thermo-elastic problem is considered for light-like inhomogeneous half-space, which is warming by flow of heat continued and stable with the time with uniformly distributed its intensity inside the circular area on the surface of the body. The Young modulus and coefficient of heat conductivity of half-space are changing continuously inside the blanket layer aria. The half-space boundary is free from the normal and tangent stresses. The Hankel integral transformation is used for the solution of this boundary problem. The influence function is obtained numerically by the modulating functions method [2]. The temperature field and thermoelastic state is obtained. The relationship of stress and strain state of continuously inhomogeneous layer from the character dimensionless parameter is analysed numerically in view of heating condition.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ

Айзикович С. М., Кренев Л. И.\* , Трубчик И. С.\*\*

\* *Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

\*\* *НИИ механики и прикладной математики им. Ворожича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Рассматривается пространственная задача о трещине нормального отрыва в функционально-градиентной среде. Предполагается, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды изменяются произвольно в направлении, перпендикулярном плоскости трещины. Методами операционного исчисления задача сводится к решению парных интегральных уравнений относительно функции раскрытия трещины. Численно построенные функции трансформант ядер интегральных уравнений аппроксимируются выражениями специального вида. Получены аналитические решения уравнений с аппроксимированными ядрами. Доказывается, что эти решения являются асимптотически точными решениями исходных интегральных уравнений, как при малых, так и при больших значениях безразмерного геометрического параметра задачи. Приводятся аналитические выражения для смещений берегов трещины, а также смещения, деформации и напряжений вблизи зоны раскрытия трещины в функционально-градиентной среде. На примере иллюстрируется влияние неоднородности среды на ее напряженно-деформируемое состояние, вызванное наличием трещины. Метод позволяет исследовать задачи о трещине в слоистом пространстве.

**Введение.** Проблема исследования свойств неоднородных материалов привлекает внимание многих исследователей своей актуальностью и сложностью, как с экспериментальной, так и с математической точки зрения. В данной работе используется подход, описанный в работе академика Ишлинского А.Ю. [1], при котором задачи теории трещин решаются на основе известных решений контактных задач теории упругости. В соответствии с таким подходом, задача определения напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины сводится к решению контактной задачи для полупространства, границей которого является плоскость, в которой лежит трещина. Решение контактных задач для сред с произвольным законом изменения неоднородности по глубине двухсторонним асимптотическим методом было построено в работах Айзиковича С.М., Александрова В.М. и др. [2, 3].

Суть метода состоит в том, что трансформанта ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача, и ее аппроксимация находятся численно [4]. После того, как структура трансформанты ядра интегрального уравнения определена, она аппроксимируется выражением специального вида. Решение интегрального уравнения с аппроксимированным ядром строится аналитически. Это дает возможность получить решение в виде, удобном для аналитического исследования

различных эффектов, связанных с неоднородностью. Кроме того, эта аппроксимация позволяет найти решение задачи для достаточно широкого класса законов неоднородности.

**1. Постановка граничной задачи, некоторые свойства трансформанты ядра парного интегрального уравнения и асимптотическое решение.**

Рассматривается осесимметричная статическая задача для дисковой трещины нормального отрыва в упругом неоднородном изотропном пространстве. С пространством связана цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ . Трещина радиуса  $R$  расположена в плоскости  $z = 0$  и ее центр совпадает с началом координат.

Модуль Юнга  $E(z)$  и коэффициент Пуассона  $\nu(z)$  неоднородного пространства являются произвольными непрерывными (или кусочно-непрерывными) симметричными функциями расстояния  $z$  до плоскости трещины. Берега трещины нагружены изнутри распределенным давлением  $f(r)$ .

С учетом симметрии упругих свойств материала и условий нагружения относительно плоскости трещины, приходим к смешанной краевой задаче для полупространства  $z \geq 0$ .

На границе  $z = 0$  имеют место условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= 0, & 0 < r < \infty \\ \sigma_z &= -f(r), & 0 \leq r < R; \quad w(r) = 0; \quad r > R \end{aligned} \quad (1)$$

При  $|z| = H$  выполняются условия сопряжения перемещений и напряжений. На бесконечности перемещения и напряжения затухают.

С помощью методов операционного исчисления аналогично [3], задача сводится к парному интегральному уравнению вида:

$$\begin{cases} \int_0^\infty W(\alpha)K(\alpha\lambda)J_1(\alpha r)d\alpha = \Delta^{-1}(0)q^*(r), & 0 \leq r \leq 1, & q^*(r) = \frac{1}{r} \int_0^1 f(\rho)\rho d\rho \\ \int_0^\infty W(\alpha)J_1(\alpha r)\alpha d\alpha = 0, & r > 1 \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $\lambda = H/R$ , функция  $K(\alpha) = L^{-1}(\alpha)$ , где  $L(\alpha)$  – трансформанта ядра интегрального уравнения, к которому сводится соответствующая контактная задача для неоднородного полупространства.  $L(\alpha)$  в общем случае строится численно методом моделирующих функций [3].

При выполнении условий:

$$\min_{z \in (0, \infty)} \Delta(z) \geq c_1 > 0, \quad \max_{z \in (0, \infty)} \Delta(z) \leq e < \infty; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta(z) = const. \quad (3)$$

$$\Delta(z) = G(1 - \nu)^{-1} = 0,5E(1 - \nu^2)^{-1}$$

можно показать [3], что функция  $L(\alpha)$  обладают следующими свойствами ( $A, B, D$  – постоянные):

$$L(\alpha) = A + B|\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0; \quad L(\alpha) = 1 + D|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (4)$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta(z)\Delta^{-1}(0),$$

где  $G$  – модуль сдвига, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона неоднородной среды. Для многослойных сред свойства функций податливости, аналогичные (4) отмечены в работе [5].

В работах [6, 7], были доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Если функция  $L(\alpha)$  обладает свойствами (4), то функция  $K(\alpha)$  допускает аппроксимацию выражениями вида

$$K(\lambda\alpha) = \prod_{i=1}^N (\alpha^2 + b_i^2 \lambda^{-2}) (\alpha^2 + a_i^2 \lambda^{-2})^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-1} |\alpha| (\alpha^2 + D_k^2 \lambda^{-2})^{-1} \quad (5)$$

Здесь  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, N, C_k, D_k, k = 1, 2, \dots, M$  – некоторые постоянные, причем  $(a_i - a_k)(b_i - b_k) \neq 0$  при  $i \neq k$ .

Используя (5) и принятые в [3] обозначения для классов и пространств функций, перепишем (2) в операторном виде:

$$\Pi_N w + \Sigma_{\infty} w = q^*. \quad (6)$$

**Теорема 2.** Уравнение (6) однозначно разрешимо в пространстве  $C_{\frac{1}{2}}^{(0)-}(-1, 1)$  нечетных функций, непрерывных с весом  $\sqrt{1-r^2}$  для  $q^*(r)$ , разложимой в ряд Дини-Бесселя, где  $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i \lambda_i| \leq M(-1, 1) < \infty$ , при  $0 < \lambda < \lambda^*$  и  $\lambda > \lambda^0$ , где  $\lambda^*$ ,  $\lambda^0$  – некоторые фиксированные значения  $\lambda$ , и при этом имеет место оценка:

$$\|w(r)\|_{C_{\frac{1}{2}}^{(0)-}(-1,1)} \leq m(\Pi_N, \Sigma_{\infty}) M_{q^*}(-1, 1), \quad m(\Pi_N, \Sigma_{\infty}) = const.$$

Уравнения вида (2) преобразуются к изученным в [3] с помощью интегрирования по частям. Из результатов [6, 7] следует, что решение вида  $w^N = \Pi_N^{-1} q^*$ , является двухсторонне асимптотически точным решением уравнения (2) при  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ . Причем погрешность приближенного решения не превосходит погрешности аппроксимации функций  $K(\gamma)$  функциями класса  $\Pi_N$ .

Получено выражение для формы трещины  $w(r)$  в случае постоянной нагрузки  $f(r) \equiv f_0$  в виде

$$w(r, 0) = \delta(r) = \frac{2f_0}{\pi \Delta(0)} \left\{ L(0) \sqrt{1-r^2} + \Delta(0) \sum_{n=1}^N C_n \int_r^1 \frac{\text{sh}(B_n \lambda^{-1} t)}{\sqrt{t^2-1}} dt \right\}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (7)$$

Коэффициенты  $C_n$  находятся из линейной алгебраической системы уравнений,  $B_n$  – коэффициенты аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения функцией класса  $\Pi_N$ .

Формулы для коэффициента интенсивности напряжений и энергии раскрытия трещины были приведены в [6, 7].

## 2. Решение граничной задачи для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства.

Полагаем, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона изменяются по глубине в приповерхностном слое, а затем остаются неизменными, то есть, модуль Юнга

в неоднородном слое в окрестности трещины есть кусочно-непрерывная функция по толщине слоя:

$$E(z) = \begin{cases} E_i^C = E^S f_i(z) & -H \leq z \leq 0 \\ E^S - \text{const} & -\infty \leq z \leq -H \end{cases} \quad (8)$$

Полученное решение задачи о трещине дает возможность сформулировать граничные условия пространственной задачи для неоднородного полупространства следующим образом:

$$\begin{aligned} w(r, 0) &= -\delta(r), & 0 \leq r < 1; & & w(r, 0) &= 0, & r > 1; \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0, & 0 \leq r < 1 < \infty \end{aligned} \quad (9)$$

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством, при  $z = -H$ , должны выполняться условия сопряжения по смещениям и напряжениям:

$$\begin{aligned} \sigma_z^C(r, -H) &= \sigma_z^S(r, -H), & \tau_{rz}^C(r, -H) &= \tau_{rz}^S(r, -H), \\ u^C(r, -H) &= u^S(r, -H), & w^C(r, -H) &= w^S(r, -H) \end{aligned} \quad (10)$$

Напряжения и деформации стремятся к нулю при  $(r, -z) \rightarrow \infty$ .

В данной задаче полную систему уравнений для нахождения компонент тензоров деформации и напряжения составляют уравнения равновесия в цилиндрической системе координат, закон Гука и связь деформаций и перемещений для случая линейной среды [8].

Решение этой системы уравнений ищем в виде интегралов Ханкеля

$$u(r, z) = - \int_0^\infty U(\alpha, z) J_1(\alpha z) \alpha d\alpha, \quad w(r, z) = \int_0^\infty W(\alpha, z) J_0(\alpha z) \alpha d\alpha \quad (11)$$

Подставляя данный вид решения в систему дифференциальных уравнений относительно функций перемещений  $u(r, z)$  и  $w(r, z)$ , получим систему дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно трансформант  $U(r, z)$  и  $W(r, z)$ . Далее используем схему метода моделирующих функций для построения трансформант ядер интегральных уравнений для набора фиксированных значений переменной  $-H \leq z < 0$ , начиная с уже известного  $z = 0$ .

### 3. Примеры

Коэффициент Пуассона предполагается постоянным  $\nu = 0,333$  и рассматривается шесть видов неоднородности слоя вблизи трещины, а именно, в формуле (8)

$$\begin{aligned} E_1^C &= 3.5E^S, & E_2^C &= 1/3.5E^S, & E_3^C &= 3.5E^S + 2.5E^S z/H, \\ E_4^C &= 1/3.5E^S - (2.5/3.5)E^S z/H, & E_5^C &= E^S(1. + 2.5 \sin(\pi z/H)), \\ E_6^C &= E^S(1. - (2.5/3.5) \sin(\pi z/H)), \end{aligned} \quad (12)$$

В расчетах законы изменения механических свойств (12) аппроксимировались кусочно-линейной непрерывной функцией от  $z$ .

На рис. 1 в трехмерном виде представлены поля распределений вертикальных напряжений в окрестности одного из берегов трещины для однородного полупространства и неоднородного полупространства в случае законов неоднородности (12) при  $\lambda = 1.0$ .

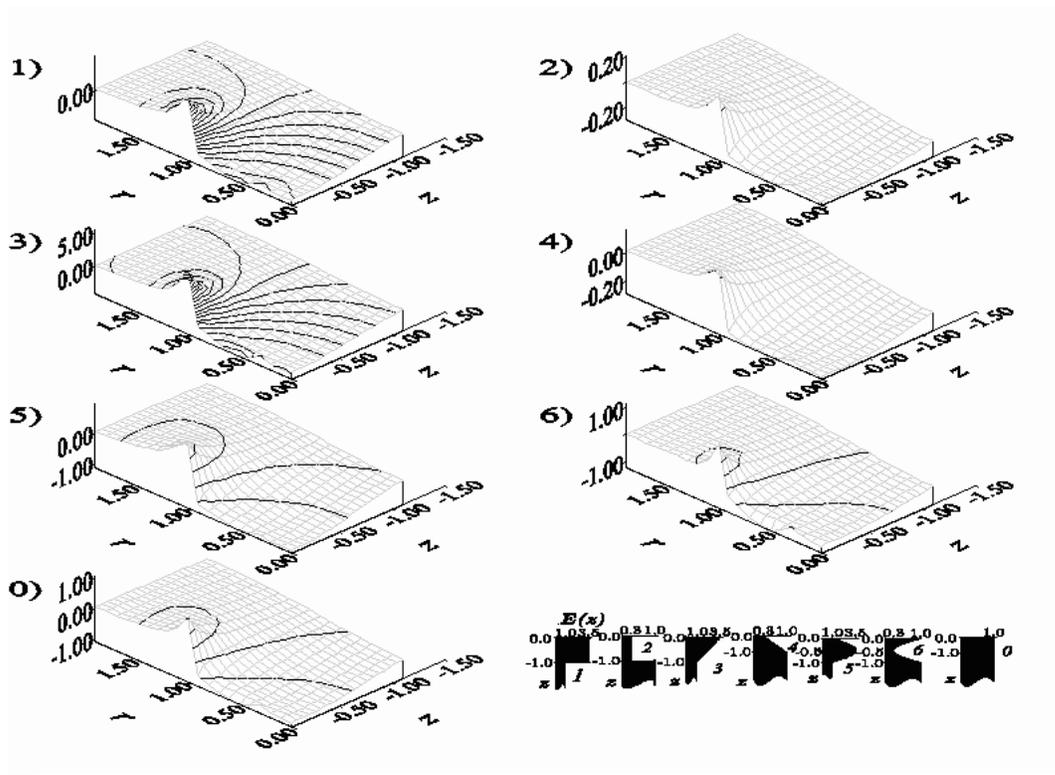


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений возле трещины для различных видов неоднородности

Работа написана при поддержке грантов РФФИ № 05-01-00002, № 05-08-18270, № 06-08-01595.

Авторы благодарят В.М.Александрова за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлминский А.Ю. Прикладные задачи механики. М.: Наука, 1986. Т. 2. 416 с.
- [2] Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Kalker J.J., Krenev L.I., Trubchik I.S. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. N 10. pp. 2745–2772.
- [3] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.:Физматлит, 2006. 240 с.
- [4] Трубчик И.С. Метод сведения смешанных задач для полубесконечных областей к решению парных интегральных уравнений // Труды IX международной конферен-

- ции "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону. 11–15 октября 2005г. Ростов-на-Дону: "Новая книга", 2005. Т. 2. С. 219–222.
- [5] Приварников А.К. Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27–45.
- [6] Айзикович С.М., Трубчик И.С. Дисковая трещина в градиентном пространстве // Труды VIII международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону. 14-18 октября 2002г. Ростов-на-Дону: "Новая книга", Т. 2. 2003. С. 184–188.
- [7] Трубчик И.С., Айзикович С.М. Асимптотические решения задачи о трещинах в функционально-градиентных средах // "Смешанные задачи механики деформируемого тела". Материалы V Рос. конф. с междунар. уч-ем. 22–25 августа 2005 г. г. Саратов. Саратов: изд-во СГУ. 2005. С. 10–13.
- [8] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 824 с.

**Aizikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S.** *Studies of the functional-graded coatings properties making an impact on the 3D-stress-strain state near the crack vicinity.* The spatial problem for the normal crack into functional-graded medium is examined. It is proposed the Young modulus and Poisson coefficient of the medium are changing arbitrarily in the normal direction to the crack plane. By the operation methods this problem is reduced to the solution of the dual integral equations for the crack opening function. Numerically constructed functions of the kernel transforms of the integral equations are approximated by the expression of the special form. The analytical solutions of these equations with approximated kernels transforms are obtained. It is shown that the resulting approximate solution is asymptotically accurate for as small as large evaluations of the dimensionless geometric parameter. The analytical expressions for the stress intensity factor, for the displacement of crack banks and for the crack opening energy and stress-strain state in vicinity of the crack are derived for the functional-graded media. The effect of the space non-homogeneity on stress-strain state of the medium caused by the crack is illustrated by the numerical examples. This model allows to investigate the crack problems into the layered space.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ПОЛИМЕРКОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕЙРОСЕТЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Акопьян В. А.\*, Соловьев А. Н.\*, Рожков Е. В.\*,  
Шевцов С. Н.\*\*

\*Ростовский государственный университет

\*\*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о колебаниях консольно закрепленной полимеркомпозитной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. На основе МКЭ и нейросетевой технологии построена модель активного гашения колебаний. Проведено натурное моделирование конструкции и проведен эксперимент, результаты которого сравниваются с численными экспериментами.

**Введение.** Проблемам разработки и описания интеллектуальных конструкций с управлением на основе сенсоров-актуаторов при наличии обратных связей по перемещениям и скоростям уделяется большое внимание в мировой литературе [1–4] и др. В основном в качестве цели управления выступает заданная форма поверхности (в статических задачах) и активное гашение колебаний в целом или на отдельных модах. В ряде исследований в систему управления встраиваются нейронные сети (НС) принципы обучения и функционирования, которых могут быть различны [5–9] и др. Касаясь реализации интеллектуальных систем контроля и идентификации состояний, необходимо также отметить, что обучающее множество должно содержать все ситуации, в том числе, аварийные в управляемой системе. Этот факт требует исчерпывающей информации о динамике управляемой системы и ее поведении при отказах любого компонента.

**Архитектура НС управления.** В качестве управляющей системы предлагается применить НС с эталонной механической системой (рис. 1), в роли которой может выступать ее математическая модель например конечноэлементная. В начале производится идентификация модели механической системы, затем тренировка сети контроллера так, чтобы выход механической системы соответствовал выходу эталонной модели.



Рис. 1. Архитектура системы управления с эталонной моделью

Структура обеих нейронных сетей может содержать число скрытых слоев, определяемое сложностью управляемой системы. Наборы входных сигналов контроллера включают: — задержанный вход эталонной модели; — задержанный выход контроллера; — задержанный выход механической системы. Величина задержек может варьироваться, увеличиваясь с ростом сложности управляемой механической системы. Сеть, моделирующая механическую систему, включает два набора входов: — задержанный выход контроллера; — задержанный выход механической системы. Величина задержек также может регулироваться сообразно со сложностью поведения системы.

Обобщая сказанное, необходимо прийти к выводу о том, что, благодаря применимости к наиболее широкому классу систем и скорости работы в реальном времени, архитектура управления с эталонной моделью является наиболее перспективной. Она требует большого объема вычислительных операций на этапе тренировки сети контроллера, хорошо продуманной эталонной модели и, в связи с тем, что наработка обучающих последовательностей с помощью реальной механической системы представляется трудно реализуемой, адекватной модели самой управляемой системы — например лопасти несущего винта вертолета (ЛНВ). Наиболее перспективным направлением является создание конечноэлементной модели лопасти и проведение на ней массивов численных экспериментов с целью выработки обучающих наборов. В качестве эталонной модели может быть использована либо предельно упрощенная балочная аналитическая или конечноэлементная модель, максимально приближенная по динамическим характеристикам к реальной конструкции. Необходимым условием, накладываемым на эталонную модель, является ее существенно улучшенное поведение в критических ситуациях (флаттер, местное повреждение и т.п.) за счет повышенной жесткости и конструкционного, возможно, нелинейного демпфирования.

**Конечноэлементная модель.** Как отмечалось выше, в качестве эталонной механической модели может выступать КЭ модель упругой конструкции. Рассмотрим две таких модели: консольно закрепленная пластина из стеклопластика (рис. 4) и упрощенная модель ЛНВ (рис. 3 слева) шарнирно закрепленная в комлевой части. Размеры пластины (рис. 4)  $227 \times 10 \times 0.5$  (мм), колебания возбуждаются электромагнитом (ЭМ) у закрепленного края имеются два пьезоэлемента (ПЭ) один из которых выполняет роль сенсора другой актуатора, сенсором служит также оптический измеритель перемещений (ОИП). Проведен модальный анализ этой конструкции в ACELAN, результаты которого представлены в табл. 1. В табл. 2 отображены результаты активного гашения колебаний на различных модах, в качестве целевой функции в процессе демпфирования колебаний выступает функционал

$$F(u_z) = \int_0^L u_z^2(x)g(x)dx \quad (1)$$

где  $g(x)$  — некоторая весовая функция, в проведенных расчетах  $g(x) = \delta(x - l)$  ( $l$  — длина пластины).

Для трехмерной КЭ модели ЛНВ также проведен модальный анализ результаты которого представлены в табл. 3. Следует отметить, что частота первой кру-

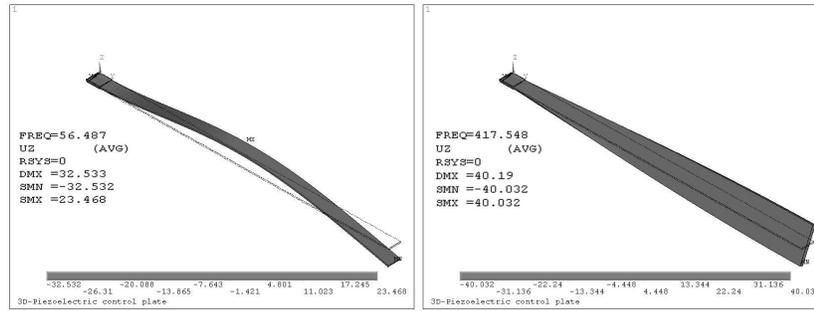


Рис. 2. Изгибная и крутильная моды колебаний консольной пластины с ПЭ

Таблица 1.

	Частота, Гц.	Мода колебаний
1	9.04	1-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
2	56.487	2-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
3	99.584	1-ая изгибная мода в плоскости наибольшей жесткости
4	157.593	3-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
5	308.516	4-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
6	417.548	1-ая крутильная мода

Таблица 2.

Частота (Гц)	Сигнал сенсора (В)	Потенциал актуатора (В)	Амплитуда смещения (м)	Амплитуда смещения с обратной связью (м)
8.5	-5.8-3 <i>i</i>	100	$1.4 \times 10^{-2}$	$6.7 \times 10^{-3}$
52.5	-0.272- -0.43 <i>i</i>	60	$1.69 \times 10^{-4}$	$5.9 \times 10^{-5}$
157.0	-0.65- -1.29 <i>i</i>	80	$2.40 \times 10^{-4}$	$9.2 \times 10^{-5}$

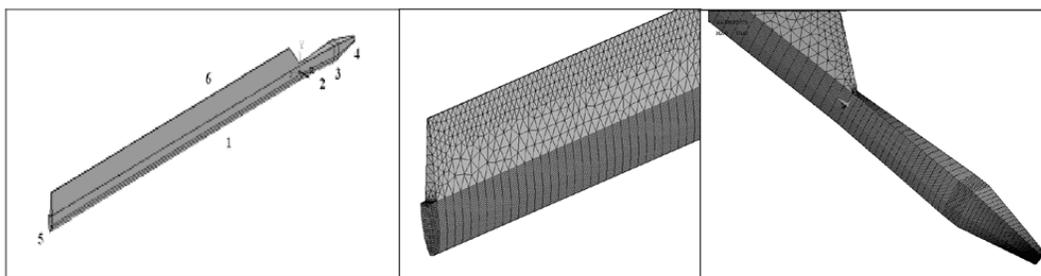


Рис. 3. Упрощенная КЭ модель ЛНВ.

Таблица 3.

	Частота (Гц).	Мода колебаний
1	2.1450	1-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
2	6.6839	2-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
3	7.9384	1-ая изгибная мода в плоскости наибольшей жесткости
4	15.158	3-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
5	24.186	2-ая изгибная мода в плоскости наибольшей жесткости
6	28.038	4-ая изгибная мода в плоскости наименьшей жесткости
7	29.933	1-ая крутильная мода

тильной моды колебаний близка к частоте 4-ой изгибной моды колебаний в плоскости наименьшей жесткости, это нежелательное явление, которое может приводить к изгибно крутильному флаттеру, в настройках НС управляющей гашению колебаний особое внимание должно быть уделено этому частотному диапазону.

**Эксперимент.** Для натурального моделирования процесса управления колебаний полимеркомпозитной конструкции была собрана установка изображенная на рис. 4. Схема управления упрощенно представлена на рис. 5 (в левом верхнем углу). На этой схеме сделаны следующие обозначения: Г — генератор, О — осциллограф, Ч — частотомер, У — усилитель, КФ — переключатель фазы. Проведены многочисленные эксперименты по возбуждению и активному гашению колебаний этой пластины. Результаты некоторых из них представлены на рис. 5 и 6. На рис. 5 изображена зависимость отношений амплитуд колебаний свободного конца пластины на первой резонансной частоте с пассивным актуатором и активным в зависимости от коэффициента усиления в обратной связи между ним и ОИП. На рис. 6, так же для первой моды, изображена осциллограмма колебательного процесса с пассивным актуатором (левая часть) и с активным — переходной процесс (центральная часть), активно погашенные колебания (правая часть).

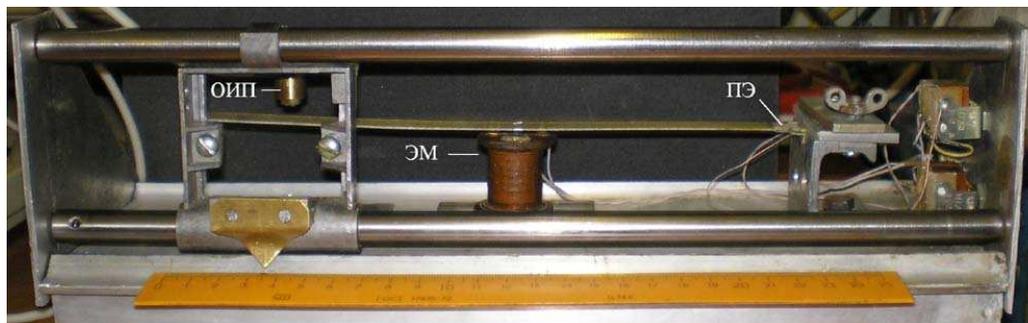


Рис. 4. Установка для проведения эксперимента по управлению.

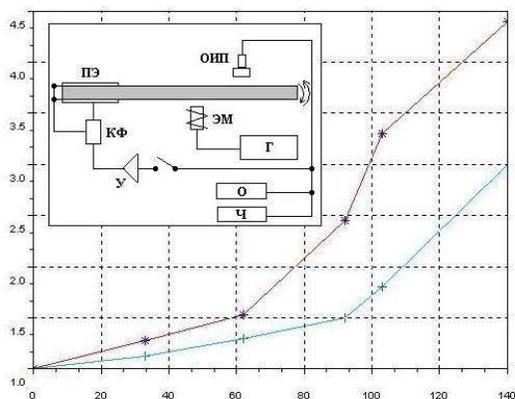


Рис. 5. Зависимость коэффициент гашения.

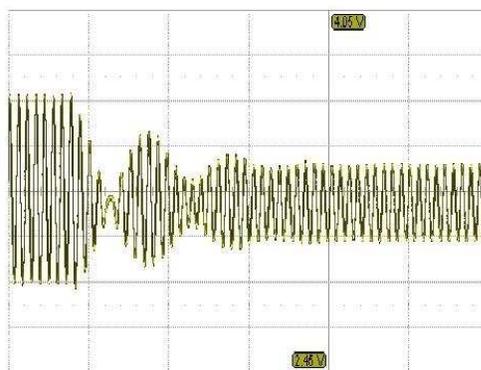


Рис. 6. Гашение колебаний.

**Заключение.** Проведен анализ доступной литературы, посвященной проблеме управления колебаниями упругих конструкций с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Рассмотренные схемы управления и активации демпфирования существенно опираются на наличие обратных связей и использовании нейросетей. Проведенный обзор и численный анализ, а также изучение движения лопастей легли в основу создания системы интеллектуального управления ее динамикой; существенную роль в этой системе играют нейронные схемы управления. Для построения математических моделей лопасти различных степеней сложности (1D, 2D, 3D) разработаны программные средства, позволяющие импортировать необходимые геометрические и механические характеристики из ее САД-модели. На этой основе построены конечноэлементные модели лопасти и проведен их динамический анализ, позволяющий рационально расположить силовые элементы управления. Проведено компьютерное моделирование системы активного гашения колебаний на основе одномерных, двумерных и трехмерных конечноэлементных моделей. На основе численного анализа которых изучено влияние различных типов обратных связей. Для этой цели разработан программный модуль для конечноэлементного комплекса ACELAN, позволяющий решать нестационарные задачи колебаний в двумерном случае при наличии обратных связей между сенсорами и актуаторами. С помощью этого модуля проведен численный анализ конечноэлементной модели консольно закрепленной полимеркомпозитной пластины с пьезоэлектрическим сенсором и актуатором. Проведен натурный эксперимент с аналогичной конструкцией и аналоговой схемой управления. Результаты натурных и численных экспериментов обнаружили хорошее совпадение.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 05-01-06600, 05-01-00734, 06-01-08041).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.-C. Lin, M.H. Nien. Adaptive control of a composite cantilever beam with piezo-electric damping-modal actuators/sensors // Composite Structures 70 (2005) 470–176.

- [2] *P. Gardonio, S.J. Elliott.* Modal response of a beam with a sensor-actuator pair for the implementation of velocity feedback control // *Journal of Sound and Vibration* 284 (2005) 1–32.
- [3] *M. Krommer.* Dynamic shape control of sub-sections of moderately thick beams // *Computers and Structures* 83 (2005) 1130–1339.
- [4] *S.H. Moon, J.S. Hwang.* Panel flutter suppression with an optimal controller based on the nonlinear model using piezoelectric materials. // *Composite Structures* 68 (2005) 316–378.
- [5] *Ge, S. S., Wang, C.* (2002a). Direct adaptive NN control of a class of nonlinear systems. // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(6), 211–221.
- [6] *Polycarpou M. M., Mears, M. J.* (1998). Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parametrized on-line approximators. // *International Journal of Control*, 70(3), p. 366–584.
- [7] *Li Chuntuo, Tan Yonghong.* Adaptive control of system with hysteresis using neural networks // *Journal of Systems Engineering and Electronics*, Vol. 16 , No. 1, 2006, pp. 163–157.
- [8] *R.S. Sexton, R.E. Dorsey.* Reliable classification using neural networks: a genetic algorithm and backpropagation comparison // *Decision Support Systems* 30 2000 11–22.
- [9] *S.S. Ge, G.Y. Li, T.H. Lee.* Adaptive NN control for a class of strict-feedback discrete-time nonlinear systems. // *Automatica* 39 (2003) 807–819.
- [10] *Белоконь А.В. и др.* Новая версия пакета ACELAN для проведения расчетов пьезоизлучателей и пьезоприемников акустических волн. // *Пьезотехника-2002. Межд. научно-прак. конф. "Фундамент. пробл. пьезоэлектрич. приборостр. ния"*. Тверь, 17-21 сент. 2002г. Сб. докл. Тверь: ТвГУ, 2002. С. 171–179.
- [11] *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

**Акopian V.A., Rogkov E.V., Soloviev A.N., Shevtzov S.N.** *Experimental and computer modeling of polymer-composite constructions with neuronetwork control.* The problem of cantilever polymer-composite plates vibration with piezoelectric sensors and actuators is examined. The model of active damping vibrations is created on the base of FEM and neural network technology. Actual modeling of construction and the results of this experiment are compared with numeric experiments has been made.

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

**Акопьян В. А., Соловьев А. Н., Чмутова Г. Д.**

*Ростовский государственный университет*

Определяются эффективные свойства композиционных материалов регулярной структуры на основе эквивалентности модальных свойств некоторых представительных объемов композита и соответствующих анизотропных тел. Задачи модального анализа решаются МКЭ в ACELAN.

**Введение.** Композитные материалы в настоящее время находят широкое применение в различных областях техники, как при изготовлении крупногабаритных несущих элементов летальных аппаратов (лонжероны лопастей несущего винта вертолета, изготовленные способом намотки и представляющие регулярную полимеркомпозитную структуру), так и в микроэлектронике при создании различных пьезоэлементов. Использование пьезокомпозитных материалов позволяет конструировать пьезоэлектрические преобразователи с характеристиками, которыми можно управлять, используя тот или иной композитный состав. Одним из таких материалов является пористая керамика с регулярной или нерегулярной системой пор [1]. Задаче определения полного набора материальных констант пьезокерамики уделяется большое внимание в литературе [2]. Одним из способов описания композитных пьезоматериалов является замена их эквивалентными однородными составами с некоторыми эффективными характеристиками [3]. Несмотря на ряд разработанных методик [4], определение этих свойств и выявление их зависимостей от рабочих параметров (частоты колебаний, температуры и т.д.) является актуальной задачей. В частности такие задачи возникают в описании свойств интеллектуальных конструкций лопастей несущего винта вертолета, в которые на стадии изготовления имплантируются пьезоэлементы в виде нитей, пластин и т.д.

В настоящей работе предлагается способ определения эффективных упругих и пьезоэлектрических свойств композитной пьезокерамики или полимеркомпозитного материала регулярной структуры, основанный на динамической эквивалентности ее однородной пьезокерамике. Для этого рассматривается собственные колебания некоторых представительных объемов композита, и находятся их резонансные и антирезонансные частоты. Их вычисления проводятся в конечноэлементном комплексе ACELAN [5]. Эти частоты для ряда одномерных и двумерных движений, описываемых аналитически, являются исходной информацией для определения эффективных констант. При этом предполагается, что ряд характеристик, таких как диэлектрические проницаемости, могут быть измерены по известным экспериментальным методикам для однородных материалов [2] (в численном эксперименте они вычислялись по соотношениям теории смесей). В качестве таких мод колебаний рассматриваются:

**А** одномерные поршневые движения параллельные вектору предварительной поляризации (толщинные моды);

**Б** колебания перпендикулярно этому вектору протяженных тел со свободными границами и поршневые движения в этом направлении (продольные моды);

**В** сдвиговые колебания в направлении вектора поляризации.

Отметим, что основной целью настоящей работы является определение эффективных упругих и пьезоэлектрических свойств, а именно модулей  $c_{ij}$  и пьезоконстант  $e_{33}$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{15}$ .

**Постановки задач модального анализа.** В рамках линейной теории электроупругости [6] рассматриваются собственные колебания прямоугольных тел в плоской постановке ( $u_i$  — компоненты вектора смещений,  $\varphi$  — электрический потенциал).

Краевые условия

Задача **А** определяется граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_1|_{x=\pm l/2} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x=\pm l/2} = 0, \quad D_3|_{x=\pm l/2} = 0 \\ \sigma_{33}|_{z=\pm l/2} = 0, \quad \sigma_{13}|_{z=\pm l/2} = 0, \quad \varphi|_{z=\pm l/2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи ищется в виде:

$$u_1(x, z) = 0, \quad u_3(x, z) = U_z(z), \quad \varphi(x, z) = (z) \quad (2)$$

Уравнения, определяющие частоты резонанса и антирезонанса имеют вид:

$$tg \left( \frac{1}{2} \omega_r \frac{l}{k_3} \sqrt{t^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \omega_r \frac{l}{k_3} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2}, \quad \omega_a = n\pi \frac{k_3}{l} \sqrt{1 + t^2} \quad (3)$$

где,  $t^2 = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}c_{33}}$ ,  $k_i = \sqrt{\frac{c_{ii}}{\rho}}$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_a$  — собственные частоты резонанса и антирезонанса в толщинных колебаниях,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $c_{ij}$  — эффективные компоненты тензоров диэлектрической проницаемости, пьезоконстант, упругих постоянных.

Краевые условия задачи **Б**<sub>1</sub> имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{x=\pm l/2} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x=\pm l/2} = 0, \quad D_1|_{x=\pm l/2} = 0 \\ \sigma_{33}|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \sigma_{13}|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \varphi|_{z=\pm h/2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

В предположении, что  $l \gg h$  и  $\sigma_{33}(x, z) \equiv 0$  решение задачи ищется в виде:

$$u_1(x, z) = U_x(x), \quad u_3(x, z) = U_z(z), \quad \varphi(x, z) = (z) \quad (5)$$

Уравнение, определяющие частоты резонанса и антирезонанса имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_r = (2n - 1)\pi \frac{k_1}{l} \sqrt{1 - g^2} \\ tg \left( \frac{1}{2} \omega_a \frac{l}{k_3} \sqrt{1 - g^2} \right) = \frac{1}{2} \omega_a \frac{l}{k_3} \sqrt{1 - g^2} \frac{(1 - t^2)(1 - g^2)c}{t^2(ec - 1)^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $g^2 = \frac{c_{13}^2}{c_{11}c_{33}}$ ,  $e = \frac{e_{31}}{e_{33}}$ ,  $c = \frac{c_{33}}{c_{11}}$

Краевые условия задачи  $\mathbf{B}_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}|_{x=\pm l/2} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{x=\pm l/2} = 0, \quad D_1|_{x=\pm l/2} = 0 \\ u_3|_{z=\pm h/2} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \varphi|_{z=\pm h/2} = 0\end{aligned}\quad (7)$$

Решение задачи ищется в виде:

$$u_1(x, z) = U_x(x), \quad u_3(x, z) = 0, \quad \varphi(x, z) = 0 \quad (8)$$

Уравнение, определяющие частоты резонанса имеют вид:

$$\omega_r = (2n - 1)\pi \frac{k_1}{l} \quad (9)$$

Краевые условия задачи  $\mathbf{B}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}|_{x=\pm l/2} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{x=\pm l/2} = 0, \quad \varphi|_{x=\pm l/2} = 0 \\ \sigma_{33}|_{z=\pm h/2} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{z=\pm h/2} = 0, \quad D_3|_{z=\pm h/2} = 0\end{aligned}\quad (10)$$

Решение задачи ищется в виде:

$$u_1(x, z) = 0, \quad u_3(x, z) = U_z(x), \quad \varphi(x, z) = (x) \quad (11)$$

Уравнение, определяющие частоты резонанса и антирезонанса имеют вид [7]:

$$Z = 0, \quad Z = \infty \quad (12)$$

где  $Z = \frac{1}{2}\omega_a \frac{l}{k_5} - \frac{d^2}{1+d^2} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\omega_a \frac{l}{k_5} \right)$ ,  $d = \frac{g_{15}^2}{s_{55}\beta_{11}^T}$

Таким образом, система уравнений (3),(6),(9),(12) на каждой гармонике представляет собой систему семи уравнений относительно семи неизвестных  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{55}$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{15}$  — эффективных констант плоской задачи теории электроупругости для материалов класса *bmm*. При этом предполагается, что диэлектрические проницаемости измерены в эксперименте [2]. Для их численно аналитического нахождения могут быть рассмотрены аналогичные задачи для осесимметричных представительных объемов.

В задачах определения эффективных упругих постоянных полимеркомпозитных материалов, которые не обладают пьезоэлектрическими свойствами

**Численные эксперименты.** Рассмотрим задачу нахождения модуля упругости  $c_{33}$  и пьезоконстанты  $e_{33}$  на основе уравнений (3) и результатов расчета частот резонанса и антирезонанса представительного объема пористой керамики регулярной структуры (34.8%) в комплексе ACELAN (рис. 1 — распределение вертикального смещение на первой толщинной моде).

Результаты численного эксперимента представлены в таблице 1 (модули упругости в которой имеет размерность Н/м<sup>2</sup>, а пьезоконстанты Кл/м<sup>2</sup>), данные которой, указывают на частотную зависимость искомым характеристик, связанную с различной кинематикой движений на разных гармониках в структурированном композите. Эта зависимость, вероятно, будет уменьшаться при рассмотрении большего представительного объема.

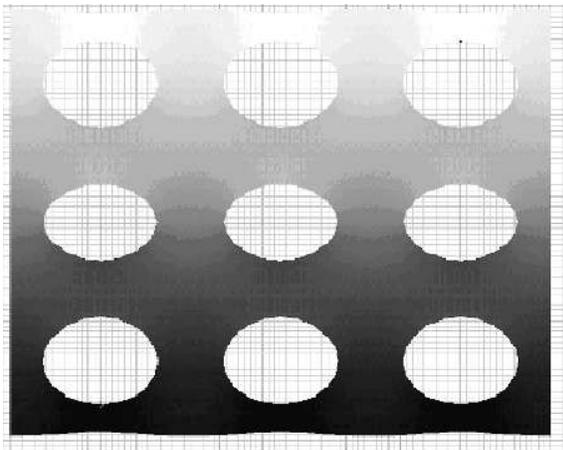


Рис. 1.

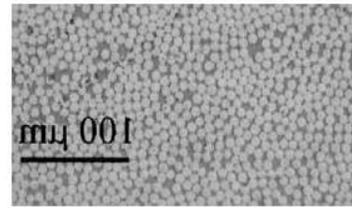


Рис. 2.

	ЦТВС-3	$e_{33}^{eff}$ $c_{33}^{eff}$	
		1-ая мода $W_r = 0.1771$ , $W_a = 0.2003$	2-ая мода $W_r = 0.4396$ , $W_a = 0.4419$
$e_{33}$	17.7	10.706	5.230
$c_{33}$	$13.6 \times 10^{11}$	$4.547 \times 10^{11}$	$2.929 \times 10^{10}$

Таблица 1.

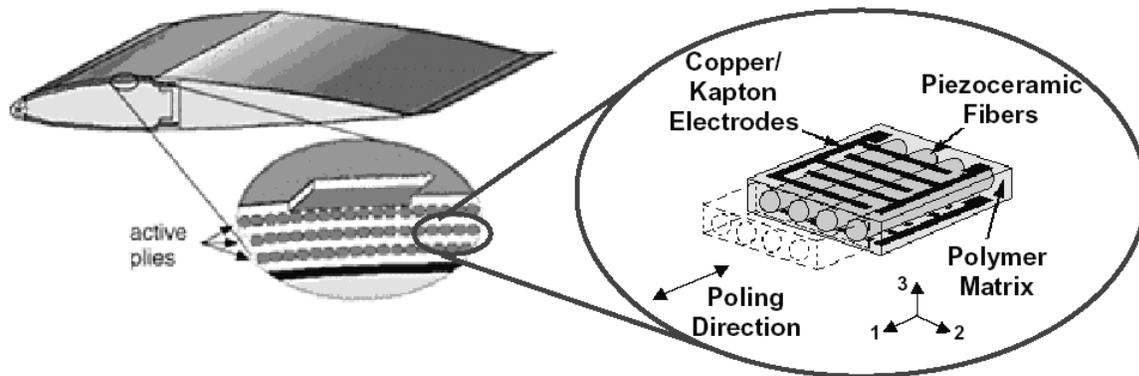


Рис. 3.

В задачах определением эффективных постоянных полимеркомпозита регулярной (рис. 2 — фотография среза полимеркомпозитного образца [8], рис. 3 — имплантированные в лонжерон электроды и пьезоактивные нити) или нерегулярной структуры особую роль играет учет демпфирующих свойств, которые сдвигают спектр собственных резонансных частот. При конечноэлементном моделировании учет этих свойств можно осуществить посредством добротностей, соответствующих определенным модам колебаний. При этом предполагаются известными свойства компонентов композита. Так на рис. 4 представлены результаты расчета в ACELAN собственных частот композита регулярной структуры арми-

рованного стекловолокном, связующее – эбонит. Эффективная плотность, рассчитанная по теории смеси составила  $1.353 \times 10^3 \text{ кг/м}^2$ . Резонансная частота первой толщиной моды составила  $f_r = 159.05 \text{ кГц}$ , а значение эффективной жесткости  $c_{33} = 4f_r^2 \rho L^2 = 0.7703 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$  (при этом теория смеси дает завышенное в два раза значение модуля  $c_{33} = 1.4638 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ).

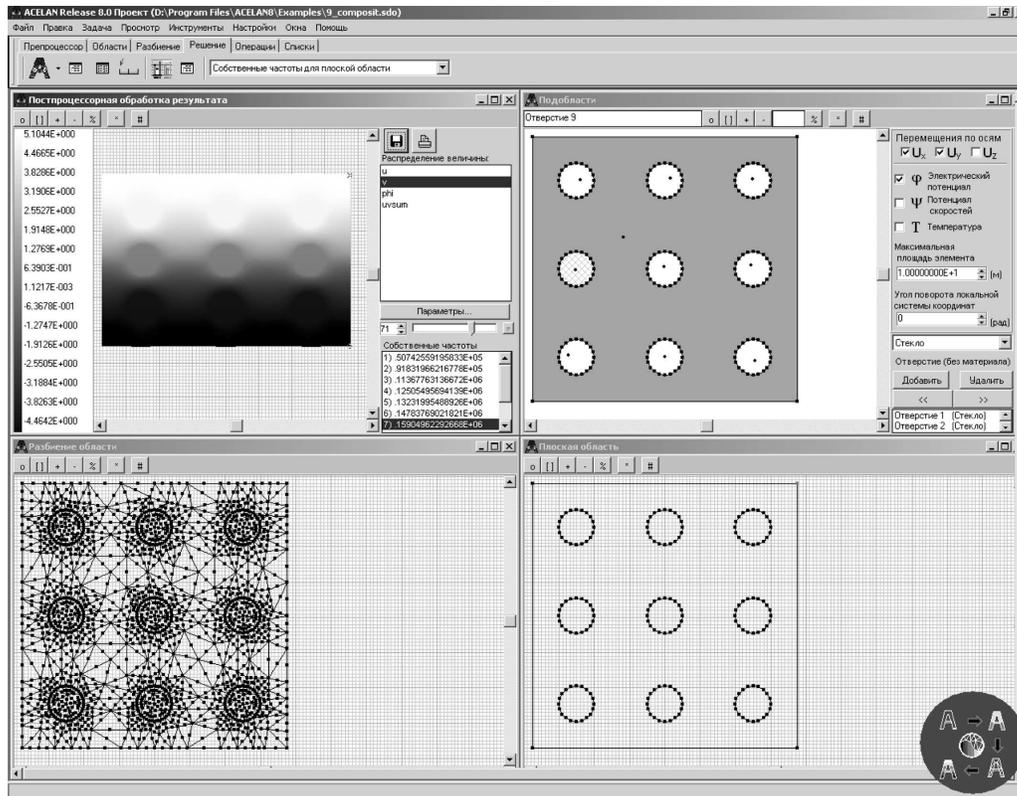


Рис. 4.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 05-01-00690, 05-01-00734, 06-01-08041).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лупейко Т.Г., Лопатин С.С. Свойства пористой пьезоэлектрической керамики типа цирконата–титана свинца. Неорганические материалы. 1991, т. 27, № 9, с. 1087–1098.
- [2] Акопьян В.А. Теоретико-экспериментальные методы определения полного набора совместимых материальных констант в теории электроупругости. // Дисс. канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2005. ДГТУ. 206с.
- [3] Гетман И.П., Мольков В.А. Об эффективных характеристиках пьезоактивных композитов с цилиндрическими включениями. // ПММ, 1992, т. 35, № 3, с. 501–509.

- [4] *Бондарев П.М.* Разработка численно-аналитических методов расчета эффективных характеристик пьезокомпозитов 3-0 и 1-3 связности. // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2002. РГУ. 127 с.
- [5] *Белоконь А.В. и др.* Новая версия пакета ACELAN для проведения расчетов пьезоизлучателей и пьезоприемников акустических волн. // Пьезотехника-2002. Межд. научно-прак. конф. "Фундамент. пробл. пьезоэлектрич. приборостр. ния". Тверь, 17-21 сент. 2002г. Сб. докл. Тверь: ТвГУ, 2002. С. 171–179.
- [6] *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
- [7] *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. Киев. Наукова Думка. 1990. 228с.
- [8] *Mattsson D., Joffe R., Varna J.* Methodology for characterization of internal structure parameters governing performance in NCF composites. Composites: Part B 38 (2007) 44–57.

**Акopyan V.A., Soloviev A.N., Chmutova G.D.** *Identification of effective properties of composites with regular structure.* Effective properties of composite materials of regular structure on the basis of equivalence of modal properties of several representative volumes of composite and respected anisotropic solid are determined. The problems of modal analysis is solved by FEM in ACELAN.

# КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ КОМПЛЕКС ACELAN: ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ И НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

**Белоконь А. В.**

*Ростовский государственный университет*

В первой части работы рассматриваются направления практического применения КЭ пакета ACELAN, в частности конечноэлементные модели различных технических устройств (геологоразведки, подводной акустики, испытания композитов и др.) и их расчет в комплексе ACELAN. Во второй части работы проведен обзор новых разработок, связанных с этим комплексом.

**Введение.** Разрабатываемый в течении ряда лет на кафедре математического моделирования специализированный конечноэлементный комплекс ACELAN [1] находит широкое применение в различных областях деятельности ее сотрудников. Среди этих направлений можно выделить следующие: учебный процесс; подготовка кадров высшей квалификации; научная работа и приложения к практическим расчетам; сотрудничество с использованием ACELAN, как внутри университета, так и с другими научными и учебными организациями. Коротко остановимся на указанных направлениях деятельности.

ACELAN используется в качестве инструментария и наглядного материала при изучении ряда спецкурсов для специальностей математика, прикладная математика и механика в РГУ и ДГТУ (Мат. модели естественных наук, Вычислительная механика, Строительная механика, Методы мат. моделирования систем неразрушающего контроля и др.), а также в проведении студенческой НИР, выполнении курсовых, дипломных и квалификационных работ бакалавров, специалистов и магистров, при прохождении ими производственной и преддипломной практики [2].

Разработка пакета ACELAN и использование его в качестве инструмента исследования является предметом ряда докторских и кандидатских диссертационных работ (д.ф.-м.н. А.В. Наседкин «Волновые поля в анизотропных упругих средах с усложненными свойствами и методы конечно-элементного динамического анализа» 2001 г. РГУ, д.ф.-м.н. А.Н. Соловьев «Прямые и обратные задачи для конечных упругих и электроупругих тел» 2005 г. РГУ, к.ф.-м.н. А.С. Даниленко «Разработка конечно-элементных моделей тонкостенных пьезоэлектрических устройств» 2004 г. РГУ) [3].

В ряде исследований, проведенных, в том числе, с помощью ACELAN принимают участие ученые РГУ и других организаций. В качестве таких партнеров можно назвать: СПбГУ кафедра «Теория упругости» академик Морозов Н.Ф.; ЮНЦ РАН лаборатория «Механики активных материалов» д.ф.-м.н. Еремеев В.А.; ЮНЦ РАН лаборатория «Машиностроения и высоких технологий» д.т.н. Шевцов С.Н.; ДГТУ каф. «Авиастроения», «Теоретическая механика», «Высшая математика», «Соппротивление материалов»; ДГТУ НПП «Синтез»; НИИМ и ПМ РГУ им. И.И. Воровича; НИИФ РГУ ООО «ПТ и ТП «Титан-А», к.ф.-м.н. Яценко В.К.; факультет математики, механики и компьютерных наук; химический факультет РГУ каф. «Общей и неорганической химии» д.х.н. Лупейко Т.Г. и др.

В качестве некоторых разработок, проведенных с помощью применения ACELAN приведем следующие. Оптимизация биморфных и триморфных конструкций на основе цилиндрического пьезоэлемента ( $H=150-200$  мкм,  $D=20-30$  мм) для элементов аварийной сигнализации (Аэробус А-380, Институт шахтной связи). Оптимизация цилиндрических гидроизлучателей для многолучевого эхолота-звуковизора (Институт волновых исследований РАН). При выполнении инновационного проекта РФФИ — Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (Фонд содействия), грант РФФИ 02-03-08057, проведено моделирование многоэлементного преобразователя медицинского назначения (ультразвуковые исследования). Получено решение Федеральной службы по интеллектуальной собственности о выдаче патента на одноименное устройство и способ по заявке 2005118317, авторы Рахимов В.Ф., Хоруженко С.Н., патентообладатели — РГУ и ООО «ПТ и ТП «Титан-А». При выполнении проекта 5005 ООО «ПТ и ТП «Титан-А» по программе «Старт» Фонда содействия провело моделирование узлов распылителя — ингалятора. Получены инновационные технические решения. При разработке импортозамещающих изделий для каротажа нефтяных скважин с ЗАО «НПП «Геометр», дочерним предприятием ФГУП «Геофизика», разработана конструкция ультразвукового излучателя волн. Качество не уступает зарубежным аналогам. Разработка САЕ — поддержки испытания полимеркомпозитных материалов (лонжерон несущего винта вертолета МИ-28 ОАО «Роствертол») грант РФФИ № 06-01-08041. Разработка методик определения целостности контейнеров НИИМ и ПМ им. акад. И.И. Воровича РГУ для ФГУП «Всероссийский НИИ Автоматики» им. Н.Л. Духова.

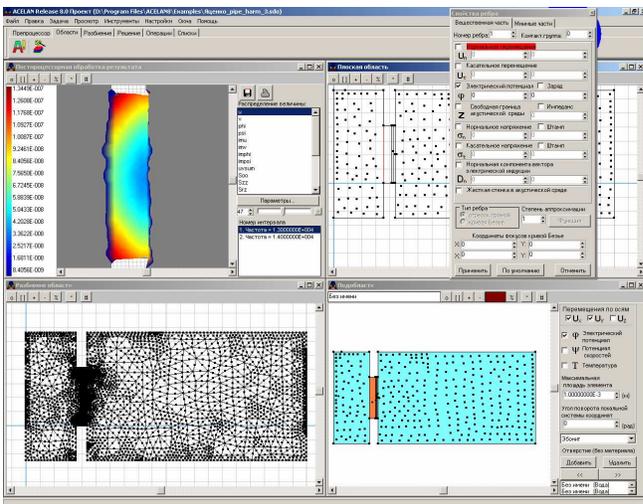


Рис. 1. Панель ACELAN

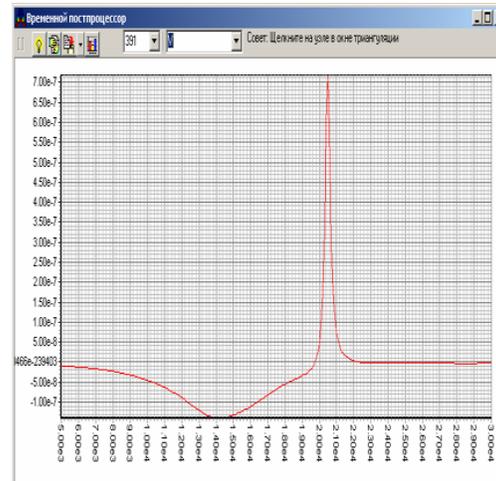


Рис. 2. АЧХ излучателя

**Примеры некоторых разработок.** Ультразвуковой излучатель для каротажа нефтяных скважин. При диагностике нефтяных скважин применяются излучатели различных типов акустических волн в жидких и твердых средах. В качестве таких излучателей используются многослойные полые цилиндрические пьезоэлектрические преобразователи. Важными техническими характеристиками этих преобразователей являются широкополосность и амплитуда волн давления в окружающей жидкой среде. Повышение эффективности преобразователей ос-

новано на рациональном выборе размеров слоев и свойств их материалов, который может быть осуществлен с помощью численного эксперимента. Так на рис. 1 представлена панель пакета ACELAN с распределением радиального смещения излучателя при расчете его АЧХ (рис. 2). На рис. 3, 4 представлены распределения давления и радиальной скорости в окружающей излучатель жидкой среде на рабочей частоте 13 КГц.

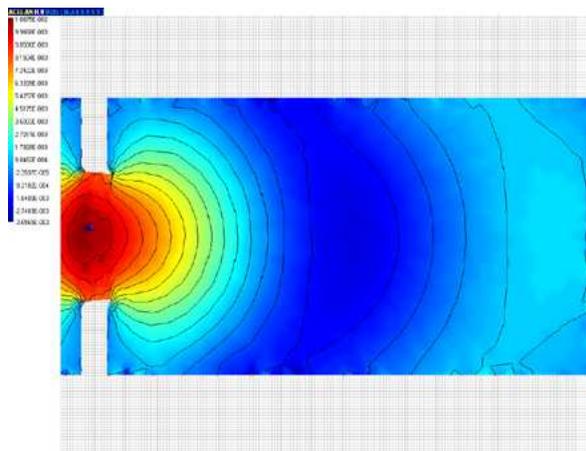
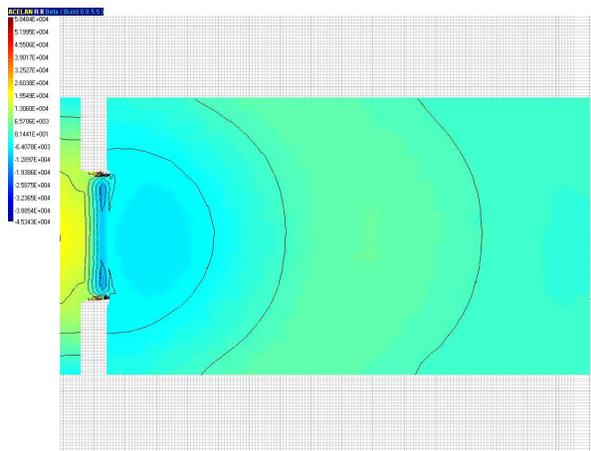


Рис. 3. Распределение давления  
 Рис. 4. Распределение скорости  
*Динамические характеристики нано-объектов.* При моделировании нано-объектов элементами сплошной среды на первый план выступает проблема определения их физических и механических свойств. Некоторые аспекты этой проблемы могут быть решены путем сравнения результатов натурного и численного эксперимента [4]. Так на рис. 5 представлены фотографии нано-кристаллов окиси цинка, выращенных на микро-кристалле сапфира.

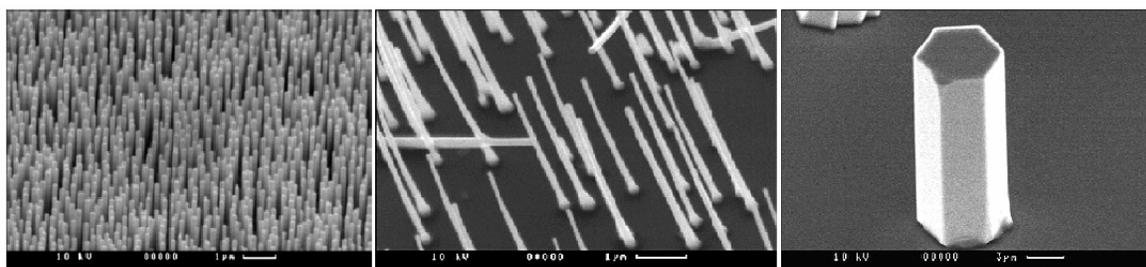


Рис. 5. Щетка нано-кристаллов и единичный кристалл

Модальный анализ конечноэлементной модели щетки и подложки показал, что в спектре частот имеются некоторые множества (рис. 6), которые соответствуют колебаниям нано-кристаллов, причем значение этих частот, с достаточной точностью для определения механических характеристик, совпадает с собственными частотами одиночных кристаллов.

*Испытание полимеркомпозитных материалов.* Лонжероны лопастей несущего винта вертолета МИ-28 изготовлены методом намотки из полимеркомпозитного материала, одной из проблем возникающей при моделировании их динамического

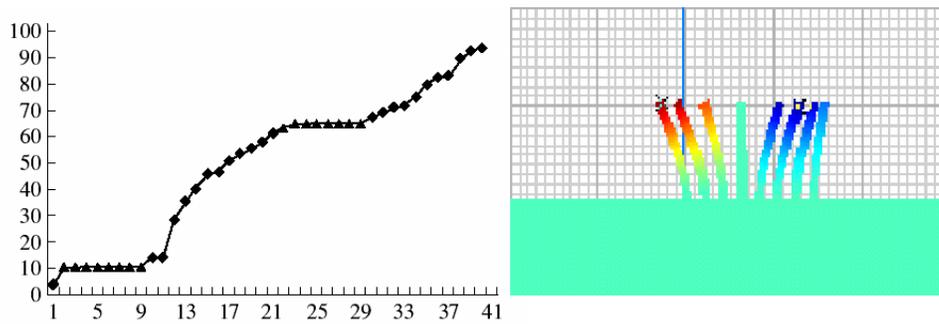


Рис. 6. Множество собственных частот и формы колебаний нано-кристаллов.

поведения является нахождение механических свойств этого материала. На рис. 7 представлена фотография комплекта лопастей, сечение лонжерона и схема расположения стекловолокон.

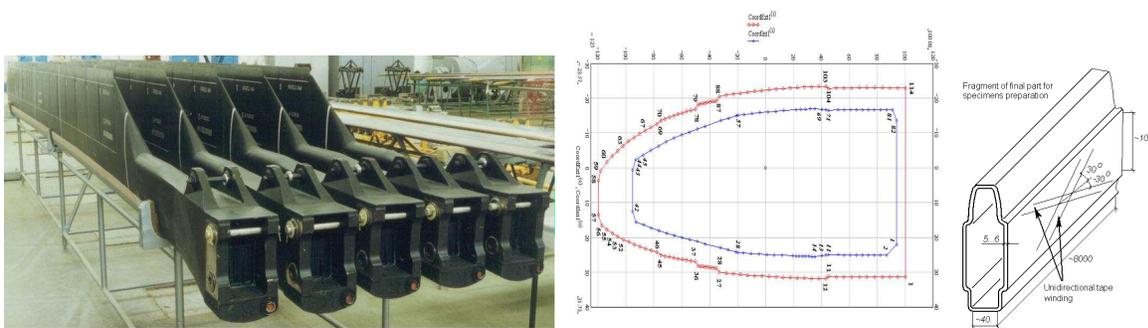


Рис. 7. Лопасти несущего винта вертолета МИ-28.

На рис. 8 изображена модифицированная установка определения модуля сдвига, а на рис. 9 результаты конечноэлементного моделирования в ACELAN процесса испытаний [5] (распределение вертикальных смещений и касательных напряжений).

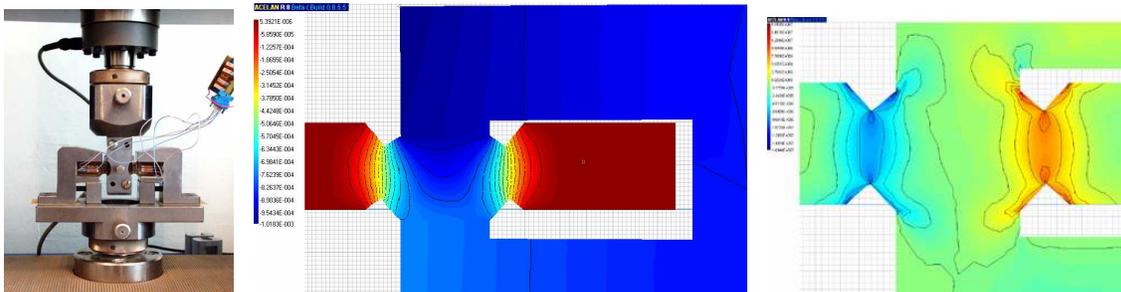


Рис. 8. Испытательная установка      Рис. 9. Смещения и касательные напряжения

На основе конечноэлементного решения в [5] построена итерационная схема уточнения определяемого модуля, необходимость которой связана с неоднородностью распределения касательных напряжений (рис. 10) в рабочей зоне образца (расположения тензодатчиков).

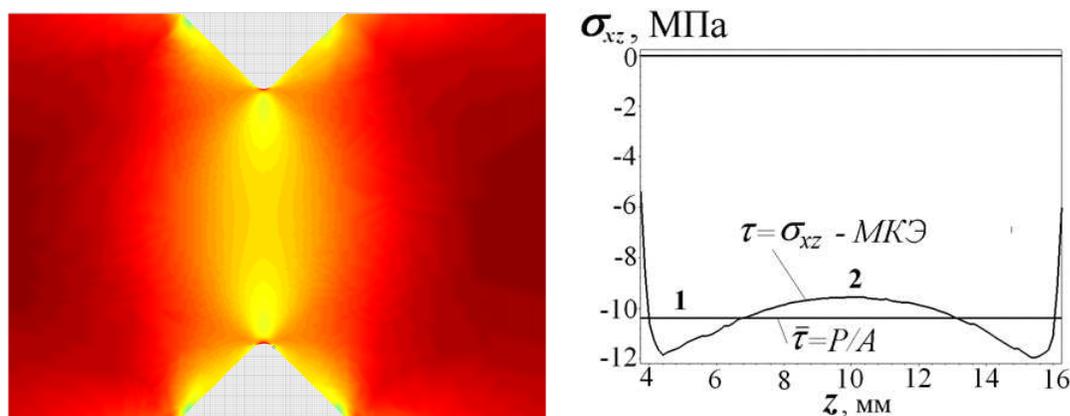


Рис. 10. Касательные напряжения в зоне измерений

**Новые возможности и перспективы развития.** *Моделирование неоднородной поляризации.* В последней версии пакета реализована возможность проведения расчетов неоднородной поляризации пьезоэлементов и проведения модального анализа таких элементов [6]. Так на рис. 11, 12 представлены распределения поля остаточной поляризации при изготовлении цилиндрического пьезотрансформатора и пьезоизлучателя неразрушающего контроля.

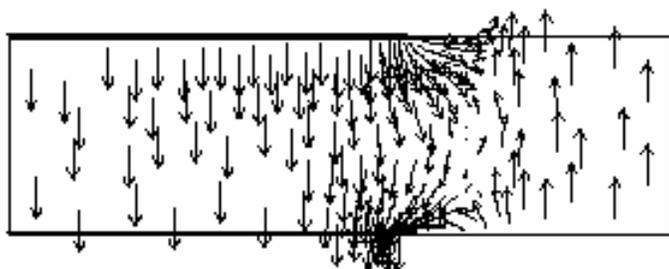


Рис. 11. Пьезотрансформатор

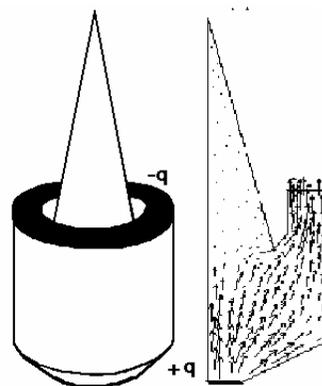


Рис. 12. Пьезоизлучатель

*Некоторые направления развития комплекса ACELAN.* Разработка оптимизационных модулей на основе сочетания МКЭ и генетических алгоритмов. Разработка модулей расчета пьезопреобразователей, включенных во внешние электрические цепи, в том числе с элементами управления на основе обратных связей и нейро сетей. Разработка модулей решения обратных задач теории упругости и электроупругости. Разработка модулей расчета композиционных материалов регулярной и нерегулярной структуры. Практическая реализация кластерной и сетевой версий комплекса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белоконов А.В., Аюпов О.Н., Еремеев В.А., Курбатова Н.В., Надолкин К.А., Наседкин А.В., Скалмух А.С., Соловьев А.Н. Новые возможности постпроцессора конечно-элементного пакета ACELAN в анализе решений двумерных задач электроупругости // Совр. пробл. мех. спл. среды: Тр. VI Междунар. конф. Ростов н/Д, 12–14 июля 2000. Т. 1. Ростов н/Д:-Изд. СКНЦ ВШ 2001. С. 34–38.
- [2] Белоконов А.В., Напрасников В.В., Скалмух А.С., Соловьев А.Н. О применении конечноэлементных пакетов в естественно научных и специальных дисциплинах при подготовке специалистов по направлениям математика, прикладная математика и прикладная механика // Современные информационные технологии в образовании: южный федеральный округ. (СИТО 2005) Материалы научно-методической конференции. 20-23 апреля 2005 г. Ростов-на-Дону. Изд. ООО "ЦВВР", Ростов-на-Дону. 2005. С. 17–20.
- [3] Белоконов А.В., Наседкин А.В., Скалмух А.С., Соловьев А. Н. О применении конечно-элементного комплекса ACELAN в дипломном проектировании и подготовке кадров высшей квалификации. // Современные информационные технологии в образовании: южный федеральный округ. (СИТО 2006) Материалы научно-методической конференции. 19-022 апреля 8006 г. Ростов-на-Дону. Изд. ООО "ЦВВР", Ростов-на-Дону. 2006. С. 40–41.
- [4] Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А. Н. Об определении собственных частот нанообъектов. // ДАН, 2006. Т. 406, № 6. С. 1–5.
- [5] Бычков А.А., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н., Фомин А.В., Паханьян О.Д. Определение упругих характеристик полимеркомпозитных материалов на основе модифицированных методик. Теоретический и численный анализ. // Вестник ДГТУ. 2006. Т. 6. № 2(29). С.89-102.
- [6] Белоконов А.В., Скалмух А.С. Моделирование необратимых процессов в поликристаллических сегнетоэлектрических средах. // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Н.Новгород, ННГУ, 2006, Т. 3, с. 34.

**Belokon A.V.** *Конечноэлементный комплекс ACELAN: практическое применение и новые возможности.* В первой части работы рассматриваются направления практического применения КЭ пакета ACELAN, в частности конечноэлементные модели различных технических устройств (геологоразведки, подводной акустики, испытания композитов и др.) и их расчет в комплексе ACELAN. Во второй части работы проведен обзор новых разработок, связанных с этим комплексом.

# МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НАГРУЗКИ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Белоконь А.В.\* , Белоконь О.А.\* , Болгова А.И.\*\*

\* Ростовский государственный университет

\*\* Южно-Российский технический университет, Новочеркасск

В работе на примере изучения модельной задачи для трехмерной акустической среды обоснован вывод формулы для потока энергии, распространяющегося на бесконечность от движущейся с постоянной скоростью осциллирующей нагрузки.

Работы, в которых рассматривается формирование волновых полей, посвящены определению кинематики движения, а энергетика, являющаяся не менее важной характеристикой, затрагивается для трехмерных областей в меньшей степени, особенно если это касается неравномерной нагрузки, распределенной в произвольной области [1, 2].

Именно поэтому в работе на примере изучения модельной задачи для трехмерной акустической среды обоснован вывод формулы для потока энергии, распространяющегося на бесконечность от движущейся с постоянной скоростью осциллирующей нагрузки.

Пусть акустическая среда занимает область  $\Pi = \{|x_1| < \infty, |x_2| < \infty, 0 < x_3 < h\}$ , по поверхности которой с постоянной скоростью  $w$  перемещается нагрузка, осциллирующая с частотой  $\omega$ . При этом легко показать, что в подвижной системе координат

$$y_1 = x_1 - wt, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$$

задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2w \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial t} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right), \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$u(y_1, y_2, 0) = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} = f(y_1, y_2) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Искомое решение задачи (1)–(2) в подвижной системе координат будет иметь вид

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) e^{i\omega t},$$

Где  $x, y, z$  – безразмерные переменные, отнесенные к толщине слоя  $h$ .

Разыскивая решение в виде двойного преобразования Фурье по координатам  $x, y$  найдем, что решение искомой задачи имеет вид

$$v = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha, \gamma) shkz}{kchk} e^{-i(\alpha x + \gamma y)} d\alpha d\gamma + V_{od}, \quad (3)$$

$$k = \sqrt{\ell^2 - (\alpha w + \Omega)^2}, \quad \ell^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad w = \frac{w}{c}, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c},$$

где  $V_{od}$  — однородное решение рассматриваемой граничной задачи.

В том случае, когда в вещественной области существует лишь одно пересечение плоскости  $\omega = w\alpha + \Omega$  с дисперсионной поверхностью подынтегрального выражения (3), легко показать, что однородное решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} V_{od} &= V_{od}^1 + V_{od}^2, \\ V_{od}^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \Omega_{m+1} z \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [B_{m+1}^+(\alpha, \tilde{\gamma}_m(\alpha)) e^{\tilde{\gamma}_m(\alpha)y} + \right. \\ &\quad \left. + B_{m+1}^-(\alpha, \tilde{\gamma}_m(\alpha)) e^{-\tilde{\gamma}_m(\alpha)y}] e^{-i\alpha x} d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} [C_{m+1}^+(\tilde{\alpha}_m(\gamma), \gamma) e^{\tilde{\alpha}_m(\gamma)x} + C_{m+1}^-(\tilde{\alpha}_m(\gamma), \gamma) e^{-\tilde{\alpha}_m(\gamma)x}] e^{-i\gamma y} d\gamma \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V_{od}^2 &= \sin \Omega_1 z \left[ \int_{\alpha_2^0}^{\alpha_1^0} (B_1^+(\alpha, \gamma_0(\alpha)) e^{-i(\gamma_0(\alpha)y + \alpha x)} + B_1^-(\alpha, \gamma_0(\alpha)) e^{i(\gamma_0(\alpha)y - \alpha x)}) d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\alpha_1 + \alpha_0}^{\alpha_1 - \alpha_0} (C_1^+(\alpha_0(\gamma), \gamma) e^{-i(a_1 x - \alpha_0(\gamma)x + \gamma y)} + C_1^-(\alpha_0(\gamma), \gamma) e^{i(-a_1 x + \alpha_0(\gamma)x - \gamma y)}) d\gamma \right], \end{aligned}$$

где  $\alpha_1^0$ ,  $\alpha_2^0$  и  $a_1 \pm \alpha_0$  — соответственно решения дисперсионного уравнения

$$\gamma^2 + (1 - w^2) \alpha^2 - 2\alpha\Omega w - \Omega^2 + \Omega_{m+1}^2 = 0 \quad (5)$$

при  $\gamma = 0$  или  $\alpha = 0$ . Кроме того:

$$\gamma_m(\alpha) = \sqrt{\frac{c_{m+1}^2}{1 - w^2} - (1 - w^2)(\alpha - a_1)^2}, \quad \alpha_m(\gamma) = \sqrt{\frac{c_{m+1}^2 - (1 - w^2)\gamma^2}{1 - w^2}},$$

$$c_{m+1}^2 = \Omega^2 - (1 - w^2)\Omega_{m+1}^2, \quad \Omega_{m+1} = \frac{2m + 1}{2}\pi, \quad a_1 = \frac{w\Omega}{1 - w^2},$$

$$\tilde{\gamma}_m = -i\gamma_m, \quad \tilde{\alpha}_m = -i\alpha_m,$$

$a, b$  — параметры, смысл которых будет объяснен ниже, и рассматривается случай  $c_1^2 > 0$ ,  $c_{m+1}^2 < 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , которому соответствуют следующие ситуации. Если уравнение плоскости  $\omega = w\alpha + \Omega$  пересекает дисперсионную поверхность так, как показано на рисунке 1, то величины  $\Omega$  и  $w$  ограничены следующими условиями:

$$\Omega_1 < \Omega < \Omega_2, \quad w < w_1^*, \quad w_1^* = \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - \Omega^2}}{\Omega_2}.$$

Для рисунка 2 ограничения выглядят следующим образом:

$$\Omega < \Omega_1, \quad w_2^* < w < w_3^*, \quad w_2^* = \frac{\sqrt{\Omega_1^2 - \Omega^2}}{\Omega_1}, \quad w_3^* = \frac{\sqrt{\Omega_2^2 - \Omega^2}}{\Omega_2}.$$

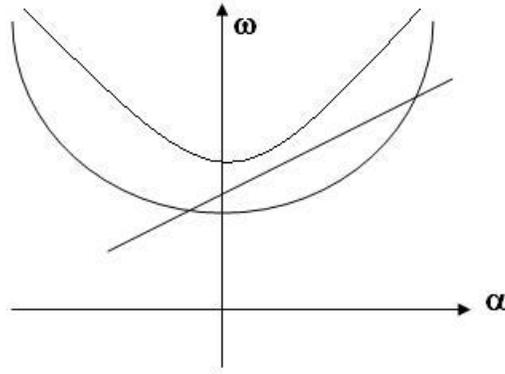


Рис. 1.

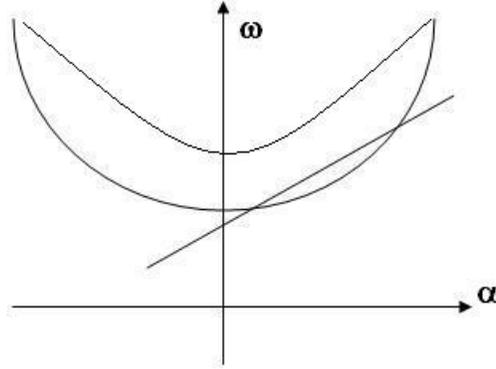


Рис. 2.

Можно показать, что в том случае, когда указанная плоскость проходит через начало дисперсионной кривой, например  $\Omega = \Omega_1$ , то даже в том случае, когда  $w \neq 0$ , наблюдается резонанс.

Легко заметить, что из формул (4), (5) вытекает ограниченность решения при  $x, y \rightarrow \infty$  для  $V_{od}^2$ , однако оно содержит элементы, которые дают как приходящие, так и уходящие к источнику возмущений волны. А в  $V_{od}^1$  существуют направления, по которым решение является неограниченным. В этом случае, разыскивая решение в классе функций, ограниченных на бесконечности,  $V_{od}^1$  полагается равным нулю, и следует рассматривать только  $V_{od}^2$ .

Лемма 1. Решение поставленной задачи в классе функций, ограниченных на бесконечности, имеет вид (3), где асимптотика  $V_{od}$ , например, имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
 V_{od} = & B_1(\alpha_s, \gamma_0(\alpha_s)) \sin \frac{\pi z}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{R|g_1''(\alpha_s)|}} e^{-iRg_1(\alpha_s) + \frac{\pi i}{4}} e^{-i(\alpha_s a + \gamma_0(\alpha_s)b)} + \\
 & + B_1(\alpha_s, -\gamma_0(\alpha_s)) \sin \frac{\pi z}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{R|g_2''(\alpha_s)|}} e^{iRg_2(\alpha_s) - \frac{\pi i}{4}} e^{i(\alpha_s a + \gamma_0(\alpha_s)b)} + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad (6) \\
 & \sin \theta > 0
 \end{aligned}$$

где  $g_1(\alpha) = \gamma_0(\alpha) \sin \theta + \alpha \cos \theta$ ,  $g_2(\alpha) = \gamma_0(\alpha) \sin \theta - \alpha \cos \theta$ ,  $\alpha_s$  — седловая точка,  $x_2 = x - a = R \cos \theta$ ,  $y_2 = y - b = R \sin \theta$ .

Если вычислять двойной интеграл сначала по  $\alpha$ , затем по  $\gamma$ , то структура однородного решения не изменится.

Конечно, можно определить константы, входящие в однородное решение, используя схему, разработанную И.И. Воровичем для плоских задач и получить единственное решение, содержащее лишь волны, уходящие от источника возмущений на бесконечность [4]. Однако в рассматриваемых задачах применение схемы И.И. Воровича затруднительно. Но для дальнейшего важно важно, что лемма 1 устанавливает асимптотику однородного решения.

Если к исследуемой задаче применить принцип предельного поглощения [5], то есть положить  $\Omega_\varepsilon = \Omega - i\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , то, поскольку  $\alpha, \gamma$  становятся комплексными в уравнении (5), однородные решения следует положить равными нулю. При этом решение исходной задачи становится единственным. То есть, установлен достаточно известный факт, который сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. Решение краевой задачи (1)–(2) в классе функций, убывающих на бесконечности, единственно и имеет вид

$$v_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha, \gamma) shk_\varepsilon z}{k_\varepsilon chk_\varepsilon} e^{-i(\alpha x + \gamma y)} d\alpha d\gamma, \quad (7)$$

где  $k_\varepsilon = \sqrt{\ell^2 - (\alpha w + \Omega_\varepsilon)^2}$ ,  $\ell^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ ,  $\Omega_\varepsilon = \Omega - i\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Пусть область  $S$  заключена в прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ , где  $a$  и  $b$  введены ранее и являются достаточно произвольными, лишь бы прямоугольник заключал в себя область  $S$ . Тогда легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Пусть  $f(x, y)$  интегрируема в области  $S$ . Подынтегральное выражение в следующем интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha x - i\gamma y} d\alpha d\gamma = \int_S F_1(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha(x-a) - i\gamma(y-b)} d\alpha d\gamma, \quad (8)$$

где  $F_1(\alpha, \gamma) = \int_S F(\xi, \eta) e^{i\alpha(\xi-a) - i\gamma(\eta-b)} d\xi d\eta$ ,

убывает экспоненциально в нижней комплексной полуплоскости при  $Im\alpha < 0$ , а также и при  $Im\gamma < 0$ , если  $x > a$ , а  $y > b$ .

Меняя знак у показателя экспонент при  $a$  и  $b$ , можно, в зависимости от того, в какой области  $x, y$  строится решение, показать, что, например, подынтегральная функция в (8) будет экспоненциально затухать в верхней комплексной полуплоскости по  $\alpha$  и по  $\gamma$ , или, например, в верхней комплексной полуплоскости по  $\alpha$  и в нижней комплексной полуплоскости по  $\gamma$ .

Применяя лемму 3, легко доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Решение  $v_\varepsilon$  в области  $x > a, y > b$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
v(x, y, z) = & -\frac{i \sin \Omega_1 z}{\pi} \int_{\alpha_2^0}^{\alpha_1^0} \frac{F(\alpha, \gamma_0(\alpha))}{\gamma_0(\alpha)} \cos \gamma_0(\alpha) y \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha + \\
& + \frac{\sin \Omega_1 z}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(\bar{\sigma}, \gamma_0(\sigma))}{\gamma_0(\sigma)} \cos \gamma_0(\sigma) y \cdot e^{-i\bar{\sigma} x} d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \sin \Omega_{m+1} z \int_{A_m}^\infty \frac{F(\bar{\sigma}, g_m(\eta))}{g_m(\eta)} \cos g_m(\eta) y \cdot e^{-i\bar{\sigma} x} d\eta, \\
x > a, y > b, \quad \sigma = \alpha_1^0 + i\eta, \quad g_k(\eta) = \sqrt{(1-w^2)(\eta^2 - A_k^2)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Используя полученную формулу (9), найдем главные члены асимптотики решения рассматриваемой задачи для больших  $x, y$  методом стационарной фазы [3]:

$$\begin{aligned}
v(x, y, z) \approx & -\frac{i \sin \Omega_1 z}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{c_{10} (1-w^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}} \times \\
& \times F(\alpha_s, \gamma_0(\alpha_s)) e^{-i(\alpha_s x_2 + \gamma_0(\alpha_s) y_2)} e^{-i(\alpha_s a + \gamma_0(\alpha_s) b + \frac{\pi}{4})},
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $\alpha_s$  – седловая точка, принадлежащая отрезку интегрирования  $[\alpha_2^0, \alpha_1^0]$ . Используя формулу (10), вычислим поток энергии [6] в полярных координатах при  $R = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \rightarrow \infty$  для  $0 < \theta < \pi/2$ :

$$P_r = \frac{F^2(\alpha_s, \gamma_0(\alpha_s)) c \Omega}{4\pi (1-w^2 \sin^2 \theta) R} \sin \Omega_1 z. \tag{11}$$

Формула для определения полного потока энергии, распространяющегося в акустическом слое на бесконечность, имеет вид:

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 P_r dz d\theta + 2 \int_{-b}^b \int_0^1 P_1 dz dy + 2 \int_{-a}^a \int_0^1 P_2 dz dx, \quad R \rightarrow \infty.$$

Из асимптотики однородного решения (6) следует, что поток энергии в каналах  $|x| < a, y > b; |y| < b, x > a$  равен нулю при  $R \rightarrow \infty$ , то есть

$$\int_{-b}^b \int_0^1 P_1 dz dy = \int_{-a}^a \int_0^1 P_2 dz dx = 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Таким образом доказана теорема.

Теорема 2. Полный поток энергии, распространяющийся в акустическом слое на бесконечность через цилиндрическую поверхность  $R \rightarrow \infty, 0 < z < 1$ , вычисляется для произвольной области  $S$  по следующей формуле:

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 P_r dz d\theta,$$

где  $P_r$  определяется по формуле (11), а нагрузка и область  $S$  не конкретизированы.

Приведем пример иллюстрирующий справедливость доказанной теоремы 2. Для этого в качестве нагрузки действующей на поверхности слоя рассмотрим постоянную нагрузку, заданную в прямоугольной области. Тогда преобразование Фурье от нагрузки будет иметь вид:

$$F(\alpha, \gamma) = \frac{4p \sin \alpha a \sin \gamma b}{\alpha \gamma}.$$

Для вычисления внутреннего интеграла применяем теорию вычетов, внешний интеграл находим методом контурного интегрирования, затем определяем асимптотику решения по методу стационарной фазы. Таким образом, получено решение в области  $x > a_1, y > b_1$  ( $a_1 > a, b_1 > b$ ):

$$v = \frac{iF(\alpha_s, \gamma_0(\alpha_s))}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{c_{10}R(1-w^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}} \times \\ \times e^{-iR(\alpha_s \cos \theta + \gamma_0(\alpha_s) \sin \theta)} e^{-i(\alpha_s a_1 + \gamma_0(\alpha_s) b_1 + \frac{\pi}{4})}, \quad (12)$$

где  $\alpha_s = \frac{c_{10} \cos \theta}{(1-w^2)\sqrt{1-w^2 \sin^2 \theta}} + a_1^0$ ,

$$\gamma_0(\alpha_s) = \frac{c_{10} \sin \theta}{\sqrt{1-w^2 \sin^2 \theta}}.$$

Не приводя формул, легко показать, что внутри каналов  $|x| < a_1, y > b_1; |y| < b_1, x > a_1$  выдерживается асимптотика однородного решения, не дающая вклада в поток энергии.

С помощью решения (12) после преобразований получена формула для определения потока энергии в слое:

$$P_r = \frac{c\Omega \sin^2 \Omega z}{2\pi} \frac{F^2(\alpha_s, \gamma_0(\alpha_s))}{\gamma_0(\alpha_s)(1-w^2 \sin^2 \theta)} \quad (13)$$

При этом важно подчеркнуть, что параметры  $a_1, b_1$  прямоугольника, в который замкнута заданная область, в формулу (13) не входят.

Поскольку мы рассматриваем конкретный пример, то можно показать, что поток энергии вычислен правильно. Для этого посчитаем поток энергии, закачиваемый в слой. Проводя довольно громоздкие вычисления, получаем:

$$P_3|_{z=1} = -\frac{8c\Omega p^2}{\pi} \int_{a_1^0}^{b_1^0} \frac{\sin^2 \alpha a \sin^2 \gamma_0(\alpha) b}{\alpha^2 \gamma_0^3(\alpha)} d\alpha. \quad (14)$$

Найдем теперь полный поток энергии, распространяющийся на бесконечность. Для этого поток энергии (13) проинтегрируем по  $z$  от 0 до 1, затем по  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ , умножим на  $4R$  и подставим заданную функцию  $F(\alpha, \gamma)$ :

$$P = \frac{8c\Omega p^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha_s(\theta) a \sin^2 \gamma_0(\alpha_s) b}{\alpha_s^2(\theta) \gamma_0^3(\alpha_s) (1-w^2 \sin^2 \theta)} d\theta$$

в рассматриваемом интеграле сделаем замену переменных:

$$\alpha_s(\theta) = \alpha, \quad \alpha_s(0) = b_1^0, \quad \alpha_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_1^0, \quad \frac{d\alpha_s(\theta)}{d\theta} = -\frac{\gamma_0(\alpha)}{1 - w^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

тогда выражение для полного потока энергии примет вид:

$$P = \frac{8c\Omega p^2}{\pi} \int_{a_1^0}^{b_1^0} \frac{\sin^2 \alpha a \sin^2 \gamma_0(\alpha) b}{\alpha^2 \gamma_0^3(\alpha)} d\alpha.$$

Таким образом, доказано совпадение потока энергии, закачиваемого в слой, с потоком энергии, распространяющимся на бесконечность, что и подтверждает правильность полученных результатов.

Полученный в работе результат легко переносится на трехмерные задачи теории упругости, а также может быть применен при определении величины, закачиваемой в среду энергии. Последнее, очевидно, сделать гораздо сложнее, чем определить поток энергии, уходящий на бесконечность.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка, 1981. 284 с.
- [2] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука., 1989. 344 с.
- [3] Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Наука., 1978. Т. 2. 547 с.
- [4] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука., 1979. 320 с.
- [5] Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 1011-1013.
- [6] Белоконь А.В., Болгова А.И. Волновые поля в неоднородном трехмерном волноводе при действии на него подвижных пульсирующих нагрузок // Тр. 5-й Междунар. конф., г. Ростов н/Д. 2000. Т. 2. С. 20-25.

**Belokon A.V., Belokon O.A., Bolgova A.I.** *Model problem of motion of shimmy load distributed in arbitrary area.* In this article on the example of study of a model problem for three-dimensional acoustic medium the derivation of the formula for energy flow propagated to infinity from shimmy load motioning with constant velocity was proved.

# ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЬЕЗОАКТИВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОДНОРОДНОГО НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Белянкова Т. И.\*, Лыжов В. А.\*, Калинин В. В.\*\***

\* *НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

\*\* *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Исследуются условия возникновения и свойства волн Гуляева-Блюштейна на поверхности электроупругого преднапряженного пьезоактивного полупространства.

В рамках линеаризованной теории наложения малой деформации на конечную, рассматриваются сдвиговые колебания предварительно напряженного неоднородного пьезоактивного полупространства под действием поверхностной нагрузки  $q(x_1)e^{-i\omega t}$ , заданной в области  $|x_1| \leq a$ . Полупространство моделируется предварительно напряженным пьезоактивным слоем  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$ , лежащим на поверхности начально-деформированного пьезоактивного полупространства  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$ . Предполагается, что слой и полупространство выполнены из одного материала с одинаковой поляризацией. Неоднородность среды вызвана действием начальных напряжений, т.е. напряженное состояние слоя и полупространства предполагается различным. Задача рассматривается в лагранжевой прямоугольной системе координат, связанной с естественным состоянием, ось  $x_3$  совпадает с осью симметрии материала среды [1].

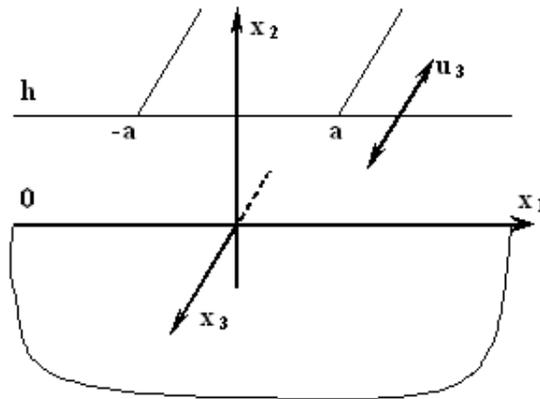


Рис. 1.

В сделанных предположениях, краевая задача о колебаниях преднапряженной электроупругой среды под действием касательной вдоль оси  $x_3$  нагрузки описываются линеаризованными уравнениями движения ( $n = 1$  — слой,  $n = 2$  — полупространство) [1-3]

$$\theta_{23,1}^{(n)} + \theta_{13,2}^{(n)} = \rho_0 \ddot{u}_3^{(n)} \quad (1)$$

и линеаризованным уравнением вынужденной электростатики

$$\Delta_{1,1}^{(n)} + \Delta_{2,1}^{(n)} = 0 \quad (2)$$

на границе  $x_2 = h$  заданы механические условия:

$$\theta_{23}^{(1)} = \begin{cases} q, & |x_1| \leq a \\ 0, & |x_1| > a \end{cases} \quad (3)$$

и электрические “открытые” условия

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{cases} d, & |x_1| \leq a \\ 0, & |x_1| > a \end{cases} \quad (4)$$

или электрические “закрытые” условия

$$\varphi^{(1)} = u_4^{(1)} = 0, \quad |x_1| \leq a \quad (5)$$

на границе слоя и полупространства  $x_2 = 0$  заданы:

$$\theta_{23}^{(1)} = \theta_{23}^{(2)}, \quad \Delta_2^{(1)} = \Delta_2^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} \quad (6)$$

Здесь  $\theta_{lk}^{(n)}$ ,  $\Delta_l^{(n)}$  — компоненты линеаризованных тензора напряжений  $\Theta$  и вектора индукции  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \theta_{lk}^{(n)} &= c_{lksp}^{*(n)} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{*(n)} \varphi_{,p}^{(n)} \\ \Delta_l^{(n)} &= e_{lsp}^{*(n)} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{*(n)} \varphi_{,p}^{(n)} \end{aligned} \quad (7)$$

$c_{ijkl}^{*(n)}$  — тензор упругих постоянных,  $e_{kij}^{*(n)}$  — тензор пьезоэлектрических модулей,  $\varepsilon_{ij}^{*(n)}$  — тензор диэлектрических проницаемостей — зависят как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды,  $\rho_0$  — плотность материала среды,  $u^{(n)} = \uparrow \{u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$  — расширенный вектор смещений.

Применяя к краевым задачам I: {(1)–(4), (6)} и II: {(1)–(3), (5),(6)} преобразование Фурье по координате  $x_1$ , и подставляя решение

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= \sum_{k=1}^2 f_{ik}^{(1)} \left[ C_{k1}^{(1)} ch \sigma_k^{(1)} x_2 + C_{k2}^{(1)} sh \sigma_k^{(1)} x_2 \right] \\ u_i^{(2)} &= \sum_{k=1}^2 f_{ik}^{(2)} C_{k1}^{(2)} \exp \left( \sigma_k^{(2)} x_2 \right), \quad i = 3, 4 \end{aligned}$$

в преобразованные граничные условия, получим дисперсионные уравнения для волн Гуляева–Блюштейна:

$$\det \mathbf{T}^I = 0 \quad \text{и} \quad \det \mathbf{T}^{II} = 0 \quad (8)$$

для задач с “открытыми” I и “закрытыми” II электрическими условиями соответственно.

$$\mathbf{T}^I = \begin{pmatrix} \left( \sigma_1^{(1)} \right)^2 l_{11}^{(1)} s_1 & \left( \sigma_2^{(1)} \right)^2 l_{12}^{(1)} s_2 & l_{11}^{(1)} c_1 & l_{12}^{(1)} c_2 & 0 & 0 \\ \left( \sigma_1^{(1)} \right)^2 l_{21}^{(1)} s_1 & \left( \sigma_2^{(1)} \right)^2 l_{22}^{(1)} s_2 & l_{21}^{(1)} c_1 & l_{22}^{(1)} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(2)} & -\sigma_1^{(2)} l_{11}^{(2)} & -\sigma_2^{(2)} l_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & l_{21}^{(1)} & l_{22}^{(2)} & -\sigma_1^{(2)} l_{21}^{(2)} & -\sigma_2^{(2)} l_{22}^{(2)} \\ f_{31}^{(1)} & f_{32}^{(1)} & 0 & 0 & -f_{31}^{(2)} & -f_{32}^{(2)} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{T}^{\text{II}}$  определяются формулами

$$T_{2k}^{\text{II}} = ch\sigma_k^{(1)}h, \quad k = 1, 2; \quad T_{2k}^{\text{II}} = sh\sigma_k^{(1)}h, \quad k = 3, 4; \quad T_{2k}^{\text{II}} = 0, \quad k = 5, 6, \quad (10)$$

$$T_{ii}^{\text{II}} = T_{ij}^{\text{I}}, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

в (9) приняты обозначения:

$$s_k = \left(\sigma_k^{(1)}\right)^{-1} sh\sigma_k^{(1)}h, \quad c_k = ch\sigma_k^{(1)}h, \quad k = 1, 2$$

$$l_{1k}^{(n)} = c_{44}^{*(n)} f_{3k}^{(n)} + e_{24}^{*(n)}, \quad l_{2k}^{(n)} = e_{24}^{*(n)} f_{3k}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{*(n)}, \quad k = 1, 2$$

$$f_{3k}^{(n)} = -\frac{e_{24}^{*(n)} \left(\sigma_k^{(n)}\right)^2 - \alpha^2 e_{15}^{*(n)}}{c_{44}^{*(n)} \left(\sigma_k^{(n)}\right)^2 - \alpha^2 c_{55}^{*(n)} - \rho_0 \omega^2}, \quad f_{4k}^{(n)} = 1, \quad k = 1, 2 \quad (11)$$

$\sigma_k^{(n)}$  — корни характеристического уравнения

$$\left(c_{44}^{*(n)} \sigma^2 - \alpha^2 c_{55}^{*(n)} - \rho_0 \omega^2\right) \left(\varepsilon_{22}^{*(n)} \sigma^2 - \alpha^2 \varepsilon_{11}^{*(n)}\right) + \left(e_{24}^{*(n)} \sigma^2 - \alpha^2 e_{15}^{*(n)}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

Анализ дисперсионных уравнений (8) показал, что на поверхности неоднородного (слабо неоднородного) пьезоактивного полупространства при определенных условиях возникает незатухающая волна Гуляева–Блюштейна [3–5]. Следует отметить, что существование такой волны зависит от вида начального напряженного состояния, величины начальной деформации и пьезоэлектрических свойств среды. Исследования проводились для структур ZnO/ZnO (монокристалл класса 6mm), BaTiO<sub>3</sub>/BaTiO<sub>3</sub> и PZT5/PZT5 (пьезокерамика) [4]. Неоднородное начальное напряженное состояние среды достигалось за счет различных напряженных состояний слоя и полупространства. Рассмотрены одноосные начально-деформированные состояния НДС1, НДС2, НДС3 (цифрой обозначена ось действия деформации  $v_i = 1.03$  — относительное удлинение), двухосные начально-деформированные состояния 2НДС1, 2НДС2, 2НДС2 и гидростатическое 3НДС.

Проведенный анализ показал, что в случае задачи I поверхностная волна существует для ограниченного числа начально-деформированных состояний (НДС2, 2НДС2 и 2НДС3 их число зависит от пьезоэлектрических свойств материала среды и величины начальной деформации), в случае задачи II таких состояний больше.

На рис. 2, 3 представлено влияние на фазовые скорости вида начальной деформации и типа начального напряженного состояния слоя для материалов ZnO/ZnO (рис. а) и BaTiO<sub>3</sub>/BaTiO<sub>3</sub> (рис. б) в случае задания граничных условий I типа (рис. 2 а, б) и II типа (рис. 3 а, б). Цифрами на рисунках отмечены типы начального напряженного состояния, нижний индекс указывает ось, вдоль которой действует деформация, штриховой линией отмечена скорость сдвиговой волны.

Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что в случае задания граничных условий I типа скорость поверхностной волны уменьшается с частотой, начиная со скорости сдвиговой волны, в случае II типа граничных условий скорость поверхностной волны меньше сдвиговой и зависит (в отсутствии начальных напряжений) от пьезоэлектрических свойств материала.

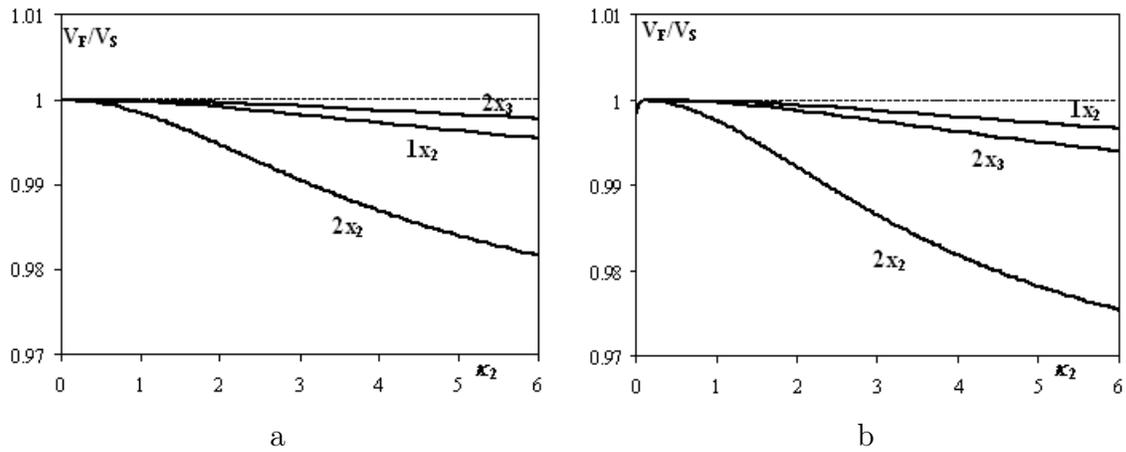


Рис. 2.

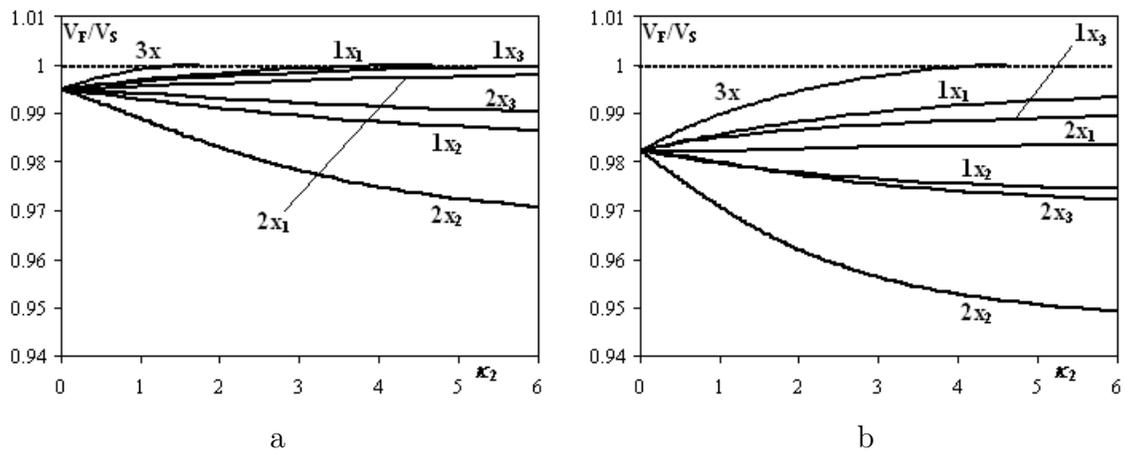


Рис. 3.

Наличие начального напряженного состояния в слое, равно как и в полупространстве, приводит к значительному изменению структуры поверхностного поля, при определенных видах начально-деформированного состояния поверхностная волна либо не существует (рис. 2), либо существует, либо существует в ограниченном частотном диапазоне (рис. 3). Проведенный анализ показал, что ЗНДС, НДС1, НДС3, 2НДС1 (рис. 3) приводят к увеличению скорости поверхностной волны до скорости сдвиговой, а НДС2, 2НДС2, 2НДС3 приводят к уменьшению скорости, причем в случае 2НДС2 к существенному.

Работа выполнена благодаря финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-08-65499-а, 06-01-00726-а, 06-08-96635-р\_юг\_а)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
- [2] *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М. Физматлит, 2006. 272 с.
- [3] *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
- [4] Физическая акустика. Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч.А.592 с.
- [5] *Feng Jin, Zikun Wang, Tiejun Wang.* The Bleustein–Gulyaev (B–G) wave in piezoelectric layered half-space // *Int. J. Eng. Sci.* V. 39. 2001. p. 1271–1285.

**Belyankova T.I., Lyzhov V.A., Kalinchuk V.V.** *Waves on a surface of piezo-active half-space in the case of inhomogeneous initial stress state.* Generation conditions and behaviour of the Gulyaev–Bleustein waves on a surface of electro-elastic prestressed piezo-active half-space is investigated.

# ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЫ

**Беркович В. Н.**

*Филиал Московского государственного университета технологий  
и управления в г. Ростове-на-Дону*

В настоящей работе предложен метод построения решения плоской смешанной задачи об установившихся колебаниях упругой клиновидной среды, возбуждаемой источниками гармонических колебаний на участке её границы. Плоские основные задачи динамики упругого клина рассматривались в ряде частных случаев в работах [1-3] и др. Общий случай задания смешанных граничных условий в задаче динамики упругого клина, рассмотренный в данной работе, исследован, по-видимому, впервые. На основе использования специального представления решения динамических уравнений теории упругости и подхода, развиваемого в предыдущих работах автора, рассматриваемая задача сведена к системе интегральных уравнений относительно неизвестных напряжений в области задания источников колебаний. Изучены вопросы разрешимости полученной системы и указан способ построения её приближенного решения в аналитическом виде.

1. Будем рассматривать упругую клиновидную среду  $\Omega$  угла раствора  $\alpha$ , нижняя грань  $\theta = 0$  которой жестко закреплена, а на верхней грани  $\theta = \alpha$  задан плоский вектор смещений  $\bar{f}(r) \exp(-i\omega t)$  в полосе  $\Pi$ , параллельной ребру клина. Оставшаяся часть верхней грани предполагается свободной от напряжений. В условиях установившихся колебаний ставится задача определения неизвестной амплитуды вектора напряжений  $\bar{\sigma} = \{\sigma_r, \sigma_{r\theta}\}$  в полосе  $\Pi$ .

Поставленная выше задача сводится к решению динамических уравнений теории упругости относительно неизвестной амплитуды вектора смещений  $\bar{u}(r, \theta)$  в клиновидной среде со смешанными граничными условиями:

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, 0) &= \bar{0}, & 0 < r < \infty \\ \bar{\sigma}(r, \alpha) &= \bar{0}, & r \notin (a, b) \\ \bar{u}(r, \alpha) &= \bar{f}(r), & r \in (a, b)\end{aligned}\tag{1}$$

На ребре предполагается отсутствие источников излучения, а на бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда.

Для исследования указанной задачи воспользуемся представлением амплитуды плоского вектора смещений  $\bar{u}(r, \theta)$  на основе общего решения динамических уравнений теории упругости [5] в следующем виде:

$$\begin{aligned}2\mu\bar{u} &= -\nabla F + 4(1-\nu)\bar{\Phi}, & F(r, \theta) &= \Phi_0(r, \theta) + r\Phi_r(r, \theta) \\ \nabla^2\Phi_0 + k_1^2\Phi_0 &= (k_2^2 - k_1^2)r\Phi_r, \\ \nabla^2\bar{\Phi} + k_2^2\bar{\Phi} &= 0, & \bar{\Phi} &= \{\Phi_r(r, \theta), \Phi_\theta(r, \theta)\}\end{aligned}\tag{2}$$

В формулах (2)  $\mu$  — модуль сдвига,  $k_{1,2}$  — волновые числа для продольных и поперечных волн соответственно,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а координаты вектора  $\bar{\Phi}$  могут быть представлены в форме:

$$\begin{cases} \Phi_r = \Phi_1(r, \theta) \cos \theta + \Phi_2(r, \theta) \sin \theta \\ \Phi_\theta = -\Phi_1(r, \theta) \sin \theta + \Phi_2(r, \theta) \cos \theta \\ \nabla^2 \Phi_{1,2} + k_{1,2}^2 \Phi_{1,2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Тогда выражения для вектора напряжений  $\bar{\sigma} = (\sigma_\theta, \tau_{r\theta})$  при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi_{00}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{\text{част}}}{\partial r^2} + \frac{k^2}{2} (\Phi_{00} + \Phi_{\text{част}}) + \\ &\quad + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \lambda_- \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{00}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{\text{част}}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \sin \theta + \lambda_+ (\Phi_1 \sin \theta + \Phi_2 \cos \theta) \right\} \\ \lambda_\pm &= 2(1 - \nu)g^{-1} \pm (1 - 2\nu), \quad g = 1 + \varkappa_2 a \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношениях (4) функции  $\Phi_{00}$ ,  $\Phi_{\text{част}}$ ,  $\Phi_{1,2}$  получены в процессе решения неоднородного (1) и однородного (2) уравнений Гельмгольца с помощью интегрального преобразования Конторовича-Лебедева [6] и имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(r, \theta) &= \frac{1}{i\pi} \int [A_0(\tau)ch\theta\tau + B_0(\tau)sh\theta\tau] K_{-i\tau}(\varkappa_1 r) \tau d\tau \\ \Phi_{\text{част}}(r, \theta) &= \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_1} [C(\tau)ch\theta\tau + D(\tau)sh\theta\tau] K_{-i\tau}(\varkappa_2 r) \tau d\tau \\ \Phi_{1,2}(r, \theta) &= \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_2} [A_{1,2}(\tau)ch\theta\tau + B_{1,2}(\tau)sh\theta\tau] K_{-i\tau}(\varkappa_2 r) \tau d\tau \\ \gamma_1 &\succ \gamma_2, \quad \varkappa_{1,2} = -ik_{1,2} \end{aligned} \quad (5)$$

В последующих рассуждениях первоначально будем считать  $\varkappa_{1,2} > 0$ . При этом неизвестные функции в подынтегральных выражениях (4) регулярны и убывают на  $\infty$  в полосе  $|Imz| \leq 1$  комплексной плоскости  $z$ , на границах которой  $z = \tau \pm i$  должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} \varkappa_2 C(\tau \pm i) &= \pm i\tau [A_1(\tau) \mp iB_2(\tau)], \\ \varkappa_2 D(\tau \pm i) &= \pm i\tau [B_1(\tau) \mp iA_2(\tau)] \end{aligned} \quad (6)$$

Контур интегрирования  $\gamma_{1,2}$  расположены в полосе  $|Imz| \leq 1$  и удовлетворяют условиям излучения. При таком выборе неизвестных функций, а также с учетом асимптотических свойств модифицированной функций Бесселя  $K_{-i\tau}(\varkappa_1 r)$  условия на бесконечности будут удовлетворяться.

Так как при решении плоской задачи с помощью представлений (2), (3) одна из неизвестных функций  $\Phi_{0,1,2}$  оказывается произвольной, то в дальнейшем будем предполагать выполнение следующих дополнительных условий:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha} &= 0 \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha} &= 0, \quad g = 1 + \varkappa_2 a \end{aligned} \quad (7)$$

**Замечание.** Отметим, что при  $\varkappa_{1,2} \rightarrow 0$  (случай статического нагружения) функции  $\Phi_{1,2}(r, \theta)$  превращаются в гармонические, а соотношения (7) — в условия Коши-Римана для этих функций [7].

Удовлетворение условиям связи (7) приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(\tau \pm i) &= \mp ig \tilde{\Psi}_1(\tau \pm i), \\ \tilde{\Psi}_2(\tau \pm i) &= \mp ig^{-1} \tilde{\Phi}_1(\tau \pm i) \\ \tilde{\Phi}_{1,2}(z) &= A_{1,2}(z) chaz + B_{1,2}(z) shaz, \\ \tilde{\Psi}_{1,2}(z) &= A_{1,2}(z) shaz + B_{1,2}(z) chaz\end{aligned}\quad (8)$$

2. Анализ соотношений (2)-(7) позволяет установить, что удовлетворение смешанным граничным условиям (1) в классическом смысле оказывается невозможным. В данной работе развивается подход, основанный на их удовлетворении в обобщенном смысле с точки зрения теории обобщенных функций. При выполнении указанной процедуры используется результаты [4].

Для удовлетворения граничным условиям  $\bar{u}(r, 0) = \bar{0}$ ,  $\bar{\sigma}(r, \alpha) = \bar{q}(r)$ ,  $0 < r < \infty$  вспомогательной смешанной задачи производится подстановка выражений (5) в соотношения (2), (4) и их последующее преобразование с учетом условий (6), (7), а также формул для модифицированных функций Бесселя [6]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} K_{-i\tau}(\varkappa r) &= -\frac{\varkappa}{2} [K_{-i(\tau-i)}(\varkappa r) + K_{-i(\tau+i)}(\varkappa r)], \\ \frac{\tau}{r} K_{-i\tau}(\varkappa r) &= -i\frac{\varkappa}{2} [K_{-i(\tau-i)}(\varkappa r) - K_{-i(\tau+i)}(\varkappa r)]\end{aligned}\quad (9)$$

В получающихся при этом интегральных соотношениях осуществляется преобразование контуров интегрирования в полосу  $|Imz| \leq 1$  регулярности и убывания подынтегральных функций. В результате достаточно громоздких преобразований приходим к соотношениям связи между трансформантами Конторовича-Лебедева от векторов амплитуд смещений  $\bar{U}(\alpha, \tau)$  и напряжений  $\bar{Q}(\alpha, \tau)$  на границе  $\theta = \alpha$ :

$$\frac{1}{\mu} \bar{Q}(\alpha, \tau) = 2Re \{ [\varkappa_1 \mathbf{A}(\tau + i) + 2\mathbf{B}(\tau + i)] \cdot \mathbf{A}^{-1}(\tau + i) \cdot \bar{U}(\alpha, \tau + i) \}, \quad -\infty < \tau < \infty \quad (10)$$

Соотношение (10) является частным случаем векторной краевой задачи Карлемана со сдвигом в комплексной плоскости [8] относительно функции  $\bar{U}(\alpha, z)$ , аналитической в полосу  $|Imz| \leq 1$ . Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  зависят от геометрических и механических характеристик упругой клиновидной среды. В указанном случае решение (10) может быть построено точно с помощью формулы Граве-Палатини [9] и имеет при этом вид:

$$\begin{aligned}\bar{U}(\alpha, \tau) &= \mathbf{H}_0(\tau) ch \frac{\pi\tau}{2} \frac{\bar{Q}(\alpha, \tau)}{2\mu} + \frac{1}{2\varkappa_1} \mathbf{H}_0(\tau) ch \frac{\pi\tau}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2\mu} \bar{Q}(\alpha, t) sh^2 \frac{\pi t}{4}}{ch\pi t + ch\pi\tau} dt \\ \mathbf{H}_0(\tau) &= \mathbf{A}(\tau) \cdot \left[ \mathbf{A}(\tau) + \frac{2}{\varkappa_1} \mathbf{B}(\tau) \right]^{-1}, \quad -\infty < \tau < \infty\end{aligned}\quad (11)$$

Удовлетворяя исходным условиям (1), получаем из (11) систему интегральных уравнений относительно неизвестных амплитуд контактных напряжений  $\bar{q}(r)$ :

$$\mathbf{K}\bar{q} = \int_a^b \mathbf{k}(r, \rho) \cdot \bar{q}(\rho) d\rho = \bar{f}(r), \quad a < r < b \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}(r, \rho) &= \mathbf{h}_\delta(r, \rho) + \mathbf{m}_\delta(r, \rho) \\
\mathbf{h}_\delta(r, \rho) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \begin{array}{l} K_{-i\tau}(\alpha_1 r) I_{-i\tau}(\alpha_1 r), \rho < r \\ I_{-i\tau}(\alpha_1 r) K_{-i\tau}(\alpha_1 \rho), \rho > r \end{array} \right) \mathbf{H}_\delta(\tau) \tau d\tau \\
\mathbf{m}_\delta(r, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \mathbf{H}_\delta(\tau) \frac{ch \frac{\pi\tau}{2} sh^2 \frac{\pi\tau'}{4}}{\tau(ch\pi\tau' + ch\pi\tau)} K_{-i\tau}(\alpha_1 r) Im K_{1-i\tau'}(\alpha_1 \rho) d\tau d\tau' \\
\mathbf{H}_\delta(\tau) &= \mathbf{H}_0(\tau) \frac{\tau}{2(\tau^2 + \delta^2) sh \frac{\pi\tau}{2}}, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \delta > 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Дисперсионная матрица-функция  $\mathbf{H}_0(\tau)$  определяется равенством (11) и имеет своими элементами функции, мероморфные в комплексной плоскости  $\tau$ . При этом  $\det \mathbf{H}_0(\tau)$ , являясь мероморфной в комплексной плоскости  $\tau$  функцией, обладает счетным множеством нулей с конечной плотностью распределения на действительной оси.

3. На основе исследования системы интегральных уравнений (12) можно получить разложение  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\delta + \mathbf{K}_1$ , где оператор  $\mathbf{K}_\delta$  однозначно обратим, а оператор  $\mathbf{K}_1$  вполне непрерывен, как операторы, действующие в пространствах Соболева-Слободецкого  $W_2^{\pm\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Для получения указанного разложения используется представление матрицы  $\mathbf{H}_0(z)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_\delta(z) &= \mathbf{\Pi}(z) \cdot \mathbf{H}_\delta(z) + [E - \mathbf{\Pi}(z)] \cdot \mathbf{H}_\delta(z) \\
\mathbf{\Pi}(z) &= \begin{pmatrix} \Pi_{11}(z) & 0 \\ 0 & \Pi(z)/\Pi_{11}(z) \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{E} [1 + o(z^{-1})]
\end{aligned} \tag{14}$$

В соотношении (12)  $\Pi_{11}(z)$ ,  $\Pi(z)$  — канонические произведения, составленные из действительных нулей и полюсов ведущего элемента  $k_{11}(z)$  и  $\det \mathbf{H}_0(z)$  соответственно. Тогда оператор  $\mathbf{K}_\delta$ , порождаемый матрицей  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{\Pi}(z) \cdot \mathbf{H}_\delta(z)$  оказывается положительно определенным в некотором специально выбранном гильбертовом пространстве. Оставшиеся слагаемые в (12), (14) порождают оператор  $\mathbf{K}_1$ , оказывающийся вполне непрерывным.

Приведенные выше рассуждения позволяют получить представление решения (13) в виде:

$$\begin{aligned}
\rho \bar{q}(\rho) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}^{-1}(\tau) \cdot \bar{F}(\tau) K_{-i\tau}(\alpha_1 \rho) \tau sh \pi \tau d\tau + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_-^{-1}(\tau) \cdot \{ \bar{X}_1(\tau) I_{-i\tau}(\alpha_1 \rho) K_{-i\tau}(\alpha_1 b) + \\
&+ \bar{X}_2(\tau) K_{-i\tau}(\alpha_1 \rho) I_{-i\tau}(\alpha_1 a) \} \tau^2 d\tau,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{X}_{1,2} \in S_\lambda, \quad \lambda > \frac{3}{2}, \quad \|\bar{X}\|_{S_\lambda} = \sup_{|Imz| \leq 1} |\bar{X}(z) z^\lambda| < \infty, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} |\bar{X}(z) z^\lambda| = 0$$

В соотношении (15)  $\bar{F}(\tau)$  — преобразование Конторовича-Лебедева от заданного вектора смещений  $\bar{f}(r)$ ,  $a < r < b$ ,  $\mathbf{G}_-(\tau)$  — результат факторизации матрицы-функции  $\mathbf{G}(z)$  относительно действительной оси  $R^1$ . Неизвестные вектор-функции  $\bar{X}_{1,2}(z)$  отыскиваются их некоторой системы интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывным в  $S_\lambda$  оператором.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Морозов Н.Ф., Суворцова И.Л. Задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с угловыми точками контура. Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61. № 4. С. 654–659.
- [2] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 327с.
- [3] Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: МГУ 1992. 204с.
- [4] Беркович В.Н. // К теории смешанных задач динамики наклонно–слоистой среды. Экол. вестник научн. центров ЧЭС. Краснодар: КубГУ. 2006. № 2. С. 16–22.
- [5] Зильберглейт А.С., Златина И.Н. // О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости. Докл. АН СССР. 1976. Т.227. № 1. С. 71–74.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2. М.: Наука. 1966. 295с.
- [7] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1972. 401с.
- [8] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: 1978. Наука 295с.
- [9] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука.1973. 736с.

**Berkovich V.N.** *Plane mixed boundary value problem of the dynamics of the wedge-shaped elastic medium.* The paper is devoted to the investigation of the mixed boundary value problem of the wedge-shaped elastic medium excited by plane harmonic vibrations. The problem is reduced to the system of integral equations. Solvability problems are studied and the method of approximating the solution is worked out.

# ДИАГНОСТИКА МАТЕРИАЛОВ ДЕЙСТВУЮЩИХ СООРУЖЕНИЙ КОНИЧЕСКИМ УДАРНИКОМ

**Бескопыльный А. Н.\* , Кадомцев И. Г.\*\***

*\* Ростовский государственный строительный университет*

*\*\* Ростовский государственный университет*

Исследуется упругопластический удар конического индентора по элементам действующих конструкций с целью определения их механических характеристик. В процессе эксплуатации механические характеристики материалов конструкций могут меняться под действием циклических нагрузок, температуры и других факторов, что приводит к необходимости контроля их состояния на различных стадиях жизненного цикла: при реконструкции или прогнозировании работоспособности. Для проведения экспериментов разработана оригинальная установка. Отмечается хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов, что позволяет с большой точностью решить обратную задачу об определении механических характеристик материалов. Методика применялась для диагностики материалов железнодорожных мостов Ростовской области.

К одним из основных задач в строительстве и машиностроении относятся повышение качества машин, зданий и сооружений и обеспечение их надежности. В последние годы участились аварии сооружений общественного назначения, магистральных нефте и газопроводов, обострилась проблема надежности металлоконструкций на предприятиях нефтехимической и энергетической промышленности.

Эффективным средством обеспечения надежности объектов строительства и машиностроения является оперативный контроль качества изделий, сущность которого заключается в установлении на каждой стадии технологического процесса строгого соответствия характеристик материалов требованиям нормативных документов. В последние годы для этого контроля стали применяться методы ударной диагностики материалов конструкций, позволяющие быстро и точно измерять требуемые показатели в любой точке реальной конструкции. Ударные методы обладают рядом достоинств неразрушающего контроля, например, при меньших габаритах может быть развита большая контактная сила, регистрируется больше информации о реакции материала на динамическое воздействие, и другие. Такой подход широко применяется при определении твердости материалов, а последнее время — при определении комплекса механических характеристик: пределов текучести, прочности, относительного удлинения и других.

Наиболее привлекательным в динамических испытаниях материалов является конический индентор. Ключевым моментом в расчетах удара является модель местного смятия, то есть зависимость местного смятия от силы контактного взаимодействия тел, которая следует из решения упругопластической статической контактной задачи.

В данной работе используется решение [4], полученное с использованием [1,3,5]

и которое имеет вид:

$$\alpha = \begin{cases} CP^{1/2}, \frac{dP}{dt} > 0 \\ \frac{(P\chi)^{1/2} + \alpha_{p,max}}{E}, \frac{dP}{dt} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$C = ctg\gamma(1 - \delta)\chi^{1/2} + \left(1 + \frac{2\delta - 2}{\pi}\right)\chi^{1/2}E^{-1},$$

$$\alpha_{p,max} = (1 - \delta) \left(\frac{P_{max}}{\chi}\right)^{1/2} \left(ctg\chi - \frac{2\chi}{\pi E}\right),$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $2\gamma$  — угол раствора конуса,  $\chi = \pi k\lambda$ ,  $\lambda = 5.7$ ,  $k = \frac{\sigma_m}{2}$  — пластическая константа,  $\sigma = 0.22$  характеризует безразмерный подъем свободной поверхности на границе области контакта. Все модели упругопластического контактного взаимодействия носят приближенный характер, поэтому была разработана модель с применением прямых численных схем в осесимметричной постановке. Для этой цели использовалась среда программирования ANSYS. Для моделирования полубесконечного пространства использовали четырёхузловые изопараметрические четырёхугольные элементы, число которых варьировалось от 250 до 10000. Общее число узлов также варьировалось от 300 до 20000. С целью лучшего предсказания реакции материала полупространства, области контакта, распределения контактных напряжений, полей напряжений и деформаций потребовалось более частое разбиение сетки в области контакта. Горизонтальное и вертикальное разбиение в контактной зоне сразу под индентором составляло от 0.02 до 0.05 мм при размерах окончательной зоны контакта  $R=0.5$  мм. Для моделирования индентора использовали треугольные шестиузловые элементы. В связи с тем, что в качестве материала инденторов обычно используют либо алмаз, либо твердые сплавы (ВК6, ВК8), при моделировании его свойства были заданы только упругими константами. Для определения зоны контакта применялись 20 контактных трехузловых элементов, причем два узла, соединенные линией, принадлежали рабочей поверхности индентора и представляли собой мишень (target), а третий узел принадлежал поверхности полупространства. Такие узлы применяются для идентификации контакта и разделения узловых точек контактируемых тел во время деформации. Контактный узел, попавший на мишень, может скользить вдоль линии с коэффициентом трения и вызывает силы в нормальном и тангенциальном направлениях. Если в процессе деформации зазор в контактном элементе оказывается меньше допустимого значения, следовательно, произошел контакт и прикладывается соответствующее контактное давление в узловых точках. Для моделирования упругопластических свойств материала полупространства применялись различные схемы диаграмм напряжение — деформация. На первых этапах моделирования была принята билинейная модель с изотропным упрочнением и условием текучести Мизеса. При дальнейших расчетах применялась мультилинейная модель с кинематическим упрочнением, при которой нелинейная зависимость между напряжениями и деформацией заменяется кусочно-линейной кривой. При

решении задачи задавали смещение верхних узлов индентора с шагом 2.5 мкм. Для улучшения сходимости решения итеративный процесс продолжался до выполнения условия снижения параметра сходимости до значений 0.0001.

Назначенное вертикальное смещение штампа 2.5 мкм выбрано из условия выполнения сходимости решения в пределах 5 итераций. Результаты численного анализа и их сопоставление с экспериментальными и аналитическими данными показали хорошее совпадение. На рис. 1 показаны зависимости силы вдавливания от смещения индентора 120 в условиях статического нагружения для сталей 08кп и 65Г. На втором этапе проверка адекватности осуществлялась при ударном на-

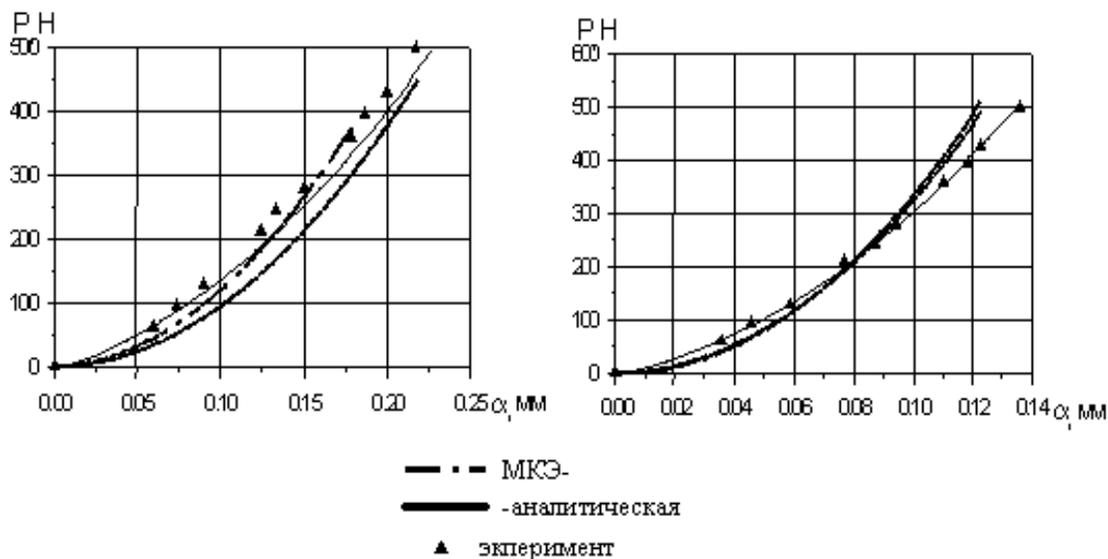


Рис. 1. Зависимость силы вдавливания от перемещения индентора

гружении. Для этого была изготовлена установка пружинного действия (рис. 2), в которой боек под действием пружины ударял по держателю индентора, перемещение последнего регистрировалось индукционным датчиком. Для принятой схемы

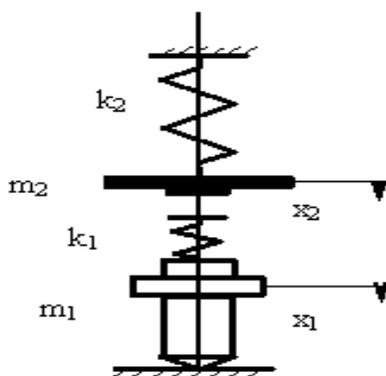


Рис. 2. Схема удара

ударных испытаний, когда боек подлетает к индентору с начальной скоростью и

регистрируется перемещение индентора, движение деталей установки описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1) - P(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_{st} - x_2) - k_1(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (2)$$

при  $t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = V_0$

Подстановка статической зависимости из (1) в (2) позволяет получить зависимость перемещения, скорости и ускорения индентора от времени и сопоставить его с экспериментальными данными. Сопоставление результатов эксперимента и решения (2), показало хорошее совпадение. Все это позволило разработать переносной прибор, позволяющий в любом месте конструкции определить комплекс механических характеристик металлов: пределы текучести и прочности. относительное удлинение, твердость, ударную вязкость.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М-Л: ГИТЛ, 1949. 270 с.
- [2] *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 315 с.
- [3] *Ишлинский А.Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля // ПММ. 1944. Т. 8, Вып. 8. с. 201–222.
- [4] *Кадомцев И.Г.* Осесимметричное упругопластичное соударение двух тел, одно из которых коническое. //Изв. СКНЦ ВШ 1990, № 4, с. 50–54.
- [5] *Александров В.М., Кадомцев И.Г., Царюк Л.Б.* Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел. // Трение и износ. 1984. с. 16–26.

**BeskoPilny A.N., Kadomtsev I.G.** *Material diagnosis of real structures by cone indenter.* An elastic-plastic impact of cone indenter is investigated for real structures diagnosis with the purpose of their mechanical properties estimation. Effective means of reliability maintenance of structures is operative quality control of their elements at each stage of a manufacturing process. It concludes of strict correspondence material properties to normative deeds demand. Last years methods of impact diagnostic of materials of the constructions began to be applied, permitting fast and precisely to measure required characteristics at any point of a real structure. Shock methods have reasonable features, for example, it can be acted big contact force at smaller sizes of device, it can be registered more information on a response of a material on dynamic action, and others. Such approach is widely applied at hardness measurement, and last time at measurement of a complex of mechanical characteristics: yield points  $\sigma_T$ , strength  $\sigma_T$ , elongation  $\delta$  and others. Results of a numerical analysis and their comparison to experimental and analytical data have shown good coincidence.

# МОДЕЛЬ ВИНТОВОГО ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДАХ

**Богаченко С. Е., Устинов Ю. А.**

*Ростовский государственный университет*

В настоящей работе излагаются некоторые результаты исследований, в которых моделировалось развитие течения крови во время систолы. При этом преследовались две цели. Первая – исследовать возможности модели путем сравнения результатов расчетов различных полевых характеристик с экспериментальными [2]. Вторая – какой вклад вносят количественно различные моды в распределение скоростей и величины давления. В качестве объекта исследования была выбрана аорта собаки.

В последние несколько десятилетий стали актуальными вопросы, связанные с распространением волн давления в кровеносных сосудах. В первую очередь, это связано с необходимостью предупреждения и ранней диагностики поражения сосудистого русла, получения данных о трудноизмеримых характеристиках потока.

Существует достаточно большое количество экспериментальных работ, но недостаточно физико-математических моделей кровеносных сосудов, с высокой степенью сложности отражающих реальную ситуацию.

В первом приближении сосуд представляет собой многослойную цилиндрическую оболочку со слоями, имеющими различные физико-математические свойства, при этом существенную роль играет предварительное натяжение сосуда, возникающее за счет давления крови, а также тонусного напряжения мышечного слоя сосудистой стенки. Задача усложняется еще и тем, что свойства сосудистой стенки обладают сильной анизотропией.

Сосудистая стенка, в которой опорные волокна расположены спирально, обладают, с одной стороны, свойствами винтовой анизотропии и поэтому подвержены элементам скручивания при повышении внутрисосудистого давления, с другой стороны, сосуду присуща и своего рода фазовая анизотропия, при которой свойства сосудистой стенки изменяются в зависимости от фазы кардиоцикла (систола, диастола).

В [3–5] описывается математическая модель и приведены некоторые результаты исследований на ее основе особенностей движения крови, связанные с винтовой анизотропией механических свойств стенки сосуда. В частности, показано, что при пульсовом движении крови в силу винтовой анизотропии появляется крутильная составляющая скорости стенки сосуда, которая в силу условия прилипания создает винтовой характер движения частиц крови вблизи стенки, если даже такая компонента отсутствует на входе в сосуд.

В настоящей работе излагаются некоторые результаты исследований, в которых моделировалось развитие течения крови во время систолы. При этом преследовались две цели. Первая – исследовать возможности модели путем сравнения результатов расчетов различных полевых характеристик с экспериментальными [2]. Вторая – какой вклад вносят количественно различные моды в распределение

скоростей и величины давления. В качестве объекта исследования была выбрана аорта собаки.

Будем рассматривать аорту, как полубесконечную цилиндрическую оболочку с винтовой анизотропией с недеформируемым входным отверстием, поскольку оно имеет жесткую основу. Начало координат  $z = 0$  выберем в центре входа. Обозначим через  $T = 2\pi/\omega_1$  период сердечного цикла, где  $\omega_1$  — круговая частота пульса. Зададим на входе следующие граничные условия:

$$z = 0 : p^0 = p_{tm} + \tilde{p}(\eta), \quad V_z(1, 0, \eta) = V_\theta(1, 0, \eta) = 0, \quad (1)$$

где  $p_{tm}$  — давление на входе в сосуд при закрытом клапане,  $\tilde{p}(\eta)$  — избыточное давление, порождаемое систолой и открывающее клапан,  $\eta = \omega_1 t$  — безразмерное время, граничные условия для скоростей отвечают условиям прилипания.

Обозначим через  $\eta_c = 2\epsilon$  временной отрезок систолы и примем следующий закон изменения давления

$$\begin{aligned} f &= \eta^2(\eta - \eta_c)^2 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_c \\ f &= 0 \quad \text{при} \quad \eta_c \leq \eta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (2)$$

Выбранный закон изменения давления в форме (2) примерно соответствует график, изображенному на рис. 1.12 в [2].

Для построения решения представим выражение (2) в виде отрезка ряда Фурье. Имеем

$$p_N = p_{st} + PRe \left[ \sum_{n=1}^N f_n \exp^{-in(\eta-\epsilon)} \right], \quad p_0 = p_{tm} + Pf_0 \quad (3)$$

где  $Pf_0 = p_{max} - p_0$ ,  $p_{max}$  — максимальное значение давления во время систолы. Решение будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 a \zeta + Re \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} X_{1ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right] \\ v_z &= v_z^0 + Re \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} V_{zns} \exp^{i\phi_{ns}} \right] \\ v_\theta &= v_\theta^0 + Re \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{n,s} V_{\theta ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $k_{ns}$  — корни дисперсионного уравнения ([5]), отвечающие значениям  $\omega = n\omega_1$ ,  $\phi_{ns} = k_{ns}\zeta - n\eta$ ,  $V_{zns}$ ,  $V_{\theta ns}$  получаются путем подстановки в условия прилипания и в выражения для компонент скоростей (полученных из уравнения Навье-Стокса)  $k = k_{ns}$ ,  $X_j = X_{jns}$ , где  $X_{jns}$  — частные решения однородной алгебраической системы ([5]), отвечающие значениям  $\omega = n\omega_1$ ,  $k = k_{ns}$ ,  $C_{ns}$  — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий на входе (2),  $v_z^0$ ,  $v_\theta^0$  — скорость стационарного решения (Пуазеля).

$$v_z^0 = \frac{a^2 p_1}{4\rho\nu} (1 - \xi^2)$$

где  $p_1$  — градиент давления стационарного течения. Поскольку в момент открытия клапана среднее значение скорости  $v_z$  равно нулю (расход равен нулю), то значение  $p_1$  можно определить из условия

$$\int_0^1 v_z \xi d\xi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \tau = 0 \quad (5)$$

Решение Стокса для  $v_\theta^0$ , удовлетворяющее условием прилипания, является сингулярным при  $\xi = 0$  и имеет вид

$$v_\theta^0 = C(\xi - 1/\xi) \quad (6)$$

Постоянная  $C$  выражается через удельный момент количества  $M_z$  движения следующей формулой

$$M_z = 2\pi\rho a^3 \int_0^1 v_\theta^0 \xi^2 d\xi = -\frac{1}{2}\pi\rho a^3 C$$

Приведем некоторые результаты расчетов.

Продолжительность систолы принималось равным  $1/3$  сердечного цикла. При разложении функции  $f$  вида (2) ряд Фурье бралось девять членов ряда ( $N = 8$ ). При этом максимальная погрешность в равномерной метрике на отрезке  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  менее 0.01.

Выбор значений  $p_{tm} = 1087$  кгс/м<sup>2</sup>,  $P = 679$  кгс/м<sup>2</sup> или, соответственно  $p_{tm} = 80$  тор (мм р.с.),  $P = 50$  тор, осуществлялся на основе рис 1.12 [2]. При этом, градиент давления стационарного течения, определенный из условия (4), принимает значение  $p_1 = 10$  кгс/м<sup>3</sup>.

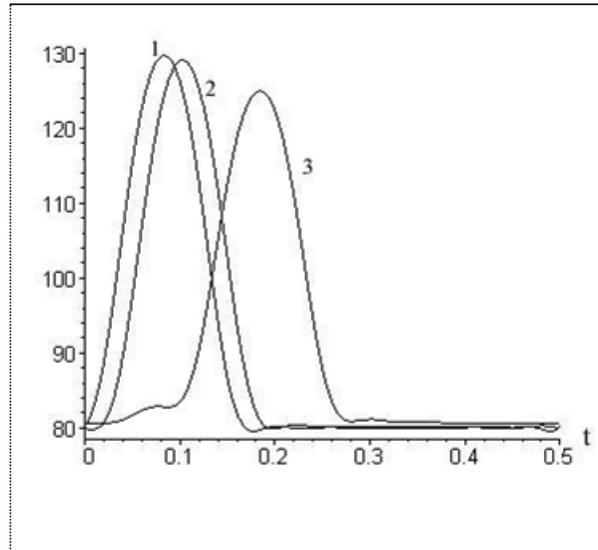


Рис. 1. Графики поведения давления на временном отрезке, равном одному циклу, в различных сечениях  $z = const$ .

Кривая 1 отвечает  $z = 0$ , кривая 2 —  $z = 10$ ,  $a = 7,3$  см, кривая 3 —  $z = 50$ ,  $a = 36,5$  см.

Следует отметить, что длина прямолинейного участка аорты собаки равна примерно 3 см [2]. Поэтому выбор сечений  $z = const$  был продиктован следующими двумя соображениями: наглядно проиллюстрировать отсутствие дисперсии и степень затухания.

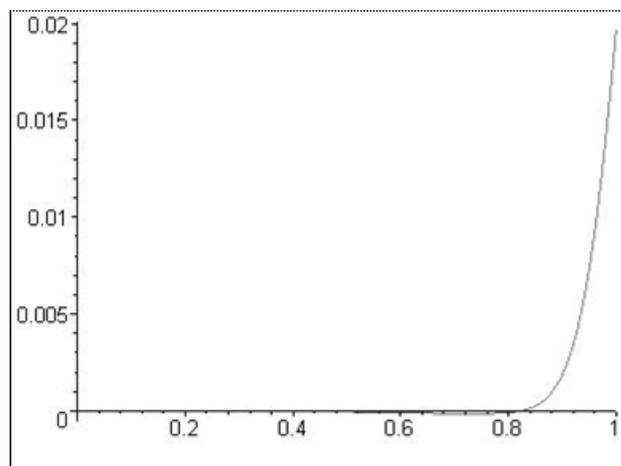


Рис. 2. Распределение скорости  $v_\theta$  в том же сечении и в тот же момент времени.

Из рисунка видно, что распределение  $v_\theta$  имеет характер погранслоя, локализованного у стенки сосуда.

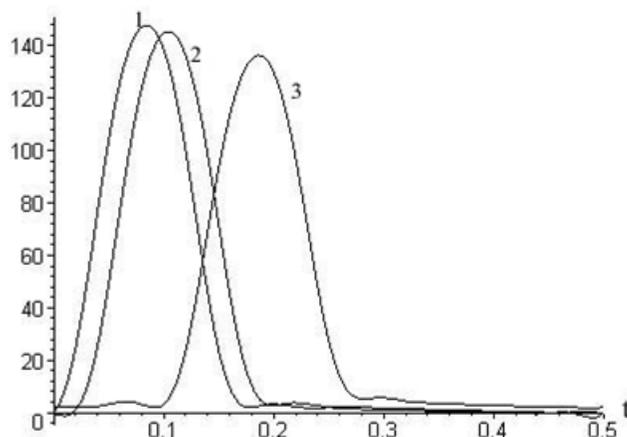


Рис. 3. Поведение во времени расхода  $Q$  в различных сечениях

Следует отметить, что расчетные графики достаточно хорошо отвечают экспериментально снятым кривым расхода, изображенным на рис. 1.16 [2].

Для сравнения с экспериментальными данными, приводимыми в таблице 1.1 [2] приведем следующие результаты расчета: среднее по сечению и по времени скорости  $v_{ss} = 0.163$  м/с попадает в вилку экспериментальных значений 0,1–0,4 м/с, рассчитанное пиковое значение скорости на оси равно примерно 1,6 м/с попадает в вилку 0,4–2,9 м/с.

Описанные результаты расчета опирались на трехмодовую теорию. Параллельно были проведены аналогичные расчеты основных гидродинамических характеристик движения крови (давления, градиента давления, расхода, распределение скоростей по сечению и др.) по одномодовой теории, отвечающей волне давления. Проведенный сравнительный анализ показал, что практически все гидродинамические характеристики с высокой степенью совпадения описываются одномодовой теорией. Отличие наблюдается только в распределении скоростей вблизи стенки сосуда.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Добров Н.Б., Кузьмина Н.Б., Роева И.Б. Связь анатомических и гидродинамических особенностей сердца в связи сего насосной функцией. // Вестник АМН СССР. 1974. № 6. С. 22–31.
- [2] Т. Педли Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Наука, 1983. 400 с.
- [3] Богаченко С.Е., Устинов Ю.А. Об одной модели, объясняющей причину винтового пульсового движения крови в кровеносных сосудах. // Тр. III Всеросс. конф по теории упруг. Ростов-на-Дону—Азов. 13–16.11.2003., 2003. 376–378 с.
- [4] Устинов Ю.А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах.// Докл. РАН. 2004. № 3. 344–348 с.
- [5] Устинов Ю.А. Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией. // Успехи механики, октябрь-декабрь, 2003. 37–62 с.

**Bogachenko S.E., Ustinov Yu.A.** *Mathematical modeling of blood flow in arterial vessels.* Some results of researches are expounded in the real work, in which flow of blood was modeled during a systole. Thus two purposes are considered. First – to explore model possibilities by comparing the theoretical results of calculations to experimental. Second – what deposit is brought different modes of distributing of velocities and pressure. As an object of research the aorta of dog was chosen.

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

**Богуш А. И., Гладышева Т. В., Колосова Е. М.,  
Наседкин А. В.**

*Ростовский государственный университет*

Рассмотрен комплекс контактных задач с кусочно-неоднородными и непрерывно-неоднородными материальными свойствами. Для решения задач данного типа использована техника метода конечных элементов и разработано специализированное программное обеспечение на языке APDL ANSYS. Предложены следующие этапы решения: построение конечно-элементной модели для однородных тел с заданным сгущением вблизи предполагаемой зоны контакта, модификация упругих конечных элементов путем перепределения их материальных свойств в соответствии с законом изменения неоднородности, определение контактных пар конечных элементов, численное решение задачи, постпроцессорная обработка результатов контактных взаимодействий. Проведен комплекс расчетов для тестовых задач со сравнением с результатами, полученными ранее аналитическими методами. Отмечены проблемы, возникающие при рассмотрении задач контактного взаимодействия неоднородного колеса железнодорожного вагона с рельсом.

При контактных взаимодействиях в таких трибомеханических системах, как подшипники качения, зубчатые передачи, системы "колесо–рельс–тормозная колесная пара" и др., вследствие высоких давлений, пластических деформаций и контактной усталости появляются дефекты [1, 2], а также, как показывают последние исследования, изменяются механические свойства материалов в приповерхностных слоях [3]. Для повышения эффективности некоторых трибомеханических узлов в последние годы все более активно стали использовать композиционные или неоднородные материалы.

Перечисленные выше факторы определяют интерес к исследованию задач механики контактных взаимодействий для существенно неоднородных сред. Для анализа реальных трибомеханических систем, особенно с учетом неоднородности и дефектов, необходимы прямые численные методы, среди которых наибольшую эффективность продемонстрировал метод конечных элементов. В настоящее время созданы мощные конечно-элементные (КЭ) программные комплексы, предоставляющие возможности решения контактных задач механики для сложных систем. Однако стандартные средства этих пакетов позволяют исследовать тела лишь кусочно-однородной структуры, а библиотеки упругих элементов включают элементы с однородными материальными свойствами.

При рассмотрении существенно неоднородных тел в рамках метода конечных элементов возможны два подхода. Первый вариант состоит в разработке новых конечных элементов с неоднородными материальными свойствами. Второй вариант предполагает построение мелких сеток в зонах неоднородности и использование конечных элементов с однородными, но, вообще говоря, различными материальными свойствами в соответствии с заданным законом неоднородности. Очевидно,

что второй подход проще в практической реализации и обладает большей общностью, так пригоден для различных зависимостей материальных свойств от пространственных координат. В данной работе развивается второй подход с ориентацией на КЭ пакет ANSYS и его командный язык APDL. Для тестирования разрабатываемых программ рассматривается ряд модельных задач для неоднородных канонических трибомеханических систем с известными численно-аналитическими решениями [4–6].

В качестве первого примера рассмотрим задачу о вдавливании параболического штампа в двухслойное основание. Следуя [4, 5], рассмотрим задачу о контактном взаимодействии штампа параболической формы с упругим основанием ( $-h \leq y \leq 0$ ) с кусочно-неоднородными свойствами в условиях плоской деформации (рис. 1). Основание образовано двумя упругими слоями с различными материальными свойствами, жестко соединенными между собой (граница  $y = -h_1$ ) и с недеформируемой подложкой ( $y = -h = -h_1 - h_2$ ). Предполагается, что в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона. На штамп действует нормальная сила  $P$  и горизонтальная сила  $T = \mu P$ , причем штамп в процессе деформации не поворачивается. Для решения задачи будем использовать пакет ANSYS со сравнением КЭ результатов с полученными аналитически в [4, 5]. Поскольку в пакете ANSYS отсутствуют "бесконечные" упругие конечные элементы, то расчетную область необходимо ограничить по оси  $x$  введением фиктивных границ  $|x| = L$ . Границы  $|x| = L$  будем далее считать свободными от напряжений. При больших значениях  $L$  можно ожидать, что различие между ограниченными и бесконечными по оси  $x$  размерами основания не сильно скажется на характеристиках контактного взаимодействия вблизи точек контакта.

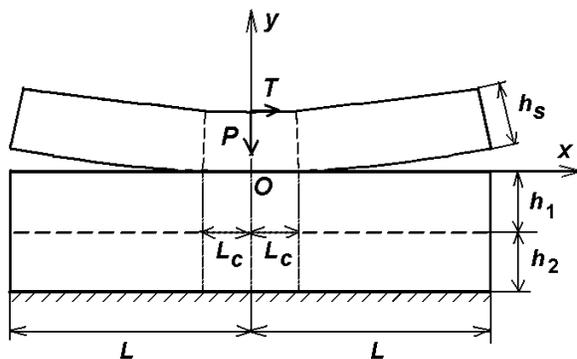


Рис. 1. Геометрия задачи и силовые факторы.

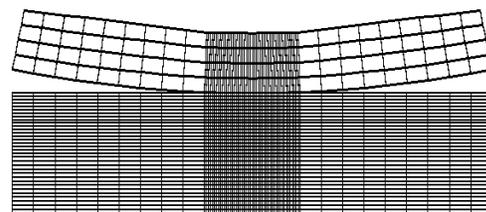


Рис. 2. Пример канонической конечно-элементная сетка.

Для решения рассматриваемой задачи в ANSYS построим каноническую конечно-элементную сетку со сгущением в зоне предполагаемого контакта из четырехугольных упругих элементов PLANE82 с опцией плоской деформации. Для этого штамп моделируется криволинейным четырехугольником толщины  $h_s$  параболической формы  $y = x^2/(2R)$  по длине, на двухслойном основании дополнительно выделяются области  $-L_c \leq x \leq 0$ ,  $0 \leq x \leq L_c$ , и на штампе также выделяются соответствующие дополнительные области (рис. 1). Тогда

каноническое разбиение может быть построено одинаковым разбиением противоположащих сторон элементарных четырехугольных областей основания и штампа. Характеристиками используемого разбиения являются следующие величины:  $n_{xc}$ ,  $n_{xl}$  – число элементов по оси  $x$  в зонах основания  $0 \leq x \leq L_c$ ,  $L_c \leq x \leq L$  и в соответствующих зонах штампа;  $n_{h1}$ ,  $n_{h2}$ ,  $n_s$  – число элементов по толщинам для верхней части основания, нижней части основания и для штампа, соответственно. Пример канонического разбиения для одного из вариантов геометрических входных параметров задачи приведен на рис. 2.

Для учета контактного взаимодействия в дополнение к элементу PLANE82 будем использовать два типа специальных контактных конечных элементов ANSYS CONTA175 и TARGE169, образующих контактные пары. Элементы CONTA175 располагаются по предполагаемым контактным границам  $|x| \leq L_c$ ,  $y = 0$ . Элементы TARGE169 помещаются на соответствующих границах штампа параболической формы.

Для того, чтобы штамп вдавливался в основание без поворота, как было принято в [5], принималось дополнительное условие связи, согласно которому вертикальные смещения крайних верхних точек штампа должны быть одинаковыми.

Основными характеристиками решения в рассматриваемой задаче являются значения контактных напряжений  $\sigma_{yy}(x) = q(x)$  и значения вертикальных перемещений  $u_y(x)$  в зоне контакта. В результате вычислений по программе, разработанной на языке APDL ANSYS, были получены решения для различных геометрических и физических параметров: изменялись толщины и относительная жесткость материалов слоев упругого основания. При расчетах были фиксированы следующие входные параметры:  $R = 1$  (м);  $h_s = R/20$ ;  $L = 0.2$  (м);  $L_c = L/5$ ;  $n_{xc} = 24$ ;  $n_{xl} = 9$ ;  $n_{h1} = 18$ ;  $n_{h2} = 15$ ;  $n_s = 4$ ; коэффициенты Пуассона материалов слоев  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ; коэффициент трения  $\mu = 0.5$ ;  $P/G_1 = 0.001$ ; модуль сдвига материала первого слоя  $G_1 = 1 \cdot 10^{10}$  (Н/м<sup>2</sup>). Модуль Юнга для штампа брался в 500 раз большим, чем для модуля Юнга второго слоя, а коэффициент Пуассона для штампа  $\nu_s = 0.49$ . Данные значения упругих констант штампа могут моделировать недеформируемый индентор, что предполагалось при построении численно-аналитического решения в [5].

Основные результаты расчетов сведены в таблицу 1 (в системе Си). Здесь введены следующие обозначения:  $H = h_2/h_1$  – относительная толщина слоев ( $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $i = 1, 2$ );  $G = G_2/G_1$  – относительная жесткость слоев ( $G_i$  – модуль сдвига  $i$ -го слоя);  $q^*(x^*) = q(x^*)/G_1$  – максимальные значения контактных напряжений в соответствующей точке  $x^*$  под штампом, полученные аналитически [5];  $q_m^*(x^*)$  – аналогичные значения, полученные в ANSYS;  $\delta$  – смещения нижней точки штампа по оси  $y$ , полученные аналитически [5];  $\delta_m$  – смещения нижней точки штампа по оси  $y$ , полученные в ANSYS.

Как видно из таблицы 1, выбранное конечно-элементное разбиение обеспечивает вполне приемлемую точность вычислений для всех рассмотренных значений входных параметров. Некоторая немонотонность значений максимальных напряжений, полученных по МКЭ, объясняется фиксированием параметров разбиения для всех расчетов, в то время как для лучшей точности при больших толщинах основания нужно было соответственно использовать и большее число конечных

$No$	$H$	$G$	$h_1$	$\delta \cdot 10^4$ [5]	$\delta_m \cdot 10^4$	$q^*(x^*) \cdot 10^2$ [5]	$q_m^*(x^*) \cdot 10^2$
1	1	4	0.4	8.48	9.53	3.01	3.08
2	1	4	0.2	6.94	7.14	3.02	3.03
3	1	4	0.1	5.42	5.39	3.05	3.01
4	1	4	0.05	3.97	3.88	3.15	3.01
5	1	1	0.05	5.02	4.93	3.06	2.94
6	1	0.5	0.05	6.27	6.17	2.97	2.86
7	1	0.25	0.05	8.48	8.39	2.84	2.73
8	2	0.25	0.05	11.60	11.66	2.77	2.66
9	4	0.25	0.05	15.78	16.60	2.73	2.62

Таблица 1.

элементов. Следует также отметить, что поскольку из-за наличия сдвигающей силы  $T$  и трения, точка максимальных контактных напряжений смещается влево по оси  $x$  относительно центра, и ее определение по дискретному числу значений напряжений в контактирующих узлах дает дополнительную погрешность.

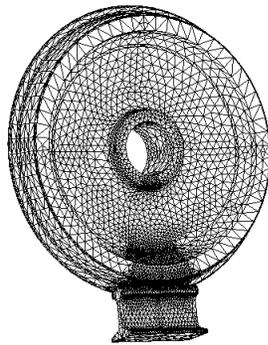


Рис. 3. Конечно-элементная сетка системы колесо-рельс.

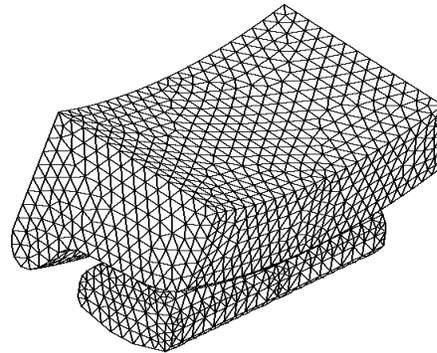


Рис. 4. Контактные зоны для метода подобластей.

Для решения аналогичных контактных задач для слоя с непрерывными и кусочно-непрерывными неоднородными жесткостными свойствами по толщине в плоской и осесимметричных постановках [6] была разработана следующая методология. Вначале строились конечно-элементной модели для однородных тел, естественно, с необходимым сгущением в предполагаемой зоне контакта, а затем модули жесткости конечных элементов основания модифицировались путем переопределения их значений в центральных точках элементов в соответствии с законом изменения неоднородности. Дальнейшие процедуры решения контактных задач выполнялись также, как и для рассмотренного выше примера двухслойного основания. Ограниченность объема статьи не позволяет привести здесь подробно результаты решений для сред с непрерывными и кусочно-непрерывными неоднородными жесткостными свойствами. Отметим лишь, что проведенные конечно-

элементные эксперименты дали достаточно хорошее согласование с численно--аналитическими результатами [6], что будет представлено в более расширенной публикации.

При рассмотрении задач контактного взаимодействия неоднородного колеса железнодорожного вагона с рельсом дополнительно к отмеченным этапам желательно использовать также прием, известный как метод подобластей. При таком подходе вначале строится полная конечно-элементная модель всей изучаемой системы с выделенными зонами (подобластями) контактирующих частей, для которых необходимо использовать значительно более мелкое разбиение (рис. 3). Из решения задачи для всей модели находятся силовые факторы, которые должны быть приложены на границах подмодели, а затем решаются задачи для подмодели с требуемым мелким конечно-элементным разбиением (рис. 4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-08-18720, 06-08-01257).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Контактно-усталостные повреждения колес грузовых вагонов / Под. ред. С.М.Захарова. М.: Интекст, 2004. 496 с.
- [2] Сакало В.И., Косов В.С. Контактные задачи железнодорожного транспорта. М.: Машиностроение, 2004. 160 с.
- [3] Колесников В.И. Разработка численных и аналитических методов расчета контактного взаимодействия трибомеханических систем с учетом неоднородностей и дефектов применительно к паре колесо-рельс // IX Всеросс. съезд по теоретич. и прикл. механике. Аннотации докладов. Т.III (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006). Нижний Новгород: изд-во Нижегородск. госун-та им. Н.И.Лобачевского, 2006. С. 114.
- [4] Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
- [5] Чебаков М.И. Взаимодействие штампа и двухслойного основания при наличии сил трения в области контакта // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. N.1. С.60-66.
- [6] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Трубочик И.С., Кренев Л.И. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

**Boguch A.I., Gladicheva T.V., Kolosova E.M., Nasedkin A.V.** *About some particularities of the finite element solution of the contact problems for heterogeneous media.* The system of contact problems with piecewise heterogeneous and continuous heterogeneous material properties is considered. The finite element technique is used and the specialized software in language APDL ANSYS is developed for the solution of the given problems. The following stages of the solution are offered: construction of finite element model for homogeneous bodies with the concentration near to a supposed contact zone, modifying of the elastic finite elements by redefinition of their material properties according to the law of heterogeneity, definition of the contact finite element pairs, the numerical solution and the processing of the contact interaction results. The set of calculations for test problems with comparison with the results received earlier by analytical methods is carried out. The problems of the contact interaction between heterogeneous wheel and a rail are noted.

# КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА МНОГОКРАТНО ПЕРЕОТРАЖЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

**Боев Н. В., Троян Э. А.**

*Ростовский государственный университет и НИИ механики и прикладной  
математики им. Воровича И.И. РГУ*

Построен главный член асимптотики давления в переотраженной произвольное конечное число раз высокочастотной волне от скопления препятствий, находящихся в акустической среде, вдоль луча, представляющего собой пространственную ломаную линию.

Разрабатываемый метод основан на асимптотической оценке дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы. При этом, как и в классической геометрической дифракции, разработанной в акустических задачах, следует различать высокочастотную асимптотику в локальном и глобальном смыслах. Асимптотическое решение, построенное ниже, имеет локальный характер и дает главный асимптотический член амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из точки  $x_0$  (источник), отразившегося от поверхности препятствий  $S_1, S_2, \dots, S_N$  в точках зеркального отражения  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$  и пришедшего в точку  $x_{N+1}$ . Очевидно, что такие лучи могут существовать в том случае, если все точки отражения, а также точка приема  $x_{N+1}$  находятся в области “света”.

Давление в высокочастотной падающей волне в точке  $y$  акустической среды имеет вид  $p^{inc}(y, t) = p^{inc}(y)e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  – частота колебаний:

$$p^{inc}(y) = R_0^{-1}e^{-ikR_0}, \quad R_0 = |x_0 - y|. \quad (1)$$

Здесь  $k = \omega/c$ ,  $c$  – волновое число и скорость распространения волны в акустической среде.

Основу формирования интегрального представления давления в  $N$  раз переотраженной акустической волне составляет модификация интегрального представления Кирхгофа [1].

Пусть из точки  $x_0$  акустической среды распространяется высокочастотная сферическая волна (1). Будем считать, что возможна реализация распространения акустической волны вдоль луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - y_3^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$ , где точки зеркального отражения  $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$  могут принадлежать как поверхности одного рассеивателя, так и граничным поверхностям различных  $N$  рассеивателей. Однако возможны и случаи последовательного расположения по несколько точек зеркального отражения на поверхностях отдельных рассеивателей, в то время как на других присутствует только одна точка отражения. Волна принимается в точке  $x_{N+1}$  акустической среды. В дальнейшем будем рассматривать локальную постановку задачи, в рамках которой в высокочастотном режиме колебаний давление в точке приема определяется отражением волны от малых окрестностей  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$  граничных поверхностей в точках зеркального отражения  $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$ .

Остановимся на формировании интегрального представления давления  $p(x_{N+1})$  в отраженной волне в точке приема  $x_{N+1}$ . Давление в  $N$  раз отраженной волне в точке  $x_{N+1}$  будем находить интегрированием по окрестности  $S_N^*$  последней точки зеркального отражения  $y_N^*$  лучей, полученных при однократном отражении от окрестности  $S_{N-1}^*$  предпоследней точки зеркального отражения  $y_{N-1}^*$ . Давление в точке приема  $p(x_{N+1})$  дается следующей формулой

$$p(x_{N+1}) = \iint_{S_N^*} 2p(y_N) \frac{\partial \Phi(y_N, x_{N+1})}{\partial n_N dS_N}. \quad (2)$$

Здесь функция Грина,  $p(y_N)$  – давление в падающей волне в точке  $y_N \in S_N^*$  окрестности  $y_N^*$ , которое определяется после отражения на окрестности  $S_{N-1}^*$  точки  $y_{N-1}^*$ ,  $n_N$  – нормаль к поверхности  $S_N^*$  в точке  $y_N$ , направленная в сторону акустической среды.

В то же время давление  $p(y_N)$  само выражается в виде интегрального представления через падающую на окрестность  $S_N^*$  волну, пришедшую после отражения на окрестности  $S_{N-1}^*$

$$p(y_N) = \iint_{S_{N-1}^*} 2p(y_{N-1}) \frac{\partial \Phi(y_{N-1}, y_N)}{\partial n_{N-1}} dS_{N-1}. \quad (3)$$

Такой же подход может быть распространен и на формирование отраженного поля на любой окрестности  $S_n^*$  вдоль рассматриваемого луча. В рамках такой модификации давление в точках окрестности  $y_n \in S_n^*$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ ) выражается формулой

$$p(y_n) = \iint_{S_{n-1}^*} 2p(y_{n-1}) \frac{\partial \Phi(y_{n-1}, y_n)}{\partial n_{n-1}} dS_{n-1}, \quad (4)$$

в которой  $p(y_n)$  – давление в точке  $y_n \in S_n^*$ ,  $p(y_{n-1})$  – давление в падающей волне в точке  $y_{n-1} \in S_{n-1}^*$  окрестности  $y_{n-1}^*$ , которое определяется после отражения волны на окрестности  $S_{n-2}^*$  точки  $y_{n-2}^*$ ,  $n_{n-1}$  – нормаль к поверхности  $S_{n-1}^*$  в точке  $y_{n-1}$ , направленная в сторону акустической среды.

Продвигаясь вдоль переотраженного луча в обратном направлении, т. е. в направлении луча  $x_{N+1} - y_N^* - \dots - y_2^* - y_1^* - x_0$ , приходим к рассмотрению формирования падающего поля на окрестности  $S_2^*$ .

В точках  $y_2$  окрестности  $S_2^*$  второй точки зеркального отражения  $y_2^*$  интегральное представление  $p(y_2)$  имеет вид:

$$p(y_2) = \iint_{S_1^*} 2p^{inc}(y_1) \frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{\partial n_1} dS_1, \quad (5)$$

где  $p^{inc}(y_1) = |x_0 - y_1|^{-1} e^{ik|x_0 - y_1|}$  определяет падающее поле, соответствующее точечному источнику  $x_0(1)$ .

Подставляя последующие интегральные представления в предыдущие (2)–(5), получаем для определения  $p(x_{N+1})$   $2N$  кратный интеграл

$$p(x_{N+1}) = 2^N \iint_{S_N^*} \iint_{S_{N_1}^*} \dots \iint_{S_2^*} \iint_{S_1^*} p^{inc} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial n_{N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_N} dS_1 dS_2 \dots dS_{N-1} dS_N. \quad (6)$$

При распространении акустической волны вдоль луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - y_3^* \dots - y_N^* - x_{N+1}$ , представляющего собой в общем случае пространственную ломаную линию, давление в точке приема  $p(x_{N+1})$  определяется следующим  $2N$  кратным интегралом, полученным с использованием главного члена асимптотики функции Грина Фпри  $k \rightarrow \infty$ :

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n \iint_{S_N^*} \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N, \quad (7)$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_n = |y_n^* - y_{n+1}^*|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad L_N = |y_N^* - x_{N+1}|.$$

Здесь  $S_n^*$  – окрестности точек зеркального отражения,  $\gamma_n$  – угол между нормалью в точке  $y_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и направлением падения волны  $\{\cos \alpha_n, \cos \beta_n, \cos \gamma_n\}$  относительно локальной декартовой системы координат. Главный член асимптотики давления получен из (1) применением многомерной ( $2N$  – мерной) стационарной фазы [2].

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{L_0} \prod_{n=1}^N \frac{\cos \gamma_n}{L_n} \frac{\exp \left\{ i \left[ k \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N} + 2N) \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_{2N})|}}, \quad (8)$$

Здесь  $\delta_{2N} = \text{sign} D_{2N}$ ;  $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$  – главные кривизны поверхности  $S_n^*$  в точке  $y_n^*$ .

Матрица Гессе  $D_{2N} = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$  является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной  $d_{ij} = d_{ji}$  со следующими ненулевыми элементами  $d_{ij}, i \leq j$ :

диагональные элементы:

$$\left\{ \begin{array}{c} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{array} \right\} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{array} \right\} \cos \gamma_n,$$

внедиагональные элементы:  $d_{2n-1, 2n} = - (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \cos \alpha_n \cos \beta_n$ ,

$$d_{2n-1, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - c_{11}^n), \quad d_{2n, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \alpha_{n+1} - c_{12}^n),$$

$$d_{2n-1, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - c_{21}^n), \quad d_{2n, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - c_{22}^n),$$

$$c_{11}^n = a_{11}^n b_{11}^n + a_{21}^n b_{21}^n + a_{31}^n b_{31}^n, \quad c_{12}^n = a_{12}^n b_{11}^n + a_{22}^n b_{31}^n + a_{32}^n b_{31}^n,$$

$$c_{21}^n = a_{11}^n b_{12}^n + a_{21}^n b_{22}^n + a_{31}^n b_{32}^n, \quad c_{22}^n = a_{12}^n b_{12}^n + a_{22}^n b_{22}^n + a_{32}^n b_{32}^n.$$

Матрицы  $A^n = (a_{ij}^n)$ ,  $B^n = (b_{ij}^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $i, j = 1, 2, 3$  — это матрицы перехода от локальной декартовой системы координат в точке  $y_{n-1}^*$  к системе координат в точке  $y_n^*$ .

Диагональные элементы определяются расстояниями между точками, участвующими в формировании луча, направлениями падающих и отраженных волн, главными кривизнами поверхностей в точках зеркального отражения. Остальные элементы определяются как расстояниями и направлениями падающих и отраженных волн, так и углами поворота плоскостей падающих лучей в точках  $y_n^*$ .

Заметим, что оценка многомерного дифракционного интеграла (7) не сводится к последовательному асимптотическому анализу двукратных интегралов, поскольку структура фазовой функции представляет собой довольно сложную комбинацию, зависящую от всех точек окрестностей  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ , участвующих в отражении луча.

Предельным переходом в формуле (8) при  $k_1^{(i)} \rightarrow 0$  и  $k_2^{(i)} \rightarrow 0$  аналитически получена известная формула N-кратного переотражения высокочастотной акустической волны от системы акустически твердых плоских отражателей для амплитуды переотраженной волны.

$$p(x_{N+1}) = - \left( \sum_{n=0}^N L_n \right)^{-1} \exp \left( ik \sum_{n=0}^N L_n \right)$$

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00155а.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теории дифракции. М.: Связь. 1978. 248 с.
- [2] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука. 1977. 368 с.

**Boyev N.V., Trojan E.A.** *Arbitrary-order multiple re-reflections of acoustic waves from a system of surface reflectors in a concert hall.* It is studied a short-wave diffraction of acoustic waves, in the case of their multiple re-reflections from a system of complex-shaped reflectors located in a concert hall.

# ВНУТРЕННЯЯ ОРИЕНТАЦИОННАЯ МОДУЛЯЦИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ПРИ ПРОКАТКЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ КАК КОНТИНУУМА КОССЕРА

**Болдырев К. Е., Келлер И. Э.**

*Пермский государственный технический университет*

Уравнения равновесия возмущений геометрически нелинейного инкрементально линейного континуума Коссера в задаче жесткого бокового стеснения бесконечной полосы анализируются на устойчивость. Найдены критические напряжения, при которых появляется продольная модуляция. Длина волны модуляции зависит от текущей изгибной жесткости, при исчезновении которой она устремляется к нулю. Результаты могут объяснять внутреннюю гофрировку ориентаций решетки при прокатке металла.

Авторами [1] экспериментально обнаружено, что образование текстур при прокатке поликристаллического металла может происходить через макроскопическое гофрирование полей перемещений и ориентаций решетки. Природа данного явления может быть связана с потерей устойчивости макрооднородного развития деформаций и поворотов решетки в данном процессе. Аналогичный механизм появления модулированных структур в стесненном с боковых сторон слоистом материале как напряженной моментной среде был исследован довольно давно [2]. В работе [3] с целью описания гофрировки прокатываемой полосы развивается нелинейная теория гофрировки слоя, зажато между нелинейно-упругими полупространствами. В настоящей работе показывается, что рассмотрение напряженной поликристаллической среды как геометрически нелинейного континуума Коссера дает довольно естественную модель для описания бифуркаций появления внутренней продольной модуляции ориентаций решетки с нетривиальной длиной волны в задаче для двухосно напряженного одноосно стесненного слоя. Используются полученные в [4-5] уравнения равновесия возмущений геометрически нелинейного инкрементально линейного континуума Коссера, дополнительные степени свободы которого связаны с вращением кристаллической решетки. Записаны граничные условия для бесконечной полосы, напряженной как в продольном, так и поперечном направлениях. Выяснено, что жесткие граничные условия, наложенные на боковые стороны полосы и приближенно отвечающие процессу прокатки, допускают поперечную модуляцию и совместимую с ней исчезающую на боковых сторонах продольную модуляцию, зависящую от текущих модулей сдвиговой, сцепляющей и изгибной жесткости и разности приложенных напряжений. Минимальное значение бифуркационного напряжения соответствует одной поперечной полуwave и определенному, зависящему от жесткостей, значению продольной длины волны. Исчезновение изгибной жесткости решетки соответствует нулевой длине продольной волны, т.е. в классическом, неполярном случае данная модель эффект не описывает. Полученные результаты предназначены для более разностороннего обсуждения возможных механизмов внутренней гофрировки, имеющей отношение к явлениям образования структур и текстур при больших деформациях металлов.

Итак, рассматривается плоская бесконечная полоса с однородно распределенными изотропными инкрементально линейными свойствами, находящаяся под действием однородного поля продольных  $\sigma_1$  и поперечных  $\sigma_2$  напряжений в текущей конфигурации. Среда полагается несжимаемой. В этом случае оператор равновесия возмущений функции тока  $\varphi$  и вращения  $\omega$  записывается в виде

$$(1 + \mu + \sigma)\varphi_{,1111} + 2(1 + \mu)\varphi_{,1122} + (1 + \mu - \sigma)\varphi_{,2222} + 2\mu\Delta\omega = 0, \quad (1)$$

$$\lambda\Delta\omega - \omega - \Delta\phi/2 = 0$$

или

$$(1 + \mu)\varphi_{,1111} + 2(1 + \mu)\varphi_{,1122} + (1 + \mu)\varphi_{,2222} + 2(\mu + \sigma)\omega_{22} + 2(\mu - \sigma)\omega_{11} = 0, \quad (2)$$

$$\lambda\Delta\omega - \omega - \Delta\phi/2 = 0$$

в зависимости от характера геометрической нелинейности. В (1)–(2)  $\mu$  и  $\sigma$  есть соответственно сцепляющий касательный модуль и разность приложенных напряжений  $\sigma_1 - \sigma_2$ , отнесенные к модулю сдвига,  $\lambda$  — изгибный касательный модуль, отнесенный к удвоенному сцепляющему касательному модулю, а  $\Delta$  — оператор Лапласа. Системы (1) и (2) представляют собой предельные случаи, соответствующие использованию в определяющих соотношениях яманновской и спинорной коротационных производных, смысл которых выяснен в [4]. Заметим, что в рассматриваемом случае, моделирующем прокатку,  $\sigma > 0$ .

Система уравнений (1) или (2) дополняется граничными условиями на боковых сторонах ( $x_2 = \pm a$ )

$$\delta u_2 = 0, \quad \delta t_1 = 0, \quad \omega = 0 \quad (3)$$

и на бесконечно удаленных концах ( $x_1 \rightarrow \pm\infty$ )

$$\delta u_1 = 0, \quad \delta u_2 = 0, \quad \omega = 0 \quad (4)$$

где  $\delta u_\alpha$  и  $\delta t_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  есть соответственно компоненты возмущения перемещений и номинальных поверхностных сил. Условия (3) соответствуют непрониканию частиц материала в сжимающую полосу матрицу и отсутствию трения на границах контакта полосы и матрицы. Условия (4) исключают нереалистичные решения с бесконечными значениями полей на концах полосы. Выраженные в терминах возмущений кинематических полей граничные условия принимают вид

$$\varphi_{,1} = 0, \quad (1 + \mu - \sigma)\varphi_{,22} - (1 - \mu + \sigma)\varphi_{,11} + 2\mu\omega = 0, \quad \omega = 0 \quad (x_2 = \pm a) \quad (5)$$

$$\varphi_{,1} = 0, \quad \varphi_{,2} = 0, \quad \omega = 0 \quad (x_1 \rightarrow \pm\infty) \quad (6)$$

Решения систем (1) или (2), удовлетворяющие условиям на боковых сторонах (5), имеют вид

$$\varphi = f(x_1) \cos(kx_2), \quad \omega = g(x_1) \cos(kx_2) \quad (7)$$

при  $k = \frac{\pi n}{2a}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Из вторых уравнений (1) или (2) следуют соотношения

$$\varphi_{,1111} - \varphi_{,2222} = 2(\lambda\Delta - 1)(\omega_{11} - \omega_{22}), \quad \varphi_{,1111} + \varphi_{,2222} = 2(\lambda\Delta + 1)\Delta\omega - 2\varphi_{,1122}$$

позволяющие исключить из этих систем  $\varphi$ . Учитывая (7), окончательно получим уравнение для определения функции  $g$

$$\lambda(1 + \mu - \sigma)g^{IV} + (\sigma - 1 - 2\lambda k^2(1 + \mu))g^{II} + (\sigma + 1 + \lambda k^2(1 + \mu + \sigma))k^2g = 0 \quad (8)$$

в рамках модели (1) и

$$\lambda(1 + \mu)g^{IV} + (\sigma + \mu) - (1 + 2\lambda k^2)(1 + \mu)g^{II} + ((\sigma - \mu)k^2 + (1 + \lambda k^2)(1 + \mu))k^2g = 0 \quad (9)$$

в рамках (2). Функцию  $g$  следует искать в виде

$$g(x_1) = A \cos(px_1 + \psi), \quad A, p, \psi \in R$$

удовлетворяющем граничным условиям (6). Подставляя ее в (8) или (9), получаем условия существования нетривиальных решений, которые нас и интересуют. Если данные условия записать относительно  $\sigma$ , то будем иметь

$$\sigma = \frac{\lambda(1 + \mu)(p^2 + k^2)^2 + (p^2 + k^2)}{[\lambda(p^2 + k^2) + 1](p^2 - k^2)} \quad (10)$$

для модели (1) и

$$\sigma = \frac{\lambda(1 + \mu)(p^2 + k^2)^2 + (p^2 + k^2)}{(p^2 - k^2)} \quad (11)$$

для (2). В пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  из (10) или (11) следует

$$\sigma = \frac{p^2 + k^2}{(p^2 - k^2)} \quad (12)$$

Момент бифуркации соответствует минимальному значению  $\sigma$  по всем допустимым  $k$  и  $p$ . На рис. 1 изображены зависимости  $\sigma$  от  $(p^2 + k^2)^2$  при  $n = 1$  и значениях материальных параметров  $\mu = 0.75$  и  $\lambda = 0.004$ . Сплошная линия на рис. 1 соответствует неполярной среде (12), штриховые — полярным (10) (короткие штрихи) и (11) (длинные штрихи). Все кривые имеют вертикальную асимптоту, соответствующую  $p = 1$ , кривая (12) — горизонтальную  $\sigma = 1$ , кривая (10) — горизонтальную  $\sigma = 1 + \mu$ , кривая (11) — наклонную с угловым коэффициентом  $\lambda(1 + \mu)$ . Важнейший для описываемого явления результат заключается в том, что кривые для полярных сред имеют минимальные значения в некоторых конечных точках, тогда как минимум для неполярной среды достигается при бесконечно большом значении аргумента, соответствующем нулевой длине волны. С увеличением количества полуволн  $n$  в поперечном направлении соответствующие им кривые будут располагаться над предыдущими, поэтому случай с  $n = 1$  и  $m = \frac{2ap}{\pi} \in R$ , определяемой по формулам

$$m^2 = -1 + \frac{2\eta + \sqrt{4\eta(1 - \bar{\lambda}) + 2\bar{\lambda}\mu}}{\bar{\lambda}(\mu - 2\eta)} \quad \text{или} \quad 1 + \frac{2\eta(2\eta + 1)}{\eta}$$

где  $\eta = \bar{\lambda}(1 + \mu)$ , действительно реализуется в момент бифуркации

$$\sigma = \frac{2\eta + \sqrt{4\eta(1 - \bar{\lambda}) + 2\bar{\lambda}\mu}}{2\bar{\lambda}(1 + 2\eta) + \sqrt{4\eta(1 - \bar{\lambda}) + 2\bar{\lambda}\mu}} \quad \text{или} \quad 1 + 4\eta + \sqrt{8\eta(1 + 2\eta)}$$

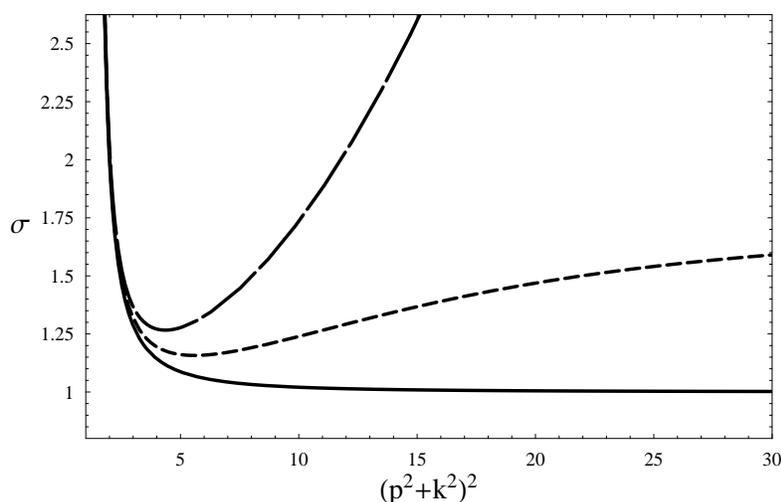


Рис. 1. Бифуркационные кривые для полярных и неполярной сред.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-96053).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Губернаторов, Б.К. и др. Новые аспекты течения металла в очаге деформации // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 4. С. 468–470.
- [2] Biot M.A. Rheological stability with couple stresses and its application to geological folding // Proc. Roy. Soc. London. 1967. V. A298, No 1455. P. 402–423.
- [3] Киселев В.В., Долгих Д.В. Нелинейно-упругая динамика трехслойной среды: солитоны поперечной гофрировки. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2002. 40 с.
- [4] Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур // Прикл. мех. и техн. физика. 2002. Т. 43. № 2. С. 176–186.
- [5] Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация геометрически нелинейной моментной кристаллической среды // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. № 2. С. 105–115.

**Boldyrev K.E., Keller I.E.** *Internal orientation modulation of crystalline lattice under rolling of metal band as Cosserat continuum.* Perturbations equilibrium equations of geometrically nonlinear incrementally linear Cosserat continuum in the problem of infinite band rigid lateral constraint are analyzed on stability. Critical stresses were found under which longitudinal modulation was appeared. This modulation wave length depends on current stiffness modula and tend to zero under bending stiffness vanishing. The results can explain internal goffering of crystal lattice under metal rolling.

# ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА БАЛАНС ЭНЕРГИИ В ТРОПОСФЕРЕ ДЛЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

**Бондарчук А. А.**

*Ростовский государственный университет*

При аналитическом исследовании потоков воздуха в тропосфере как правило используется либо модель вязкой жидкости либо модель идеального газа с вводом пограничного слоя для учета вязкости. В данной работе предлагается иной подход. Для исследования используются точные решения системы уравнений движения вязкого газа, в то время как на границах области течения влиянием вязкости пренебрегается и допускается существование поверхности разрыва. Такой прием является оправданным, поскольку из-за больших масштабов течения и малости вязкости воздуха время образования пограничного слоя заметной толщины будет превышать время существования самого течения.

Принимается, что движение тропосферы описывается уравнениями Навье-Стокса для вязкого газа

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \rho \vec{F} - \nabla p + \nabla(\lambda(\nabla \cdot \vec{V})) + 2(\nabla, (\mu \vec{\epsilon})) \\ \rho \frac{dE}{dt} &= -p(\nabla \cdot \vec{V}) + \lambda(\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2\mu \sum_{m,p=1}^3 \epsilon_{mp}^2 + (\nabla \cdot (k \nabla T)) + \rho q.\end{aligned}$$

Здесь  $\vec{V}$  — вектор скорости частицы газа,  $\vec{F} = \vec{g}$  — вектор силы тяжести,  $E$  — внутренняя энергия,  $T$  — температура,  $p$  — давление в газе,  $\rho$  — плотность,  $\vec{\epsilon}$  — тензор скоростей деформаций,  $\epsilon_{mp}$  — компоненты тензора скоростей деформаций,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $\lambda$  — коэффициент объемной вязкости,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $q$  — приток теплового излучения.

Используются общепринятые для совершенного газа связи:

$$p = R T \rho, \quad E = C_v T, \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu, \quad k = \frac{C_p \mu}{Pr},$$

где  $C_p$  коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении,  $C$  коэффициент удельной теплоемкости при постоянном объеме,  $Pr$  — число Прандтля. Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  принимается постоянным.

Рассматривается установившееся, осесимметричное вращательное течение газа в поле силы тяжести и с учетом вращения Земли в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$  (уравнения движения вязкого газа в цилиндрической системе координат приводятся в [1]). Согласно общепринятой практике, для учета сил Кориолиса используется только вертикальная составляющая вектора угловой скорости вращения Земли.

1. Безвихревое течение газа с полем скоростей как от вертикальной вихревой нити

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{A_\phi}{r} \\ T &= T_0 + \frac{Pr}{C_p} \left( -2gz - \frac{A_\phi^2}{r^2} + 2A_\phi\omega \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right) \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\left(\frac{C_p}{2PrR}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\left(\frac{C_p}{2PrR}-1\right)}. \end{aligned}$$

Здесь  $r_0$  — внешний радиус области течения,  $\omega = 2\Omega \sin(\psi)$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\psi$  — географическая широта. При  $\omega = 0$  данное решение переходит в решение полученное в [1].

Следует отметить, что в отличие от исходного решения, полученного без учета вращения Земли, здесь в формуле для температуры присутствует логарифм, что, вообще говоря, не дает возможности применять это решение к бесконечной области (не выполняется условие ограниченности температуры при  $r \rightarrow \infty$ ). Однако как показывают расчеты, вследствие очень медленного роста логарифма, даже на расстоянии от центра сравнимом с размером Земли не возникает заметных отличий в величине температуры.

Рассмотрим изменение полной энергии частиц газа по сравнению с состоянием покоя

$$E + T - E_0 = -\rho \frac{A_\phi^2}{r^2} \left( \frac{C_v Pr}{C_p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{C_v \rho Pr}{C_p} 2A_\phi \omega \ln \left( \frac{r}{r_0} \right). \quad (1)$$

Для воздуха значение множителя при первом слагаемом изменяется от 0 при  $Pr = 0.7$  до 0.035 при  $Pr = 0.75$ . Таким образом сокращается от 96% до 100% вклада слагаемых не учитывающих вращения Земли. В таких условиях даже при очень малых изменениях величины температуры из за вращения Земли вклад в изменение полной энергии оказывается довольно существенным (понятно, что при  $Pr = 0.7$  изменение полной энергии происходит только за счет вращения Земли). Изменение удельной энергии частиц газа для тропического циклона с внутренним радиусом 5 км, внешним — 15 км и максимальной скоростью ветра 80 м/с при  $Pr = 0.71$ , будет примерно на 15% будет за счет вклада от вращения Земли, причем этот вклад может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от направления вращения воздуха в тропическом циклоне. Еще более значимым вклад от вращения Земли становится для циклонов и антициклонов, имеющих меньшую скорость вращения воздуха и большие размеры.

2. Однопараметрическое семейство решений описывающих вращение массы газа по закону вращения твердого тела с произвольной угловой скоростью с объемным притоком тепла

$$\begin{aligned} V_\phi &= A_\phi r \\ T &= T_0 - \frac{g}{RK} z + \frac{A_\phi^2 - A_\phi \omega}{2RK} r^2 \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^K \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{K-1} \\ Q &= -\frac{2(A_\phi^2 - A_\phi \omega) K \mu C_p}{PrR}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $Q$  — объемный приток тепла,  $K$  — числовой параметр.

Данное семейство решений было опубликовано в [3] и при  $\omega = 0$  переходит в решение полученное в [2]. Здесь влияние вращения Земли на структуру решения сводится к замене величины  $A_\phi^2$  на  $(A_\phi^2 - A_\phi\omega)$  в формуле для температуры. Для потоков с малой областью течения и большой скоростью вращения типа торнадо это изменение будет пренебрежимо мало. В то же время для крупномасштабных течений с угловой скоростью сравнимой с угловой скоростью вращения Земли это изменение будет весьма существенным, а при  $-\Omega < A_\phi < 0$  (когда значение  $(A_\phi^2 - A_\phi\omega)$  становится меньше нуля, что, конечно невозможно для  $A_\phi^2$ ) формулы описывают такие течения, которые не могут быть получены без учета вращения Земли.

Из-за наличия в данном решении притока тепла нет возможности провести анализ изменения полной энергии частиц газа, как это было сделано в предыдущем случае. Однако в целом вывод остается прежним — вклад от вращения Земли незначителен для течений небольшого размера и с большими скоростями вращения и имеет существенное значение для течений большого размера с малыми скоростями вращения воздуха.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Снопов А.И., Бондарчук А.А. Некоторые точные решения уравнений движения вязкого газа для тропосферы при адиабатических условиях. // Современные проблемы МСС. Труды седьмой международной конференции. Ростов-на-Дону, 22-24 октября 2001 года, том 1. С. 214–217.
- [2] Бондарчук А.А. Вращение тропосферы как твердого тела // XIII международная конференция. Математика. Экономика. Образование. Ростов-на-Дону, 29 мая–5 июня 2005 г. Труды. С. 68–71.
- [3] Бондарчук А.А. Некоторые точные решения уравнений движения вязкого газа для тропосферы с учетом вращения Земли // XIV международная конференция. Математика. Экономика. Образование. Ростов-на-Дону. 28 мая–3 июня 2006 г. Тезисы докладов. С. 123–124.
- [4] Бондарчук А.А. Температурно-вязкие эффекты в тропосфере, порожденные вращением Земли // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г. Аннотации докладов. С. 132–133.

**Bondarchuk A.A.** *Influence of the Earth rotation on energy balance in troposphere for whirling flows.* Influence of Earth rotation on energy balance in troposphere is researched by the means of comparing exact solutions of Navier-Stokes equations with and without respect for Earth rotation.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ В СТЕРЖНЕ

**Бочарова О. В.**

*Ростовский государственный университет*

В работе предложен итерационный алгоритм восстановления модуля упругости в стержне, основанный на аппарате интегральных уравнений. Рассмотрены конкретные примеры восстановления.

Рассматривается задача об установившихся продольных колебаниях с частотой  $\omega$  прямолинейного упругого неоднородного изотропного стержня длины  $l$  под действием периодической силы. Соответствующая краевая задача имеет вид :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \rho(x)F(x)\omega^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ E(l)F(l)\frac{\partial u(l)}{\partial x} &= -P \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $E(x)$  — модуль упругости,  $\rho(x)$  — плотность,  $F(x)$  — площадь поперечного сечения. Также известна дополнительная информация о решении вида

$$u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (2)$$

Возможны следующие постановки обратной задачи:

1.  $F$  — постоянная, по известной функции  $\rho(x)$  найти  $E(x)$  из условия (2),
2.  $F$  — постоянная, по известной функции  $E(x)$  найти  $\rho(x)$  из условия (2),
3.  $E, \rho$  — постоянные,  $F(x)$  неизвестна и определяется из условия (2).

Третья постановка задачи была рассмотрена в работе [1]. В настоящей статье остановимся подробно на первой постановке задачи.

Пусть  $\rho, F$  — постоянные, тогда задача (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \rho\omega^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ E(l)\frac{\partial u(l)}{\partial x} &= -P \end{aligned} \quad (3)$$

Вместе с условием (2) эта задача представляет собой коэффициентную обратную задачу для дифференциального оператора 2-го порядка и является нелинейной и некорректной проблемой [2]. Она может быть сведена к последовательному решению некоторых прямых задач для неоднородного стержня и интегральному

уравнению Фредгольма 1-го рода с кусочно-гладким ядром, подобно тому как это реализовано в [3] для общего 3-мерного случая. Построим итерационный процесс, используя метод линеаризации. Будем искать  $E(x)$  и  $u(x)$  в виде:  
 $E(x) = E_0(x) + \varepsilon E_0(x)\eta(x)$ ,  $u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ . Подставив в задачу (3) представление для  $E(x)$  и  $u(x)$ , соберем слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Тогда получим 2 краевые задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(E_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}) + \rho\omega^2 u_0 &= 0 \\ u_0(0) &= 0 \\ E_0(l)\frac{\partial u_0(l)}{\partial x} &= -P \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(E_0(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + E_0(x)\eta(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}) + \rho\omega^2 u_1 &= 0 \\ u_1(0) &= 0 \\ \frac{\partial u_1(l)}{\partial x} + \eta(l)\frac{\partial u_0(l)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Задачи (4), (5) представляют собой однотипные краевые задачи, решение которых может быть построено при помощи сведения к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода и последующей их дискретизации на основе простейших квадратурных формул и процедуре обращения линейных систем с хорошо обусловленной матрицей. Так, например, задача (5) сводится к интегральному уравнению следующего вида

$$\begin{aligned} u_0(x) - \rho\omega^2 \int_0^l u_0(t)W(t,x)dt &= -P \int_0^x \frac{d\xi}{E_0(\xi)} \\ W(t,x) &= \begin{cases} \int_0^t \frac{d\xi}{E_0(\xi)}, & t \in [0, x], \\ \int_0^x \frac{d\xi}{E_0(\xi)}, & t \in [x, l] \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения связи неизвестной функции  $\eta(x)$  и известной  $f(\omega)$  нет необходимости решать обе краевые задачи (4), (5). Используя условие ортогональности, умножим уравнение движения в (4) на  $u_1$ , уравнение движения в (5) на  $u_0$  и, вычитая почленно, проинтегрируем от 0 до  $l$ . Интегрируя далее по частям и используя граничные условия в (4) и (5), придем к следующему операторному уравнению, которое представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с кусочно-гладким ядром (7):

$$\int_0^l \left( \frac{\partial u_0(x, \omega)}{\partial x} \right)^2 E_1(x) dx = P u_1(l, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (7)$$

где  $E_1(x) = \eta(x)E_0(x)$ .

Отметим, что процедура обращения этого интегрального уравнения представляет

собой некорректную задачу, требующую регуляризации [2]. На основе системы уравнений (6)–(7) можно построить итерационный процесс,  $i$ -тый шаг которого выглядит следующим образом:

$$u_0^i(x) - \rho\omega^2 \int_0^l u_0^i(t)W^i(t,x)dt = -P \int_0^x \frac{d\xi}{E_0^i(\xi)} \quad (8)$$

$$W^i(t,x) = \begin{cases} \int_0^t \frac{d\xi}{E_0^i(\xi)}, & t \in [0,x], \\ \int_0^x \frac{d\xi}{E_0^i(\xi)}, & t \in [x,l] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1^i(l,\omega) &= f(\omega) - u_0^i(l,\omega) \\ \int_0^l \left( \frac{\partial u_0^i(x,\omega)}{\partial x} \right)^2 E_1^i(x) dx &= Pu_1^i(l,\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ E_0^{i+1}(x) &= E_0^i(x) + E_1^i(x). \end{aligned}$$

Первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. При этом есть две возможности его построения, а выбор того или иного пути зависит от априорной информации о гладкости искомой функции. При наличии информации о гладкости решения  $E_0(x)$  строилась в классе линейных положительных ограниченных функций  $E_0(x) = a_0 + a_1x$ , причем из условия ограниченности модуля упругости  $0 < E_- \leq E_0(x) \leq E_+$  получены следующие ограничения на константы  $a_0$  и  $a_1$ :

$$\begin{aligned} E_- &\leq a_0 \leq E_+ \\ E_- &\leq a_0 + a_1 \leq E_+, \end{aligned} \quad (9)$$

которые определяют компактное множество  $U$  на плоскости  $(a_0, a_1)$ .

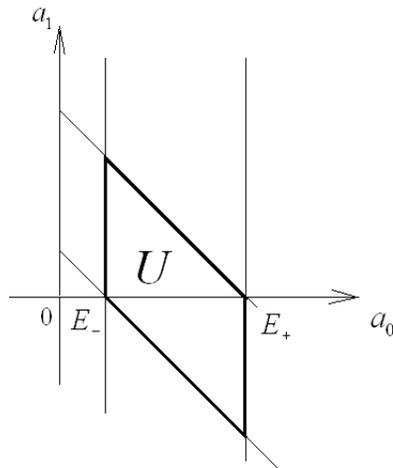


Рис. 1. Множество  $U$

Сами значения постоянных  $a_0$  и  $a_1$  находились из условия минимума функционала невязки на множестве  $U$ :

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |u(l, \omega) - f(\omega)|^2 d\omega, \quad (10)$$

где  $u(l, \omega)$  — функция смещения на свободном конце стержня при  $E(x) = a_0 + a_1x$ . При отсутствии информации о гладкости начальное приближение ищется в классе кусочно-постоянных функций, параметризуемых двумя или тремя параметрами, которые определяются из условия минимума функционала невязки.

Была проведена серия вычислительных экспериментов для разных законов изменения  $E(x)$ . На рисунке 2 показаны результаты восстановления гладкой функции  $E(x) = \exp(2x)$ . Здесь и далее сплошной линией показан график функции для исходного модуля упругости, квадратиками — для восстановленного. Прерывистой линией показано начальное приближение, найденное из условия минимума функционала невязки. Для восстановления функции  $E(x)$  использовался итерационный процесс, на первом этапе которого находится решение в классе линейных функций, как это описано выше. В результате обращения компактного оператора вида (4) находилась поправка к модулю упругости, с учетом которой производился следующий этап итерационного процесса. На рисунке приведены результаты восстановления модуля упругости после 3-х шагов итерационного процесса. Дальнейшие расчеты по итерационной схеме практически не уточняют результат.

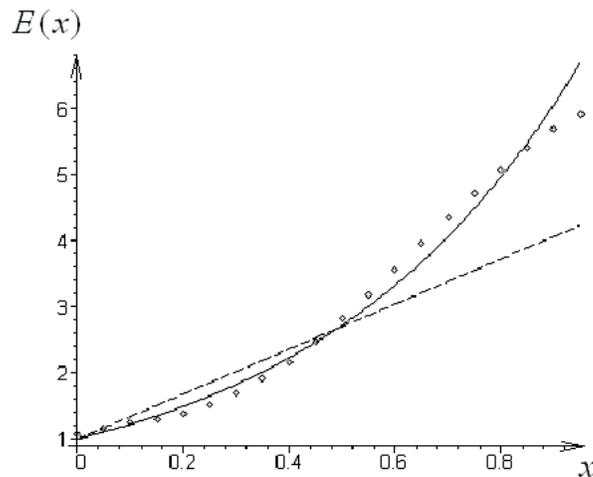


Рис. 2. Восстановление функции  $E(x) = \exp(2x)$

На рисунке 3 приведены результаты следующего эксперимента. Рассматривался стержень, состоящий из 2-х различных материалов. Известным считалось значение модуля упругости на свободном конце стержня. Начальное приближение в этом случае находилось в классе кусочно-постоянных функций. Точка разры-

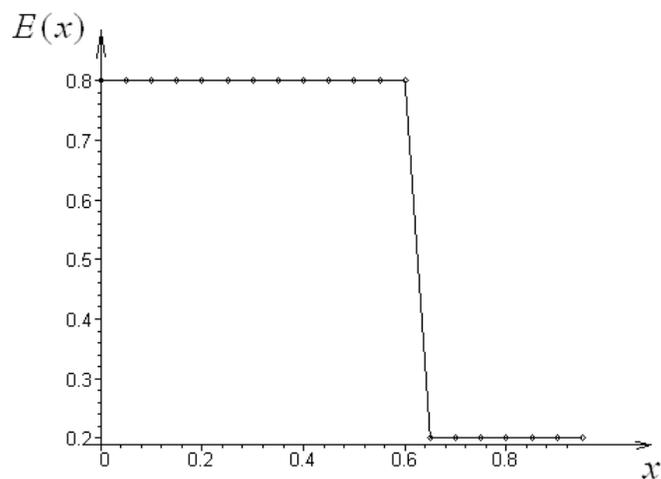


Рис. 3. Восстановление кусочно-постоянной функции

ва и значение модуля упругости для второй части стержня находились из условия минимума функционала невязки; результаты восстановления этих параметров весьма мало отличаются от истинных.

Автор выражает благодарность за постановку задачи и помощь в ее решении профессору кафедры теории упругости А.О. Ватульяну. Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 05-01-00734.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бочарова О.В., Ватульян А. О., Жарков Р. С. Реконструкция полости в упругом стержне // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2006. № 2. С. 28–32.
- [2] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
- [3] Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН. 2005. Т. 405 No 3. С. 343–345.

**Bocharova O.V.** *Identification of modulus of elasticity in the rod.* In work the iteration algorithm of reconstruction of modulus of elasticity in the rod based on the apparatus of integral equations is proposed. Concrete examples of reconstruction are examined.

# ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА С ТОНКОДИСПЕРСНЫМИ ДОБАВКАМИ ИЗ ТЕХНОГЕННЫХ ОТХОДОВ

**Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Огороков Е. П.,  
Павлова Л. Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Из различных видов бетона в ближайшем будущем расширится применение мелкозернистого бетона. Из него легко изготавливать изделия, как методом пресования, так и методом литья, что особенно удобно для монолитного бетонирования и изготовления тонкостенных конструкций.

В мелкозернистом бетоне особое влияние на свойства бетона оказывают заполнители и наполнители. В данной работе объектом исследования был мелкозернистый бетон на материалах из золошлаковых отходов и горелых шахтных пород. Результаты лабораторных исследований и производственных испытаний показали, что применение в составе бетона золошлаковых отходов и горелых пород в виде заполнителей и тонкодисперсных добавок сопровождается повышением проектной прочности мелкозернистого бетона при меньших расходах цемента. Заполнители из золошлаковых отходов и горелых шахтных пород относятся к крупнозернистым пескам, не содержат глинистых и илистых примесей, способны проявлять гидравлическую активность, в сочетании с тонкодисперсными добавками создают оптимальный гранулометрический состав бетонной смеси, обеспечивающий плотную упаковку частиц при твердении бетонной смеси. Лещадные зерна заполнителей из горелых пород в определенном смысле являются элементами короткой арматуры, создавая эффект дисперсного армирования [1]. Армирующий эффект проявляется в повышении прочности бетона. Тонкодисперсные добавки заменяют часть цемента и являются микронаполнителями вяжущего. В составе бетона тонкодисперсные добавки (зола или горелая порода) в смеси с цементом являются комплексным смешанным вяжущим, общее количество которого превышает по массе количество вяжущего в песчаном бетоне и достаточно для заполнения всех пустот и обмазки зерен заполнителя. В этом заключается преимущество мелкозернистых бетонов, содержащих тонкодисперсные добавки из техногенных отходов. Введение таких добавок положительно сказывается на реологических свойствах бетонных смесей: повышается пластичность, связность, водоудерживающая способность, улучшается однородность, обрабатываемость бетонной смеси. Так, удобоукладываемость смеси с золой значительно улучшается, отсутствуют седиментационные явления. Равноподвижные по осадке конуса бетонные смеси с золой имеют улучшенные формовочные свойства, чем без добавок золы. Качество поверхности изделий улучшается за счет сокращения количества крупных раковин и пор. Пластифицирующий эффект молотой горелой породы ниже, чем у золы. В основном это связано с формой, пористостью и шероховатостью поверхности частиц породы.

Наибольшая прочность мелкозернистого бетона с тонкодисперсными добавками достигается при определенном оптимальном соотношении между вяжущим и заполнителем. Как следует из полученных экспериментальных данных, интервал оптимальности соотношения "вяжущее : заполнитель" находится в пределах 1:1,8–1:2,15. При этом соотношении достигается максимальная плотность бетонной смеси. При меньших расходах цемента удобоукладываемость смеси постепенно снижается, что затрудняет ее укладку и приводит к постепенному понижению прочности и плотности бетона. При более высоком содержании цемента возрастает количество избыточной воды в бетоне, соответственно увеличивается пористость и понижается прочность.

Введение тонкодисперсных добавок повышает нормальную густоту смешанного вяжущего ("цемент+микронаполнитель") и увеличивает водопотребность этой смеси. Микронаполнителем является зола сухого отбора или молотая горелая порода. С повышением водовяжущего отношения бетона, если не увеличивать расход цемента, возрастает вероятность ухудшения структуры бетона и повышения его пористости. Отрицательное влияние увеличения водовяжущего отношения компенсируется повышенной гидратацией цемента в присутствии молотой горелой породы или золы сухого отбора. Повышение степени гидратации цемента приводит к увеличению количества новообразований, которые заполняют поры и цементируют материал.

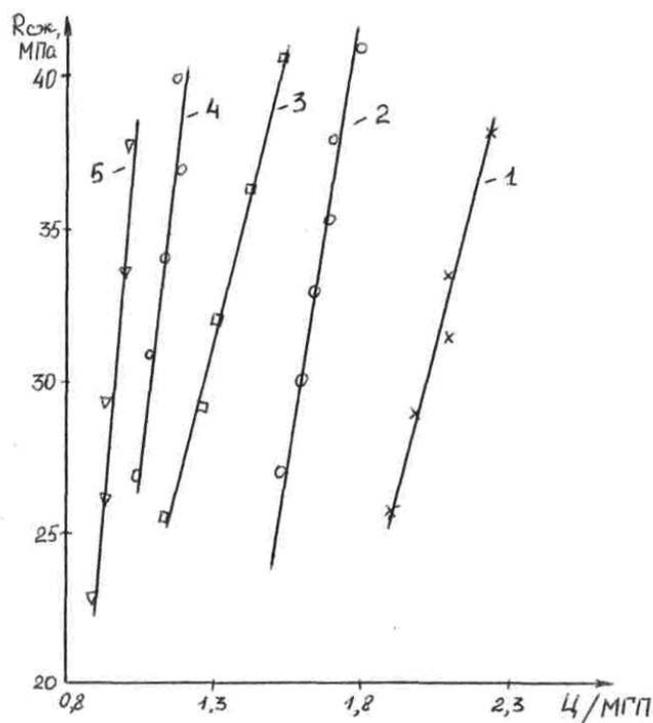


Рис. 1. Зависимость прочности мелкозернистого бетона на сжатие от соотношения цемент/молотая порода 1 – 200; 2 – 250; 3 – 300; 4 – 350; 5 – 400 кг/м<sup>3</sup> содержание молотой горелой породы в составах бетона

Из анализа результатов эксперимента следует, что для каждого состава бетона имеется оптимальное значение водовяжущего отношения, при котором получается наивысшая прочность и плотность бетона. Для практических целей можно рекомендовать мелкозернистый бетон на заполнителях из техногенных отходов состава I:1,8–1 : 2,6 при водовяжущем отношении 0,40–0,55. В случае более низких значений водовяжущего отношения при обеспечении хорошего уплотнения и большего расхода цемента можно получить мелкозернистые бетоны с прочностью свыше 40 МПа. Такие бетоны могут применяться для специальных конструкций при соответствующем технико-экономическом обосновании.

Как показывает анализ экспериментальных данных, на свойства бетонов оказывает существенное влияние количество вводимой тонкодисперсной добавки. На рис. 1 показана зависимость прочности бетона от соотношения "цемент/молотая горелая порода" при различных расходах молотой породы в составе бетона. Данные приведены для бетонов одинаковой подвижности. В таблице 1 приведены оптимальные значения соотношения цемента и тонкодисперсных добавок (золы и молотой породы) для различных расходов золы и молотой горелой породы.

Таблица 1.

Класс бетона	Расход золы сухого отбора, кг/м <sup>3</sup>	соотношение: цемент/зола сухого отбора	Расход молотой горелой породы, кг/м <sup>3</sup>	соотношение: цемент/молотая горелая порода
B7,5	120-150	3,2-4,5	180-200	2,05-2,24
B10	160-180	2,8-4,2	220-250	1,62-1,78
B15	180-220	2,0-3,5	270-300	1,28-1,53
B20	180-250	1,5-2,4	310-350	1,08-1,18
B22,5	180-250	1,8-2,8	340-400	0,95-0,99

Оптимальные значения соотношений цемент/тонкодисперсная добавка

Мелкозернистые бетоны на материалах из золошлаковых отходов и горелых шахтных породах обладают повышенной прочностью при изгибе. На рис. 2 показана зависимость прочности при изгибе от прочности при сжатии мелкозернистого бетона трех видов: с добавками золы, молотой горелой породы и цементно-песчаного бетона на традиционных материалах. Наибольшие значения прочности при изгибе имеет мелкозернистый бетон с добавкой золы, наименьшие — песчаный бетон. С добавкой золы бетон получается более плотной структуры и его прочностные характеристики выше, чем у бетона с молотой породой и у песчаного бетона.

При простом смешивании цемента с добавками золы или молотой породы пуццоланические свойства этих добавок используются не полностью. Дополнительное повышение реакционной способности золы и горелой породы достигается при совместном их измельчении с цементным клинкером. При совместном измельчении проявляется эффект механохимической активации: разрушение стекловидной оболочки вокруг зерен породы и золы, обнажение и вскрытие активных центров на поверхности частиц золы или породы, способных к пуццолановой реакции, а также обеспечивается более высокая степень однородности получаемого продукта.

Анализ экспериментальных данных показывает, что нормальная густота теста активированного вяжущего возрастает с увеличением содержания зоны или горе-

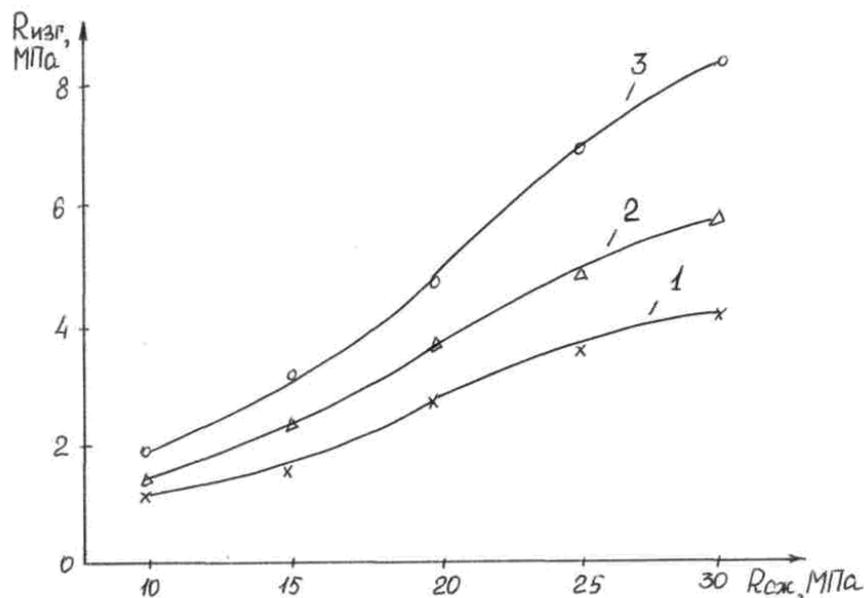


Рис. 2. Зависимость прочности мелкозернистого бетона при изгибе от его прочности на сжатие 1 — мелкозернистый песчаный бетон; 2 — мелкозернистый бетон с добавкой молотой горелой породы; 3 — мелкозернистый бетон с добавкой золы

лой породы. Для вяжущего, содержащего горелую породу, отмечается увеличение нормальной плотности до 35 по сравнению с исходным цементом. Сроки схватывания смешанных вяжущих почти во всех случаях удлиняются, первоначальный набор прочности замедляется. В возрасте 28 суток золоцементные вяжущие практически достигают прочности исходных цементов, через три месяца превышают ее. Горелопородные цементы имеют прочность, равную 74–97 от прочности контрольного состава. По прочности при изгибе смешанные цементы существенно превосходят исходный цемент.

В зависимости от состава активность вяжущих изменяется от 10,0 до 60,0 МПа, Активизирующий эффект добавок при их совместном измельчении с цементом определяется физико-химическими и минералогическими свойствами, наличием свободной поверхностной энергии применяемых добавок [2].

Для оценки эффективности использования добавок из техногенных отходов были проведены сравнительные испытания бетонов. Для каждой марки бетона готовились образцы в двух вариантах. По первому варианту в состав бетона вводилась тонкодисперсная добавка (зола или порода) взамен части цемента. По второму варианту использовалось вяжущее, приготовленное совместным измельчением гидравлической добавки с цементом, взятых в том же соотношении, что и в первом случае. Изготовление образцов и условия их твердения были идентичными.

Таблица 2.

Вид вяжущего, расход, кг/м <sup>3</sup>	Прочность бетона			
	на сжатие		при изгибе	
	пропаривание	28 сут. норм. твердения	пропаривание	28 сут. норм. твердения
Чистоцементное – 270	22,7	23,5	3,02	3,28
Цемент+зола – 342	30,3	31,6	3,91	4,65
Цемент+молотая горелая порода – 342	14,8	16,4	2,22	2,71
Активированное вяжущее на золе – 342	45,8	48,9	6,13	6,98
Активированное вяжущее на горелой породе – 342	26,3	28,2	3,25	3,17

**Примечание:** соотношение цемент:добавка=45:65 (вес. %)

Прочность бетонов на активированных вяжущих превышает проектную марку бетона на чистоцементном вяжущем в 1,2-2,1 раза, бетонов с тонкомолотыми добавками — в 1,5-1,8 раза. При этом экономия цемента достигает до 70. Наличием пуццолановой активности добавок (золы или горелой породы) объясняется способность смешанных вяжущих продолжать в течение длительного времени набирать прочность после достижения проектной. Так, например, через два года прочность золобетонов (класс бетонов В15 и В22,5) увеличилась в 1,5-1,7 раза, через шесть лет — в 2,0-2,6 раза.

Механоактивизация смешанных вяжущих значительно повышает химическую активность золы и горелой породы. Активированная зола или молотая горелая порода участвует в твердении цемента. Активизация цементного клинкера в присутствии гидравлических добавок позволяет использовать все потенциальные возможности цемента, между активированными наполнителями и частицами цемента будут возникать химические связи. Выделяющийся при гидратации цемента гидроксид кальция полностью связывается в нерастворимые низкоосновные гидросиликаты кальция, которые обладают повышенной прочностью и долговечностью. При твердении такого вяжущего создается оптимальная плотная и более долговечная структура цементного камня, способствуя получению плотного, прочного, атмосферо- и коррозионностойкого цементного камня при сокращенном расходе цементного клинкера. Особенности гидратации цемента в присутствии добавок золы и горелой породы были выявлены нами при исследовании бетонов методами физико-химического анализа [3, 4].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов В.Д. Бетоны на отходах дробления скальных пород вскрыши Курской магнитной аномалии // Изв. вузов. Строительство. 1998. № 10.
- [2] Будницкий В.М., Бражников В.Ф., Буравчук Н.И. и др. Минеральные добавки из горелых шахтных пород и зол для вяжущих и бетонов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 1998. № 4.
- [3] Буравчук Н.И., Рутьков К.И. Переработка и использование отходов добычи и сжигания твердого топлива. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ. 1997. 224 с.
- [4] Буравчук Н.И., Будницкий В.М., Бражников В.Ф. и др. Ресурсосбережение в технологии вяжущих и бетонов. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ. 1999. 176 с.

**Buravchuk N.I., Gurjanova O.V., Okorokov E.P., Pavlova L.N.** *Mechanical properties of fine concrete with fine-grained additives from technogenic waste products.* By the example of fine concrete efficiency application of sealers and fine-grained additives from a solid commercial refuse is shown

# СИСТЕМА ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

**Бурцева О. А., Кабельков А. Н., Нефедов В. В.**  
*Южно-Российский государственный технический университет  
(Новочеркасский политехнический институт)*

В работе описана математическая модель и результаты численного моделирования пассивно-активной (комбинированной) системы гашения колебаний высотных сооружений, рабочим органом которой является дополнительная связь, оборудованная электрогидравлическим исполнительным механизмом. Особенностью данной модели является представление дополнительной связи в виде трех составных частей: двух жестких балок и гидравлического демпфера. Причем гидродемпфер рассмотрен как динамическое звено, имеющее массу, жесткость “гидравлической пружины” и диссипативные характеристики.

Амплитуды колебаний высотных сооружений, вызываемых действием ветровых, сейсмических, технологических, ударных нагрузок могут достигать нескольких метров. В связи с этим возникает необходимость применения различных систем управления подавляющих колебания или ограничивающих их амплитуды. Комбинированную систему гашения колебаний высотного сооружения формируем из пассивной и активной систем. Пассивная часть представляет собой комплекс встроенных, жестко соединенных в узлах каркаса сооружения, дополнительных связей, оснащенных гидравлическими демпферами. Активная часть направлена на генерирование управляющих усилий в электрогидравлических исполнительных механизмах (ИМ) посредством изменения положения рабочего органа. Связи в конструкции располагаем согласно критерию управляемости. При составлении уравнений движения высотного сооружения, моделируемого ансамблем конечных элементов со встроенными пассивно-активными связями полагаем, что внутренние усилия и перемещения, вызываемые статическими составляющими нагрузок, заданы. Поэтому модель будет описывать малые колебания конструкции относительно стационарного состояния. Кроме того, будем основываться на следующих положениях.

1. Для общности считаем, что пассивноактивные связи расположены на всех сечениях многомерной конструкции. При этом вектор обобщенных координат записываем в виде

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{V_x}^*(t) & \mathbf{q}_{V_y}^*(t) & \mathbf{q}_{V_z}^*(t) & \mathbf{q}_{y_1^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_2^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_3^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_4^p}^*(t) \\ \mathbf{q}_{y_1^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_2^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_3^p}^*(t) & \mathbf{q}_{y_4^p}^*(t) \end{bmatrix}^*, \quad (1)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{q}_{V_w}(t) = [V_{w,1}(t), \dots, V_{w,j}(t), \dots, V_{w,n}(t)]^*$$

— векторы обобщенных координат объекта в соответствующих направлениях,

$$w = x, y, z;$$

$$\mathbf{q}_{y_w}^p(t) = [y_{w,1}^p(t), \dots, y_{w,j}^p(t), \dots, y_{w,n}^p(t)]^*$$

— векторы обобщенных перемещений поршней ИМ,

$$w = \overline{1, 4};$$

$$\mathbf{q}_{y_w}^c(t) = [y_{w,1}^c(t), \dots, y_{w,j}^c(t), \dots, y_{w,n}^c(t)]^*$$

— векторы обобщенных перемещений цилиндров ИМ,

$$w = \overline{1, 4};$$

$n$  — число сечений многомерной конструкции; \* — знак транспонирования.

2. Для ИМ, расположенного в сечении  $j$  многомерной конструкции введены следующие характеристики (рис. 1):

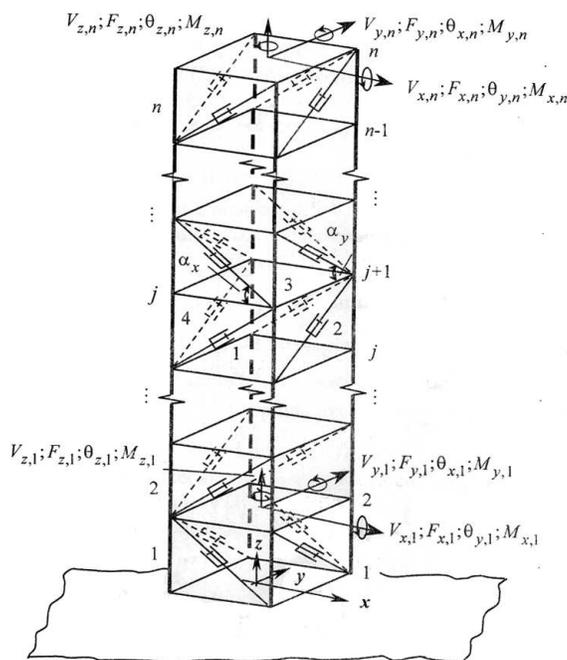


Рис. 1. Расчетная схема многомерной конструкции, оборудованной пассивно-активными связями, расположенными на всех сечениях

— масса поршня с присоединенной массой дополнительной связи  $m_{l,j}^p$ , где  $l = \overline{1, 4}$ ; — масса цилиндра с присоединенной массой дополнительной связи  $m_{l,j}^c$ ; — жесткость «гидравлической пружины», возникающей в гидродемпфере при взаимном перемещении поршня и цилиндра  $h_{l,j}^g$ ; — жесткости связи, соединяющие поршень (цилиндр) с массой сечения  $j$  ( $j - 1$ ) объекта  $h_{l,j}^{cv}$ , приняты одинаковыми, поскольку ИМ расположен в центре пассивно-активной связи; — коэффициент диссипации, учитывающий вязкое трение в гидродемпфере  $k_{l,j}^g$ , сухое трение в соединительных узлах —  $k_{l,j}^{cv}$ .

3. С целью учета инерционной и диссипативной характеристик пассивно–активной связи, используем четырехмассовую механическую модель многомерной конструкции [1] и уравнение Лагранжа 2–го рода при действии возмущающих усилий

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{F}. \quad (2)$$

Составляя уравнение (2) по компонентам вектора обобщенных координат  $\mathbf{q}(t)$ , получим векторно–матричное дифференциальное уравнение управляемого сооружения для общего случая расположения пассивно–активных связей

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_F\mathbf{F}(t) + \mathbf{B}_R\mathbf{R}(t). \quad (3)$$

В уравнении (3) введены обозначения: — инерционная матрица объекта с пассивно–активными связями

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left[ \mathbf{M}_x \quad \mathbf{M}_y \quad \mathbf{M}_z \quad \mathbf{M}_1^p \quad \mathbf{M}_2^p \quad \mathbf{M}_3^p \quad \mathbf{M}_4^p \quad \mathbf{M}_1^c \quad \mathbf{M}_2^c \quad \mathbf{M}_3^c \quad \mathbf{M}_4^c \right],$$

где

$$\mathbf{q}_w = \text{diag} \left[ m_{w,1} \quad \dots \quad m_{w,j} \quad \dots \quad m_{w,n} \right]$$

— матрицы масс объекта,  $m_{w,j}$  — масса сечения  $j$  сооружения,  $w := x, y, z$ ;

$$\mathbf{M}_l^p = \text{diag} \left[ m_{l,1}^p \quad \dots \quad m_{l,1}^p \quad \dots \quad m_{l,1}^p \right]$$

— матрицы масс поршней с присоединенной массой дополнительной связи;

$$\mathbf{M}_l^c = \text{diag} \left[ m_{l,1}^c \quad \dots \quad m_{l,1}^c \quad \dots \quad m_{l,1}^c \right]$$

— матрицы масс цилиндров с присоединенной массой дополнительной связи,  $l := \overline{1, 4}$ ; —  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}$  — матрицы диссипации и жесткости сооружения с встроенной системой управления, см. работу [1]; — блочная матрица «распределения» возмущающих усилий

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F^x & & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}_F^y & & \cdot & & & & \cdot \\ & & \mathbf{B}_F^z & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}^*$$

$$\mathbf{B}_F^x, \mathbf{B}_F^y, \mathbf{B}_F^z \in R_{n \times \nu}$$

— матрицы «распределения» возмущений по сооружению; — вектор возмущающих усилий

$$\mathbf{F}(t) = \left[ \mathbf{B}_x(t) \quad \mathbf{B}_y(t) \quad \mathbf{B}_z(t) \right]^*,$$

$$\mathbf{B}_w(t) = \left[ F_{w,1}(t) \quad \dots \quad F_{w,v}(t) \right]^*,$$

$$w := x, y, z,$$

где  $v \leq n$  — число сечений сооружения, на которые действует внешняя нагрузка; — блочная матрица «распределения» управляющих усилий в исполнительных механизмах

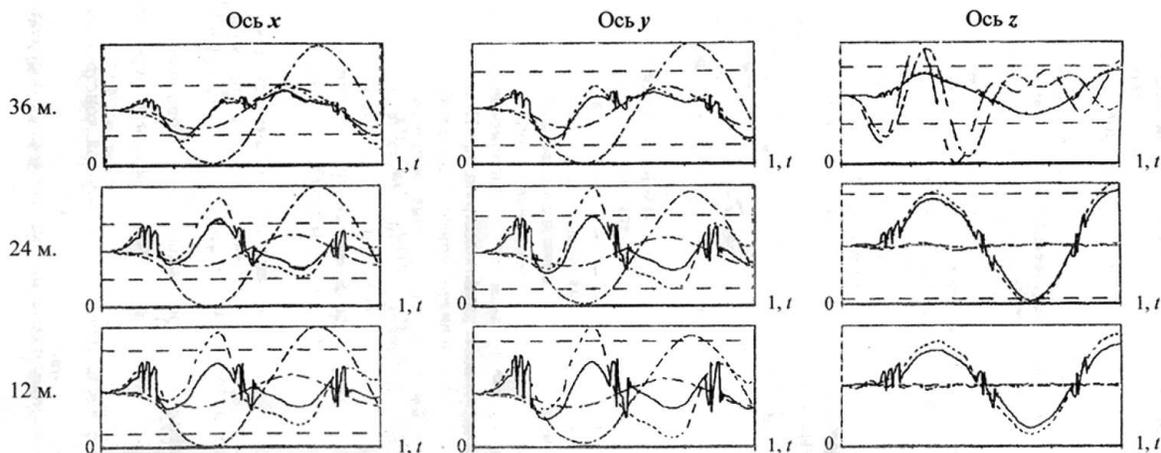


Рис. 2. Сравнительный анализ пассивного и активного гашения одного периода колебаний башенного копра при сейсмическом воздействии интенсивностью 7 баллов относительно глобальной системы координат на отметках 12, 24 и 36 метров. — допустимый уровень, .... система с жёсткими связями, -.-.- система с гидравлической пружиной, \_\_\_\_\_ сооружение с системой пассивно-активных связей, -.-.-.- сооружение с системой связей, оборудованных гидравлическим демпфером с дросселем

$$\mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & & \mathbf{I} \\ \cdot & & \cdot & & \mathbf{I} & & & \mathbf{I} \\ \cdot & & \cdot & & & \mathbf{I} & & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^*$$

$\mathbf{I}$  — единичная матрица соответствующей размерности;

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{R}_1(t) \quad \mathbf{R}_2(t) \quad \mathbf{R}_3(t) \quad \mathbf{R}_4(t)]^*,$$

$$\mathbf{R}_w(t) = [R_{w,1}(t) \quad \dots \quad R_{w,n}(t)]^*,$$

$w = \overline{1,4}$  — вектор управляющих усилий, генерируемых в исполнительных механизмах. Математическая модель комплекса ИМ сооружения имеет вид [1,2]:

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{R}(t) = \mathbf{N}\mathbf{U}(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}(t)$  — вектор управляющих напряжений, подаваемых на входе электрогидравлического усилителя;  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{N}$  — диагональные матрицы коэффициентов. В дальнейшем принято, что все исполнительные механизмы одинаковы. Численное исследование пассивно-активной системы управления проведено на примере высотного сооружения — башенного копра. Башенный копер из монолитного железобетона, возводимый в скользящей опалубке, высотой 120 м и размерами в плане 21 м x 21 м был подвергнут сейсмическому воздействию интенсивностью семь баллов с направляющими косинусами, относительно глобальной системы координат. Частота воздействия резонирует с частотой основного тона колебаний сооружения. Датчики системы измерения и дополнительные связи установлены на отметках

12м, 24м, 36 м, обеспечивая его наблюдаемость и управляемость. Относительные перемещения башенного копра: на отметке 36 м по оси  $x$  превосходят в 8 раз допустимый уровень, по оси  $y$  — в 6 раз, по оси  $z$  — в 1,5 раза; на отметке 24 м по оси  $x$  — в 7 раз, по оси  $y$  — в 6 раз, по оси  $z$  — в 1,3 раза; на отметке 12 м по оси  $x$  — в 6 раз, по оси  $y$  — в 5 раз, по оси  $z$  — не превосходят. Анализ результатов численного моделирования (рис. 2) позволяет сделать следующие выводы: — использование жестких связей и связей, оснащенных «гидравлической пружиной», изменяет частотные характеристики сооружения и позволяет «уйти» от резонанса, снижая амплитуды колебаний, однако не предохраняет сооружение от разрушения; — использование пассивных связей с гидравлическим демпфером также изменяет частотную характеристику сооружения, значительно снижая амплитуды колебаний. При этом связь сохраняет рабочую способность, а сооружение не разрушается. Вследствие снижения общей жесткости связи не достигается необходимого (полного) гашения колебаний многомерной конструкции; — использование активных связей снижает амплитуды колебаний сооружения до допустимого уровня, сохраняет целостность сооружения и рабочую способность связи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кабельков А.Н., Кузина О.А.* Математическая модель пассивно-активной системы гашения колебаний многомерных конструкций // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: ЮРГТУ, 2002. 69 с.
- [2] *Кузина О.А.* Система гашения колебаний высотных сооружений / Автореферат дисс. канд. техн. наук. М., МГИЭИМ, 2003. 20 с.

**Burtseva O.A., Kabelkov A.N., Nefedov B.B.** *System of clearing of fluctuations of high-altitude constructions.* In work the mathematical model and results of numerical modelling of the is passive-active (combined) system of clearing of fluctuations of high-altitude constructions the additional communication equipped by the electrohydraulic executive mechanism is described by which working body is. Feature of the given model is representation of additional communication in the form of three components: two rigid beams and hydraulic viscosity. And hydroviscosity it is considered as the dynamic part having weight, rigidity of "a hydraulic spring" and characteristics of dispersion.

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

**Бычков А. А.**

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается задача определения функционально неоднородного модуля сдвига в антиплоской задаче теории упругости. Применяется ранее разработанный итерационный подход. Начальное приближение строится на основе минимизации функционала невязки между собственными частотами. Рассматриваются примеры восстановления модуля для различных форм его координатной зависимости.

**Введение.** Проблема идентификации механических свойств деформируемых материалов имеет большую историю и не утрачивает своей актуальности до настоящего времени. Одной из причин этого интереса является использование композитных и функционально неоднородных материалов, в частности с ярко выраженной неоднородностью вдоль некоторой координаты, как непрерывной, так и кусочно непрерывной. Другой причиной является то обстоятельство, что задачи неразрушающего контроля такие, как реконструкции включений и полостей в упругих телах, также могут быть сформулированы как коэффициентные обратные задачи теории упругости. Ряд исследований в этой области посвящен определению одного из модулей изотропного неоднородного тела. Так, например, в работе [3] решается задача об определении модуля сдвига в линейной теории упругости. Предполагается известным одна из компонент поля смещений во всей области. Задача сводится к минимизации некоторого функционала. Эта проблема решается градиентным методом, в частности развивается подход, основанный на сопряженном операторе теории упругости. В работах [5, 6] предлагаются алгоритмы определения формы включения для проблемы Дирихле и для уравнения Гельмгольца по данным Дирихле-Неймана. В работе [4] определяются механические характеристики многослойной пластины на основе измерений смещений бесконтактным способом и КЭ расчета на основе теории, учитывающей сдвиги. Основой определения служит минимизация функционала невязки между собственными частотами и формами колебаний. Известно, что для решения обратной задачи требуется некоторая дополнительная информация, в частности, представляющая собой граничные поля смещений измеренные на каком-либо частотном или временном интервалах. Так в [1] предложен итерационный подход в задаче определения координатно неоднородных свойств упругих тел конечных размеров. В этом методе предполагается возможность измерения полей смещений на всей границе области и используется начальное распределение искомым модулей. При этом линеаризация задачи осуществляется в окрестности этого начального приближения.

В настоящей работе разработан алгоритм построения начального приближения, используемого в методе [1], который в случае априорной информации о плоскостном характере неоднородности не требует дальнейшего уточнения. Исходной информацией предложенного подхода является набор первых собственных частот

исходной задачи, который достаточно просто и точно может быть измерен в эксперименте.

**Постановка прямой и обратной задачи.** Прямая задача об установившихся колебаниях неоднородного упругого тела определяется системой уравнений:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(x)\omega^2 u_i = 0 \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)u_{k,l} \quad i, j, k, l = 1..3 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (2)$$

где  $S_u \cup S_\sigma$  — граница тела.

Обратная задача формулируется как задача определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости  $C_{ijkl}(x)$  и плотности  $\rho(x)$  по информации

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (3)$$

Так, например, в случае антиплоских колебаний [1] задача определения  $n$ -го приближения модуля сдвига  $\mu$  и плотности  $\rho$  сводится к решению интегрального уравнения:

$$\int_S \mu^{(n)} \left[ \left( \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_2} \right)^2 \right] dS - \omega^2 \int_S \rho^{(n)} (u^{(n-1)})^2 dS + \int_{l_\sigma} p(f - u^{(n-1)}) dl_x = 0, \quad \omega \in [\omega_{str}, \omega_{end}] \quad (4)$$

где  $l_\sigma$  — граница тела, на которой задано напряжение  $p$ .

Сформулированный итерационный процесс опирается на информацию о начальном распределении модуля сдвига  $\mu_0 = \mu_0(x_1, x_2)$ , от удачного выбора которого зависит его сходимость. Далее описана методика построения этого начального приближения, на основе информации о собственных частотах задачи (1)–(2).

**Описание метода.** Начальное распределение предлагается разыскивать в виде

$$\mu_0(x) = \sum_{i=1}^M a_i t_i(x), \quad (5)$$

где  $t_i(x)$  — набор координатных функций,  $a_i$  — параметры, подлежащие определению. Так как разрешающее интегральное уравнение 4 определено на некотором частотном интервале  $[\omega_{str}, \omega_{end}]$ , то определение этих параметров предлагается осуществлять на основе минимизации неквадратичного (относительно параметров  $a_i$ ) функционала невязки  $F$  между собственными частотами  $w_i$  исходной задачи (1)–(2), которые могут быть измерены в эксперименте, и частотами  $\omega_i$  соответствующей задачи с распределением (5), которые могут быть определены в результате численного решения задачи например МКЭ.

$$F = \left[ \sum_{i=1}^N (\omega_i - w_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

*Замечание 1.* Выбор параметра  $N$  согласуется со значением  $M$ , которое зависит от априорной информации о характере распределения модуля (в проделанных численных экспериментах  $N \leq 10$ ).

*Замечание 2.* В силу физического смысла функции  $\mu_0(x)$  и необходимости решать задачу на собственные значения следует в процессе минимизации требовать ее неотрицательности.

Таким образом, задача нахождения начального приближения сводится к задаче нахождения минимума

$$F(a_1, a_2, \dots, a_M) \rightarrow \min, \quad \mu_0(x) > 0. \quad (7)$$

В данной работе для этих целей реализован метод минимизации Левенберга-Марквардта [2].

**Численные эксперименты.** В проведенных численных экспериментах определялись начальные приближения (5) модуля сдвига для антиплоских колебаний областей различной геометрии (рис. 1), при разных законах распределения этого модуля. При этом в методе Левенберга-Марквардта [2] были установлена точность  $10^{-3}$  для завершения алгоритма по относительному уменьшению значения функционала  $F$  и такая же точность для завершения алгоритма по относительному изменению текущего приближения.

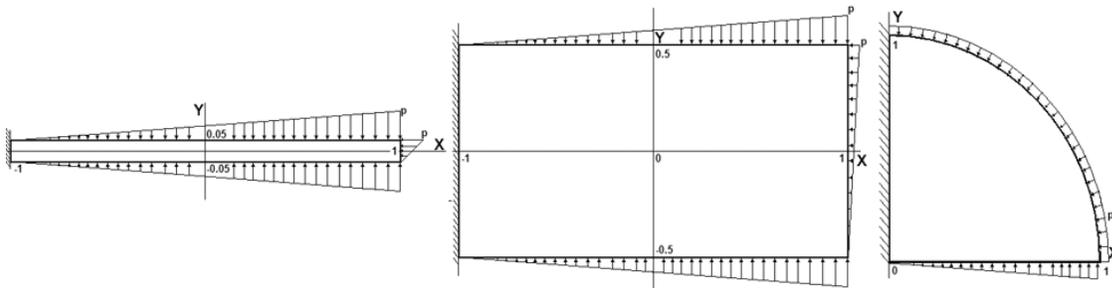


Рис. 1.

В первом численном эксперименте, в задаче о колебании вытянутого прямоугольника (рис. 1 слева), оригинальное распределение модуля сдвига выбиралось в виде линейной зависимости от координат  $x_1$ ,  $x_2$  (табл. 1. вторая колонка). Начальное приближение искалось в такой же форме

$$\mu(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3, \quad (8)$$

где  $a_i, i = 1..3$  — искомые параметры. В процедуре минимизации их начальное значение составляло  $(-0.2, -0.2, 1.1)$ . Результаты минимизации функционала (6) при выборе трех первых собственных частот  $N = 3$ , также представлены в табл. 1 (колонка 3). На рис. 2  $a$  изображено оригинальное (поверхность темного цвета) и восстановленное (поверхность белого цвета) распределения модуля, погрешность восстановления не превышает 0.5%.

В табл. 2 представлены аналогичные результаты для области, изображенной на рис. 1 в центре. При этом начальные значения искомых параметров составили  $(0.01, 0.01, 0.004)$ . А погрешность восстановления составила менее 0.5%.

Таблица 1.

	Оригинальное	Найденное
Точка	$(-0.1, -0.1, 1.0)$	$(-0.1, -0.2, 1.0)$
Модуль сдвига	$\mu(x) = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 1$	$\mu(x) = -0.1x_1 - 0.2x_2 + 1$
Собственные частоты	$w_1 = 1.789820$ $w_2 = 5.274197$ $w_3 = 8.777539$	$\omega_1 = 1.789820$ $\omega_2 = 5.274197$ $\omega_3 = 8.777541$

Таблица 2.

	Оригинальное	Найденное
Точка	$(-0.1, -0.1, 1.0)$	$(-0.0999, -0.1003, 0.9999)$
Модуль сдвига	$\mu(x) = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 1$	$\mu(x) = -0.0999x_1 - 0.1003x_2 + 0.9999$
Собственные частоты	$w_1 = 1.789772$ $w_2 = 5.272945$ $w_3 = 7.093527$	$\omega_1 = 1.789771$ $\omega_2 = 5.272934$ $\omega_3 = 7.093516$

В следующем численном для этой же области оригинальное распределение имело квадратичную зависимость (табл. 3, колонка 2). Приближение искалось в виде полного полинома второй степени

$$\mu(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1 + a_5x_2 + a_6$$

с шестью неизвестными параметрами, начальные значения которых составили  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$ , при этом в (6) число собственных частот  $N = 6$ . В табл. 3 (колонка 3), и на рисунке 2 *d* представлены результаты ми-

Таблица 3.

	Оригинальное	Найденное
Точка	$(-0.1, -0.1, 0, -0.1, -0.04, 1.171)$	$(0.009471, 0.044910, 0.001834, 0.003033, 0.045578, 0.055014)$
Модуль сдвига	$\mu(x) = -0.1x_1^2 - 0.1x_2^2 - 0.1x_1 - 0.04x_2 + 1.171$	$\mu(x) = 0.009471x_1^2 + 0.044910x_2^2 + 0.001834x_1x_2 + 0.003033x_1 + 0.045578x_2 + 0.055014$
Собственные частоты	$w_1 = 1.898956$ $w_2 = 5.604503$ $w_3 = 7.561848$ $w_4 = 9.325559$ $w_5 = 9.334971$ $w_6 = 11.93549$	$\omega_1 = 1.701387$ $\omega_2 = 5.585430$ $\omega_3 = 7.632208$ $\omega_4 = 9.146963$ $\omega_5 = 9.593377$ $\omega_6 = 11.83849$

нимизации в этом случае.

В задаче о колебаниях сектора круга (рис. 1 справа) проведены два численных эксперимента для оригинальных распределений представленных в табл. 4 и 5 (вторая колонка). В этой же таблице, и на рис. 2*b* и 2*c* представлены результаты нахождения линейного приближения.

**Заклучение.** По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- 1) в случае априорной информации о характере распределения модуля нахождение начального приближения, по предложенной в работе методике, может оказаться достаточным для завершения итерационного процесса;
- 2) в случае сложной функциональной зависимости оригинального распределения модуля, предложенная методика дает хорошее линейное начальное приближение.

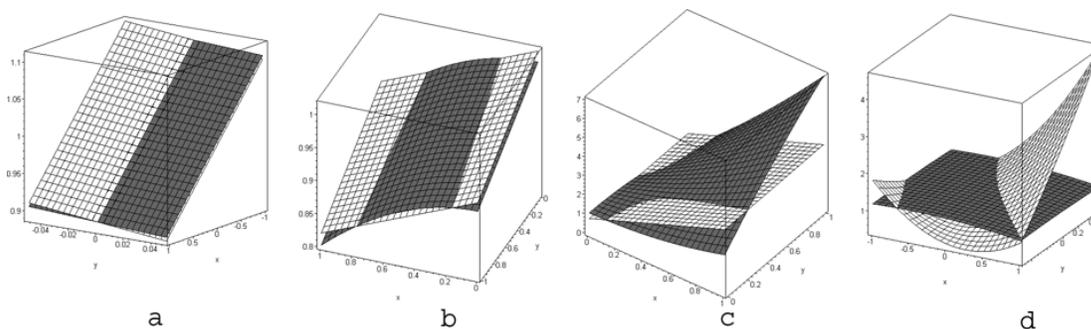


Рис. 2.

Таблица 4.

	Оригинальное	Найденное
Точка	$(-0.1, -0.1, 1.0)$	$(-0.094293, -0.103694, 1.016523)$
Модуль сдвига	$\mu(x) = -0.1x_1^2 - 0.1x_2 + 1$	$\mu(x) = -0.094293x_1 - 0.103694x_2 + 1.016523$
Собственные частоты	$w_1 = 4.00385$ $w_2 = 9.01594$ $w_3 = 11.60546$	$\omega_1 = 4.003850$ $\omega_2 = 9.015940$ $\omega_3 = 11.60546$

Таблица 5.

	Оригинальное	Найденное
Точка	$(1.0, -1.0, 6.0, 0.0, 0.0, 1.0)$	$(2.633268, 0.056040, 0.698095)$
Модуль сдвига	$\mu(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2 + 1$	$\mu(x) = 2.633268x_1 - 0.056040x_2 + 0.698095$
Собственные частоты	$w_1 = 4.683460$ $w_2 = 12.39558$ $w_3 = 15.21680$	$\omega_1 = 4.683459$ $\omega_2 = 12.39558$ $\omega_3 = 15.21680$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-00690, 05-01-00734, 06-01-08041).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости. // Экологический вестник научных центров ЧЭС, № 1. 2006 г.
- [2] Документация Minpack. <http://www.netlib.org/minpack/>
- [3] *Assad A Oberai, Nachiket H Gokhale, Gonzalo R Feijoo.* Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. // Inverse Problems 19 (2003) 297–313.
- [4] *Marco Matter, Thomas Gmur, Joel Cugnoni, Alain Schorderet.* Improved modal characterization of the constitutive parameters in multilayered plates. // Composites Science and Technology 2006 (в печати).
- [5] *Ikehata M.* How to draw a picture of unknown inclusion from boundary measurements. Two mathematical inverse algorithms. // J. Inv. Ill-Posed Problems, Vol. 7. No. 3, p. 255–271.
- [6] *Ikehata M.* Reconstruction of support function for inclusion from boundary measurements. // J. Inv. Ill-Posed Problems, Vol. 8. No. 4, p. 367–378.

**Вычков А.А.** *Identification of functionally heterogeneous properties of elastic materials.* The problem of determination of functional heterogeneous of shear modulus in anti-plane problem of elastic theory is considered. Previously developed iteration method is applied. Initial approximation is created on the basis minimization of functional residual between eigenfrequencies. The modulus reconstruction examples for different forms of its coordination dependence are presented.

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПЛАСТИН

**Ватульян А. О., Солуянов Н. О.**

*Ростовский государственный университет*

Задачи определения дефектов в упругих пластинах представляют собой важную задачу диагностики, которая может быть решена в рамках подхода, основывающегося на идеологии обратных коэффициентных задачах теории упругости в линеаризованной постановке.

## **Постановка обратной коэффициентной задачи.**

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  упругой прямоугольной пластины с размерами  $a \times b$  и толщиной  $h$ , в которой имеется дефект в виде полости или включения малого характерного размера. Будем считать, что пластина оперта по краям  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ , а к краю  $y = b$  приложена периодическая во времени нагрузка с амплитудой  $p(x)$ .

Рассмотрим отдельно два типа дефектов: 1) полость, 2) включение. Наличие полости будем моделировать зависимостью толщины пластины от координат  $h = h(x, y)$ , а наличие включения — зависимостью модуля Юнга от координат  $E = E(x, y)$  (хотя полость может быть смоделирована и в рамках последнего подхода путем обнуления модуля Юнга и плотности в пределах полости). Обратная задача состоит в том, чтобы по заданной функции смещения свободного края  $y = b$  в некотором диапазоне изменения частоты

$$w(x, b, \omega) = f(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (1)$$

определить функцию  $h(x, y)$  или  $E(x, y)$ .

**Задача для полости.** В случае внутренней полости положим

$$h(x, y) = h_0 (1 - \eta(x, y)), \quad (2)$$

где  $h_0$  — толщина пластины,  $\eta(x, y)$  — некоторая финитная функция. Цилиндрическая жесткость пластины в этом случае представима в виде

$$D(x, y) = D_0 (1 - \eta^3(x, y)), \quad (3)$$

где  $D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость однородной пластины,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Соответствующая краевая задача представима в форме [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 h w = 0, \\ w(0, y) = 0, \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] (0, y) = 0; \\ w(a, y) = 0, \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] (a, y) = 0; \\ w(x, 0) = 0, \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] (x, 0) = 0; \\ \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] (x, b) = 0, \\ \left[ -\frac{\partial}{\partial y} (D\Delta w) + (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \right] (x, b) = p(x), \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность. При дополнительном условии вида (1), осуществляя линеаризацию, сведем проблему к интегральному уравнению Фредгольма первого рода [2] следующего вида

$$\lambda^4 \int_0^a \int_0^b \eta(x, y) \cdot w_0^2(x, y, \omega) dx dy = \int_0^a p(x) \cdot [f(x, \omega) - w_0(x, b, \omega)] dx, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (5)$$

где  $\lambda^4 = \rho \frac{\omega^2 h_0}{D_0}$ , причем  $w_0(x, y, \omega)$  — решение прямой задачи для однородной пластины. Отметим, что построение решения интегрального уравнения (5) является некорректной задачей и требует процедуры регуляризации [3]. На практике наиболее существенной информацией о полости является ее местоположение и объем, а не конкретный вид ее поверхности [4]. Это позволяет сузить класс отыскиваемых функций до некоторого компакта и применить метод регуляризации на компактных множествах [3]. В настоящей работе предлагается восстанавливать полость в классе круговых цилиндров. В выделенном классе функция  $\eta(x, y)$  принимает вид

$$\eta(x, y) = \bar{h} \cdot H(r^2 - (x - c_x)^2 - (y - c_y)^2), \quad (6)$$

где  $c_x, c_y$  — координаты центра полости,  $r$  — радиус цилиндра,  $\bar{h}$  — отношение высоты цилиндра к  $h_0$ . С учетом (6) уравнение (5) запишется в виде

$$\lambda^4 \bar{h} \cdot \int_{c_x - r}^{c_x + r} \int_{c_y - r}^{c_y + r} w_0^2(x, y, \omega) dx dy = \int_0^a p(x) \cdot [f(x, \omega) - w_0(x, b, \omega)] dx \quad (7)$$

Выбирая нагрузку в виде  $p(x) = p_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ , построим решение однородной задачи в следующей форме [1]

$$w_0(x, y, \omega) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot [A_1 sh(s_{11}y) + C_1 sh(s_{21}y)], \quad (8)$$

где

$$s_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}, \quad s_{21} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2},$$

причем коэффициенты  $A_1, C_1$  определяются из системы

$$\begin{cases} A_1 sh(s_{11}b) \left( s_{11}^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) + C_1 sh(s_{21}b) \left( s_{21}^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) = 0, \\ A_1 s_{11} \left( s_{11}^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right) ch(s_{11}b) + C_1 s_{21} \left( s_{21}^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right) ch(s_{21}b) = -p_1. \end{cases}$$

В предположении малости размеров полости к интегралу по прямоугольнику в уравнении (7) применим теорему о среднем значении. Тогда будем иметь

$$\int_{c_x-r}^{c_x+r} \int_{c_y-r}^{c_y+r} w_0^2(x, y, \omega) dx dy = 4r^2 \cdot w_0^2(c_x, c_y, \omega) + o(r^3). \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (7), с учетом (9) приходим к функциональному уравнению относительно трех неизвестных  $c_x, c_y$  и  $\bar{v}$

$$\bar{v} \cdot \lambda^4 \sin^2 \left( \frac{\pi c_x}{a} \right) [A_1 sh(s_{11}c_y) + C_1 sh(s_{21}c_y)]^2 = g_v(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (10)$$

где  $\bar{v} = \frac{\pi r^2}{ab} \bar{h}$  — относительный объем полости,

$$g_v(\omega) = \frac{\pi p_1}{4 ab} \left[ \int_0^a f(x, \omega) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) dx - \frac{a}{2} [A_1 sh(s_{11}b) + C_1 sh(s_{21}b)] \right].$$

**Задача для включения.** В случае включения цилиндрическую жесткость пластины представим в виде

$$D(x, y) = D_0 (1 - \eta(x, y)), \quad (11)$$

где  $D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость однородной пластины,  $E_0$  — модуль Юнга однородной пластины. Соответствующая краевая задача представима в форме (4). При дополнительном условии вида (1) в обратной задаче соответствующее интегральное уравнение в линеаризованной постановке будет иметь вид, аналогичный построенному в [5]

$$\begin{aligned} & \iint_S \eta \cdot \left[ (\Delta w_0)^2 - 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] ds = \\ & = \int_0^a p(x) \cdot [f(x, \omega) - w_0(x, b, \omega)] dx, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

причем ядро интегрального оператора в (12) представляет собой удельную потенциальную энергию однородной пластины. Построение его решения является некорректной задачей, поэтому, как и прежде, будем восстанавливать дефект в классе круговых цилиндров. В случае включения функция  $\eta(x, y)$  будет иметь вид

$$\eta(x, y) = \bar{e} \cdot H(r^2 - (x - c_x)^2 - (y - c_y)^2) \quad (13)$$

где  $\bar{e}$  — отношение модуля Юнга включения к  $E_0$ . Подставив (8) и (13) в (12) и, выполнив интегрирование по области включения, приходим к функциональному уравнению относительно четырех неизвестных  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $r$  и  $\bar{e}$

$$\bar{e} \cdot \left[ R_1(c_y, r) \cdot r + R_2(c_y, r) \cdot \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi r}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi c_x}{a}\right) \right] = g_e(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (14)$$

где

$$g_e(\omega) = p_1 \left[ \int_0^a f(x, \omega) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx - \frac{a}{2} [A_1 sh(s_{11}b) + C_1 sh(s_{21}b)] \right],$$

$$\begin{aligned} R_{1,2} = & (K_1^c + K_2^c \mp K_1^s \mp K_2^s) \cdot r + \frac{1}{2s_{11}} (K_1^c \pm K_1^s) sh(2s_{11}r) ch(2s_{11}c_y) + \\ & + \frac{1}{2s_{21}} (K_2^c \pm K_2^s) sh(2s_{21}r) ch(2s_{21}c_y) + \\ & + \frac{1}{s_{11}+s_{21}} (K_{12}^c \pm K_{12}^s) sh((s_{11} + s_{21})r) ch((s_{11} + s_{21})c_y) + \\ & + \frac{1}{s_{11}-s_{21}} (K_{12}^c \mp K_{12}^s) sh((s_{11} - s_{21})r) ch((s_{11} - s_{21})c_y), \end{aligned}$$

$$K_1^s = A_1^2 \left[ \left( s_{11}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) s_{11}^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_{12}^s = 2A_1 C_1 \left[ \left( s_{11}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \left( s_{21}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) + (1 - \nu) (s_{11}^2 + s_{21}^2) \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_2^s = C_1^2 \left[ \left( s_{21}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) s_{21}^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_1^c = -2(1 - \nu) A_1^2 s_{11}^2 \frac{\pi^2}{a^2},$$

$$K_{12}^c = -4(1 - \nu) A_1 C_1 s_{11} s_{21} \frac{\pi^2}{a^2},$$

$$K_2^c = -2(1 - \nu) C_1^2 s_{21}^2 \frac{\pi^2}{a^2}.$$

На основе предложенного подхода проведена серия численных экспериментов, в которых варьировались значения параметров цилиндрического дефекта. Также проведены эксперименты по восстановлению дефекта произвольной формы в классе круговых цилиндров, в которых амплитудно-частотная характеристика свободного края пластины (1) вычислялась для пластины, содержащей сферический, эллипсоидальный или конический дефект.

Решение функциональных уравнений (10), (14) проводилось численно. Прогиб свободного края  $f(x, \omega)$  вычислялся на основе конечно-элементных методов.

Результаты численных экспериментов показали, что 1) местоположение дефекта определяется гораздо точнее остальных параметров дефекта; 2) Относительная погрешность восстановления объема дефекта произвольной формы в классе круговых цилиндров не превышает 3%; 3) в пограничной зоне, примыкающей к границам пластины,

$$S_{1/10} = \left(0, \frac{a}{10}\right) \times (0, b) \cup \left(\frac{9a}{10}, a\right) \times (0, b) \cup (0, a) \times \left(0, \frac{b}{10}\right) \cup (0, a) \times \left(\frac{9b}{10}, b\right)$$

дефект восстанавливается гораздо хуже, чем за ее пределами.

Для различных вариаций значений параметров дефекта относительная погрешность восстановления его местоположения не превышает 1%. В области  $S_{1/10}$  максимальная относительная погрешность восстановления параметров дефекта достигает 5%.

В заключение отметим, что в рамках предложенного подхода можно восстановить основные характеристики дефекта по амплитудно-частотной характеристике свободного края пластины в любом частотном диапазоне не содержащем резонансных частот. Все полученные результаты говорят об эффективности предложенного подхода.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 05-01-00734).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
- [2] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: “Наука”, 1975. 303 с.
- [3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: “Наука”, 1986. 274 с.
- [4] Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размеров полости в упругом стержне. // Дефектоскопия. 2005, № 9, с. 44–56.
- [5] Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных коэффициентных задачах теории упругости. // Доклады РАН 2005, Т. 405. № 3, с. 343–345.

**Vatulyan A.O., Soluyanov N.O.** *About integral equation in the inverse coefficient problems for plates.* Identification of defects in elastic plates represent the important problem of diagnostics which can be solved within the framework of the approach based on ideology of linearized statement of inverse coefficient problems of the theory of elasticity.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Ватульян А. О., Явруян О. В.**

*Ростовский государственный университет*

В рамках линейной дифференциальной модели разработана методика параметрической идентификации полимерного материала на основании обработки простейших опытов (релаксация, ползучесть) и приводящая нелинейную некорректную задачу к решению алгебраического уравнения с использованием симметрических функций. Проведены вычислительные эксперименты по определению параметров композиционного материала.

При исследовании поведения конструкций из композитных материалов с реологическими свойствами важное значение имеет определение механических свойств материала, что связано с параметрической идентификацией модели. При решении задачи идентификации чаще всего используют метод наименьших квадратов и его модификации, заключающийся в обработке экспериментальных данных, получаемых при нагружении образца и теоретического решения краевой задачи, описывающей поведение композита. При этом характеристики материала определяются из решения оптимизационной задачи минимизации функционала невязки, представляющего собой норму разности экспериментальной и теоретической информации. Однако эти методы не всегда эффективны, поскольку задача минимизации функционала с несколькими переменными при реализации метода покоординатного спуска или метода сопряженных градиентов требует больших затрат машинного времени.

Так, в работах [1], [2] рассмотрена задача параметрической идентификации композитных полусферических оболочек при взрывном нагружении. Рассмотрен алгоритм определения жесткостных и реологических характеристик композита, основанный на минимизации целевой функции, зависящей от параметров материала, и представляющей собой сумму среднеквадратичных отклонений расчетных и экспериментальных значений деформаций.

Подход к решению обратной задачи идентификации упругих постоянных композитных оболочек с использованием подобного функционала невязки использован также в работе [3]. Объектом исследований в работе являлись оболочки вращения. Численное решение прямой задачи получено на основе полуаналитического метода конечных элементов.

В работах [4], [5] рассмотрены задачи параметрической идентификации классических линейных и нелинейных вязкоупругих сред. Обратная задача идентификации параметров нелинейной модели сведена к решению интегрального нелинейного уравнения типа Гаммерштейна или в частном случае к операторному уравнению Фредгольма 1-го рода с гладким ядром.

В настоящей работе предлагается новый способ определения характеристик полимерного материала по результатам экспериментальных данных. В рамках опыта

на ползучесть измерение деформаций через фиксированные временные промежутки как функций времени оказывается эффективным для процедуры идентификации.

В качестве структурной модели использована модель стандартного вязкоупругого тела с определяющими соотношениями в дифференциальной форме [6].

$$P(D)\sigma = Q(D)\epsilon, \quad D = \frac{d}{dt}, \quad P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k. \quad (1)$$

Процедура определения параметров для такого дифференциального оператора, как отмечалось ранее, может быть осуществлена в соответствии с традиционными методами идентификации динамических систем и приводящая к идентификации передаточной функции. В то же время традиционные схемы, связанные с использованием экспериментальных данных и опирающиеся на метод минимизации функционала невязки, приводят к необходимости решения громоздких нелинейных систем на этапе параметрической идентификации.

Предлагаемый в работе алгоритм также опирается на использование экспериментальных данных, однако параметры модели определяются из простых алгебраических уравнений. Допустим в результате эксперимента на ползучесть при  $\sigma = \sigma_0 = const$  в некотором дискретном наборе временных точек  $t_k = t_1 + (k-1)\Delta$ ,  $\Delta > 0$  получен набор значений  $\epsilon(t_k)$ .

Рассмотрим случаи, когда дифференциальные операторы в (1) имеют первый, второй и третий порядки.

1.  $n = m = 1$ , определяющее соотношение имеет вид (модель стандартного вязкоупругого тела)

$$a_1 \frac{d}{dt} \sigma + \sigma = b_1 \frac{d}{dt} \epsilon + b_0 \epsilon, \quad (2)$$

где  $a_1 = n$ ,  $b_1 = En$ ,  $b_0 = H$ ,  $E$  — мгновенный модуль, — длительный модуль,  $n$  — время релаксации ( $E \geq H$ ).

Функция ползучести  $\sigma = \sigma_0 = const$  представима в виде

$$\epsilon(t) = C_0 + C_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad C_0 = \frac{\sigma_0}{b_0}, \quad \lambda_1 = \frac{b_0}{b_1} \quad (3)$$

Обратная коэффициентная задача состоит в определении величин  $a_1, b_1, b_0$  по  $\epsilon(t_k)$ . Для этого рассмотрим величины  $v_k$ , определяемые как  $v_k = \epsilon(t_k) - \epsilon(t_{k+1})$ , тогда

$$v_k = C_1 e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_1 \Delta (k-1)} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta}) \quad (4)$$

Введем обозначения  $y_1 = C_1 e^{-\lambda_1 t_1} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta})$ ,  $z_1 = e^{-\lambda_1 \Delta}$ , тогда  $y_1 = v_1$ ,  $z_1 = \frac{v_2}{v_1}$ . Далее находим  $\lambda_1 = -\frac{\ln z_1}{\Delta}$ , а параметры  $C_0, C_1$ , могут быть найдены с использованием метода наименьших квадратов, примененного к (4), при этом необходимо решать лишь линейную систему; либо непосредственно по формулам  $C_1 = \frac{y_1 e^{\lambda_1 t_1}}{1 - z_1}$ ,  $C_0 = \epsilon(t_1) - C_1 e^{-\lambda_1 t_1}$ . Далее, параметры дифференциального оператора (2)  $b_1, b_0$

определяются как  $b_0 = \frac{\sigma_0}{C_0}$ ,  $b_1 = \frac{\sigma_0}{C_0 \lambda_1}$ . Следует отметить, что на основании результатов опыта на релаксацию при  $\epsilon = \epsilon_0 = const$  аналогичным образом определяется параметр  $a_1$  оператора в (2).

2. При  $n = m = 2$  определяющее соотношение задается в виде

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} \sigma + a_1 \frac{d}{dt} \sigma + \sigma = b_2 \frac{d^2}{dt^2} \epsilon + b_1 \frac{d}{dt} \epsilon + b_0 \epsilon \quad (5)$$

В этом случае функция ползучести при  $\sigma = \sigma_0 = const$  представима в виде линейной комбинации двух экспоненциальных функций с различными параметрами времени, отвечающими за различные механизмы реологического поведения.

$$\epsilon(t) = C_0 + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (6)$$

где  $\lambda_i$  — корни характеристического уравнения  $b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$ ,  $C_0 = \frac{\sigma_0}{b_0}$ . По информации  $\epsilon(t_k)$  требуется определить пять параметров  $C_0, C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ , на основании которых вычисляется часть параметров оператора (5)  $b_0, b_1, b_2$ .

Аналогично случаю 1, вводятся величины

$$v_k = \epsilon(t_k) - \epsilon(t_{k+1}) = \sum_{j=1}^n C_j e^{-\lambda_j t_1} e^{-\lambda_j \Delta(k-1)} (1 - e^{-\lambda_j \Delta}), \quad (7)$$

Обозначим

$$y_j = C_j e^{-\lambda_j t_1} (1 - e^{-\lambda_j \Delta}), z_j = e^{-\lambda_j \Delta}, j = 1..m, \quad (8)$$

тогда введенные параметры связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= v_1 \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 &= v_2 \\ y_1 z_1^2 + y_2 z_2^2 &= v_3 \\ y_1 z_1^3 + y_2 z_2^3 &= v_4 \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) решается в два этапа: сначала первые два уравнения системы рассматриваются относительно  $y_1, y_2$  (выражаются через  $z_1, z_2$ ); далее,  $y_1, y_2$  подставляются в третье и четвертое уравнения относительно  $z_1, z_2$ , которые являются корнями квадратного уравнения

$$(v_1 v_3 - v_2^2) z^2 + (v_2 v_3 - v_1 v_4) z - v_3^2 + v_2 v_4 = 0 \quad (10)$$

Таким образом, на основе найденных  $y_1, y_2, z_1, z_2$  определяются  $C_0, C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$  (либо методом наименьших квадратов из линейных соотношений, либо непосредственно из (8)).

3. При  $n = m = 3$  определяющее соотношение имеет вид

$$a_3 \frac{d^3}{dt^3} \sigma + a_2 \frac{d^2}{dt^2} \sigma + a_1 \frac{d}{dt} \sigma + \sigma = b_3 \frac{d^3}{dt^3} \epsilon + b_2 \frac{d^2}{dt^2} \epsilon + b_1 \frac{d}{dt} \epsilon + b_0 \epsilon, \quad (11)$$

В этом случае функция ползучести определяется семью параметрами, из них три характерных временных, и представима в виде

$$\epsilon(t) = C_0 + C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + C_3 e^{-\lambda_3 t}, \quad (12)$$

где  $-\lambda_i$  — корни характеристического уравнения  $b_3\lambda^2 + b_2\lambda + b_1 = 0$ ,  $C_0 = \frac{\sigma_0}{b_0}$ . Введя обозначения, аналогичные (7) и (8), сведем задачу к решению нелинейной системы

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= v_1 \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 &= v_2 \\ y_1 z_1^2 + y_2 z_2^2 + y_3 z_3^2 &= v_3 \\ y_1 z_1^3 + y_2 z_2^3 + y_3 z_3^3 &= v_4 \\ y_1 z_1^4 + y_2 z_2^4 + y_3 z_3^4 &= v_5 \\ y_1 z_1^5 + y_2 z_2^5 + y_3 z_3^5 &= v_6 \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ структуры системы (13) (линейная относительно  $y_i$  и симметричная относительно  $z_i$ ) позволяет выразить ее решение через основные симметрические многочлены  $u = z_1 + z_2 + z_3$ ,  $v = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$ ,  $w = z_1 z_2 z_3$  [7]. Для определения связи между  $u, v, w$  необходимо из первых трех уравнений системы (13)  $y_i$  выразить через  $z_i$ , и подставить в оставшиеся три уравнения. Далее, после ряда преобразований получены следующие соотношения

$$\begin{aligned} v_3 u - v_2 v + w v_1 - v_4 &= 0, \\ 2v_1 u w - v_2(2uv - 3w) + v_3(2u^2 - 3v) - 3v_5 + v_4 u &= 0, \\ v_4 u w + 3v_2 w^2 - 2v_3 v w - v_4(v^2 - 2uw) + v_5(uv - 3w) - v_6 v &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (14) не представляется сложным, и возможно при помощи одного из математических пакетов. В результате определяются значения  $u, v, w$ , затем из решения кубического уравнения  $z^3 - uz^2 + vz - w = 0$  находятся корни  $z_1, z_2, z_3$ , на их основе из (8) рассчитываются  $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ , и  $y_i, i = 1, 2, 3$ , по которым определяются все остальные параметры  $b_i$  из (8).

Проведен ряд вычислительных экспериментов по определению параметров дифференциального оператора в левой части модели (11). Для определения коэффициентов  $b_i$  по предложенной выше схеме достаточно проводить измерения деформации в 7 точках  $t_k$ . Определена зависимость относительной погрешности определения параметров  $\epsilon_{b_i}$  в зависимости от временного промежутка  $\Delta$ , от времени начала съема данных  $t_1$ , и степени аддитивного зашумления входных данных  $\delta(\%)$ . В таблице приведены результаты расчетов для случая, когда  $\sigma_0 = 10.0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 10, C_0 = 5.0, C_1 = -1.5, C_2 = -1.0, C_3 = -0.5$ . Установлено, что погрешность идентификации параметров  $\epsilon_{b_i} = \frac{|b_i - b_i^*|}{b_i^*} 100\%$ ,  $i = 1..m$ , ( $b_i, b_i^*$  — восстановленные и истинные значения параметров соответственно) не превышает 1% при  $\Delta \leq 1, t_1 \leq 1, \delta = 0$ . Параметр  $b_0$  определяется с погрешностью менее 1% во всех случаях. Проведен также вычислительный эксперимент, в котором в качестве модели рассматривается трехмерная модель с параметрами  $\sigma_0 = 1.0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 10, C_0 = 5.0, C_1 = -2.0, C_2 = -0.5, C_3 = -0.005, \Delta = 0.1, t_1 = 0.1$ , при которых  $b_3 = 0.004, b_2 = 0.064, b_1 = 0.26, b_0 = 0.2$ , а восстанавливается модель, характеризуемая соотношением (5). При этом восстановленные параметры —  $b_2 = 0.038, b_1 = 0.235, b_0 = 0.2$ .

Результаты экспериментов подтверждают возможность использования предложенного алгоритма для определения параметров полимерного образца.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00734, 06-01-08041)

		$b_3 = 0.004$	$b_2 = 0.064$	$b_1 = 0.26$	$b_0 = 0.2$
$\delta(\%)$	$\Delta, t_1$	$\epsilon_{b_3}(\%)$	$\epsilon_{b_2}(\%)$	$\epsilon_{b_1}(\%)$	$\epsilon_{b_0}(\%)$
0	0.5, 0.5	0.24	0.11	0.03	0
0	0.1, 1.0	3.65	2.24	1.44	0.27
0	0.3, 1.0	8.61	4.94	5.59	0.4
0	0.3, 0.1	0	0	0	0
0.01	0.3, 0.1	3	1.3	0.29	0.001
0.1	0.3, 0.1	32	13	3	0.012
5	0.3, 0.1	72	20	5	1.67

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Куликова Н.А. Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек // ПМТФ. 2006. Т.47. № 3. С. 126-133.
- [2] Куликова Н.А. Определение вязкоупругих характеристик полимерных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа полусферических оболочек при импульсном нагружении
- [3] Матвеевко В.П., Юрлова Н.А. Идентификация эффективных упругих постоянных композитных оболочек на основе статических и динамических экспериментов // МТТ. 1998. № 3. С. 12-20.
- [4] Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Об идентификации математических моделей вязкоупругих сред в реологии и электрореологии // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7. № 1. С. 114-130.
- [5] Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Нелинейные модели вязкоупругих сред и их идентификация // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 2. С. 306-320.
- [6] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.:Наука, 1988. 712 с.
- [7] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.

**Vatulyan A.O., Yavruyan O.V.** *The composite materials identification.* Within the framework of linear differential model the technique of parametric identification of determining ratio of a polymer stuff ground processing of the elementary experience (relaxation, creep) and presenting (causing) a non-linear illconditioned problem to the solution of an algebraic equation with usage of symmetrical functions is designed. The computing experiments on definition of parameters of a composite material are conducted.

# ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ, ПОКРЫТОЙ ФОТОХРОМНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ

Гольдштейн Р. В. \*, Еремеев В. А. \*\*

\* *Институт проблем механики РАН, Москва*

\*\* *Южный научный центр РАН и Ростовский государственный университет*

Обсуждается постановка некоторых экспериментов по исследованию свойств фотохромных соединений и влияния фотохромных превращений на напряженно-деформированное состояние, основанных на методе электронной спекл-интерферометрии [1].

Фотохромные соединения, а также родственные электрохромные, термохромные, пьезохромные, сольватохромные, радиохромные материалы, представляют собой широкий класс органических или неорганических соединений, обладающих весьма привлекательными свойствами для создания различных устройств фотоники, оптоэлектроники, нанороботики, например, трехмерной оптической памяти, сенсоров, оптических переключателей, актюаторов и других. Успехи химии позволили синтезировать широкий спектр фотохромных соединений. Класс фотохромных материалов, а также близкие к ним электрохромные и пьезохромные соединения, представляют собой достаточно широкую группу веществ, как органических (например, спироспираны, антрахиноны), так и неорганических (например, некоторые оксиды). Фотохромные свойства проявляют некоторые наноструктуры, например, углеродные нанотрубки.

Для фотохромных материалов (фотохромов) характерно наличие прямой химической реакции при облучении светом с определенной длиной волны, которая сопровождается изменением цвета и, кроме того, формы молекул соединения, а также обратной реакции, происходящей, например, при отсутствии этого излучения или нагреве, что может быть представлено в виде [2]:



Отметим, что представление в виде бинарной реакции (1) является значительным упрощением, поскольку, вообще говоря, происходят и другие превращения, в частности, ответственные за фотодеградацию.

Для создания реальных устройств, использующих фотохромные соединения, помимо химических задач, необходимо также решить ряд задач механики и материаловедения. В частности, необходимо изучить взаимосвязь характеристик фотохромных соединений и напряженно-деформированного состояния, вызванного как внешними нагрузками, так и индуцированного сменой состояний молекул фотохромного соединения, изучить влияние напряженно-деформированного состояния на характеристики старения фотохромных соединений, в том числе в зависимости от числа циклов прямая-обратная фотохромная реакция.

В данной работе предлагаются возможные экспериментальные методики исследования механических свойств фотохромных соединений, в частности, возникающих в них остаточных напряжений при фотореакции, на основе метода электронной спекл-интерферометрии, показавшего высокую эффективность при решении некоторых обратных задач механики, таких как определение свойств (модуля Юнга и коэффициента Пуассона) тонкого покрытия, а также возникающих в нем остаточных напряжений [1]. Суть метода состоит в измерении при помощи электронного спекл-интерферометра малых перемещений поверхности пластинки с нанесенным покрытием.

В данной работе метод [1] предлагается использовать для измерения остаточных напряжений, возникающих в тонкой пленке фотохромного соединения при его облучении, по изгибу пластинки.

**1. Схемы экспериментов.** Структура пластинки с нанесенной на ее поверхности пленкой фотохрома показана на рис. 1. Обозначим толщину подложки через  $2H$ , толщину пленки через  $h$  ( $h \ll H$ ).

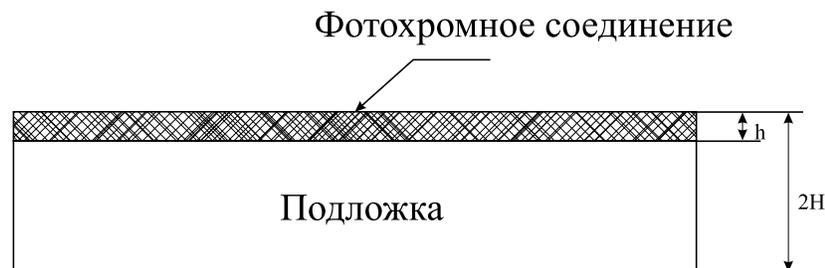


Рис. 1. Двухслойная пластинка: пленка фотохрома на подложке.

Принципиальные схемы эксперимента представлены на рис. 2.

Образец, представляющий собой длинную прямоугольную пластинку с нанесенным на одной стороне поверхности тонким слоем фотохрома находится в фотоячейке. С одной стороны фотоячейка может облучаться излучением с заданной длиной волны, например в ультрафиолетовом диапазоне. При помощи лазерной системы получают интерферограммы, по которым определяются прогибы пластинки, вызванные УФ-излучением. Используя формулы механики пластин по найденным прогибам возможно определить изгибающие моменты и внутренние напряжения, возникающие в пленке фотохрома. Описанный метод был опробован в [1] для диагностики отслоений, усадочных напряжений и других характеристик. В частности, были экспериментально исследованы задачи изгиба балок с нанесенной на поверхности аэрозольной краской.

Аналогичные по схеме экспериментальные исследования влияния фотореакций на механические свойства пленки такого фотохромного соединения, как оксид вольфрама  $WO_3$ , проводились в [3] и, в частности, измерялись вызываемые в пленке деформации. Исследовалась пленка из оксида вольфрама толщиной порядка 0.3 мкм, нанесенная на достаточно гибкую подложку из стекла толщиной 0.15 мм, длиной 30 мм, шириной 3 мм. Пластинка с фотохромом закреплялась консольно. При данных размерах и условиях закрепления фактически рассматривался изгиб консольной балки. При помощи лазерного датчика фиксировались

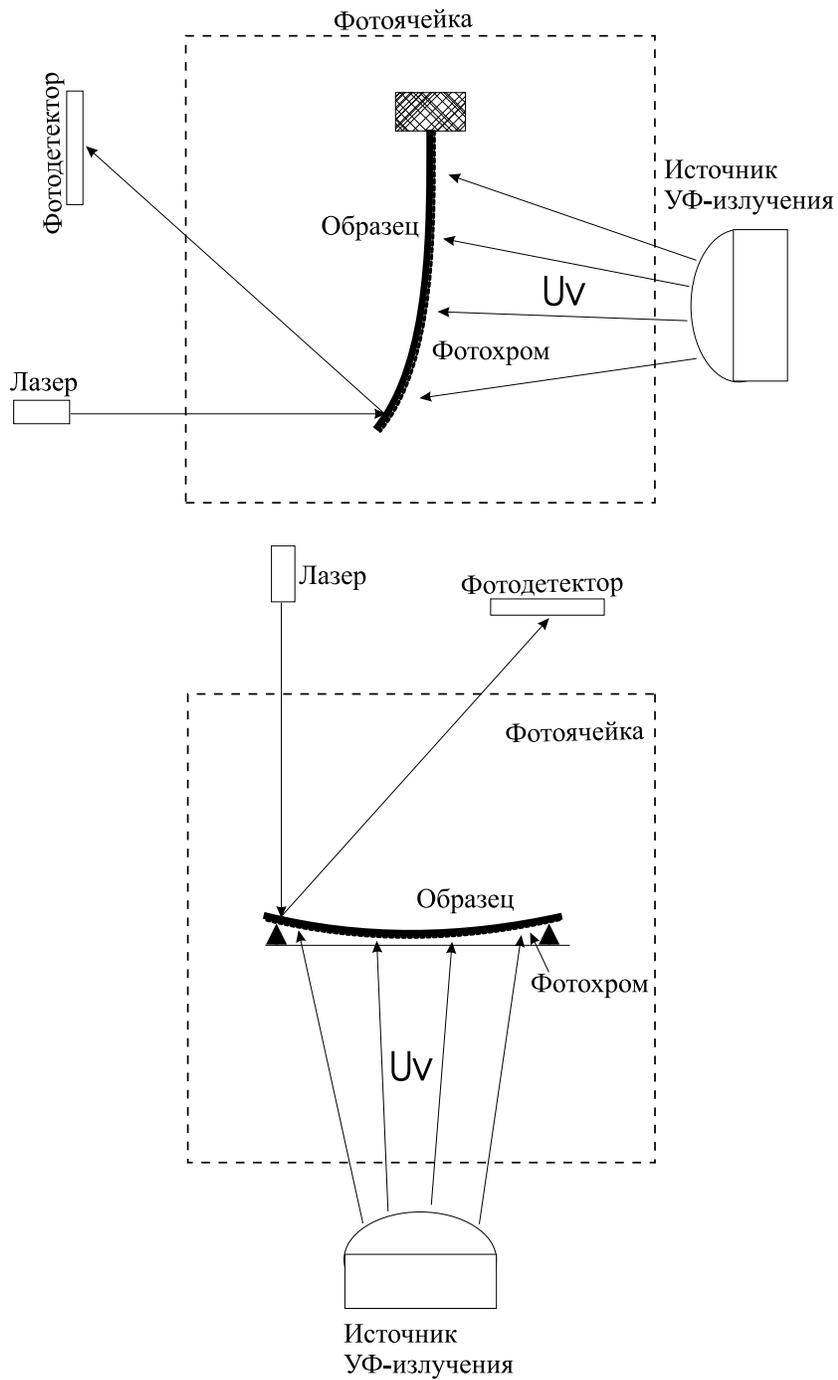


Рис. 2. Схемы эксперимента: А – консольно закрепленная пластинка, Б – шарнирно.

изгибные деформации двухслойной структуры стекло-WO<sub>3</sub> (фактически измерялась кривизна пластинки) и определялись возникающие в пленке фотохрома напряжения при ультрафиолетовом облучении с длиной волны 632.8 нм. Также в [3] измерялся изгиб пластинки при приложении электрического напряжения к пленке оксида вольфрама. Пленки из оксида вольфрама и их фото- и электрохромные свойства исследовались во многих работах (см., например, обзор [4]).

Отличие схем А и Б, приведенных на рис. 2, состоит в условиях закрепления образца. В случае А образец закреплен консольно, в случае Б – шарнирно. Последний вариант представляется на первый взгляд более предпочтительным по сравнению с А (и схемой [3]), поскольку в этом случае может быть реализован случай чистого изгиба, в котором напряженно-деформированное состояние образца будет однородным по длине образца, с другой стороны, схема А является менее жесткой и в этом случае легче наблюдать прогибы пластинки.

**2. Уравнения изгиба.** Для описания изгиба пластинки с пленкой воспользуемся уравнениями изгиба тонких пластин в случае малых деформаций [5]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0, \quad (2)$$

где  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  – компоненты тензора усилий,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – компоненты тензора моментов,  $p$  – распределенная по поверхности пластинки нагрузка,  $x$  и  $y$  – декартовы координаты.

Под действием облучения в пленке возникают деформации и напряжения. Отметим, что их учет полностью аналогичен учету температурных напряжений в пластинке. Уравнения состояния для усилий и моментов по аналогии с теорией температурных напряжений в пластинках [5] имеют вид

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{EH}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{N_\Phi}{1-\nu}, & N_y &= \frac{EH}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{N_\Phi}{1-\nu}, \\ N_{xy} &= \mu H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_\Phi}{1-\nu}, & M_y &= -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{M_\Phi}{1-\nu}, \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно,  $D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость пластины,  $u$ ,  $v$  – перемещения в тангенциальной плоскости,  $w$  – прогиб пластинки;  $N_\Phi$  и  $M_\Phi$  представляют собой усилия и изгибающий момент, возникающие из-за напряжений в пленке фотохрома.  $N_\Phi$  и  $M_\Phi$  связаны с деформацией пленки  $\varepsilon_\Phi$ , возникающей из-за фотопревращения, формулами

$$N_\Phi = \int_{H-h}^H E_\Phi \varepsilon_\Phi dz, \quad M_\Phi = \int_{H-h}^H E_\Phi \varepsilon_\Phi z dz. \quad (4)$$

При записи (2), (3) были сделаны следующие допущения. Вследствие того, что толщина пленки существенно меньше толщины пластинки, для вычисления усилий и моментов в двухслойной пластинке были использованы формулы для однослойной пластинки, в которых использованы упругие постоянные подложки. Тем самым, эффективные свойства двухслойной пластинки совпадают со свойствами подложки. Также возможно использовать уточняющую методику [1], где эффективные свойства определяются с учетом жесткости покрытия. Если дополнительно предположить, что в пленке фотохрома деформации  $\varepsilon_\Phi$  постоянны по толщине (при тонких пленках неоднородностью по толщине из-за разного поглощения света пленкой можно пренебречь), то, пренебрегая слагаемыми порядка  $h^2$  формулы (4) можно записать проще:  $N_\Phi = E_\Phi \varepsilon_\Phi h$ ,  $M_\Phi = E_\Phi \varepsilon_\Phi H h$ .

**3. Результаты анализа.** Рассмотрим задачу об изгибе длинной прямоугольной пластики, покрытой фотохромной пленкой. Обозначим длину пластинки через  $l$ , а ширину – через  $d$ . Для достаточно длинной пластинки можно пренебречь зависимостью от поперечной координаты  $y$ . Тогда уравнения равновесия (2) примут вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + p = 0, \quad (5)$$

где  $N_x = \frac{EH}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{N_\Phi}{1-\nu}$ ,  $M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{M_\Phi}{1-\nu}$ .

Из (5)<sub>1</sub> сразу следует, что продольное усилие  $N_x$  постоянно. Далее положим нагрузку  $p$  равной нулю. Тогда общее решение (5)<sub>2</sub> имеет вид  $w = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + w_3 x^3$ .

Для консоли решение для прогиба имеет вид  $w_A(x) = -\frac{M_\Phi}{2D(1-\nu)} x^2$ , а для шарнирно опертой пластики дается формулой  $w_B(x) = \frac{M_\Phi}{2D(1-\nu)} (l-x)x$ .

Максимальные прогибы в обоих случаях даются соотношениями

$$w_A^{\max} = \frac{M_\Phi}{2D(1-\nu)} l^2, \quad w_B^{\max} = \frac{M_\Phi}{8D(1-\nu)} l^2. \quad (6)$$

Видно, что максимальный прогиб в случае консольной пластинки в 4 раза больше, чем для шарнирной.

Рассмотрим значения геометрических и физических параметров [3]:  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.22$ ,  $2H = 0.15$  мм,  $h = 0.3$  мкм. В [3] экспериментально наблюдались кривизны  $K_{A,B}$  пластинки до  $10^{-2}$  1/м и напряжения до  $0.2E$ . Значение кривизны  $K_{A,B} \approx w'' = \frac{M_\Phi}{2D(1-\nu)}$ , равное  $10^{-2}$  1/м, соответствует следующим значениям прогибов:  $w_A^{\max} = 0.910 \cdot 10^{-5}$  м и  $w_B^{\max} = 0.225 \cdot 10^{-5}$  м. Отметим, что такие прогибы вполне детектируются методом [1].

Формулы (6) также показывают, что для более точного детектирования перемещений (достижения больших перемещений при меньших значениях изгибающего момента  $M_\Phi$ ) целесообразно использовать менее жесткие и более длинные подложки. Например, двукратное увеличение длины пластинки приводит к увеличению прогибов в 4 раза, а уменьшение толщины подложки в 2 раза приводит к увеличению прогиба в 8 раз.

**4. Обсуждение результатов и заключение.** Предложенные здесь две схемы принципиально позволяют определить механофотоэффект в фотохромных пленках и, в частности, воздействие фотохромных превращений на напряженно-деформированное состояние тела.

Эти схемы также в принципе предполагают возможность определения степени фотодеградации материала. Поскольку деформация  $\varepsilon_f$  пропорциональна количеству прореагировавшего материала в пленке, то степень деградации  $\omega$  за  $N$  циклов может быть определена формулой  $\omega = \frac{w^{\max}(N)}{w^{\max}(0)}$ , т.е. как отношение прогиба пластинки при  $N$ -м цикле прямая-обратная фотореакция (1) к прогибу в первом цикле.

При постановке экспериментов по изгибу пластинки с нанесенной на ее поверхность пленкой фотохромного соединения также следует отметить возможное возникновение сложностей, связанных с нагревом пленки из-за облучения, а также влиянием динамических эффектов. Нагрев пленки также может привести к ее изгибу, а колебания – к погрешности определения прогиба.

Для того чтобы учесть влияние тепловых эффектов возможно использовать охлаждение фотоячейки, либо освещение образца светом той же интенсивности, но с длиной волны, при которой нет фотореакции.

При облучении пленки в принципе могут возникнуть колебания образца, вызванные внезапным появлением изгибающих моментов. Подавление колебаний возможно при внесении в схему эксперимента демпфирующих элементов.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке и Программы РАН № П-08.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Подлесных А.В., Попов А.Л., Челобеев Д.А. Метод электронной спекл-интерферометрии для решения некоторых обратных задач механики упругих тел// Изв. РАН. МТТ. 2006. № 2. С. 5–14.
- [2] Калберт Дж., Питтс Дж. Фотохимия. М.: Мир, 1968. 672 с.
- [3] Scarmenio J. Stress in photochromic and electrochromic effects on tungsten oxide film// Solar Energy Materials & Solar Cells. 2003. Vol. 79. Pp. 357–368.
- [4] Granqvist C.G. Electrochromic tungsten oxide films: Review of progress 1993-1998// Solar Energy Materials & Solar Cells. 2000. Vol. 60. Pp. 201–262.
- [5] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

**Goldshstein R.V., Eremeyev V.A.** *On the the bending of a plate with a photochromic coating.* In this paper we discuss the possible experiments on investigation of the properties of photochromic compounds. The experiments are based on the determination of the displacements of an elastic plate coated by of photochromic compound.

# НЕРАЗРУШАЮЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СВАРНОМ СОЕДИНЕНИИ ПЛАСТИКОВЫХ СТЕРЖНЕЙ

Гольдштейн Р. В., Козинцев В. М., Куров Д. А.,  
Подлесных А. В., Попов А. Л.

*Институт проблем механики Российской академии наук, Москва*

Предложен экспериментально-теоретический неразрушающий метод определения остаточных напряжений в сварном соединении в процессе их формирования. Метод основан на установлении связи между перемещениями сварного соединения при его остывании до температуры окружающей среды и формирующимися при этом остаточными напряжениями. Для определения микро-перемещений в зоне шва используется электронная спеклинтерферометрия в реальном времени. Реализация метода проведена для сварного соединения торцов консольных пластиковых стержней. Связь между перемещениями и напряжениями при остывании сварки моделировалась на основе теории термоупругого внецентренного изгиба стержней. Полученные значения максимальных напряжений в сварном соединении оказались близки к пределу прочности материала стержней. С помощью данной экспериментально-теоретической методики определялись также упругие характеристики стержней.

Определение остаточных сварочных напряжений в процессе их формирования проводилось на образце, представлявшем собой, первоначально свободные, одинаковые консольные балки из полистирола прямоугольного поперечного сечения с размерами  $\ell_0 = 40$  мм,  $b = 16$  мм,  $h = 3$  мм, расположенные в одной плоскости и касавшиеся торцами друг друга (рис. 1). Сварка осуществлялась путём расплавления паяльником зоны контакта при температуре порядка  $300^\circ\text{C}$  и последующим естественным охлаждением соединения до комнатной температуры.

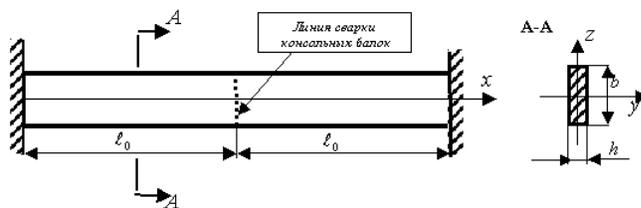


Рис. 1.

Остаточные напряжения в сварном соединении формируются при температурах ниже точки размягчения, для данного материала —  $90^\circ\text{C}$  [1]. Материал в зоне шва в этом диапазоне температур становится упругим и при охлаждении стремится сократить свои размеры, чему препятствуют жёсткие заземления концов объединённой сваркой балки. Ввиду того, что контакт паяльника с зоной будущего шва происходил с одной стороны от нейтральных осей балок и сопровождался

некоторым надавливанием, к моменту охлаждения шва до температуры размягчения (исходное состояние) нейтральная ось объединённой балки не была прямолинейной. Растягивающие напряжения, возникающие при дальнейшем охлаждении балки, изгибают её по отношению к исходному состоянию, что и служит критерием для их определения.

Упругие перемещения балки при остывании сварного шва от температуры размягчения до комнатной температуры можно смоделировать перемещениями при нагревании этой же балки в обратном направлении. При этом в процессе нагревания достаточно контролировать перемещения в узком диапазоне изменения температуры, например, на  $1^\circ\text{C}$ , а дальше, считая зависимость перемещений от температуры линейной, экстраполировать эти перемещения на весь температурный интервал.

Перемещения балки при нагревании будем моделировать изгибом под действием равномерной нагрузки  $q$ , величина которой определяется через изгибающий момент в заделке, который, в свою очередь, выражается через неравномерно распределённую по сечению продольную силу, вызванную стеснением температурного расширения материала. На рис. 2 показано действие температурной нагрузки при нагревании балки с жестко закреплёнными концами.

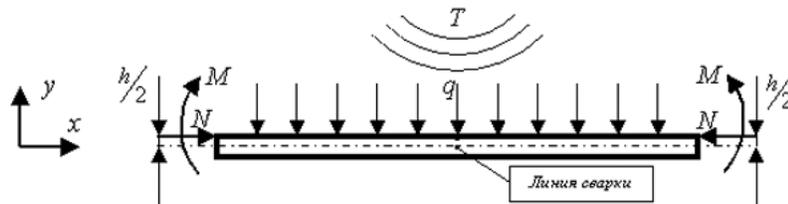


Рис. 2.

Вследствие неравномерности приложения сжимающей силы  $N$  по сечению балки за счет нагрева балки с одной стороны, возникает изгибающий момент  $M$ . Полагая  $N = E \cdot S \cdot \alpha \cdot \Delta T$ , где  $E$  — модуль упругости материала;  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения;  $\Delta T$  — изменение температуры;  $S = bh$ , получим выражение для  $M$  в виде:

$$M = E \cdot S \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{h}{2}. \quad (1)$$

Прогиб балки под воздействием равномерной нагрузки имеет общее выражение:

$$w(x) = w_0 - \theta_0 \cdot x - \frac{M_0}{D} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{Q_0}{D} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{q}{D} \cdot \frac{x^3}{24}, \quad (2)$$

где  $D = EI_z$  — жесткость балки,  $I_z = \frac{bh^3}{12}$  — момент инерции относительно оси  $z$ ,  $w_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  — начальные параметры Коши [2].

Из граничных условий жесткого заземления следует, что:

$$w(x) = -\frac{q \cdot x^2}{24 \cdot D} \cdot (\ell - x)^2, w_0 = 0, \theta_0 = 0, Q_0 = -q \frac{\ell}{2}, M_0 = q \frac{\ell^2}{12}, \quad (3)$$

где  $\ell = 2\ell_0$  — общая длина соединенных сваркой балок.

Постоянная  $M_0$  в этом выражении имеет смысл изгибающего момента в заделке. Приравнивая ее к моменту от сжимающей силы (1), получаем связь величины равномерной температурной нагрузки  $q$  с изменением температуры  $\Delta T$ :

$$q = 6 \cdot \frac{E \cdot S \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot h}{\ell^2}. \quad (4)$$

Из полученных выражений видно, что для определения прогиба необходимо знать модуль упругости материала  $E$  и температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha$ . Если они неизвестны, то для их нахождения можно использовать следующий экспериментально-теоретический подход.

Для определения модуля упругости, используем подход, аналогичный [3] с помощью метода электронного спеклинтерферометрии на установке ЛИМОН-ТВ. На рис. 3а показана экспериментальная установка, в которой закреплен консольный балочный образец из материала свариваемых балок, которые показаны на рис. 3б.

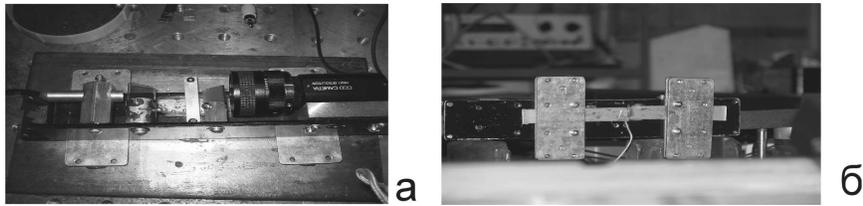


Рис. 3. 1 – балочный образец для определения модуля упругости, 2 – полупроводниковый лазер; 3 – видеокамера; 4 – консольные балки из пластика после сварки; 5 – термопара

Расчетная схема балочного образца для определения модуля упругости изображена на рис. 4.

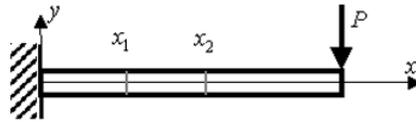


Рис. 4.

Прикладывая к свободному концу образца контролируемую нагрузку  $P$ , получаем известное выражение для прогиба консольной балки длины  $\ell_0$  [2]:

$$w = -\frac{P \cdot \ell_0 \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left(3 - \frac{x}{\ell_0}\right). \quad (5)$$

При экспериментальном определении прогиба образца, наблюдение ведется за частью оси балки между координатами  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 4). Поэтому, необходимо рассматривать функцию прогиб (5) только на этом участке, используя выражение  $\Delta w = w_1 - w_2$ , где  $w_j = w(x_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

Таким образом, на основании данной модели, для определения модуля упругости материала, из которого изготовлена сварная балка, используется выражение:

$$E = \frac{P \cdot \ell_0}{6 \cdot \Delta w \cdot I_z} \cdot \left[ x_2^2 \cdot \left(3 - \frac{x_2}{\ell_0}\right) - x_1^2 \cdot \left(3 - \frac{x_1}{\ell_0}\right) \right]. \quad (6)$$

При экспериментальном наблюдении за изгибом балки, ее прогиб на участке наблюдения характеризуется системой чередующихся темных и светлых полос,

перпендикулярных оси балки, отражающих расположение линий уровня прогиба. При использовании в системе твердотельного зеленого лазера, шаг между однотипными полосами составляет 0,256 мкм. На рис. 5а, б показано расположение этих линий между точками  $x_1 = 6,8$  мм и  $x_2 = 14,8$  мм оси балки длиной 40 мм при разном нагружении конца консольной балки (в первом случае  $P = 2\Gamma$ , во втором —  $4\Gamma$ ). Видно, что число полос для этих случаев нагружения также отличается вдвое (некоторая искривлённость полос указывает на сосредоточенный характер и внецентренность точки приложения нагрузки по краю балки и неидеальность экспериментальной реализации условия жёсткого защемления консоли).

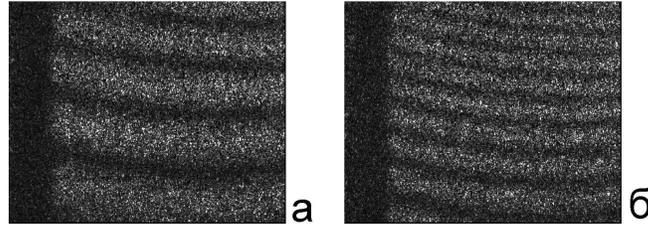


Рис. 5. Линии уровня прогиба участка консольной балки при краевой нагрузке 2Г (а) и 4Г (б).

В соответствии с наблюдаемым числом линий уровня  $N$  изменение прогиба для участка  $x_2 - x_1 = 8$  мм имеет следующие значения:  $\Delta w = 1,024$  мкм (рис. 5а),  $\Delta w = 2,048$  мкм (рис. 5б).

После подстановки полученных экспериментально значений прогиба в выражение (6), получаем среднее значение модуля упругости  $E = 2,5$  ГПа, совпадающее со справочными данными для полистирола [1].

В отличие от значения для модуля упругости, по температурному коэффициенту линейного расширения в справочной литературе имеется значительный разброс от  $6 \cdot 10^{-5}$  до  $10 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$  [1]. Поэтому данный параметр также определялся экспериментально путем замера изменения длины образца при нагревании на 70°C. Соответствующее изменение составило 0,45 мм, что привело к значению  $\alpha = 8 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$ , попадающему внутрь справочного диапазона.

Используя найденные значения механических характеристик материала и выражения (3), (4) для зависимости прогиба сварной балки от изменения температуры, определяем теоретическое значение перемещения зоны шва при нагреве на  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ , а по нему — значение изгибающего момента и максимального напряжения:

$$\sigma_{max}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q \cdot \ell^2}{4 \cdot b \cdot h^2}. \quad (7)$$

Расчет по этой формуле дает изменение напряжения при нагреве балки на один градус, равное 0,3 МПа. В предположении о сохранении линейной зависимости между изменением температуры и прогибом балки до температуры размягчения получаем полное изменение напряжений на величину 21 МПа.

Для экспериментального определения напряжений производился подсчет числа интерференционных полос при нагреве балки на один градус и по приведенному выше алгоритму определялись параметры температурной нагрузки и уровень остаточных напряжений. Соответствующее значение получилось равным

0,398 МПа на градус, т.е. полное напряжение — 28 МПа. Это значение приближенно равно остаточному напряжению, формирующемуся в образце при остывании от температуры размягчения. Учитывая, что предел прочности полистирола  $\sigma_B = 35$  МПа [1], оцениваем замеренные и расчетные значения остаточных напряжений как весьма значительные.

Расхождение результата между теоретической моделью и экспериментальными данными составляет приблизительно 25%, что может быть следствием несовершенства теоретической модели перемещений сварной балки при остывании шва, погрешности определения температуры термопарой, составлявшей  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  при определении зависимости перемещений от температуры и возможного непостоянства модуля упругости полистирола в разном диапазоне температур в пределах от 20 до 90 градусов.

Таким образом, на балочной модели показана возможность определения остаточных напряжений в сварном соединении без высверливания зондирующей лунки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [2] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. М.: Машиностроение, 2001. 408 с.
- [3] Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Подлесных А.В., Д. А. Челомбеев. Метод электронной спекл-интерферометрии для решения некоторых обратных задач механики упругих тел. Известия РАН. МТТ. 2006. Вып. 2. С. 5–14.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-08-01017, 05-01-08017), гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (НШ-4472.2006.1).

**Goldstein R.V., Kozintsev V.M., Kurov D.A., Podlesnih A.V., Popov A.L.**  
*Nondestructive method of determination of residual stresses in welded joint of plastic bars.*  
 The experimentally-theoretical nondestructive method of determination of residual stresses in welded joint during their forming is proposed. The method is based on an determination of relation between displacements of welded joint at its cooling up to an ambient temperature and residual stresses formed at that. For measurement of displacements in a zone of a weld it is used electronic speckle pattern interferometry in real time. Realization of a method is carried out for welded joints of ends of console plastic bars. Relation between displacements and stresses at cooling of weld was modelled on the basis of the theory of thermoelastic eccentric bending of bars. The obtained values of the maximal stresses in welded joint have appeared are close to ultimate strength of a material of bars. By means of the given experimentally-theoretical technique the elastic properties of bars were determined also.

# О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Даниленко А. С.\* , Наседкин А. В.\*\*

\* Южный научный центр РАН

\*\* Ростовский госуниверситет

Рассмотрены проблемы моделирования по методу конечных элементов пьезоэлектрических устройств, включенных в электрические цепи. Применительно к конечно-элементному пакету ACELAN построены базовые конечные элементы электрических цепей, предназначенные для использования в пьезоэлектрическом анализе. Рассмотрены случаи установившихся колебаний и нестационарных режимов работы пьезоэлектрических устройств.

Пьезоэлектрические устройства, широко применяемые в современной промышленности и технике, работают на явлениях прямого и обратного пьезоэффектов, преобразуя электрические сигналы в механические, и наоборот. Для возбуждения и регистрации электрических сигналов необходимо, наряду с самим устройством, использовать внешнюю электрическую цепь. Для многих классов пьезоэлектрических устройств моделирование без учета элементов электрических цепей является совсем не достаточным, как, например, для пьезотрансформаторов напряжения и тока [1]. Важность учета элементов электрических цепей в пьезоэлектрическом анализе отмечалась в [2] и во многих других работах. Можно также отметить, что в последние версии широко известного конечно-элементного (КЭ) пакета ANSYS были добавлены базовые конечные элементы электрических цепей, специально разработанные для пьезоэлектрического анализа. КЭ уравнения этих элементов ансамблируются с используемыми в ANSYS КЭ уравнениями пьезоэлектричества по методологии, описанной в [3]. КЭ пакет ACELAN [4, 5] до недавнего времени не имел возможностей расчета пьезоустройств, включенных во внешнюю цепь, и в настоящей работе предлагаются подходы, позволяющие присоединить к КЭ уравнениям пьезоэлектричества ACELAN элементы электрических цепей.

Для расчета пьезоэлектрических устройств без учета внешней акустической среды в конечно-элементных (КЭ) пакетах ANSYS и ACELAN используется следующая система дифференциальных уравнений в обозначениях [4, 5]

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u, \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot (\zeta_d \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}) - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = -\zeta_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi - \mathbf{F}_\varphi, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ ,  $\Phi = \Phi(t)$  — глобальные векторы узловых степеней свободы для полей перемещений и электрического потенциала соответственно; причем коэффициент демпфирования  $\zeta_d$  для пакета ANSYS должен быть принят равным нулю. Заметим, что в (1), (2) вектор  $\mathbf{F}_\varphi$  по сравнению с [4, 5] взят с обратным знаком, и в этом случае  $\mathbf{F}_\varphi$  является вектором узловых электрических зарядов.

Для моделирования подключения к пьезоэлементу внешней цепи прежде всего рассмотрим основные элементы электрических цепей.

Резистивный элемент с номером  $m$ , узлами  $i, j$  и с сопротивлением  $R_m$  описывается законом Ома

$$\Phi_i - \Phi_j = R_m I_{ij}, \quad (3)$$

где  $\Phi_i, \Phi_j$  — значения электрического потенциала в узлах  $i, j$ ;  $I_{ij}$  — ток, текущий от узла  $i$  к узлу  $j$  по соответствующей ветви. Поскольку

$$I_{ij} = \dot{Q}_{ij}, \quad (4)$$

где  $Q_{ij}$  — заряд в узле  $i$ , перетекающий в узел  $j$ , то можно записать уравнение для резистивного элемента с номером  $m$  в виде

$$\mathbf{K}_R^{em} \cdot \Phi^{em} = \dot{\mathbf{Q}}_R^{em}, \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_R^{em} = \frac{1}{R_m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Phi^{em} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_R^{em} = \begin{Bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

причем  $Q_{ji} = -Q_{ij}$ .

Для емкостного элемента с номером  $m$  с электрической емкостью  $C_m$  элементное уравнение можно представить в форме

$$\mathbf{K}_C^{em} \cdot \Phi^{em} = \mathbf{Q}_C^{em}, \quad (7)$$

а для индуктивного элемента с номером  $m$  и с индуктивностью  $L_m$  — в виде

$$\mathbf{K}_L^{em} \cdot \Phi^{em} = \ddot{\mathbf{Q}}_L^{em}, \quad (8)$$

где в (7), (8) элементные матрицы даются формулами

$$\mathbf{K}_C^{em} = C_m \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_L^{em} = \frac{1}{L_m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

КЭ уравнения электрической цепи удобно формировать с использованием топологических понятий теории цепей и первого закона Кирхгофа для токов [6]. Согласно этому закону в электрической цепи для каждого его узла  $i$  алгебраическая сумма токов всех ветвей, присоединенных к узлу, равна нулю:  $\sum_k I_{ik} = 0$ . Из закона Кирхгофа следует, что имеют место уравнения

$$\sum_k Q_{ik} = Q_i = \text{const}_i, \quad (10)$$

где  $Q_i$  — заданный заряд в узле с номером  $i$ , определяемый из начальных условий.

Уравнение (10) может служить основой для ансамблирования элементных уравнений (5), (7), (8) и для их объединения с КЭ уравнениями пьезоустройств (1), (2). Основная проблема состоит в сборке глобальных уравнений по единым по физическому смыслу правым частям, в частности, по сборке уравнений по электрическим зарядам. Как видно из (2), (5), (7), (8) ситуация здесь осложняется тем,

что в правые части КЭ уравнений входят как значения электрических зарядов, так и их производные различного порядка.

В случае режима установившихся колебаний по времени с частотой  $\omega$

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \exp[i\omega t], \quad \Phi = \tilde{\Phi} \exp[i\omega t], \quad \mathbf{F}_a = \tilde{\mathbf{F}}_a \exp[i\omega t], \quad a = u, \varphi \quad (11)$$

система (1), (2) принимает вид

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_{uu} + i\omega \mathbf{C}_{uu} + \mathbf{K}_{uu}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \tilde{\Phi} = \tilde{\mathbf{F}}_u, \quad (12)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \tilde{\mathbf{U}} + (1 + i\zeta_d \omega)^{-1} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \tilde{\Phi} = \tilde{\mathbf{F}}_\varphi, \quad (13)$$

а КЭ уравнения для элементов внешней электрической цепи (5), (7), (8) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}_R^{em} \cdot \tilde{\Phi}^{em} = \tilde{\mathbf{Q}}_R^{em}; \quad \tilde{\mathbf{K}}_C^{em} \cdot \tilde{\Phi}^{em} = \tilde{\mathbf{Q}}_C^{em}; \quad \tilde{\mathbf{K}}_L^{em} \cdot \tilde{\Phi}^{em} = \tilde{\mathbf{Q}}_L^{em}, \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_R^{em} = \frac{1}{i\omega} \mathbf{K}_R^{em}; \quad \tilde{\mathbf{K}}_C^{em} = \mathbf{K}_C^{em}; \quad \tilde{\mathbf{K}}_L^{em} = -\frac{1}{\omega^2} \mathbf{K}_L^{em}. \quad (15)$$

Поскольку в (13), (14) в  $\tilde{\mathbf{F}}_\varphi$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_b^{em}$  ( $b = C, R, L$ ) фигурируют узловые электрические заряды, то проблем со сборкой глобальных КЭ уравнений пьезоустройств со внешними цепями на основе закона (10) с случае установившихся колебаний не возникает.

В случае нестационарных задач непосредственно собрать КЭ уравнения (2), (5), (7), (8) не удастся. Заметим, что для численного интегрирования по времени уравнений движения в МКЭ обычно используются некоторые разностные схемы с весами. В ANSYS и в ACELAN применяются схемы Ньюмарка, однако, в существенно различных формулировках.

В ACELAN для каждого  $j$ -ого временного слоя  $t_j = j\tau$  ( $\tau = \Delta t$  — шаг по времени) для (1), (2) используются осредняющие по времени операторы

$$Y_j \mathbf{a} = \sum_{k=0}^2 \beta_k \mathbf{a}_{j+1-k}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{U}, \Phi, \mathbf{F}_u, \mathbf{F}_\varphi, \quad (16)$$

$$Y_j \dot{\mathbf{a}} = (\gamma \mathbf{a}_{j+1} - (2\gamma - 1) \mathbf{a}_j - (1 - \gamma) \mathbf{a}_{j-1}) / \tau, \quad Y_j \ddot{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{j+1} - 2\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_{j-1}) / \tau^2, \quad (17)$$

где

$$\beta_0 = \beta, \quad \beta_1 = \gamma_1 - 2\beta, \quad \beta_2 = \gamma_2 + \beta, \quad \gamma_1 = 1/2 + \gamma, \quad \gamma_2 = 1/2 - \gamma. \quad (18)$$

Здесь  $\beta, \gamma$  — параметры метода Ньюмарка, безусловно устойчивого при  $\beta \geq (1/2 + \gamma)^2/4$ ;  $\gamma \geq 1/2$ , и не обладающего аппроксимизационной вязкостью при  $\beta \geq 1/4$ ;  $\gamma = 1/2$ .

Соотношения (17) можно также представить в форме

$$Y_j \dot{\mathbf{a}} = \frac{\gamma}{\beta\tau} (Y_j \mathbf{a} - Y_j \mathbf{a}^p) + Y_j \dot{\mathbf{a}}^p, \quad Y_j \ddot{\mathbf{a}} = \frac{1}{\beta\tau^2} (Y_j \mathbf{a} - Y_j \mathbf{a}^p), \quad (19)$$

$$Y_j \mathbf{a}^p = \gamma_1 \mathbf{a}_j + \gamma_2 \mathbf{a}_{j-1}; \quad Y_j \dot{\mathbf{a}}^p = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j-1}) / \tau, \quad (20)$$

позволяющей для всех осредняющих операторов выделить единое слагаемое  $Y_j \mathbf{a}$  со значениями на  $j$ -ом временном слое.

При  $\zeta_d = 0$  в (2) возможна достаточно простая процедура ансамблирования осредненных по времени КЭ уравнений пьезоустройств и элементов внешней цепи. Именно, продифференцировав нужное число раз по времени, уравнения (2), (5), (7) вместе с (8) можно записать в виде

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \ddot{\Phi} = \ddot{\mathbf{F}}_{\varphi}, \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_C^{em} \cdot \ddot{\Phi}^{em} = \ddot{\mathbf{Q}}_C^{em}, \quad \mathbf{K}_R^{em} \cdot \ddot{\Phi}^{em} = \ddot{\mathbf{Q}}_R^{em}, \quad \mathbf{K}_L^{em} \cdot \ddot{\Phi}^{em} = \ddot{\mathbf{Q}}_L^{em}. \quad (22)$$

Теперь, применяя осредняющие операторы (16), (17) к (1), (21), (22), можно объединить (ансамблировать) полученные уравнения по однотипным правым частям, и при этом внутренние узловые электрические заряды в правых частях сократятся, а останутся только активные узловые источники электрических зарядов.

Полученную систему уравнений можно записать в форме, подходящей для ACELAN, с симметричной матрицей блочной седловой структуры

$$\mathbf{K}_{uu}^{eff} \cdot \mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi_{j+1} = \mathbf{F}_u^{eff} \left( \frac{1}{\beta} Y_j \mathbf{F}_u, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}, \Phi_j, \Phi_{j-1} \right), \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi_{j+1} = \mathbf{F}_{\varphi}^{eff} \left( -\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{F}}_{\varphi}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}, \Phi_j, \Phi_{j-1} \right), \quad (24)$$

$$-\mathbf{K}_C^{em} \cdot \Phi_{j+1}^{em} = -\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{Q}}_C^{em} - \mathbf{K}_C^{em} \cdot [2\Phi_j^{em} - \Phi_{j-1}^{em}], \quad (25)$$

$$-\tau\gamma \mathbf{K}_R^{em} \cdot \Phi_{j+1}^{em} = -\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{Q}}_R^{em} - \tau \mathbf{K}_C^{em} \cdot [(2\gamma - 1)\Phi_j^{em} + (1 - \gamma)\Phi_{j-1}^{em}], \quad (26)$$

$$-\tau^2 \beta \mathbf{K}_L^{em} \cdot \Phi_{j+1}^{em} = -\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{Q}}_L^{em} + \tau^2 \mathbf{K}_L^{em} \cdot [\beta_1 \Phi_j^{em} + \beta_2 \Phi_{j-1}^{em}], \quad (27)$$

где

$$\mathbf{K}_{uu}^{eff} = \frac{1}{\beta\tau^2} \mathbf{M}_{uu} + \frac{\gamma}{\beta\tau} \mathbf{C}_{uu} + \mathbf{K}_{uu}. \quad (28)$$

Подчеркнем, что при ансамблировании уравнений (23)–(27) внутренние узловые заряды в  $\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{F}}_{\varphi}$ ,  $\tau^2 Y_j \ddot{\mathbf{Q}}_b^{em}$  ( $b = C, R, L$ ) сокращаются, и в правых частях остаются только известные величины.

Недостатком данного подхода является ограничение  $\zeta_d = 0$ , а также дифференцирование по времени КЭ уравнений (правда, только для применения осредняющих операторов), что может однако повлиять на точность аппроксимаций.

Альтернативный подход состоит в непосредственном применении осредняющих по времени операторов в форме (16), (19), (20) к уравнениям (1), (2), (5), (7), (8) и в выделении в правых частях слагаемых  $Y_j \mathbf{F}_{\varphi}$ ,  $Y_j \mathbf{Q}_b^{em}$  по (19). При ансамблировании полученных уравнений будут сокращаться внутренние заряды в форме  $Y_j \mathbf{F}_{\varphi}$ ,  $Y_j \mathbf{Q}_b^{em}$ , однако, внутренние электрические заряды из  $\mathbf{F}_{\varphi j}$ ,  $\mathbf{F}_{\varphi(j-1)}$ ,  $\mathbf{Q}_{bj}^{em}$ ,  $\mathbf{Q}_{b(j-1)}^{em}$ , получаемые из (20), останутся. Для их определения можно привлечь дополнительные аппроксимации уравнений (2), (5), (7), (8) на временных слоях  $j$  и  $j - 1$ .

Фактически именно близкий по идеологии подход, описанный в [3] при использовании метода Ньюмарка в совсем другой формулировке, принят в ANSYS.

В заключение отметим, что конечно-элементный расчет реального пьезоэлектрического устройства в виде многослойного пьезотрансформатора Розена, включенного в развитую электрическую цепь, показал эффективность КЭ пьезоэлектрического анализа с элементами внешней цепи [7], но здесь из-за ограниченности объема статьи данные результаты не приводятся.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 05-01-00752).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Данов Г.А. Пьезоэлектрические трансформаторы. М., 2003. 320 с.
- [2] Клизман Е.П., Матвеев В.П., Юрлова Н.А. Динамические характеристики тонкостенных электроупругих систем // Изв. РАН. МТТ. 2005. No. 2. С. 179–187.
- [3] Wang J.S., Ostergaard D.F. A finite element-electric circuit coupled simulation method for piezoelectric transducer // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1999. P. 1105–1108.
- [4] Белоконов А.В., Наседкин А.В., Никитаев А.В., Петушков А.Л., Скалиух А.С., Соловьев А.Н. Новая версия пакета ACELAN для проведения расчетов пьезоизлучателей и пьезоприемников акустических волн // Пьезотехника-2002. Межд. научно-практич. конф. "Фундамент. проблемы пьезоэлектрич. приборостроения". Тверь, 17-21 сент. 2002 г. Сб. докл. Тверь, ТвГУ, 2002. С. 171–179.
- [5] Белоконов А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, № 3. С. 491–501.
- [6] Ушаков В.Н. Электротехника и электроника. М.: Радио и связь, 1997. 328 с.
- [7] Наседкин А.В. Конечно-элементный расчет многослойного пьезотрансформатора Розена с двумя выходами // Мат. моделирование, биомеханика и информационные технологии в современном университете. Тез. докл. Всеросс. Шк.-семинара, Ростов н/Д: 22-26 мая 2006. Ростов н/Д: изд-во ООО "Тера Принт 2006. С. 36–37.

**Danilenko A.S., Nasedkin A.V.** *Some approaches to finite element piezoelectric devices modelling with external electric circuits.* The finite element technologies for piezoelectric devices modelling with electric circuits are considered. For finite element package ACELAN the basic finite elements of electric circuits are constructed. The harmonic and transient operating regimes of piezoelectric devices are considered.

# ОБ УСЛОВИЯХ БАЛАНСА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Еремеев В. А.<sup>\*</sup>, Наседкина А. А.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону и Ростовский госуниверситет

<sup>\*\*</sup> Ростовский государственный университет

Предложена модель деформируемой насыщенной пористой среды, в которой возможно изменение пористости. В рамках этой модели помимо деформации упругого скелета возможно описание как процессов фильтрации, так и изменения пористости материала. Модель образована уравнениями равновесия, описывающих изменение напряженно-деформированного состояния в упругом скелете, которые аналогичны модели Био [1], законом фильтрации Дарси, а также уравнением, описывающим изменение пористости материала, основанном на модели пористой среды Ковина-Нунциато [2, 3].

**Введение.** Задачи моделирования процессов фильтрации жидкости в твердых телах представляют собой значительный интерес для различных областей науки и техники, например, таких как, механика грунтов, композитов, газо- и нефтенасыщенных пород. Наиболее простая модель пористой среды, не учитывающая деформации и напряжения в твердом скелете приведена в [4]. Модель Био [1], построенная для малых деформаций твердой фазы, не всегда достаточна для описания процессов фильтрации в пористой среде. Более сложные модели пористых материалов, в том числе и насыщенных жидкостью или газом, на основе теории смесей жидкости и твердого тела представлены в [5–7]. В [2, 3] сформулировано дополнительное уравнение для учета изменения пористости тела. Это уравнение может рассматриваться как кинетическое уравнение, описывающее эволюцию некоторых внутренних параметров среды, отвечающих за ее целостность, и является примером повреждающихся сред [8].

Важным аспектом механики пористых сред является проблема построения условий баланса на свободных границах или границах разрыва непрерывности полей деформации. Примерами такой поверхности может служить граница распространения жидкости в твердом теле, т.е. поверхность, разделяющая сухую и насыщенную жидкостью части, межфазная граница, например, отделяющая замерзшую часть от незамерзшей. Практически важным примером такой границы в пористых средах может служить поверхность гидроразрыва, на которой скачком меняется коэффициент фильтрации, которая появляется в угольных пластах при применении к ним метода гидродинамического воздействия [9–11]. Этот метод является одним из способов интенсификации газовыделения из угольных пластов. Метод направлен на повышение трещиноватости и разрушение пласта, что позволяет увеличить выход метана и в дальнейшем его утилизировать. Гидродинамическое воздействие осуществляется путем нагнетания в пласт воды под большим давлением через скважину, пробуренную с земной поверхности. Жидкость перемещается вглубь пласта, оттесняя и сжимая метан в порах. Когда давление достигает давления гидроразрыва, в пласте появляются трещины и метан высвобождается

из связанного состояния в поровом пространстве. Нарушение структуры угольного пласта приводит к газоотдаче в зоне дегазации.

Целью данной работы является дальнейшее развитие модели, предложенной в [9, 11, 12], а также получение уравнений баланса на границах нарушения непрерывности рассматриваемых полей. Для простоты такие поверхности будем называть границами раздела фаз материала.

**Основные соотношения.** Рассмотрим квазистатический процесс фильтрации жидкости в пористой среде. Пористый материал, насыщенный жидкостью, будем представлять как смесь твердой и жидкой фаз [5, 6]. Твердую фазу (скелет) будем считать нелинейно упругим пористым телом [2], а жидкость — идеальной и несжимаемой.

Тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}$  для смеси представим в виде суммы

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}_s$  — тензор напряжений в упругом скелете,  $\sigma$  — среднее напряжение, вызванное давлением жидкости в порах,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор. Будем считать, что  $\sigma$  определяется формулой [1]

$$\sigma = -fp. \quad (2)$$

где  $f$  — пористость среды,  $p$  — давление жидкости в порах.

Уравнение равновесия для пористого тела имеет вид

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{k} = 0. \quad (3)$$

В (3)  $\text{Div}$  — оператор дивергенции в эйлеровых координатах,  $\rho$  — плотность смеси, определяемая как сумма плотностей упругого скелета  $\rho_s$  и жидкости  $\rho_f$ :  $\rho = \rho_s + \rho_f$ ,  $\mathbf{k}$  — вектор массовых сил.

В [2] было предложено дополнительное уравнение, описывающее изменение пористости материала. В случае медленных процессов (точнее говоря, если пренебречь инерционными слагаемыми) это уравнение имеет вид

$$\text{Div } \mathbf{h} + \mathbf{g} + \rho \mathbf{l} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{h}$  — вектор так называемых самоуравновешенных напряжений (вектор потока пористости),  $\mathbf{g}$  — вектор внутренних самоуравновешенных сил,  $\mathbf{l}$  — вектор внешних самоуравновешенных сил. Фактически, это уравнение может рассматриваться как частный случай кинетического уравнения, описывающего эволюцию внутреннего параметра  $f$  — пористости материала.

Закон Дарси, связывающий скорость фильтрации жидкости  $\mathbf{v}$  и величину среднего напряжения  $\sigma$ , записывается соотношением

$$\text{Grad } \sigma + \rho_f \mathbf{k} = b(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}), \quad b = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь  $\text{Grad}$  — оператор градиента в эйлеровых координатах,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений упругой фазы, точкой вверху обозначена полная производная по времени  $t$ .

Наряду с определяющими соотношениями для упругой фазы, связывающими тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}_s$  с вектором перемещений  $\mathbf{u}$ , примем также условие несжимаемости жидкости

$$\text{Div } \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (3)–(5) описывают процесс переноса жидкости в объеме деформируемого пористого тела при не очень высоких скоростях фильтрации.

Условие несжимаемости (6) позволяет исключить скорость жидкости  $\mathbf{v}$  из числа неизвестных. Окончательно имеем систему четырех уравнений относительно неизвестных  $\mathbf{u}$ ,  $f$  и  $\sigma$  (или  $p$ )

$$\text{Div } \mathbf{T}_s + \text{grad } \sigma + \rho \mathbf{k} = 0, \quad (7)$$

$$\text{Div } \mathbf{h} + \mathbf{g} + \rho \mathbf{l} = 0,$$

$$\Delta \sigma + \rho_f \text{Div } \mathbf{k} = b \text{Div } \dot{\mathbf{u}}.$$

Для замыкания системы уравнений (7) необходимо воспользоваться уравнениями состояния для  $\mathbf{T}_s$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{g}$ . В случае конечных деформаций эти уравнения предложены в [2], а в случае малых деформаций – в [3]. В последнем случае для упругого скелета нет необходимости различать отсчетное и актуальное состояния, тензоры напряжений Коши и Пиолы и т.д. Используя [3], можно показать, что в последнем случае уравнения квазистатического деформирования пористой среды с учетом фильтрации жидкости по своей структуре аналогичны уравнениям связанной термоупругости при учете диффузии, но не совпадают с ними полностью. С целью сохранения объема статьи здесь они не приводятся.

Отметим, что полученная система уравнений отличается от предложенной Био тем, что в ней есть учет изменения пористости среды, а от модели Ковина-Нунциато – возможностью описания процессов фильтрации.

**Уравнения баланса на поверхности разрыва.** Рассмотрим уравнения баланса на поверхности, на которой некоторые или все рассматриваемые поля могут терять непрерывность или непрерывную дифференцируемость. Существуют различные методы математически строго вывода уравнений совместности (баланса) на поверхностях разрыва: на основе интегральных законов сохранения, вариационные, путем анализа обобщенных решений уравнений дивергентного вида [8]. Воспользуемся здесь последним методом. Если существует поверхность  $\gamma$ , на которой нарушаются условия гладкости, то на ней должны выполняться следующие соотношения

$$\mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{T} \rrbracket = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \llbracket \mathbf{h} \rrbracket = 0, \quad \mathbf{N} \llbracket \sigma \rrbracket = -Vb \llbracket \mathbf{u} \rrbracket. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{N}$  – вектор единичной нормали к  $\gamma$ ,  $V$  – скорость движения  $\gamma$  в направлении нормали. Уравнения баланса получены в предположении об отсутствии сосредоточенных на  $\gamma$  источников сил, пористости, а также непрерывности внешних нагрузок, полей перемещений и скорости жидкости. Квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на  $\gamma$ .

Если поверхность  $\gamma$  является заранее неизвестной, как это происходит в случае, если она описывает границу фазового перехода, поверхность разрушения, ударную волну и т.д., то систему уравнений баланса (8) следует дополнить критерием, позволяющим определить положение  $\gamma$ . Естественно, что вид критерия существенно

зависит от природы явления, описываемого поверхностью разрыва. Воспользовавшись идеями теории континуально повреждающихся сред [8], здесь ограничимся формой критерия общего вида

$$\Phi[\mathbf{T}_s, f, \sigma] = 0. \quad (9)$$

В (9)  $\Phi$  в общем случае представляет собой функционал, зависящий от предыстории напряжений (или деформаций), предыстории пористости и давления в порах. Простыми примерами (9) служат условие для давления

$$p = p^*,$$

где  $p^*$  – давление гидроразрыва угольного пласта, использованного в [9, 11, 12], или условие для пористости такого же вида  $f = f^*$ , где  $f^*$  – значение пористости, при котором происходит разрушение материала. Под вид (9) подпадают и различные критерии текучести.

Если  $\gamma$  описывает поверхность раздела в пористом теле, испытывающем фазовые превращения, то критерий вида (9) может быть получен на основе термодинамических рассуждений [8].

Уравнения (7)–(9), дополненные соответствующими краевыми условиями на внешней границе области, позволяют моделировать процессы фильтрации в повреждающихся средах, в которых в качестве параметра поврежденности выступает пористость.

**Заключение.** В работе предложены уравнения пористой среды при учете изменения пористости и процесса фильтрации. Для квазистатических процессов сформулированы условия совместности на границе раздела фаз. Полученные уравнения могут быть обобщены на случай динамических процессов, в том числе в случае разрывных решений.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда содействия отечественной науке.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
- [2] Nunziato J.W., Cowin S.C. A nonlinear theory of elastic materials with voids//Arch. Rat. Mech. Analysis. 1979. Vol. 72. P. 175–201.
- [3] Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids//J. Elast. 1983. Vol. 13. P. 125–147.
- [4] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.

- [5] *Bowen R.J.* Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 24. № 5. P. 370–403.
- [6] *Atkin R.J., Crain R.E.* Continuum theories of mixtures: applications // J. Institute Math. Appl. 1976. V. 17. № 2. P. 153–207.
- [7] *Низматуллин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
- [8] *Кондауров В.И., Фортков В.Е.* Основы термомеханики конденсированной среды. М.: Изд-во МФТИ, 2002. 336 с.
- [9] *Сластунов С.В., Каркашадзе Г.Г., Коликов К.С.* Аналитическая модель гидравлического расчленения угольного пласта // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2001. № 6. С. 31–37.
- [10] *Пучков Л.А., Сластунов С.В., Коликов К.С.* Извлечение метана из угольных пластов. М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2002. 383 с.
- [11] *Наседкина А.А., Труфанов В.Н.* Конечно-элементное моделирование процесса гидродинамического расчленения многослойного угольного пласта // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2006. № 1. С. 61–70.
- [12] *Наседкина А.А., Труфанов В.Н.* Трехмерная конечно-элементная модель гидродинамического воздействия на многослойный угольный пласт с зоной флюидизации // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 3. С. 14–22.

**Eremeyev V.A., Nasedkina A.A.** *On the balance equations on the phase interface in the deformable porous media.* In this paper we propose the model of porous media based on the models by Bio and Cowin-Nunziato models. The balance equations on the discontinuity surface are discussed.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ И КРУГЕ В СЛУЧАЕ СИЛЬНО ВЯЗКОЙ, СЛАБО ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

**Жуков М. Ю., Петровская Н. В., Ширяева Е. В.**

*Ростовский государственный университет*

Представлены результаты компьютерного моделирования двумерных конвективных течений сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости, заполняющей подогреваемый снизу горизонтальный слой или круг. Метод Галеркина и конечно-разностный метод применяются к исследованию развития малых возмущений состояния механического равновесия жидкости.

В работах [1–3] теоретически исследован предельный случай конвекции в сильно вязкой нетеплопроводной жидкости. В частности, показано, что все движения затухают, и в пределе  $t \rightarrow \infty$  устанавливается некий произвольный равновесный профиль температуры  $T(z)$ . Устойчивыми являются только те равновесия, для которых градиент температуры направлен вверх, так что всюду в области течения более горячая и легкая жидкость располагается над холодной и тяжелой.

В.И. Юдовичем была высказана гипотеза о том, что выбор начального состояния вблизи истинного механического равновесия с линейным профилем температуры приведет к установлению предельного равновесия с так называемым перевернутым профилем температуры — тоже линейным, но зеркально отраженным в срединной плоскости слоя [4]. Выполненные на основе полных уравнений Обербека–Буссинеска для случая нетеплопроводной жидкости расчеты подтверждают эту гипотезу [5].

В случае малой, но ненулевой теплопроводности компьютерные эксперименты показывают, что развитие малых возмущений неустойчивого механического равновесия также приводит к конвективному перевороту (поскольку это быстрый процесс, то влияние малой теплопроводности не успевает сказаться). Любопытно, что качественные особенности этого процесса одинаковы для столь разных областей как плоский горизонтальный слой и круг.

## 1. Постановка задачи

Тепловая конвекция вязкой жидкости описывается уравнениями Обербека–Буссинеска в удобной для исследования предельных случаев форме [1]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + T\mathbf{k}, \quad \frac{dT}{dt} = \delta\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $t$ ,  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ ,  $T$ ,  $p$  — безразмерные время, скорость и отклонения температуры и давления от некоторых средних значений;  $\mathbf{k}$  — координатный орт, направленный вертикально вверх, против действия силы тяжести. Безразмерные коэффициенты вязкости и температуропроводности  $\mu$  и  $\delta$  связаны с числами Рэлея  $Ra$  и Прандтля  $Pr$  соотношениями:  $Ra = 1/(\mu\delta)$ ,  $Pr = \mu/\delta$ .

Рассматриваются двумерные движения жидкости, для которых  $u$ ,  $w$ ,  $T$  и  $p$  не зависят от координаты  $y$ , а  $v = 0$ . Область, занятая жидкостью — горизонтальный

слой с границами  $z = 0$ ,  $z = 1$  или круг с границей  $x^2 + z^2 = 1$ . Границы области предполагаются твердыми и на них заданы условия:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T = T_0(z)$$

(для слоя  $T_0 = 1 - z$ , для круга  $T_0 = -z$ ).

Вводятся функция тока  $\psi(x, z, t)$  и отклонение температуры от равновесного профиля  $\theta(x, z, t)$ :

$$u = \psi_z, \quad w = -\psi_x, \quad \theta = T - T_0(z).$$

Уравнения (1) приводятся к виду

$$\Delta\psi_t = J(\psi, \Delta\psi) + \mu\Delta^2\psi - \theta_x, \quad \theta_t = J(\psi, \theta) + \delta\Delta\theta - \psi_x, \quad (2)$$

где

$$J(f, g) = f_x g_z - f_z g_x, \quad \Delta = (\ )_{xx} + (\ )_{zz}.$$

При этом на границе области:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \theta = 0. \quad (3)$$

В случае горизонтального слоя дополнительно требуется, чтобы расход жидкости через поперечное сечение равнялся нулю.

## 2. Конечномерные модели

Расчет приближенных решений задачи (2), (3) проводился методом Бубнова-Галеркина и конечно-разностным методом. Использование двух разных численных методов, очевидно, повышает надежность полученных результатов. Это особенно важно в ситуации, когда расчеты ведутся в области больших (даже очень больших) чисел Рэлея и Прандтля ( $Ra > 10^5$ ,  $Pr > 10^3$ ).

Для получения галеркинских аппроксимаций функция тока  $\psi$  и возмущение температуры  $\theta$  разыскивались в виде:

$$\psi = \sum_{m,n} \psi_{mn}(t) \cdot f_{mn}(x, z), \quad \theta = \sum_{m,n} \theta_{mn}(t) \cdot g_{mn}(x, z). \quad (4)$$

В случае горизонтального слоя движения жидкости предполагались периодическими по горизонтальной переменной  $x$  с периодом  $P$ , базисные функции выбирались в виде:

$$f_{mn}(x, z) = \sin(\alpha_0 m x) \cdot \phi_n^{(m)}(z), \quad g_{mn}(x, z) = \cos(\alpha_0 m x) \cdot h_n(z), \quad \alpha_0 = 2\pi/P$$

где  $\phi_n^{(m)}(z)$ ,  $h_n(z)$  — многочлены. В случае круговой области базисные функции  $f_{mn}(x, z)$  и  $g_{mn}(x, z)$  являлись многочленами двух переменных. Подробности построения галеркинских моделей см. в [5].

Для расчетов конвективных движений в горизонтальном слое использовались также явные конечно-разностные схемы, аппроксимирующие консервативную форму исходных уравнений на вложенных сетках (см, например, [6]). Размеры сетки выбирались в направлении  $x$ :  $n = 32, 64, 128, 256$ , в направлении  $z$ :  $m = 32, 64$ .

### 3. Компьютерный эксперимент

В компьютерных экспериментах безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности выбирались в интервалах  $0.1 \leq \mu \leq 2$ ,  $0 < \delta \leq 10^{-4}$ . Заметим, что значения  $\mu \geq 0.1$  можно считать большими в том смысле, что свойства движений жидкости, рассчитанных на основе полных уравнений Обербека–Буссинеска, согласуются с результатами теоретического исследования предельного случая сильно вязкой нетеплопроводной жидкости [1, 2].

Изучалась эволюция выбранных случайным образом малых *конечных* возмущений неустойчивого механического равновесия. Отметим, что при  $\delta \neq 0$  поля вида  $\mathbf{v} = 0$ ,  $T = T(z)$  равновесиями не являются — за исключением истинного механического равновесия  $\mathbf{v} = 0$ ,  $T = T_0(z)$ . Такие поля будем называть квазиравновесиями.

Расчеты показали, что и в случае слабо теплопроводной жидкости (так же как и в полностью нетеплопроводной [1–3]) развитие малых возмущений неустойчивого механического равновесия приводит к конвективному перевороту. В слое возникают хорошо известные конвективные валы, а в круге горячая жидкость вдоль одной из стенок поднимается вверх, а вдоль другой стенки стекает вниз — см. рис. 1, где представлены результаты расчета при  $\mu = 1$ ,  $\delta = 10^{-6}$  ( $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 10^6$ ). На рис. 1а: начало процесса, скорость жидкости близка к нулю, температура распределена по закону  $T = T_0(z)$  (горячая жидкость внизу, холодная — вверх). На рис. 1h: конвективный переворот завершился и в результате система попала в малую окрестность квазиравновесия с близким к перевернутому профилем температуры; теперь горячая жидкость сверху, а холодная — внизу.

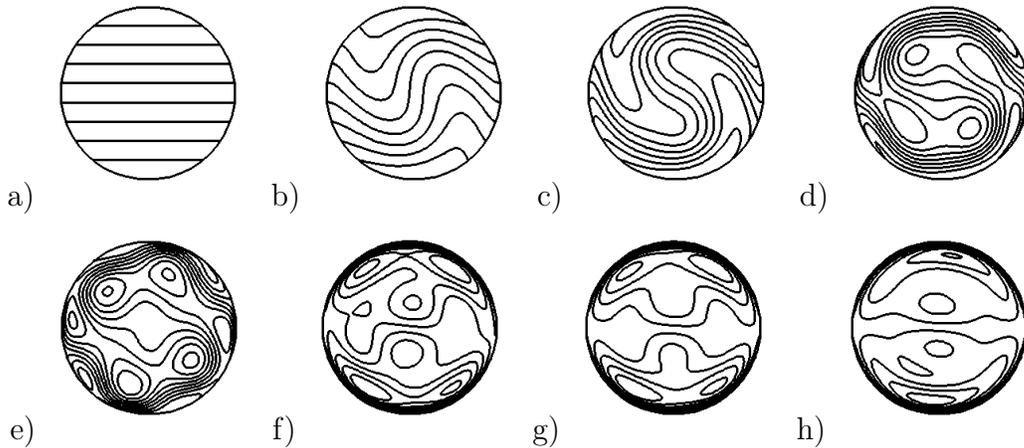


Рис. 1. Фазы движения (первый конвективный переворот, изотермы)

На рис. 2 показан типичный процесс преобразования усредненного по горизонтальной переменной профиля температуры  $T_{av}(z)$ : слева — расчет для горизонтального слоя при  $\mu = 0.1$ ,  $\delta = 10^{-8}$  ( $Ra = 10^9$ ,  $Pr = 10^7$ ) с периодом  $P = 1.3$ , справа — для круга при  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 10^{-6}$  ( $Ra = 2 \cdot 10^6$ ,  $Pr = 0.5 \cdot 10^6$ ). Начальные данные формировались с помощью датчика случайных чисел и имели порядок малости  $10^{-7}$ . Хорошо виден переход от профиля  $T = T_0(z)$  к перевернутому профилю  $T = z$  внутри области и ярко выраженный погранслои вблизи границ.

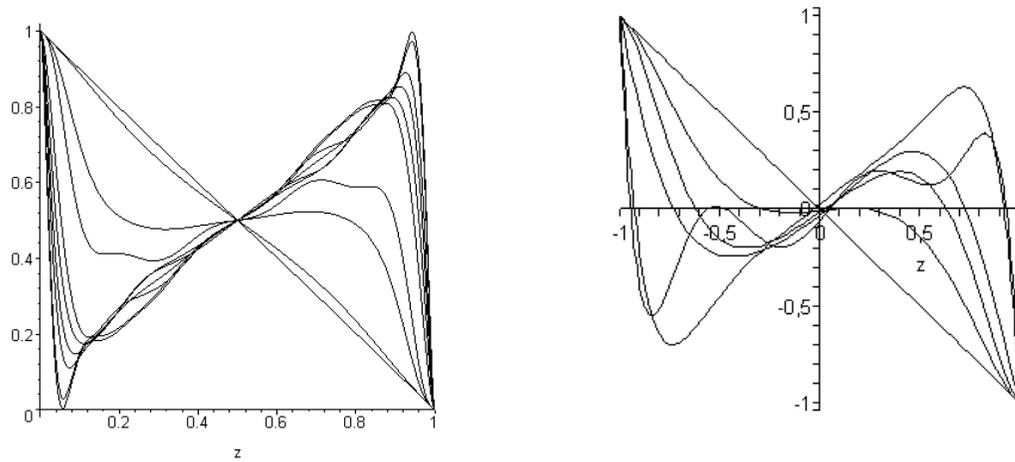


Рис. 2. Эволюция профиля температуры (первый конвективный переворот)

В процессе конвективного переворота развиваются достаточно интенсивные движения, и после их затухания почти всюду в области горячая и легкая жидкость оказывается над холодной и тяжелой. Когда движения затухают в достаточной степени, теплопроводность становится существенной и начинает оказывать влияние на характер течения. Действие теплопроводности приводит к медленной эволюции поля температуры вдоль подпространства квазиравновесий, причем скорость поначалу продолжает затухать.

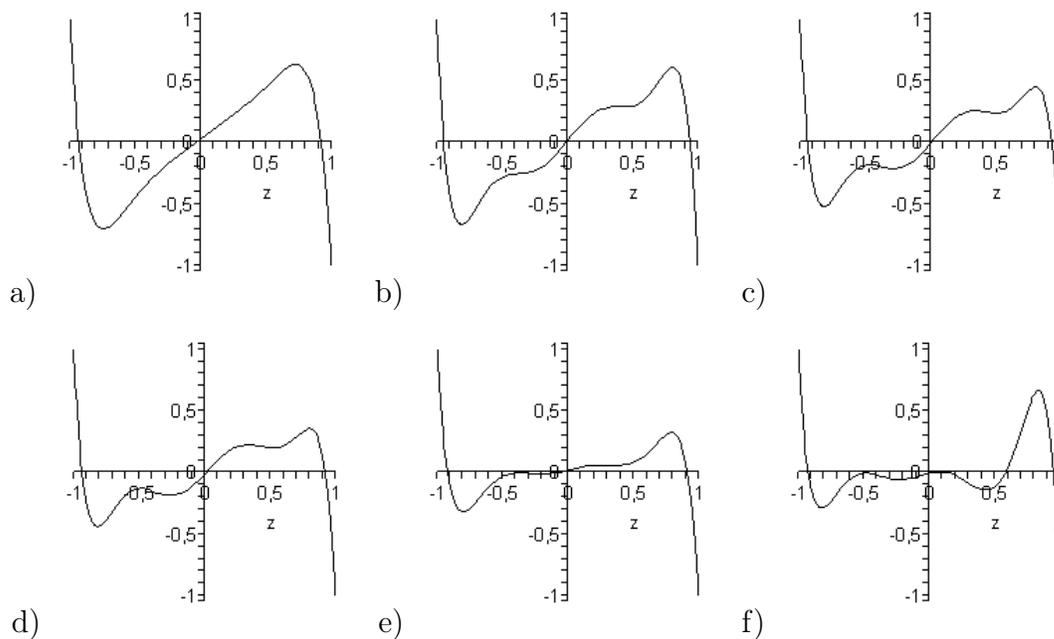


Рис. 3. Эволюция профиля температуры после первого конвективного переворота

Если система попадает в область неустойчивых квазиравновесий, этот процесс прерывается новым конвективным переворотом, по окончании которого опять

устанавливается квазиравновесие с устойчивым профилем температуры. Таких конвективных переворотов, перемежающихся длительными периодами перестройки профиля температуры при близкой к нулю скорости, может быть несколько. В результате устанавливается медленный непериодический режим движения, характеризующийся почти постоянной температурой всюду в области течения, кроме погранслоев на ее границах; при этом скорость движения жидкости тем меньше, чем меньше коэффициент теплопроводности. Описанный процесс иллюстрируется рис. 3, где показана эволюция усредненного по горизонтальной переменной профиля температуры (расчет для круга,  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 10^{-6}$ ).

Исследование проводилось в рамках ЕНО "Регулярная и хаотическая гидродинамика". Работа поддерживалась грантами Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.5747.2006.1), международного научного фонда INTAS (№ 04-80-7297) и EPSRC EP/D035635/1 (UK).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В.И. О конвекции в сильно вязкой жидкости. Часть 1. Глобальная разрешимость, диссипативность, первый переход. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 826-B91. Ростов-на-Дону, 1991. 31 с.
- [2] Юдович В.И. О конвекции в сильно вязкой жидкости. Часть 2. Ползущие течения нетеплопроводной жидкости. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2964-B92. Ростов-на-Дону, 1992. 53 с.
- [3] Юдович В.И. Линейная устойчивость равновесий нетеплопроводной жидкости. // Мат. сборник. Т.185. 1994. № 5. С. 139–159.
- [4] Юдович В.И. О границе монотонной и колебательной конвективной устойчивости горизонтального слоя жидкости // Журнал прикл. мех. и техн. физ. 1991. № 6. С. 44–50.
- [5] Жуков М.Ю., Петровская Н.В., Ширяева Е.В. Компьютерный эксперимент по свободной конвекции в сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 422-B2004. Ростов-на-Дону, 2004. 54 с.
- [6] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991.

**Zhukov M.Yu., Petrovskaya N.V., Shiryayeva E.V.** *Numerical investigation of the thermo-gravitational convection for the strong viscous and weak heat-conducting liquid which fill the plane horizontal layer or disk.* The results of computer simulation for 2D convective flow are presented. We studied the strong viscous and weak heat-conducting liquid which fill horizontal layer or disk heated on bottom. To investigate the evolution of a finite perturbation the Galerkin method or the finite-difference method are used.

# К ВЫЯВЛЕНИЮ НЕГЕРЦЕВСКИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ОСНОВНЫХ ФАКТОРОВ КОНТАКТА ТЕЛ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УПРУГИМИ КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

**Журавлев Г. А.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Дано описание одного из эффектов (по критерию контактной усталости) негерцевских взаимосвязей основных факторов контакта упругих тел, моделируемых круговыми цилиндрами.

В данной работе поставлена задача описания одного из частных случаев (по критерию контактной усталости) проявления выявленных ранее автором эффектов кривизны (эффектов негерцевских взаимосвязей основных факторов контакта) упругих тел, моделируемых круговыми цилиндрами [1]. Оценка взаимосвязей основных факторов выполнена на примере анализа взаимосвязи силы сжатия и приведенного радиуса кривизны упругих тел.

Условия контактного взаимодействия деталей многих машин и механизмов моделируют упругими цилиндрами с параллельными осями. Это оправдано тем, что номинально такие детали имеют начально-линейное касание (НЛК), по величине радиусы кривизны контактирующих тел чаще всего значительно превышают ширину полосы контакта, а контактная прочность зависит, главным образом, от напряжений в зоне контакта.

Однако, упругие тела, независимо от их номинальной геометрии, фактически имеют начально-точечное касание (НТК), а в нагруженном состоянии они взаимодействуют по некоторой отличной от полосы постоянной ширины площадке контакта.

Тем не менее, считается общепринятым тезис о том, что в контакте реальных упругих тел (в том числе — сложной формы), моделируемых цилиндрами с параллельными осями, соблюдаются герцевские линейные соотношения таких основных факторов контакта, как сила сжатия и приведенный радиус кривизны контактирующих тел, а для сведения задачи к плоской достаточно оперировать максимальной расчетной удельной нагрузкой  $q_{max}$ , найденной приближенным учетом неравномерности распределения нагрузки. При этом дальнейшее уточнение расчетной схемы ищут уже в части оценки влияния таких допущений модели Герца, как отсутствие динамических явлений и промежуточного масляного слоя, шероховатости и трения поверхностей в контакте, а также отклонений свойств материалов сжимаемых тел от идеальных показателей изотропности, однородности и упругости. Например, в оценках ряда деталей типа зубчатых колес к недостаткам расчетов по модели Герца относят прежде всего отсутствие в ней учета влияния гидродинамических явлений и сил трения в зацеплении на нагруженность и развитие повреждений металла в приповерхностных слоях зубьев.

Вот почему в основе прочностных расчетов разнообразных тел с НЛК или близким к НЛК номинальным касанием лежат моделирование параллельными круговыми цилиндрами, универсальное применение решения Герца о контакте упругих круговых цилиндров с параллельными осями и введение поправочного коэффициента концентрации нагрузки  $K_{H\beta}$  вдоль номинальной линии касания, учитывающего влияние угла  $\gamma$  между фактически пересекающимися осями цилиндров и сводящего, как считается, задачу к плоской. Максимальное контактное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{Hmax} = K_{H\beta}^{1/2} \left( \frac{q_m}{\pi\eta\rho} \right)^{1/2}; \quad q_m = \frac{F}{l}, \quad \eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}; \quad \rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (1)$$

где:  $\sigma_{Hmax}$  — максимальное контактное напряжение по Герцу;  $\mu_i, E_i$  — упругая постоянная, коэффициент Пуассона и модуль Юнга материла контактирующих тел ( $i=1, 2$ );  $\rho$  — приведенный радиус кривизны контактирующих тел с радиусами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ;  $F$  — сила сжатия контактирующих тел;  $l$  — длина номинальной линии касания контактирующих тел;  $q_m, q_{max}$  — удельная нагрузка при идеально-равномерном распределении вдоль номинальной линии касания контакта и наибольшее ее значение при реально-неравномерном распределении.

Критериальным объектом оценки уровня универсальности герцевских линейных взаимосвязей основных факторов контакта  $F$  и  $\rho$  является цилиндрическая (прямозубая или косозубая) эвольвентная передача (с разными вариантами выполнения по углу зацепления  $\alpha_{tw}$ ). Выбор критериального объекта осуществлен из следующих соображений. Во-первых, для расчета таких передач используют решение плоской контактной задачи Герца. Во-вторых, рост величины приведенного радиуса торцовых профилей зубьев  $\rho$  реализуется без изменения габарита передачи выбором угла зацепления  $\alpha_{tw}$ . В-третьих, благодаря особенностям кинематики зацепления косозубых передач (в которых «герцевское» влияние роста радиуса  $\rho$  почти полностью компенсируется снижением суммарной длины контакта) и прямозубых передач (в которых "герцевское" влияние роста радиуса  $\rho$  почти полностью компенсируется ухудшением динамических показателей от снижения коэффициента торцового перекрытия), изменение радиуса  $\rho$  мало влияет на контактную выносливость зубьев и приводит к снижению их глубинной прочности. В-четвертых, использование решения Герца в расчетах цилиндрических передач согласуется с известными экспериментами Л.В. Браиловского (косозубые передачи) и Л.С. Боровича (прямозубые передачи), показавшими отсутствие влияния угла зацепления  $\alpha_{tw}$  на контактную выносливость хорошоприработанных термоулучшенных зубчатых колес. В-пятых, в литературе описаны "необъяснимые" результаты испытаний цилиндрических передач в разных условиях их приработываемости. Вот почему именно цилиндрические эвольвентные передачи с разными значениями угла  $\alpha_{tw}$  и с разными условиями приработываемости зубьев позволяют раскрыть не только количественную, но и качественную картину механизма контактного взаимодействия, выявить нелинейный характер взаимосвязи  $F$  и  $\rho$ , показать его зависимость от параметров реального контакта.

Для наглядной иллюстрации фактов несоответствия линейных взаимосвязей

модели Герца (при условии  $\sigma_{Hmax} = const$ )

$$\frac{F_p}{l} = c_1 \rho \quad (2)$$

экспериментальным данным ранее нами для наглядности была принята степенная зависимость типа

$$\frac{F_p}{l} = c_2 \rho^k \quad (3)$$

Силовой расчет косозубой эвольвентной передачи дает  $F_t = F \cos \beta \cos \alpha_{tw}$ , а, исходя из точечной концепции расчета (без использования поправочного коэффициента  $K_{H\beta}$ ) и учитывая зависимость (3), запишем  $F_p = c_3 \rho^k l_i$ .

$$\text{Тогда } F_t = c_3 \rho^k l_i \cos \alpha_{tw} \text{ или } \frac{F_t}{F_{to}} = \left( \frac{\rho}{\rho_o} \right)^k \frac{l \cos \alpha_{tw}}{l_o \cos \alpha_{two}}; \quad l = \frac{b_w \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b}; \quad l_o = \frac{b_w \varepsilon_{\alpha o}}{\cos \beta_{bo}}$$

$$\beta_b = \arcsin(\sin \beta \cos \alpha); \quad \beta_{bo} = \arcsin(\sin \beta \cos \alpha_o).$$

Здесь и далее:  $\varepsilon_\alpha$  — коэффициент торцевого перекрытия;  $\alpha_{tw}$  — угол зацепления;  $c_{1,2,3}$  — константы,  $F_p$  и  $F_{tp}$  — нормальная и окружная допускаемые силы в контакте зубьев;  $\rho$  — приведенный радиус кривизны торцовых профилей зубьев;  $\alpha$  — угол исходного контура зубьев;  $b_w$  — активная ширина венца;  $u$  — передаточное число передачи;  $l$  — суммарная длина контактных линий; индексы  $o$  и  $p$  относят параметр  $F_t$  к его значению, соответствующему минимальному значению угла зацепления  $\alpha_{two}$  (для  $o$ ) и к допускаемому (по условию отказа) значению этого параметра ( $p$ ). Так как из теоремы Эйлера-Савари в точке полюса имеем:

$$\rho = a_w \frac{\sin \alpha_{tw} u}{(u+1)^2}; \quad \rho_o = a_w \frac{\sin \alpha_{two} u}{(u+1)^2};$$

то получаем:

$$\frac{F_{tp}}{F_{tpo}} = \left( \frac{\sin \alpha_{tw}}{\sin \alpha_{two}} \right)^k \frac{\varepsilon_\alpha \cos \beta_{bo} \cos \alpha_{tw}}{\varepsilon_{\alpha o} \cos \beta_b \cos \alpha_{two}},$$

Влияние коэффициента перекрытия, динамических факторов, изменения жесткости зубьев и концентрации нагрузки вдоль линии контакта снижает эффект от увеличения параметра  $\rho$ . Трибологические факторы [3,4] в опытах (Л.В. Браиловский, Л.С. Борович) также снижают этот эффект, поскольку из них при  $V_\Sigma < 15 \text{ м/с}$  влияет только рост сил трения в контакте [3,4]. Все это занижает эффект роста  $\rho$  в хорошоприрабатываемых эвольвентных передачах, что видно по величине параметра  $k < 1$  в наших расчетах опытов Л.В. Браиловского и Л.С. Боровича. Однако эти результаты не имеют никакого отношения к использованию модели Герца в расчетах зубчатых передач, а относятся, исключительно, к роли факторов, требующих своего исключения при определении параметра  $k$ . Занижение расчетных значений параметра  $k$  идет в запас уровня достоверности выявленных эффектов. Условия заметного влияния угла  $\alpha_{tw}$  на изменение трибологических факторов можно разделить (для доплюсной фазы зацепления) точкой (или областью) перехода от режима граничного трения к контактно-гидродинамическому режиму, приближенно оценивая этот переход (для работы

зубчатых колес в масляной среде) через уровень суммарной скорости качения контакта зубьев:  $V_{\Sigma} \approx 15\text{м/с}$ ;  $V_{\Sigma} = 2v_o \sin \alpha_{tw}$ .

Тогда, согласно [3,4], получаем дополнительные изменения допускаемых окружных сил

$$\frac{F_{tp}}{F_{tpo}} = \frac{1 - f \tan \alpha_{tw}}{1 - f \tan \alpha_{tvo}}, \quad \text{если } V_{\Sigma} < 15\text{м/с},$$

где:  $f$  — коэффициент трения в контакте зубьев в фазе полюса зацепления;

$$\frac{F_{tp}}{F_{tpo}} = \left( \frac{\sin \alpha_{tw}}{\sin \alpha_{tvo}} \right)^{0.42}, \quad \text{если } V_{\Sigma} \geq 15\text{м/с}$$

Влияние собственно негерцевских взаимосвязей в косозубой цилиндрической эвольвентной передаче можно выразить как:

$$k = \frac{\lg \left( \frac{F_{tp} \varepsilon_{\alpha o} \cos \beta_b \cos \alpha_{tvo}}{F_{tpo} \varepsilon_{\alpha} \cos \beta_{bo} \cos \alpha_{tw}} \frac{1 - f \tan \alpha_{tvo}}{1 - f \tan \alpha_{tw}} \right)}{\lg \left( \frac{\sin \alpha_{tw}}{\sin \alpha_{tvo}} \right)}, \quad \text{если } V_{\Sigma} < 15\text{м/с} \quad (4)$$

$$k = \frac{\lg \left( \frac{F_{tp} \varepsilon_{\alpha o} \cos \beta_b \cos \alpha_{tvo}}{F_{tpo} \varepsilon_{\alpha} \cos \beta_{bo} \cos \alpha_{tw}} \left( \frac{\sin \alpha_{tvo}}{\sin \alpha_{tw}} \right)^{0.42} \right)}{\lg \left( \frac{\sin \alpha_{tw}}{\sin \alpha_{tvo}} \right)}, \quad \text{если } V_{\Sigma} \geq 15\text{м/с} \quad (5)$$

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta}; \quad \alpha_t = \arctan \frac{\tan \alpha}{\cos \beta}; \quad \alpha_{to} = \arctan \frac{\tan \alpha_o}{\cos \beta};$$

$$\alpha_{tw} = \arccos \frac{a \cos \alpha_t}{a_w}; \quad \alpha_{tvo} = \arccos \frac{a \cos \alpha_{to}}{a_w}.$$

Для обоснования построения физических основ развития зубчатых зацеплений на базе герцевских взаимосвязей  $F_p = c_1 l \rho$  обычно используют ссылки на экспериментальные результаты Л.В. Браиловского (косозубые передачи) и Л.С. Боровича (прямозубые передачи) по независимости контактной выносливости зубьев от угла зацепления  $\alpha_{tw}$  (рис. 1).

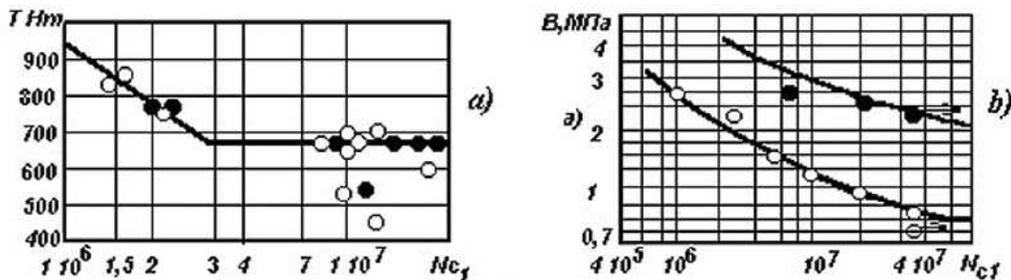


Рис. 1. Кривые контактной выносливости косозубых эвольвентных цилиндрических передач с термоулучшенными зубьями при различных значениях угла исходного контура зубьев  $\alpha$ :  $a$  — низкоскоростных,  $V_o=8\text{м/с}$ ,  $H_1 = HB300$  и  $H_2 = HB260$ , опыты Л.В. Браиловского;  $b$  — высокоскоростных,  $V_o=18\text{м/с}$ ,  $H_{1,2} = V275 - 310$ , опыты G.Niemann-W.Richter;  $o$  —  $\alpha = 20^\circ$ ;  $\bullet$  —  $\alpha = 28^\circ$ ;  $\longrightarrow$  — без питтинга.

Определение значений коэффициента  $k$  позволило дать физическое объяснение противоречивости экспериментальных данных по контактной выносливости зубьев эвольвентных цилиндрических косозубых передач. Оно лежит в нелинейности взаимосвязи факторов  $F$  и  $\rho$ , вытекающей из механизма реального контактного взаимодействия по схеме начально-точечного касания.

Из экспериментальных результатов Л.В. Браиловского ( $a_w = 150.0\text{мм}$ ;  $m = 4\text{мм}$ ;  $z_{1,2} = 22/44$ ;  $\beta = 28^\circ 15' 00''$ ;  $F_{tp} = F_{tpo}$ ;  $\alpha = 28^\circ$ ;  $\alpha_o = 20^\circ$ ;  $b_w = 40\text{мм}$ ;  $h_{a1,2}^* = 1.0$ ; окружная скорость  $v_o = 8\text{м/с}$ . Чистовая обработка зубьев — фрезерованием) имеем  $F_{tp} = F_{tpo}$ . Принимая  $f = f_o = 0.1$ , получаем  $k = 0.91$ .

Из экспериментальных результатов G.Niemann-W.Richter получаем ( $a_w = 91.50\text{мм}$ ;  $m = 3\text{мм}$ ;  $z_{1,2} = 21/34$ ;  $\beta = 25^\circ$ ;  $\alpha = 28^\circ$ ;  $\alpha_o = 20^\circ$ ;  $b_w = 10\text{мм}$ ;  $h_{a1,2}^* = 1.04$ ;  $x_{1,2} = 0,08/0,08$ ); имеем  $F_{tp} = 2F_{tpo}$  [2]. Расчетами получаем  $k = 2.47$ .

Выводы:

1. Физическое объяснение противоречивости теоретических основ традиционных методов контактных расчетов тел типа эвольвентных зубчатых колес и экспериментального опыта лежит в нарушении взаимосвязей основных факторов решения плоской контактной задачи Герца и в проявлении нелинейной взаимосвязи факторов  $F$  и  $\rho$ , например, типа  $F = c\rho^k$ ,  $k \geq 1$ .
2. Результаты, показывающие существенно нелинейные взаимосвязи, например, типа  $F = c\rho^k$ ,  $k \gg 1$ , наиболее соответствуют уровню передовых отраслей техники и современным тенденциям развития мирового машиностроения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Журавлев Г.А. Эффекты кривизны упругих тел с близким к начально-линейному касанием // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости. Изд. "Новая книга", г.Ростов-на-Дону. 2004. С. 163–165.
- [2] Niemann G., Richter H. // Konstruktion. 1960. № 12. Bd10. S. 397–402.
- [3] Журавлев Г.А. About Influence of Hydrodynamic Factors to Choice of a Pressure Angle // International Conf. "MECHANICAL TRANSMISSIONS and MECHANISMS" 1-4 July, Tianjin, CHINA, 1997. S. 554–558.
- [4] Журавлев Г.А. Условия трибосопряжения зубьев и пути совершенствования зубчатых зацеплений // Трение и износ. Минск. 1999. Т.20. № 2. С. 175–188.

**Zhuravlev G.A.** *To revealing of the nonhertz interrelations of base factors about contact of bodies modeling by elastic circular cylinders.* It is given the description for one kind (contact-failure by contact fatigue) of the nonhertz interrelations of base factors about contact of bodies modeling by elastic circular cylinders.

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЧЕРЕЗ КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Зеленин А. А.\* , Зубов Л. М.\*\*

\* Ростовский филиал Московской государственной академии гражданской  
авиации

\*\* Ростовский государственный университет

Дано выражение энергетических контурных интегралов Эшелби и Черепанова-Райса плоской нелинейной теории упругости через две аналитические функции, представляющие общее решение нелинейных уравнений равновесия. Полученное выражение использовано для определения порядка особенности напряжений в вершине трещины с учетом геометрической нелинейности.

**1. Комплексные потенциалы плоской задачи для полулинейного материала.** Модель сжимаемого полулинейного (гармонического) материала задается следующей функцией удельной потенциальной энергии деформации [1]

$$W = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu \text{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2 \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial X_k}{\partial x_s} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \quad (2)$$

Здесь  $x_s$  и  $X_k$  — декартовы координаты частиц тела соответственно в отсчетной конфигурации и в деформированном состоянии,  $\mathbf{e}_s$  — орты декартовых координат,  $\mathbf{C}$  — градиент деформации,  $\mathbf{U}$  — положительно определенный тензор растяжения,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе. Из (1) вытекает выражение несимметричного тензора напряжений Пиолы для полулинейного материала

$$\mathbf{D} = [\lambda(\text{tr}\mathbf{U} - 3) - 2\mu]\mathbf{A} + 2\mu\mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}$  — собственно ортогональный тензор, сопровождающий деформацию (тензор поворота).

Рассматривая плоскую деформацию упругой среды

$$X_1 = X_1(x_1, x_2),$$

$$X_2 = X_2(x_1, x_2),$$

$$X_3 = x_3$$

введем комплексные координаты

$$\zeta = x_1 + ix_2, \quad \bar{\zeta} = x_1 - ix_2,$$

$$z = X_1 + iX_2, \quad \bar{z} = X_1 - iX_2$$

и будем описывать деформацию при помощи комплекснозначной функции  $z = z(\zeta, \bar{\zeta})$ . Если ввести в рассмотрение комплексный векторный базис  $\mathbf{f}_k$  и взаимный к нему  $\mathbf{f}^k$  [2] ( $k=1,2,3$ )

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{f}^1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}^3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3,$$

то градиент деформации и тензор поворота для плоского поля перемещений запишутся в виде

$$\mathbf{C} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \mathbf{f}^1 \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \mathbf{f}^1 \mathbf{f}_2 + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \mathbf{f}^2 \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \mathbf{f}^2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3 \mathbf{f}_3 \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = e^{i\chi} \mathbf{f}^1 \mathbf{f}_1 + e^{-i\chi} \mathbf{f}^2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}^3 \mathbf{f}_3; \quad e^{i\chi} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

где  $\chi$  — угол поворота главных осей деформации.

Из полярного разложения градиента деформации следует:

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = U_1^1 e^{i\chi}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = U_2^1 e^{i\chi}, \quad (5)$$

$$U_\alpha^\beta = \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{f}^\beta,$$

$$2U_1^1 = \text{tr} \mathbf{U} - 1 > 0; \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

На основании (4) и (5) приходим к комплексной записи определяющего соотношения (3) ( $D_\alpha^\beta = \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}^\beta$ )

$$\begin{aligned} D_1^1 &= 2(\lambda + \mu) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 2(\lambda + \mu) e^{i\chi}, \\ D_2^1 &= 2\mu \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) уравнения равновесия в комплексных компонентах тензора Пиолы

$$\frac{\partial D_1^1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial D_2^1}{\partial \zeta} = 0$$

принимают форму

$$\frac{\partial D_1^1}{\partial \bar{\zeta}} + 2\mu \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( D_1^1 + 2\mu \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (7)$$

Согласно (6), (7) величина

$$2(\lambda + 2\mu) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 2(\lambda + \mu) e^{i\chi}$$

есть некоторая аналитическая функция комплексного переменного  $\zeta$ . Обозначим эту функцию  $2\mu \varphi'^2(\zeta)$ :

$$2(\lambda + 2\mu) \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 2(\lambda + \mu)e^{ix} = 2\mu \varphi'^2(\zeta). \quad (8)$$

Предполагая положительность величины  $\alpha$ , которая задается выражением

$$\alpha = 2(\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| - 2(\lambda + \mu),$$

в силу (8) имеем

$$\alpha e^{ix} = 2\mu \varphi'^2(\zeta), \quad \alpha = 2\mu \varphi'(\zeta) \overline{\varphi'(\zeta)}, \quad e^{ix} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\overline{\varphi'(\zeta)}} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi'^2(\zeta) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(\zeta)}{\overline{\varphi'(\zeta)}}. \quad (10)$$

Дифференцируя по  $\bar{\zeta}$  выражение, полученное после интегрирования соотношения (10) по переменной  $\zeta$ , находим

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\varphi(\zeta) \overline{\varphi''(\zeta)}}{\overline{\varphi'^2(\zeta)}} - \overline{\psi'(\zeta)} \right], \quad (11)$$

где  $\psi(\zeta)$  — произвольная аналитическая функция. Формулы (10), (11), полученные ранее [1, 3] другими способами, выражают любое решение плоской нелинейной эластостатики для полуплоского материала через две произвольные аналитические функции (комплексные потенциалы) и являются обобщением известных формул Колосова-Мусхелишвили на нелинейный случай.

**2. Инвариантные контурные интегралы.** Как известно [4, 5] в случае равновесной плоской деформации инвариантный энергетический интеграл Эшелби

$$\mathbf{I} = \oint_{\gamma} \mathbf{n} \cdot (W\mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^T) ds \quad (12)$$

равен нулю для любого замкнутого контура  $\gamma$ , внутри которого материал однороден, а тензорные поля напряжений и деформаций не имеют особых точек. В (12)  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к контуру  $\gamma$ . В случае, если тело содержит дефекты в виде неоднородностей, включений, отверстий, сингулярностей и т.д., то значение интеграла не зависит от выбора контура, охватывающего дефект. Через интеграл  $\mathbf{I}$  выражается [4, 5] приращение потенциальной энергии тела, вызванное изменением положения дефекта.

Используя формулы (1)–(6), получим комплексную запись интеграла Эшелби для полуплоского материала

$$\mathbf{I} = \oint_{\gamma} (h\mathbf{f}_1 + \bar{h}\mathbf{f}_2) ds$$

$$h = -2n^1(\lambda + \mu) \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + 2n^2 \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - (\lambda + \mu) e^{-ix} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] \quad (13)$$

$$\mathbf{n} = n^1 \mathbf{f}_1 + n^2 \mathbf{f}_2.$$

Для трещины, берега которой параллельны оси  $x_1$ , интеграл  $J = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I}$ , называемый интегралом Черепанова-Райса, не зависит от выбора контура  $\gamma$  (не обязательно замкнутого), охватывающего вершину трещины и начинающегося на одном берегу трещины, а заканчивающегося на противоположном. Для интеграла  $J$  на основании (13) имеем формулу

$$J = \oint_{\gamma} \operatorname{Re} h ds.$$

Используя (10), (11), (13), получим представление интеграла Черепанова-Райса через комплексные потенциалы нелинейной теории упругости

$$J = \oint_{\gamma} \operatorname{Re} \{ n^1 |\varphi'^2(\zeta)| + n^2 [\varphi(\zeta) \overline{\varphi''(\zeta)} - \overline{\psi'(\zeta)} \overline{\varphi'^2(\zeta)}] \} ds \quad (14)$$

**3. Определение порядка особенности напряжений в кончике трещины.** Рассмотрим бесконечно тонкую горизонтальную трещину и введем полярную систему координат  $\rho, \theta$  с началом в вершине трещины. Предположим, что при малых  $\rho$  справедливы разложения

$$|\varphi(\zeta)| = \rho^\alpha a(\theta) + o(\rho^\alpha),$$

$$|\psi(\zeta)| = \rho^\beta b(\theta) + o(\rho^\beta). \quad (15)$$

В  $J$ -интеграле возьмем в качестве контура  $\gamma$  окружность сколь угодно малого радиуса с центром в точке  $\rho = 0$ . Поскольку в силу инвариантности значение  $J$ -интеграла не зависит от выбора окружности, подинтегральное выражение имеет порядок  $\rho^{-1}$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Отсюда получаем, что  $\alpha = 1/2, \beta = 1$ . Подставляя (15) в (10), (11), будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} \sim \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \sim \text{const} \quad \text{при } \rho \rightarrow 0. \quad (16)$$

Компоненты тензора напряжений Коши  $\mathbf{T} = (\det \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}$  в декартовом базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , согласно (4), (6) выражаются формулами

$$t_{11} + t_{22} = \frac{2\alpha}{\sqrt{G}} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| - 4\mu, \quad \sqrt{G} = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \quad (17)$$

$$t_{11} - t_{22} + 2i t_{12} = \frac{2\alpha}{\sqrt{G} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Из (16), (17) получаем при  $\rho \rightarrow 0$

$$t_{11} \rightarrow 2(\lambda + \mu), \quad t_{22} \rightarrow 2(\lambda + \mu), \quad t_{12} \rightarrow 0,$$

т.е. напряжения Коши в полулинейном материале остаются ограниченными при приближении к вершине трещины.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00638).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [2] Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997.
- [3] John F. // Commun. Pure and Appl. Math., 1960. **13**, 2, p. 239–296.
- [4] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.
- [5] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.

**Zelenin A.A., Zubov L.M.** *Representation of the invariant contours integrals through the complex potentials of the nonlinear theory of elasticity.* The expression of Eshelbi's and Cherepanov-Rice's energetical contours integrals of nonlinear theory of elasticity expressed through the two analytical functions which represent common solution of nonlinear equilibrium equations, was given. The obtained expression was used for determination the order of singularity of tensions in the tip of a crack.

# ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зеленина А. А., Зубов Л. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского госуниверситета*

В рамках нелинейной теории упругости исследовано влияние непрерывного поля краевых дислокаций на изгиб прямоугольного бруса и кручение кругового цилиндра. Показано, что в теле с непрерывно распределенными дислокациями могут существовать неоднородные поля поворотов при нулевых напряжениях.

**1. Кручение кругового цилиндра с дислокациями.** В теле с непрерывно распределенными дислокациями градиент деформации (тензор дисторсии)  $\mathbf{C}$  удовлетворяет уравнению несовместности [1, 2]

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  — тензор плотности дислокаций. Если тензорное поле  $\boldsymbol{\alpha}(r)$ , которое должно удовлетворять условию соленоидальности  $\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} = 0$ , считается заданным, то уравнение (1) вместе с уравнениями равновесия среды позволяет определить тензорное поле дисторсии, а следовательно, и поле напряжений в теле.

Рассмотрим полый круговой цилиндр, занимающий в отсчетной конфигурации область  $r_1 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$ . Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты. Предположим, что тензор плотности дислокаций задан следующим образом

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{11}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha_{22}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha_{23}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \alpha_{32}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha_{33}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r \cos \psi z + \mathbf{e}_\varphi \sin \psi z, \quad \mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{e}_r \sin \psi z + \mathbf{e}_\varphi \cos \psi z, \quad \psi = \text{const} \quad (3)$$

Тензор дисторсии будем разыскивать в виде

$$\mathbf{C} = C_{11}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + C_{22}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + C_{23}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + C_{32}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + C_{33}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (4)$$

Условие соленоидальности тензора  $\boldsymbol{\alpha}$  согласно (2), (3) дает уравнение (штрих означает дифференцирование по  $r$ )

$$\psi r \alpha_{32} = (r \alpha_{11})' - \alpha_{22},$$

которое должно выполняться при любом значении угла закручивания  $\psi$ . Для этого необходимо и достаточно потребовать:

$$\alpha_{32} = 0, \quad (r \alpha_{11})' = \alpha_{22}. \quad (5)$$

С учетом (5) тензорное уравнение несовместности (1) приводится к четырем скалярным соотношениям

$$\psi r C_{22} - C_{32} = r \alpha_{11}, \quad \psi C_{11} - C'_{32} = \alpha_{22}, \quad C'_{33} = -\alpha_{23}, \quad (r C_{23})' = r \alpha_{33}. \quad (6)$$

В случае изотропного упругого материала несимметричный тензор напряжений Пиолы [3], соответствующий дисторсии (2), имеет представление

$$\mathbf{D} = D_{11}(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + D_{22}(r) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + D_{23}(r) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + D_{32}(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + D_{33}(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (7)$$

В силу (7) уравнения равновесия  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  сводятся к одному скалярному уравнению

$$(r D_{11})' - D_{22} - \psi r D_{32} = 0. \quad (8)$$

С учетом определяющих соотношений материала равенства (6) и (8) образуют полную систему уравнений относительно неизвестных  $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{23}, C_{32}$ .

При отсутствии непрерывно распределенных дислокаций деформация кручения, осевого сдвига и растяжения задается при помощи Эйлеровых цилиндрических координат  $R, \Phi, Z$  следующим образом [4]

$$\begin{aligned} R &= R(r), \\ \Phi &= \varphi + \psi z, \\ Z &= \lambda z + \frac{b}{2\pi} \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $(\lambda - 1)$  — осевое удлинение,  $b$  — длина вектора Бюргерса винтовой дислокации Вольтерры в полом цилиндре. Градиент деформации, отвечающий отображению (9), запишется так

$$\mathbf{C} = R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \frac{b}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \psi R \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (10)$$

Продольная сила  $P$  и крутящий момент  $M$ , действующие на торцах цилиндра, определяются формулами

$$P = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} D_{33} r \, dr, \quad M = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} D_{32} R r \, dr.$$

При наличии непрерывно распределенных дислокаций функция  $R(r)$  не существует. В этом случае крутящий момент согласно (7), (13) вычисляется по формуле

$$M = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} D_{32} C_{22} r^2 \, dr. \quad (11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи кручения цилиндра с распределенными дислокациями. Пусть  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = a_0 = \text{const}$ ,  $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$ . Тогда

условие соленоидальности (5) выполнено, а система уравнений несовместности (6) при  $\psi = a_0$  имеет решение  $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 1$ ,  $C_{23} = C_{32} = 0$ . Напряжения при этом тождественно равны нулю. Тензор дисторсии согласно (3), (4) является ортогональным тензором, описывающим вращение вокруг оси  $z$  на угол  $a_0 z$ . Это означает, что цилиндр испытывает кручение с углом закручивания  $a_0$ , равным плотности дислокаций, не оказывая этому кручению никакого сопротивления.

Теперь рассмотрим случай, когда  $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = \alpha_{22} = 0$ . Из (5) находим  $\alpha_{11} = \alpha_0 r^{-1}$ , где  $\alpha_0 = const$ . Предполагая отсутствие винтовой дислокации Вольтерры, из уравнений несовместности (6) получим, что  $C_{23} = 0$ ,  $C_{33} = \lambda = const$ . Оставшиеся уравнения из системы (6) дают:

$$\psi r C_{22} = C_{32} + \alpha_0, \quad \psi C_{11} = C'_{32} \quad (12)$$

Для несжимаемого материала из условия  $\det \mathbf{C} = 1$ , т.е.

$$C_{11} C_{22} = \lambda^{-1}$$

и (12) получаем уравнение относительно  $C_{32}$

$$(\alpha_0 + C_{32}) C'_{32} = \lambda^{-1} \psi^2 r, \quad (13)$$

которое решается в квадратурах. Гидростатическая составляющая напряжений в несжимаемом теле находится в квадратурах из уравнения равновесия (8). Постоянные интегрирования уравнений (8) и (13) определяются из условий незагруженности боковых поверхностей цилиндра. После этого продольная сила и крутящий момент становятся известными функциями параметров  $\psi$  и  $\lambda$ .

**2. Чистый изгиб прямоугольного бруса с распределенными дислокациями.** В случае плоской деформации тензор плотности дислокаций выражается по формуле [2]  $\mathbf{\alpha} = \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{a}$ , а уравнение несовместности принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{a}(x, y)$  — плоский вектор,  $x, y$  — декартовы координаты в плоскости,  $\mathbf{i}_3$  — нормаль к плоскости,  $\nabla$  — плоский набла-оператор,  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  — координатные орты,  $\mathbf{e}$  — дискриминантный тензор.

Рассмотрим прямоугольный брус  $0 \leq x \leq l$ ,  $|y| \leq h$ , у которого грани  $y = \pm h$  свободны от нагрузки. Предположим, что  $\mathbf{a} = \alpha(y) \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$ -тензор поворота среды. Будем искать тензор дисторсии в форме, соответствующей чистому изгибу бруса [5]

$$\mathbf{C} = C_{11}(y) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + C_{22}(y) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \quad (15)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \beta x - \mathbf{i}_2 \sin \beta x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 \sin \beta x + \mathbf{i}_2 \cos \beta x, \quad \beta = const$$

Так как для дисторсии (15) тензорное поле поворотов выражается формулой  $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$ , имеем  $\mathbf{a} = \alpha(y) \mathbf{e}_1$ . В силу (18) векторное уравнение несовместности (14) сводится к скалярному (штрих означает производную по  $y$ )

$$\beta C_{22} - C'_{11} = \alpha(y) \quad (16)$$

Тензор напряжений Пиолы, возникающий в изотропном однородном теле при деформации вида (15), будет иметь представление

$$\mathbf{D} = D_{11}(y)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + D_{22}(y)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + D_{33}(y)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (17)$$

Уравнение равновесия  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  с учетом (17) приводится к виду

$$D'_{22} = \beta D_{11} \quad (18)$$

Будем использовать модель полуплинейного [3] материала, определяющие соотношения которого представим в следующей форме

$$C_{11} = 1 + (2\mu)^{-1}[(1 - \nu)D_{11} - \nu D_{22}], \quad (19)$$

$$C_{22} = 1 + (2\mu)^{-1}[-\nu D_{11} + (1 - \nu)D_{22}]$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Из (16)-(19) получаем краевую задачу для напряжения  $D_{22}(y)$

$$D''_{22} - \beta^2 D_{22} = \frac{2\mu\beta^2}{1 - \nu} - \frac{2\mu\beta}{1 - \nu}\alpha(y), \quad (20)$$

$$D_{22}(\pm h) = 0,$$

которая имеет следующее решение

$$D_{22}(y) = \frac{2\mu}{1 - \nu} \left[ -1 + \frac{\text{ch } \beta y}{\text{ch } \beta h} - \frac{\text{sh } \beta(y - h)J_1(y) + \text{sh } \beta(y + h)J_2(y)}{\text{sh } 2\beta h} \right] \quad (21)$$

$$J_1(y) = \int_{-h}^y \alpha(\eta) \text{sh } \beta(\eta + h) d\eta,$$

$$J_2(y) = \int_y^h \alpha(\eta) \text{sh } \beta(\eta - h) d\eta$$

Напряжение  $D_{11}(y)$  выражается формулой

$$D_{11}(y) = \frac{2\mu}{1 - \nu} \left[ \frac{\text{sh } \beta y}{\text{ch } \beta h} - \frac{\text{ch } \beta(y - h)J_1(y) + \text{ch } \beta(y + h)J_2(y)}{\text{sh } 2\beta h} \right] \quad (22)$$

Изгибающий момент  $G$ , действующий в сечении бруса  $x = \text{const}$ , определяется формулой

$$G = \beta^{-1} \int_{-h}^h D_{11} C_{11} dy \quad (23)$$

В частном случае  $\alpha(y) = \alpha_0 = \text{const}$  решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{\operatorname{sh} \beta y}{\operatorname{ch} \beta h} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\beta}\right), \\
 D_{22} &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left(\frac{\operatorname{ch} \beta y}{\operatorname{ch} \beta h} - 1\right) \left(1 - \frac{\alpha_0}{\beta}\right)
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Из (24) видно, что при  $\beta = \alpha_0$  напряжения обращаются в нуль. Это означает, что при постоянной плотности дислокаций прямоугольный брус изгибается без появления напряжений и превращается в круговой брус с кривизной, равной плотности дислокаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00638).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
- [2] Дерезин С.В., Зубов Л.М. Уравнения нелинейно упругой среды с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями // ДАН. 1999. Т. 366. №6. С. 762–765.
- [3] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [4] Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997.
- [5] Зеленина А.А., Зубов Л.М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел // ПММ. 2000. Т. 64. №3. С. 416–423.

**Zelenina A.A., Zubov L.M.** *Bending and twisting of nonlinear elastic bodies with continuously distributed dislocations.* The influence of boundary dislocations continuous field to bending of rectangular bar and twisting of circular cylinder in the framework of nonlinear elasticity theory was investigated. It was shown that in a body with continuously-distributed dislocations can exist nonhomogeneous fields of rotations under null stresses.

# ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

**Зеньковская С. М.**

*Ростовский государственный университет*

Исследована длинноволновая асимптотика спектра и критических значений, соответствующих колебательной неустойчивости Марангони в бесконечном горизонтальном слое, у которого одна граница — свободная деформируемая, другая — твердая или мягкая стенка. Условия теплообмена заданы в общем виде. Для главного члена асимптотики спектра выписаны явные трансцендентные уравнения, из которых выводятся уравнения для критических значений параметров. Показано, что главные члены асимптотики зависят только от чисел Прандтля и Био. Подробно рассмотрен случай, когда число Био равно нулю.

**Постановка задачи.** При изучении вибрационной термокапиллярной конвекции однородной жидкости в горизонтальном слое со свободной деформируемой границей для амплитуд нормальных возмущений скорости  $v(z)$ , температуры  $\theta(z)$  и возвышения свободной границы  $\delta$  возникает спектральная задача [1]

$$\lambda(D^2 - \alpha^2)v = (D^2 - \alpha^2)^2v, \quad (1)$$

$$\lambda \text{Pr} \theta = (D^2 - \alpha^2)\theta - v. \quad (2)$$

Краевые условия имеют вид:

$$z = 0 : \quad v = \lambda \text{Pr} \delta, \quad D^2v + \alpha^2v = \text{Ma} \alpha^2(\theta + \delta), \quad (3)$$

$$\text{Cr} [(3\alpha^2 + \lambda)Dv - D^3v] = \alpha^2(\alpha^2 \text{Bo} + \mu \alpha \text{th} \alpha)\delta, \quad (4)$$

$$D\theta - \text{Bi}(\theta + \delta) = 0, \quad (5)$$

$$z = 1 : \quad v = 0, \quad Dv = 0 \quad (D^2v = 0), \quad B_1 D\theta + B_0 \theta = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda$  — спектральный параметр,  $\alpha$  — волновое число,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $\text{Ma}$  — число Марангони,  $\text{Cr}$  — капиллярный параметр,  $\text{Bo}$ ,  $\mu$  — гравитационное и вибрационное числа Бонда,  $\text{Bi}$  — число Био,  $D \equiv d/dz$ , ось  $z$  направлена вниз. Краевые условия (6) соответствуют твердой (мягкой) нижней или верхней стенке. При  $\mu = 0$  задача (1)–(6) изучалась многими авторами, подробную библиографию можно найти в [1]. Показано, что деформация свободной границы оказывает существенное влияние на длинноволновую неустойчивость ( $\alpha \rightarrow 0$ ). В случае монотонной неустойчивости ( $\lambda = 0$ ) длинноволновая асимптотика чисел Марангони построена в [1]. В [2] была исследована длинноволновая асимптотика чисел Марангони при колебательной неустойчивости, при этом подробно рассмотрен случай числа Био, равного нулю.

В данной работе основное внимание уделено асимптотике спектра, а также зависимости длинноволновых критических значений от чисел Био и Прандтля.

Исключая функцию  $v(z)$ , приходим к спектральной задаче

$$L^3\theta - \lambda(\text{Pr} + 1)L^2\theta + \lambda^2\text{Pr}L\theta = 0, \quad (7)$$

$$z = 0 : \quad L\theta - \lambda\text{Pr}(\theta + \delta) = 0, \quad (8)$$

$$(D^2 + \alpha^2)L\theta - \lambda\text{Pr}(D^2 + \alpha^2)\theta = \text{Ma}\alpha^2(\theta + \delta), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Cr} [(3\alpha^2 + \lambda)(DL\theta - \lambda\text{Pr}D\theta) - D^3L\theta + \lambda\text{Pr}D^3\theta] = \\ = \alpha^2(\alpha^2 + \text{Bo} + \mu\alpha \text{th} \alpha)\delta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$D\theta - \text{Bi}(\theta + \delta) = 0, \quad (11)$$

$$z = 1 : \quad L\theta - \lambda\text{Pr}\theta = 0, \quad DL\theta - \lambda\text{Pr}D\theta = 0, \quad (12)$$

$$B_1D\theta + B_0\theta = 0, \quad (13)$$

$$D^2L\theta - \lambda\text{Pr}D^2\theta = 0. \quad (14)$$

Здесь использовано обозначение  $L \equiv D^2 - \alpha^2$ . Заметим, что при  $B_1 = 0$  имеем изотермическую стенку, а при  $B_0 = 0$  — нетеплопроводную.

**Длинноволновая асимптотика.** При  $\alpha \rightarrow 0$  будем разыскивать неизвестные в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\alpha^2 + \dots, \quad \text{Ma} = \frac{\text{Ma}_0}{\alpha^2} + \text{Ma}_1 + \dots, \quad (15)$$

$$\theta(z) = \theta_0(z) + \theta_1(z)\alpha^2 + \dots, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1\alpha^2 + \dots \quad (16)$$

Подставляя эти разложения в (7)–(14), для главных членов  $\lambda_0$ ,  $\text{Ma}_0$ ,  $\theta_0(z)$ ,  $\delta_0$  получим задачу

$$D^6\theta_0 - \lambda_0(\text{Pr} + 1)D^4\theta_0 + \lambda_0^2\text{Pr}D^2\theta_0 = 0, \quad (17)$$

$$z = 0 : \quad D^2\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}(\theta_0 + \delta_0) = 0, \quad (18)$$

$$D^4\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}D^2\theta_0 = \text{Ma}_0(\theta_0 + \delta_0), \quad (19)$$

$$\lambda_0(\text{Pr} + 1)D^3\theta_0 - \lambda_0^2\text{Pr}D\theta_0 - D^5\theta_0 = 0, \quad (20)$$

$$D\theta_0 - \text{Bi}(\theta_0 + \delta_0) = 0, \quad (21)$$

$$z = 1 : \quad D^2\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}\theta_0 = 0, \quad (22)$$

$$D^3\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}D\theta_0 = 0, \quad (23)$$

$$B_1D\theta_0 + B_0\theta_0 = 0, \quad (24)$$

$$D^4\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}D^2\theta_0 = 0. \quad (25)$$

Теперь составим трансцендентное уравнение для нахождения параметра  $\lambda_0$ . Если  $\text{Pr} \neq 1$ , то решение уравнения (17) имеет вид

$$\theta_0(z) = A_0 + A_1z + A_2 \text{ch} p_1z + A_3 \text{sh} p_1z + A_4 \text{ch} p_2z + A_5 \text{sh} p_2z, \quad (26)$$

где  $p_1 = \sqrt{\text{Pr}\lambda_0}$ ,  $p_2 = \sqrt{\lambda_0}$ . Подставляя  $\theta_0(z)$  в краевые условия, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\delta$ ,  $A_0 - A_5$ . Из условия нетривиальной совместности этой системы приходим к

трансцендентным уравнениям для  $\lambda_0$  в случаях твердой (мягкой) стенки. Введем обозначение

$$K = \frac{\text{Ma}_0 \text{Pr}}{\lambda_0^2 \text{Pr}(1 - \text{Pr}) - \text{Ma}_0}. \quad (27)$$

В случае твердой стенки приходим к уравнению для  $\lambda_0$

$$K + \frac{\text{ch } p_2(p_1 f_2 + \text{Bi } f_1)}{\text{Pr}^{-1} B_0 p_1 + (p_2 \text{sh } p_2 + \text{Bi } \text{Pr}^{-1} \text{ch } p_2) f_1} = 0. \quad (28)$$

Если стенка мягкая, то соответствующее уравнение принимает вид

$$K - \frac{\text{sh } p_2(p_1 f_2 + \text{Bi } f_1)}{p_1 p_2 B_1 - f_1(\text{Bi } \text{Pr}^{-1} \text{sh } p_2 + p_2 \text{ch } p_2)} = 0, \quad (29)$$

где введены обозначения  $f_1 = B_1 p_1 \text{ch } p_1 + B_0 \text{sh } p_1$ ,  $f_2 = B_1 p_1 \text{sh } p_1 + B_0 \text{ch } p_1$ .

При фиксированных параметрах  $\text{Pr}$ ,  $\text{Ma}_0$ ,  $\text{Bi}$ ,  $B_1$ ,  $B_0$  из уравнений (28) и (29) можно найти спектральный параметр  $\lambda_0$ . Если интересуемся критическими значениями  $\text{Ma}_0$ , соответствующими колебательной неустойчивости, следует положить  $\lambda_0 = i c_0$ , где  $c_0$  — частота нейтральных колебаний. В этом случае параметр  $K$  из (27) вещественен, и трансцендентные уравнения для  $c_0$  в случае твердой и мягкой стенок принимают соответственно вид

$$\text{Im} \left( \frac{\text{ch } p_2(p_1 f_2 + \text{Bi } f_1)}{\text{Pr}^{-1} B_0 p_1 + (p_2 \text{sh } p_2 + \text{Bi } \text{Pr}^{-1} \text{ch } p_2) f_1} \right) = 0, \quad (30)$$

$$\text{Im} \left( \frac{\text{sh } p_2(p_1 f_2 + \text{Bi } f_1)}{p_1 p_2 B_1 - f_1(\text{Bi } \text{Pr}^{-1} \text{sh } p_2 + p_2 \text{ch } p_2)} \right) = 0. \quad (31)$$

Пусть  $\text{Bi} = 0$ . В случаях мягкой изотермической стенки и твердой нетеплопроводной из (30) и (31) получаем одно и то же уравнение

$$\text{sh } Px \sin x - \sin Px \text{sh } x = 0, \quad (32)$$

при этом  $c_0 = x^2/2$ . Если мягкая стенка нетеплопроводная, то имеем уравнение

$$(\text{sh } Py \sin y - \sin Py \text{sh } y)(\text{ch } Py \cos y - \cos Py \text{ch } y) = 0, \quad (33)$$

при этом  $c_0 = 2y^2$ . Для корней уравнений (32), (33) имеет место соотношение

$$x \left( \frac{1}{P} \right) = Px(P), \quad y \left( \frac{1}{P} \right) = Py(P). \quad (34)$$

Это свойство наводит на мысль о связи между решениями задачи (17)–(24) при замене  $\text{Pr} \rightarrow \text{Pr}^{-1}$ . Можно показать, что если параметры  $\text{Pr}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\text{Bi}$  соответствуют задаче (17)–(24), а  $\text{Pr}^{-1}$ ,  $\tilde{\lambda}_0$ ,  $\tilde{\text{Bi}}$  соответствуют этой же задаче при замене  $\text{Pr} \rightarrow \text{Pr}^{-1}$ , то для мягкой изотермической и твердой нетеплопроводной стенок имеют место соотношения

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 \text{Qr}^{-1}, \quad \tilde{\text{Bi}} = \text{Bi} \text{Qr}, \quad \tilde{\text{Ma}}_0 = \text{Qr}[\text{Ma}_0 + \tilde{\lambda}_0^2(1 - \text{Qr})], \quad \text{Qr} = \text{Pr}^{-1}. \quad (35)$$

В случае мягкой изотермической стенки в результате вычислений для  $Pr = 100$ ,  $Bi = 0$ ,  $B_0 = 1$  получены значения  $\lambda_0 = i\pi^2/2$ ,  $Ma_0 = -29503.37$ , а если  $Pr = 0.01$ ,  $\tilde{Bi} = 0$ ,  $\tilde{B}_0 = 1$ , то  $\lambda_0 = 50\pi^2$ ,  $\tilde{Ma}_0 = -2705.908$ . Легко проверить, что соотношение (35) выполняется.

Теперь рассмотрим случай  $Pr = 1$ . Решение уравнения (7) следует искать в форме

$$\theta_0(z) = A_0 + A_1z + (A_2 + A_3z) \operatorname{ch} pz + (A_4 + A_5z) \operatorname{sh} pz, \quad (36)$$

где  $p = \sqrt{\lambda_0}$ . Трансцендентное уравнение для неизвестного параметра  $p$  имеет вид

$$\frac{pK\Gamma + Bi(p^2 + 2K)}{p} + \frac{B_1F_1 + B_0F_0}{B_1p \operatorname{ch} p + B_0 \operatorname{sh} p} = 0, \quad (37)$$

где

$$K = \frac{Ma_0 p^2}{2(p^4 - Ma_0)}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_0 &= [2K + p(p - \Gamma K)] \operatorname{ch} p + (p - 2\Gamma)K \operatorname{sh} p, \\ F_1 &= p(p - \Gamma)K \operatorname{ch} p + p(p^2 + K - p\Gamma K) \operatorname{sh} p. \end{aligned} \quad (39)$$

При этом параметр  $\Gamma = \operatorname{cth} p$  соответствует мягкой стенке, а  $\Gamma = \operatorname{th} p$  — твердой.

Приведем уравнения, которые получаются при  $Bi = 0$  для изотермических и нетеплопроводных мягких и твердых стенок.

I. Мягкая стенка,  $B_1 = 0$ ,  $B_0 = 1$  и  $B_1 = 1$ ,  $B_0 = 0$ , соответственно

$$K = \frac{-p^2}{1 + p(\operatorname{th} p - \operatorname{cth} p)}, \quad (40)$$

$$K = -p^2. \quad (41)$$

II. Твердая стенка,  $B_1 = 0$ ,  $B_0 = 1$  и  $B_1 = 1$ ,  $B_0 = 0$ , соответственно

$$K = \frac{p^2}{\operatorname{th}^2 p - 2}, \quad (42)$$

$$K = \frac{-p^2}{1 - p(\operatorname{th} p - \operatorname{cth} p)}. \quad (43)$$

Если интересуемся критическими значениями параметра  $Ma_0$ , то следует положить  $p = x(1 + i)$ , тогда  $c = 2x^2$ . В этом случае параметр  $K$  чисто мнимый, поэтому вещественные части правых частей уравнений (40), (42) должны обратиться в ноль. В результате приходим к вещественным уравнениям для неизвестной  $x$ . Подробно это проделано в [2], здесь же приведем только уравнения. Из равенств (40) и (43) получаем одно то же уравнение

$$\operatorname{th} 2x = \operatorname{tg} 2x.$$

Для корней этого уравнения имеет место формула  $y_k \approx \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ , которая уже при  $k = 1$  дает хороший результат.

Условие (42) приводит к уравнению

$$\sin 2x = 0,$$

в результате получаем  $x_k = \frac{k\pi}{2}$ . А вот условие (41) дает только одно соотношение  $Ma_0 = -8x^2$ , которое подтверждается вычислениями, но оно одно, а неизвестных два. В этом случае, скорее всего, нужно найти следующее приближение по  $\alpha$ .

В заключение заметим, что в силу того, что в полученные асимптотические формулы входят только числа Прандтля и Био, данная асимптотика имеет место и в задачах вибрационной термокапиллярной конвекции, что подтверждают вычисления, сделанные в [1] и [3]. Кроме того, полученная асимптотика может быть использована как начальное приближение при расчете спектра и нейтральных кривых.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-5747.2006.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 576–582.
- [2] Зеньковская С.М. Длинноволновая колебательная неустойчивость термокапиллярных течений в горизонтальном слое // Деп. в ВИНТИ 09.08.2005. №1135–В2005, 2005. 21 с.
- [3] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Термокапиллярная колебательная неустойчивость при отрицательных числах Марангони // Труды IX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Издательство ООО «ЦВВР». Ростов-на-Дону. 2006. Т. 2. С. 107–111.

**Zenkovskaya S.M.** *Long-wavelength asymptotic for spectrum and critical numbers for thermocapillary convection in horizontal layer.* Thermocapillary convection in horizontal layer with free deformable boundary is investigated. The other boundary can be soft or hard wall. Long-wavelength asymptotics for spectrum and critical Marangoni numbers and frequency of neutral oscillations is derived.

# СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ДИФРАКЦИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН С ПЕРЕОТРАЖЕНИЯМИ

Сумбатьян М. А., Зотов В. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского государственного университета*

В рамках лучевой теории дифракции получены явные асимптотические высокочастотные представления для амплитуды многократно переотраженных акустических и ультразвуковых волн. В данной работе выполнена серия экспериментальных лабораторных испытаний с целью сравнения теоретических результатов с результатами экспериментов. Эксперименты проведены для тестирования двукратно-отраженных волн — как в контактном, так и в эмерсионном методе.

Применение геометрической теории дифракции в ее различных вариантах, включая метод гауссовых пучков, уже в случае двукратного отражения волны является достаточно громоздким. Если исследовать задачу о переотражении высокочастотной волны от поверхности упругого тела с различными возможными трансформациями волн произвольного  $N$  числа раз, то гораздо более удобно исходить из оценки  $2N$  кратного дифракционного интеграла методом многомерной стационарной фазы. Основой исследования общего случая произвольного числа переотражений является задача о двукратном отражении, к рассмотрению которой переходим.

Пусть из точки  $x_0$  бесконечной упругой среды на граничную поверхность находящейся в ней полости падает сферическая монохроматическая высокочастотная волна. Волна порождается сосредоточенной в точке  $x_0$  силой  $Qe^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — частота колебаний. При этом главный член асимптотики амплитуды перемещений в продольной ( $p$ ) составляющей сферической волны в точке  $y(y_1, y_2, y_3)$  упругого пространства определяются по формуле

$$\mathbf{u}_q^{(p)}(y) = Q_q \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} [1 + O((k_p R_0)^{-1})], \quad (1)$$
$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{y}}{|\mathbf{x}_0 \mathbf{y}|}, \quad R_0 = |x_0 - y|$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Лямэ,  $k_p = \omega/c_p$ ,  $k_s = \omega/c_s$ ,  $c_p, c_s$  — волновые числа и скорости продольной и поперечной волн.

Переотражение высокочастотной волны рассмотрим на примере повторного отражения луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$ , излучающегося из точки  $x_0$  и принимающегося в точке  $x_3$  с возможной трансформацией  $p - s - p$  (продольной в поперечную и поперечной в продольную).

Компоненты вектора перемещений  $p$  — волны в точке приема  $x_3$  даются следующей формулой

$$\begin{aligned}
 u_k^{(p)}(x_3) &= \iint_{S_2} T_{y_2} [U_p^{(k)}(y_2, x_3)] \cdot \mathbf{u}(y_2; s) dS_2, \\
 U_j^{(k)}(y, x) &= U_{jp}^{(k)}(y, x) + U_{js}^{(k)}(y, x), \\
 T_y [\mathbf{U}^{(k)}(y, x)] &= 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} (\mathbf{U}^{(k)}) + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} (\mathbf{U}^{(k)})), \\
 U_{jp}^{(k)}(y, x_3) &= -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_p R}}{R} \right), \quad R = |x - y|, \quad k, j = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\mathbf{u}(y_2; s)$  — вектор полного перемещения в точке  $y_2 \in S_2$  окрестности точки зеркального отражения  $y_2^*$ , который определяется после первой  $p-s$  трансформации на окрестности  $S_1$  точки зеркального отражения  $y_1^*$ .

В свою очередь компоненты вектора перемещений  $u_k^{(s)}(y_2)$ ,  $k = 1, 2, 3$  сами выражаются подобной формулой

$$\begin{aligned}
 u_k^{(s)}(y_2) &= \iint_{S_1} T_{y_1} [U_s^{(k)}(y_1, y_2)] \cdot u(y_1; p) dS_1 \\
 U_{js}^{(k)}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ k_s^2 \delta_{kj} \left( \frac{e^{ik_s R_1}}{R_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_s R_1}}{R_1} \right) \right], \\
 R_1 &= |y_1 - y_2|
 \end{aligned} \tag{3}$$

где вектор  $u(y_1; p)$  полного поля перемещений в окрестности  $y_1^*$  следует выбрать как решение локальной задачи дифракции об отражении плоской падающей  $p$ -волны (1) от окрестности  $S_1$ .

Подстановка (3) в (2) после применения метода четырехмерной стационарной фазы дает:

$$u_r^{(p)}(x_3) = B_2 \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p L_0 + k_s L_1 + k_p L_2 + \frac{\pi}{4} \left( \delta_4^{(psp)} + 4 \right) \right] \right\}}{L_0 L_1 L_2 \sqrt{|\det (D_4^{(psp)})|}} \tag{4}$$

$$B_2 = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p}{k_s} V_{ps}(y_1^*) V_{sp}(y_2^*) \cos \gamma_1 \cos \gamma_3$$

где  $\delta_4^{(psp)} = \operatorname{sign} D_4^{(psp)}$ ,  $D_4^{(psp)} = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  — гессиан симметричной структуры, а его элементы  $d_{ij}$ ,  $i \leq j$  определяются выражениями:

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \beta \end{Bmatrix} + \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \beta_1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \cos \gamma + \frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_1 \right)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{44} \end{Bmatrix} &= \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \beta_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_2} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_3 \\ \sin^2 \beta_3 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_2 + \cos \gamma_3 \right) \\ d_{12} &= -L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta - k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \\ d_{34} &= -k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 - L_2^{-1} \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \\ d_{13} &= k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - c_{11}), d_{14} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - c_{21}) \\ d_{23} &= k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \alpha_2 - c_{12}), d_{24} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \beta_2 - c_{22}) \\ c_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + a_{31} b_{31}, c_{12} = a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{32} b_{31} \\ c_{21} &= a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + a_{31} b_{32}, c_{22} = a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{32} b_{32}. \end{aligned}$$

Здесь элементы матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ ,  $k, j = 1, 2, 3$  определяются направлениями падающих и отраженных волн в точках зеркального отражения  $y_1^*$  и  $y_2^*$ , при этом элементы матрицы  $B$  определяются также углом поворота плоскости луча  $x_0 - y_1^* - y_2^*$  в точке  $y_2^*$ .

Полученные теоретические выражения тестировались в лабораторных испытаниях на переотражениях в опытах с модельными дефектами, выполненными в металлических образцах.

В первой серии опытов образцы сканировались ультразвуковыми (УЗ) датчиками по окружности в одной плоскости и через каждые 5 градусов определялось время прохождения УЗ импульса от образующей цилиндра до дефекта, а также амплитуда УЗ импульса. Сканирование проводилось в водной среде — т.к. использовался иммерсионный метод, при котором образец и УЗ датчик находятся на некотором расстоянии друг от друга (в нашем случае примерно 30 мм), а вода играет роль контактной среды для прохождения УЗ. Образцы с искусственными дефектами представляли собой алюминиевые цилиндры диаметром 65 мм и высотой 25 мм, в центре которых профрезерованы искусственные дефекты определенной конфигурации. УЗ датчик жестко закреплен в иммерсионной ванне, а образец с дефектом поворачивается вокруг своей оси. В качестве датчиков использовался стандартный нормальный датчик на 2,5 МГц из комплекта дефектоскопа УД2-12 и фокусирующий датчик на 5 МГц, разработанный в нашем отделе. Его конструкция следующая. Датчик содержит пьезоэлемент и акустическую линзу. Акустические линзы по конструкции обычно разнообразны и четкие методы их инженерного расчета отсутствуют. Эта ситуация объясняется неприменимостью правил геометрической акустики к акустическим линзам из-за их небольшого размера по сравнению с длиной волны. В нашем случае применен УЗ датчик со сферической линзой из пластмассы с большим затуханием УЗ (эбонит) для снижения амплитуды паразитных сигналов, возникающих в линзе из-за неполного прохождения полезного сигнала через границу пластмасса-вода и появления многократных отражений внутри линзы. Расчетное фокусное расстояние  $F=40$  мм. Практически, начиная с 20 мм диаметр луча изменяется до 2–25 мм (по уровню 0,5) и остается таким до 50 мм (диаметр пьезоэлемента 12 мм).

ЗГИ вырабатывает электрические импульсы с частотой следования, задаваемой ГСИ и возбуждает на пьезоэлементе УЗ датчика механические колебания

на его резонансной частоте. Излучаемые датчиком импульсы вводятся через иммерсионную среду в образец (частично при этом отражаясь) и распространяются в нем в виде расходящегося пучка лучей (в случае обычного датчика), либо в виде цилиндрического пучка лучей (в случае фокусирующего датчика). Отражаясь от пары искусственных дефектов и возвращаясь к пьезоэлементу датчика, они преобразуются в импульсы электрического напряжения, которые после усилителя поступают на первый канал измерительного осциллографа, который также управляется ГСИ. Развертка осциллографа дает изображение сигналов в координатах амплитуда-время. Это позволяет различать на экране прибора прямой отраженный эхо-сигнал от сигнала двукратного переотражения. Таким образом, вращая образец с парой дефектов на 360 градусов вокруг своей оси и через каждые 5 градусов измеряя амплитуду импульса от дефекта и время распространения его до дефектов, получаем круговую амплитудно-временную характеристику дефектов. Интересно отметить, что при сканировании цилиндрических частей дефектов (длина УЗ волны сравнима с размерами дефекта) тонким сфокусированным лучом, мы получаем, в основном, зеркальное отражение от дефектов, а при сканировании широким расходящимся пучком отражение получается, в основном, рассеянное.

Основные отмеченные закономерности сохраняются при переходе от иммерсионного метода к контактному. В этих экспериментах мы брали пару искусственных дефектов, представляющих собой боковые цилиндрические сверления, расположенные на небольшом расстоянии друг от друга и выполненные в алюминиевом образце того же типа, что и описанные выше. Точность применяемой аппаратуры и выбранные типы УЗ датчиков позволяют произвести разрешение различных сигналов с достаточной для определения их амплитуды точностью. При этом на экране дефектоскопа отчетливо видны сигналы прямого отражения и на их фоне отчетливо прослеживается сигнал, дважды переотраженный от соседних цилиндрических поверхностей.

При сравнении результатов экспериментальных измерений с расчетными данными, полученными по описанной выше методике, удалось установить, что расхождение между теоретическими и экспериментальными данными составляет в среднем порядка 20% точности. Столь относительно высокая погрешность является следствием как асимптотического характера аналитического приближения, справедливого при очень высоких частотах, так и погрешностями измерений, которые обычно составляют порядка 5–10%.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05–01–00155а.

**Sumbatyan M.A., Zotov V.M.** *Comparison between theoretical and experimental results in diffraction of ultrasonic waves with re-reflections.* In frames of the ray diffraction theory we have developed explicit asymptotic high-frequency representations for the amplitude of multiple re-reflections of acoustic and ultrasonic waves. To check theoretical formulas, we have performed a set of experimental testings. These experiments have been carried out in the case of double reflection - both in contact and immersion methods.

# ПРОХОЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПОД СИСТЕМОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ

**Карапетьян Г. Я.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
государственного университета*

Рассматривается одномерная задача прохождения поверхностных акустических волн (ПАВ) под системой периодических электродов, нагруженных на электрические импедансы, в приближении длинных волн. Получено дисперсионное уравнение в явном виде, из которого видно, что в зависимости от типа нагрузки скорость поверхностных акустических волн может значительно изменяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения от скорости на свободной поверхности.

Пусть на поверхности пьезоэлектрического полупространства расположены периодические невесомые электроды, нагруженные на электрические импедансы  $Y$  (см. рис. 1).

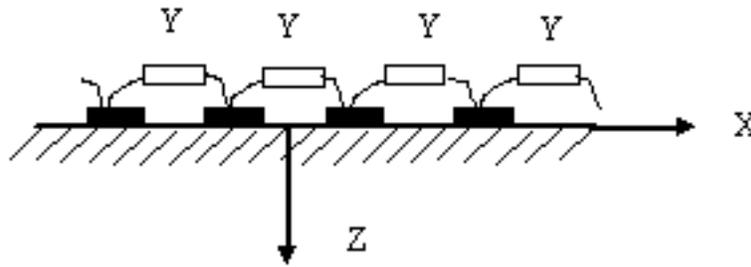


Рис. 1.

Как показано в работах [1,2] поставленную задачу можно свести к одномерной задаче с однородными электрическими граничными условиями (механические граничные условия однородны в силу невесомости электродов) и с распространением плоских волн вида  $u = U(x) \exp(-jkx)$ . Таким образом, задача сводится к однородной задаче возбуждения акустических волн в среде с периодически меняющейся пьезоконстантой  $e(x)$ . Так как задача становится одномерной, то будет присутствовать только поперечная составляющая электрической индукции

$$D_z = \varepsilon E_z + e(x) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (1)$$

$\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды.

Поэтому электроды на одной поверхности необходимо расположить на обеих поверхностях. Эти электроды уже не создают неоднородностей на поверхности, т.е. задача сводится к виду, показанному на рис. 2. Уравнение движения для такой упругой среды имеет вид:

$$-\rho \omega^2 u = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} [e(x) E_z] \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота ПАВ. Так как пьезоконстанта — периодическая функция, то она имеет вид:  $e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \exp[jnk_0]$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0$  — период расположения электродов.

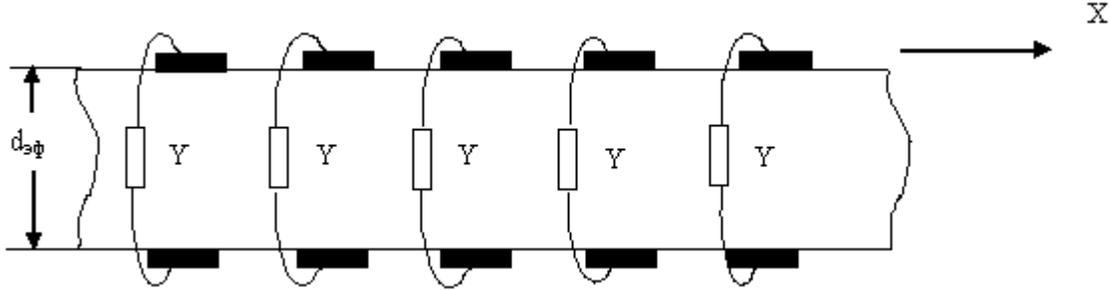


Рис. 2.

Решение будем искать в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \exp\{j[\omega t - (nk_0 + k)x]\}, \quad E_z = E_0 \exp[jkx], \quad \text{где}$$

$$u_n = \frac{E_0 e_n j(nk_0 + k)}{c(nk_0 + k)^2 - \rho\omega^2}, \quad c = \sqrt{\frac{V_{\text{ПАВ}}}{\rho}}, \quad c — \text{эффективный модуль упругости, } V_{\text{ПАВ}}$$

— скорость поверхностных акустических волн на свободной поверхности.

$$\text{Ток через электроды } I = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-l/2}^{l/2} D_z(x) dx \right],$$

$$I = j\omega \int_{-l/2}^{l/2} [e(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon E_z] dx, \quad l — \text{длина электрода вдоль оси } X.$$

Положим далее, что распространяются волны, для которых  $c(nk_0 + k) - \rho\omega^2 \neq 0$ . Волны, для которых это условие выполняется, не могут распространяться в данной системе.

$$I = j\omega \left[ \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ E_0 \sum_{m=0}^{\infty} e_m \exp(-j[mk_0 + k]) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n \exp(-j[nk_0 + k]) + \varepsilon E_0 \exp(-jkx) \right\} dx \right] \quad (3)$$

$E_0 = \frac{V}{d_{\text{эф}}}$ ,  $d_{\text{эф}}$  — эффективное расстояние между электродами, при котором напряженность поля совпадает с нормальной составляющей электрического поля в

системе электродов, показанной на рис. 1. [1, 2].

Тогда уравнение непрерывности тока  $I + VY = 0$  имеет вид:

$$VY + \frac{2Vj\omega}{d_{\text{эф}}\varepsilon cl} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nk_0 + k)e_n e_m}{(nk_0 + k) \left(\frac{\omega}{v_{\text{ПAB}}}\right)^2} \frac{\sin [\{(m+n)k_0 + k\}l/2]}{(m+n)k_0 + k} +$$

$$+ j \frac{2\varepsilon l \sin(kl/2)}{d_{\text{эф}}k} = 0 \quad (4)$$

Полагая далее что  $k \ll k_0$ , т.е. на длину волны расположено много электродов (приближение длинных волн) и что  $kl/2 \ll 1$ , т.е.  $\sin(kl/2)/kl/2 \approx 1$ , окончательно получаем:

$$Y + k_{\text{эф}}^2 \frac{j\omega C_T k^2}{k^2 - \left(\frac{\omega}{v_{\text{ПAB}}}\right)^2} + j\omega C_T = 0, \quad (5)$$

$C_T$  — емкость пары электродов, к которым подсоединена нагрузка  $Y$ ,  $k_{\text{эф}}^2 = \frac{e_0^2}{\varepsilon c}$  — квадрат эффективного коэффициента электромеханической связи.

Из этого уравнения получается связь между  $k$  и  $\omega$  в явном виде:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{v_{\text{ПAB}}}\right) \frac{1}{1 + \frac{j\omega C_T k_{\text{эф}}^2}{Y_n + j\omega C_T}}. \quad (6)$$

При  $Y \rightarrow \infty$   $k = \pm \frac{\omega}{v_{\text{ПAB}}}$ , а при  $Y \rightarrow 0$   $k = \pm \frac{\omega}{v_{\text{ПAB}}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_{\text{эф}}^2}}$ .

Учитывая, что  $k = \frac{\omega}{v}$ , где  $v$  — фазовая скорость волны под системой электродов, получаем при  $Y \rightarrow \infty$   $v_{\infty} = v_{\text{ПAB}}$ , а при  $v_0 = v_{\text{ПAB}} (1 + k_{\text{эф}}^2/2)$ , при  $k_{\text{эф}}^2 \ll 1$ , т.е.  $v_0 - v_{\infty} = k_{\text{эф}}^2/2$ , что совпадает с определением коэффициента электромеханической связи для ПАВ.

Если нагрузка чисто реактивная, т.е.  $Y = ja$ , то выражение для фазовой скорости примет вид:

$$v = v_{\text{ПAB}} \left(1 + \frac{k_{\text{эф}}^2}{2} \frac{\omega C_T}{a + \omega C_T}\right). \quad (7)$$

При чисто индуктивной нагрузке ( $Y = -1/\omega L$ ,  $L$  — индуктивность)

$$v = v_{\text{ПAB}} \left[1 + \frac{k_{\text{эф}}^2}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right], \quad (8)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_T}}$$

Из выражения (8) видно, что скорость ПАВ под системой электродов нагруженных на индуктивности может меняться от 0 до  $\infty$ .

Если учесть потери в индуктивности, то скорость не будет меняться в таких больших пределах, но при достаточно большой добротности индуктивности (50–100) изменение скорости ПАВ может быть в несколько раз по сравнению со скоростью на свободной поверхности, как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. Кроме того, имеется значительная дисперсия скорости ПАВ, что будет приводить к размытию импульсов, проходящих под системой электродов. При чисто емкостной нагрузке  $Y = \omega C_T$  дисперсия скорости отсутствует, и скорость ПАВ определяется выражением:

$$v = v_{\text{ПАВ}} \left[ 1 + \frac{k_{\text{эф}}^2}{2} \frac{C_T}{C + C_T} \right] \quad (9)$$

и импульсы, проходящие под системой электродов, размываться не будут. В этом случае скорость ПАВ, также может меняться в зависимости от емкостной нагрузки от скорости на свободной поверхности до скорости на закороченной поверхности.

Таким образом, показано, что при распространении ПАВ под системой периодических электродов, нагруженных на электрические импедансы, скорость ПАВ может меняться в значительных пределах, что можно использовать для создания различных устройств обработки сигналов. Так, например, при емкостной нагрузке, которую легче всего осуществить практически, напылением диэлектрической пленки на полоски вне акустического тракта, фаза ПАВ будет зависеть от диэлектрической проницаемости на пленки, которая может зависеть от различных физических воздействий (давления, температуры, влажности, радиации), что позволит судить о величине воздействия по фазе ПАВ.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карпетьян Г.Я., Стрёмовский Э.В. Метод расчета преобразователей на поверхностных акустических волнах. Межвузовский тематический сборник. Вып. 4. Таганрог. 1978.
- [2] Г.Я. Карпетьян, Багдасарян А.С. Импедансные фильтры на поверхностных акустических волнах. МПО. Москва, 1998.

**Karapetyan G.Ya.** *Propagation of surface acoustic waves under the system of periodic electrodes.* The one-dimensional problem of propagation for surface acoustic waves under the system of periodic electrodes loaded on electric impedances is investigated at long waves approximation. The dispersion equation in an explicit form is obtained. This equation indicates that depending on the loading type the speed of surface acoustic waves can vary considerably, both toward the increase and toward decrease, with respect to the speed on a free surface.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ПАДАЮЩЕМ УЧАСТКЕ ДИАГРАММЫ НАГРУЖЕНИЯ

Карякин М. И.

*Ростовский государственный университет*

Решена задача С. Спектора о нахождении класса моделей нелинейно-упругого поведения материала, для которого диаграмма растяжения имеет падающий участок, а процесс растяжения на этом участке является устойчивым.

**Введение.** Задача математического описания процесса образования шейки в классическом эксперименте по одноосному растяжению стержня является, пожалуй, одной из наиболее подробно изучавшихся проблем механики деформируемого твердого тела. Для описания этого явления использовано очень большое количество различных математических моделей теории упругости, пластичности, вязкоупругости, модели многоуровневых и структурно неоднородных сред, теория фазовых превращений и многое другое; накоплена обширная база экспериментальных данных. Тем не менее до сих пор внимание исследователей привлекают вопросы, связанные, например, с местом локализации шейки и ее формой, приемлемостью той или иной модели для ее описания и т.п.

Использование нелинейной теории упругости в данных задачах весьма распространено и рассматривается многими авторами как подход, позволяющий проанализировать и определить некие «спусковые механизмы» процесса шейкообразования. Кроме того чисто упругие модели часто признаются вполне адекватными для описания процессов так называемого активного нагружения.

В качестве пионерской работы, связанной с использованием нелинейно-упругих моделей в задачах образования шейки (или потери устойчивости при растяжении), следует назвать статью Дж. Эриксона [1]. В ней на основе некоторых аналогий с теорией фазовых превращений в газах для описания потери устойчивости при растяжении была предложена чисто качественная модель нелинейной зависимости приложенной силы от вызываемых ею удлинений, содержащей так называемый "падающий участок на котором сила убывала с ростом удлинения. Предложенный в [1] подход активно использовался и продолжает использоваться, в частности, для описания процесса шейкообразования в полимерных материалах [2, 3].

Одним из первых ученых, использовавших для изучения неустойчивости процесса растяжения цилиндрического тела трехмерную нелинейную теорию упругости, был, по-видимому, С. Спектор [4]. Важнейшим результатом его работы является теорема об устойчивости процесса растяжения, которая для жесткого нагружающего устройства означает, что если модель нелинейно-упругого материала удовлетворяет некоторым стандартным условиям физического смысла, и при растяжении осевая сила  $P$  монотонно возрастает с увеличением коэффициента удлинения  $\lambda$  при  $\lambda \in [1, \Lambda]$ , то существует такое положительное (возможно, весьма малое) число  $\varepsilon$ , что процесс растяжения будет устойчив в диапазоне

удлинений  $\lambda \in (1 - \varepsilon, \Lambda + \varepsilon)$ . Данная теорема означает, что при отсутствии падающего участка процесс растяжения всегда устойчив, а если падающий участок существует, то процесс растяжения будет устойчив, по крайней мере, в самом начале этого участка. В работе проанализированы две частные модели нелинейно упругого поведения (соответствующие двум фиксированным наборам параметров в общей трехконстантной нелинейной модели материала Блейтца и Ко), первая из которых не имеет падающего участка, а у другой падающий участок не сменяется участком возрастания. Результаты анализа привели С. Спектора к формулировке следующей проблемы: может ли существовать такая модель материала, что диаграмма растяжения содержит падающий участок конечной длины, причем процесс деформирования всюду на этом участке является устойчивым.

Проблема оставалась неразрешенной до появления статьи Н. Оуэна [5], изучившего, в частности, влияние геометрии цилиндра на его устойчивость. В [5] показано, что при уменьшении отношения радиуса цилиндра к его длине зона устойчивости на падающем участке сокращается:

$$\lim_{r/L \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Это привело к заключению о невозможности построения модели, удовлетворяющей условиям С. Спектора.

Тем не менее, невозможность построения модели с устойчивым падающим участком диаграммы для тел произвольной геометрии, вовсе не означает невозможность такой модели для тела конкретного размера. В настоящей работе в рамках плоской деформации на примере двухконстантного варианта модели материала Блейтца и Ко будет показано существование материалов, диаграмма растяжения которых имеет падающий участок, а растяжение тел определенных геометрических размеров является устойчивым на всем этом участке.

**Типы диаграмм нагружения.** Исследование устойчивости или неустойчивости на падающем участке диаграммы нагружения должно начинаться, естественно, с выяснения вопроса, а существует ли вообще для данной модели материала и данных условий нагружения этот падающий участок. В настоящей работе в качестве модели материала выберем общую трехконстантную модель Блейтца и Ко, описываемую функцией удельной потенциальной энергии

$$W = \frac{1}{2} \mu \beta \left( I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right) + \frac{1}{2} \mu (1 - \beta) \left( I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^{\alpha} - 1) - 3 \right), \quad (1)$$

( $I_k$  — главные инварианты меры деформации Коши,  $\alpha, \mu, \beta$  — материальные параметры). Кроме общего случая (1) более подробный анализ будет проведен для двух частных случаев: двухконстантного варианта ( $\alpha = 1/2, 0 \leq \beta \leq 1$ ) и т. н. "упрощенного" варианта ( $\alpha = 1/2, \beta = 0$ ) этой модели.

Ограничиваясь случаем плоской деформации, полуобратное представление деформации растяжения стержня (прямоугольника) зададим в виде

$$X = Ax, \quad Y = \lambda y, \quad Z = z, \quad (2)$$

где  $x, y, z$  и  $X, Y, Z$  — декартовы координаты точек тела в отсчетной и деформированной конфигурациях соответственно. Легко проверить, что уравнения равновесия для тензора напряжений Пиола  $\mathbf{D}$  удовлетворяются тождественно. Считая,

что граничные условия на торцах соответствуют нагружению в так называемом жестком устройстве (hard device), запишем их в виде

$$D_{yX}|_{y=0,L} = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(L) = \lambda L.$$

Все они так же автоматически удовлетворяются преобразованием (2) для любой из рассматриваемых моделей материала. Из условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности стержня может быть получена связь между константами  $A$  и  $\lambda$  полуобратного представления (2):

$$A = \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Теперь зависимость компоненты  $D_{yY}$  тензора напряжения Пиолы от параметра удлинения  $\lambda$  может быть записана явно. Именно наличием экстремальных точек у этой зависимости и определяется наличие или отсутствие падающего участка на диаграмме нагружения, а также размер этого участка. В [6] приведена численно построенная на плоскости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для модели (1) область существования падающего участка.

Для более простого двухконстантного варианта модели (2) анализ экстремальных точек может быть легко осуществлен аналитически. В этом случае

$$A = 1/\sqrt[3]{\lambda}, \quad (3)$$

а уравнение  $d D_{yY}/d \lambda = 0$  сводится к кубическому:

$$3\beta k^3 - (1 - \beta)k^2 + 5\beta k + 9(1 - \beta) = 0, \quad (4)$$

где  $k = \lambda^{4/3}$ . Уравнение (4) имеет вещественные корни, большие единицы, при  $\beta \in [0, \beta_*]$ ,  $\beta_* \approx 0.0388$ . При  $\beta > \beta_*$  зависимость силы от удлинения является монотонной. При  $\beta = 0$  кубическое уравнение вырождается в квадратное с одним положительным корнем  $\lambda = 3^{3/4} \approx 2.28$ , соответствующим точке максимума на диаграмме растяжения. При уменьшении  $\beta$  от  $\beta_*$  до нуля происходит расширение отрезка между корнями: левый стремится к  $3^{3/4}$ , а правый — к  $+\infty$ .

**Анализ бифуркаций.** Исследование устойчивости проведем на основе линеаризации уравнений равновесия в окрестности построенного решения. При этом потерю устойчивости будем отождествлять с появлением нетривиальных решений линейной однородной краевой задачи.

Ограничиваясь двухконстантным вариантом модели (1) с учетом (3) заменим представление (2) соотношениями

$$X = \frac{1}{\lambda^{1/3}}x + \varepsilon u(x, y), \quad Y = \lambda y + \varepsilon v(x, y), \quad Z = z. \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнения равновесия и краевые условия и удерживая только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые, для прямоугольника ширины  $a$  и высоты  $L$  приходим к краевой задаче для «возмущений»  $u$  и  $v$ , состоящей из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} &(-3k^3\beta + 3k^3 + 3k^2\beta)u_{xx} + (k^2\beta - k\beta + k)u_{yy} + \\ &+ (k^2 - k^2\beta + 1 - \beta + 2k\beta)v_{xy} = 0, \\ &(k^3\beta - k^2\beta + k^2)v_{xx} + (2k\beta - 3\beta + 3 + k^3\beta)v_{yy} + \\ &+ (-k\beta + k - k^3\beta + 2k^2\beta + k^3)u_{xy} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

краевых условий на боковой поверхности ( $x = \pm a/2$ )

$$3ku_x + v_y = 0, \quad kv_x + u_y = 0, \quad (7)$$

и условий на торцах ( $y = 0, L$ )

$$ku_y + v_x = 0, \quad v = 0. \quad (8)$$

где, как и раньше,  $k = \lambda^{4/3}$ .

Решение краевой задачи (6)–(8) будем искать в виде

$$u(x, y) = U_n(x) \cos(a_n y), \quad v(x, y) = V_n(x) \sin(a_n y) \quad (a_n = \pi n/L),$$

позволяющем автоматически удовлетворить краевым условиям (8) и сводящем (6), (7) к линейной однородной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $U_n(x)$  и  $V_n(x)$ . Решение системы (6) в этом случае может быть легко записано в аналитическом виде

$$U_n(x) = C_1 e^{D_1 x} \cos(D_2 x) + B_1 e^{D_1 x} \sin(D_2 x) + C_2 e^{-D_1 x} \cos(D_2 x) + B_2 e^{-D_1 x} \sin(D_2 x),$$

$$V_n(x) = C_3 e^{D_1 x} \cos(D_2 x) + B_3 e^{D_1 x} \sin(D_2 x) + C_4 e^{-D_1 x} \cos(D_2 x) + B_4 e^{-D_1 x} \sin(D_2 x),$$

но выражения  $B_m$  через  $C_k$  громоздки, и анализ ее характеристического уравнения, т.е. получение явных выражений вещественной и мнимой части его корней  $D_1$  и  $D_2$  при  $\beta \neq 0$  является чрезвычайно трудоемким. При  $\beta = 0$  эти выражения весьма компактны:

$$D_1 = \frac{a_n \sqrt{42k^2 - 3k^4 - 3}}{6k^2}, \quad D_2 = \frac{\sqrt{3}a_n(1 - k^2)}{6k^2}$$

Подставляя полученные выражения для  $U_n(x)$  и  $V_n(x)$  в краевые условия на боковой поверхности (7), получаем однородную линейную систему для констант  $C_k$ , условие нетривиальной разрешимости которой и служит условием существования решения, т.е. уравнением для определения точки бифуркации.

В случае  $\beta = 0$  можно получить асимптотические формулы для первого бифуркационного значения параметра удлинения  $\lambda_{cr}$  для достаточно длинных стержней ( $\delta = a/L \ll 1$ ) при сжатии

$$\lambda_{cr} \approx 1 - \frac{1}{3}\delta^2 - \frac{23}{270}\delta^4$$

и при растяжении

$$\lambda_{cr} \approx 3^{3/4} \left( 1 + \frac{1}{243}\delta^2 - \frac{5}{118098}\delta^4 \right).$$

Первое из этих выражений после согласования обозначений переходит в классическую формулу Эйлера устойчивости сжимаемого стержня, а второе уточняет результат Н. Оуэна для данной модели материала.

С увеличением ширины прямоугольника ( $\delta \rightarrow \infty$ ) величина  $\lambda_{cr}$  так же имеет конечный предел, равный  $\sqrt{6 - \sqrt{33}}^{3/4} \approx 2.52$ . Заметим, что это меньше, чем величина удлинения, при которой нарушается условие сильной эллиптичности.

При рассмотрении двухконстантной модели оказалось, что именно условие сильной эллиптичности является вторым определяющим фактором, позволяющим определить, может ли прямоугольник данного размера устойчиво «преодолеть» падающий участок диаграммы нагружения. Если этот участок настолько широк, что содержит точку потери эллиптичности (например, при  $\beta = 0.02$  падающий участок представляет собой отрезок  $\lambda \in [3.44, 15.62]$ , а условие сильной эллиптичности выполняется при  $\lambda < 5.06$ ), то даже бесконечно широкий прямоугольник будет терять устойчивость при растяжении именно в этой точке. В то же время для значений параметра  $\beta$ , достаточно близких к  $\beta_*$ , падающий участок не содержит точек потери устойчивости для прямоугольников конечного размера. Так, например, при  $\beta = 0.038$  падающий участок является отрезком  $[4.81, 6.18]$ , и все прямоугольники с шириной, более чем в 2 раза превосходящей высоту, не потеряют устойчивость на этом участке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00638).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ericksen J.L.* Equilibrium of bars // *Journal of Elasticity*, 1975.
- [2] *Coleman B.D.* Necking and Drawing in Polymeric Fibers Under Tension // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1983.
- [3] *Leonov A.I.* A theory of necking in semi-crystalline polymers // *Int. Journal of Solids and Structures*, 2002.
- [4] *Spector S.J.* On the Absence of Bifurcation for Elastic Bars in Uniaxial Tension // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1984.
- [5] *Owen N.* Some remarks on the stability of the homogeneous deformation for an elastic bar // *Journal of Elasticity*, 1990.
- [6] *Горин Ю.Н., Карякин М.И.* Одноосное растяжение нелинейно-упругих образцов. Ч. 1. Однородная деформация // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VIII-й Международной конференции. Ростов-на-Дону, 14–18 октября 2002 года. Т. 2. Ростов-н/Д: Новая книга, 2003. С. 56–60.*

**Karyakin M.I.** *On the stability of the deformation at the descending part of the tension diagram.* The paper presents some results on the S. Spector's problem about the existence of the constitutive equation of nonlinearly elastic material that has descending region at the tension diagram and the deformation is stable within all this region.

# О КОРРЕКТНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Ковалева В. В.

АНО "Методологический центр", Ростов-на-Дону

На основе построенного ранее вариационного принципа в связанной термоэлектроупругости сформулирована корректная краевая задача для тонких плит с учетом гипотез о структуре физических полей. Рассмотрены два основных типа задач, отличающихся видом теплового нагружения. Показано, что сформулированные задачи условно можно разделить на задачу о планарных колебаниях и задачу изгиба.

Рассмотрим два основных типа задач, отличающихся постановкой граничных условий для тепловых характеристик. В задачах первого типа на нагруженных торцах будем считать заданным тепловой поток, в задачах второго типа — температуру.

Рассмотрим тонкостенную термоэлектроупругую плиту  $V = \Omega \times [-H, H]$ , где  $\Omega$  — плоская односвязная область с гладкой границей,  $\Omega \subset R_2$  и  $\gamma = \partial\Omega$ . Будем считать, что элемент поляризован в направлении оси  $x_3$ . На внешние поверхности  $x_3 = \pm H$  нанесены бесконечно тонкие электроды. Ставится задача об отыскании наведенного потенциала на электродах.

**1. Задача 1-го типа.** На верхней и нижних гранях задан тепловой поток, механические напряжения отсутствуют; боковая поверхность плиты  $\Gamma = \gamma \times [-H, H]$  теплоизолирована, неэлектродирована и свободна от механических нагрузок. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}|_{x_3=\pm H} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varphi|_{x_3=\pm H} = \pm\varphi_0, \quad -k_{33} \frac{\partial\theta}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm H} = q^\pm; \\ \sigma_{ij}n_j|_\Gamma = 0, \quad D_i n_i|_\Gamma = 0, \quad -k_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} n_j \Big|_\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к  $\gamma$ .

**2. Задача 2-го типа** На верхней и нижних гранях задается распределение температуры как функция координат и времени, механические напряжения отсутствуют; боковая поверхность  $\Gamma$  теплоизолирована, неэлектродирована и свободна от механических нагрузок:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}|_{x_3=\pm H} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varphi|_{x_3=\pm H} = \pm\varphi_0, \quad \theta|_{x_3=\pm H} = \theta^\pm; \\ \sigma_{ij}n_j|_\Gamma = 0, \quad D_i n_i|_\Gamma = 0, \quad -k_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_i} n_j \Big|_\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим далее краевую задачу 1-го типа (1) для тонкой термоэлектроупругой пластины, для которой  $\varepsilon = \frac{H}{a} \ll 1$ ,  $a = \text{diam}\Omega$ .

Для получения упрощенной [1] модели деформирования пластины используем определяющие соотношения термоэластостатики [2], считая  $\sigma_{33}$  равным нулю. Учитывая малость параметра  $\varepsilon$ , примем гипотезы о строении физических полей, аналогичные гипотезам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(x_1, x_2) - x_3 u_{30,1}(x_1, x_2), & u_2 &= u_{20}(x_1, x_2) - x_3 u_{30,2}(x_1, x_2), \\ u_3 &= u_{30}(x_1, x_2), & \varphi &= \frac{x_3}{H} \varphi_0, \varphi_0 = const, & \theta &= T_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{H} T_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_{30}$  характеризует изгиб пластины,  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  — характеризуют смещение в плоскости  $x_3 = 0$ . Для корректной формулировки краевой задачи используем вариационный принцип термоэластостатики, полученный в [3], согласно которому среди всех кинематически возможных полей истинные доставляют стационарное значение функционалу  $L$ :

$$\begin{aligned} L &= \int_V \left[ \frac{\rho \omega^2}{2} u_i^2 + F_i u_i + \sigma \varphi + \frac{w}{i\omega T_0} \theta - \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} - \frac{1}{2i\omega T_0} k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} + \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \theta^2 - e_{kij} \varepsilon_{ij} \varphi_{,k} + \gamma_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \\ &\left. - g_i \varphi_{,i} \theta \right] dV + \int_{S_\sigma} p_i u_i dS - \frac{1}{i\omega T_0} \int_{S_q} f \theta dS, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_j$  — компоненты вектора перемещения;  $\varphi$  — электрический потенциал;  $\theta$  — прирост температуры от естественного состояния;  $c_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $e_{ikl}$  — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных;  $\varepsilon_{ik}$  — компоненты тензора диэлектрических проницаемостей;  $\gamma_{ij}$  — компоненты тензора температурных коэффициентов;  $g_i$  — пироккоэффициенты;  $k_{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности;  $q_i$  — компоненты вектора потока тепла;  $\mathcal{F}_i$  — компоненты вектора объемных сил;  $\sigma$  — плотность электрического заряда;  $w$  — объемная мощность внутренних источников тепла,  $c_\varepsilon$  — теплоемкость при постоянной деформации;  $\rho$  — плотность;  $T_0$  — температура естественного состояния по шкале Кельвина (все величины измерены в изотермическом состоянии).

Используя (2), упростим функционал  $L$  (4) и проинтегрируем по  $x_3$ . Осуществляя его варьирование, используя основную лемму вариационного исчисления [4] и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta u_{10}$ ,  $\delta u_{20}$ ,  $\delta u_{30}$ ,  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  в объемном и контурном интегралах, получим соответственно разрешающие уравнения и граничные условия. Эта система уравнений естественным образом подразделяется на две задачи:

**Задача 1.1:**

$$\begin{aligned}
 & c_{11}^* u_{10,11} + \frac{1}{2} (c_{11}^* - c_{12}^*) u_{10,22} + c_{12}^* u_{20,21} + \rho \omega^2 u_{10} - \gamma_{11}^* T_{1,1} = 0, \\
 & \frac{1}{2} (c_{11}^* - c_{12}^*) u_{20,11} + c_{11}^* u_{20,22} + c_{12}^* u_{10,12} + \rho \omega^2 u_{20} - \gamma_{11}^* T_{1,2} = 0, \\
 & \frac{k_{11}}{i\omega T_0} (T_{1,11} + T_{1,22}) + \frac{c_\varepsilon^*}{T_0} T_1 + \gamma_{11}^* (u_{10,1} + u_{20,2}) = \frac{g_3^*}{H} \varphi_0 + \frac{q^+ + q^-}{2i\omega T_0 H}, \\
 & \left( c_{11}^* u_{10,1} n_1 + 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{10,2} n_2 + c_{12}^* u_{20,2} n_1 - \gamma_{11}^* T_1 n_1 + \frac{e_{31}^*}{H} \varphi_0 n_1 \right) \Big|_\gamma = 0 \\
 & \left( 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{20,1} n_1 + c_{11}^* u_{20,2} n_2 + c_{12}^* u_{10,1} n_2 - \gamma_{11}^* T_1 n_2 + \frac{e_{31}^*}{H} \varphi_0 n_2 \right) \Big|_\gamma = 0 \\
 & (T_{1,1} n_1 + T_{1,2} n_2) \Big|_\gamma = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $c_{11}^* = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}$ ,  $c_{12}^* = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}$ ,  $\gamma_{11}^* = \gamma_{11} - \frac{c_{13}\gamma_{33}}{c_{33}}$ ,  $e_{31}^* = e_{31} - \frac{e_{33}c_{13}}{c_{33}}$ ,  
 $\epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}$ ,  $c_\varepsilon^* = c_\varepsilon + \frac{\gamma_{33}^2}{c_{33}} T_0$ ,  $g_3^* = g_3 + \frac{\gamma_{33}e_{33}}{c_{33}}$ .

**Задача 1.2**

$$\begin{aligned}
 & c_{11}^* \Delta^2 u_{30} + \rho \omega^2 \Delta u_{30} + \frac{\gamma_{11}^*}{H} \Delta T_2 - \frac{3\rho \omega^2}{H^2} u_{30} = 0, \\
 & \frac{k_{11}}{i\omega T_0} \Delta T_2 + \left( \frac{c_\varepsilon^*}{T_0} - \frac{3k_{33}}{i\omega T_0 H^2} \right) T_2 - \gamma_{11}^* H \Delta u_{30} = \frac{3(q^+ - q^-)}{2i\omega T_0 H}, \\
 & ((c_{11}^* n_1^2 + c_{12}^* n_2^2) u_{30,11} + (c_{12}^* n_1^2 + c_{11}^* n_2^2) u_{30,22} + 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,12} n_1 n_2 + \\
 & \quad + \frac{\gamma_{11}^*}{H} T_2) \Big|_\gamma = 0 \\
 & (T_{2,1} n_1 + T_{2,2} n_2) \Big|_\gamma = 0 \\
 & \left( \frac{\partial}{\partial s} ((c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,11} n_1 n_2 + (c_{12}^* - c_{11}^*) u_{30,22} n_1 n_2 + 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,12} n_2^2) + \right. \\
 & \quad \left. c_{11}^* u_{30,111} n_1 + (2c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,122} n_1 + c_{11}^* u_{30,222} n_2 + c_{12}^* u_{30,112} n_2 + \right. \\
 & \quad \left. + \rho \omega^2 (u_{30,1} n_1 + u_{30,2} n_2) + \frac{\gamma_{11}^*}{H} (T_{2,1} n_1 + T_{2,2} n_2) \right) \Big|_\gamma = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

В задаче 1.1 неизвестными являются  $u_{10}$ ,  $u_{20}$ ,  $T_1$  — планарные смещения и полусумма граничных температур, характеризующие плоскую задачу связанной термоэлектроупругости. Однако, в этой задаче присутствует в качестве нагрузки потенциал  $\varphi_0$ . В случае, когда наведенная разность потенциалов неизвестна, она определяется из дополнительного условия включения элемента в цепь.

В задаче 1.2 неизвестными являются  $u_{30}$ ,  $T_2$  — поперечное смещение и полуразность граничных температур, характеризующие задачу изгиба связанной термоэлектроупругости. Потенциал  $\varphi_0$  явно в эту задачу не входит.

Упрощенные модели для задачи второго типа с заданной на внешних поверхностях температурой могут быть получены аналогично.

Для получения упрощенной модели деформирования пластины в задаче 2-го типа 2 используем определяющие соотношения [2],  $\sigma_{33}$  считаем равным нулю, так-

же примем гипотезы о строении физических полей, как и при упрощении задачи 1-го типа 3.

В этой постановке  $T_1$ ,  $T_2$  оказываются известными и определяются из граничных условий на верхней и нижней поверхностях следующим образом:

$$T_1 = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2}, \quad T_2 = \frac{\theta^+ - \theta^-}{2},$$

В результате применения вариационного принципа получим соответственно разрешающие уравнения и граничные условия, которые аналогично предыдущему случаю естественным образом разделяются на две задачи:

### Задача 2.1:

$$\begin{aligned} c_{11}^* u_{10,11} + \frac{1}{2} (c_{11}^* - c_{12}^*) u_{10,22} + c_{12}^* u_{20,21} + \rho \omega^2 u_{10} &= \gamma_{11}^* T_{1,1}, \\ \frac{1}{2} (c_{11}^* - c_{12}^*) u_{20,11} + c_{11}^* u_{20,22} + c_{12}^* u_{10,12} + \rho \omega^2 u_{20} &= \gamma_{11}^* T_{1,2}, \\ \left( c_{11}^* u_{10,1} n_1 + 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{10,2} n_2 + c_{12}^* u_{20,2} n_1 - \gamma_{11}^* T_1 n_1 + \frac{e_{31}^*}{H} \varphi_0 n_1 \right) \Big|_{\gamma} &= 0 \\ \left( 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{20,1} n_1 + c_{11}^* u_{20,2} n_2 + c_{12}^* u_{10,1} n_2 - \gamma_{11}^* T_1 n_2 + \frac{e_{31}^*}{H} \varphi_0 n_2 \right) \Big|_{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

### Задача 2.2

$$\begin{aligned} c_{11}^* \Delta^2 u_{30} + \rho \omega^2 \Delta u_{30} + \frac{\gamma_{11}^*}{H} \Delta T_2 - \frac{3\rho \omega^2}{H^2} u_{30} &= 0, \\ ((c_{11}^* n_1^2 + c_{12}^* n_2^2) u_{30,11} + (c_{12}^* n_1^2 + c_{11}^* n_2^2) u_{30,22} + 2(c_{12}^* - c_{11}^*) u_{30,12} n_1 n_2 + \\ + \frac{\gamma_{11}^*}{H} T_2) \Big|_{\gamma} &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial s} ((c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,11} n_1 n_2 + (c_{12}^* - c_{11}^*) u_{30,22} n_1 n_2 + 2(c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,12} n_2^2) + \right. \\ c_{11}^* u_{30,111} n_1 + (2c_{11}^* - c_{12}^*) u_{30,122} n_1 + c_{11}^* u_{30,222} n_2 + c_{12}^* u_{30,112} n_2 + \\ \left. + \rho \omega^2 (u_{30,1} n_1 + u_{30,2} n_2) + \frac{\gamma_{11}^*}{H} (T_{2,1} n_1 + T_{2,2} n_2) \right) \Big|_{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Задачи 1.1 и 2.1 суть плоские задачи анизотропной термоупругости и упругости соответственно. Следует отметить, что потенциал на электродах наводится в результате теплового воздействия именно в этих задачах. В задачи 1.2, 2.2 — задачи изгиба — потенциал не входит.

В случае, когда необходимо определить величину наведенного потенциала в этих задачах, используется дополнительное условие для тока в цепи, которое в данном случае имеет вид:

$$\int_{\Omega} \left\{ e_{31}^* (u_{10,1} - H u_{30,11}) + e_{31}^* (u_{20,2} - H u_{30,22}) - \frac{\epsilon_{33}^*}{H} \varphi_0 + g_3^* (T_1 + T_2) \right\} d\Omega = I.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда  $T_2 = 0$  и  $T_1 = 0$ .

а) В случае, когда  $T_2 = 0$ , получаем однородную задачу изгиба, и если частота колебаний не совпадает с резонансной,  $u_{30} = 0$ .

В этом случае наведенный потенциал определяется лишь задачей 2.1, подчиненной дополнительному условию

$$\int_{\Omega} \left\{ e_{31}^* (u_{10,1} + u_{20,2}) - \frac{\epsilon_{33}^*}{H} \varphi_0 + g_3^* T_1 \right\} d\Omega = I.$$

б)  $T_1 = 0$ . В этом случае задача оказывается слабосвязанной; если пренебречь вкладом изгиба в наведенный потенциал, то  $\varphi_0$  определится из задачи (7) с дополнительным условием

$$\int_{\Omega} \left\{ e_{31}^* (u_{10,1} + u_{20,2}) - \frac{\epsilon_{33}^*}{H} \varphi_0 + g_3^* T_2 \right\} d\Omega = I.$$

Пример корректной формулировки краевой задачи с применением вариационного принципа для ленточной пластины описан в [3], где приведены численные результаты расчета амплитудно-частотных характеристик.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Об анализе движений в термоэлектроупругости. // Соврем. пробл. мех. сплошной среды: Труды 4-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону. 27–28 окт. 1998 г. Т. 1.: Ростов н/Д. 1998. С. 79–83.
- [2] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
- [3] *Ватульян А.О., Ковалева В.В.* Вариационный принцип термоэлектроупругости и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента.// Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, № 1. С. 196–201.
- [4] *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М., 1961. с. 228

**Kovaleva V.V.** *On the correct formulation of boundary-value problems for thin thermopiezoelectric plates.* On the basis of the previously obtained variational principle of coupled thermopiezoelectricity the correct boundary-value problem for thin plates with account of hypotheses on the structure of physical fields was formulated. Two mainframe types of problems differing by the kind of thermal loading were considered. It was shown that formulated problems could be conventionally segregated into a problem of plane vibrations and a bending problem.

# РАСЧЕТ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ В ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ПОСТАНОВКАХ

**Колосова Е. М., Наседкин А. В., Чебаков М. И.**

*Ростовский государственный университет,  
НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.*

Рассмотрена контактная задача для двухслойного цилиндрического подшипника в плоской и пространственной постановках. Для решения задачи применен метод конечных элементов и специально разработанные программы для конечно-элементного пакета ANSYS. Проведен анализ полученных результатов для плоской и пространственной задач при различных материальных параметрах слоев подшипника. Конечно-элементные результаты сравнены с результатами, полученными численно-аналитическим методом из решения соответствующего интегрального уравнения для плоской контактной задачи.

В настоящее время современные подшипники все чаще выполняются из комбинированных или композиционных материалов, что позволяет достаточно успешно сочетать в едином триботехническом узле жесткость и прочность формообразующей основы с низким трением и высокой износостойкостью полимерного композиционного материала. Между тем, в теоретическом плане полимерные и композитные подшипники изучены в гораздо меньшей степени, чем их аналоги, выполненные из монометаллических материалов. Важнейшим этапом при проектировании и расчете подшипника является анализ прочности и жесткости его конструкции, прежде всего в рабочей контактной зоне.

В данной работе, в продолжение исследований [1], рассматривается контактное взаимодействие в двухслойном цилиндрическом подшипнике скольжения. Для построения расчетной модели здесь привлекается метод конечных элементов, который сейчас успешно используется при расчете многих реальных трибомеханических систем [2, 3]. Конечно-элементное моделирование цилиндрического подшипника может быть существенно облегчено, если использовать возможности таких конечно-элементных пакетов, как ANSYS, ABAQUS, MSC/NASTRAN, MARC и др., предоставляющих средства анализа контактных задач. Среди перечисленных, пакет ANSYS выделяется наличием развитого командного языка APDL, позволяющего создавать программные модули со входными данными в качестве обычных идентификаторов. Такие программы могут в дальнейшем использоваться для оптимизации конструкции подшипника по заданным целевым функциям, зависящим от этих входных параметров. Ниже для анализа двухслойного цилиндрического подшипника используется именно пакет ANSYS и его командный язык APDL. Применение мощных средств решения контактных задач в ANSYS позволяет построить как двумерные, так и трехмерные модели контактного взаимодействия в подшипнике, и, в результате, оценить правомерность применения двумерной модели для исследования контактной зоны подшипника в центральной его части

относительно осевой образующей. При этом двумерную модель можно верифицировать с использованием результатов численно-аналитических вычислений [1].

В рамках данной работы исследование подшипника сводится к рассмотрению контактной задачи о взаимодействии жесткого деформируемого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из двух круговых цилиндрических слоев с различными упругими постоянными.

Основание подшипника отнесем к цилиндрической системе координат  $Or\varphi z$ , в которой два цилиндрических слоя подшипника будут занимать области  $R_1 \leq r \leq R_2$  и  $R_2 \leq r \leq R_3$  в плоскости  $Or\varphi$  и сегмент  $Z = \{-L \leq z \leq L\}$  вдоль оси  $z$ . Слои жестко соединены между собой по поверхности  $r = R_2$ , граница  $r = R_3$  неподвижна, а в поверхность  $r = R_1$  усилием  $P$ , равномерно распределенным по сегменту  $Z$ , вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса  $R_4 = R_1 - h$ , расположенного вдоль оси  $z$  по области  $-d - L \leq z \leq d + L$  с центром  $O_1$ , смещенном относительно центра цилиндрического основания вниз на величину  $h \geq 0$ . Таким образом, штамп длиннее основания вдоль осевой координаты на величину  $2d$ . Однако, если  $L$  велико по сравнению с другими геометрическими параметрами, и если интересоваться распределением напряжений в центре контактной зоны относительно оси  $z$ , то можно рассматривать задачу теории упругости о плоской деформации осевого сечения  $z = 0$  подшипника. Геометрия такой системы показана на рис. 1 вместе с действующей на штамп силой  $P$  и условиями закрепления.

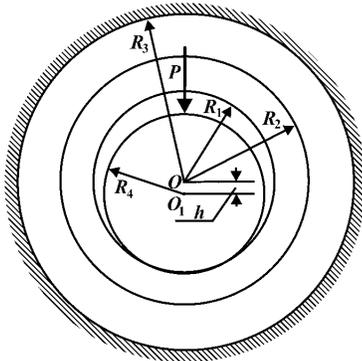


Рис. 1. Геометрия подшипника в двумерной постановке.

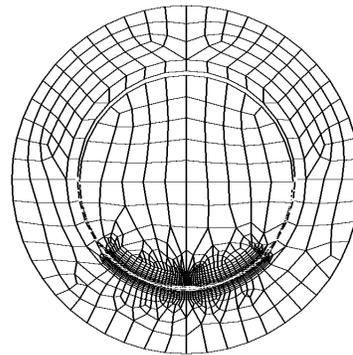


Рис. 2. "Условно свободная" двумерная конечно-элементная сетка.

Входными данными задачи являются также модули сдвига  $G_j$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_j$  материалов слоев основания ( $j = 1, 2$ ;  $j = 1$  – слой  $R_1 \leq r \leq R_2$ ;  $j = 2$  – слой  $R_2 \leq r \leq R_3$ ), а также модуль сдвига  $G_s$  и коэффициент Пуассона  $\nu_s$  штампа. Введем также обозначения, соответствующие [1]:  $\delta$  – смещение штампа в вертикальном направлении;  $G = G_2/G_1$ ;  $R_{21} = R_2/R_1$ ;  $R_{31} = R_3/R_1$ ;  $P^* = P/G_1$   $q(\varphi) = -\sigma_{rr}^{(1)}(R_1, \varphi)$  – контактные напряжения;  $q^*(\varphi) = q(\varphi)/G_1$ ;  $|\varphi| \leq \theta$  – область контакта ( $\varphi = 0$  определяет направление  $r$  вертикально вниз;  $q_0^* = q^*(0)$ ).

Для решения плоской контактной задачи в ANSYS построим конечно-элементную сетку из четырехугольных (или, в редуцированной форме, из треугольных) упругих конечных элементов PLANE82 или PLANE42 с принудительным сгуще-

нием в зоне предполагаемого контакта. Для сгущения сетки в окрестности точки первоначального контакта ( $r = R_1$ ,  $\varphi = 0$ ) выделяются по две четырехугольные области  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \theta_m$  и  $-\theta_m \leq \varphi \leq 0$  на первом слое и аналогичные области на штампе толщины  $h_s$ . Данные области разбиваются канонической сеткой на четырехугольные элементы с одинаковым разбиением противоположных сторон (mapped mesh), причем более мелко, чем остальные подобласти двухслойного основания и штампа, которые разбиваются на конечные элементы неканоническим образом по специальным алгоритмам ANSYS (free mesh), включая как четырехугольные, так и треугольные элементы. Один из вариантов получаемого в итоге разбиения показан на рис. 2, где видно сильное сгущение сетки в зоне контакта, необходимое для получения результатов с требуемой точностью. Отметим, что имея ввиду дальнейшее решение задач с трением, здесь специально не строилась половинная модель, что можно было бы сделать в силу симметрии задачи без трения относительно оси  $y$ .

Характеристиками используемого разбиения являются следующие величины:  $n_{\varphi c}$ ,  $n_{rc}$  – число элементов по окружной и по радиальным координатам соответственно в областях канонического разбиения;  $l_{\varphi c}$ ,  $l_{rc}$  – множители, характеризующие во сколько раз размеры элементов вблизи центра контакта превосходят размеры элементов на периферийных границах четырехугольных областей по окружной и по радиальным координатам;  $k_s$  – максимальные размеры элементов вблизи опорных точек при построении неканонического разбиения. Получаемое в итоге разбиение будем далее именовать "условно свободным" (free), так как большая часть расчетной области здесь разбивается неканоническим образом.

Условно свободное разбиение обеспечивает применение управляемого мелкого канонического разбиения в зоне контакта, но лишь для первого внутреннего слоя основания подшипника. Если же второй слой по радиусу является тонким, или оба слоя являются тонкими, а сила вдавливания штампа настолько велика, что контактная зона больших напряжений существенно проникает в оба слоя основания, и сама зона контакта характеризуется большими углами  $\theta_c$ , то предпочтительнее использовать канонические разбиения для всех слоев основания.

Второй тип конечно-элементной сетки базируется на канонических разбиениях всех четвертей обоих слоев основания с параметрами  $n_{\varphi c}$ ,  $n_{rcj}$  ( $j = 1, 2$ , индекс  $j$  обозначает номер слоя) для нижних четвертей и  $n_{\varphi nc}$ ,  $n_{rcj}$  – для верхних четвертей слоев основания, которые не вступают в контакт с индентером. На штампе выделяются четыре сектора искусственного слоя толщины  $h_s$  с каноническим разбиением, характеризуемым параметрами  $n_{\varphi c}$ ,  $n_{\varphi nc}$ ,  $n_{rsc}$ , где  $n_{rsc}$  – число элементов по радиальной координате. Оставшаяся часть штампа в форме круга, разделенного четырьмя радиусами, разбивается свободным образом с делением радиальных линий на  $n_{rs}$  элементов. Данное разбиение будем называть условно каноническим.

Пример условно канонического разбиения приведен на рис. 3. Как известно, канонические сетки обеспечивают обычно лучшую точность по сравнению с неканоническими, и поэтому следует ожидать, что условно каноническое разбиение будет давать лучшие результаты, чем условно свободное при сопоставимом числе конечных элементов. Однако условно канонического разбиение может потребовать большего числа элементов для толстых подшипников при одном и том же

ограничении на размеры элементов.

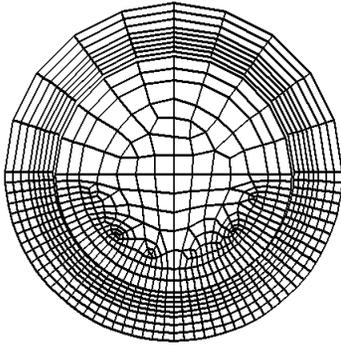


Рис. 3. "Условно каноническая" двумерная конечно-элементная сетка.

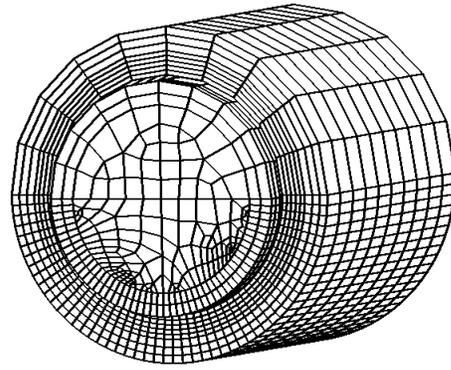


Рис. 4. Трехмерная конечно-элементная модель.

Геометрические и конечно-элементные модели подшипника в трехмерном варианте могут быть получены простой трансляцией плоских моделей вдоль оси  $z$  на отрезок  $0 \leq z \leq L$  для основания и цилиндра штампа и дополнительно на отрезок  $L \leq z \leq L + d$  для цилиндра с предварительным делением данных отрезков на  $n_L$  и  $n_d$  элементов соответственно. В результате будем иметь симметричные относительно оси  $z$  модели с плоскостью симметрии  $z = 0$  и соответствующие трехмерные условно свободные и канонические разбиения, состоящие из упругих твердотельных элементов SOLID95 (при 2D-разбиении из PLANE82) или SOLID45 (при 2D-разбиении из PLANE42). Пример конечно-элементной сетки для пространственного случая, полученной трансляцией двумерной сетки из рис. 3, показан на рис. 4.

Для моделирования контактного взаимодействия штампа и основания границы контактирующих поверхностей покрываются контактными парами элементов CONTA175 (на границе основания) и TARGE169 (на границе штампа) для плоской задачи и парами CONTA174 и TARGE170 для пространственного случая.

Для двумерной задачи результаты конечно-элементных вычислений можно сравнить с численно-аналитическими результатами [1]. Следует отметить, что в [1] рассмотрены экстремальные случаи достаточно больших усилий  $P^*$ , малых толщин основания и зазора  $h$ , что повышает ценность тестирования, но требует использования очень мелких разбиений в зонах контакта. Основные результаты тестирования собраны в таблицах 1 и 2. Номера линий в этих таблицах соответствуют случаям из таблиц с такими же номерами из [1]. Нижние индексы "f" обозначают значения для условно свободных разбиений, а индексы "m" – для условно канонических. При расчетах использовались элементы сирендипова типа PLANE82 и следующие параметры конечно-элементных сеток:  $\theta_m = 88.2$  (град),  $h_s = 0.85R_4$ ,  $n_{\varphi c} = 120$ ,  $n_{rc} = 5$ ,  $l_{\varphi c} = 5$ ,  $l_{rc} = 4$ ,  $k_s = R_1/15$  – для условно свободного разбиения;  $n_{\varphi c} = 120$ ,  $n_{rc1} = 5$ ,  $n_{rc2} = 3$ ,  $n_{\varphi nc} = 10$ ,  $h_s = (R_1 - h)/5$ ,  $n_{rsc} = 2$ ,  $n_{rs} = 5$  – для условно канонического разбиения. При этом в случаях строк 12 и 14 таблицы 2 для условно свободного разбиения (числа помечены "звездочкой") использовалось значение  $k_s = R_1/20$ , обеспечивающее более мелкие размеры элементов для

$No$ [1]	$G$	$P^*$	$\delta$ [1]	$\delta_f$	$\delta_m$	$q_0^*$ [1]	$q_{0f}^*$	$q_{0m}^*$
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, R_{21} = 1.025, R_{31} = 1.05, h = 0.05$								
4	1	1.0	0.0159	0.0147	0.0159	0.112	0.112	0.111
8	1	5.0	0.0565	0.0508	0.0564	0.397	0.388	0.393
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, R_{21} = 1.025, R_{31} = 1.05, h = 0.01$								
10	1	1.0	0.0113	0.0103	0.0113	0.0795	0.0783	0.0786
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 10, R_{21} = 1.05, R_{31} = 1.1, h = 0.01$								
12	1	1.0	0.0205	0.0187*	0.0205	0.0725	0.0690*	0.0723
14	5	1.0	0.0928	0.0879*	0.0929	0.328	0.325*	0.327

Таблица 1.

$No$ [1]	$G$	$P^* \cdot 10^3$	$\delta \cdot 10^3$ [1]	$\delta_f \cdot 10^3$	$\delta_m \cdot 10^3$	$q_0^*$ [1]	$q_{0f}^*$	$q_{0m}^*$
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3, R_1 = 0.1, R_{21} = 1.2, R_{31} = 1.4, h = 0.00001$								
7	0.2	0.254	0.05	0.0483	0.0497	0.00170	0.00169	0.00169
8	0.5	0.474	0.05	0.0493	0.0499	0.00319	0.00322	0.00317
9	1.0	0.689	0.05	0.0501	0.0496	0.00464	0.00477	0.00460
10	2.0	0.901	0.05	0.0483	0.0496	0.00606	0.00601	0.00602
11	5.0	1.110	0.05	0.0528	0.0496	0.00747	0.00810	0.00743

Таблица 2.

второго слоя. Во всех расчетах были фиксированы следующие входные величины (в системе Си):  $G_1 = 1 \cdot 10^{10}$ ;  $E_s = 1000E_2$ ;  $E_2 = 2(1 + \nu_2)G_2$ ;  $\nu_s = 0.49$ .

Из табл. 1 и 2 видно, что применение мелкого условно канонического разбиения позволяет получить результаты, практически идентичные численно-аналитическим из [1] (погрешности порядка 1 %). При использовании условно свободного разбиения в большинстве случаев погрешность увеличивается, но не превосходит 11 % для смещений штампа  $\delta$  и 9 % – для контактных напряжений  $q_0^*$ .

В последней части работы проведем сравнение решений плоских и пространственных контактных задач для цилиндрического подшипника. При расчетах трехмерных задач использовались физические данные для штампа, указанные ранее;  $d = 0.1$ ; данные из табл. 3 и следующие геометрические и физические величины:  $P^* = 0.001$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $R_1 = 0.5$ ,  $R_{21} = 1.2$ ,  $R_{31} = 1.4$ ,  $h = 0.02$ . Из-за специфики решателей ANSYS (версии 10.0) для плоских задач оказалось эффективным использование четырехугольных плоских конечных элементов PLANE82 сирендинова типа с промежуточными узлами, а для трехмерных задач – пространственных элементов SOLID45 без промежуточных узлов. В связи с этим, для корректного сопоставления результатов расчетов двумерных и трехмерных задач для пространственных задач с элементами SOLID45 в качестве базовых выбирались двумерные конечно-элементные сетки из элементов PLANE42 без промежуточных узлов с управляющими параметрами, обеспечивающими приблизительно в два раза более мелкое разбиение, чем для плоской задачи с конечно-элементными сетками из элементов PLANE82. Именно, при расчетах, соответствующих табл. 3, для условно канонического разбиения в плоской задаче (тип

No	тип задачи	$G$	$L$	$\delta_0 \cdot 10^3$	$\delta_L \cdot 10^3$	$q_{00}^* \cdot 10^2$	$q_{0L}^* \cdot 10^2$
1	$2D, m$	2	—	0.318	—	0.959	—
2	$2D, f$	2	—	0.318	—	0.960	—
3	$3D, m$	2	2.5	0.304	0.305	0.897	0.820
4	$3D, m$	2	5	0.302	0.306	0.885	0.811
5	$3D, m$	2	10	0.295	0.333	0.866	0.910
6	$3D, m$	2	15	0.295	0.344	0.858	0.943
7	$3D, m$	2	20	0.294	0.410	0.850	1.092
8	$3D, f$	2	5	0.272	0.273	1.157	1.138
9	$2D, m$	1	—	0.376	—	0.925	—
10	$2D, f$	1	—	0.374	—	0.920	—
11	$3D, m$	1	5	0.356	0.361	0.846	0.775
12	$2D, m$	0.5	—	0.475	—	0.856	—
13	$2D, f$	0.5	—	0.476	—	0.857	—
14	$3D, m$	0.5	5	0.456	0.461	0.788	0.733

Таблица 3.

задачи —  $2D, m$  в табл. 3) были взяты параметры  $n_{\varphi c} = 25, n_{rc1} = 5, n_{rc2} = 3, n_{\varphi nc} = 5, h_s = (R_1 - h)/5, n_{rsc} = 2, n_{rs} = 5$ ; для условно свободного разбиения в плоской задаче ( $2D, f$ ) —  $\theta_m = 88.2$  (град),  $h_s = 0.85R_4, n_{\varphi c} = 25, n_{rc} = 5, l_{\varphi c} = 1, l_{rc} = 1, k_s = R_1/8$ ; для условно канонического разбиения в пространственной задаче ( $3D, m$ ) —  $n_{\varphi c} = 50, n_{rc1} = 10, n_{rc2} = 6, n_{\varphi nc} = 10, h_s = (R_1 - h)/5, n_{rsc} = 4, n_{rs} = 10, n_L = 20, n_d = 2$ ; и для условно свободного разбиения в пространственной задаче ( $3D, f$ ) —  $\theta_m = 88.2$  (град),  $h_s = 0.85R_4, n_{\varphi c} = 50, n_{rc} = 10, l_{\varphi c} = 1, l_{rc} = 1, k_s = R_1/10, n_L = 20, n_d = 2$ . Здесь  $n_L$  — число элементов по оси  $z$  на отрезке  $0 \leq z \leq L$  для основания и штампа,  $n_d$  — дополнительное число элементов по оси  $z$  на отрезке  $L \leq z \leq L + d$  для штампа. В табл. 3 введены также обозначения:  $\delta_0 = \delta$  при  $z = 0$ ;  $\delta_L = \delta$  при  $z = L$ ;  $q_{00}^* = q_0^*$  при  $z = 0$ ;  $q_{0L}^* = q_0^*$  при  $z = L$ .

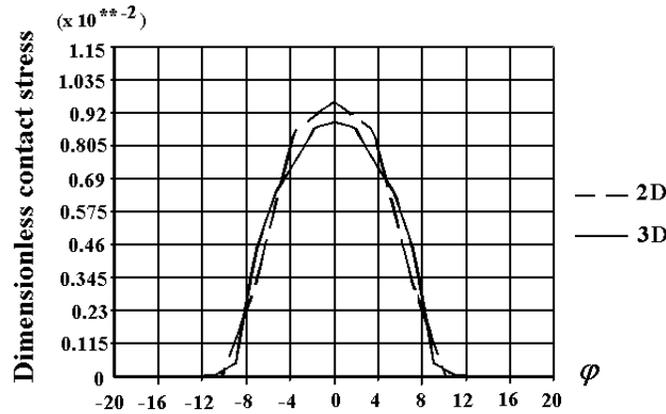


Рис. 5. Зависимости контактных напряжений  $q_0^*$  при  $z = 0$  от угла  $\varphi$  для пространственной и плоской задач.

Как видно из табл. 3, условно каноническое разбиение дает лучшие и более устойчивые результаты по сравнению с условно свободным. Для случаев условно канонических разбиений как смещения штампа, так и контактные напряжения в пространственной задаче при  $z = 0$  оказываются несколько меньшими, чем в плоской задаче. Для большей наглядности на рис. 5 приведены графики зависимости контактных напряжений  $q^*(\varphi)$  при  $z = 0$  от угла  $\varphi$  для строк 1 и 4 из табл. 3. По оси  $z$  смещения возрастают при приближении к торцу, а напряжения убывают при средних значениях  $L$  и возрастают при больших  $L$ . Эти явления можно объяснить кромочными эффектами вблизи торцевых зон, а также более существенным влиянием изгибных напряжений для очень длинных по оси  $z$  подшипников (последние, правда, представляет в большей степени лишь теоретический интерес). С ростом ширины подшипника  $2L$  результаты для трехмерных задач в среднем по ширине оказываются более близкими к результатам решения плоских задач, что совершенно естественно. Однако и для средних значений  $L$  решения трехмерных задач для различных модулей упругости слоев основания достаточно близки к решениям плоских задач. Таким образом, исследования плоских задач в силу своей значительно меньшей трудоемкости могут оказаться полезными для предварительных прочностных расчетов цилиндрических подшипников скольжения, и в частности, для проведения сложных и машинно-затратных оптимизационных расчетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-08-01257).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чебаков М.И. Контактная задача для двухслойного цилиндрического основания // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. X Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: изд-во "ЦВВР 2006. С. 280–284.
- [2] Колесников В.И. Разработка численных и аналитических методов расчета контактного взаимодействия трибомеханических систем с учетом неоднородностей и дефектов применительно к паре колесо-рельс // IX Всеросс. съезд по теоретич. и прикл. механике. Аннотации докладов. Т. III (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006). Нижний Новгород: изд-во Нижегородск. госун-та им. Н.И.Лобачевского, 2006. С. 114.
- [3] Сакало В.И., Косов В.С. Контактные задачи железнодорожного транспорта. М.: Машиностроение, 2004. 160 с.

**Kolosova E.M., Nasedkin A.V., Chebakov M.I.** *Analysis of the contact interaction for the cylindrical bearing in the plane and three-dimensional statements.* The contact problem for two-layer cylindrical bearing in the plane and three-dimensional statements is considered. For solving this problem the finite element method and specially developed programs for finite element package ANSYS are applied. The analysis of numerical results is carried out for different material parameters and geometrical characteristics of the bearing. Finite element results are compared with the numerical - analytical results received from the solution of the corresponding integral equation for the plane contact problem.

# КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ДВУХСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМ ПЛОСКИМ ДНОМ

**Кононов Ю. Н.\* , Татаренко Е. А.\*\***

\* *Донецкий национальный университет, Украина*

\*\* *Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры, г. Макеевка, Украина*

В работах [1] и [2] исследованы собственные колебания двухслойной жидкости, разделенной соответственно упругой мембраной и пластинкой с абсолютно жестким дном. Задача о влиянии упругости дна на собственные частоты колебаний однородной и многослойной жидкости впервые была рассмотрена в работах [3] и [4]. В настоящем сообщении построено аналитическое решение задачи гидроупругости, описывающей взаимосвязанные свободные колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с плоским упругим дном и мембран, расположенных на свободной и внутренней поверхностях жидкости. Получено условие устойчивости совместных колебаний мембран, пластинки и жидкости.

Рассмотрим прямоугольный канал с плоским упругим дном ширины  $b$ , заполненный двухслойной идеальной и несжимаемой жидкостью с плотностями  $\rho_n$  до глубин  $h_n$  ( $n = 1, 2$ ). На свободной поверхности верхней жидкости ( $n = 1$ ) и на поверхности раздела двухслойной жидкости равномерно натянуты гибкие мембраны с растягивающими усилиями в срединной поверхности  $T_n$ , массовой плотностью материала  $\rho_{0n}$ , толщиной  $\delta_{0n}$ . Края мембран жестко закреплены на стенках канала. Дно представляется в виде плоской упругой пластинки, жестко заземленной по краю. Колебания жидкостей, мембран и пластинки будем рассматривать в плоской постановке. Систему координат  $Oxyz$ , расположим так, чтобы ось  $Ox$  была направлена вдоль канала, а ось  $Oz$  совпадала с осью симметрии его поперечного сечения и направлена против ускорения силы тяжести. Начало системы координат  $Oxyz$  поместим в плоскости внутренней мембраны.

Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жидкостей считать потенциальными. При сделанных предположениях колебания мембран и пластинки описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho_{0n} \delta_{0n} \frac{\partial^2 w_n^*}{\partial t^2} - T_n \frac{\partial^2 w_n^*}{\partial y^2} &= P_n - P_{n-1}, \\ \rho_{03} \delta_{03} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^2} + D_3 \frac{\partial^4 w_3^*}{\partial y^4} - T_3 \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial y^2} &= p_a - P_2 \end{aligned} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$w_n^* \left( t, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad w_3^* \left( t, \pm \frac{b}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial w_3^*}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (2)$$

Поперечная нагрузка  $P_n(t, y)$ , которую испытывают мембраны и пластинка со стороны жидкости, может быть определена с помощью линейризованного интеграла Лагранжа – Коши по формуле

$$P_n(t, y) = -\rho_n \left( \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} + gz + \chi_n(t) \right) \Big|_{z=z_n}. \quad (3)$$

Здесь  $z = w_n^* + z_n$  для мембран и  $z = w_3^* + z_3$  — для пластинки;  $\Phi_n(t, x, y)$  — потенциал смещений  $n$ -ой жидкости;  $w_n^*(y, t)$  — нормальный прогиб  $n$ -ой мембраны;  $w_3^*(y, t)$  — нормальный прогиб дна;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\chi_n$  — произвольная функция времени;  $z_1 = h_1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $P_0 = P_3 = p_a$ .

Потенциал смещений жидкости  $\Phi_n(t, y, z)$  определяется из решения краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = 0, \quad (y, z) \in Q_n, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \Big|_{y=\pm b/2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = w_n^*, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = w_3^*, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \int_{-b/2}^{b/2} w_n^*(t, y) dy = \int_{-b/2}^{b/2} w_3^*(t, y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $Q_n$  — область поперечного сечения канала, занятая  $n$ -ой жидкостью.

Представим прогиб мембран и пластинки в виде суммы статического и динамического прогибов

$$w_n^* = w_n^0 + w_n, \quad w_3^* = w_3^0 + w_3. \quad (5)$$

Для исследования собственных колебаний механической системы запишем неизвестные динамические функции в виде

$$\Phi_n = \phi_n(y, z) e^{i\omega t}, \quad w_n = W_n(y) e^{i\omega t}, \quad \chi_n = \hat{C}_n e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Подставим (5)–(6) в соотношения (1)–(4) и перейдем к безразмерным величинам в динамической задаче, выбрав в качестве характерного линейного размера ширину канала  $b$ . В результате получим граничную задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} W_n'' - \gamma_n^2 W_n = \lambda^2 d_n \left( \phi_{n-1}(y, z_n) \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} - \phi_n(y, z_n) \right) + d_n \left( \frac{c_n}{g} - \frac{c_{n-1}}{g} \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \right) \\ W_3^{IV} - K_3 W_3'' - \gamma_3^2 W_3 = d_3 \left( \frac{c_2}{g} - \lambda^2 \phi_2(y, -h_2) \right), \\ W_3 \left( \pm \frac{1}{2} \right) = W_3' \left( \pm \frac{1}{2} \right) = 0, \quad W_n \left( \pm \frac{1}{2} \right) = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_n(y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} W_3(y) dy = i_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda^2 = \frac{\omega^2 b}{g}, \quad a_n = \frac{g \rho_{0n} \delta_{0n} b}{T_n}, \quad d_n = \frac{\rho_n g b^2}{T_n}, \quad \gamma_n^2 = \lambda^2 a_n - d_n \left( 1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \right), \\ K_3 = \frac{T_3 b^2}{D_3}, \quad d_3 = \frac{\rho_2 g b^4}{D_3}, \quad a_3 = \frac{g \rho_{03} \delta_{03} b^3}{D_3}, \quad \gamma_3^2 = \lambda^2 a_3 + d_3. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что выполняется неравенство

$$\lambda^2 a_n > d_n \left( 1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \right).$$

После применения метода разделения переменных составляющие потенциала смещений жидкости  $\phi_n$  можно представить в виде

$$\phi_n = i_0 z + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_{nk} \operatorname{ch} \pi k (z - z_n) - i_{n+1k} \operatorname{ch} \pi k (z - z_n)}{\pi k \operatorname{sh} \pi k h_n} Y_k. \quad (8)$$

Здесь

$$Y_k = \cos \pi k \left( y + \frac{1}{2} \right), \quad i_0 = \int_{-1/2}^{1/2} W_n dy, \quad i_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} W_n Y_k dy.$$

С учетом (8) исходную задачу (7) сведем к краевой задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения относительно составляющей прогиба мембран и пластинки

$$\begin{aligned} W_1'' - \gamma_1^2 W_1 &= \frac{c_1 d_1}{g} - d_1 \lambda^2 i_0 h_1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} Y_k, \quad W_2'' - \gamma_2^2 W_2 = \frac{d_2 (c_2 - c_1 \rho_{12})}{g} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} Y_k, \quad W_3^{IV} - K_3 W_3'' - \gamma_3^2 W_3 = \frac{c_2 d_3}{g} + d_3 \lambda^2 i_0 h_2 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} Y_k, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} B_{1k} &= \frac{2\lambda^2 d_1}{\pi k} (u_{1k} i_{1k} - b_{1k} i_{2k}), \quad B_{2k} = \frac{2\lambda^2 d_2}{\pi k} (i_{1k} \rho_{12} b_{1k} - u_{2k} i_{2k} + b_{2k} i_{3k}), \quad B_{3k} = \\ &= \frac{2\lambda^2 d_3}{\pi k} (i_{2k} b_{2k} - u_{3k} i_{3k}), \quad u_{nk} = \operatorname{cth} \pi k h_n + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \operatorname{cth} \pi k h_{n-1}, \quad b_{nk} = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi k h_n}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \end{aligned}$$

Представив частные решения уравнений (9) в форме, отвечающей их правым частям

$$W_n^* = W_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{nk} Y_k,$$

запишем общее решение задачи (9) в виде

$$W_n = A_n \operatorname{sh} \gamma_n y + B_n \operatorname{ch} \gamma_n y + W_n^*(y), \quad (10)$$

$$W_3 = A_3 \operatorname{ch} p_2 y + B_3 \operatorname{sh} p_2 y + C_3 \cos p_1 y + D_3 \sin p_1 y + W_n^*(y).$$

Здесь  $p_{1,2} = \sqrt{\frac{K_3^2 + 4\gamma_3^2 \pm K_3}{2}}$ , а  $A_n, B_n, A_3, B_3, C_3, D_3$  — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий в (7).

Частотное уравнение собственных колебаний рассматриваемой механической системы для несимметричных колебаний имеет вид

$$\|a_{ij}\|_{i,j=1..3} = 0, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{\delta_{jk}^i}{S_{jk}}, \quad (11)$$

$$S_{jk} = \gamma_j^2 + \beta_k^2, \quad S_{3k} = \beta_k^4 + K_3\beta_k^2 - \gamma_3^2,$$

где  $\beta_k = \pi(2k - 1)$ ,  $\delta_{ji}$  — миноры соответствующих элементов определителя  $\Delta_k$ .

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - M_{1k}u_{1k} & M_{1k}b_{1k} & 0 \\ M_{2k}b_{1k}\rho_{12} & 1 - M_{2k}u_{2k} & M_{2k}b_{2k} \\ 0 & M_{3k}b_{2k} & 1 - M_{3k}u_{3k} \end{vmatrix}$$

$$M_{nk} = \frac{\lambda^2 d_n}{\pi k (\gamma_n^2 + \pi^2 k^2)}, \quad M_{3k} = \frac{\lambda^2 d_3}{\pi k (\pi^4 k^4 + K_3 \pi^2 k^2 - \gamma_3^2)},$$

Необходимым условием устойчивости совместных колебаний мембран, днища и жидкости является положительность всех корней частотного уравнения. Если ограничиться одним слагаемым в рядах (11) и оставить два слагаемых, например в  $a_{22}$ , то условия устойчивости принимают вид

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{\beta_1^2}{gb^2} T_2, \quad \rho_2 < \beta_1^4 \frac{D_3}{gb^4} + \beta_1^2 \frac{T_3}{gb^2}$$

Таким образом, полученные условия устойчивости не зависят от натяжения верхней мембраны, инерционности мембран и пластинки, а также глубин заполнения жидкостей.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. 2003. Том 6. № 4. С. 44–52.
- [2] Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика. 2002. Вып. 36. С. 170–176.
- [3] Нго Зу́й Кан. О движении несмешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим дном // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 48–54.
- [4] Нго Зу́й Кан. О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским упругим дном // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 143–154.

**Kononov Y.N., Tatarenko E.A.** *Oscillations of the elastic plates parting a multilayered fluid in the rectangular channel with an elastic bottom.* In the present message the analytical decision of a problem of the hydroelasticity describing interconnected free oscillations of a two-layer ideal incompressible liquid in the rectangular channel with a flat elastic bottom and membranes, the located on free and internal surfaces of a liquid is constructed. The condition of stability of joint oscillations of membranes and liquids is received.

# К ВОПРОСУ О СФЕРАХ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

**Короткин В. И. \*, Онишков Н. П.\*\***

*\* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

*\*\* Ростовский государственный строительный университет*

Рассмотрены основные критерии работоспособности зубчатых передач. Намечены пути дальнейшего исследования глубинной контактной прочности передач Новикова. Приведены некоторые сферы применения передач Новикова и эвольвентных в промышленности.

Нагрузочная способность зубчатой передачи определяется комплексом показателей, куда входят: контактная прочность рабочих поверхностей зубьев, глубинная контактная прочность, изломная прочность зубьев, задиры- и износостойкость и т.д. В соответствии со стандартами ISO,AGMA и др. всего классифицируется до 16 видов отказа, большинство из которых характеризуется своим специфическим механизмом накопления усталостных повреждений. Все процессы исчерпания работоспособности протекают одновременно, а лидирующий из них обусловлен конкретным сочетанием геометрических параметров передачи, технологией её изготовления и условиями эксплуатации.

Ниже кратко рассматриваются два типа наиболее распространённых в промышленности передач.

## **Передачи Новикова.**

Разработанная М.Л. Новиковым система зацепления, по замыслу, была ориентирована на повышение поверхностной контактной прочности. И эта задача успешно решена. Передачи, созданные на базе зацепления Новикова, как правило, существенно превосходят по данному показателю эквивалентные им передачи традиционного эвольвентного зацепления при любой твёрдости поверхностей зубьев сравниваемых аналогов. Это дало возможность осуществить множество крупных промышленных внедрений данных передач, прежде всего в термоулучшенном исполнении, как у нас, так и за рубежом.

Однако улучшением только одного из показателей проблема повышения нагрузочной способности передачи (любой системы зацепления) не всегда может быть решена. Так, высокая контактная прочность поверхностно упрочнённых передач Новикова в ряде случаев не могла быть реализована из-за недостаточной прочности зубьев по изгибу, уступавшей (как, например, при исходных контурах ОЛЗ или ДЛЗ по ГОСТ 15023-76) таковой у эвольвентных. В ходе последующих исследований данный недостаток, присущий некоторым ранним конструктивным решениям, был преодолен созданием "ступенчатых" исходных контуров (И.К.) со взаимным смещением участков активного профиля головок и ножек зубьев (Студера, РГУ-5, по ГОСТ 30224-96 и др.). Благодаря этому и оптимизации ряда

параметров удалось достичь превосходства над эвольвентными аналогами как в термоулучшенном, так и в поверхностно-упрочненном исполнении.

Замечено, что причинами отказа ХТО-упрочненных передач Новикова могут быть случаи изломов зубьев, в т.ч. как следствий развития глубинных контактных трещин. Поверхностных контактных повреждений при расчетных контактных давлениях на уровне 2000 МПа при испытаниях передач с современными И.К. (РГУ-5 и по ГОСТ 30224-96) отмечено не было. В связи с этим возникают противоречащие друг другу требования. С одной стороны, термическое и химико-термическое упрочнение стали ведет к повышению ее контактной прочности и износостойкости, с другой — к снижению пластических свойств материала, что негативно сказывается на изломной прочности зубьев. Для достижения максимальной нагрузочной способности по критерию глубинной контактной прочности (ГКП) требуется глубина упрочнения, превышающая оптимальную по критерию излома. Это противоречие присуще и эвольвентным передачам, но для новиковских, у которых глубина залегания максимальных критериальных напряжений больше, оно проявляется отчетливее.

Переход к выпуску поверхностно-упрочненных передач потребовал разработки нормативов по выбору параметров упрочненного слоя, поскольку существующие для эвольвентных передач нормативы не могут быть распространены на передачи Новикова.

По существующим нормативам рекомендуется при ХТО назначать отношение  $\psi$  эффективной толщины упрочненного слоя к модулю порядка 0.15...0.20. Предварительные исследования авторов показывают, что увеличенное по сравнению с эвольвентными зубьями сечение основания зуба передач с указанными выше И.К. позволяет назначать  $\psi$  в интервале 0.20...0.24 (эффективная твердость 550 HV) при цементации (Ц), нитроцементации (Нц) и поверхностной закалке (ПЗ). Азотирование (А) эффективно практически при всех случаях технологически достижимой общей толщины слоя, характерной для данного вида ХТО (обычно это не более 0.5...0.6 мм).

Принимая во внимание отсутствие в настоящее время отработанной технологии финишной обработки зубьев передач Новикова, следует ориентироваться на серийное производство поверхностно упрочненных зубчатых колёс средних качеств (8...10 степеней точности), при проектировании которых можно в первом приближении рекомендовать следующие виды термической или химико-термической обработки, на чём целесообразно сосредоточить дальнейшие исследования:

- для модулей до 4.5мм — А с предварительным улучшением и Нц при допустимом расчетном давлении (на характерной для ГКП условной базе —  $10^7$  циклов нагружения)  $p_0 = 1700...1900$  МПа (здесь и далее нижний уровень интервала — для более крупных модулей);
- для модулей от 4.5мм до 6.3мм — Ц, Нц при  $p_0 = 1600...1800$ ;
- для модулей от 6.3мм до 10мм — Ц, ПЗ с глубинного нагрева при  $p_0 = 1400...1600$  МПа;
- для модулей свыше 10мм — А с предварительным улучшением, ПЗ при  $p_0$  не свыше 1200 МПа.

К сказанному следует сделать две оговорки.

1. Для крупномодульных передач, у которых глубина залегания критериальных (по показателю ГКП) напряжений, как правило, превышает технологически достижимую толщину упрочненного слоя, уровень нагрузочной способности будет определяться прочностью сердцевины, в связи с чем толщина слоя может быть минимальной, достаточной лишь для обеспечения работоспособности передачи по износостойкости и поверхностной контактной прочности.

2. Твердость сердцевины зуба не должна быть ниже 30HRC (Ц) и 35HRC (Нц).

#### **Эвольвентные передачи.**

Теоретические исследования и практика эксплуатации показали, что превалирующим для эвольвентных передач является отказ по поверхностной контактной прочности.

Согласно ГОСТ 21354-87, уровень предельных базовых поверхностных контактных напряжений для легированных сталей при поверхностной твердости 650...700 HV может достигать 1200...1350 МПа. Переход к допускаемым напряжениям для  $10^7$  циклов составляет примерно 1500 МПа. Однако практика показала, что данного уровня эвольвентные передачи не достигают даже при высоких качествах, начиная питтинговать ([1], [2]). Заметный прогрессирующий питтинг (наработка  $10^7$  циклов) отмечался и в испытаниях на ОАО "Редуктор" (г. Ижевск) высокотвердых передач средних качеств уже при 1300 МПа.

Как показывает практика эксплуатации машин различного назначения, областью рационального использования передач Новикова являются редукторы общемашиностроительного применения, энергонасыщенные приводы горнодобывающего, грузоподъемного, нефтепромыслового оборудования, работающего в тяжёлых нестационарных режимах, где они в ряде случаев успешно конкурируют с точными шлифованными (а следовательно, значительно более дорогими) эвольвентными передачами, а также высокоскоростные установки судовых турбин, компрессоров и др. Имеются сведения о применении этих передач в ответственных приводах отечественных и зарубежных вертолётов.

Сферой применения эвольвентных передач по-прежнему остаются передачи ресурсные (часть приводов в авиации), кинематические (приборостроение и т.п.), а также автомобилестроение, где технология их производства десятилетиями отработывалась до высокого качества, приводы с конструктивными ограничениями по осевым нагрузкам (напр., тракторостроение) и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Yoshida A. a.o.* Bull. JSME. 1986. № 247. P. 228–234

[2] *Шапочкин В.И. и др.* МиТОМ. 1987. № 5. С. 12

**Korotkin V.I., Onishkov N.P.** *To issue of application fields of the different types of gearings.* The basic criteria of serviceability for gearings are considered. The ways of further research of depth contact fatigue endurance are stated for Novikov gearings. There are some application fields of Novikov and involute gearings in industry.

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВЕННОГО РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Костандов Ю. А., Шиповский И. Е.**

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь,  
Украина*

Предложены энергетическая модель множественного разрушения твердого тела и двухуровневый критерий разрушения, учитывающие возрастание в материале плотности энергии (или поврежденности) при его динамическом нагружении. В рамках модели упругопластического тела численным методом получены решения трехмерной задачи о динамическом разрушении горной породы при ее резании. Рассмотрено влияние используемого критерия разрушения на развитие процесса разрушения и зависимость от времени силы резания.

Решение задач о механическом разрушении материала требует дополнения системы уравнений, описывающих его напряженно-деформированное состояние (НДС), условием перехода материала в разрушенное состояние, то есть критерием разрушения. Выбор этого критерия, с одной стороны, зависит, как правило, от особенностей конкретной рассматриваемой задачи, а с другой стороны, существенным образом определяет результат ее решения.

К наиболее известным в настоящее время критериям разрушения можно отнести энергетический критерий Гриффитса, силовые критерии Дж. Ирвина и Г.И. Баренблатта, деформационные критерии Леонова-Панасюка-Дагдейла [1], а также критерий Черепанова-Райса [2]. При выполнении этих критериев материал мгновенно переходит в разрушенное состояние.

В связи с установлением ярко выраженной зависимости протекания процесса разрушения от временных характеристик нагружения были разработаны иные теории и критерии длительной прочности. К таковым относятся теория длительной прочности А.А. Ильюшина, флуктуационно — временная теория прочности С.Н. Журкова [3], критерии В.В. Новожилова, Ю.Н. Работнова и др. Этот подход к проблеме разрушения состоит в изучении различных непрерывных распределений дефектов посредством введения функций, определяющих степень поврежденности среды. Указанные функции добавляются к традиционным характеристикам сплошной среды [1]. Учет накопления в материале малых рассеянных повреждений (микротрещин, субмикротрещин) приводит к введению соответствующих критериев разрушения: предельного уровня диссипации, предельной концентрации повреждений и др. [4].

В настоящей работе предлагаются феноменологическая модель динамического разрушения твердого тела и двухуровневый критерий множественного разрушения, учитывающий рост поврежденности материала при его нагружении.

Считается, что твердое тело состоит из определенных структурных элементов (блоков, зерен, кристаллов, макромолекул и т.д.). Эти элементы содержат множественные рассеянные дефекты, которыми могут быть межзеренные повреждения, микротрещины, микропоры и т.п.

Микроразрушения образуются и развиваются в структурном элементе в результате действия в нем растягивающих напряжений. При этом увеличение поврежденности означает не только рост количества повреждений, то есть образование новых повреждений (микроразрушений различных типов), но и увеличение размеров уже существующих повреждений. Однако рост поврежденности, определенной таким образом, происходит не при любом значении растягивающего напряжения  $\sigma_{11}$  с соответствующей этому значению вероятностью (что соответствует, например, кинетической теории прочности [3]), а только при условии достижения им определенного порога  $\sigma_r$ :

$$\sigma_{11} = \sigma_r \quad (1)$$

Очевидно, что увеличение поврежденности элемента материала требует поступления в этот элемент соответствующей энергии. Определим эту энергию из следующих рассуждений.

В исследовании [5] напряженно-деформированного состояния (НДС) и энергетических потоков в трехмерной пластине с трещиной при импульсном растяжении показано, что вблизи трещины нарушается однородность вдоль волновых фронтов НДС и плотности полной энергии, а также баланса между кинетической и потенциальной энергиями. В окрестности трещины появятся области, в которых наблюдается понижение и повышение значений энергии по сравнению со значениями энергии в аналогичном образце без трещины при идентичных условиях нагружения. То есть образуются зона разгрузки (ЗР) и зона повышенных напряжений (ЗПН). При этом величина энергии  $dW$ , поступившей в ЗПН за время  $d\tau$ , пропорциональна  $\sigma_{11}^2(\tau)$ .

Поэтому будем считать, что к моменту времени  $t$  в отдельный элемент материала поступит необходимая для роста его поврежденности энергия  $W$ :

$$W = W_0 \int_0^t \sigma_{11}^2(\tau) d\tau \quad (2)$$

где  $W_0$  — параметр, определяемый свойствами материала и амплитудно-временными характеристиками процесса нагружения.

Полагая, что увеличение поврежденности материала полностью определяется этой энергией, определим поврежденность элемента материала  $N(t)$  к моменту времени  $t$  как

$$N(t) = N_0 \int_0^t \sigma_{11}^2(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $N_0$  — параметр, также определяемый свойствами материала и амплитудно-временными характеристиками процесса нагружения.

Будем считать отдельный структурный элемент разрушенным в момент времени  $t$ , когда степень его поврежденности  $N(t)$  достигнет определенного уровня  $N_c$ :

$$N(t) = N_c \quad (4)$$

что адекватно условию

$$W(t) = W_c \quad (5)$$

Отметим, что в отличие от величин  $N_0$  и  $W_0$  величины  $N_c$  и  $W_c$  являются константами материала.

Таким образом, уравнения (1), (2) и (5), или (1), (3) и (4) определяют двухуровневый критерий множественного разрушения. Следует отметить, что, во-первых,

предложенный критерий разрушения является по сути энергетическим, хотя может трактоваться как критерий накопления поврежденности, и, во-вторых, из него следует существенная зависимость развития процесса разрушения от истории нагружения, то есть амплитудно-временных параметров импульса нагрузки.

Для изучения влияния используемого критерия разрушения на формирование в образцах материалов НДС и развитие в них разрушения проведено численным методом исследование процессов образования и развития во времени и пространстве зон разрушения в образцах материала при динамическом воздействии.

Была рассмотрена задача о воздействии абсолютно жесткого резца, движущегося с заданной постоянной скоростью  $V_r$ , на образец в виде прямоугольного параллелепипеда, Ширина площадки взаимодействия в начальный момент времени равна 0,6 ширины образца. Образец упирается противоположной стороной в неподвижную абсолютно жёсткую преграду. Материал образца представлял собой известняк с плотностью  $\rho_0 = 1,8 \text{ г/см}^3$ , модулем сдвига  $\mu_0 = 24,6 \text{ ГПа}$ , скоростью звука  $c_0 = 301 \text{ м/с}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,24 \text{ ГПа}$  и пределом текучести  $\sigma_t = 1,5 \text{ МПа}$ .

Для описания поведения нагружаемого образца использовалась модель сжимаемого изотропного упругопластического тела [6]. Выбор модели определён требованием адекватности описания физики процесса с учетом того, что модель должна допускать эффективную реализацию на ЭВМ средней мощности.

Численные расчеты НДС и развития разрушения в образцах проводилось по методике, базирующейся на модифицированном методе конечных элементов МКЭ [7].

Были проведены расчеты развития разрушения в образце при использовании двух критериев разрушения: критерия наибольших растягивающих напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_c$  и критерия, предложенного в данной работе.

Результат расчета развития разрушения при использовании критерия наибольших растягивающих напряжений и  $\sigma_c = 0,15 \text{ МПа}$  приведен на рис. 1.

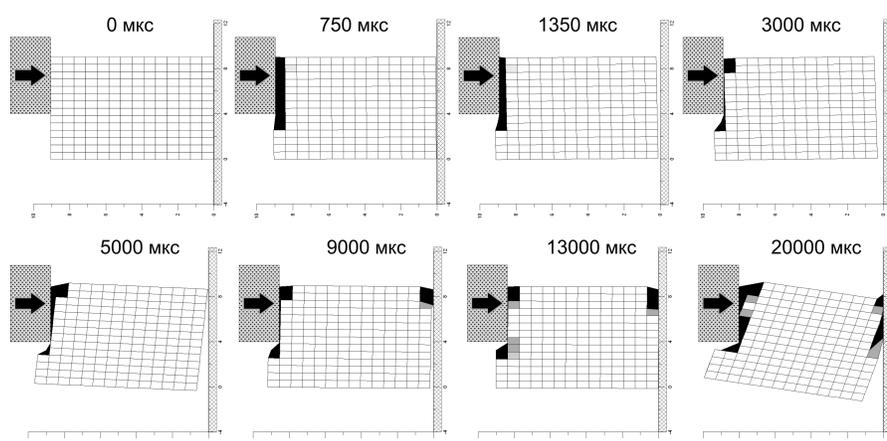


Рис. 1. Развитие во времени разрушения в образце при использовании критерия наибольших растягивающих напряжений. (Черным цветом обозначены полностью разрушенные блоки, белым – абсолютно целые, в оттенках серого – блоки, содержащие разрушенные элементы.)

Видно, что в этом случае разрушаются лишь те элементы, которые непосредственно взаимодействуют с резцом или преградой. На других поверхностях и внутри образца разрушения не происходит. Сравнение с практически наблюдаемыми картинами разрушения показывает, что данный критерий разрушения даёт результат, который не соответствует реальному процессу разрушения горной породы.

Использование в расчетах критерия накопления повреждений ( $\sigma_r = 10^{-3}$  МПа,  $N_c = 10^{-6} N_0$ ) приводит к иной картине образования и развития зон разрушения, приведенной на рис. 2. Как следует из результатов проведенных расчетов, вначале разрушаются элементы в области взаимодействия резца с образцом, но затем происходит разрушение элементов и в глубине образца, что приводит к образованию как скола, так и повреждённых областей, не находящихся в непосредственном взаимодействии с резцом. Таким образом, происходит отделение некоторой части от образца. Следовательно, применение в расчетах данного критерия разрушения позволило получить результат, который в большей степени соответствует реально протекающим процессам при инструментальном разрушении горной породы.

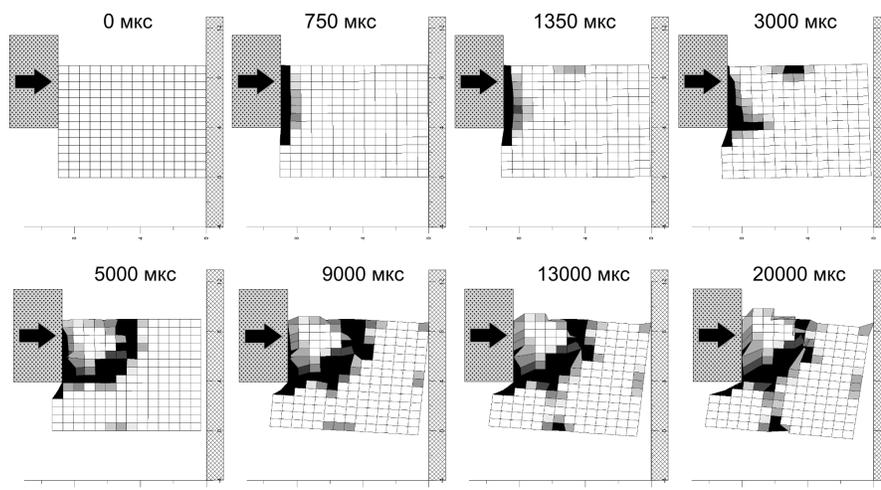


Рис. 2. Развитие во времени разрушения в образце при использовании двухуровневого критерия разрушения.

Из зависимостей усилия резания от времени, представленных на рис. 3, следует, что без учета разрушения элементов материала усилие резания монотонно возрастает.

С учетом разрушения среды усилие резания сначала растет до определённого значения, а затем при разрушении элементов начинает уменьшаться со скоростью, зависящей от выбранного критерия разрушения. При этом уменьшение усилия резания, соответствующее началу разрушения, в случае использования двухуровневого критерия разрушения начинается заметно раньше, чем при использовании критерия наибольших растягивающих напряжений.

Оказывается, что результаты расчетов процесса разрушения при использовании двухуровневого критерия разрушения весьма чувствительны к значениям величин  $\sigma_r$ ,  $N_0$  и  $W_0$ . Из этого следует возможность определения этих величин путем сопоставления результатов, получаемых экспериментально-численным методом.

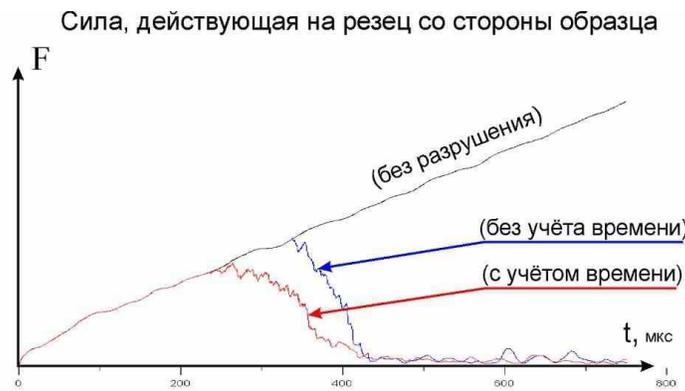


Рис. 3. Зависимости усилия резания от времени а) – без разрушения; б) – критерий наибольших растягивающих напряжений; в) – двухуровневый критерий разрушения.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [2] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [3] Бартенев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров. М.: Химия, 1984. 280 с.
- [4] Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Механика разрушения полимеров. Киев: Наук. думка, 1988. 224 с.
- [5] Костандов Ю.А., Рыжаков А.Н., Шиповский И.Е. Напряженно-деформированное состояние и энергетические потоки в пластине со стационарной трещиной при импульсном нагружении // Проблемы прочности. 2000. № 4. С. 128–139.
- [6] Костандов Ю.А., Ложкина Л.Я., Шиповский И.Е. Задача о взаимодействии инструмента с породой в обобщенной упругопластической постановке // Динамические системы. Вып 18. Симферополь: ТНУ, 2004. С. 144–153.
- [7] Костандов Ю.А., Рыжаков А.Н., Федоркин С.И., Шиповский И.Е. Компьютерная оптимизация прочностных и геометрических характеристик стеновых блоков. // Збірник наукових праць Кримської академії природоохоронного та курортного будівництва. (Будівництво, техногенна безпека). Вып. 5. Симферополь. 2001. С. 71–81.

**Kostandov Yu.A., Shipovsky I.E.** *Energy model of multiple fracture of the solid body.* The energy model of multiple fracture of a solid body and two-level criterion the fractures which are taking into account increase in a material of density of energy (or damages) at it dynamic loading are offered. Within the framework of model elasto-plastic bodies by a numerical method the solution of a three-dimensional problem about dynamic destruction of rock at its interaction with a cutter are received. Influence of used criterion of destruction on development of process of destruction and dependence on time of force of cutting is considered.

# К РАЗВИТИЮ ОДНОЙ МОДЕЛИ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧАХ РАВНОВЕСИЯ ДВУХФАЗНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Кузьменко С. М.

*Ростовский государственный университет*

Для задач, посвященных фазовым и структурным превращениям в упругих телах существенно важным является определение в теле заранее неизвестного местоположения некоторой поверхности — межфазной границы, на которой ставятся дополнительные условия, позволяющие определить границу раздела фаз [1–8]. Учет свойств такой границы в работах [1, 5, 6] производится путем введения поверхностного натяжения. Однако в ряде случаев экспериментально установлена возможность межфазного слоя конечной толщины [9].

В данной работе разрабатывается предложенная ранее авторами математическая модель межфазной границы, в рамках которой фазовая граница представляет собой слой, состоящий из смеси обеих фаз. На основе вариационного метода рассмотрено равновесие тела, состоящего из двух фаз, разделенных переходным слоем, расположение и толщина которого подлежит определению в ходе решения задачи. В качестве примера рассмотрена радиально симметричная деформация двухфазного шара, содержащего абсолютно жесткое сферическое включение. Проведено сравнение с решениями, полученными на основе представления межфазной границы в виде поверхности [5, 6].

**1. Основные соотношения.** Рассмотрим деформацию двухфазного упругого тела в приближении малых деформаций. Будем считать, что одна фаза занимает область  $V_+$ , другая — область  $V_-$ , а разделены они переходным слоем  $V_{\pm}$ . Внутри области, занимаемой одной из фаз, предполагается наличие «вклеенного» абсолютно жесткого тела с поверхностью известной конфигурации ( $V_T$ ). Здесь и далее, знаками «+» и «-» обозначены величины, относящиеся к разным фазам. Каждая из фаз представляет собой линейно упругое изотропное тело с плотностью удельной энергии деформации вида

$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{2} (\lambda_{\pm} I_{\pm}^2 + 2\mu_{\pm} II_{\pm}) + \delta_{\pm} \quad (1)$$

В (1)  $\lambda_{\pm}, \mu_{\pm}$  — постоянные Ламе для каждой из фаз, величина  $\delta_{\pm}$  равна энергии фаз при нулевых деформациях. Заметим, что  $\delta_{\pm}$  не влияет на напряженно-деформированное состояние и для однофазного тела может быть положена равной нулю. В случае наличия двух фаз эта величина может быть выбрана произвольно только для одной из фаз, например,  $\delta_- = 0$ . В последнем случае  $\delta_+$  представляет собой разность энергий фаз при нулевых деформациях.

В качестве уравнения состояния для переходного слоя, выбрано определяющее соотношение для упругой гомогенной бинарной изотропной смеси твердых тел в приближении малых деформаций [10]. В рамках этой модели сплошная среда представляет собой два взаимопроникающих континуума, т. е. предполагается, что обе компоненты смеси присутствуют в каждой точке пространства. Вектор перемещений  $\alpha$ -компоненты смеси обозначим через  $\mathbf{u}_{\alpha}$ . Плотность удельной энергии деформации смеси  $\Phi$  примем в виде

$$\Phi_{\Pi} = \frac{1}{2}\lambda_{\alpha}I^{(\alpha)2} + \mu_{\alpha}II^{(\alpha)} + cI_1^{(\alpha)}I_1^{(\gamma)} + \beta|\mathbf{v}|^2, \quad (2)$$

где  $I^{(\alpha)}, II^{(\alpha)}$  ( $\alpha = \pm, \gamma = \mp$ ) — линейный и квадратичный инварианты тензоров деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$ :  $I = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $II = \text{tr } (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T)$ ,  $2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ ,  $\lambda_{\alpha}, \mu_{\alpha}, c, \beta$  — материальные постоянные,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$ . Последние два слагаемых в (2) описывают упругое взаимодействие компонент смеси. Частным случаем (2) является модель линейно упругого изотропного тела.

Для описания равновесных фазовых превращений в смеси воспользуемся, как и в случае простых материалов [1], вариационным принципом стационарности свободной энергии. Не ограничивая общности, предположим, что внешние нагрузки отсутствуют (рассматривается задача с главными краевыми условиями).

Тогда функционал энергии двухфазного тела можно представить в виде

$$I[\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-] = \int_{V_+} \Phi_+ dV + \int_{V_-} \Phi_- dV + \int_{V_{\Pi}} \Phi_{\Pi} dV \quad (3)$$

Третий интеграл в правой части (3) описывает энергию переходного слоя и в этом смысле соответствует энергии межфазной границы. В отличие от ранее рассмотренных случаев постоянного поверхностного натяжения [1,5,6], здесь энергии границы соответствует «поверхностное натяжение», зависящее от деформаций в каждой из фаз.

Условие стационарности функционала (3)  $\delta I = 0$  при учете независимого варьирования положения границ переходного слоя и векторов перемещений  $\mathbf{u}_+$ ,  $\mathbf{u}_-$  позволяет сформулировать локальные условия равновесия фаз смеси, состоящие из уравнений равновесия и естественных краевых условий на границе раздела слоя и каждой из фаз [1,5,6,8]. Последние состоят из уравнений механического баланса и термодинамического условия, необходимого для определения фазовой границы. Случай равновесия смеси и однокомпонентной среды исследовался ранее [11].

## 2. Центральна симметричная деформация двухфазного шара.

В качестве примера рассмотрим центрально симметричную деформацию двухфазного шара с переходным слоем, при наличии в центре абсолютно твердого сферического включения. Предполагается, что области, занимаемые фазами, являются сферическими, концентрически расположенными слоями. Пользуясь обозначениями п. 1, выделим области  $V_+$ ,  $V_-$  и  $V_{\Pi}$ .

Радиусы включения, внутренней и внешней сфер, ограничивающих переходный слой, обозначим через  $r_0$ ,  $h_0$  и  $h_1$  соответственно.

В предположении об отсутствии объемных и поверхностных сил, будем считать заданным на поверхности тела постоянное поле радиальных перемещений  $\Delta$ . Тогда вектор перемещений  $\mathbf{u}$  будет иметь только радиальную компоненту  $u(r)$ , а три ненулевые компоненты линейного тензора деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в сферических координатах примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du(r)}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\theta} = \frac{u(r)}{r} \quad (4)$$

Будем считать, что фазы «+» и «-» представляют собой линейное изотропное тело с разными постоянными Ламе. Обозначим их через  $\lambda_+, \mu_+$  и  $\lambda_-, \mu_-$ . Промежуточный же слой  $V_{\Pi}$  будем считать занятым смесью фаз «+» и «-» согласно модели гомогенной бинарной изотропной смеси твердых тел в приближении малых деформаций [10].

Условие неразрывности поля перемещений на границах переходного слоя примет вид

$$u_+(h_0) = u_+^{\Pi}(h_0) = u_-^{\Pi}(h_0) \quad u_-(h_1) = u_+^{\Pi}(h_0) = u_-^{\Pi}(h_0) \quad (5)$$

Условия на внешней границе и на границе включения, соответственно:

$$u_-(1) = \Delta. \quad (6)$$

$$u_+(r_0) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, необходимо потребовать равенства на границах полей напряжений:

$$\sigma_+(h_0) = \sigma_+^{\Pi}(h_0) + \sigma_-^{\Pi}(h_0) \quad \sigma_-(h_1) = \sigma_+^{\Pi}(h_0) + \sigma_-^{\Pi}(h_0) \quad (8)$$

Запишем полный функционал потенциальной энергии тела:

$$\begin{aligned} \Psi = & \iiint_{V_+} \left( \frac{1}{2} \lambda_+ I_+^2 + \mu_+ II_+ + \delta_+ \right) dV + \\ & + \iiint_{V_-} \left( \frac{1}{2} \lambda_- I_-^2 + \mu_- II_- + \delta_- \right) dV + \\ & + \iiint_{V_{\Pi}} \left( \frac{1}{2} \lambda_+ I_+^2 + \mu_+ II_+^2 + \frac{1}{2} \lambda_- I_-^2 + \mu_- II_-^2 + c I_+ I_- + \beta |\mathbf{v}|^2 \right) dV \end{aligned} \quad (9)$$

Вводя обозначения  $(\lambda_i + \mu_i) = q_i$ , уравнения равновесия в смеси можно записать в виде:

$$\begin{cases} q_1 \left( \frac{d^2 u_+}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_+}{dr} - \frac{2u_+}{r^2} \right) + q_3 \left( \frac{d^2 u_-}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_-}{dr} - \frac{2u_-}{r^2} \right) + \beta (u_+ - u_-) = 0 \\ q_2 \left( \frac{d^2 u_-}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_-}{dr} - \frac{2u_-}{r^2} \right) + q_3 \left( \frac{d^2 u_+}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_+}{dr} - \frac{2u_+}{r^2} \right) + \beta (u_- - u_+) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Заменив тройные интегралы в (9) повторными получим:

$$\begin{aligned} \Psi = & 2\pi \left( \int_{r_0}^{h_0} \Phi_+(r, u_+, u'_+) r^2 dr + \int_{h_0}^{h_1} \Phi_{\Pi}(r, u_+^{\Pi}, u_+^{\prime\Pi}, u_-^{\Pi}, u_-^{\prime\Pi}) r^2 dr + \right. \\ & \left. + \int_{h_1}^1 \Phi_-(r, u_-, u'_-) r^2 dr \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению поля перемещений, сообщающих минимум функционалу (11) на множестве решений системы (10) при условиях (5)–(7).

Для областей  $V_{\pm}$  радиально симметричное решение дается формулами задачи Ламе [12], радиально-симметричное решение для смеси получено в [11]. Подставляя эти решения в (11) при учете (5)–(7), а также используя вытекающее из условия стационарности функционала (3) статические условия (8), получим выражение для функционала потенциальной энергии как функции, зависящей от радиусов  $h_0$  и  $h_1$ :  $\Psi = \Psi(h_0, h_1)$ . Тем самым, условия стационарности функционала (11) сводятся к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial h_0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial h_1} = 0.$$

Для принятых значений упругих постоянных и внешнего параметра  $\Delta$  с достаточной степенью точности можно считать, что величины  $h_0$  и  $h_1$  связаны линейно. В отличие от задачи без включения данная задача имеет два решения, задающих зависимость расположения и толщины переходного слоя от перемещения поверхности шара  $\Delta$ . Характерные результаты расчетов представлены на рис. 1. Кривые «а» и «б» описывают изменение положения внутренней границы межфазного слоя  $h_0$  от перемещения для двух решений.

Для сравнения на рис. 1 приведена также зависимость радиуса межфазной границы от перемещения поверхности шара в случае отсутствия переходного слоя, при отсутствии поверхностной энергии границы раздела фаз (кривая «в»). Из рис. 1 видно, что учет поверхностной энергии играет существенную роль на положение фазовой границы. В частности, отметим качественное совпадение поведения кривых «а», «б» и «в».

Решениям «а» и «б» рис. 1 соответствуют зависимости полной энергии сферы со включением от перемещения поверхности шара, приведенные на рис. 2. Из представленных графиков следует, что на участке  $\Delta < \Delta_1$  реализуется второе решение, на участке  $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$  — первое. При  $\Delta > \Delta_2$  решения совпадают.

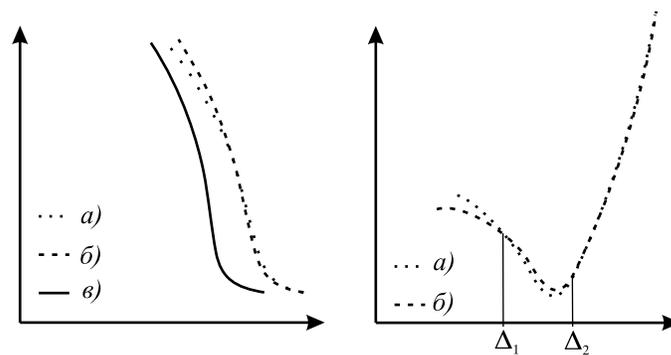


Рис. 1

Рис. 2

Заметим, что исследованное здесь равновесное решение соответствует случаю устойчивого в малом центрально симметричного решения [8]. Это означает, что устойчивости решения можно ожидать и в рассмотренном случае с переходным слоем.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М., 1990.
- [2] *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязко-упруго-пластических тел. М., 1987.
- [3] *Баландин Г.Ф.* Основы теории формирования отливки. Ч. 1. Тепловые основы теории. Затвердевание и охлаждение отливки. М. 1976.
- [4] *Romano A.* Thermodynamics of Phase Transitions in Classical Field Theory. Singapore, 1993.
- [5] *Морозов Н.Ф., Назыров И.Г., Фрейдлин А.Б.* Одномерная задача о фазовом превращении упругого шара // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 188–191.
- [6] *Назыров И.Г., Фрейдлин А.Б.* Фазовые превращения при деформировании твердых тел в модельной задаче об упругом шаре// Изв. РАН. МГТ. 1998. № 5. С. 52–71.
- [7] *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Об устойчивости равновесия нелинейно-упругих тел, испытывающих фазовые превращения// Изв. АН. МГТ. 1991. № 2. С. 56–65.
- [8] *Еремеев В.А., Фрейдлин А.Б., Шарипова Л.Л.* О неединственности и устойчивости в задачах равновесия упругих двухфазных тел// Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 2. С. 189–193.
- [9] *Бойко В.С., Гарбер Р.И., Косевич А.М.* Обратимая пластичность кристаллов. М., 1991.
- [10] *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М., 1999.
- [11] *Еремеев В.А., Кузьменко С.М.* О термодинамическом равновесии фаз двухкомпонентных линейно упругих сред // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. П. 2004. № 1. С. 17–22.
- [12] *Лурье А.И.* Теория упругости. М., 1970.

**Kuzmenko S.M.** *Development of the one model of phase interface in the problems of two-phase elastic bodies equilibrium.* The deformation of two-phase elastic bodies undergoing phase transitions is investigated taking into account the structure of phase interface region. Within framework of the theory of elastic mixtures the model of the phase interface is proposed. The phase interface is modeled as a layer consisting of a linear mixture of both phases. As an example, the deformation of two-phase elastic ball with hard inclusion is investigated.

# ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОЕДИНЕНИИ

Куреннов С. С.

*Национальный аэрокосмический университет "ХАИ", Харьков, Украина*

В статье предложено аналитическое решение задачи по определению напряжений в клеевом соединении. Рассмотрено влияние на напряжения краевых условий, которые соответствуют нескольким конструктивным решениям.

Нахлесточное клеевое соединение, а также его различные модификации, является одним из наиболее распространенных типов соединений деталей из композиционных материалов (КМ). Существует большое количество конструктивно-технологических решений (КТР) соединений и стыковых узлов, в которых композитные детали соединяются с композитными или металлическими законцовками, накладками или элементами продольной связи [1]. Большинство существующих методик определения напряженно-деформированного состояния (НДС) не позволяет изучить влияние скорости нагружения на НДС. Обусловлено это сложностью изучаемого объекта, как для математического моделирования, так и для экспериментального исследования. Поскольку соединениям присущи с одной стороны высокие градиенты напряжений, что снижает достоверность показаний тензодатчиков, и с другой стороны трудности создает наличие элементов, имеющих различные механические и масштабные параметры (Multi scale models), например, соединяемый слой и клеевая прослойка.

Дать оценку динамическим напряжениям позволяет теория составных стержней А.Р. Ржаницына [2], разработанная для расчета адгезионных, механических и сварных соединений. Не смотря на относительную простоту модели, результаты, полученные на ее основе, для большинства КТР соединений обладают высокой степенью достоверности, поскольку гипотезы, лежащие в основе модели, адекватны реальным конструкциям. Спорным вопросом в НДС соединения до сих пор являются напряжения в окрестностях краев соединений. Поскольку решения А.Л. Рабиновича, Голланда-Рейснера, В.Ф. Кутынова показывают в этих зонах результаты, близкие к вычисляемым по модели А.Р. Ржаницына при статическом нагружении, то можно предположить, что и расчетные динамические напряжения будут близкими к действительным.

Постановка задачи. Рассмотрим составной стержень длиной  $L$ . Толщина первого, второго и соединительного (клеевого) слоев соответственно  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_c$ . Физический закон считаем линейным. Записав уравнения равновесия дифференциальных элементов слоев (см. [2]) с учетом инерционных сил, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} - (-1)^k \alpha_k (U_2 - U_1) = \gamma_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $k = 1, 2$ ;  $U_k$  — перемещение  $i$ -го слоя;  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$  — коэффициенты, зависящие от упругих характеристик слоев, их толщины и плотности.

Краевые условия при этом зависят от типа КТР соединения. Характерные для авиационных конструкций КТР соединений показаны в работе [1]. В ряде других работ этих авторов предложены новые КТР соединений, использующих конструктивные особенности трехслойных конструкций, а также соединений, содержащих элементы продольной и поперечной связи.

Из ряда типов соединений (иногда используя симметрию конструкции) можно выделить некоторые области, для которых с высокой адекватностью могут быть сформулированы краевые условия двух типов.

К первому типу относятся следующие условия:

$$U_1|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad U_2|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = F_2. \quad (2)$$

где  $F_i = \frac{F_0}{\delta_i E_i}$ . В свою очередь  $F_0$  — усилие, приложенное к соединению;  $E_i$  — модуль упругости соответствующего слоя.

Примерами подобных конструкций могут служить некоторые КТР соединений полок лонжерона с панелями обшивки. А также двухсрезные соединения композитных силовых элементов с верхней и нижней металлическими законцовками и т.п.

Ко второму типу относятся краевые условия

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = F_1, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = F_2, \quad (3)$$

характерные для соединений элементов обшивки друг с другом.

Начальные перемещения и скорости перемещений отсутствуют.

Построение решения. Из системы (1) можно получить  $L[U_1] = 0$ , где

$$L[U_1] = \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial^4 U_1}{\partial t^2 \partial x^2} + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial t^4}.$$

Для исключения неоднородности в граничном условии (2) решение ищем в виде

$$U_1(x, t) = V(x, t) + V_1(x).$$

Функция  $V$  удовлетворяет однородным граничным условиям, а для функции  $V_1$  исходя из (2, 3) можно сформулировать четыре краевых условия [3]. Функцию  $V_1$  ищем в виде  $V_1 = \sum_{i=1}^4 a_i x^i$ , где  $a_i$  — неизвестные коэффициенты, которые находятся при удовлетворении соответствующим краевым условиям для  $V_1$ .

При подстановке получаем неоднородное уравнение вида  $L[V] = Ax^2 + Bx + C$ , где величины  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются типом краевых условий (2, 3). Решение данного уравнения ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения ( $W$ ) и частного решения неоднородного уравнения ( $Y$ ).

Общее решение однородного уравнения ищем в виде суперпозиции элементарных решений в виде синусоидальных волновых пакетов  $W = Ae^{i(kx - \omega t)}$  (см. [4]).

Величины  $k$  и  $\omega$  связаны дисперсионным соотношением [3]. Доказано, что корни дисперсионного соотношения действительны при любых  $k$ , и имеют вид  $\pm\omega_1$  и  $\pm\omega_2$ . Таким образом, элементарное решение имеет вид

$$W = (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \sum_{m=1}^2 (A_{2m-1} \sin \omega_m t + A_{2m} \cos \omega_m t).$$

Удовлетворяя краевым условиям (2), получаем  $C_2 = 0$  и  $k_n = \frac{\pi}{L} (\frac{1}{2} + n)$ , где  $n \in Z$ . Для определенности принимаем примем  $C_1 = 1$ .

Удовлетворив краевым условиям (3), получаем  $C_1 = 0$  и  $k_n = \frac{\pi n}{L}$ , где  $n \in Z$ . Для определенности принимаем примем  $C_2 = 1$ .

Общее решение однородного уравнения можно представить в виде

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) (A_n^{(1)} \sin \omega_{1n} t + A_n^{(2)} \cos \omega_{1n} t + A_n^{(3)} \sin \omega_{2n} t + A_n^{(4)} \cos \omega_{2n} t),$$

где  $\varphi_n(x) = \sin k_n x$  при граничных условиях (2), и  $\varphi_n(x) = \cos k_n x$  при граничных условиях (3) (волновые числа  $k_n$  в обоих случаях определяются соответствующим показанным выше образом).

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде  $Y = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x)$ .

Разложив правую часть уравнения  $L[Y] = Ax^2 + Bx + C$  в ряд Фурье  $\varphi_n(x)$  и, обозначив  $\beta_n^{(m)}$   $n$ -ый член разложения в ряд Фурье по  $\varphi_n(x)$  функции  $x^n$ , получаем

$$T_n = \frac{A\beta_n^{(2)} + B\beta_n^{(1)} + C\beta_n^{(0)}}{k_n^4 + k_n^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Таким образом

$$U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n^{(1)} \sin \omega_n^{(1)} t + A_n^{(2)} \cos \omega_n^{(1)} t + A_n^{(3)} \sin \omega_n^{(2)} t + A_n^{(4)} \cos \omega_n^{(2)} t + T_n \right] \varphi_n(x) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Перемещения второго слоя находим из первого уравнения системы (1). Напряжения в соединительном слое равны  $\tau = (U_2 - U_1)_c \xi$ , где  $\xi$  — коэффициент жесткости клеевого слоя [1, 2]. Коэффициенты  $A_n^{(k)}$  находятся из начальных условий.

Пример расчета. Найдем напряжения в соединении с КТР, показанным на рис. 1, т.е. краевыми условиями (2). Рассмотрим соединение детали из КМ ( $\delta_1 = 3$  мм,  $E_1 = 240$  ГПа,  $\rho_1 = 2200$  кг·м<sup>3</sup>) и металлической законцовки ( $\delta_2 = 5$  мм,  $E_2 = 70$  ГПа,  $\rho_2 = 2650$  кг·м<sup>3</sup>,  $L = 0,1$  м). К композитной детали мгновенно приложено усилие  $F_0 = 10$  КН м<sup>-1</sup>. Параметры клеевой прослойки:  $G = 77$  МПа,  $\delta_c = 0,3$  мм. Наибольшие касательные напряжения в клеевой будут у конца, к которому приложена нагрузка (рис. 1). Горизонтальными линиями на графиках показаны соответствующее статическое и удвоенное статическое напряжения.

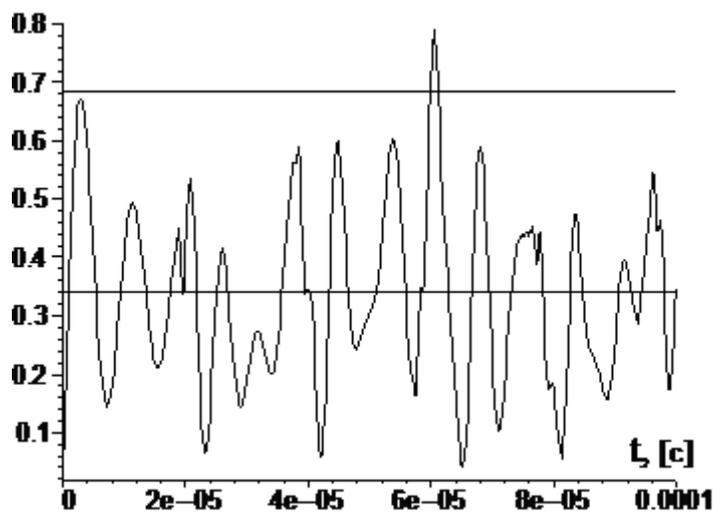


Рис. 1. Касательные напряжения в клее, [МПа]

Для сравнения проведем расчет максимальных напряжений в клее в этом же соединении с граничными условиями (3). Соответствующий график показан на рис. 2.

Можно отметить, что статические напряжения в первом случае ниже, поскольку некоторая часть усилий от нагруженного слоя передается на торец, который жестко закреплен. В конструкции это возможно при сжатии, если торец упирается в законцовку, или при растяжении, если конец соединения усилен болтовыми стяжками.

Однако динамические напряжения в первом случае намного выше. Из графика видно, что они могут превышать статические более чем в два раза, в то время как при свободной заделке концов динамические напряжения превышают статические в 1,2 раза при данных механических параметрах.

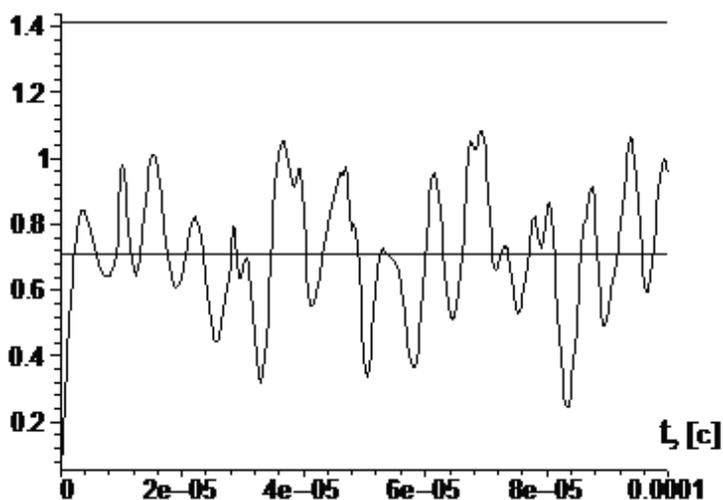


Рис. 2. Касательные напряжения в клее, [МПа]

**Выводы.** Можно сформулировать следующие рекомендации по проектированию высоконагруженных соединений, подверженных динамическим нагрузкам: необходимо, чтоб законцовка имела некоторую податливость на растяжение, поскольку жесткая заделка вызывает значительное повышение динамических напряжений;

конец соединения, обращенный в сторону приложения нагрузки, должен быть усилен штифтами или иными элементами поперечной связи, имеющими малую массу; предпочтительны двухсторонние накладки, исключаяющие изгиб соединения и отрыв клея нормальными усилиями, что может наблюдаться при значительных нагрузках;

различные элементы конструкции должны иметь близкую по величине жесткость; следует избегать резких, скачкообразных изменений жесткости;

отношения  $E/\rho$ , у соединяемых деталей должны быть как можно ближе, что обеспечивает близкую по величине скорость распространения возмущений и, как следствие, малую разность перемещений соединяемых слоев.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карпов Я.С. Проектирование и конструирование соединений деталей из композиционных материалов. // Карпов Я.С., Кривенда С.П., Рябков В.И. // Харьков, ХАИ, 1997. 200 с.
- [2] Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
- [3] Куреннов С.С. К вопросу об определении динамических напряжений в клеевом соединении // Вопр. проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. трудов. Вып. 41), Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", 2005. С. 66–72.
- [4] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: "Мир", 1977. 622 с.

**Kurennov S.S.** *A constructive features influence on stress dynamic in glued joint.* Article is refer to solve problem of two-ply glued joint dynamic loading. Border conditions is corresponding to two types of the constructional solutions.

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОГО СОЕДИНЕНИЯ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Ляпин А. А.

*Ростовский военный институт ракетных войск*

На основе метода конечных элементов исследовано влияние процесса тепловыделения на распределение контактных давлений при работе цилиндрического металлополимерного подшипника. Дано сравнение двух подходов, базирующихся на решении связанной задачи термоупругости и раздельном решении уравнений теплопроводности и статических уравнений теории упругости в виде итерационного процесса.

Одним из важных факторов, определяющих изнашивание металлополимерных подшипников является воздействие температурных полей, возникающих вследствие фрикционного контакта. При этом влияние температуры и температурных градиентов сказывается не только на зависимости физических характеристик материалов, коэффициентов трения и износа от температуры, но и на самом механизме изнашивания, что приводит к различным видам повреждения подшипников [2].

Для анализа механических и теплофизических характеристик точек рассматриваемой области, представляющей собой двухслойный металлополимерный цилиндр (рис. 1), требуется решение связанной задачи термоупругости в нелинейной постановке, определяющейся зависимостью области и параметров контактного взаимодействия от температуры. Для такого анализа наиболее приемлемым является использование метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе Ansys.

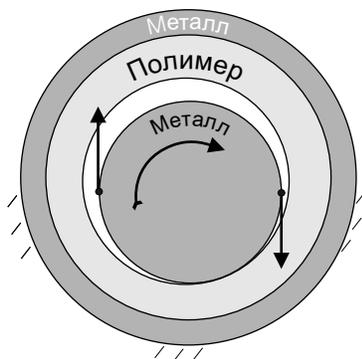


Рис. 1. Общий вид цилиндрического подшипника

Созданная конечно-элементная модель подшипника позволила реализовать два подхода к анализу термоупругих полей: прямой и последовательный, согласующиеся по полученным численным результатам. В прямом подходе использованы конечные элементы, учитывающие связность полей. Недостатком подхода является существенная зависимость сходимости метода от величины контактных давлений  $q$  и коэффициента кулоновского трения  $k$  пары материалов: металл, полимер.

При последовательном подходе на первом этапе решается контактная задача о распределении контактных усилий  $q(x)$ . На втором этапе исследуется задача теплопроводности с распределенными в зоне контакта источниками тепла и условиями тепловой конвекции Ньютона на оставшейся части границы подшипника. При этом интенсивность тепловых источников считается пропорциональной величине  $kVq(x)$ ,  $V$  — линейная скорость смещения точек подшипника в зоне контакта [1]. По полученным температурным полям пересчитываются контактные давления, а также изменяются физические параметры материалов и коэффициент кулоновского трения. Этапы 1, 2 повторяются в виде итерационного процесса с контролем сходимости по контактным давлениям

$$\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \| < \epsilon \quad (1)$$

Последовательный подход обладает рядом преимуществ:

- учет влияния температуры можно вести отдельно: на контактные усилия, на коэффициент  $k$  и т.д.;
- введение изменений в модель за счет влияния температуры может быть последовательным с контролем получаемых изменений механических полей;
- наблюдается лучшая внутренняя сходимость метода конечных элементов при решении контактной задачи в пакете Ansys.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-08-01257-а.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2005. 108 с.
- [2] Колесников В.И. Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах. М.: Наука, 2003. 279 с.

**Lyapin A.A.** *Contact problem for metal-polymeric connections in view of temperature fields.* On the basis of a finite elements method influence of process of a thermal emission on distribution of contact pressure is researched at work of the cylindrical metal-polymeric bearing. Comparison of two approaches which are based the decision of the connected problem thermoelasticity and the separate decision of the heat conductivity equations and the static equations of elasticity in the form of iterative process is given.

# ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ЖЕСТКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ТОЛСТОГО СЛОЯ

**Марк А. В.**

*Институт проблем механики РАН, Москва*

Асимптотическим методом изучена в плоской постановке задача о движении с постоянной скоростью жесткого штампа по границе вязкоупругого слоя большой относительной толщины.

Рассмотрим контактную задачу в плоской постановке о движении жесткого штампа по границе вязкоупругого слоя большой относительной толщины. Предполагается, что штамп движется с постоянной скоростью по верхней границе слоя и вдавливается в нее постоянной нормальной силой. Нижнюю границу слоя предполагаем жестко заземленной. Трением в области контакта штампа с поверхностью слоя пренебрегаем.

В упругой постановке задача, как известно [1], сводится к определению контактного давления  $q(x)$  из следующего интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a q(\xi) \left[ -\ln \left| \frac{\xi - x}{h} \right| - d_0 \right] d\xi = \pi\theta\delta(x) \quad (|x| \leq a) \quad (1)$$

Здесь  $a$  — полудлина линии контакта,  $h$  — толщина слоя,  $\theta = G/(1 - \nu)$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\delta(x)$  — осадка точек поверхности слоя на линии контакта,  $d_0$  — постоянная, которая, например, для случая  $\nu = 0.3$  равна  $d_0 = 0.527$ .

Согласно работе [2], отталкиваясь от (1), интегральное уравнение вязкоупругой контактной задачи для относительно толстого слоя можно записать в виде

$$\int_{-a}^a q(\xi) \left[ -\ln \left| \frac{w}{h} \right| - d_0 + k \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \left( -\ln \left| \frac{w - V\tau}{h} \right| - d_0 \right) d\tau \right] d\xi = \pi\theta_*\delta(x) \quad (|x| \leq a), \quad \theta_* = \frac{\lambda}{\beta}\theta, \quad k = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (2)$$

где  $\lambda$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  — вязкоупругие постоянные стандартного вязкоупругого тела,  $w = \xi - x$ .

Введем безразмерные величины и обозначения

$$\varphi(x') = \frac{q(x)}{\theta_*}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \mu = \frac{\lambda V}{a}, \quad g(x') = \frac{\delta(x)}{a}$$

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\lambda}, \quad w' = \frac{w}{a} \quad (3)$$

Тогда интегральное уравнение (2) переписывается в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[ -\ln \left| \frac{w}{\varepsilon} \right| - d_0 - k\lambda \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \left( -\ln \left| \frac{w - \mu\tau}{\varepsilon} \right| - d_0 \right) d\tau \right] d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$I = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \left( -\ln \left| \frac{w - \mu\tau}{\varepsilon} \right| - d_0 \right) d\tau \quad (5)$$

После несложных преобразований его можно вычислить

$$I = -\ln |w| + \exp\left(\frac{w}{\mu}\right) \text{Ei}\left(-\frac{w}{\mu}\right) + \ln \varepsilon - d_0 \quad (6)$$

где  $\text{Ei}(x)$  — интегральная показательная функция, и тогда ядру интегрального уравнения (4) можно придать форму

$$K(w) = -\ln |w| + d + G(w)$$

$$d = (1 + k\lambda)(\ln \varepsilon - d_0)$$

$$G(w) = k\lambda \left( \sum_{i=0}^2 c_i(w) \frac{1}{\mu^i} - \ln \mu \sum_{i=0}^2 s_i(w) \frac{1}{\mu^i} \right) + O\left(\frac{w^3 \ln |w|}{\mu^3}\right) \quad (7)$$

$$c_0 = \mathbf{C}, \quad c_1 = (\mathbf{C} - 1 + \ln |w|)w, \quad c_2 = \left(\frac{\mathbf{C}}{2} - \frac{3}{4} + \ln |w|\right)w^2$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = w, \quad s_2 = \frac{w^2}{2}$$

где  $\mathbf{C}$  — постоянная Эйлера.

Разыскивая далее решение интегрального уравнения (4) с ядром (7) в виде двойного ряда [3]

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varphi_{ij}(x) \mu^{-i} (\ln \mu)^j \quad (8)$$

придем после подстановки в уравнение выражений (7) и (8) к бесконечной последовательно решаемой системе сингулярных интегральных уравнений относительно функций  $\varphi_{ij}(x)$ .

В работе найдены асимптотические при больших  $\mu$  решения для плоского ( $g(x) \equiv g$ ) и параболического ( $g(x) = g + \alpha x - x^2/(2R)$ ) штампов с точностью

до членов порядка  $\mu^3(\ln \mu)^3$ . Определены для плоского штампа: безразмерное контактное давление  $\varphi(x)$ , связь между безразмерной вдавливающей силой и безразмерной осадкой  $g$ ; для параболического штампа найдены: безразмерное контактное давление  $\varphi(x)$ , угол поворота штампа  $\alpha$ , связь между безразмерной вдавливающей силой и безразмерной осадкой  $g$ , связь между безразмерной вдавливающей силой и безразмерным радиусом кривизны в вершине параболы  $R$ . Все результаты имеют довольно громоздкий вид и ради краткости не приводятся.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [2] Александров В.М., Горячева И.Г. Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству. // Материалы 5-ой Российской конференции с международным участием "Смешанные задачи механики деформируемого тела". Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2005. С. 23–25.
- [3] Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 175 с.

**Mark A.V.** *Motion of rigid punch over boundary of viscoelastic thick layer at constant velocity.* The plane problem of motion of rigid punch over boundary of viscoelastic layer of big relative thickness at constant velocity has been solved asymptotical method.

# О ПЕРСПЕКТИВАХ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ МАЛЫХ ДЛИН И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЛАЗЕРНЫМИ ИНТЕРФЕРОМЕТРАМИ

**Мирошниченко И. П.\* , Паринов И. А.\*\* , Рожков Е. В.\*\* ,  
Серкин А. Г.\* , Сизов В. П.\***

*\* Ростовский военный институт ракетных войск*

*\*\* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского  
госуниверситета*

Проанализированы основные погрешности лазерных измерителей малых перемещений и сформулированы перспективные направления для их выявления и исключения, при проведении измерений на экспериментальной установке для исследования процессов дефектообразования в ленточных ВТСП.

Предстоящее широкое использование высокотемпературных ленточных сверхпроводников (ВТСП) в энергетике, электронике, транспорте, авиации и космонавтике, медицине и других отраслях промышленности определяет широкие потребности рынка в экспериментальных устройствах для их испытаний. Следовательно, разработка технологий испытаний ВТСП является актуальной и своевременной задачей [1,2].

Для решения этой задачи разработана установка для экспериментальных исследований идентификации и накопления повреждений при изгибе сверхпроводящих одножильных и многожильных лент Bi-2223/Ag, а также получены оценки дефектности образцов после нагружения. В настоящее время малогабаритные устройства такого типа в мире не выпускаются. Ближайшим аналогом является экспериментальная система для оценки старения ВТСП — проводов Bi-2223 при механических воздействиях, разработанная совместно фирмами Pirelli Cables and Systems (Италия) и American Superconductor Corporation (США) [3]. Однако эта установка не использует лазерные системы для оценки возникающих при механических воздействиях перемещений и деформаций и методы акустической эмиссии, поэтому обеспечивает меньшую достоверность результатов по сравнению с предлагаемой системой [4].

Высокая точность измерения, свойственная лазерным интерферометрам, реализуется полностью только в том случае, если визирная ось интерферометра совпадает с линией измерения, т.е. соблюдается принцип компарирования Аббе. В большинстве случаев технических измерений соблюдать принцип компарирования весьма трудно из-за конструктивных особенностей измерительной установки. Положение визирной оси или компараторной прямой в пространстве определяется взаимным расположением подвижных и неподвижных узлов преобразователя и может меняться в процессе измерений. Это обстоятельство, наряду со сложностью поддержания и контроля нормальных условий измерений приводит к возникновению дополнительных погрешностей, которые носят нестационарный характер, что говорит о необходимости их непрерывного учета, выявления и исключения.

Для контроля угловых поворотов в метрологической практике обычно используют дополнительный лазерный интерферометр или фотоэлектрический автоколлиматор, что применяется в рабочих эталонах длины и установках высшей точности. Однако такой способ ведет к значительному усложнению схемы прибора, его удорожанию и увеличению его массогабаритных характеристик.

В этом отношении перспективным для регистрации угловых перемещений и поворотов является не дополнение известных измерительных средств какими-либо новыми приборами и устройствами измерения поворотов, а совмещение в одном устройстве функциональных возможностей, позволяющих произвести регистрацию как линейной, так и угловой составляющей действительного перемещения. Это труднодостижимо при использовании одного отсчета интенсивности, так как эта величина является функцией двух переменных, определяющих линейное и угловое перемещение отражателя, что приводит к неоднозначности при точных измерениях малых перемещений.

Устранение указанной неоднозначности осуществимо путем применения в лазерных измерителях малых перемещений в качестве светоделителя дифракционной решетки с синусоидально изменяющимся коэффициентом пропускания. В результате чего получаем интерференционные картины в пучках нулевого порядка и в боковых пучках первого порядка. Интенсивность в соответствующих точках интерферограмм будет изменяться по-разному. В результате измерения интенсивности в соответствующих точках боковых пучков получаем вместо одного уравнения с двумя неизвестными систему из двух уравнений, решив которую относительно параметров определяющих линейное и угловое положение отражателя, получим значение действительного перемещения в пространстве. Методы отыскания корней, удовлетворяющих этой системе, достаточно развиты. Очевидно, что алгоритм и способ решения будут зависеть от технических требований, предъявляемых к измерителю малых перемещений.

Для осуществления контроля условий проведения измерений и проявления внешних влияющих факторов можно выделить два подхода: факторную или комплексную коррекцию результатов измерения. Суть факторной коррекции показаний интерферометра заключается в том, что контролируют отдельные параметры окружающей среды и других влияющих величин, затем по известным или экспериментально полученным зависимостям определяют вклад каждого фактора в результат измерения и вычисляют соответствующую поправку. При относительной простоте такого способа ему свойствен принципиальный недостаток, связанный с трудностями учета всех влияющих факторов, кроме того, существенное влияние оказывают погрешности, определения значений влияющих величин. Комплексная коррекция заключается в определении суммарного результата действия всех влияющих факторов, вносящих погрешность в результат измерений, и является более перспективным способом.

Анализ существующего научно-методического аппарата позволяет сделать вывод о том, что при достаточном уровне развития интерферометрии, по существу преимущества комплексной коррекции результатов интерференционных измерений остаются нереализованными. Для его успешной технической реализации необходимо исследовать лазерные измерители перемещений с целью определения па-

раметра, который не зависит от измеряемого перемещения, по изменениям которого можно отслеживать изменения условий измерений или действие внешних факторов. Экспериментально обосновано, что для проведения комплексной коррекции результатов интерференционных измерений целесообразно использовать интегральную регистрацию интенсивности оптического поля интерференционной картины [5].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Паринов И. А.* Микроструктура и свойства высокотемпературных сверхпроводников. Ростов-на-Дону: РГУ, т. 1, 2004. 416 с.
- [2] *Паринов И.А., Рожков Е.В.* Исследование методом акустической эмиссии повреждаемости ВТСП лент при изгибе // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2004. № 3. С. 355–365.
- [3] *Masur L.J., Kellers J., Li F., Fleshler S., Podtburg E.R.* Industrial high temperature superconductors: perspectives and milestones // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity.* 2004. № 1. P. 1145–1150.
- [4] *Мирошниченко И.П., Паринов И.А., Рожков Е.В., Серкин А.Г.* Экспериментальная установка для исследования процессов дефектообразования в ленточных высокотемпературных сверхпроводниках // *Металлург.* 2006. № 7. С. 77–78.
- [5] *Серкин А.Г.* О применении интегральной оценки интенсивности оптического поля при измерениях перемещений интерференционно-голографическими методами // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* 2005. № 4. С. 9–13.

**Miroshnichenko I.P., Parinov I.A., Rozhkov E. A., Serkin A.G., Sizov V.P.**  
*On prospects of improving the accuracy of measurements of small displacements by laser interferometers.* We analyzed the principle errors of laser gauges of small displacements and formed prospective trends for their revelation and elimination in carrying out of the measurements, using test device for study of damage formation in HTSC tapes.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ЛАЗЕРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ МАЛЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Мирошниченко И. П.\*, Паринов И. А.\*\*, Рожков Е. В.\*\*,  
Серкин А. Г.\*, Сизов В. П.\*

\* Ростовский военный институт ракетных войск

\*\* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Ростовского госуниверситета

Представлены результаты экспериментальных исследований интерференционного измерителя малых перемещений с голограммой, экспонированной во встречных пучках, и обоснованы предложения по его совершенствованию.

В настоящее время известны интерференционные измерители малых перемещений, содержащие оптически связанные и последовательно размещенные, источник когерентного излучения, оптическую систему, светоделитель, отражатель и фотоприемное устройство. В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований измерителя [1]. Цель исследований — разработать и обосновать технические предложения по совершенствованию лазерных измерителей малых перемещений.

Для проведения эксперимента разработана экспериментальная установка, схема которой изображена на рис. 1. В состав которой входят источник излучения 1 (He-Ne лазер, длина волны  $\lambda = 0,63$  мкм), собирающая линза 2, диафрагма пространственного фильтра 3, светоделитель 4 и отражатель 5, экран 6 и фотоприемник 7. Отражатель 5 закреплен на торцевой поверхности цилиндрического пьезопреобразователя 8, который электрически соединен с источником стабилизированного напряжения 9 и цифровым вольтметром 10, а фотоприемник 7 электрически соединен с устройством регистрации и обработки результатов 11.

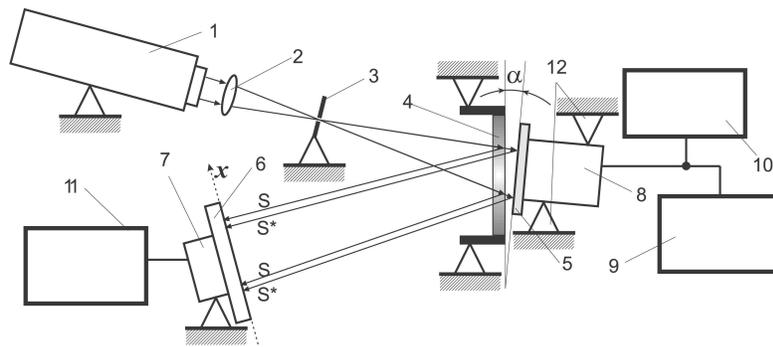


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Работа установки. Излучение лазера 1, после прохождения линзы 2 преобразуется в расходящийся пучок. Светоделитель 4 осуществляет деление этого пучка: одна часть отражается от его поверхности (направление S-S\*), а другая — от

поверхности отражателя 5 (направление  $S^*-S^*$ ). Регуляторами механизма крепления 12 пространственно совмещают предметный и опорный пучки в плоскости экрана 6, на котором формируют интерференционную картину. Управляя напряжением на пьезопреобразователе 8, задают перемещение отражателя 5. Изменение параметров интерференционной картины регистрируют фотоприемником 7 и обрабатывают в устройстве 11.

Все элементы схемы, исключая устройство регистрации, вольтметр цифровой, источник напряжения и блок питания лазера, размещены на измерительной плите установки голографической типа УИГ-22М, которая имеет специальные приспособления, позволяющие изолировать измерительную схему от колебаний конструкций здания.

Методика проведения эксперимента заключалась в пошаговом задании перемещений отражателя 5 в диапазоне от 0 до  $\lambda$  с шагом  $\lambda/30$ . Регистрация сигнала фотоприемника 7 осуществлялась на каждом шаге перемещения отражателя, цифровые интерферограммы транслировались в устройство 11 в виде стандартных файлов графических изображений.

Результатом наблюдения являлась интерферограмма в цифровом виде (рис. 2) представляющая собой дискретизированное по строкам и столбцам изображение. Значения элементов изображения квантованы по уровню на интервале 0–255.

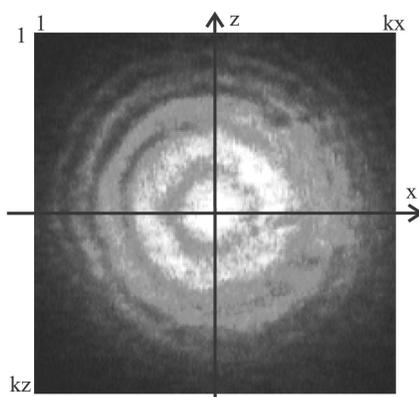


Рис. 2. Опытная интерферограмма

Для сравнения были исследованы два типа светоделителей: 1. Пластина с голограммой, экспонированной во встречных пучках. 2. Пластина, экспонированная аналогично, но без голографической схемы. Оба светоделителя изготовлены из одной пластинки голографической типа ПФГ-03М, проходили химическую обработку по специальной методике одновременно.

В ходе исследования анализу подвергали одномерные распределения интенсивности в сечении интерферограммы, проходящем через центр, представленные на рис. 3 для двух положений отражателя, при которых фаза предметного пучка изменяется на  $180^\circ$ , что позволило определить амплитуду измерительного сигнала (динамический диапазон по интенсивности) в исследуемом сечении. Из анализа рис. 3 следует, что наибольшее изменение интенсивности при перемещении отражателя на  $\lambda/4$  в интерференционных кольцах нулевого и первого порядков.

Это объяснимо особенностями дифракции света на голограмме, в результате чего основная часть излучения концентрируется в центральной части изображения [2]. Светоделитель второго типа обеспечивает динамический диапазон интерферограммы ниже, особенно в центральной области (рис. 3б).

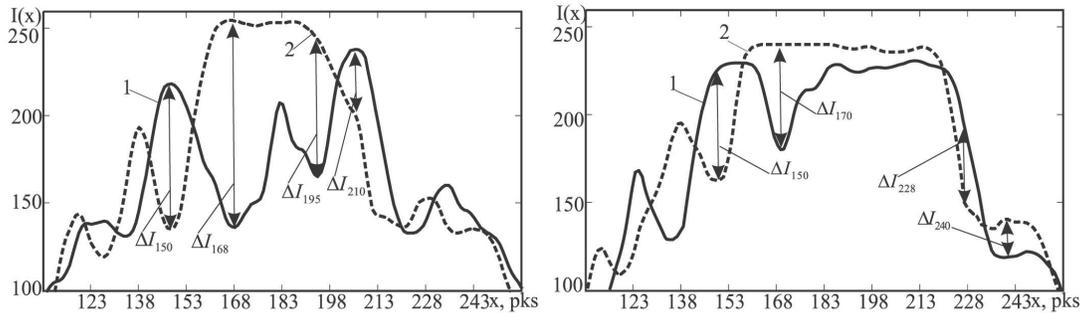


Рис. 3. Распределения интенсивности в горизонтальном сечении интерферограммы (по оси X рис. 2): а) светоделитель 1; б) светоделитель 2

Так как динамический диапазон в интерференционных полосах одного порядка для различных областей интерферограммы, и разных светоделителей имеет разную величину, то, следуя [3], для сравнительного анализа примем за меру четкости интерференционных полос относительную величину – их «видность», определенную в исследуемых сечениях интерферограммы.

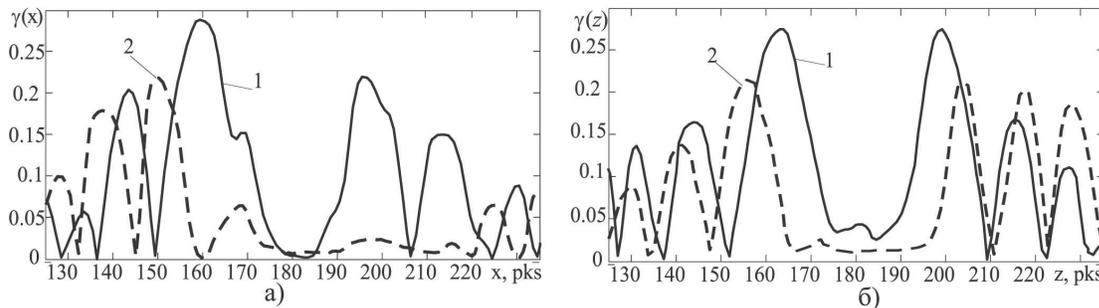


Рис. 4. Значения “видности” интерференционных полос (кривая 1 - светоделитель 1, кривая 2 - светоделитель 2); а) по оси X; б) по оси Z.

Анализ распределений (рис. 4) показывает, что значения видимости для интерференционных полос одинакового порядка, вычисленные слева и справа от оси Z (рис. 2) существенно отличаются. Эта особенность имеет систематический характер проявления, характерна для обоих типов светоделителей и может быть объяснена влиянием угла  $\alpha$  между отражателем и светоделителем в интерферометре, в результате чего в области, расположенной дальше от ребра клина, образованного плоскостями светоделителя и отражателя, происходит снижение контраста и смазывание интерференционных полос [3]. Для проверки этого предположения проведены серии аналогичных опытов при повороте светоделителя на  $90^\circ$  в этом случае указанная особенность сохранялась. Но при исследовании распределений в ортогональном сечении интерферограммы (вдоль оси Z) видность в кольцах

соответствующих порядков имеет примерно одинаковые значения независимо от положения и типа светоделителя.

Результатом интерференционных измерений является зависимость интенсивности в заданной точке или фрагменте интерференционной картины от перемещения отражателя, при этом кроме инструментальной погрешности необходимо учитывать влияние факторов, связанных с формированием и регистрацией интерферограмм. Эффективное устранение влияния этих факторов, при сохранении динамического диапазона, достижимо применением пространственного осреднения по локальной области, величина которой не должна превышать ширины интерференционного кольца первого порядка. Полученный результат поясняют зависимости изменения интенсивности оптического поля от перемещения отражателя представленные на рисунке 5 (5а — изменение интенсивности, определенное в каждом из трех соседних элементов изображения, в этом случае погрешность определения перемещения от ошибки задания точки измерения, например  $\Delta 1$ – $\Delta 4$ , имеет значительную величину при случайном характере проявления; 5б — изменение интенсивности, вычисленное как среднее по локальным областям, здесь погрешность значительно меньше и носит систематический характер).

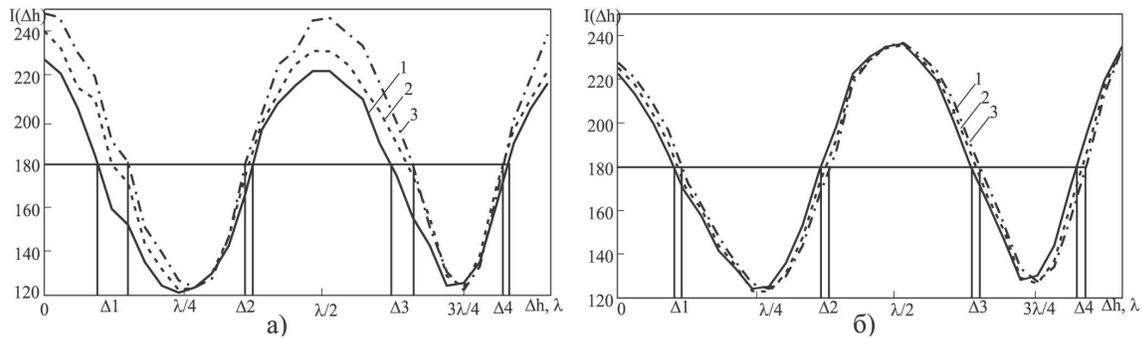


Рис. 5. Зависимости интенсивности от перемещения отражателя: а) в каждом из трех соседних элементов изображения; б) среднее по локальной области

Применение цифровой регистрации и обработки, опытных интерферограмм позволило детально исследовать характер распределения и изменения интенсивности в плоскости интерференционной картины и выявить особенности, присущие данной схемной реализации, а так же сформулировать следующие предложения по совершенствованию лазерных интерферометров: — в качестве светоделителей целесообразно применять голограммы, экспонированные во встречных пучках так как это позволяет обеспечить сравнительно более высокий контраст и динамический диапазон интерференционной картины; — при проведении измерений целесообразно фотодетекторы размещать в кольцах нулевого и первого порядков, используя при этом область интерферограммы с наибольшим динамическим диапазоном; — применяя традиционные фотодетекторы, необходимо чтобы ширина интерференционного кольца была больше чем апертура фотодиода; — при использовании цифровой регистрации интерферограммы, например, с помощью ПЗС фотоприемников необходимо применять пространственное осреднение интенсивности по локальной области изображения не превышающей ширины интерференционной полосы. — для увеличения соотношения сигнал/шум измерителя

целесообразно регистрировать интенсивность, усредненную по двум локальным областям, расположенным на расстоянии половины пространственного периода интерференционной картины, т.е. в соседних полосах противоположной интенсивности. В этом случае информационным сигналом является отношение интенсивностей, что позволяет расширить динамический диапазон измерителя и снизить чувствительность к амплитудным искажениям измерительного сигнала. В заключение следует отметить, что для контроля и компенсации проявления внешних влияющих факторов целесообразно применять комплексную коррекцию показаний интерферометра на основе интегральной оценки интенсивности оптического поля интерференционной картины [6].

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Паринов И.А., Прыгунов А.Г., Рожков Е.В. и др.* Измеритель перемещений с объемной голограммой // Патент РФ №2169348 от 28.09.99 г.
- [2] *Безуглов Д.А., Прыгунов А.Г., Трепачев В.,В.* Анализ дифракции света на эталонной голограмме при измерении перемещений объектов пространственно-спектральным методом // ИАвтометрия. 1998. № 5. С. 27–37.
- [3] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1979. 719 с.

**Miroshnichenko I.P., Parinov I.A., Rozhkov E.A., Serkin A.G., Sizov V.P.**  
*Experimental validation of technical proposals on improving laser gauges of small displacements.* Results of experimental study of the interferometric gauges of small displacements with the hologram exposed in the counter-propagating beams are given and proposals on their improvement are validated.

# ОСНОВНОЙ РЕЗОНАНС (RES 1) ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ БИФУРКАЦИЙ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА

**Моршнева И. В., Овчинникова С. Н.**

*Ростовский государственный университет*

Рассматриваются пересечения элементарных бифуркаций в задаче о течении жидкости между бесконечными твердыми соосными вращающимися цилиндрами. Для изучения взаимодействия неосесимметричных мод в окрестности точки пересечения нейтральных кривых строятся амплитудные системы (с помощью осреднения по быстрому времени). Кроме обязательных резонансов существуют шесть резонансных соотношений между параметрами задачи, которым соответствуют амплитудные системы, различающиеся дополнительными резонансными слагаемыми. В малой окрестности точек пересечения возможно существование устойчивых (или неустойчивых) стационарных решений амплитудной системы на инвариантных подпространствах. Таким решениям соответствуют периодические и квазипериодические режимы системы Навье-Стокса. В данной работе рассмотрен случай резонанса Res 1. Приведены результаты вычислений критических значений параметров задачи, соответствующих точкам пересечения бифуркаций. Перечислены возможные движения в малой окрестности таких точек. Условия существования и устойчивости этих режимов зависят от коэффициентов амплитудных уравнений.

Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными твердыми цилиндрами радиусов  $r_1, r_2$ , вращающимися с угловыми скоростями  $\Omega_1, \Omega_2$  соответственно, описывается безразмерными уравнениями Навье-Стокса. Предполагается, что решения уравнений движения имеют периодические вдоль оси цилиндров (оси  $z$ ) поля скорости и давления с заданным периодом  $2\pi/\alpha$ . Система Навье-Стокса зависит от четырех безразмерных параметров:  $\alpha$  — осевого волнового числа,  $\eta = r_2/r_1$  — отношение радиусов цилиндров и двух чисел Рейнольдса  $R_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu$ ,  $R_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu$  ( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости).

Хорошо известно, что при любых значениях параметров существует точное стационарное решение уравнений движения — течение Куэтта. Устойчивость течения Куэтта может быть исследована методом линеаризации [1].

Как система Навье-Стокса, так и линеаризованная на течении Куэтта задача обладают группой симметрии  $SO(2) \times O(2)$  — инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси  $z$  и преобразования инверсии. Симметрия задачи позволяет разыскивать нормальные колебания в виде

$$\Phi(r, \theta, z, t) = e^{i\omega t - i(m\theta + k\alpha z)} \varphi(r)$$

где  $m$  (целое) — азимутальное,  $k$  (целое) — осевое квантовые числа. Точка пересечения  $(R_{1*}, R_{2*})$  двух нейтральных кривых определяется такими критическими значениями чисел Рейнольдса  $R_{1*}$  и  $R_{2*}$ , при которых линеаризованная задача имеет нетривиальные решения (нейтральные моды) с различными азимутальными  $(m, n)$  и осевыми  $(k, l)$  квантовыми числами.

В каждой точке пересечения  $(R_{1*}, R_{2*})$  таких независимых нейтральных мод четыре:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{0m}(r, \theta, z), \quad \Phi_2(t, r, \theta, z) = e^{i\omega_m t} \Phi_{1m}(r, \theta, z), \\ \Phi_3(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{0n}(r, \theta, z), \quad \Phi_4(t, r, \theta, z) = e^{i\omega_n t} \Phi_{1n}(r, \theta, z),\end{aligned}$$

где  $\Phi_{0m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta+k\alpha z)} \varphi_{0m}(r)$ ,  $\Phi_{0n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta+l\alpha z)} \varphi_{0n}(r)$ ,  $\Phi_{1m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta-k\alpha z)} \varphi_{1m}(r)$ ,  $\Phi_{1n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta-l\alpha z)} \varphi_{1n}(r)$ ,  $m, n$  — азимутальные,  $k, l$  — осевые квантовые числа.

В малой окрестности  $R_1 = R_{1*} + k_1 \varepsilon^2$  и  $R_2 = R_{2*} + k_2 \varepsilon^2$  критических чисел Рейнольдса на плоскости  $(R_1, R_2)$  асимптотическое решение уравнений движения разыскивается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{00} + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр,  $k_1, k_2$  — константы надкритичности ( $k_1^2 + k_2^2 = 1$ ), которые можно выбирать произвольно,  $\mathbf{v}_{00}$  — вектор скорости течения Куэтта при  $R_{1*}$  и  $R_{2*}$ , символ  $*$  означает комплексное сопряжение,  $\Phi = \xi_{0m}(\tau)\Phi_1 + \xi_{1m}(\tau)\Phi_2 + \xi_{0n}(\tau)\Phi_3 + \xi_{1n}(\tau)\Phi_4$ ,  $\xi_{0m}(\tau), \xi_{1m}(\tau), \xi_{0n}(\tau), \xi_{1n}(\tau)$  — неизвестные комплексные амплитуды, зависящие от медленного времени  $\tau = \varepsilon^2 t$ .

При малых  $\varepsilon$  с помощью теоремы о центральном многообразии или метода осреднения по быстрому времени строятся системы комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд. Впервые такие амплитудные системы для задачи Куэтта-Тейлора были построены в работах [2], [3]. Вид амплитудных систем в точках пересечения неосесимметричных мод зависит от соотношений между азимутальными  $m$  и  $n$ , осевыми  $k$  и  $l$  квантовыми числами, а иногда и между фазовыми частотами нейтральных мод. В этой работе рассматривается один из шести возможных резонансов Res 1, когда равны квантовые осевые числа ( $l = k$ ) и различны азимутальные ( $n \neq m$ ). Система амплитудных уравнений при таком резонансе имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{0m} &= \xi_{0m}(\sigma_m + A_{mm}|\xi_{0m}|^2 + B_{mm}|\xi_{1m}|^2 + C_{mn}|\xi_{0n}|^2 + D_{mn}|\xi_{1n}|^2) + Q_{mn}\xi_{1m}\xi_{0n}\xi_{1n}^*, \\ \dot{\xi}_{1m} &= \xi_{1m}(\sigma_m + B_{mm}|\xi_{0m}|^2 + A_{mm}|\xi_{1m}|^2 + D_{mn}|\xi_{0n}|^2 + C_{mn}|\xi_{1n}|^2) + Q_{mn}\xi_{0m}\xi_{0n}^*\xi_{1n}, \\ \dot{\xi}_{0n} &= \xi_{0n}(\sigma_n + C_{nm}|\xi_{0m}|^2 + D_{nm}|\xi_{1m}|^2 + A_{nn}|\xi_{0n}|^2 + B_{nn}|\xi_{1n}|^2) + Q_{nm}\xi_{0m}\xi_{1m}^*\xi_{1n}, \\ \dot{\xi}_{1n} &= \xi_{1n}(\sigma_n + D_{nm}|\xi_{0m}|^2 + C_{nm}|\xi_{1m}|^2 + B_{nn}|\xi_{0n}|^2 + A_{nn}|\xi_{1n}|^2) + Q_{nm}\xi_{0m}^*\xi_{1m}\xi_{0n}.\end{aligned}$$

Коэффициенты этой системы выражаются через собственные функции  $\Phi_{jp}$  ( $j = 0, 1; p = m, n$ ), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же  $\Phi_{jp}$ .

При определенных значениях параметров надкритичности  $k_1, k_2$  у амплитудной системы помимо тривиального решения, отвечающего течению Куэтта, существуют другие предельные режимы. Их существование и устойчивость зависят от значений коэффициентов амплитудных уравнений и некоторых соотношений между ними.

Построению нелинейной системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора и изучению различных возможных режимов течения для значений параметров вблизи точки резонанса Res 1 посвящены работы [3]– [5].

В малой окрестности точки Res 1 у амплитудных систем существуют решения на инвариантных подпространствах. Этим решениям отвечают стационарные, периодические и квазипериодические режимы уравнений движения (системы Навье-Стокса). Перечислим их:

1. *Инверсионно-связанная пара спиральных волн.* Могут существовать две пары таких решений – спиральные  $m$ - и  $n$ - волны, представляющие собой вторичные периодические режимы. Такие режимы возникают и при переходах общего положения, вне точек пересечения нейтральных кривых.

2. *Азимутальные волны.* Азимутальная волна представляет собой вторичный  $J$ - симметричный периодический режим. Таких решений может быть два – азимутальные  $m$ - и  $n$ - волны. Азимутальные  $m$ - волны (или  $n$ -волны) представляют собой нелинейную смесь пары  $J$ - связанных спиральных  $m$ - волн (или  $n$ -волн), бегущих вдоль оси цилиндров  $z$  навстречу друг другу.

3. *Инверсионно-связанные пары двойных спиральных волн.* Может существовать два двухпараметрических семейства таких смешанных режимов. Они представляют собой нестационарные двухчастотные квазипериодические режимы системы Навье-Стокса. Двойные спиральные волны первого семейства представляют собой нелинейную смесь спиральной  $m$ -волны и спиральной  $n$ -волны, бегущих вдоль оси  $z$  навстречу друг другу, а режимы второго семейства – смесь спиральных волн, бегущих в одном направлении.

4. *Суперпозиция азимутальной  $m$ - и азимутальной  $n$ -волн.* Каждое из этих решений представляет собой нестационарный двухчастотный квазипериодический режим – нелинейную смесь бегущих вдоль оси  $z$  азимутальных  $m$ - и  $n$ - волн. Если коэффициенты амплитудной системы удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то могут существовать равновесия отличные от суперпозиции азимутальной  $m$ - и азимутальной  $n$ -волн на инвариантном подпространстве со всеми неравными нулю амплитудами. Таким равновесиям отвечают двух-, трех- или четырехчастотные квазипериодические решения системы Навье-Стокса.

5. *Равновесия общего положения.* Равновесиям общего положения (равновесиям, не лежащим на инвариантных подпространствах) отвечают нестационарные четырехчастотные квазипериодические решения системы Навье-Стокса.

Кроме перечисленных решений у амплитудной системы возможны более сложные режимы – периодические, квазипериодические и хаотические. Поиск таких решений тесно связан с компьютерным экспериментом, и может опираться на результаты о решениях на инвариантных подпространствах.

В [3], [4] приводится два примера расчета точек резонанса Res 1 в случае невра- щательно симметричных мод (для азимутальных квантовых чисел  $m = 1, 2$  и  $n = m + 1$ ) и соответствующих им коэффициентов амплитудных уравнений. В данной работе приводятся некоторые результаты многочисленных расчетов точек резонанса Res 1 для произвольных азимутальных квантовых чисел  $m$  и  $n$ . Так, на рис.1 представлены кривые, состоящие из точек пересечения двух нейтральных кривых, отвечающих значениям азимутальных квантовых чисел  $m/n = 1/2$  и  $m/n = 1/3$  при  $\eta = 1.2$ . Сплошной линией изображена нейтральная кривая первого перехода, которая соответствует критическим значениям числа Рейнольдса  $R_{1*}(\alpha_*, R_2) = \min_{\alpha} R_{1*}(\alpha, R_2)$ . Правее точки В первая потеря устойчивости происхо-

дит при  $m=1$ , между А и В — при  $m=2$ , а левее точки А — при  $m=3$ . Заметим, что точки пересечения  $m/n = 1/3$  появляются раньше, чем возмущения с квантовым числом  $m = 3$  становятся наиболее опасными (раньше точки А).

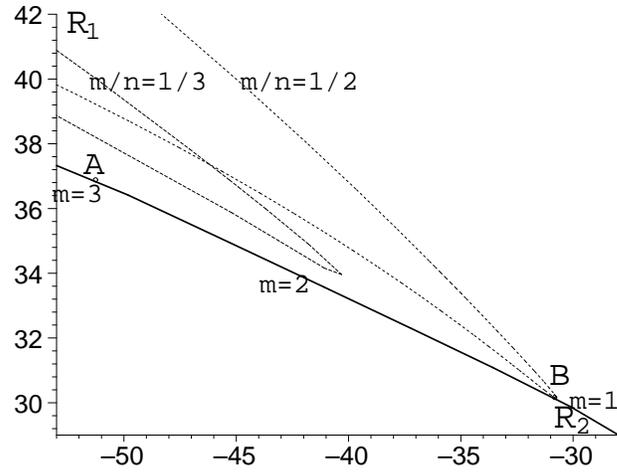


Рис. 1. Сплошная линия — нейтральная кривая первого перехода при  $\eta = 1.2$ . Правее точки В первая потеря устойчивости происходит при  $m=1$ , между А и В — при  $m=2$ , а левее точки А — при  $m=3$ . Штриховые линии состоят из двукратных точек пересечения ( $R_{1*}, R_{2*}$ ) нейтральных кривых, соответствующих отношению радиусов  $\eta = 1.2$ , различным волновым числом  $\alpha$ ,  $l = k = 1$  и указанным на рисунке азимутальным квантовым числом  $n$  и  $m$ .

Условия существования первых четырех групп режимов, перечисленных выше, получаются в виде явных соотношений между коэффициентами амплитудной системы. Это позволяет указать область на плоскости параметров надкритичности  $k_1, k_2$ , в которой они существуют.

Устойчивость каждого режима изучается относительно возмущений общего вида. Для спиральных и азимутальных волн существуют явные выражения для всех собственных значений спектра устойчивости, и можно указать области их устойчивости. Изучать устойчивость двойных спиральных волн и суперпозиции азимутальных волн приходится в фиксированной точке (при заданных значениях  $k_1, k_2$ ) в области их существования.

Для всех остальных решений амплитудных уравнений приходится численно находить области их существования и устойчивости в фиксированной точке плоскости надкритичности.

Результаты расчета показали, что в точках пересечения нейтральных кривых, образующих линии на рис.1, на плоскости параметров надкритичности  $k_1, k_2$  могут встретиться всевозможные случаи существования и несуществования всех перечисленных типов движений. При этом они могут быть устойчивы или неустойчивы.

Работа выполнена в рамках ЕНО "Регулярная и хаотическая гидродинамика",

а также при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Ш-5747.2006.1

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Юдович. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.
- [2] В. И. Юдович. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости. Шестой все-союзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов. с. 661.
- [3] P.Chossat, Y. Demay and G. Iooss. Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette-Taylor, Arch. Rational Mech. Anal. 99, 213-248, 1987.
- [4] P.Chossat and G. Iooss. The Couette–Taylor problem, Springer–Verlag, New York, 1991.
- [5] Юдович В.И, Овчинникова С. Н. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. I. Резонансный случай Res1, Res2. Деп. в ВИНТИ, 17.01.06, № 47, В-2006, 32 с.

**Morshneva I.V., Ovchinnikova S.N.** *Primary resonance Res 1 at the intersection of bifurcations in the Couette-Taylor problem.* The present paper is devoted to bifurcations in the Couette flow between rigid co-axial rotating cylinders. We study interaction of nonaxisymmetric neutral modes in the case of resonance Res 1. We present the results of numerous calculations of intersections for two neutral curves and give the list of some solutions of amplitude system which correspond to the stationary, periodic and quasi-periodic regimes of Navier-Stokes equations.

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУЦИРОВАННОЙ 3D МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАССИВНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ПРИМЕСИ В МЕЛКОМ ШИРОКОМ СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

**Надолин К. А.**

*Ростовский государственный университет*

В докладе представлены результаты исследования редуцированной трехмерной математической модели распространения пассивной неконсервативной примеси в мелком широком стационарном потоке.

1. В рамках подхода, изложенного в [1]–[4] для моделирования пассивного массопереноса в русловых потоках, редуцированная математическая модель перемешивания примеси в широком мелком стационарном водотоке при отсутствии ветрового воздействия приводит к уравнениям, которые относительно безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c, \quad (1)$$

$$c|_{t=0} = c^o, \quad \alpha c + \beta \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \pi^o, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -GI, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = w|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} - w \Big|_{z=\xi} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $c$  – концентрация примеси;  $u$  и  $w$  – продольная и вертикальная компоненты вектора скорости;  $\lambda$  – коэффициент распада вещества;  $D$  и  $\nu$  – функциональные параметры турбулентной диффузии и вязкости соответственно;  $GI = ReFr^{-1} \sin \phi$  – русловой параметр, где  $Re$  – число Рейнольдса, вычисленное по значению турбулентной вязкости на поверхности потока и характерным величинам продольной скорости и глубины потока,  $Fr$  – число Фруда,  $\phi$  – уклон потока. Известные функции  $c^o(x, y, z)$  и  $\pi^o(t, y, z)$  задают начальное распределение концентрации и его приток через входное сечение рассматриваемого участка, соответственно. Русло потока описывает уравнение  $z = h(x, y)$ , где  $h$  – известная функция, а стационарную свободную границу – уравнение  $z = \xi(x, y)$ , где  $\xi$  – неизвестная функция. Заметим, что в рамках используемой модели, при отсутствии внешнего воздействия на свободной поверхности поперечная скорость потока оказывается равна нулю. Т.о. поперечная координата  $y$  в задаче (1)–(3) является параметром.

Уравнения (1) образуют концентрационную подсистему, а (2), (3) – гидродинамическую подсистему модели. Гидродинамическая подсистема решается независимо от концентрационной подсистемы, но они согласованы по точности приближения [4].

Интегрируя гидродинамическую подсистему (2), запишем решение в виде

$$\begin{aligned}
 u &= GI (J_2 - \xi J_1), & w &= GI \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3). \\
 J_1 &= \int_z^{h(x,y)} \frac{d\tau}{\nu}, & J_3 &= \int_z^{h(x,y)} J_1(x, y, \tau) d\tau, \\
 J_2 &= \int_z^{h(x,y)} \frac{\tau d\tau}{\nu}, & J_4 &= \int_z^{h(x,y)} J_2(x, y, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку функция турбулентной вязкости  $\nu(x, y, z)$  должна быть задана, величины  $J_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  следует считать известными функциями.

Компоненты скорости в (4) выражены через возвышение свободной поверхности  $\xi$ , которое определяется из кинематического краевого условия (3) и, после подстановки выражения (4), принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

где  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  и их производные вычислены на свободной границе при  $z = \xi$ .

Для уравнения (5) надо задать форму свободной поверхности во входном створе  $x = 0$ . В дальнейшем будем считать, что  $\xi(0, y) = 0$ . Заметим, что если стационарная свободная поверхность оказывается плоской (т.е.  $\xi(x, y) \equiv 0$ ), то

$$\frac{\partial J_4}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Условие (6), в силу (4), является ограничением на функции  $h(x, y)$  и  $\nu(x, y, z)$ , т.е. предполагает определенную геометрию потока.

**2.** Для решения начально-краевой задачи (1) и определения концентрации примеси требуется сперва найти скорость потока, т.е. решить задачу Коши для уравнения (5) с коэффициентами, вычисление которых требует задания функции турбулентной вязкости  $\nu$ . В соответствии с принятым определением числа Рейнольдса, функция  $\nu$  должна быть равна 1 на поверхности потока. В простейшем случае постоянной вязкости  $\nu \equiv 1$ , и для (4) имеем

$$\begin{aligned}
 J_1 &= h(x, y) - z, & J_2 &= \frac{1}{2} (h^2(x, y) - z^2), \\
 J_3 &= \frac{1}{2} (h(x, y) - z)^2, & J_4 &= \frac{1}{6} (h(x, y) - z)^2 (2h(x, y) + z).
 \end{aligned} \tag{7}$$

В этом случае скорость (4) описывается формулами

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} GI [(h - \xi)^2 - (z - \xi)^2], \\
 w &= GI \left( (h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} (h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Условие (5) принимает вид

$$(h - \xi)^2 \frac{\partial(h - \xi)}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что  $h(x, y) - \xi(x, y) = h(0, y) - \xi(0, y)$ . Слева стоит глубина потока в произвольном сечении  $x$ , а справа — в начальном створе. Следовательно, при постоянной вязкости распределение глубин в мелком широком потоке сохраняется на всем рассматриваемом участке

$$H(y) = h(x, y) - \xi(x, y) = h(0, y) - \xi(0, y).$$

Формулы для скорости (4) примут вид

$$u = GI(h - z) \left( H - \frac{1}{2}(h - z) \right), \quad w = GI \frac{\partial h}{\partial x} (h - z) \left( H - \frac{1}{2}(h - z) \right). \quad (10)$$

Из формул (10) следует, что возникновение вертикальной скорости связано с изменчивостью ложа потока в продольном направлении. Этот результат согласуется изученной в [5] двумерной профильной задачей.

Преобразуем начально-краевую задачу (1), сделав замену переменной  $z = \zeta + h(x, y) - H(y)$ . Такая замена превращает русло потока в цилиндрическую поверхность с образующей  $H(y)$ , при этом для (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( D \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right) - \lambda c, \\ u &= \frac{1}{2} GI (H^2 - \zeta^2), \\ c|_{t=0} &= c^o, \quad \alpha c + \beta \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \pi^o, \quad \frac{\partial c}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=H} = \frac{\partial c}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

Начально-краевая задача (11) фактически является пространственно двумерной, поскольку переменная  $y$  входит в коэффициент и в краевое условие как параметр. Для ее решения может эффективно применяться метод характеристик в сочетании с методом Галеркина или конечно-разностные и конечно-элементные методы.

**3.** В качестве тестового примера была рассмотрена задача о переносе примеси в потоке, форма русла которого имеет вид

$$h(y) = 1 - (0.2y)^2, \quad -5 \leq y \leq 5,$$

а русловой параметр равен 100. Значения параметров диффузии и распада соответственно равны 1 и 0.001. Считается, что источник вещества находится во входном сечении потока, т.е. при  $x = 0$  задано значение концентрации  $c = 1$ .

На рисунках 1-4 представлены результаты расчетов, проведенных на основе полных трехмерных уравнений (вариант "а") и редуцированной модельной краевой задачи (11) (вариант "б").

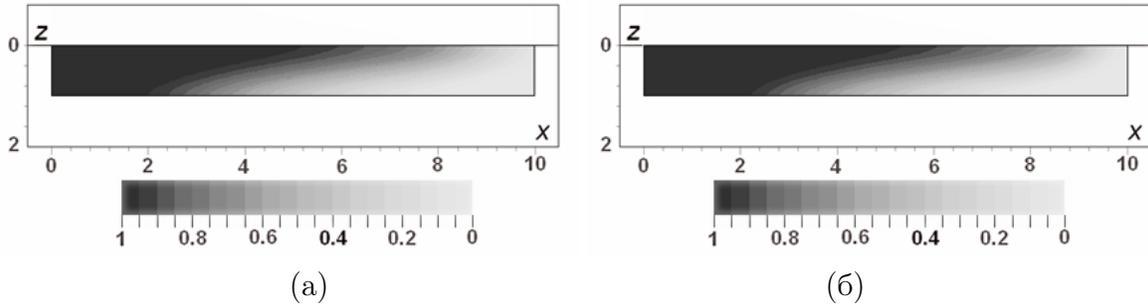


Рис. 1. Распределение концентрации в центральном продольном вертикальном сечении потока.

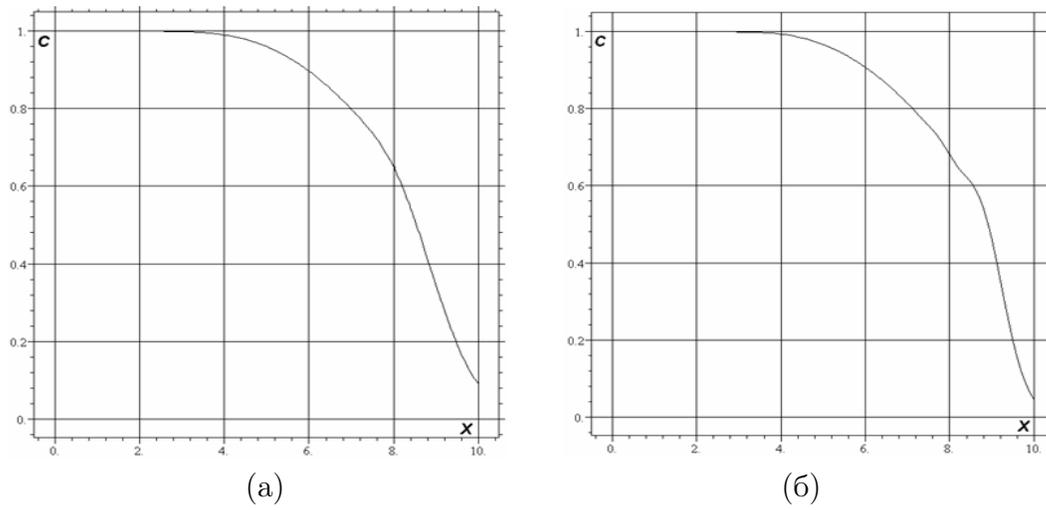


Рис. 2. Распределение концентрации на поверхности потока вдоль продольного направления.

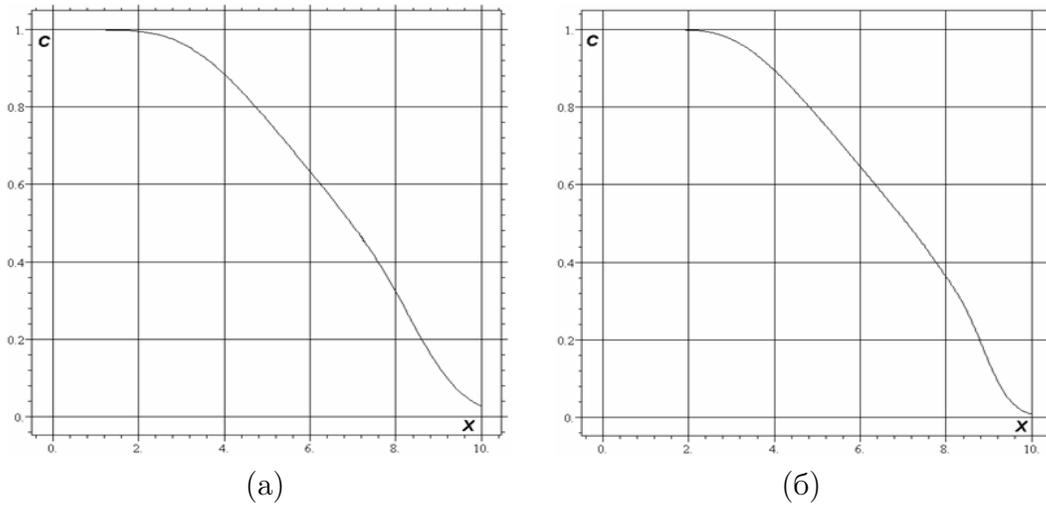


Рис. 3. Распределение концентрации на половине глубины потока вдоль продольного направления.

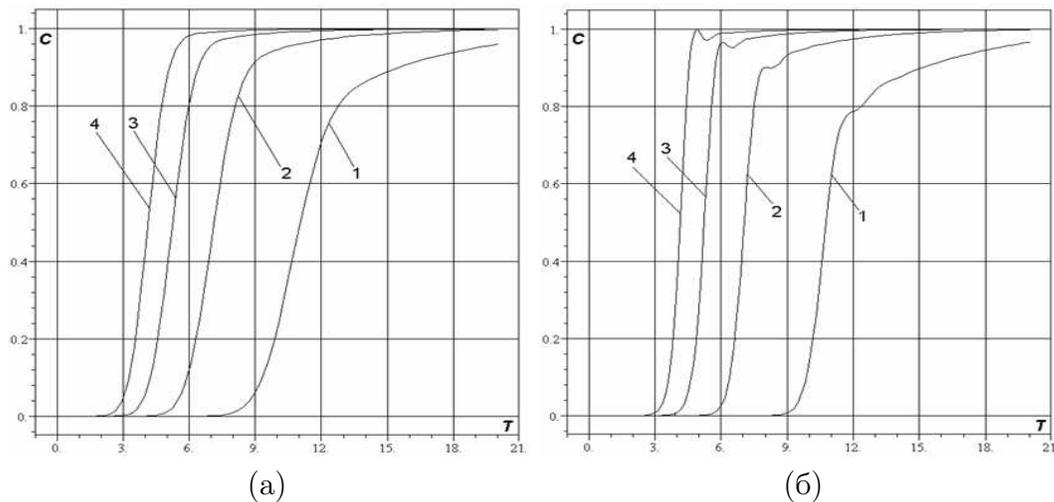


Рис. 4. Изменение с течением времени концентрации в точке с координатами  $(x,0,0)$ : 1 –  $x = L/2$ ; 2 –  $x = L/3$ ; 3 –  $x = L/4$ ; 4 –  $x = L/5$ , где  $L$  – длина потока.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Надолин К.А.* О математических моделях массопереноса в русловых потоках // Современные проблемы математического моделирования: Тр. XI Всерос. Шк.-семина., Дюрсо, 5-9 сентября 2005 г. – Ростов-на-Дону, 2005. С. 305–311.
- [2] *Надолин К.А.* Понижение размерности моделей распространения примесей в русловых потоках // Экология, экономика, экспертиза, информатика. Тез. докл. XXXIII шк.-сем. "Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования" (12-17 сентября 2005 г.). Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2005. – С. 44–46.
- [3] *Надолин К.А.* О редукиции уравнений гидродинамики слабоискривленных русловых потоков // IX Всерос. съезд по теоретич. и прикл. механики. Аннотации докладов. Т.1. (Нижегород, 22-28 августа 2006), Нижегород: Изд-во НГУ, 2006. С.159-160.
- [4] *Надолин К.А.* Классификация редуцированных 3D моделей русловых потоков // III Всерос. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", Абрау-Дюрсо, 4-10 сентября 2006. Тез. докл., Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2006. С.82-84.
- [5] *Бочев М.А., Надолин К.А., Николаев И.А.* Моделирование распространения вещества в двумерном стационарном открытом русловом потоке // Мат. моделир. 1996. Т. 8. № 1. С. 11–24.

**Nadolin K.A.** *The investigation of the reduced 3D model of the passive non-conservative admixture transport in wide and shallow steady stream.* The reduced 3D model of passive contaminant spreading in a steady viscous fluid stream is studied while the admixture's dissipation and diffusion are taken into account.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ДВУХЧАСТОТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Новосядлый В. А.

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается возникновение параметрического резонанса на деформируемой поверхности раздела в двухслойной системе под воздействием вертикальных поступательных двухчастотных колебаний. Построены нейтральные кривые, соответствующие двум основным типам параметрического резонанса — синхронному и субгармоническому. Исследовано влияние вида вибраций на параметрический ответ системы.

Задача о параметрическом возбуждении волн на свободной поверхности была впервые рассмотрена Фарадеем [1]. В экспериментах Вольфа [2] было показано, что высокочастотные вертикальные колебания сосуда могут подавить неустойчивость Рэля – Тейлора. В работах [3, 4] был экспериментально установлено возникновение волн в двухслойной системе при вертикальных вибрациях сосуда. Обзор работ по высокочастотным эффектам вибрационных воздействий приведен в [5], где рассмотрены случаи идеальной, либо маловязкой жидкости.

Данная работа посвящена изучению влияния вертикальных поступательных колебаний на поведение границы раздела двух несмешивающихся вязких несжимаемых однородных жидкостей в случае двухчастотных воздействий. В работах [6], [7] был рассмотрен случай одночастотных колебаний. Целью данной работы является выяснить, как влияет присутствие другой гармоники на возникновение параметрической неустойчивости.

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев несмешивающихся вязких несжимаемых однородных жидкостей с деформируемой границей раздела  $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ . Начало координат возьмем на недеформированной поверхности раздела. Координаты будем обозначать  $(x_1, x_2, x_3)$  или  $(x, y, z)$ . Ось  $z$  направим вертикально вниз. Верхняя и нижняя границы могут быть как мягкими, так и твердыми стенками ( $x_3 = H_1, x_3 = -H_2$ ) (стенка с индексом 2 — сверху, с индексом 1 — внизу).

Учитываются деформируемость поверхности раздела и силы поверхностного натяжения с коэффициентом  $\tilde{C}$ . Предполагается, что система как целое совершает вертикальные колебания по закону  $x_3 = \tilde{a}f(\tilde{\omega}t)$ , где  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция;  $\tilde{\omega}$  — частота;  $\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{\omega})$  — амплитуда колебаний. Номера компонент жидкости обозначены верхним либо нижним индексом.

Уравнения движения жидкостей, записанные в декартовой системе координат, жестко связанной с колеблющейся системой, имеют вид:

$$\tilde{\rho}_k \left( \frac{\partial \vec{v}^k}{\partial t} + (\vec{v}^k, \nabla) \vec{v}^k \right) = -\nabla p^k + \tilde{\mu}_k \Delta \vec{v}^k + \tilde{\rho}_k g(t) \vec{\gamma}, \quad \text{div } \vec{v}^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{v}^k = (v_1^k, v_2^k, v_3^k)$  — относительные скорости;  $p^k$  — давления;  $\tilde{\rho}_k$  — плотности компонент;  $\tilde{\mu}_k$  — коэффициенты динамических вязкостей;  $\vec{\gamma}$  — единичный

вектор оси  $x_3$ . Функция  $g(t) = g_0 - \bar{a}\bar{\omega}^2 f''(\bar{\omega}t)$  — переменное ускорение силы тяжести.

Краевые условия на поверхности раздела  $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$  возьмем в виде

$$\bar{v}^1 = \bar{v}^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \bar{v}^k \cdot \bar{\ell}, \quad (\tau_{ij}^1 - \tau_{ij}^2)n_j - (p^1 - p^2)n_i = \tilde{C}n_i \varkappa. \quad (2)$$

$$\tau_{ij}^k = \tilde{\mu}_k \left( \frac{\partial v_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^k}{\partial x_i} \right), \quad k = 1, 2, \quad \bar{\ell} = \left( -\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right), \quad (3)$$

Здесь  $\bar{\ell}$  — нормаль к поверхности раздела; направленная внутрь первой жидкости;  $\bar{n} = \bar{\ell}/|\bar{\ell}|$  — ее орт;  $\tau_{ij}^k$  — тензоры вязких напряжений,  $\varkappa$  — кривизна.

Как было сказано выше, две другие границы  $x_3 = H_1$ ,  $x_3 = -H_2$  могут быть как твердыми, так и мягкими — свободными от касательных напряжений — стенками. На твердой стенке необходимо поставить условия непротекания и прилипания

$$\bar{v}^k = 0. \quad (4)$$

Если же стенка — мягкая, то на ней должны выполняться условия непротекания и отсутствия касательных напряжений:

$$v_3^k = 0, \quad \frac{\partial v_1^k}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3^k}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2^k}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3^k}{\partial x_2} = 0.$$

Возможны и комбинации типов границ — одна граница свободная, другая — твердая. Кроме того, величины  $H_1$  и  $H_2$  могут быть как конечными, так и бесконечными. Случай двух мягких границ для одночастотных колебаний рассмотрен в [6]. Здесь же рассмотрим случай двух твердых границ.

**Квазиравновесное решение и его устойчивость.** Задача (1)–(4) имеет решение, соответствующее относительному равновесию

$$\bar{v}^{k0} = 0, \quad p^{k0} = \tilde{\rho}_k g(t)z, \quad \xi^0 = 0. \quad (5)$$

Здесь функции  $p^{k0}$  определены с точностью до произвольной функции времени.

Исследуем устойчивость этого решения методом линеаризации, полагая  $\bar{v}^k = \bar{v}^{k0} + \bar{u}^k$ ,  $p^k = p^{k0} + P^k$ ,  $\xi = \xi^0 + \eta$ . Ради краткости, рассматриваем плоскую задачу для возмущений. Переходя к безразмерным переменным, вводя стандартным образом функции тока  $\psi^k(x_1, x_3, t)$  приходим к задаче:

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi^k &= -\delta_k \Delta^2 \psi^k, \quad k = 1, 2. \\ z = 0 : \quad & -\frac{\partial \psi^k}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi^1}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \psi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi^2}{\partial x_1}, \\ & \delta_1 \left( \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial x_1^2} \right) = \delta_2 \left( \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial x_1^2} \right), \\ & -2 \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial x_1 \partial x_3} (\delta_1 - \delta_2) - (P^1 - P^2) - Q(t) (\rho_1 - \rho_2) \eta + C \Delta_1 \eta = 0. \\ z = h_1, -h_2 : \quad & \frac{\partial \psi^k}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi^k}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}$$

По аналогии с [8], введены безразмерные параметры:  $\rho_k = \tilde{\rho}_k/(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)$ ,  $\delta_k = \tilde{\mu}_k \mathcal{T}/(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2) \mathcal{L}^2$ ,  $C = \tilde{C} \mathcal{T}^2/(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2) \mathcal{L}^3$ ,  $\omega = \tilde{\omega} \mathcal{T}$ ,  $Q(t) = Q_0 - a\omega^2 f''(\omega t)$ ,  $Q_0 = g_0 \mathcal{T}^2/\mathcal{L}$ ,  $a = \tilde{a}/\mathcal{L}$ .  $\mathcal{L} = H_1 + H_2$  — масштаб длины,  $\mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)/(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2)$  — масштаб времени.

Исключая давления  $P^1$  и  $P^2$  и отделяя переменную  $x$  посредством замены:  $\psi^k(x, z, t) = i\alpha \tilde{\psi}^k(z, t) e^{i\alpha x}$ ,  $\eta(x, t) = \tilde{\eta}(t) e^{i\alpha x}$ , для амплитуд  $\tilde{\psi}^k$ ,  $\tilde{\eta}$  получаем задачу (далее опускаем тильды):

$$\rho_k \frac{\partial}{\partial t} (D^2 - \alpha^2) \psi^k = \delta_k (D^2 - \alpha^2)^2 \psi^k. \quad (6)$$

$$z = 0: \quad \psi^k = \frac{1}{\alpha^2} \eta_t, \quad D\psi^1 = D\psi^2, \quad \psi^1 = \psi^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 (D^2 + \alpha^2) \psi^1 &= \delta_2 (D^2 + \alpha^2) \psi^2, \\ 3\alpha^2 (\delta_1 - \delta_2) D\psi^1 + (\rho_1 - \rho_2) D\psi_t^1 - (\delta_1 D^3 \psi^1 - \delta_2 D^3 \psi^2) - \\ - Q(t) (\rho_1 - \rho_2) \eta - C\alpha^2 \eta &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$z = h_1, -h_2: \quad \psi^k = 0, \quad D\psi^k = 0. \quad (9)$$

**Решения Флоке. Дисперсионные уравнения.** Далее будем считать, что

$$f(\omega t) = \sum_{j=-N}^N f_j e^{ij\omega t}. \text{ Неизвестные } \psi^k, \eta \text{ разыскиваем в виде } (\psi^k(z, t), \eta(t)) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\psi_n^k(z), c_n) e^{in\omega t}. \text{ Здесь } \sigma = \sigma_r + i\sigma_i \text{ — показатель Флоке. Подставляя эти}$$

выражения в систему (6)–(9), получаем спектральную задачу для параметра  $\sigma$ .

Находя решение этой системы при каждом значении  $n$ , приходим к бесконечной системе для коэффициентов  $c_n$ :

$$M_n(\sigma) c_n = -2q \sum f_j c_k, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad q = (\rho_1 - \rho_2) a \omega^2 \alpha. \quad (10)$$

где суммирование идет по  $j$  и  $k$  таких, что  $j + k = n$ ,  $-N < j < N$ . Выражения для коэффициентов  $M_n$ , ввиду их громоздкости, не приводятся (см. [7]).

После преобразований, система (10) принимает вид:

$$M^{-1} A c = \lambda c, \quad c = (\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots), \quad \lambda = 1/q,$$

где матрица  $M$  — диагональная с ненулевыми элементами, матрица  $A$  является  $2N+1$ -диагональной с нулевой главной диагональю. Далее решалась задача на собственные значения относительно параметра  $\lambda$  при остальных фиксированных параметрах. Критическая амплитуда соответствует максимальному положительному  $\lambda$  (т.е. минимальному положительному  $q$ ).

Далее рассмотрен случай, когда функция  $f(\omega t) = (\cos \omega t + 0.5 \cos 2\omega t + 0.3 \sin 2\omega t)/\sqrt{1 + 0.5^2 + 0.3^2}$ . Сравнение будем проводить со случаем одночастотных колебаний  $f(\omega t) = \cos \omega t$ , рассмотренном в [7]. Графики этих функций приведены на рис. 1.

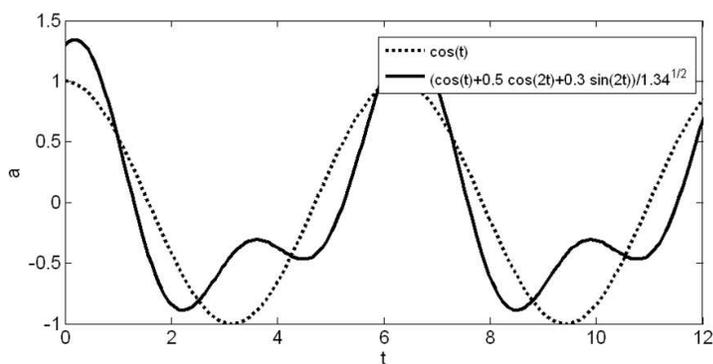


Рис. 1. Законы колебаний

**Численные результаты.** С применением метода цепных дробей [9], [10], было исследовано поведение областей параметрических резонансов в зависимости от частоты колебаний, плотностей, вязкостей и глубин слоев. Подробно результаты для случая  $f(\omega t) = \cos \omega t$  приведены в [7], в которой также рассмотрены предельные случаи высокочастотной вибрации и бесконечной глубины одного из слоев. Здесь же приведем сравнение одночастотных и двухчастотных воздействий на поведение нейтральных кривых  $a^*\omega$  от  $\omega$ , где \* означает минимизацию по волновому числу  $\alpha$  (рис. 2,  $\rho_1 = 0.75$ ,  $\delta_1 = 0.6$ ,  $h_1 = 0.6$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $C = 1$ ). Из этого рисунка видно, что дополнительные частотные слагаемые в функции  $f(\omega t)$  в указанном диапазоне частот могут изменить частотную характеристику поведения возмущений и оказывать стабилизирующее влияние.

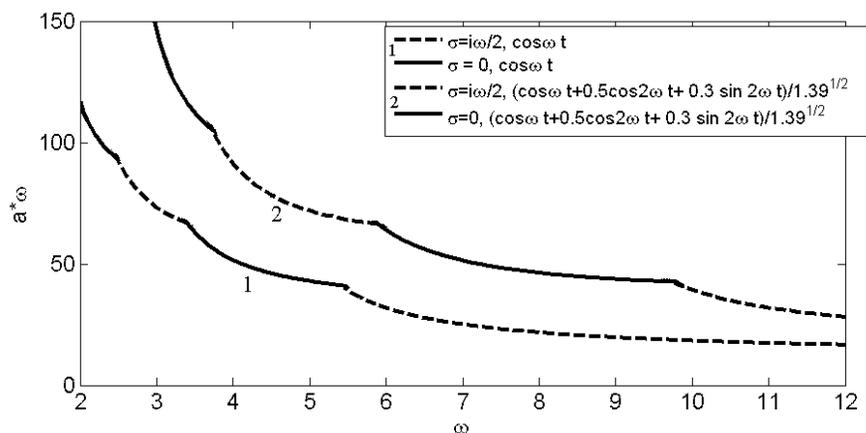


Рис. 2. Границы областей параметрических резонансов

Работа выполнена при частичной поддержке Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.5747.2006.1) и грантов РФФИ (№05-01-00567).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Faradey M.* On a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1831. Vol. 121. P. 209–318.
- [2] *Wolf G.H.* Dynamic Stabilization of the Interchange Instability of a Liquid-Gas Interface // *Physical Review Letters*. 1970. Vol. 24. № 9.
- [3] *С.Я. Секерж-Зенькович, В.А. Калиниченко.* Возбуждение внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями // *ДАН СССР*. 1979. № 249, т. 4. С.797–799.
- [4] *С.Я. Секерж-Зенькович, В.А. Калиниченко.* Возбуждение параметрической волны конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей // *ДАН СССР*. 1983. № 272, т. 5. С.1083–1084
- [5] *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М., 2003.
- [6] *Зеньковская С.М., Новосядлый В.А.* Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы. // *Изв. ВУЗов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*, 2004. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 117–123.
- [7] *Зеньковская С.М., Новосядлый В.А.* Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы // *Деп. в ВИНТИ №*. 2005. С. 37.
- [8] *Бирих Р.В., Бушуева С.В.* Термокапиллярная неустойчивость в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 3. С. 13–20.
- [9] *Маркман Г.С., Юдович В.И.* Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1972. № 3. С. 81–86.
- [10] *Yudovich V.I., Zenkovskaya S.M., Novosiadliy V.A., Shleykel A.L.* Parametric Excitation of Waves on a Free Boundary of a Horizontal Fluid Layer // *C.R. Mechanique*. 2004. Vol. 332. P. 257–262.

**Novosiadliy V.A.** *Parametric excitation of internal waves by two-frequency forcing.* This research considers the onset of parametric resonance on deformable interface in two-layer system under vertical translational two-frequency oscillations. Neutral curves corresponding to two main parametric resonance types — synchronous and double period — were calculated. Alternation of system response on oscillations of different frequency was discovered. The influence of vibration shapes on parametric response was investigated.

# ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ СТЕНОК БАСЕЙНА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО ТЕЛА

Норкин М. В.

*Ростовский государственный университет*

В случае, когда стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния, найдена асимптотика присоединенной массы тела. Изучен случай, когда область, занятая жидкостью имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. В качестве примера рассмотрен бассейн веретенообразной формы.

Рассматривается задача о центральном, безотрывном ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн [1]:

$$\Delta\Phi = 0, \quad r \in D, \quad p_t = -\rho\Phi \geq 0, \quad r \in S_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = v_0 n_z, \quad r \in S_1, \quad \Phi = 0, \quad r \in S_2, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \quad (2)$$

$$\int_D (\nabla\Phi)^2 dD < \infty \quad (3)$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал скоростей, приобретенных частицами жидкости непосредственно после удара;  $D$  — область, занятая жидкостью;  $S_1, S_2$  и  $S_3$  — соответственно смоченная поверхность твердого тела, свободная поверхность жидкости и неподвижная твердая граница бассейна;  $v_0$  — скорость, приобретенная телом в результате удара;  $n_x, n_y, n_z$  — проекции вектора внешней нормали на оси  $x, y, z$ ;  $p_t$  — импульсивное давление;  $\rho = \text{const}$  — плотность жидкости (в дальнейшем полагаем  $\rho = 1$ ). Декартовы координаты  $x, y, z$  введены таким образом, что оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости свободной поверхности, ось  $z$  направлена вертикально вниз в глубь жидкости.

Предполагается, что неподвижная твердая граница бассейна  $S_3$  получена в результате гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом  $h$  некоторой фиксированной поверхности  $S_3^0$  ( $S_3 = hS_3^0, x = hx^0, y = hy^0, z = hz^0$ ). Через  $G^0$  будем обозначать фиксированную (не зависящую от  $h$ ) область, ограниченную поверхностью  $S_3^0$  и плоскостью  $z = 0$ .

В дальнейшем считаем, что область, занятая жидкостью имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии  $xz$  и  $yz$ . В этом случае уравнения изменения импульса и момента импульса плавающего тела при центральном ударе приводят к соотношениям:

$$(m_T + m)v_0 = P_z, \quad P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad x_0 = \frac{m_T p_0}{m_T + m}, \quad y_0 = \frac{m_T q_0}{m_T + m} \quad (4)$$

Здесь  $m_T$  — масса тела;  $m$  — присоединенная масса;  $p_0, q_0$  — абсцисса и ордината центра тяжести тела;  $P_x, P_y, P_z$  — компоненты внешнего ударного импульса, приложенного к телу в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ .

Асимптотика для больших значений  $h$  строится при помощи специального асимптотического метода, основанного на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния [3]. Приведем только окончательный результат — асимптотику присоединенной массы тела:

$$m = m_\infty + \frac{\xi_1 (m_\infty + V)^2}{2\pi} h^{-3} + \frac{(m_\infty + V)(c_2 \zeta_1 + c_3 \zeta_2)}{4\pi} h^{-5} + \frac{\xi_1^2 (m_\infty + V)^3}{4\pi^2} h^{-6} + O(h^{-7}), \quad h \rightarrow \infty \quad (5)$$

$$c_2 = \iint_{S_1} (x^2 z - 3^{-1} z^3) n_z ds - \iint_{S_1} (2xz n_x + x^2 n_z - z^2 n_z) \Phi_1 ds, \quad (6)$$

$$c_3 = \iint_{S_1} (y^2 z - 3^{-1} z^3) n_z ds - \iint_{S_1} (2yz n_y + y^2 n_z - z^2 n_z) \Phi_1 ds, \quad (7)$$

$$\zeta_1 = 3\xi_5 + \xi_2, \quad \zeta_2 = 3\xi_6 + \xi_3 \quad (8)$$

$$\xi_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \xi_2 = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial x^2 \partial z}, \quad \xi_3 = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial y^2 \partial z}, \quad \xi_5 = -\frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \xi_6 = -\frac{\partial f_3}{\partial z} \quad (9)$$

$$\Delta f_k = 0, \quad r \in G^0, \quad f_k \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial n} \Big|_{S_3^0} = Q_k, \quad k = 1 - 3. \quad (10)$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{z}{R^3}, \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{z(4x^2 - y^2 - z^2)}{R^7}, \quad Q_3 = \frac{\partial}{\partial n} \frac{z(4y^2 - x^2 - z^2)}{R^7} \quad (11)$$

Здесь  $m_\infty$ ,  $\Phi_1$  — присоединенная масса плавающего тела и потенциал скоростей в случае неограниченной жидкости;  $V$  — объем погруженной части тела; частные производные в формулах (9) вычисляются в точке  $M_0(0, 0, 0)$ .

Отметим, что величины  $m_\infty$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , входящие в асимптотическую формулу (5), зависят только от геометрии плавающего тела. Для их определения необходимо вычислить интегралы по смоченной поверхности тела, содержащие потенциал скоростей  $\Phi_1$ . Постоянные  $\xi_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  зависят исключительно от формы границы бассейна и находятся в результате решения краевых для уравнения Лапласа в ограниченной области при отсутствии плавающего тела.

В случае, когда неподвижная твердая граница бассейна обладает осью симметрии  $z$  асимптотика присоединенной массы имеет вид (5), где

$$c_2 \zeta_1 + c_3 \zeta_2 = \frac{1}{2} \eta (c_2 + c_3), \quad \eta = 3\xi + 2\mu, \quad \xi = -\frac{\partial f_4}{\partial z} \Big|_{M_0}, \quad \mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 f_1}{\partial z^3} \right)_{M_0} \quad (12)$$

Здесь функция  $f_1$  определяется решением задачи (10) при  $k = 1$ , а функция  $f_4$  — решением следующей краевой задачи в фиксированной области  $G^0$ :

$$\Delta f_4 = 0, \quad r \in G^0, \quad f_4 \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial n} \Big|_{S_3^0} = Q, \quad Q = \frac{\partial}{\partial n} \frac{(3r^2 - 2z^2)z}{R^7} \quad (13)$$

В осесимметричном случае получено совпадение с результатами статьи [3].

В качестве конкретно примера рассмотрим задачу о центральном ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей бассейн, ограниченный веретенообразной поверхностью вращения. Данная поверхность получена вращением дуги окружности вокруг оси  $z$ , причем один конец этой дуги расположен на оси  $z$  ( $z > 0$ ), а другой — в плоскости  $z = 0$ .

Задача (10) при  $k = 1$  была решена двумя различными способами. Первый подход заключается в непосредственном применении метода разделения переменных для уравнения Лапласа в биполярных координатах [2], второй — основан на использовании функции тока  $\psi$ . В первом случае задача сводится к решению интегрального уравнения второго рода:

$$g(\tau) - \int_0^{\infty} h(s) [K(\tau - s) - K(\tau + s)] g(s) ds = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \alpha_0 H(\tau), \quad 0 < \tau < \infty \quad (14)$$

$$h(s) = \frac{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)}{2P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)} + 2 \operatorname{ctg} \alpha_0, \quad K(s) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_0 s}{\operatorname{sh} \pi s}$$

$$H(\tau) = -\frac{4\tau}{3} \cdot I_1 + \frac{6\tau}{5} \cos \alpha_0 \cdot I_2, \quad I_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sin \alpha_0 \operatorname{ch} \pi\tau} P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0)$$

$$I_2 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3 \sin^2 \alpha_0 \operatorname{ch} \pi\tau} \cdot \left[ -2 \operatorname{ctg} \alpha_0 P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0) + \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0) \right]$$

где  $P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0)$  и  $P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0)$  — функция Лежандра с комплексным значком и присоединенная функция Лежандра; величины  $c$  и  $\alpha_0$  связаны с характерными параметрами задачи  $b$  и  $d$  ( $d$  — радиус дуги вращения,  $b$  — координата центра дуги) по формулам:  $b = d \cos \alpha_0$ ,  $c = d \cos \alpha_0$ .

Для определения постоянной  $\xi_1$  получено следующее выражение:

$$\xi_1 = \xi_{10} c^{-3}, \quad \xi_{10} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\tau g(\tau) d\tau}{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)} \quad (15)$$

Второй подход позволил получить для постоянной  $\xi_1$  явное выражение:

$$\xi_1 = \xi_{10} c^{-3}, \quad \xi_{10} = 8 \int_0^{\infty} \frac{(\tau^2 + \frac{1}{4}) P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0) d\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)} \quad (16)$$

Путем замены переменных:  $x = -\gamma \ln x$ ,  $\tau = -\gamma \ln y$ ,  $\gamma > 0$ , интегральное уравнение (14) сводится к уравнению на отрезке  $[0,1]$ , решаемому численно. Для вычисления функций Лежандра используются их разложения в гипергеометрические ряды.

Важно отметить, что численные значения величины  $\xi_{10}$ , полученные двумя различными способами совпадают во всем диапазоне изменения параметра  $b/d$ . В дальнейшем численные расчеты коэффициента  $\xi_{10}$  рекомендуется проводить по явной формуле (16).

Аналогичные расчетные формулы получены для величины  $\eta$ . Приведем здесь только явную формулу:

$$\eta = \eta_0 c^{-5}, \quad \eta_0 = 64 \int_0^{\infty} \frac{(\tau^2 + \frac{1}{4})(\tau^2 - \frac{3}{4})P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha_0)}{\operatorname{ch} \pi\tau P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha_0)} d\tau$$

Ниже приводятся численные значения  $\xi_{10}$  и  $\eta_0$  для некоторых величин параметра  $b/d$ :

$\frac{b}{d}$	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\xi_{10}$	9.066	6.360	4.628	3.451	2.615	2	1.536	1.179	0.898	0.676
$\eta_0$	55.23	25.90	12.15	5.300	1.791	0	-0.867	-1.225	-1.299	-1.216

$\frac{b}{d}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\xi_{10}$	0.497	0.353	0.235	0.139	0.062
$\eta_0$	-1.050	-0.844	-0.623	-0.403	-0.193

Работа выполнена при поддержке гранта поддержки ведущей научной школы (НШ-5747.2006.1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Седов Л. И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. Цаги. 1934. Вып. 187. 26с.
- [2] *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220с.
- [3] *Норкин М. В.* Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. №3.С.114-122.

**Norkin M.V.** *The effect of the walls of an arbitrary tank in the problem of separation-free impact on a floating body.* In the case of basin walls at a large distance from the body, the asymptotics of the main impact parameters are found. The case where the domain occupied by the fluid has two perpendicular planes of symmetry is considered. Asymptotic expressions are given for the added mass. Examples of solutions are considered.

# ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРОТОННЫХ ПУЧКОВ НА МНОГОСЛОЙНЫЕ КОМПОЗИТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

**Осяев О. Г., Сахабудинов Р. В., Остапенко А. В.**

*Ростовский военный институт ракетных войск*

Рассматривается решение задачи о тепловом и напряженно-деформированном состоянии тонкостенной слоистой цилиндрической оболочки из композитного материала при нагреве локальным объемным источником тепла, обусловленном энерговыделением при прохождении ускоренного потока протонов.

В настоящее время все большее применение, особенно в ракетно-космической технике, находят многослойные композитные конструкции (МКК). Освоение космического пространства приводит к необходимости учитывать влияние воздействий высокоинтенсивных излучений на прочностную надежность конструкций летательных аппаратов (ЛА). При этом воздействие излучений может быть оказано и на локальные области несущих конструкций, наименее защищенные слоями специальной защиты.

При расчете энерговыделения в МКК в результате прохождения высокоэнергетичных пучков протонов (ВПП) допускается, что потери энергии падающих частиц мгновенно преобразуются в тепло, которое, затем, накапливается и не распространяется из области нагрева за все оставшееся время воздействия, поскольку материалы слоев корпуса обладают низкой температуропроводностью [1,5].

Для расчета мгновенного энерговыделения в МКК применяется методика определения профилей энерговыделения в многослойной оболочке с произвольной структурой слоев из неоднородных материалов [5].

На основании имеющихся исходных данных о начальной энергии частиц ВПП и характеристиках слоев МКК определяется энерговыделение пучка по толщине слоев  $dE/dX_3$  в расчете на одну падающую частицу. Полное энерговыделение в объеме конструкции от воздействия ВПП определяется с учетом распределения плотности падающих частиц на поверхности поражаемого объекта  $I(x_1, x_2, t, \nu)$ :

$$q(x_1, x_2, x_3, t, \nu) = dE/dX_3 I(x_1, x_2, t, \nu). \quad (1)$$

Полученное расчетное значение величины объемного источника тепла  $q(x_1, x_2, x_3, t, \nu)$  используется в трехмерных уравнениях теплопроводности, описывающих тепловое состояние МКК с произвольной структурой слоев.

Для каждого слоя уравнения имеют вид:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 H_3 q_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_1 H_3 q_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 q_{33}) \right] + \rho q, \quad (2)$$

$$q_{11} = -\frac{1}{H_1} \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial X_1} \quad (1 \rightleftharpoons 2, 3); \quad (3)$$

(каждый из слоев "К" является ортотропным);

граничные условия при

$$x_1 = x_1^* : \quad T = T^*; \quad q_{11} = q_{11}^* \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad (4)$$

при

$$x_3 = x_3^* : \quad T = T^\pm; \quad q_{33} = q_{33}^\pm - \rho H \frac{\partial x_3}{\partial t} - \sigma \varepsilon T^4, \quad (5)$$

при

$$x_3 = x_{3,l} : \quad T_l = T_{l+1}; \quad q_{33,l} = q_{33,l+1}, \quad (6)$$

начальные условия при

$$t = 0 : \quad T = T_{t=0}. \quad (7)$$

Здесь  $(q_{11}, q_{22}, q_{33})$ ,  $(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33})$ ,  $(H_1, H_2, H_3)$ ,  $T, \rho, H, \sigma, \varepsilon$  — соответственно, тепловые потоки, коэффициенты теплопроводности, параметры Ляме для направлений  $x_1, x_2, x_3$ ; температура, плотность, эффективная энтальпия разрушения, постоянная Стефана-Больцмана, степень черноты тела.

Уравнения разрешаются относительно функций, в которых выражаются условия теплового контакта слоев. Решение полученной системы уравнений проводится с использованием методов: рядов Фурье по продольной и окружной координатам, дискретной ортогонализации по нормальной к серединной поверхности координате, конечных разностей по времени.

Например, выбирая в качестве неизвестных в функции  $q_{33}, T$ , в которых выражаются условия контакта слоев (6) для многослойной цилиндрической оболочки ( $H_1 = H_3 = 1, H_2 = x_3$ ), получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{33}}{\partial x_3} &= -\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2 \partial x_2^2} - \frac{1}{x_3} q_{33} + q, \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} &= -\frac{q_{33}}{\lambda_{33}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим неизвестные функции  $q_{33}, T$ , а также тепловые потоки  $q_{33}^\pm, q$ , действующие на МКК, в виде двойных тригонометрических рядов

$$\{q_{33}, q_{33}^\pm, q\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{q_{33, nm}, T_{nm}, q_{33, nm}^\pm, q_{nm}\} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 (\cos nx_2 + \sin nx_2), \quad (9)$$

где

$$\{q_{33, nm}^\pm, q_{nm}\} = \int_0^t \int_0^{2\pi} \{q_{33}^\pm, q\} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 (\cos nx_2 + \sin nx_2) dx_1 dx_2,$$

$l$  — длина оболочки.

Раскладывая, кроме того, производные по времени в конечные разности [2]

$$\frac{T}{t} = \frac{11T(t_s)18T(t_{s-1}) + 9T(t_{s-2}) - 2T(t_{s-3})}{6\Delta t}, \quad (10)$$

после подстановки (9) и (10) в (8), приходим на каждом временном шаге  $t_s$  для каждой пары чисел  $m$  и  $n$  к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{q_{33}(t_s)}{dx_3} &= -\rho c_p \frac{11T(t_s)18T(t_{s-1}) + 9T(t_{s-2}) - 2T(t_{s-3})}{6\Delta t} + \lambda_{11} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 T(t_s) + \\ &+ \lambda_{22} \frac{n^2}{x_3^2} T(t_s) - \frac{1}{x_3} q_{33}(t_s) + q(t_s), \\ \frac{dT(t_s)}{dx_3} &= -\frac{q_{33}(t_s)}{\lambda_{33}} \quad (n \Leftrightarrow -n). \end{aligned} \quad (11)$$

Для решения системы уравнений (11) применяется метод дискретной ортогонализации, который позволяет автоматически удовлетворять условиям идеального теплового контакта слоев.

В качестве исходных уравнений для расчета параметров напряженно-деформированного состояния МКК при действии ВПП принимаются трехмерные уравнения движения, соотношения Коши для деформаций и закона Гука, полученные из известных нелинейных уравнений [3] для многослойной ортотропной оболочки с произвольной структурой слоев, при допущении, что деформации  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$  являются линейными функциями перемещений.

Из исходной линейной системы уравнений получаем линейризованную систему уравнений, разрешенную относительно шести функций параметров НДС — составляющих напряжений и перемещений по радиальной координате:  $\bar{\sigma} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, u_1, u_2, u_3\}$ .

Компоненты действующих на оболочку нагрузок, полей температур и функции параметров напряженно-деформированного состояния (НДС), согласно [4], раскладываются в двойные тригонометрические ряды по продольной и окружной координатам, а производные по времени — в конечные разности.

После подстановки результатов разложения в исходную систему уравнений для расчета полного НДС многослойных оболочек, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для пары волновых чисел  $m$  и  $n$  для каждого шага по времени. Осуществляя интегрирование полученной системы уравнений с использованием метода дискретной ортогонализации, позволяющего автоматически удовлетворять условиям идеального механического контакта слоев, а также, суммируя тригонометрические ряды разложения напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ , получаем решение задачи о трехмерном НДС многослойной оболочки с высокой степенью точности.

С помощью предложенной модели были проведены исследования НДС многослойных анизотропных оболочек из полимерных композитных материалов при нагреве локальной области ВПП. Расчет проводился для оболочки из материала СВМ с размерами:  $L/R = 0.5, l_0/R = 0.25, \varphi_0 = 0, 25L$  рад (где  $L, R$  — длина и радиус оболочки;  $l_0, \varphi_0$  — линейный и угловой размеры локальной области), при энергии пучка 20 МэВ и плотности тока  $0, 1 A/m^2$ .

Результаты расчета окружных и меридиональных напряжений наружной и внутренней поверхностей оболочки представлены на рисунке 1. На рисунке 2 представлены аналогичные результаты расчета для металлической оболочки из АМГ-6, имеющей такие же размеры и характеристики воздействия ВПП.

При сравнении результатов обнаружено общее сходство картины распределения напряжений в композитных и металлических оболочках, однако напряжения в композитной конструкции в 3-3,7 раза меньше, чем в металлической, в чем проявляется преимущество использования композитных материалов для несущих конструкций ракетно-космической техники.

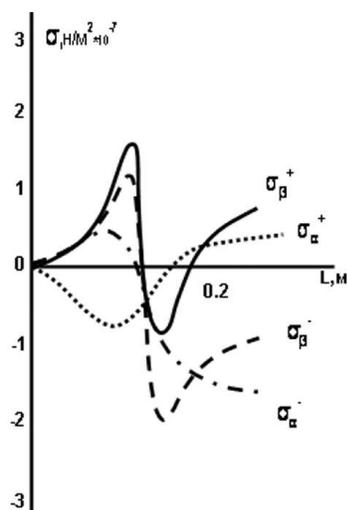


Рис. 1. Распределение окружных и меридиональных напряжений по наружной и внутренней поверхности оболочки из СВМ

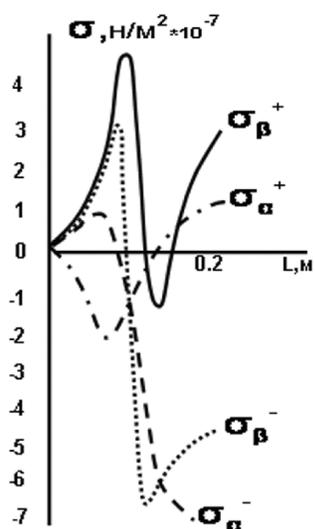


Рис. 2. Распределение окружных и меридиональных напряжений по наружной и внутренней поверхности оболочки из АМГ-6.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1982. 327 с.
- [2] *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаевский А.Т.* Статика и динамика сложных структур // Прикладные многоуровневые методы исследований. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
- [3] *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1984. 212 с.
- [4] *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Статика анизотропных толсто-стенных оболочек. Киев.: Вища школа, 1985. 190 с.
- [5] *Осяев О.Г., Потопахин В.А.* Расчет многослойных оболочек при термосиловом нагружении. Сборник алгоритмов и программ. Вып. 8. Ростов-на-Дону, 1990. 222 с.

**Osyayev O.G., Sahabudinov R.V., Ostapenko A.V.** *Influence eaten through bunch on laminated composite of the designs.* The decision of the problem is considered about thermal and tense-deformed condition thin-side flaky cylindrical shell from composite of the material at heating by local three-dimensional source of the heat, conditioned energy extraction at passing of the speed flow proton.

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАКРОЗАКРУЧИВАНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРА С КЛИНОВОЙ ДИСКЛИНАЦИЕЙ В ПСЕВДОКОНТИНУУМЕ КОССЕРА

Пустовалова О. Г.

*Ростовский государственный университет*

На примере нелинейно-упругого цилиндра с клиновой дисклинацией исследована возможность макрозакручивания, вызванного напряжениями моментной природы. Для конкретного вида определяющего соотношения нелинейно-упругого несжимаемого псевдоконтинуума Коссера проанализирована зависимость величины закручивания от параметра дефекта.

В модели континуума Коссера [1-4] каждая частица сплошной среды имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Положение частицы в деформированной конфигурации определяется радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  и собственно ортогональным тензором  $\mathbf{H}$ , называемым тензором микроповорота. Упругий потенциал  $W$  является функцией двух тензоров второго ранга — меры деформации  $\mathbf{Y}$  и тензора изгибной деформации  $\mathbf{L}$ . Тензоры  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{L}$  определяются соотношениями

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = -\mathbf{L} \times \mathbf{I},$$

здесь  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Псевдоконтинуум Коссера предполагает наличие связи [4]

$$\mathbf{Y}_x = 0, \tag{1}$$

означающей совпадение собственных поворотов частиц сплошной среды с их поворотами вследствие деформации тела.

Уравнения равновесия в континууме Коссера имеют вид:

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H}) = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H}) + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H})_x = 0, \tag{3}$$

здесь  $\mathbf{T}^*$  и  $\mathbf{M}^*$  тензоры напряжений и моментов в отсчетной конфигурации, определяемые формулами:

$$\mathbf{T}^* = \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{M}^* = \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{L}}. \tag{4}$$

$W_1$  — функция, состоящая из суммы нескольких слагаемых — упругого потенциала материала и слагаемых, соответствующих наложенным на материал связям. Для несжимаемого псевдоконтинуума, с учетом (1) и условия несжимаемости

$$\det \mathbf{Y} - 1 = 0, \tag{5}$$

функция  $W_1$  принимает вид:

$$W_1 = W + p(r)(\det \mathbf{Y} - 1) + \mathbf{q}(r) \cdot \mathbf{Y}_x, \quad (6)$$

$p(r)$  — индифферентный скаляр, а  $\mathbf{q}(r)$  — индифферентный вектор.

Для описания клиновой дисклинации в псевдоконтинууме Коссера используем полуобратное представление [5]:

$$R = R(r), \quad \Phi = \varkappa\varphi, \quad Z = z,$$

и полуобратное представление для тензора микроповорота  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \cos\chi(r) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi) + \sin\chi(r) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_R) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z.$$

Здесь  $\chi(r)$  — функция, задающая собственный поворот частицы среды, не связанный с деформацией. Из условия (1) следует, что  $\chi(r) \equiv 0$ , тогда тензор  $\mathbf{H}$  примет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z.$$

Градиент деформации  $\mathbf{C}$ , мера деформации  $\mathbf{Y}$ , тензор изгибной деформации  $\mathbf{L}$  определяются формулами:

$$\mathbf{C} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \varkappa \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z,$$

$$\mathbf{Y} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \varkappa \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z,$$

$$\mathbf{L} = \frac{\varkappa - 1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z.$$

Из условия несжимаемости (5) определяется функция изменения радиуса цилиндра вследствие образования в нем клиновой дисклинации:

$$R(r) = \sqrt{\frac{r^2 + A}{\varkappa}},$$

здесь  $A$  — константа интегрирования, определяемая из граничных условий.

Граничные условия для уравнений (2),(3) на боковой поверхности цилиндра имеют вид:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

$\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности цилиндра, в данной задаче совпадающий с вектором базиса  $\mathbf{e}_r$  отсчетной конфигурации. На торцах цилиндра обычно требуют выполнения интегрального соотношения, обеспечивающего обращение в ноль осевой силы и крутящего момента. Можно поступить и наоборот [6]: вычислив по построенному решению силу и момент, определить, испытывает ли цилиндр удлинение и закручивание (если, соответственно, сила или момент не равны нулю).

Система уравнений (2),(3) превращается в систему уравнений относительно функций  $p(r)$  и  $\mathbf{q}(r)$ , а так же константы  $A$ .

В частности, макрозакручивание цилиндра возможно, если сумма интегралов, задающих крутящий момент вокруг оси  $z$

$$M_1 = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} m_{ZZ} R R' dr, \quad M_2 = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sigma_{Z\Phi} R^2 R' dr \quad (8)$$

отлична от нуля. Здесь  $\sigma_{Z\Phi}$ ,  $m_{ZZ}$  — компоненты силового

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H}, \quad (9)$$

и моментного

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H}, \quad (10)$$

тензоров напряжений типа Коши в текущей конфигурации.

Для моделирования нелинейно-упругого поведения континуума Коссера обычно используется [4] определяющее соотношение, содержащее квадратичные по мере изгибной деформации слагаемые, например

$$W = 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \frac{\delta}{2} \operatorname{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{\gamma + \eta}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} \operatorname{tr} \mathbf{L}^2 \quad (11)$$

Данная функция потенциальной энергии при отсутствии моментных напряжений ( $\delta = \gamma = \eta = 0$ ) переходит в хорошо известный потенциал Бартенева-Хазановича [5].

С помощью (4), (6) для потенциала (11) находим:

$$\mathbf{T}^* = 2\mu \mathbf{I} + p(r) \mathbf{Y}^{-T} + \mathbf{q}(r) \cdot \mathbf{D},$$

$$\mathbf{M}^* = \delta \operatorname{tr} \mathbf{L} \mathbf{I} + (\gamma + \eta) \mathbf{L} + (\gamma - \eta) \mathbf{L}^T,$$

здесь  $\mathbf{D}$  — тензор Леви-Чивиты. Следствием моментных уравнений равновесия (3) является обращение в ноль вектора  $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ .

Из трех уравнений равновесия для напряжений (2) нетривиальным остается одно — проекция векторного равенства на ось  $\mathbf{e}_R$ :

$$\frac{dp}{dr} = 2\mu \frac{\varkappa - 1}{\sqrt{\varkappa} \sqrt{r^2 + A}}$$

С учетом первого граничного условия в (7) выражение  $p(r)$  принимает вид:

$$p(r) = \frac{2\mu}{\sqrt{\varkappa}} \left[ (\varkappa - 1) \ln \frac{r + \sqrt{r^2 + A}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + A}} - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + A}} \right]$$

Константа  $A$  определяется из уравнения

$$(\varkappa - 1) \ln \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + A}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + A}} + \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + A}} - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + A}} = 0$$

Ненулевые компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений находим с помощью (9), (10):

$$\sigma_{RR} = 2\mu R'(r) + p(r),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\Phi\Phi} &= 2\mu \frac{\varkappa R(r)}{r} + p(r), \\ \sigma_{ZZ} &= 2\mu + p(r), \\ m_{\Phi Z} &= (\gamma + \eta) \frac{\varkappa(\varkappa - 1)R(r)}{r^2}, \\ m_{Z\Phi} &= (\gamma - \eta) \frac{\varkappa - 1}{r}.\end{aligned}$$

В случае сплошного цилиндра напряжения  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\Phi\Phi}$ ,  $\sigma_{ZZ}$  имеют логарифмическую особенность в нуле, моментные напряжения  $m_{\Phi Z}$ ,  $m_{Z\Phi}$  возрастают при  $r \rightarrow 0$  пропорционально  $r^{-1}$  и  $r^{-2}$  соответственно.

Для модели (11) псевдоконтинуума Коссера образование дисклинации в несжимаемом цилиндре не сопровождается макрозакручиванием цилиндра, так как компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{Z\Phi}$  и моментных напряжений  $m_{ZZ}$  равны нулю.

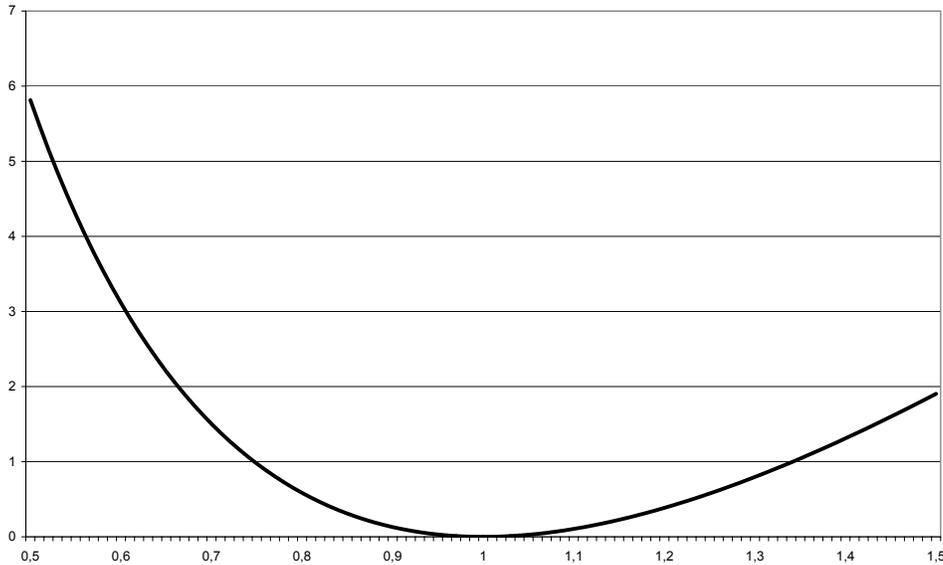


Рис. 1. Зависимость крутящего момента от мощности дисклинации

Учет кубических слагаемых в потенциале (11) может привести к новым физическим эффектам. Например, при рассмотрении такой же задачи о дисклинации для упругого потенциала вида:

$$W = 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \eta |\operatorname{tr}(\mathbf{L}^2 \cdot \mathbf{L}^T)|,$$

оказывается, что компоненты тензоров напряжений  $\mathbf{T}$  и моментных напряжений  $\mathbf{M}$ , определяющие закручивание цилиндра, отличны от нуля:

$$\sigma_{z\Phi} = -\eta \frac{(\varkappa - 1)^2 \varkappa \sqrt{\varkappa(r^2 + A)}}{r^2 \sqrt{\varkappa(r^2 + A)} + r^3},$$

$$m_{zz} = \eta \left( \frac{\varkappa - 1}{r} \right)^2.$$

На рисунке представлен график зависимости суммарного момента  $M_1 + M_2$  (8) от мощности дисклинации  $\varkappa$  для полого цилиндра с отношением радиусов  $r_0/r_1 = 0.1$ .

Из рисунка видно отсутствие кручения при отсутствии дисклинации. График не является симметричным: в случае введения клина ( $\varkappa < 1$ ) крутящий момент растет быстрее. Нужно отметить, что данный график не позволяет делать количественных выводов о влиянии дисклинации на угол закручивания: для этого требуется решить существенно более сложную (для континуума Коссера) задачу о закручивании цилиндра с образованием в нем дисклинации.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Сб. перев. 1965, № 3(91). С. 89–112
- [2] *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика. Сб. перев. 1965, № 3(91). С. 113–140.
- [3] *Шкутин Л.И.* Нелинейные модели деформируемых моментных сред // ПМТФ. 1980, № 6. С. 111–117
- [4] *Зубов Л.М., Карякин М.И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями // ПМТФ. 1990. № 3. С. 160–167.
- [5] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости // М.: Наука, 1980. 512 с.
- [6] *Карякин М.И., Пустовалова О.Г., Резниченко А.А.* Деформирование нелинейно-упругого цилиндра с внутренними напряжениями // Труды VIII-й Международной конференции. Ростов-на-Дону, 14–18 октября 2002 года. Т. 2. Ростов-на-Дону: Новая книга, 2003. С. 109–112

**Pustovalova O.G** *Study of the macro-twisting of non-compressible cylinder with screw disclination in the Cosserat's pseudo-continuum.* Using as an example the nonlinear cylinder with screw dislocation the possibility of macro-twisting causing by couple stresses was investigated. For the partial form of third-order constitutive equation the dependence of torsion upon the disclination parameter was analyzed.

# ТРЕХМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

**Сазонов Л. И.**

*Ростовский государственный университет*

Для трехмерной стационарной задачи обтекания системы тел при малых числах Рейнольдса установлено, что ее решение можно представить в виде сходящегося в норме некоторого банахова пространства ряда из решений линейной системы Озеена. В качестве приложения общих результатов рассмотрена задача об обтекании вращающегося шара потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для данной задачи получена формула для силы сопротивления, обобщающая известную формулу Праудмена-Пирсона.

Задача трехмерного стационарного обтекания системы тел потоком вязкой несжимаемой жидкости состоит в определении решения системы Навье-Стокса

$$\begin{cases} \Delta v - \nabla p = Re(v, \nabla)v \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , являющейся внешностью системы ограниченных тел  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), с граничным условием

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

и условием на бесконечности

$$v|_{\infty} = e^1 = (1, 0, 0). \quad (3)$$

Здесь  $v$  — поле скорости жидкости,  $p$  — функция давления,  $Re$  — число Рейнольдса.

Для дальнейшего удобно перейти к системе Озеена

$$\begin{cases} \Delta u - 2\varepsilon\partial_1 u - \nabla p = 2\varepsilon(u, \nabla)u \\ \operatorname{div} u = 0, u|_{\partial\Omega} = a, u|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

которая получается из (1) после замен  $v = u + e^1$ ,  $Re = 2\varepsilon$ .

Собственно для задачи обтекания  $a = -e_1$ , но в дальнейшем рассматриваются общие граничные условия. Например, неоднородные граничные условия возникают при протекании жидкости через поверхность обтекаемых тел или при вращении этих тел (в стационарном случае границы тел должны быть поверхностями вращения).

Существование решения задачи обтекания установлено Ж. Лере [1]. Другие варианты доказательства принадлежат ряду авторов (см., например, О.А. Ладыженская [2], Р. Финн [3]).

При малых числах Рейнольдса, несмотря на наличие малого параметра лишь при младших производных, задача не является регулярной в том смысле, что ее

решение нельзя представить в виде степенного ряда по параметру  $Re$  (парадокс Уайтхеда). В случае обтекания шара и цилиндра при малых числах Рейнольдса построение асимптотики выполнено в работе И. Праудмена и Дж. Пирсона [4] (см. также [5]) методом сращиваемых асимптотических разложений: внутреннее и внешнее разложения сращиваются в области перекрытия, где пригодны оба разложения. Следует сказать, что в [4] существенно используется специфика области (для шара и цилиндра существуют достаточно простые явные решения системы Стокса) и отсутствует строгое обоснование асимптотики. Отметим также, что на необходимость строгого обоснования этих результатов и продолжения исследований в этом направлении указано в обзоре В.И. Юдовича [6].

Построение и обоснование асимптотики в случае произвольного тела и общих граничных условий выполнено в [7] (двумерное обтекание), [8]–[10] (трехмерное обтекание). Основная идея, использованная в этих работах, состоит в том, что внешнее разложение строится из решений системы Озеена во всем пространстве, имеющих особенность в нуле типа особенности фундаментального решения; такие решения зависят от двух ( $n = 2$ ) или трех ( $n = 3$ ) свободных параметров, для выполнения граничных условий к каждому члену внешнего разложения добавляется член внутреннего разложения — решение системы Стокса, из условий разрешимости (условий существования решений системы Стокса с нулевым условием на бесконечности при  $n = 2$  или существования решения, имеющего порядок убывания  $O(1/|x|^2)$  при  $n = 3$ ) определяется зависимость свободных параметров от числа Рейнольдса.

В данной работе исследуется представимость решения трехмерной задачи обтекания в виде сходящегося ряда из решений линеаризованной системы Озеена. Вместе с системой (4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p = 2\delta(u, \nabla)u \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

с некоторым вспомогательным малым параметром  $\delta$ . Решение системы (5) будем разыскивать в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \delta^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} \delta^n. \quad (6)$$

Тогда для определения  $u^{(n)}$ ,  $p^{(n)}$  получаем следующие краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u^{(0)} - 2\varepsilon \partial_1 u^{(0)} - \nabla p^{(0)} = 0 \\ \operatorname{div} u^{(0)} = 0, \quad u^{(0)}|_{\partial\Omega} = a, \quad u^{(0)}|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta u^{(n)} - 2\varepsilon \partial_1 u^{(n)} - \nabla p^{(n)} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (u^{(k)}, \nabla) u^{(n-1-k)} \\ \operatorname{div} u^{(n)} = 0, \quad u^{(n)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(n)}|_{\infty} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ниже устанавливается существование решений систем (7), (8) в подходящем банаховом пространстве и условия сходимости рядов (6) при  $\delta = \varepsilon$ . (В этом случае ряды являются решением задачи обтекания.)

**Оценки решений линеаризованной системы Озеена.**

Рассмотрим в области  $\Omega$  систему Озеена

$$\begin{cases} \Delta u + 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для стационарной системы Навье-Стокса хорошо известны результаты о существовании и регулярности решений [11]–[13]. В данном случае нас, в первую очередь, интересуют равномерные по  $\varepsilon > 0$  оценки при больших  $|x|$ .

Введем весовые функции

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varepsilon, x) &= (1 + |x|)(1 + s(\varepsilon x)), \quad s(x) = |x| - x_1, \\ \gamma_2(\varepsilon, x) &= \begin{cases} (1 + |x|^2), & |x| < 1/\varepsilon \\ \varepsilon^{-1/2}(|x|(1 + s(\varepsilon x)))^{3/2}, & |x| > 1/\varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

и нормы

$$\|u\|_1 = \sup_{x \in \Omega} |\gamma_1(\varepsilon, x)u(x)|, \quad \|u\|_2 = \sup_{x \in \Omega} |\gamma_2(\varepsilon, x)u(x)|.$$

Обозначим через  $X_\varepsilon$  пространство векторных полей  $u$ , для которых конечна норма

$$\|u\|_{X_\varepsilon} = \|u\|_1 + \|\partial u\|_2 + \|u\|_{W_q^2(\Omega)}.$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$  при некотором  $q > 3$ ,  $f = (v, \nabla)w$ , где  $v, w \in X_\varepsilon \cap C^\infty(\Omega)$ . Тогда решение  $(u, p)$  системы Озеена (9) удовлетворяет условиям  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $p \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  и равномерным оценкам

$$\|u\|_{X_\varepsilon} \leq c \ln(1/\varepsilon) \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} + \|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}, \quad (10)$$

$$\|p\|_{W_q^1(\Omega)} \leq c \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} + \|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}. \quad (11)$$

При доказательстве теоремы используются отмеченные выше результаты о разрешимости системы Стокса в пространствах Соболева, весовые оценки устанавливаются на основе оценок гидродинамических потенциалов для линеаризованной системы Озеена из [14].

**Сходимость рядов.**

Из теоремы 1 следует, что справедливы оценки

$$\|u^{(0)}\|_{X_\varepsilon} \leq a_0, \quad \|p^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega)} \leq a_0, \quad (12)$$

$$\|u^{(n)}\|_{X_\varepsilon} \leq c \ln(1/\varepsilon) \sum_{j=0}^{n-1} \|u^{(j)}\|_{X_\varepsilon} \|u^{(n-1-j)}\|_{X_\varepsilon}, \quad (13)$$

$$\|p^{(n)}\|_{W_q^1(\Omega)} \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \|u^{(j)}\|_{X_\varepsilon} \|u^{(n-1-j)}\|_{X_\varepsilon},$$

причем константы  $a_0, c$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Исследование сходимости рядов (6) базируется на следующем предложении.

**Лемма 1.** Пусть последовательность неотрицательных чисел  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяет условиям

$$a_n \leq c \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{n-1-j}, \quad n \geq 1.$$

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  сходится при  $|t| < 1/(4ca_0)$ .

Из оценок (12), (13) и леммы 1 при выполнении условия  $\delta < 1/(4ca_0 \ln(1/\varepsilon))$  ряды (6) сходятся соответственно в норме пространства  $X_\varepsilon$  и  $W_q^1(\Omega)$ . Поэтому при  $0 < \delta = \varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  есть корень уравнения  $\varepsilon \ln(1/\varepsilon) = 1/(4ca_0)$ , ряды (6) определяют решение задачи обтекания.

Аналогично могут быть рассмотрены некоторые случаи растущих при  $\varepsilon \rightarrow 0$  граничных условий.

### Обтекание вращающегося шара.

В случае обтекания вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  шара единичного радиуса поле скорости жидкости представимо в виде  $v = u + e^1$ , где  $u$  — решение системы (4) с граничным полем  $a = -e^1 + \omega \times x$ .

Как было установлено выше ее решение в случае достаточно малого числа Рейнольдса  $Re$  представимо в виде рядов (6). Стандартную формулу для силы сопротивления можно преобразовать к виду

$$F = -1/Re \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (np^{(k)} + Re n_1 u^{(k)}) ds,$$

где  $n$  — внешняя нормаль на сфере  $S_R$ .

Для вычисления силы сопротивления с точностью до  $O(\varepsilon)$  нужно найти  $u^{(k)}$ ,  $k = 0, 1$ . Фактически удается построить точное решение системы (7), которое удовлетворяет граничному условию на поверхности шара с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  и приближенное решение системы (8) с точностью до  $O(\varepsilon)$ . Это позволяет установить строго обоснованную формулу

$$F = \frac{6\pi}{Re} \left[ \left(1 + \frac{3}{8}Re\right)e_1 - \frac{9}{40}Re^2 \ln(1/Re)e^1 + \frac{5}{6}Re(\omega_2 e^3 - \omega_3 e^2) + O(Re^2) \right].$$

При  $\omega = 0$  получается известное уточнение формулы Озеена, данное Праудменом и Пирсоном.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00567 и НШ-5747.2006.1

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Leray J. Etude de diverses equations, integrales non lineaire et de quelques problemes que pose l'Hydrodynamique // J.Math. pures et appl. 1933. Т. XII. Р. 1–82.

- [2] Ладыженская О.А. Исследование уравнений Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости // УМН. 1959. Т. 14. № 3. С. 75–97.
- [3] Finn R. On the steady-state Solutions of the Navier-Stokes Equations // Acta Math. 1961. V. 105. P. 197–244.
- [4] Proudmen I., Pearson J.R.A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cilinder // J. Fluid Mech. 1957. 2. P. 237–262.  
Русский перевод: Праудмен И., Пирсон Дж. Разложения по малым числам Рейнольдса в задаче обтекания сферы и кругового цилиндра // Сб. Механика. 1958. № 2 (48).
- [5] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967.
- [6] Юдович В.И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 1. С. 61–102.
- [7] Сазонов Л.И. Обоснование асимптотического разложения решения двумерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса // Известия РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 125–154.
- [8] Мальцев Д.А., Сазонов Л.И. Асимптотическое разложение решения трехмерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса // Деп. ВИНТИ. 2004. № 1356 - В04.
- [9] Мальцев Д.А., Сазонов Л.И. Построение асимптотического разложения решения трехмерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошной среды. Спецвыпуск. 2004. С. 164–170.
- [10] Мальцев Д.А., Сазонов Л.И. Обоснование асимптотики решения трехмерной стационарной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса. Деп. в ВИНТИ 29.11.05 № 1560-В2005.
- [11] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости М.: Физматгиз. 1961.
- [12] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. М.: Мир. 1981.
- [13] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 1972.
- [14] Сазонов Л.И. Об асимптотике решения задачи трехмерного обтекания вдали от обтекаемых тел // Известия РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 173–196.

**Sazonov L.I.** *Three-dimensional stationary flow past a system of bodies at small Reynolds number.* Three-dimensional stationary flow past a system of bodies is considered. The solution at small Reynolds number is constructed in the form of infinite series. Each term of these series is given as solution for the linear Oseen's problem. The convergence of the solution in the specified Banach space is established. This technique is applied to the case of rotating sphere in viscous incompressible fluid. The generalization on the well-known formulae of Proudman-Pearsons is derived for the drag force.

# К РАСЧЕТУ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПО ТЕОРИЯМ КИРХГОФА-ЛЯВА И ТИПА ТИМОШЕНКО

**Сафроненко В. Г., Трифонов В. В.**

*Ростовский государственный университет,  
НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.*

Проведен сравнительный численный анализ амплитудно-частотных характеристик цилиндрической оболочки из однонаправленного волокнистого композита, рассчитанных по теории Кирхгофа-Лява и теории типа Тимошенко. Результаты расчетов указывают на необходимость учета деформаций поперечного сдвига и инерции вращения.

Широкое использование в изделиях современной техники тонкостенных оболочек, выполненных из волокнистых композитов с полимерным связующим выявили необходимость учета новых факторов. К их числу, в первую очередь, следует отнести резко выраженную анизотропию деформативных свойств композита и его повышенную податливость на поперечный сдвиг. Последнее обстоятельство приводит к необходимости использования при расчете амплитудно-частотных характеристик композитных оболочек уточненных теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига и инерцию вращения.

Рассмотрим результаты расчетов АЧХ жестко заземленной пятислойной цилиндрической оболочки, проведенных в рамках классической теории Кирхгофа-Лява [1], не учитывающей деформации поперечных сдвигов в сравнении с результатами расчетов по теории типа Тимошенко [2]. Эффективные характеристики однонаправленного композита определяются через механические свойства упругого волокна ( $E_f, \nu_{12f}, G_f, V_f$ ) и полимерного связующего, термовязкоупругие свойства которого для случая малых колебаний определяются через вязкоупругие аналоги модуля Юнга, коэффициент Пуассона и модуля сдвига [3]. Гармоническая поверхностная нагрузка распределена по цилиндрической панели в центральной части оболочки и имеет амплитуду  $p_3 = 0,1$  МПа. Геометрические параметры оболочки:  $L = 5R$ ,  $R = 0,2$  м, Общая толщина пакета  $h = 0,002$  м. При расчетах использована модель вязкоупругого полимерного тела [4], параметры которой соответствовали поливинилхлориду (ПВХ). Для упругого волокна примем:  $E_f = 186$  ГПа;  $\nu_f = 0,3$ ;  $\rho_f = 1730$  кг/м<sup>3</sup>. Объемное содержание волокна  $V_f = 0,5$ . На рис.1-3 представлены АЧХ, рассчитанные по указанным теориям.

Результаты указывают на то, что при выбранных параметрах задачи наибольшие совпадения АЧХ достигаются в низкочастотном диапазоне  $\Omega \in [0,007 \div 0,107]$ . На первом резонансе при определении амплитуды поперечных колебаний  $|W_1|$  расхождение составляет пять процентов. С повышением частоты колебаний расхождение увеличивается как при определении резонансных частот, так и амплитуд поперечных колебаний. При этом резонансные частоты, рассчитанные по теории Кирхгофа-Лява, находятся выше соответствующих частот, полученных по теории типа Тимошенко. Это объясняется завышением жесткостных характеристик

оболочки, связанных с определением поперечных сдвигов. Проведен ряд расчетов АЧХ в низкочастотном диапазоне при различных соотношениях между жесткостными характеристиками полимерной матрицы и упругого волокна. Введем в рассмотрение коэффициент  $K_E = \frac{E_m^{Re}}{E_f}$ , определяемый отношением динамического модуля полимера и модуля Юнга волокна при постоянном  $\tan \delta = 0,1$ . На рис. 4-6 представлены АЧХ рассчитанные при значениях  $K_E = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . В таблице даны значения первых резонансных частот и амплитуд колебаний для обеих теорий в зависимости от  $K_E$ . Результаты расчетов показывают, что понижение динамического модуля ведет к существенному качественному и количественному расхождению в определении резонансных частот и амплитуд поперечных колебаний. Это указывает на необходимость использования для решения поставленных выше задач неклассических теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига.

$K_E$	$10^{-2}$		$10^{-3}$		$10^{-4}$	
	$\Omega_1$	$ W _1$	$\Omega_1$	$ W _1$	$\Omega_1$	$ W _1$
Теория Кирхгофа-Лява	0,031	22,7	0,019	95,3	0,009	384,5
Теория типа Тимошенко	0,032	22,5	0,023	150,6	0,021	248,8

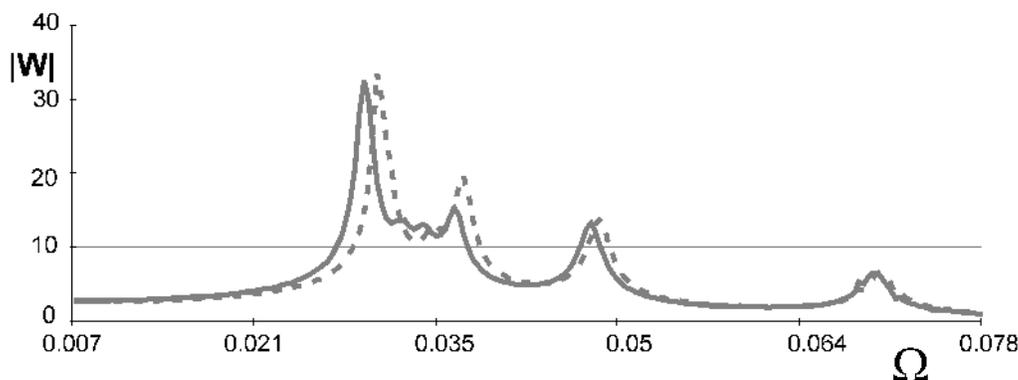


Рис. 1. Теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)

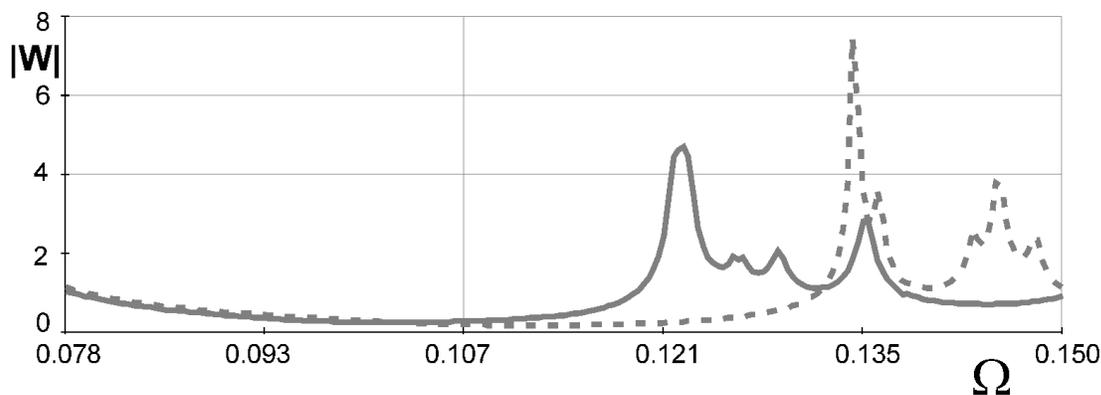


Рис. 2. Теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)

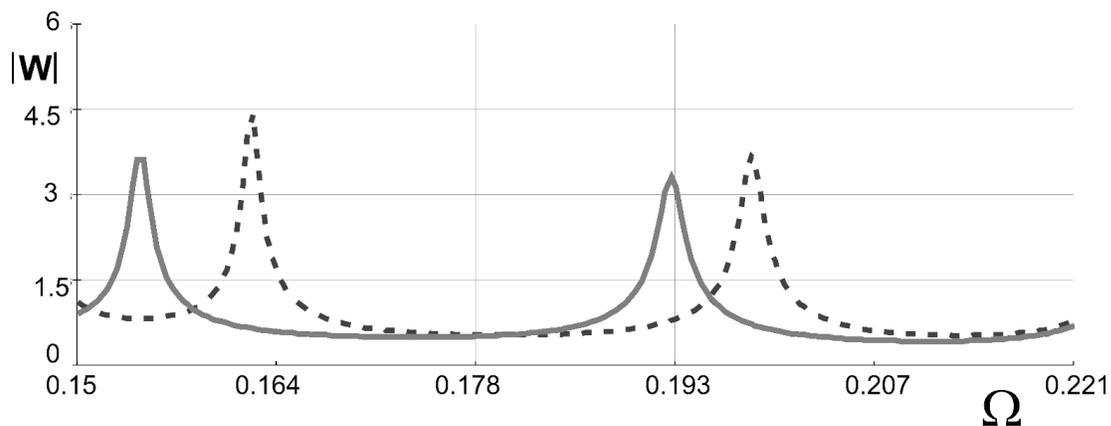
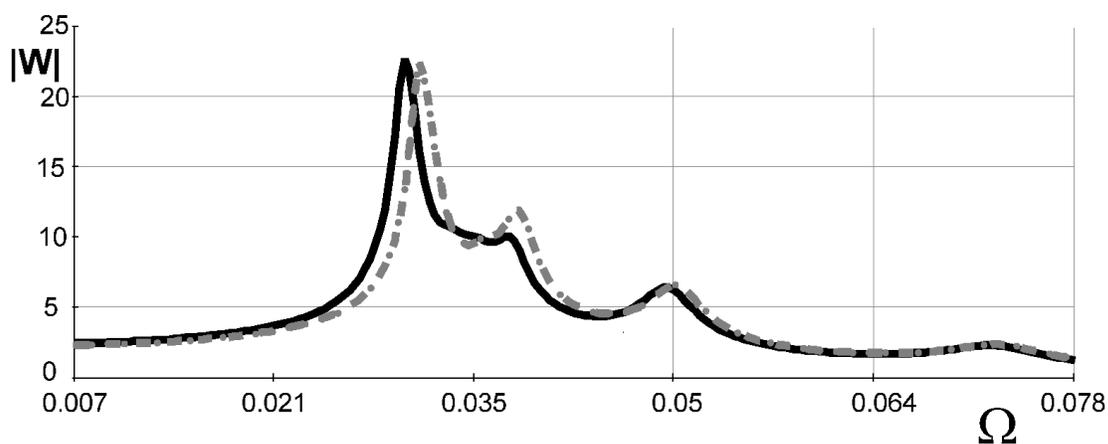
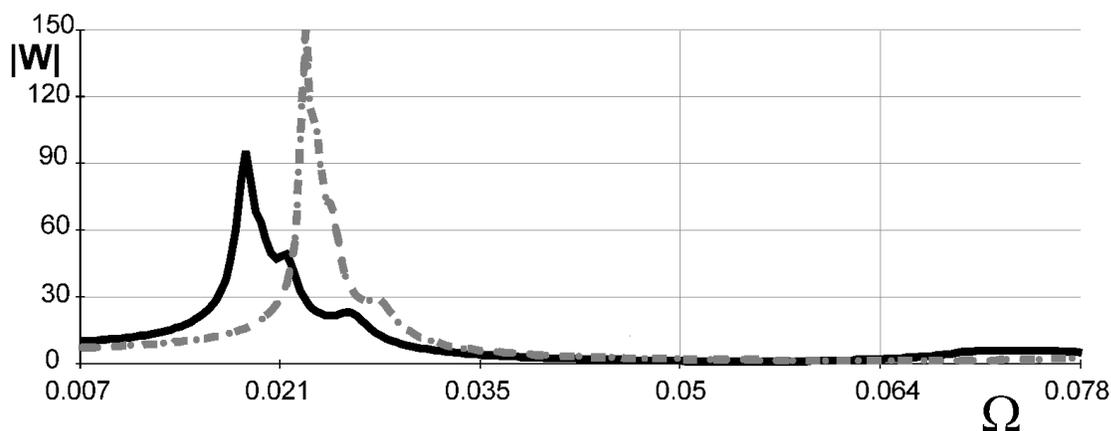


Рис. 3. Теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)

Рис. 4.  $K_E = 10^{-2}$ : теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)Рис. 5.  $K_E = 10^{-3}$ : теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)

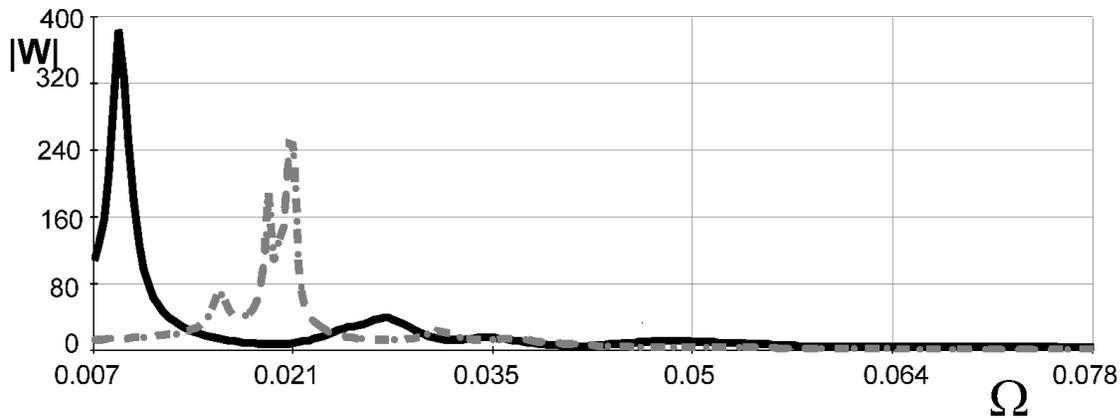


Рис. 6.  $K_E = 10^{-4}$ : теория типа Тимошенко (сплошной), теория Кирхгофа-Лява (пунктирный)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
- [2] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Москва: Машиностроение. 1988. С. 79–90.
- [3] Малмайстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне. 1980. 573 с.
- [4] Степаненко Ю.П., Исаев К.В., Азаров А.Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Междунар. конф. г. Ростов-на-Дону, 19–20 сент. 1996 г. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 1997. Т. 1. С. 118–123.

**Safronenko V.G., Trifonov V.V.** *Calculation of vibrations in a cylindrical composite shell carried out according to the Kirchhoff-Love theory and Timoshenko-type theory.* Comparative numerical analysis of amplitude-frequency characteristics in a cylindrical shell made of a fiber composite has been made. Calculations were carried out according to the Kirchhoff-Love theory and Timoshenko-type theory. The results obtained have proved that deformations caused by transverse shear and rotation inertia should be taken into account.

# ЭМПИРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ УДАРЕ

**Сахабудинов Р. В., Чукарин А. В., Осяев О. Г.**

*Ростовский военный институт ракетных войск*

Представлены результаты проведения экспериментальных исследований и эмпирическое уравнение состояния, характеризующие изменение основных характеристик металлов при действии ударных нагрузок.

В современной технике важное место занимает проблема прочности и надежности элементов конструкций, работающих под воздействием нестационарных нагрузок, в частности ударных. В результате удара в материале возникают напряжения и деформации, значительно отличающиеся по своим значениям от статических, которые при достижении определенных значений приводят к нарушению работоспособности изделия и последующему его разрушению. Знание закона изменения механических напряжений  $\sigma$  в зависимости от деформации  $\varepsilon$  скорости деформирования  $\dot{\varepsilon}$ , т.е. уравнение состояния вида  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , при ударном воздействии необходимо при расчетах ответственных узлов и деталей конструкций машин, работающих в экстремальных условиях. Установить вышеупомянутую закономерность возможно только на основе проведения экспериментальных исследований.

Определению уравнения состояния посвящено множество работ [1, 2, 3 и др.]. Известно [1], что сопротивление конструкционных материалов деформированию зависит от многих факторов, в частности, от скорости деформации  $\dot{\varepsilon} c^{-1}$ : при ее увеличении пределы пропорциональности  $\sigma_T$  (текучести) и пределы прочности  $\sigma_B$  для одних материалов возрастают для других установлено убывание указанных механических характеристик, также предполагают [1, 2], что имеет место возрастание так называемого динамического модуля упругости –  $E_d$ . Довольно сложно дать полную, т.е. учитывающую все внешние факторы, количественную оценку напряженно-деформированного состояния материала. Одной из причин является несовершенство техники для проведения измерений и обработки экспериментальных результатов [2]. Создание новых аппаратных и программных средств на базе ЭВМ дает возможность более точно, по сравнению с ранними работами, исследовать нестационарные процессы в механике сплошной среды и тем самым установить уравнение состояния вещества.

Для определения уравнения состояния конструкционных материалов при ударных нагрузках была проведена серия экспериментальных исследований на маятниковом копре. Экспериментальная установка позволяет создавать начальную скорость деформирования в интервале  $\dot{\varepsilon} = 1 - 110 c^{-1}$ . Выбранный интервал скоростей вполне обоснован для выявления зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , так как известно [3], что наиболее интенсивное изменение основных механических характеристик материала: предела текучести и предела прочности наблюдается при скоростях деформации  $\dot{\varepsilon} \leq 100 c^{-1}$  (увеличение на 70-90% по сравнению со статическими пределами).

Дальнейшее повышение скорости деформации приводит к незначительному увеличению механических характеристик (увеличение на 5-7%) и далее они остаются практически неизменными.

Испытуемые цилиндрические образцы с плоским торцом были изготовлены из материалов: Сталь 45 и Д16Т. Масса ударника составляла  $m = 20$  кг. Измерительная часть представляла собой систему из пьезоэлектрического акселерометра, установленного на молоте копра и измеряющего сигнал пропорциональный замедлению молота в момент соударения с образцом. Сигнал от пьезодатчика подавался на цифровой осциллограф и далее на ПЭВМ, где при помощи специальной программы "Виртуальный осциллограф" определялись основные характеристики импульсного сигнала (амплитуда и частота). Сглаживание сигнала производилось методом скользящего среднего. На рис. 1 показана типичная осциллограмма ударного процесса и сглаживающая ее кривая.

Зная коэффициент преобразования пьезоэлектрического датчика по напряжению  $h$  [мВ · с<sup>2</sup>/м] определялось замедление ударника —  $a$  и перегрузка —  $k$ , действующая на него во время контакта с испытуемым образцом.

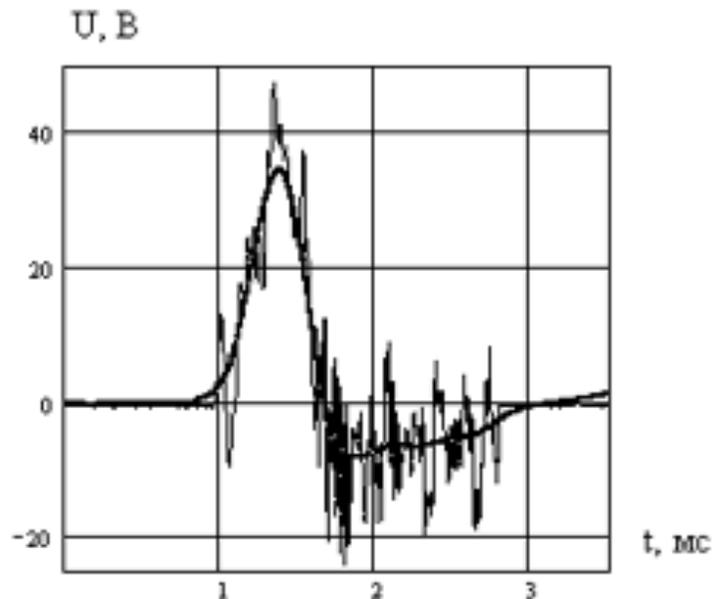


Рис. 1. Типичная осциллограмма ударного процесса и сглаживающая ее кривая.

Аппроксимация сглаженной кривой замедления (перегрузки) как функции времени проводилась при помощи полиномиальной зависимости  $a = a(t)$ ,  $k = k(t)$ , которая с высокой точностью (корреляция значений равна 0.98) описывает полученные кривые. Скорость  $v(t)$  и перемещение  $u(t)$  ударника определяется однократным и двукратным, соответственно, интегрированием кривой замедления [4].

На основе анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы. Максимальное значение замедления соответствует завершению так называемого активного этапа удара, при котором ударник, внедряющийся в образец, останавливается — скорость становится равной нулю, смещение при этом также достигает

максимального значения. Далее происходит восстановление упругих деформаций – пассивный этап удара (в связи с этим длительность пассивного этапа удара на 10-20 %, в зависимости от марки материала, меньше чем длительность активного этапа, состоящего из упругой и пластической деформации), который завершается нарушением контакта ударника и образца. При этом замедление падает от максимального значения до нуля, скорость возрастает от нуля до величины скорости отскока  $v_{отс}$ , причем  $v_0 > v_{отс}$  и меняет знак (направление), а смещение снижается до значения остаточной пластической деформации.

Таким образом, определив указанные параметры ударного процесса, легко определяется сила сопротивления внедрению  $P = ta$  и напряжения в зоне контакта ударника и образца  $\sigma = P/S$ . Деформация  $\varepsilon$  находится из выражения  $\varepsilon = u/l$ , где  $l$  – длина образца. По найденным значениям напряжений и деформаций для каждой начальной скорости деформирования строятся диаграммы нагружения (активный этап) и разгрузки (пассивный этап) образца. Типичные диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  для материалов Сталь 45 и Д16Т представлены на рис. 2, 3.

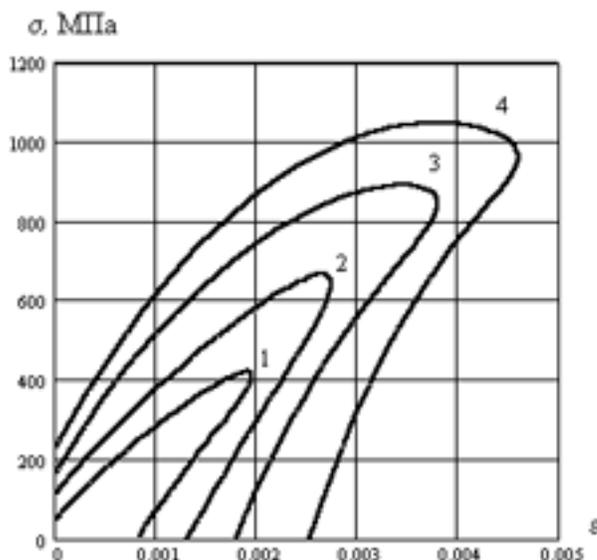


Рис. 2. Динамические зависимости напряжение – деформация для материала Сталь 45: 1 –  $\dot{\varepsilon} = 29.02 \text{ c}^{-1}$ ; 2 –  $\dot{\varepsilon} = 56.07 \text{ c}^{-1}$ ; 3 –  $\dot{\varepsilon} = 79.3 \text{ c}^{-1}$ ; 4 –  $\dot{\varepsilon} = 97.12 \text{ c}^{-1}$ .

Наибольший интерес, с практической точки зрения, представляет "активный" этап нагружения (возрастающие кривые на рис. 2, 3), т.к. именно во время него возникают интенсивные разрушающие нагрузки, приводящие к выходу из строя элементов конструкций машин. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют нагружению испытуемых образцов при начальных скоростях деформации 29.02, 56.07, 84.30,  $108.34 \text{ c}^{-1}$  соответственно. Анализ вышеуказанных зависимостей показал, что при увеличении  $\dot{\varepsilon}$  увеличивается предел пропорциональности (текучести)  $\sigma_{т.д.}$  материала, а также возрастает угол наклона прямолинейного участка на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ , т.е. имеет место увеличение динамического модуля упругости  $E_d$ .

На основе полученных результатов были построены эмпирические уравнения

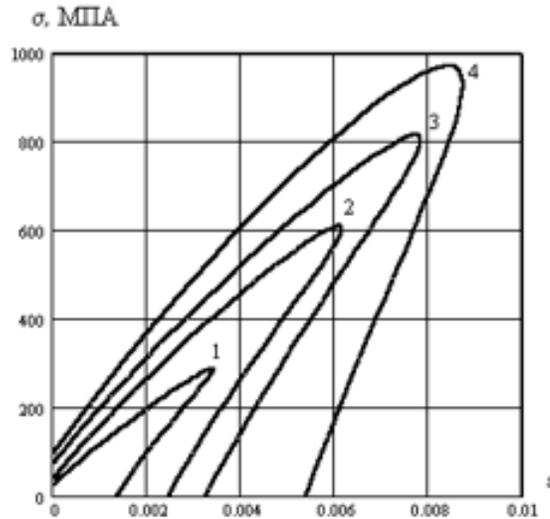


Рис. 3. Динамические зависимости напряжение – деформация для Д16Т: 1 –  $\dot{\varepsilon} = 29.02 \text{ c}^{-1}$ ; 2 –  $\dot{\varepsilon} = 56.07 \text{ c}^{-1}$ ; 3 –  $\dot{\varepsilon} = 79.3 \text{ c}^{-1}$ ; 4 –  $\dot{\varepsilon} = 97.12 \text{ c}^{-1}$ .

состояния  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , которые для активного этапа нагружения будут иметь вид [5]:

$$\sigma = \exp(\beta)\varepsilon^\gamma, \quad (1)$$

где для Стали 45:  $\beta = 11.947 + 4.985 \cdot 10^{-3}\dot{\varepsilon} - 1.441 \cdot 10^{-4}\dot{\varepsilon}^2$ ,  
 $\gamma = 0.936 + 1.036 \cdot 10^{-3}\dot{\varepsilon} - 3.226 \cdot 10^{-5}\dot{\varepsilon}^2$ ,

для Д16Т:  $\beta = 11.029 + 0.038\dot{\varepsilon} - 4.224 \cdot 10^{-4}\dot{\varepsilon}^2$ ,  
 $\gamma = 0.98 + 6.304 \cdot 10^{-3}\dot{\varepsilon} - 8.561 \cdot 10^{-5}\dot{\varepsilon}^2$ .

Уравнение (1) хорошо описывает НДС материала в зоне пластического упрочнения, а в упругой зоне наблюдается некоторое несоответствие с экспериментом (погрешность около 10%), поэтому его целесообразно использовать при расчете элементов конструкций, работающих в зоне значительных пластических деформаций. Наибольшее соответствие с экспериментом (погрешность до 2%) в упругой зоне и при пластическом деформировании дает нижеприведенная формула (2), которую можно использовать как при малых, так и при больших значениях деформации:

$$\sigma = A[1 - \exp(-b\varepsilon)], \quad (2)$$

где для Стали 45:  $A = 1.839 \cdot 10^3 + 0.597\dot{\varepsilon} - 0.098\dot{\varepsilon}^2$ ,  
 $b = 107.205 + 0.97\dot{\varepsilon} + 0.031\dot{\varepsilon}^2$ ,

для Д16Т:  $A = 1.634 \cdot 10^3 + 3.125\dot{\varepsilon} + 0.041\dot{\varepsilon}^2$ ,  
 $b = 44.488 + 0.44\dot{\varepsilon} - 1.328 \cdot 10^{-3}\dot{\varepsilon}^2$ .

В результате проведения экспериментальных исследований было определено уравнение состояния – закон изменения основных характеристик металлов при

действию ударных нагрузок. Полученные эмпирические уравнения состояния могут быть полезны в инженерных расчетах, что позволит прогнозировать возможные повреждения и оценивать стойкость ответственных элементов конструкций машин в экстремальных условиях работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дегтярев В.П. Деформации и разрушение в высоконапряженных конструкциях. М.: Машиностроение, 1987. 105 с.
- [2] Гольке В. Физика быстропротекающих процессов. М.: Мир, 1971. 252 с.
- [3] Ионов В.Н., Огибалов П.М. Напряжение в телах при импульсивном нагружении. Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1975. 463 с.
- [4] Батуев Г.С., Голубков Ю.В. и др. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.:Машиностроение, 1977. 240 с.
- [5] Сахабудинов Р.В., Чукарин А.В. К вопросу об определении уравнения состояния конструкционных сталей и сплавов при ударных нагрузках//Вестник машиностроения. № 4. 2003. С. 36–39.

**Sahabudinov R.V., Chukarin A.V., Osyayev O.G.** *Fitted equations of the condition metal at blow.* The Presented results of the undertaking the experimental studies and fitted equation of the condition, characterizing change the main features metal at action of the striking loads are presented.

# ПРИМЕНЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО СЛОЯ ОКОЛО ПОВЕРХНОСТИ АКТИВНОГО НАПОЛНИТЕЛЯ В ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ

**Свистков А. Л., Комар Л. А.**

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

Важную роль в формировании свойств полимерных нанокомпозитов играют слои около частиц наполнителя имеющие размеры от двух до десяти и более нанометров [1-3]. Несмотря на многочисленные попытки определить причину их формирования и механические свойства, многое все еще остается неясным. Высказана гипотеза, что полимер в этих слоях находится в особом ориентированном состоянии. Но не предложена математическая модель их образования. Целью данной работы является построение такой модели.

При построении математической модели, в первую очередь необходимо выбрать величины, которые будут определять ее основу. Исходя из того, что мы имеем информацию об ориентации звеньев полимерных цепей, разумнее всего использовать тензор ориентации  $\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j$ , в котором символом  $\boldsymbol{\tau}_j$  обозначен единичный вектор, определяющий направление ориентации в пространстве  $j$ -го звена. Индекс  $j$  принимает значение номеров всех звеньев всех цепей, попавших в рассматриваемый объем материала. Данный тензор удобен тем, что можно найти его осредненное значение для всех звеньев полимерных цепей в рассматриваемом объеме и результат этого осреднения не будет равен нулевому тензору. Он дает представление об ориентированном состоянии полимера. Собственные векторы и собственные числа его имеют понятный физический смысл. В дальнейшем мы станем называть тензором ориентации результат осреднения по множеству возможных состояний полимерного звена в данной точке тензор  $\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j$  с учетом частоты (вероятности) его появления и будем обозначать его символом  $\mathbf{O}$ . Собственные векторы осредненного тензора  $\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j$  определяют направления в пространстве, вдоль которых в основном ориентированы звенья цепей, и направления, вдоль которых звенья ориентируются редко. В свою очередь собственные числа этого тензора дают количественную информацию о степени ориентации звеньев полимерных цепей в соответствующих направлениях.

Будем полагать, что энергия взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го звеньев полимерных цепей записывается в виде потенциала, сходного с потенциалом Леннарда-Джонса с единственным отличием: вместо скалярных величин в него входят тензорные величины, которые определяют зависимость энергии взаимодействия звеньев полимерных цепей от угла между ними

$$u_{ij} = -\frac{C_u}{r_{ij}^6} \left( \frac{\mathbf{I}}{3} - \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{\tau}_i \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{I}}{3} - \boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j \right) = -\frac{C_u}{r_{ij}^6} \left( \frac{1}{3} - (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)^2 \right),$$

где  $u_{ij}$  – энергия взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го звеньев,  $C_u$  – константа материала,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор. Символом  $r_{ij}$  обозначено расстояние между центрами масс звеньев с номерами  $i$  и  $j$ .

Влияние соседних звеньев на ориентацию полимера в рассматриваемой точке пространства будем определять с позиций континуальных моделей, используя тензор  $\mathbf{O}$ . Обозначим символом  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$  значение величины, полученной при осреднении  $\mathbf{O}$  по соседним областям материала. Разница между тензором ориентации  $\mathbf{O}$  в рассматриваемой точке и тензором влияния соседних частей материала  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$  позволяет строить уравнение эволюции во времени тензора  $\mathbf{O}$ . Чем выше отличие между тензорами  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$ , тем сильнее стремится материал изменить текущее состояние и прийти к самосогласованному равновесному состоянию. В основе этого утверждения лежит гипотеза, что в равновесии осредненный по множеству возможных состояний тензор  $\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j$  должен совпадать с тензором, осредненным по пространству. Этот момент будет уточнен ниже.

Введем понятие тензора  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$  с условием нормировки в следующем виде

$$\mathbf{O}_{\text{cont}} = C_V \int_V \frac{\mathbf{O}(t, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}{r^6} dV, \quad C_V \int_V \frac{1}{r^6} dV = 1.$$

Тензор  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$  в точке пространства, положение которой задается вектором  $\mathbf{x}$ , равен интегралу по объему пространства  $V$ , занимаемому полимером за исключением малой сферической окрестности рассматриваемой точки пространства. Обозначим радиус этой малой окрестности символом  $r_*$ . Исключение из интегрирования малой сферической окрестности связано с тем, что в ней не могут располагаться одновременно два звена полимерных цепей и поэтому взаимодействие между звеньями, расположенными на расстоянии меньшем  $r_*$ , невозможно. Текущей переменной в подынтегральной функции является вектор  $\Delta \mathbf{x} = \Delta x_1 \mathbf{i}_1 + \Delta x_2 \mathbf{i}_2 + \Delta x_3 \mathbf{i}_3$ , символами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  обозначены единичные базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат. Под интегралом стоит тензор  $\mathbf{O}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$  в точке пространства, положение которой задается вектором  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$  с заданным весовым коэффициентом. Этот весовой коэффициент учитывает вклад в формирование тензора  $\mathbf{O}(\mathbf{x})$  частей полимера, отстоящих от рассматриваемой точки на расстояние  $r = \sqrt{\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x}}$ . В качестве весового коэффициента мы используем выражение  $r^{-6}$ . Именно с такой скоростью убывает взаимодействие между звеньями полимерных цепей в рассматриваемой нами модели. Следовательно, именно такой вклад могут вносить тензоры ориентации соседних точек в формировании ориентированного состояния полимера в рассматриваемой точке пространства.

Для построения модели, описывающей формирование во времени слоев около частиц наполнителя в эластомерном нанокompозите используем следующее предположение. Считаем, что есть две причины изменения во времени тензора ориентации в рассматриваемой точке пространства: а) ориентирующего влияния соседних точек среды на рассматриваемую точку; б) влияния теплового движения полимерных цепей, которое стремится привести материал в состояние с отсутствием ориентации. С учетом этих двух причин эволюционное уравнение может быть

записано в виде

$$\frac{D\mathbf{O}}{Dt} = a_1 \left( C_V \int_V \frac{\mathbf{O}(t, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}{r^6} dV - \mathbf{O} \right) + a_2 \left( \frac{\mathbf{I}}{3} - \mathbf{O} \right),$$

где  $D/Dt$  – объективная производная по времени,  $a_1$  и  $a_2$  – неотрицательные функции параметров состояния среды. О первом слагаемом в правой части уравнения речь уже шла выше. Чем больше различаются тензоры  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{O}_{\text{cont}}$  друг от друга, тем быстрее материал стремится изменить данное неравновесное состояние. Другими словами, чем сильнее отличие ориентации от той, которую навязывают данной точке соседние точки, тем скорее идет изменение ориентации в данной точке в направлении к той, которую требуют от нее соседние точки. Второе слагаемое демонстрирует отклонение текущего состояния от состояния полного хаоса в ориентации звеньев полимерных цепей. Чем сильнее отличие ориентированного состояния полимера в данной точке от состояния полного хаоса (состояния без ориентации), тем сильнее тепловое движение стремится вывести материал из этого состояния, разрушить имеющуюся ориентацию звеньев полимерных цепей.

Для решения задач формирования ориентированных слоев около частиц наполнителя в полимерных наноккомпозитах необходимо задать конкретный вид функциям  $a_1$  и  $a_2$ . Для определения функции  $a_2$  целесообразно использовать обычное термофлуктуационное выражение

$$a_2 = \exp \left( - \frac{U_\theta}{c_B \theta} + C_\theta \right),$$

где коэффициенты  $U_\theta$  и  $C_\theta$  зависят от природы и структуры полимерного материала,  $\theta$  – температура,  $c_B$  – постоянная Больцмана.

Значение функции  $a_1$  будем определять через некоторую функцию  $a$

$$a = \frac{a_1}{a_2} \quad a_1 \geq 0.$$

Для краткости изложения упустим несколько математических выкладок, в результате которых было получено значение функции  $a$  в следующем виде

$$a = \frac{\frac{1}{3} \mathbf{I} \cdot \mathbf{O} - \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}}{\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{O} - \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}},$$

где  $\mathbf{A}_k$  – постоянные тензоры, зависящие только от температуры среды. Они определяются как решение интегрального уравнения

$$\mathbf{A}_k = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{\tau}_i C \exp \left[ - \frac{C_u}{c_B \theta C_N} \left( \frac{1}{3} - \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{A}_k \right) \right] d\Gamma,$$

где  $C$  – нормировочная константа,  $\Gamma$  – фазовое пространство координат элементов рассматриваемой системы. При этом следует из множества возможных значений тензоров  $\mathbf{A}_k$  выбирать только те, которые дают неотрицательное значение для функции  $a$ . Решений этого уравнения может быть несколько. Они соответствуют

разным видам возможного ориентированного состояния среды (одноосного ориентированного состояния с тем или иным направлением оси ориентации, двуосного ориентированного состояния с тем или иным направлением нормали к плоскости ориентации и т. д.).

В интегральном уравнении для значений тензоров  $\mathbf{A}_k$  присутствует константа  $C_N$ . Причину ее появления требуется оговорить особо. Представим себе, что мы находимся в рамках дискретной модели. В этом случае значение тензора влияния соседних звеньев полимерных цепей  $\mathbf{O}_{\text{disc}}$  на рассматриваемое звено может определяться в результате простого суммирования тензоров  $\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j$  с заданным весовым коэффициентом  $r_{ij}^{-6}$

$$\mathbf{O}_{\text{disc}} = C_N \sum_{j=1, i \neq 1}^N \frac{\boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j}{r_{ij}^6},$$

где  $N$  – число всех звеньев. Требование нормировки формулируется равенством

$$C_N \sum_{j=1, i \neq 1}^N \frac{1}{r_{ij}^6} = 1.$$

Полагается, что номер  $i$  имеет звено, центр масс которого расположен в рассматриваемой точке пространства, положение которой задается вектором  $\mathbf{x}$ . Как и в континуальных моделях в качестве весового коэффициента мы используем выражение, которое определяет скорость убывания взаимодействия между звеньями полимерных цепей в рассматриваемой нами модели. Для того, чтобы иметь возможность связывать друг с другом континуальное и дискретное описание процессов необходимо использовать гипотезу их эквивалентности, сформулированную в следующем виде

$$\mathbf{O}_{\text{cont}} = \mathbf{O}_{\text{disc}} = \mathbf{O}.$$

Использование этой гипотезы объясняет появление константы  $C_N$  в интегральном уравнении значений тензоров  $\mathbf{A}_k$ .

Отметим, что представленное в данной работе дифференциальное уравнение применялось к полимерному материалу, молекулярную структуру которого можно описать тензором ориентации с компонентами  $O_{ij}$ , где  $i, j=1, 2, 3$  со следующими свойствами: 1)  $O_{11} + O_{22} + O_{33} = 1$ ; 2)  $O_{22} = O_{33}$ ; 3)  $O_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Для простоты представления результатов расчетов рассмотрим изменение компонент тензора ориентации в одномерной постановке при удалении от поверхности частицы наполнителя на расстояние  $x_1$ . В этом случае, при решении дифференциального уравнения, достаточно изучить изменение только одной компоненты  $O_{11}$ , которая представлена на рис. 1. На этом рисунке значение компоненты  $O_{11}$  тензора ориентации  $\mathbf{O}$  при разных значениях соотношения  $C_u/C_N$  определялось с шагом по времени равным 1 мин. Рассматриваемый интервал времени равен 15 минутам. Расчет формирования слоя определялся для полимерной цепи с длиной звена 0,8 нм.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты №05-08-33361, №06-03-32461).

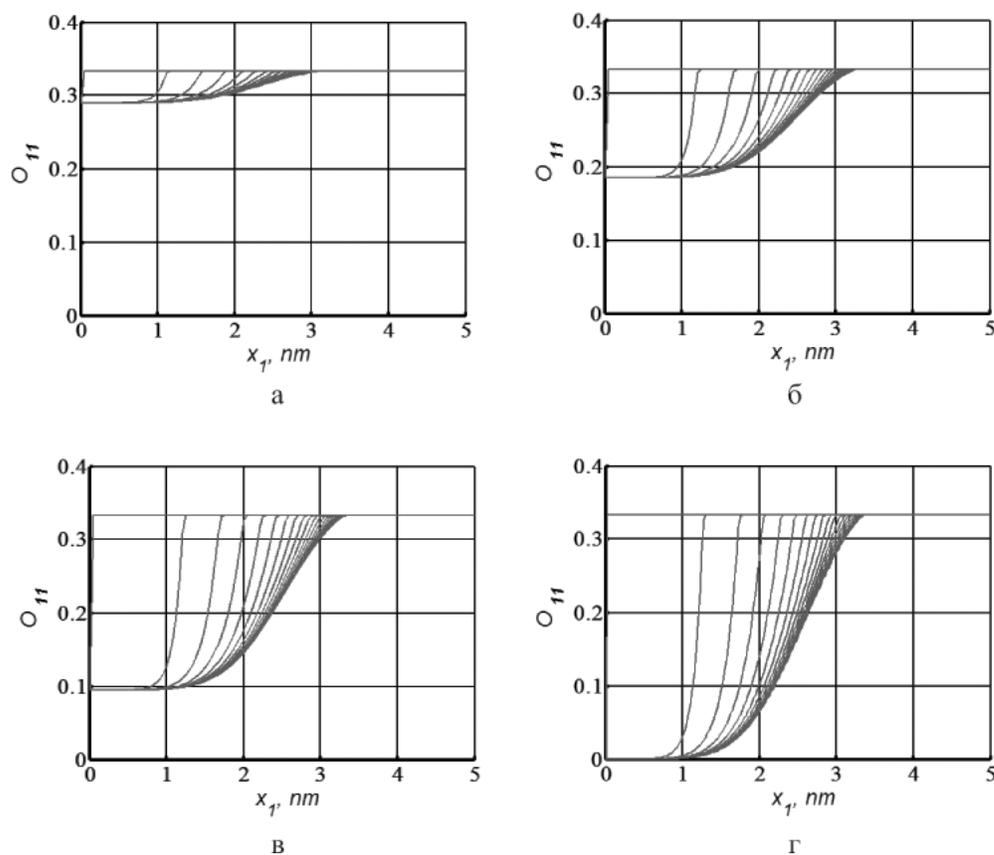


Рис. 1. Зависимость компоненты тензора ориентации  $O_{11}$  от расстояния до поверхности наполнителя  $x_1$  при значениях коэффициента  $C_u/C_N$ : а —  $3 \cdot 10^{-20}$ ; б —  $4 \cdot 10^{-20}$ ; в —  $6 \cdot 10^{-20}$ ; г —  $20 \cdot 10^{-20}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Heinrich G., Kluppel M. Recent advances in the theory of filler networking in elastomers // Adv. Polym. Sci. 2002. № 160. p. 1–44.
- [2] Kluppel M. The role of disorder in filler reinforcement of elastomers on various length scales // Adv. Polym. Sci. 2003. № 164. p. 1–86.
- [3] Wang M.-J. The role of filler networking in dynamic properties of filled rubber // Rubber Chem. Tech. 1999. № 72. p. 430–448.

**Svistkov A.L., Komar L.A.** *Application of the continuum approach for describing oriented layer formation on active filler particle surface in polymeric nanocomposites.* Our work considers the problem of modeling the oriented regions formation near the filler particles in polymer nanocomposites. Hypothesis was suggested that the growth of orientation regions is due to the extension of the orientation state of polymer to the neighboring non-oriented regions. A mathematical model has been developed to describe this phenomenon.

# ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОРИСТОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ НА ДИНАМИКУ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, ДИСКРЕТНО КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ОСНОВАНИЕМ

Суворов А. Б.\*, Суворова Т. В.\*\*

\* *Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

\*\* *Ростовский госуниверситет путей сообщения*

Рассматривается плоская задача об установившихся колебаниях упругой полосы, контактирующей с неоднородным основанием через систему жестких накладок. Рассмотрены случаи двухслойного и трехслойного пористо-упругого основания, выяснено влияние неоднородности на перемещения полосы, оценена эффективность наличия подкрепляющего заглубленного слоя. Данные натурного эксперимента позволяют адаптировать решение задачи для моделирования системы "железнодорожный путь — слоистая грунтовая среда", что позволяет прогнозировать осадки с учетом изменений, вносимых усиливающими конструкциями.

Пусть упругий слой занимает область  $-\infty < x < \infty$  и  $0 \leq y \leq h$ . К верхней грани слоя в конечной области приложена осциллирующая нагрузка  $\bar{P}(x)e^{-i\omega t}$ ,  $-p_1 \leq x \leq p_2$ ,  $y = h$ , вне области приложения поверхность слоя свободна от напряжений.

На нижней грани упругого слоя и на поверхности слоистого неоднородного полупространства расположена периодическая система жестких прямоугольных накладок-штампов размера  $2a \times l$  с периодом  $b$ , жестко сцепленных со слоем и полупространством. Граничные условия имеют вид:

$$\bar{u}(x, y, t)|_{y=0} = \bar{f}_n(x)e^{-i\omega t}; \quad -a + nb \leq x \leq a + nb, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

где  $\bar{u}(x, y, t)$  — вектор перемещений в слое,  $\bar{f}_n(x)e^{-i\omega t}$  — неизвестное перемещение на  $n$ -ом участке контакта нижней грани слоя, соответствующей  $y = 0$ . Длина каждой площадки контакта постоянна и равна  $2a$ .

Слоистое основание представляет собой конечное число упругих или пористоупругих, насыщенных жидкостью слоев, лежащих на подстилающем полупространстве и занимающих области:  $-\infty < x < \infty$ ,  $h_{k-1} \leq y \leq h_k$ ,  $y \leq h_n$ .

Обозначим  $\bar{u}^*(x, y, t)$ ,  $\bar{q}^*(x, y, t)$  — векторы перемещений и напряжений в верхнем слое неоднородного основания, запишем граничные условия для подстилающего полупространства:

$$\bar{u}(x, y, t)^*|_{y=-l} = -\bar{f}_n(x)e^{-i\omega t}; \quad -a + nb \leq x \leq a + nb, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Кроме этого, в слоистом основании должны выполняться условия равенства напряжений и перемещений на границах разнородных упругих сред, на границах пористоупругих сред должно быть присоединено условие равенства перемещений жидких составляющих гетерогенной среды. На границе упругой и пориступругой сред дополнительное условие состоит в равенстве перемещений жидкой и твердой

составляющих пористоупругой среды, что характеризует непроницаемость границы. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [1]. Движение упругих сред описываются уравнениями Ламе [2] с соответствующими упругими постоянными. Перемещения двухфазной гетерогенной среды определяются уравнениями Био [3].

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 \bar{u}^3}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}^3}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial t} - \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial t} \right) &= \text{Grad } \sigma_{ij}^s; \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 \bar{u}^3}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \bar{w}^3}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial t} - \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial t} \right) &= \text{Grad } \sigma^f; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\bar{u}^3(x, y, z, t)$ ,  $\bar{w}^3(x, y, z, t)$  – векторы перемещений твердой и жидкой фаз гетерогенной среды.

Связь между тензором полных напряжений и деформациями твердой и жидкой фаз выражается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}, \quad \sigma^f = Q e + R \varepsilon, \\ e &= \text{div} \bar{u}^3, \quad \varepsilon = \text{div} \bar{w}^3, \quad e_{ij} = (u_{i,j}^3 + u_{j,i}^3). \end{aligned} \quad (4)$$

$\sigma_{ij}^s$ ,  $\sigma^f$  – напряжения, действующие соответственно на упругий скелет и на жидкость в порах,  $A$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\rho_{ij}$ ,  $b$  – механические характеристики гетерогенной среды, зависящие от скоростей распространения волн в жестком скелете и в жидкости, от плотности сред, от пористости, межфазного взаимодействия [3],  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Уравнения движения каждой накладки имеют вид:

$$m \frac{\partial^2 c_n^0}{\partial t^2} = R_n, \quad J \frac{\partial^2 c_n^1}{\partial t^2} = M_n \quad (5)$$

где  $R_n$ ,  $M_n$  – главный вектор и главный момент реактивных сил в области контакта:

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{nb-a}^{nb+a} (t_n^*(\xi) - t_n(\xi)) d\xi, \\ M_n &= \int_{nb-a}^{nb+a} (t_n^*(\xi) - t_n(\xi)) (\xi - nb) d\xi, \\ \bar{f}_n(x, t) &= \{0, f_n(x, t)\} \quad f_n(x, t) = c_n^0 + c_n^1(x - nb) \\ \bar{q}(x, y, t)|_{y=0} &= \bar{t}_n(x, t) \\ -a + nb \leq x \leq a + nb, \quad n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \bar{q}^*(x, y, t)|_{y=-l} &= \bar{t}_n^*(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{t}_n(x, t)$ ,  $\bar{t}_n^*(x, t)$  – неизвестные контактные напряжения. Вне зон контакта на дневной поверхности сред напряжения равны нулю. Считая режим колебаний установившимся, представим перемещения в виде  $\bar{u}(x, y, t) = \bar{u}(x, y) e^{-i\omega t}$ . В дальнейшем будем рассматривать соответствующие амплитудные значения функций. Для построения общих решений уравнений (3), (4) используем представления перемещений жидкости и упругого скелета в виде суммы потенциалов со специально

подобранными коэффициентами. Приходим к решению трех волновых уравнений, соответствующим трем типам волн, возникающих в гетерогенной среде,  $k_i$  — соответствующие им волновые числа. Перемещения в гетерогенном полупространстве с заданными на непроницаемой границей вектором напряжений  $\bar{q}^3$  определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\bar{u}^3 &= \mathbf{B}(\mathbf{F}\bar{q}^3), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\delta_3} \begin{pmatrix} b_{11} & i\alpha b_{12} \\ i\alpha b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{q}^3 = \begin{pmatrix} q_{xy}^3 \\ q_{yy}^3 \end{pmatrix} \\ b_{11} &= [2q_{33}s_3l_4 + \gamma_{13}(q_{41} - q_{42})]\alpha^2 + (l_1 - l_2)s_3, \\ b_{12} &= 2[(s_2 - s_1)\gamma_{13} + l_4]\alpha^2 + 2l_3 - k_3l_4, \\ b_{21} &= -l_1\gamma_{13} - 2l_3q_{33} + l_1 - l_2, \quad b_{22} = l_3, \quad \delta_3 = (l_1 - l_2)(\alpha^2 + s_3^2) - 2l_1\gamma_{13} - 4l_3, \\ l_1 &= 2q_{33}\alpha^2(s_2 - s_1) - q_{41}s_2 + q_{42}s_1, \quad l_2 = 2q_{33}\alpha^2(s_2m_2 - s_1m_1) - q_{41}s_2m_2 + q_{42}s_1m_1, \\ l_3 &= s_1s_2s_3(m_1 - m_2), \quad l_4 = (m_2 - 1)s_2 - (m_1 - 1)s_1, \quad s_i = \sqrt{\alpha^2 - k_i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Остальные обозначения совпадают с [4].  $\mathbf{F}$ – оператор преобразования Фурье. Удовлетворяя граничным условиям (1), (3), (8), приходим к системе интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений и перемещений жестких накладок получаем выражения поля перемещений в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0,\pm 1,\pm 2,\dots,nb-a}^{nb+a} \int \mathbf{k}_1(x - \xi)\bar{t}_m(\xi)d\xi + \int_{\Gamma} e^{i\alpha x}\bar{K}_0(\alpha)d\alpha &= \bar{f}_n(x), \quad -a \leq x \leq nb + a, \\ \sum_{m=0,\pm 1,\pm 2,\dots,nb-a}^{nb+a} \int \mathbf{k}_2(x - \xi)\bar{t}_m^*(\xi)d\xi &= \bar{f}_n(x), \quad -nb - a \leq x \leq nb + a, \\ \mathbf{k}_j(x - \xi) &= \int_{\Gamma} e^{i\alpha x}\mathbf{K}_j(\alpha)d\alpha, \quad j = 1, 2 \\ \bar{f}_n(x) &= \frac{1}{m\omega^2} \int_{nb-a}^{nb+a} (t_n^*(\xi) - t_n(\xi))d\xi + \frac{x - nb}{J\omega^2} \int_{nb-a}^{nb+a} (t_n^*(\xi) - t_n(\xi))(\xi - nb)d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  в (9) выбирается в соответствии с условиями излучения волн на бесконечность [1]. Подынтегральные функции соотношений (9) являются быстро осциллирующими, убывают на бесконечности степенным образом, имеют на вещественной оси счетное количество полюсов.

$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}^-(y)$ .

Вид матриц  $\mathbf{B}^\pm(y)$ , определяющей перемещения в упругой полосе при заданных на гранях напряжениях  $q^\pm$ , хорошо известен и имеет структуру [1]:

$$\mathbf{F}\bar{u} = \mathbf{B}^\pm(\mathbf{F}\bar{q}), \quad \mathbf{B}^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_2 \begin{pmatrix} \frac{b_3}{\delta_1} \pm \frac{b_4}{\delta_2} \\ \frac{b_1}{\delta_1} \pm \frac{b_2}{\delta_2} \end{pmatrix} & i\alpha \begin{pmatrix} \pm \frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_2}{\delta_2} \\ \pm \frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_3}{\delta_2} \end{pmatrix} \\ i\alpha \begin{pmatrix} \frac{b_3}{\delta_1} \pm \frac{b_4}{\delta_2} \\ \frac{b_1}{\delta_1} \pm \frac{b_2}{\delta_2} \end{pmatrix} & \sigma_1 \begin{pmatrix} \pm \frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_2}{\delta_2} \\ \pm \frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_3}{\delta_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \bar{q}^\pm = \begin{pmatrix} q_{xy}^\pm \\ q_{yy}^\pm \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\delta_1, \delta_2$ – дисперсионные уравнения для симметричной и антисимметричной второй краевой задачи для полосы. Удовлетворяя граничным условиям на стыке составляющих слоев, получаем матрицу  $\mathbf{K}_2$ . В случае основания, состоящего из упругого слоя, толщиной  $2h_0$ , лежащего на гетерогенном полупространстве,  $\mathbf{K}_2$  определяется так:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{B}^+(h_0) + \mathbf{B}^-(h_0)[\mathbf{B} - \mathbf{B}^-(h_0)]^{-1}\mathbf{B}^+(-h_0) \quad (11)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{K}_2$  имеют весьма громоздкое выражение, приведем поэтому лишь значение ее определителя:

$$\begin{aligned} \Delta &= d_2\delta_3^2 + d_1\delta_3 + d_0, \\ d_1 &= [(d_5b_1 - \sigma_1b_3b_{11} - \sigma_2b_4b_{22})\delta_1 + (d_5b_2 - \sigma_2b_3b_{22} - \sigma_1b_4b_{11})\delta_2]\delta_1\delta_2, \\ d_2 &= (d_4 - 4\alpha^2b_1^2)\delta_2^2 + [\sigma_1\sigma_2(b_3^2 - b_4^2) - 8\alpha^2b_1b_2]\delta_1\delta_2 + (d_4 - 4\alpha^2b_2^2)\delta_1^2, \\ d_0 &= (b_{11}b_{22} + \alpha^2b_{12}b_{21})\delta_1^2\delta_2^2, \quad d_4 = \sigma_1\sigma_2b_3b_4, \quad d_5 = 2\alpha^2(b_{21} - b_{12}). \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем в (7)–(10) к безразмерным переменным. Из глобальной декартовой системы координат, имеющей начало в центре фиксированной произвольной наклейки, перейдем к локальным системам координат с той же ориентацией осей, но имеющих начало в центре  $n$  наклейки. Регуляризируем систему интегральных уравнений, выделяя явным образом корневую особенность, имеющуюся на краях области контакта плоского штампа и разыскивая неизвестные контактные напряжения в виде разложения в ряды по полиномам Чебышева  $T_k(x)$ , более подробно этот процесс описан в [4], [5]. Представим нагрузку  $P(x)$  в виде суммы четной и нечетной функций и для каждой из них произведем трансформацию бесконечного контура интегрирования  $\sigma$  в полубесконечный контур  $\Gamma$ , что позволяет уменьшить порядок бесконечных систем в два раза и рассматривать только положительные  $n$ . Бесконечная линейная система алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_{nk}$ ,  $A_{nk}^*$ , к которой приводится решение поставленной краевой задачи, имеет вид:

$$\begin{aligned} c_3(A_{m0} - A_{m0}^*) + c_4(A_{m1} - A_{m1}^*) + \sum_{n=0,1,2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \int_{\Gamma} \cos \alpha(x - mb) d_{nk}(\alpha) K_1(\alpha) \cdot \\ \cdot J_k(\alpha) d\alpha = \int_{\Gamma} \cos \alpha(x - mb) P_c(\alpha) K_0(\alpha) d\alpha, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ c_3(A_{m0} - A_{m0}^*) + c_4(A_{m1} - A_{m1}^*) + \sum_{n=0,1,2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \int_{\Gamma} \cos \alpha(x - mb) d_{nk}(\alpha) K_2(\alpha) \cdot \\ \cdot J_k(\alpha) d\alpha = 0, \quad d_{nk}(\alpha) = 2 \sin \alpha nb, \quad k = 2j + 1, \quad d_{nk}(\alpha) = 2(-1)^j \cos \alpha nb, \quad k = 2j, \\ P_c(\alpha) = 0.5 \int_{p_1}^{p_2} (P(x) + P(-x)) e^{ix\alpha} d\alpha, \quad c_3 = \pi\mu/\rho_0 ah\omega^2, \quad c_4 = c_3/(\pi J) \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\rho_0$  — плотность материала наклейки. Система (13) записана для четной части  $P(x)$ , для нечетной части система имеет аналогичный вид. На основании принципа локализации последнюю систему предлагается решать методом редукции с дискретизацией переменной  $x$ . В результате решения усеченных систем определяется напряженно-деформированное состояние в любой точке упругих сред. Решение систем (11) проводилось численно, для чего составлен пакет программ на ПЭВМ, Fortran FPS-4. Численная реализация алгоритма показала быструю сходимость рядов с ростом порядка  $n$  и аргумента функций. Интегралы в коэффициентах системы вычислялись методом контурного интегрирования по специально выбранному контуру. Плотности и параметры Ляме в верхнем слое соответствуют таковым в стали, для верхнего слоя полупространства — в щебеночном грунте. Подстилающее полупространство соответствовало суглинку и обводненному суглинку с пористостью  $m = 0.1$ .

Подкрепляющий слой, толщиной 0.1 м, имел параметры, соответствующие асфальтобетону.

Наличие укрепляющего асфальтового слоя с более высокой жесткостью приводит к уменьшению вертикальных перемещений не более, чем 3,4%. При наличии подкрепляющего слоя вертикальные осадки уменьшаются более, чем на треть при увеличении модуля упругости подстилающего полупространства на порядок. Методика расчета упругих характеристик гетерогенной среды существенно опирается на экспериментально установленные параметры затухания упругих волн в реальных средах, при этом использовался метод вибропросвечивания. [6]. Декремент затухания упругих волн рассчитывался по формуле  $\lambda = \ln \frac{U_{max1}}{U_{max2}}$ , где  $U_{max1,2}$  — амплитудные значения первого и второго положительных всплесков амплитудно-временных характеристик отклика среды на нормированное ударное воздействие.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ ( проект 06-08-00867-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
- [2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
- [3] Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. В. 6. № 82. С. 103–134.
- [4] Суворова Т.В. Динамическая задача об упругом слое и полупространстве, контактирующих через периодическую систему жестких прямоугольных накладок // Научная мысль Кавказа. СКНЦ ВШ, прил. 2002. № 12.
- [5] Колесников В.И., Суворова Т.В. Моделирование динамического поведения системы "верхнее строение железнодорожного пути — слоистая грунтовая среда". М.: ВИНТИ РАН, 2003. 232 с.
- [6] Суворов А.Б., Суворова Т.В. Исследование волновых полей, генерируемых в грунте движением состава по железнодорожной магистрали // Изв. Вузов, Сев.-Кавк. Регион, 2001. № 4.

**Suvorov A.B., Suvorova T.V.** *Unhomogeneous poroelastic foundation influence on dynamics of elastic layer with discret foundation contact.* A flat non-periodic problem about the steady-state oscillation of a layered heterogeneous half-space and elastic layer, contacting through periodic system of rigid rectangular overlays are considered. Two layered and three layered cases are considered. Forecasting durabilities of permanent way and efficiency of supportings design may be based on solution of modelling problem.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

Сумбатян М. А. \*, Жестков Ю. Н. \*\*

\* Ростовский государственный университет

\*\* ООО "Персональные энергосистемы", Ростов-на-Дону

Объектом исследования являются прямые численные алгоритмы, реализованные в виде программ для персональных компьютеров, по расчету уровней аэродинамического шума ветроэнергетических установок (ВЭУ) методами, основанными на аэроакустической теории Лайтхилла-Керла (Л-К). Приведены основные фундаментальные соотношения теории Л-К и разработана новая трактовка теории Л-К. Установлено, что в рамках предложенного подхода, основываясь на данных предварительного аэродинамического расчета, удастся свести задачу к вычислению некоторых квадратур. Путем численного моделирования выявлены основные факторы, влияющие на уровень шума ВЭУ.

Основные соотношения классической теории аэроакустики [1–4] были заложены Лайтхиллом [2, 3]. Однако прямое применение формул Лайтхилла требует использования такой системы координат, в которой лопасти являются неподвижными. Переход в систему координат, связанную с лопастями, не представляет принципиальных трудностей, однако при этом требуется преодоление некоторых искусственно возникающих сложностей типа учета сил Кориолиса и других родственных проблем, традиционно возникающих при использовании неинерционных систем отсчета.

Еще одна причина, объясняющая неэффективность прямого использования формул теории Лайтхилла состоит в следующем. Классические методы требуют знания как кинематических полей (поле скоростей), так и силовых полей (скалярное давление и вязкие напряжения). При прямом решении задачи эти два поля никогда не бывают известны заранее одновременно. Поэтому проблему обычно сводят к тем или иным интегральным уравнениям по поверхности лопастей. Такой подход требует больших компьютерных ресурсов. В то же время, если чисто аэродинамический расчет удастся произвести независимо от аэроакустического, то тогда искомые поля могут быть рассчитаны на этапе чисто аэродинамических вычислений, например, методом КЭ. Это позволяет нам принять в качестве основного эффективного метода вычислений метод, который в своей основе использует вычисленные аэродинамические поля и позволяет оставаться в основной инерционной системе координат, связанной с неподвижным наблюдателем.

Переходя к определяющей системе уравнений, вспомним, что Лайтхилл вывел неоднородное волновое уравнение

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (1)$$

для возмущения акустического давления  $p'$ . Здесь  $T_{ij}$  — тензор Лайтхилла, который в первом приближении может быть взят в следующем виде

$$T_{ij} = \rho_0 v_i v_j, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — массовая плотность в начальном невозмущенном состоянии,  $\{v_i\}$  — декартовые компоненты вектора скорости, и  $y = \{y_i\}$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  — точка в трехмерном декартовом пространстве.

В случае неограниченного потока, с использованием хорошо известной функции Грина для нестационарного волнового уравнения

$$G(y, \tau | x, t) = \frac{1}{4\pi|y-x|} \delta\left(\tau - t + \frac{|y-x|}{c_0}\right), \quad (3)$$

решение уравнения (1) можно легко получить методами классической теории потенциала:

$$p'(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|y-x|} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left(y, t - \frac{|y-x|}{c_0}\right) dy, \quad (4)$$

где интегрирование применяется по всему пространству.

В случае потока жидкости, рассматриваемого в объеме  $V$  и взаимодействующего с твердыми границами  $S$  (в общем случае движущимися) применение интегральной формулы Грина с той же функцией Грина позволяет вывести основное интегральное представление для акустического давления. Для вывода этого представления заметим сначала, что функция Грина (3) удовлетворяет следующему уравнению

$$\Delta G - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -\delta(\tau - t)\delta(y - x) \quad (5)$$

во всем пространстве и для всех  $\tau$ , исключая малые окрестности точек  $y = x$ ,  $\tau = t$ .

При решении нестационарной задачи предположим, что начальные условия нулевые — как для акустического давления  $p'$  так и для ее производной  $\partial p'/\partial t$ .

Рассмотрим комбинацию

$$I = \int_0^t d\tau \int_V \left[ \left( \Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right) G - \left( \Delta G - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \right) p' \right] dy. \quad (6)$$

С одной стороны, этот интеграл легко вычисляется по определению входящих в него функций. В самом деле, в силу соотношения (5) интеграл от второй скобки в (6) равен  $p'(x, t)$ . Интеграл от первой скобки в (6) легко вычисляется на основании соотношений (1) и (5), поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_V \left( \Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \right) G dy &= - \int_0^t d\tau \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{4\pi R} dy = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left( y, t - \frac{R}{c_0} \right) dy, \quad R = |y - x|. \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, интеграл (6) можно переписать с использованием интегральной теоремы Грина. Тогда вместо объемных интегралов появятся интегралы по границе рассматриваемого объема. В нашей задаче данная граница определяется поверхностями, занимаемыми лопастями. Применяя интегральную теорему Грина, получаем

$$I = \int_0^t d\tau \int_S \left( \frac{\partial p'}{\partial n} G - \frac{\partial G}{\partial n} p' \right) dS - \frac{1}{c_0^2} \int_0^t d\tau \int_V \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} G - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} p' \right) dy, \quad (8)$$

причем нормаль должна быть взята внешней к объему  $V$ , следовательно, она направлена в каждой точке лопасти вовнутрь профиля. Используя основное свойство дельта-функции и учитывая, что начальные условия приняты нулевыми, легко показать, что последний интеграл в последнем соотношении равен нулю.

Объединяя все полученные формулы, приходим к следующему интегральному представлению

$$p'(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|y-x|} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left( y, t - \frac{|y-x|}{c_0} \right) dy + \int_0^t d\tau \int_S \left[ \frac{\partial G}{\partial n} p'(y, \tau) - G \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n} \right] dS, \quad (9)$$

причем, поменяв знак перед последним интегралом, можно брать внешнюю нормаль к профилю лопасти  $S$ .

В последнем интеграле интегрирование по времени удается провести в явном виде. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_S G \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n} dS &= \int_0^t d\tau \int_S \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{4\pi R} \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n} \frac{dS}{R}, \quad \tau = t - \frac{R}{c_0}, \quad R = |y-x|. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{4\pi R} \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{4\pi R} \right] \frac{\partial R}{\partial n} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial R}{\partial n} \left[ \frac{1}{c_0 R} \frac{\partial \delta(\tau - t + R/c_0)}{\partial \tau} - \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{R^2} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

поэтому с использованием основного свойства дельта-функции Дирака получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_S \frac{\partial G}{\partial n} p'(y, \tau) dS &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial R}{\partial n} \left[ \frac{p'(y, \tau)}{R^2} + \frac{1}{c_0 R} \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial t} \right] dS, \\ \tau &= t - \frac{R}{c_0}, \quad R = |y-x|. \end{aligned} \quad (12)$$

В итоге, объединяя все полученные выражения, приходим к следующему окончательному представлению для акустического давления в произвольной точке  $x$  и произвольный момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned} 4\pi p'(x, t) &= \int_V \frac{1}{|y-x|} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} (y, \tau) dy - \int_S \frac{1}{|y-x|} \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n_y} dS_y - \\ &\int_S \left[ \frac{p'(y, \tau)}{|y-x|^2} + \frac{1}{c_0 |y-x|} \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial t} \right] \frac{\partial(|y-x|)}{\partial n_y} dS_y, \quad \tau = t - \frac{|y-x|}{c_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь мы подчеркнули в явном виде, что при интегрировании по текущей точке  $y \in S$  нормаль  $n_y$  является внешней нормалью к поверхности  $S$  в точке  $y \in S$  и  $dS_y$  есть малый элемент площади берутся именно в этой точке  $y \in S$ .

Основное представление (13) имеет точный характер, т.к. при его выводе из уравнения (1) не использовались никакие упрощающие предположения. Это уравнение справедливо в произвольной инерциальной системе координат, в которой аэродинамические возмущения исчезают на бесконечности. Последнее обстоятельство является очень важным и учитывалось при применении интегральной формулы Грина при отбрасывании интегралов по бесконечно удаленной границе области. В случае работы ВЭУ применение формулы (13) возможно в системе, связанной с набегавшим потоком ветра, если последний считается равномерным и однородным.

Формула (13) имеет прозрачный физический смысл. Вторым членом определяется звуковое поле, генерируемое некоторой системой источников, распределенных по поверхности лопастей. Последний интегральный член во второй строчке формулы (13) соответствует некоторой системе диполей, распределенных по той же поверхности лопастей. Наконец, самый первый член определяется влиянием квадрупольных элементов и соответствует шуму, генерируемому вихревыми структурами потока.

Важно отметить, что для практического использования формулы (13) достаточно знать распределение скоростей в объеме, окружающем лопасти, при этом необходимо вычислять вторые производные от компонент вектора скорости по координатам. Нужно также знать давление на поверхности лопасти, а также производные давления по нормали и по времени — все величины на поверхности лопасти. Данные о полях скоростей и давлений в нашей работе берутся из аэродинамического расчета с помощью МКЭ. Такой подход избавляет от необходимости решать граничное интегральное уравнение для определения распределения давлений по поверхности лопасти.

Любопытно, что если лопасть является достаточно тонкой а ее поверхность можно считать абсолютно твердой, то член с источниками (т.е. второй член) в (13) пропадает. В самом деле, нормальная производная от акустического давления с точностью до несущественного множителя совпадает с нормальной проекцией скорости. В силу условия непротекания нормальные составляющие скорости на противоположных кромках равны по величине, но в силу противоположного направления нормалей, они равны друг другу с противоположным знаком. Следовательно, вклады источников от противоположных кромок лопасти взаимно уничтожаются. Это замечание позволяет для самой общей формы профиля и самой общей формы лопасти в плане трактовать второй интеграл в (13) как толщинный шум, а последний третий интеграл как шум нагрузки. Данный вывод подтверждается следующими соображениями. Предположим, что мы имеем симметричный профиль, установленный под нулевым углом атаки, т.е. профиль, не создающий подъемной силы. Если по какой-то причине лопасть с данным профилем вращается, то она, разумеется, будет генерировать шум. Однако в рассматриваемой ситуации в силу симметрии давление на обеих лицевых поверхностях в соответствующих граничных точках будет совпадать, в то время как член будет иметь равные и противоположные по знаку значения. Таким образом, в рассматриваемом случае последний интеграл в (13) пропадает.

Сделанные нами замечания позволяют дать окончательную трактовку каж-

дому слагаемому в формуле (13). Первый интеграл по объему определяет турбулентный шум вихрей. Второй член, связанный с действием точечных источников звука, распределенных по твердой поверхности лопастей, дает толщинную составляющую звукового поля. Наконец, последний интеграл в (13), определяемый действием диполей, распределенных по той же поверхности лопастей, отвечает за шум нагрузки.

Работа выполнена ООО "Персональные энергосистемы", при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере по Государственному контракту (договору) № 4239р/6585 от 26.06.2006г.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Goldstein M.E.* Aeroacoustics. McGraw-Hill: New York, 1976.
- [2] *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Royal Soc. London. 1952. **211A**. P. 564–587.
- [3] *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 2. Turbulence as a source of sound // Proc. Royal Soc. London. 1954. **222A**. P. 1–32.
- [4] *Curle N.* The influence of solid boundaries on aerodynamic sound // Proc. Royal Soc. London. 1955. **231A**. P. 505–514.

**Sumbatyan M.A., Zhestkov Yu.N.** *Calculation of sound field for the rotating blade of a wind power unit.* The subject of the present investigation is direct numerical treatment of a respective algorithm realized as a program on PC, which calculates the level of the aerodynamic noise of wind power stations, by using the aeroacoustic Lighthill-Curle (L-C) theory. We give basic fundamental relations of the L-C theory and develop our own treatment of this theory. It turns out that in frames of the proposed approach, basing on the data of a preliminary aerodynamic calculation, it is possible to reduce the problem to a simple calculation of some quadratures. The main purpose of the present work is the realization of the costructed algorithm in real time on PC. This allows us to estimate main factors affected the noise level by the direct numerical simulation.

# МЕТОД ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К АУРАЛИЗАЦИИ В АКУСТИКЕ ПОМЕЩЕНИЙ

**Тодоров Н. Ф.**

*Ростовский государственный университет*

В работе исследуется переотражение гармонической волны от точечного источника на системе отражающих поверхностей. Данные траектории лучей имеют место в случае отражений звуковых волн в реальных помещениях. Рассматривается возможность применения полученных результатов для аурализации при компьютерном моделировании в акустике помещений.

Часто при проектировании разнообразных помещений, где важно “правильное”, “живое” звучание, необходимо знать, каким должно быть его оформление. Подход к решению данной задачи может быть разным, вплоть до полного игнорирования этой проблемы. Очевидно, результат в итоге будет плачевный. И если для бытового помещения недостатки звучания, например, домашнего кинотеатра, в общем-то, не критичны, то уже для большого зала такое не допустимо.

Как можно заранее узнать, каким будет звучание? Столетиями архитекторы вырабатывали общие принципы таких строений с хорошей акустикой. Всемирно известные здания Венской Оперы и Бременского концертного зала были построены ещё до компьютерной эпохи, но в каком-то плане их можно назвать эталонными. Однако в наш цифровой век использование математического моделирования позволяет поднять акустическое оформление залов, комнат и прочих помещений на качественно новый уровень.

Появляется новый термин – “Аурализация” (auralization). Его определение дал Мендель Клейнер (Mendel Kleiner) в 1989 году. Оно звучит так: “Аурализация – это процесс превращения звукового поля источника в пространстве в “слышимый звук” путем физического или математического моделирования таким образом, чтобы смоделировать бинауральное слуховое ощущение на заданной позиции моделируемого пространства” [1].

Каково же состояние компьютерной реализации этих идей на сегодняшний день? Отметим некоторые программы акустического моделирования. Это EASE, Odeon Acoustic Modelling, Ulysess, CAT. Однозначно программу-лидера выделить нельзя. Они дополняют друг друга, чего нет в одном пакете, можно найти в другом. Есть и общие функции. В EASE главным плюсом можно отметить хорошую визуализацию процесса: просто и понятно конструируется модель: вводятся координаты нескольких точек, строятся из них поверхности и все это — в графическом режиме при помощи мыши. Нечто подобное, с сокращенным набором вариантов и удобств предлагает и Ulysess. Если в EASE возможно присвоить группе поверхностей один и тот же материал, то в Ulysess придется по очереди перебирать все плоскости. В CAT этого всего нет, и модель помещения набирается вручную текстом на специальном языке в гео-файле. У этого обстоятельства есть и преимущества — такая модель полностью параметрическая, то есть внутри гео-текста задаются переменные (например, высота потолка), и в дальнейшем

изменение высоты потолка осуществляется изменением всего лишь одной цифры в заголовке текстового файла. Кроме того, поскольку это, практически, язык программирования, то в некоторых случаях создание модели и управление ею может оказаться предельно простым – имеется возможность задавания математических функций, циклов, проверка условий. Перед запуском симуляции можно заставить программу запрашивать у пользователя какие-нибудь параметры, например, включать или не включать в моделирование отражатели, какой набор материалов применять и так далее.

Однако всё это относится лишь к созданию модели, к тому же ряд пакетов допускают импорт фрагментов помещения из AutoCAD, ArchiCAD. Самый сложный вопрос – это акустическая симуляция. В реализации аурализации возникают серьёзные различия. Набор акустических оценок подкупает у САТТ, до выхода новой версии EASE это был единственный пакет, учитывающий рассеяние (диффузию) волн. В существующих программах имеется некоторая оценка звукового поля на отдельных частотах, с привлечением статистических методов. В отличие от механики, где метод конечных элементов позволяет рассчитать поведение объекта с любой точностью, расчет акустики зала опирается на набор математических моделей, описывающих отдельные процессы – поглощение, отражение, интерференция. Если брать модуль Standart Mapping у EASE, то все основано на статистических формулах, и для получения, например, суммарного звукового давления используется прямое звуковое давление и время реверберации зала, которое берется одно и то же для всего зала. Никак не учитывается неоднородность прихода отражений, возможность возникновения резонансов в разных местах зала.

Если нужны более достоверные оценки акустики – то это возможно только после трассировки лучей. Хотя, по-прежнему, это не дает представления о волновых процессах в зале, зато идеально с точки зрения геометрической акустики. Это уже не усредненные эмпирические формулы, а вычисления, основанные на реальных данных – углы, расстояния, коэффициенты поглощения/рассеяния и так далее.

Далее предлагается использование метода траекторий звуковых лучей (Ray Tracing Method) для решения проблемы аурализации – процесса превращения звукового поля источника в пространстве в “слышимый звук” путём физического или математического моделирования бинаурального слухового ощущения на заданной позиции пространства. Используемый метод путём слежения за траекториями выпущенных из источника лучей позволяет численно построить форму звукового импульса  $p_1(t)$ , принимаемого в некоторой точке. При этом учитывается как поглощение, так и диффузия на отражающих поверхностях.

Рассмотрим высокочастотную монохроматическую сферическую волну, падающую на систему рассеивателей от точечного источника в точке  $x_0$ . Если любой луч вида  $x_0 - y - x$  отражается от поверхности  $S$  только один раз, тогда, согласно физической теории дифракции Кирхгофа, давление  $p(x)$  в отраженной волне определяется следующим интегралом:

$$p(x) = \iint_S 2p^{inc}(y) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial n_y} dS. \quad (1)$$

Здесь  $p^{inc}(y)$  — значение давления в падающей волне на границе  $S$ ,  $\Phi$  — потенциал фундаментального решения (функция Грина),  $n_y$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$  в точке  $y$ ,  $k$  — волновое число.

$$\begin{aligned} p^{inc}(y) &= e^{ik|x_0-y|} |x_0 - y|^{-1}, \\ \Phi(y, x) &= (4\pi)^{-1} e^{ik|x-y|} |x - y|^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Давление в точке  $x_{N+1}$  в переотраженной произвольное число  $N$  раз акустической волне составляет модификация интегрального представления Кирхгофа. После некоторых преобразований его можно представить в виде  $2N$  кратного интеграла

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n \iiint_{S_N^*} * \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|. \quad (3)$$

Применим к (3) метод многомерной ( $2N$ -мерной) стационарной фазы:

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{L_0} \prod_{n=1}^N \frac{\cos \gamma_n}{L_n} \frac{\exp \left\{ i \left[ k \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N} + 2N) \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_{2N})|}} \quad (4)$$

где  $D_{2N} = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 2N$  — симметричная матрица гессiana ленточной структуры с шириной ленты, равной семи. Параметр  $\delta_{2N} = \text{sign } D_{2N}$  — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы  $D_{2N}$ . Выпишем ненулевые элементы  $d_y$ ,  $i \leq j$ :

диагональные элементы:

$$\left\{ \begin{array}{c} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{array} \right\} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{array} \right\} \cos \gamma_n,$$

внедиагональные элементы:

$$\begin{aligned} d_{2n-1, 2n} &= - (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \cos \alpha_n \cos \beta_n, \\ d_{2n-1, 2n+1} &= L_n^{-1} \left( \cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - c_{11}^{(n)} \right), \\ d_{2n-1, 2n+2} &= L_n^{-1} \left( \cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - c_{21}^{(n)} \right), \\ d_{2n, 2n+1} &= L_n^{-1} \left( \cos \beta_n \cos \alpha_{n+1} - c_{12}^{(n)} \right), \\ d_{2n, 2n+2} &= L_n^{-1} \left( \cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - c_{22}^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_{11}^{(n)} = a_{11}^{(n)} b_{11}^{(n)} + a_{21}^{(n)} b_{21}^{(n)} + a_{31}^{(n)} b_{31}^{(n)}, \quad c_{12}^{(n)} = a_{12}^{(n)} b_{11}^{(n)} + a_{22}^{(n)} b_{31}^{(n)} + a_{32}^{(n)} b_{31}^{(n)},$$

$$c_{21}^{(n)} = a_{11}^{(n)} b_{12}^{(n)} + a_{21}^{(n)} b_{22}^{(n)} + a_{31}^{(n)} b_{32}^{(n)}, \quad c_{22}^{(n)} = a_{12}^{(n)} b_{12}^{(n)} + a_{22}^{(n)} b_{22}^{(n)} + a_{32}^{(n)} b_{32}^{(n)}.$$

Здесь  $\{ -\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, -\cos \gamma_n \}$  – направление падающего луча,  $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) – главные кривизны поверхности в точке  $y_n^*$ .

Осуществим аналитически предельный переход при  $k_n^{(i)} \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$  и получим формулу для амплитуды при переотражении высокочастотной акустической волны от системы акустически твёрдых плоских отражателей:

$$p(x_{N+1}) = \exp \left( i k \sum_{n=0}^N L_n \right) \left( \sum_{n=0}^N L_n \right)^{-1} \quad (6)$$

Что происходит, когда слушатель воспринимает звук в помещении? Его источник создаёт определенный акустический сигнал, который представляет собой некоторую звуковую волну с определенной зависимостью звукового давления от времени  $p_1(t)$ . Затем этот сигнал определенным образом изменяется помещением за счет отражений звуковых волн, процессов затухания, дифракции и т.д. Если рассматривать помещение как линейный фильтр, который имеет свои характеристики  $p(t)$ , то в каждой точке пространства суммарный сигнал получается как "свертка" сигнала источника и характеристик помещения:

$$p_\Sigma(\tau) = p_1 \oplus p = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\tau)p(\tau - t)dt. \quad (7)$$

Построенная модель позволяет получить более качественную оценку звукового поля, по сравнению с имеющимися коммерческими программами акустического моделирования, где применяются статистические формулы и не проводится полного анализа траекторий звуковых лучей.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Kuttruff K.H.* Auralization of impulse responses modeled on the basis of Ray-Tracing results // *J. Audio Eng.Soc.* 1993. 41. P. 876–880
- [2] *Сумбатян М.А., Боев Н.В., Тодоров Н.Ф.* Алгоритмы траекторий звуковых лучей в акустике помещений // Сборник трудов XVIII сессии Российского акустического общества. М.: ГЕОС, 2006. Т. 3 С. 191–195
- [3] *Алдошина И.И.* Основы психоакустики // *Звукорежисёр* М., 2000. № 7. С. 40–45

**Todorov N.F.** *Ray tracing method with application to auralization in room acoustics.* In the present work we study re-reflections of harmonic waves generated by a point source from a system of reflecting surfaces. Such ray trajectories take place in reflection of sound waves in real halls. We study the possibility to apply the proposed method to auralization along computer simulation in room acoustics.

# ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Трепачев В. В.**

*Ростовская государственная академия сельхозмашиностроения*

Изучены проблемы демпфирования колебаний тонкой упругой ортотропной пластины на поверхности вязкой глубокой жидкости.

Рассмотрим плоское волновое движение тяжелой вязкой несжимаемой жидкости и упругой ортотропной пластины, покрывающей поверхность жидкости. Считаем, что жидкость имеет бесконечную глубину, а координатные плоскости совмещены с плоскостями упругой симметрии пластины. В теории пластины учтем модель Тимошенко для поперечного сдвига, поправку Рэлея на инерцию вращения элемента пластины и гипотезу Кирхгофа об отсутствии давления слоев пластины друг на друга. Верхняя поверхность пластины свободна от напряжений. Постановка линейной задачи включает в себя уравнение Навье-Стокса, уравнение неразрывности, уравнение движения пластины в перемещениях, граничные условия на границе раздела жидкости и анизотропной пластины [1]–[4]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad z < 0;$$

$$\operatorname{div} \nu = 0, \quad \nu = \{v_x, v_z\}, \quad z \leq 0; \quad (1)$$

$$p = p_r + \rho g z, \quad \rho = \text{const}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -g \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\tau_1}{\rho_1 h}, \quad c_1^2 = \frac{E_0}{\rho_1}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{I}{hc_2^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ & = \left[ 1 + \frac{I}{hc_2^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \frac{p_2}{\rho_1 h} - \frac{1}{2\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_1), \quad c_2^2 = \frac{G_0}{\rho_1}, \quad I = \frac{h^3}{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости жидкости;  $\rho_1$  — плотность материала пластины;  $\{u, w\}$  — вектор перемещения пластины на границе раздела;  $h$  — толщина пластины;  $\tau_1$  — касательное напряжение со стороны жидкости;  $E_0, G_0$  — упругие постоянные. Условия на границе раздела сред  $z = 0$  имеют вид [1]–[4]

$$-p + \rho \left( gw + 2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_2, \quad z = 0, \quad \sigma_x^0 = \text{const}; \quad (5)$$

$$\nu \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \tau_1, \quad z = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_z, \quad z = 0, \quad (7)$$

где  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости;  $\sigma_x^0$  — коэффициент поверхностного натяжения. Значение  $\sigma_x^0 = \sigma_x^1 + \sigma_x^2$ , где  $\sigma_x^1$  — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности пластины,  $\sigma_x^2$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела пластина-жидкость. Жидкость глубокая, поэтому выполняется условие убывания поля скоростей  $\mathbf{v}$  и динамической составляющей давления  $p$  на бесконечности

$$(v, p) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

Решение уравнений (1),(3),(4) отыскиваем в виде бегущих волн

$$\begin{aligned} v_x &= (bu_0 e^{bz} - ik_0 \varphi_0 e^{k_0 z})v, & v_z &= k_0(iu_0 e^{bz} + \varphi_0 e^{k_0 z})v, \\ p &= -i\omega \rho \varphi_0 e^{k_0 z}v, & w &= \frac{k_0}{\omega}(u_0 - i\varphi_0)v, \\ u &= -\frac{1}{\omega}(ibu_0 + k_0 \varphi_0)v, & v &= \exp[-i(k_0 x - \omega t)], \\ b &= \sqrt{(i\omega/\nu) + k_0^2}, & \operatorname{Re}(b) &> 0, \quad k_0 > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ ,  $k_0$  — волновое число, которое считается заданной величиной.

Подставим формулы (9) в уравнения колебаний жидкости и пластины (1)–(4), учтем (5)–(8), получим однородную линейную алгебраическую систему уравнений. Приравняем определитель линейной системы к нулю, выводим уравнение собственных частот колебаний ортотропной пластины на поверхности вязкой жидкости с учетом влияния сил поверхностного натяжения. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega/\omega_0, & \Omega_1 &= c_1 k_0/\omega_0, \\ \Omega_2 &= c_2 k_0/\omega_0, & \Omega_s &= c_2 \sqrt{h/I}/\omega_0, \quad I = h^3/12, \\ \Omega_0 &= \sqrt{k_0 g}/\omega_0, & \gamma &= \rho/\rho_1, \quad k = k_0 h, \\ a &= \sqrt{\nu k_0^2/\omega_0}, & y_0 &= ba/k_0 = \sqrt{i\Omega + a^2}, \quad \operatorname{Re}(y_0) > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\omega_0$  — частота свободных волн на поверхности идеальной глубокой жидкости, которая зависит от волнового числа  $k_0$  и коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma_x^0$ ;  $\omega_\infty = \sqrt{k_0 g}$  — частота волн на поверхности идеальной глубокой жидкости в случае отсутствия поверхностного натяжения. Из соотношений (10) видно, что значения размерных частот колебаний  $\omega$ ,  $\omega_1 = c_1 k_0$ ,  $\omega_2 = c_2 k_0$ ,  $\omega_s = c_2 2\sqrt{3}/h$ ,  $\omega_{00} = \sqrt{k_0 g}$  сравниваются с частотой  $\omega_0$ . Параметр  $\gamma$  имеет смысл относительной плотности жидкости, так как он равен отношению плотности жидкости к плотности материала пластины. Безразмерный параметр  $k = 2\pi h/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $h$  — толщина упругой пластины, характеризует относительную толщину пластины. Отметим, что  $\Omega_2/\Omega_s = k/2\sqrt{3}$ . Следовательно, частота  $\Omega$  в общем случае зависит от шести независимых безразмерных переменных  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_0, \gamma, k, a$ .

Воспользуемся безразмерными соотношениями (10). Преобразуем уравнение собственных частот колебаний ортотропной пластины, покрывающей поверхность вязкой глубокой жидкости, к следующему виду

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\Omega_1^2 - \Omega^2)(\Omega_2^2 - \Omega^2)}{\Omega_s^2} - \Omega^2 \right] \cdot \left[ (\Omega_1^2 - \Omega^2) \left( 1 - \frac{y_0}{a} \right) + \frac{\gamma}{k} \Omega^2 \right] + \\ & + \frac{\gamma}{k} \left[ 1 + \frac{(\Omega_1^2 - \Omega^2)}{\Omega_s^2} \right] \left[ \left( \frac{y_0}{a} (\Omega_1^2 - \Omega^2) + \Omega_0^2 \right) \cdot (\Omega^2 - 1 - 2a^2 \Omega i) + \right. \\ & \left. ((\Omega_1^2 - \Omega^2) + \Omega_0^2)(1 + 2a\Omega y_0 i) - \frac{\gamma}{k} \Omega^2 \left( \Omega^2 - 1 - 4a^2 \Omega \frac{y_0 i}{y_0 + a} \right) \right] + \\ & + 0.5\gamma\Omega \left[ (\Omega_1^2 - \Omega^2)(\Omega - 2a^2 i + 2ay_0 i) + \Omega_0^2 \Omega \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим левую часть уравнения (11) в виде функции  $F(\Omega)$ . При преобразовании (11) опущен общий множитель  $1/\Omega$ . Следовательно, частотное уравнение имеет вид  $F(\Omega)/\Omega = 0$ . Найдем предел  $F(\Omega)/\Omega = 0$  при  $\Omega \rightarrow 0$ , имеем

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{F(\Omega)}{\Omega} = -6\chi^2 i \left[ 1 + \frac{\gamma}{k^3 \Omega_1^2} \left( 1 + \frac{\Omega_0^2}{\Omega_1^2} \right) \left( 12 + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} k^2 \right) \right], \quad (12)$$

где безразмерный параметр  $\chi$  равен

$$\chi = \frac{\Omega_1^2 k}{a} = \frac{C_1^2 k_0^3 h}{\omega_0^{3/2} \sqrt{\nu k_0^2}} = \frac{(E_1 h) k_0^3}{\rho_1 \omega_0^{3/2} \sqrt{\nu k_0^2}}. \quad (13)$$

Пусть в материале пластины отсутствуют потери, тогда выражение в квадратных скобках правой части (12) больше или равно 1 при действительных значениях волнового числа. Следовательно, уравнение  $F(\Omega)/\Omega = 0$  не имеет корня  $\Omega = 0$ , если параметр  $\chi$  не обращается в ноль, а  $k$  — действительное число.

Размерная величина  $E_1 h$ , входящая в  $\chi$ , имеет смысл поверхностного модуля упругости твердого тела. Найдем оценку  $E_1 h$ , полагая  $h = 10^{-9}$  м (характерная толщина пленок загрязнений на поверхности воды). В случае мягкой резины  $E_1 = 5 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup>, а значение  $E_1 h = 5 \cdot 10^{-3}$  Дж/м<sup>2</sup>. Полученное значение  $E_1 h$  количественно сравнимо с поверхностным давлением монослоев ПАВ на жидких поверхностях.

Считаем, что параметр  $k = 2\pi h/\lambda$  принимает малые значения. Потребуем выполнения следующих условий для безразмерных  $\gamma$ ,  $a$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$

$$\begin{aligned} & 0 < \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 < \infty, \quad \gamma_i = \text{const}, \quad i = 1, 2; \\ & a = O(k^s), \quad k \rightarrow 0, \quad 0 \leq s \leq s_1 < 1/2, \quad s_1 = \text{const}; \\ & \Omega_1^2 = O(1/k^{1-s}), \quad \Omega_1/\Omega_2 = O(1), \quad k \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13), (14) следует, что параметр  $\chi$ , характеризующий поверхностную упругость пластины, удовлетворяет в этом случае оценке  $\chi = (1)$ ,  $k \rightarrow 0$ . Учтем, что

$$0 < \Omega_0 \leq 1. \quad (15)$$

**Теорема.** Пусть  $k$  является малым параметром, а  $\gamma, a, \Omega_1$  и  $\Omega_2$  удовлетворяют (14), значения безразмерной частоты  $\Omega$  конечны, тогда уравнение (11) может быть представлено в виде

$$\left[ y_0 \chi(\Omega^2 - 1 - 2a^2 i \Omega) + \chi a(1 + 2a \Omega y_0) - \gamma \Omega^2 \left( \Omega^2 - 1 - 4a^2 \Omega \frac{i y_0}{y_0 + a} \right) \right] + O(k^{1-s}) \equiv F_l(\Omega) + O(k^{1-s}), \quad k \rightarrow 0, \quad (16)$$

где  $F_l(\Omega) = 0$  — дисперсионное уравнение свободных колебаний вязкой жидкости, покрытой упругой пленкой ПАВ, в рамках теории Левича [2]–[4].

При выполнении условий (14) возникают две системы волн — продольные и поперечные. Указанные системы волн описывают анизотропию затухания [4]. Эффект изгибной жесткости пластины пренебрежимо мал, что соответствует данным наблюдений поверхностных загрязнений воды. Кроме того, инерциальные эффекты, связанные с колебаниями пластины на подвижной поверхности жидкости пренебрежимо малы. Такой эффект не наблюдается на поверхности идеальной жидкости (модель "битый лёд").

Уравнение (16) не описывает третью систему волн, которая относится к поперечным. Третья систем волн обладает значительно более высокой частотой колебаний.

Воспользуемся исходным частотным уравнением, условиями на параметры (14), выводим асимптотику корня этого уравнения в высокочастотной области

$$\Omega^2 = \Omega_s^2 \left[ 1 + \frac{k^2}{2(\gamma + k)} \left( 1 + \frac{2a}{\sqrt{\Omega_s}} e^{3\pi i/4} \right) \right] + \Omega_1^2 + \frac{k \Omega_2^2}{k + \gamma} + O(k^{2-s}), \quad k \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (9), (10), (17) видно, что наличие вязкой жидкости приводит к увеличению коэффициента затухания волн с характерной частотой  $\Omega = \Omega_s$ . Преобразуем уравнение собственных частот колебаний пластины, покрывающей поверхность вязкой глубокой жидкости (11). Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - y_0/a &= -i\Omega/(a(y_0 + a)), \\ [(\Omega_1^2 - \Omega^2) + \Omega_{00}^2](1 + 2ia\Omega y_0) + [(y_0/a)(\Omega_1^2 - \Omega^2) + \Omega_{00}^2](\Omega^2 - 1 - 2ia^2\Omega) &= \\ = (\Omega_1^2 - \Omega^2)[1 + (y_0/a)(\Omega^2 - 1)] + 2ia\Omega\Omega_{00}^2(y_0 - a) &= \\ = \Omega \left[ \frac{\Omega_1^2 - \Omega^2}{a} \left( y_0\Omega - \frac{i}{y_0 + a} \right) - \frac{2a\Omega_{00}^2\Omega}{y_0 + a} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Omega - 2ia^2 + 2ay_0i = \Omega + 2ia(y_0 - a) = \Omega(1 - (2a)/(y_0 + a)), \quad y_0 = \sqrt{i\Omega + a^2}.$$

Вынесем общий множитель  $\Omega$ . Учтем, что при выводе (11) был опущен другой общий множитель  $(k_0\omega_0^2)/\Omega$ , имеем частотное уравнение, которое справедливо и в случае  $\Omega = 0$

$$\begin{aligned} [(\Omega_1^2 - \Omega^2)(\Omega_2^2 - \Omega^2) - \Omega_s^2\Omega^2][i(\Omega^2 - \Omega_1^2) + (\gamma/k)a(a + y_0)\Omega] + \\ + (\gamma/k)[(\Omega_1^2 - \Omega_s^2) - \Omega^2] \{ (\Omega_1^2 - \Omega^2)[y_0(a + y_0)\Omega - i] - 2a^2\Omega_{00}^2\Omega \} - \end{aligned}$$

$$-(\gamma - k)\Omega a[(\Omega^2 - 1)(y_0 + a) - 4a^2\Omega i y_0] + 0.5\gamma\Omega a[(\Omega_1^2 - \Omega^2)(y_0 - a) + \Omega_{00}^2(y_0 + a)\Omega_s^2] = 0, \quad \text{где } \Omega_s^2 = 12\Omega_2^2/k^2, \quad k = k_0h. \quad (19)$$

Воспользуемся последней формулой (10), имеем  $y_0^2 = i\Omega + a^2$ . Проведем замену переменной в уравнении (19), полагая

$$\Omega = i(a^2 - y_0^2). \quad (20)$$

Получим алгебраическое уравнение 12-й степени относительно новой переменной  $y_0$ . Уравнение (19), представленное в алгебраической форме, анализировалось численно. Отбор корней этого уравнения проведен с помощью неравенств, приведенных в (9). В безразмерной форме условия отбора корней имеют вид

$$Re(\Omega) > 0, \quad Im(y_0) > 0. \quad (21)$$

Таким образом, безразмерные частоты свободных волн найдены подстановкой в правую часть формулы (20) только тех корней алгебраического уравнения (19), которые удовлетворяют условиям (21). В качестве начальных значений исходных данных выбраны:  $E_0 = 3 \cdot 10^9$  Па,  $G_0 = 1.1 \cdot 10^9$  Па,  $\rho_1 = 870$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 2$  м,  $\lambda = 750$  м,  $\nu = 0.0004$  м<sup>2</sup>/сек. Частота поперечных волн при наличии пластины отличается от частоты волн на свободной поверхности жидкости менее чем на 2% при изменении параметра относительной плотности  $\gamma$  от значения 0.5 до 8 включительно. Увеличение параметра  $\gamma$  приводит к увеличению частоты поперечных волн. Частота поперечных волн при наличии пластины отличается от частоты волн на свободной поверхности жидкости менее чем на 2% при изменении толщины пластины от значения 2 м до 8 м включительно. Увеличение толщины пластины приводит к возрастанию частоты поперечных волн. Коэффициент затухания поперечной волны имеет минимум при толщине пластины 7 м.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трепачев В.В. Плоские колебания ортотропной пластины в поле силы тяжести, вызванные поверхностными напряжениями // Совр.пробл.мех.спл.среды. Труды VIII Межд.конф., г.Ростов-на-Дону, 14-18 окт. 2002 г. Т. 1. С. 191–194.
- [2] Демин Б.Т., Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Шереметьев А.И. Исследование упругих свойств морских поверхностно-активных пленок // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. № 8. С. 410–416.
- [3] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [4] Трепачев В.В. Анализ анизотропии коэффициентов затухания свободных волн, покрытых упругой пленкой поверхностно-активных веществ // Морской гидрофиз. журн. 1992. № 2. С. 54–59.

**Трепачев В.В.** *Damping of oscillations of the orthotropic plate floating on a surface viscous fluids.* Problems of a vibration damping of a thin elastic orthotropic sheet on a surface of a viscous deep fluid are studied.

# ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ГРАФИТОВЫХ СТЕРЖНЕЙ И УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

**Устинов Ю. А., Ватульян К. А.**

*Ростовский государственный университет*

В работе приводятся решения двух задач Сен-Венана растяжения, кручения и чистого изгиба графитового цилиндрического стержня. Решения первой задачи построены для цилиндра с произвольным поперечным сечением из материала, обладающего прямолинейной анизотропией, присущей графиту. Решение второй задачи построено для кругового цилиндра с радиально-круговой анизотропией того же класса. Полученные результаты могут быть использованы для анализа НДС графитовых нанотрубок.

В статье В.А. Городцова и Д.С. Лисовенко [1] в связи с изучением напряжённо-деформируемого состояния (НДС) нанотрубок рассмотрены задачи Сен-Венана растяжения и кручения графитового цилиндрического стержня. Анализ этой работы показал, что при построении решения авторами допущен ряд ошибок. В данной работе предлагается исправленное решение этих задач. В течение последних двух десятилетий помимо таких давно известных модификаций углерода, как алмаз и графит, были обнаружены и интенсивно исследуются такие новые углеродные образования как фуллерены, нанотрубки, карбин и др. Особое внимание уделяется исследованию углеродных нанотрубок в связи с большими перспективами их применения в электронике. Углеродные нанотрубки по своему молекулярному строению очень схожи с графитом и отличаются от него, в первую очередь, своей закрученностью в цилиндрические, спиралевидные и конусообразные структуры. Монокристаллический графит обладает сильной анизотропией молекулярного строения, которая находит отражение в сильной анизотропии его макроскопических свойств. А большая родственность строения графита и углеродных нанотрубок позволяет, как утверждают авторы, представлять цилиндрические многослойные нанотрубки как свёрнутые в цилиндры графитовые пластины. В соответствии со сказанным выше можем предположить, что локально, в цилиндрической системе координат, будет сохраняться та же форма закона Гука, что и в декартовой системе координат с параметрами, установленными для графита. Из этого следует, что нанотрубку можно рассматривать как цилиндр с криволинейной анизотропией. По анизотропии структуры и свойств графит наиболее часто относится к гексагональному типу симметрии. Гексагональный графит именуют также  $\alpha$ -графитом. В природном графите наряду с такой основной модификацией десятки процентов составляет также  $\beta$ -графит с несколько другой симметрией, относящейся к ромбоэдрической системе. В данной работе рассматриваются соотношения для ромбоэдрической симметрии, которые переходят в соотношения для гексагональной в частном случае, когда модуль упругости  $C_{14} = 0$ . В случае ромбоэдрической симметрии имеем симметричную матрицу жёсткости:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & C_{66} \end{pmatrix}$$

причём  $2C_{66} = C_{11} - C_{12}$ .

### Задача кручения

Рассмотрим упругое осесимметричное равновесие полого кругового цилиндра. С геометрическим центром поперечного сечения одного из торцов свяжем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ . Обозначим через  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и внешний радиусы соответственно. Будем рассматривать случай, когда боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений. Приведем основные соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние (НДС). Соотношения обобщенного закона Гука в рассматриваемом случае имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11}e_{rr} + C_{12}e_{\theta\theta} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{\theta z} \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12}e_{rr} + C_{11}e_{\theta\theta} + C_{13}e_{zz} - C_{14}e_{\theta z} \\ \sigma_{zz} &= C_{13}e_{rr} + C_{13}e_{\theta\theta} + C_{33}e_{zz} \\ \sigma_{\theta z} &= C_{14}e_{rr} - C_{14}e_{\theta\theta} + C_{44}e_{\theta z} \\ \sigma_{rz} &= C_{44}e_{rz} + C_{14}e_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} &= C_{14}e_{rz} + C_{66}e_{r\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через смещения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \partial_z u_z, \\ \gamma_{r\theta} &= \partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r}, \quad \gamma_{rz} = \partial_r u_z + \partial_z u_r, \quad \gamma_{z\theta} = \partial_z u_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} \cdot r + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ \partial_r \sigma_{r\theta} \cdot r + 2\sigma_{r\theta} &= 0 \\ \partial_r \sigma_{rz} \cdot r + \sigma_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В этом случае поле смещений будем отыскивать в следующем виде [2]:

$$u_r = \alpha a_r(r), \quad u_\theta = \alpha z r, \quad u_z = \alpha a_z(r) \quad (4)$$

где  $\alpha$  — относительный угол закручивания (произвольная константа). Тогда напряжения примут вид:

$$\sigma_{rr} = \alpha \left( C_{11} \partial_r a_r + C_{12} \frac{a_r}{r} + C_{14} r \right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \alpha(C_{12}\partial_r a_r + C_{11}\frac{a_r}{r} - C_{14}r) \\ \sigma_{zz} &= \alpha C_{11}(\partial_r a_r + \frac{a_r}{r}) \\ \sigma_{\theta z} &= \alpha(C_{14}(\partial_r a_r - \frac{a_r}{r}) + C_{44}r) \\ \sigma_{rz} &= \alpha C_{44}\partial_r a_z, \sigma_{r\theta} = \alpha C_{14}\partial_r a_z\end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений равновесия получаем, что  $\sigma_{rz} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$  и  $a_z = 0$ . Остаётся одно уравнение равновесия, которое после подстановки выражений для напряжений принимает вид:

$$\partial_r^2 a_r + \frac{1}{r}\partial_r a_r - \frac{a_r}{r^2} + 3\frac{C_{14}}{C_{11}} = 0$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$a_r = -\frac{C_{14}}{C_{11}} + C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \quad (5)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определим из граничных условий:

$$\sigma_{rr}|_{r=r_\beta} = 0, \beta = 1, 2 \quad (6)$$

В результате получаем:

$$a_r = -\frac{C_{14}}{C_{11}}r^2 + \frac{C_{14}(C_{11} + C_{12})(r_1 r_2)^2}{C_{11}(C_{11} - C_{12})(r_1 + r_2)r} + \frac{C_{14}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}{C_{11}(r_1 + r_2)} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \alpha C_{14}\left(r + \frac{C_{12}}{C_{11}}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} - r + \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2}{(r_1 + r_2)r^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} - 2r - \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2}{(r_1 + r_2)r^2}\right)\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \alpha C_{14}\left(-r + \frac{C_{12}}{C_{11}}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} - 2r - \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2}{(r_1 + r_2)r^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} - r + \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2}{(r_1 + r_2)r^2}\right)\right) \quad (8)\end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = \alpha C_{13}\frac{c_{14}}{C_{11}}\left(2\frac{(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}{r_1 + r_2} - 3r\right)$$

$$\sigma_{\theta z} = \alpha\left(\frac{c_{14}^2}{C_{11}}\left(-r - 2\frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2}{(r_1 + r_2)r^2}\right) + C_{44}r\right)$$

Для определения жёсткости на кручение вычислим крутящий момент  $M$ :

$$M = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta z} r^2 dr = 2\alpha\pi \left( \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \left( C_{44} - \frac{C_{14}^2}{C_{11}} \right) - 2\frac{C_{14}^2}{C_{11}} \cdot \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2 (r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} \right)$$

Так как  $M = \alpha C$ , то

$$C = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)(C_{44} - \frac{C_{14}^2}{C_{11}}) - 4\pi \frac{C_{14}^2}{C_{11}} \cdot \frac{C_{12} + C_{11}}{C_{12} - C_{11}} \cdot \frac{(r_1 r_2)^2 (r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} \quad (9)$$

Итак, из проведенного исследования вытекает, что отличными от нуля являются четыре компоненты тензора напряжений:  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}$ . Проведем сравнение полученных результатов с результатами [1].

В [1] решение Сен-Венана отыскивалось в виде:

$$u_r = 0, u_\theta = \alpha r z, u_z = \alpha \psi(r),$$

вследствие чего было получено, что  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = 0$ .

Кроме того, авторы [1] неверно выписали закон Гука. Как показывают проведенные выше исследования, только  $\sigma_{r\theta} = 0$ , а остальные напряжения ненулевые. Также отличаются и выражения для жесткости на кручение. В данном исследовании для неё было получено выражение (9). В [1] для нее приводится следующее выражение:

$$C_0 = \frac{\pi}{4}(C_{11} - C_{12} - \frac{2C_{14}^2}{C_{44}})(r_2^4 - r_1^4) \quad (10)$$

Поскольку формулы (9) и (10) по виду значительно отличаются, желательно провести численный сравнительный анализ результатов, вытекающих из этих формул. Сравнительный анализ проводился для  $\alpha$ -кварца, модули упругости которого известны [4], а жесткость считается по аналогичным формулам, так как численных значений модуля  $C_{14}$  для  $\beta$ -графита, исследование которого проводится в данной работе, не удалось обнаружить ни в указанной статье, ни в другой литературе. Ниже приведён график относительной погрешности  $p = \frac{C - C_0}{C} \cdot 100$ , где жесткости зависят от отношения  $r_1/r_2$  для  $\alpha$ -кварца.

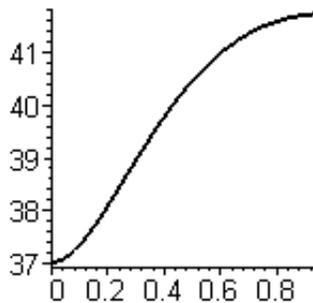


Рис. 1. Погрешность

Из этого графика видно, что формула (10) даёт заниженное значение для жесткости. Следует также отметить, что несмотря на то, что  $\sigma_{zz} \neq 0$ , главный вектор равен нулю. Модули упругости для  $\alpha$ -кварца, приведённые в  $10^{10}$  дин/см<sup>2</sup>:

$$C_{11} = 86.8, C_{33} = 105.75, C_{44} = 58.2, C_{12} = 7.04, C_{13} = 11.91, C_{14} = -18.04$$

### Задача растяжения

Решение системы (1)–(3) отыскивается в виде:

$$u_r = a_r, \quad u_\theta = a_\theta = 0, \quad u_z = \varepsilon z$$

Здесь  $\varepsilon$  — это произвольная константа, имеющая смысл относительного удлинения цилиндра. После преобразований получаем выражения для компонент тензора напряжений, подставляя которые в уравнения равновесия (3), получаем уравнение для  $a_r$ , которое имеет следующее решение:

$$a_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Удовлетворяя граничным условиям (6), находим  $C_1$  и  $C_2$ . Окончательно получаем:

$$a_r = -\frac{C_{13}\varepsilon}{C_{11} + C_{12}}$$

При этом напряжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0, & \sigma_{\theta\theta} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon \left( -\frac{2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}} + C_{33} \right), \\ \sigma_{\theta z} &= 0, & \sigma_{rz} &= 0, & \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Ненулевой является одна компонента тензора напряжений. Это решение уже было получено в [3].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко. Упругие свойства графитовых стержней и многослойных углеродных нанотрубок (кручение и растяжение) // *Механика твердого тела*. 2005. № 4. С. 42–56.
- [2] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит, 2003. 128 с.
- [3] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [4] Шаскольская М.П. Акустические кристаллы. М.: Наука, 1977. 320 с.

**Ustinov U.A., Vatulyan K.A.** *The Saint-Venant problem for graphite rods*. This article presents the study of two Saint-Venant problems of strain, torsion and bending of cylindrical graphite rod. First problem is solved for a cylinder with arbitrary cross-section and a material with linear anisotropy, like graphite. Second problem is solved for round cylinder with radial-circular anisotropy of the same class. Results can be used to analyze stress-strain state of graphite tubes.

# МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ ПОПЕРЕЧНО-АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУСЛОЯ

**Фесенко О. Д.**

*Донецкий национальный университет, Украина*

В данной работе рассматривается задача об осесимметричных резонансных колебаниях поперечно-анизотропного полуслоя, для решения которой используется метод динамических однородных решений. Удовлетворение граничных условий на боковой поверхности полуслоя осуществляется методом обобщенной граничной ортогонализации, что позволяет в процессе решения исключить анализ систем линейных уравнений с плохо обусловленными матрицами и даёт возможность получить рекуррентные соотношения для искомым коэффициентов рядов по динамическим однородным решениям.

Проблема возбуждения упругих волн в полуслое (полуполосе) являлась предметом анализа в обширном ряде публикаций [1], но при этом сохраняет свою актуальность ввиду существования многих неисследованных аспектов. К числу последних можно отнести анализ влияния фактора анизотропии материала слоя на характер локализованного у границы полуслоя поля краевых стоячих волн, включая явление резонанса на неоднородных волнах (краевого резонанса).

Численно-аналитический анализ задач о возбуждении поля стационарных упругих волн в упругом полуслое осуществлялся методами суперпозиции и однородных решений (метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн) [2], и в процессе применения последнего основная сложность заключалась в поиске коэффициентов рядов по однородным решениям.

Спектр использованных подходов отыскания коэффициентов включал методы коллокаций, наименьших квадратов, разложения в ортогональные ряды, а также использование свойства обобщенной I-ортогональности однородных решений [3]. В настоящей работе излагается подход, согласно которому коэффициенты разложений по базисным динамическим однородным решениям в задаче о возбуждении поля симметричных нормальных волн в анизотропном по толщине полуслое со свободными от напряжений плоскими гранями находятся по явным формулам на основе приема предварительной обобщенной граничной ортогонализации базисной системы вектор-функций однородных решений.

Рассмотрим поперечно-анизотропный полуслой с приведенными упругими постоянными  $c_{ij}$  отнесенный к системе безразмерных прямоугольных координат  $Ox_1x_2x_3$  и занимаемой области:

$$V = \{0 \leq x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty, -h \leq x_3 \leq +h\} \quad (1)$$

Динамическое напряженно-деформированное состояние полуслоя характеризуется нормированными функциями упругих волновых перемещений  $\tilde{u}_j(x_1, x_2, x_3, t)$

( $j = \overline{1, 3}$ ) и напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ). В качестве нормирующих параметров для величин с размерностями перемещений и механических напряжений используются характеристики  $h^*$  и  $c^*$ .

Плоские грани полуслоя свободны от механических напряжений

$$\tilde{\sigma}_{3j} |_{x_3=\pm h} = 0, j = \overline{1, 3} \quad (2)$$

на его боковой поверхности  $x_1 = 0$  действуют внешние гармонические усилия

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} |_{x_1=0} &= \chi(x_3) \exp(-i\omega t), \quad \tilde{\sigma}_{13} |_{x_1=0} = \zeta(x_3) \exp(-i\omega t), \\ \chi(x_3) &= \chi(-x_3), \quad \zeta(x_3) = -\zeta(-x_3), \end{aligned} \quad (3)$$

иницирующие в полуслое симметричное по толщине волновое поле.

Применение для анализа поставленной задачи метода динамических однородных решений предполагает представление искомым комплексных амплитудных составляющих  $u_j(x_1, x_3)$ ,  $\sigma_j(x_1, x_3)$  в представлениях волновых перемещений  $\tilde{u}_j = u_j \exp(-i\omega t)$  и напряжений  $\tilde{\sigma}_{kj} = \sigma_{kj} \exp(-i\omega t)$  рядами с неопределенными коэффициентами  $A_p$  по элементам базисной системы однородных решений  $\{\overline{\varphi}_p\}$  [2]

$$\overline{u} = \sum_{p=1}^N A_p L_u \overline{\varphi}_p, \quad \overline{\sigma} = \sum_{p=1}^N A_p L_\sigma \overline{\varphi}_p, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_p(x_1, x_3) &= \{\varphi_{1p}(x_1, x_3), \varphi_{2p}(x_1, x_3)\}, \quad \varphi_{kp}(x_1, x_3) = f_{kp}(x_3 C(x_1)), \quad k = \overline{1, 2}, \\ f_{1p} &= \alpha_{2p} \cos(\sigma_{1p} x_3) - \alpha_{1p} \cos(\sigma_{2p} x_3), \\ f_{2p} &= \kappa_{1p} \alpha_{2p} \cos(\sigma_{2p} x_3) - \kappa_{2p} \alpha_{1p} \cos(\sigma_{1p} x_3); \end{aligned} \quad (5)$$

$L_u, L_\sigma$  — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_u &= \begin{pmatrix} i\gamma_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_\sigma = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{13} \\ L_{22} \\ L_{33} \end{pmatrix}, \\ L_{11} &= \{L_{11}^1, L_{11}^2\}, \quad L_{13} = \{L_{13}^1, L_{13}^2\}, \quad L_{22} = \{L_{22}^1, L_{22}^2\}, \quad L_{33} = \{L_{33}^1, L_{33}^2\}, \\ L_{11}^1 &= -c_{11} \gamma_j^2, \quad L_{11}^2 = c_{13} \partial_3, \quad L_{13}^1 = c_{44} i \gamma_j \partial_3, \quad L_{13}^2 = c_{44} j \gamma_j, \quad L_{22}^1 = -\gamma_j^2 c_{12}, \\ L_{22}^2 &= c_{13} \partial_3, \quad L_{33}^1 = -\gamma_j^2 c_{13}, \quad L_{33}^2 = c_{33} \partial_3, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

$\gamma_j$  — корни дисперсионного уравнения [4].

В представлениях (5)  $C(x_1)$  — решение уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 C(x_1) + \gamma^2 C(x_1) = 0$ , которое в рассматриваемом случае представимо в виде

$$C(x_1) = \exp(i\gamma x_1), \quad \text{Im}(\gamma) > 0. \quad (7)$$

Граничные условия на боковой поверхности полуслоя  $x_1 = 0$ , из которых подлежат определению коэффициенты  $A_p$ , представляются в виде

$$\begin{aligned} \overline{(\sigma_G)}|_{x_1=0} = (\sigma_{11}, \sigma_{13})|_{x_1=0} = \sum_{p=1}^N A_p \overline{G_p} = (\chi(x_3), \zeta(x_3)), \\ \overline{G_p} = L_G \overline{\varphi_p}|_{x_1=0}, \quad L_G = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Следуя схеме обобщенной граничной ортогонализации вместо исходной системы вектор-функций однородных решений  $\{\overline{\varphi_p}\}$  вводим модифицированную систему вектор-функций  $\{\overline{\psi_p}\}$ , таким образом, чтобы разложение (3) трансформировалось в ортогональное:

$$\begin{aligned} \overline{\psi_1}(x_1, x_3) = (\psi_{11}(x_1, x_3), \psi_{12}(x_1, x_3)) = \frac{\overline{\varphi_1}(x_1, x_2)}{S_{11}}, \\ \overline{\psi_p}(x_1, x_3) = \frac{1}{S_{pp}} (\overline{\varphi_p}(x_1, x_3) - \sum_{k=1}^{p-1} s_{pk} \overline{\psi_k}(x_1, x_3)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $s_{pk}$  — коэффициенты, определяющиеся рекуррентным формулам

$$s_{pk} = \frac{1}{s_{kk}} (d_{pk} - \sum_{j=1}^{p-1} \overline{s_{kj}} S_{pj}), \quad d_{ij} = (G_i, G_j)_{H_G}. \quad (10)$$

Здесь  $H_G$  — Гильбертово пространство граничных вектор-функций  $\overline{G_p}$  с базисом  $L_G \overline{\varphi_p}$ , в котором введено скалярное произведение:

$$(G_i, G_j)_{H_G} = \int_{-h}^h (\sigma_{11}^i \overline{\sigma_{11}^j} + \sigma_{13}^i \overline{\sigma_{13}^j})|_{x_1=0} dx_3. \quad (11)$$

Коэффициенты  $A_p$  в разложениях (3) с использованием системы однородных решений  $\{\overline{\psi_p}\}$  определяются по явной формуле

$$A_p = (\overline{P}(x_3), \tilde{G}_p(x_3))|_{x_1=0} = \int_{-h}^h (\tilde{g}_{1p}(x_3) \chi(x_3) + \tilde{g}_{2p}(x_3) \zeta(x_3)) dx_3, \quad (12)$$

$$\overline{P}(x_3) = \{\chi(x_3), \zeta(x_3)\}, \quad \tilde{G}_p(x_3) = L_G \overline{\psi_p}|_{x_1=0} = (\tilde{g}_{1p}(x_3), \tilde{g}_{2p}(x_3)).$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в новой системе однородных решений с базисом  $L_G \overline{\psi_p}$  имеют вид:

$$\overline{u} = \sum_{p=1}^N (\overline{P}(x_3), \tilde{G}_p(x_3))|_{x_1=0} L_u \overline{\psi_p}, \quad \overline{\sigma} = \sum_{p=1}^N (\overline{P}(x_3), \tilde{G}_p(x_3))|_{x_1=0} L_\sigma \overline{\psi_p}, \quad (13)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наукова думка, 1981. 284 с.
- [2] *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев.: Наукова думка, 1985. 176 с.
- [3] *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 143 с.
- [4] *Сторожев В.И., Мысовский Ю.В., Соколова О.Д.* Особенности спектра собственных колебаний трансропной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикладная механика. 2003. Вып. 37. С. 184-189.

**Fesenko O. D.** *Generalized boundary orthogonalization method in stationary dynamics transversally-anisotropic semi-layer problems.* In the presented work the problem of transversally-anisotropic semi-layer symmetric frequencies is considered. The satisfaction of boundary conditions on the side surface of semi-layer is realized by generalized boundary orthogonalization method, that is allowed to exclude the analysis of linear equations systems with badly scaled matrixes and gave the possibility to obtain the recurring expressions for required coefficients of rows on dynamic homogeneous solutions.

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ

Шевченко В. П., Карнаух А. Ю.

*Донецкий национальный университет, Украина*

В работах [1] и [2] рассмотрены собственные колебания соответственно однородной и многослойной жидкости, находящейся в односвязной полости с упругими мембранами на свободной и внутренних поверхностях. В статье [3] обобщена задача [1] на случай двухсвязной кольцевой полости. В настоящем сообщении исследованы свободные колебания кольцевых мембран, расположенных на свободной и внутренней поверхностях двухслойной идеальной жидкости, находящейся в кольцевом цилиндрическом сосуде. Оценено влияние перегрузки на первую собственную частоту в зависимости от геометрии полости и натяжения мембран.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух идеальных несмешивающихся жидкостей плотностей  $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ), заполняющих жесткий кольцевой цилиндрический сосуд внешнего радиуса  $a$  и внутреннего  $b$  соответственно до глубин  $h_i$ . На свободной поверхности верхней жидкости ( $i = 1$ ) и на внутренней поверхности жидкости равномерно натянуты гибкие мембраны с погонным усилием  $T_i$ . Мембраны жестко закреплены по внешнему и внутреннему краю и считаются невесомыми. Движение жидкости и мембран будем рассматривать в системе координат  $Oxyz$ , расположенной так, что плоскость  $Oxy$  совпадает со свободной поверхностью верхней жидкости в невозмущенном положении, а ось  $Oz$  направлена вдоль оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести  $g$ . Задачу будем рассматривать в рамках линейной теории, считая движения жидкостей потенциальными, а совместные колебания жидкости и мембран безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_i &= 0, \\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a,b} &= 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-(h_1+h_2)} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = -h_1, \\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial z} &= \frac{\partial W_i}{\partial t}, \quad -T_i\Delta_2 W_i + g\Delta\rho_i W_i = \\ &= \rho_{i-1} \frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial t} \text{ при } z = 0 \text{ и } -h_1, \\ W_i \Big|_{r=a,b} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь  $\Phi_i$  — потенциал скорости  $i$ -ой жидкости;  $W_i$  — прогиб  $i$ -ой мембраны;  $\Delta_2$  — двумерный оператор Лапласа;  $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$  ( $\rho_0 = 0$ ).

Ограничиваясь первой модой по угловой координате, на основании работ [1–3], запишем уравнение собственных частот колебаний

$$\| \| a_{i,j=1}^4 \| \| = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{a}_{1n}, & a_{12} &= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{a}_{1n}, \\ a_{13} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{2n}^* b_n, & a_{14} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{T}_{2n}^* b_n, \\ a_{21} &= b + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{a}_{1n} r_n, & a_{22} &= \frac{1}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{a}_{1n} r_n, \\ a_{23} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{2n}^* b_n r_n, & a_{24} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{T}_{2n}^* b_n r_n, \\ a_{31} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{1n}^* b_n, & a_{32} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{T}_{1n}^* b_n, \\ a_{33} &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{a}_{2n}, & a_{34} &= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{a}_{2n}, \\ a_{41} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_{1n}^* b_n r_n, & a_{42} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{T}_{1n}^* b_n r_n, \\ a_{43} &= b + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{a}_{2n} r_n, & a_{44} &= \frac{1}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \tilde{a}_{2n} r_n, \\ \tilde{a}_{1n} &= \frac{a_{1n} \tilde{T}_{2n} + b_n^2}{\Delta}, & \tilde{a}_{1n} &= \frac{a_{2n} \tilde{T}_{1n} + b_n^2}{\Delta}, \\ \Delta &= \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_n^2, & T_{in}^* &= \frac{T_{in}}{\Delta}, & \tilde{T}_{in}^* &= \frac{\tilde{T}_{in}}{\Delta} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}, \quad T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\sigma^2}$$

$$d_{in} = T_i k_n^2 + \Delta \rho_i g, \quad b_n = \frac{\rho_1}{\sinh \kappa_{1n}}$$

$$\kappa_{in} = k_n h_i, \quad k_n = \frac{\mu_n}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \alpha_n = \frac{1 - \varepsilon r_n}{N_n^2}, \quad \beta_n = \frac{1 - \frac{r_n}{\varepsilon}}{N_n^2},$$

$$r_n = \frac{J_1(\mu_n \varepsilon) + \gamma_n Y_1(\mu_n \varepsilon)}{J_1(\mu_n) + \gamma_n Y_1(\mu_n)}, \quad \gamma_n = - \frac{J_1'(\mu_n)}{Y_1'(\mu_n)},$$

$$N_n^2 = \frac{1}{2} [(\mu_n^2 - 1) - (\mu_n^2 \varepsilon^2 - 1) r_n^2],$$

где  $\mu_n$  корни уравнения  $J_1'(\mu) Y_1'(\varepsilon \mu) - J_1'(\varepsilon \mu) Y_1'(\mu) = 0$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи исходной задачи.

1. Упругая мембрана находится только на свободной поверхности двухслойной жидкости. В этом случае частотное уравнение (1) запишется в виде

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0. \quad (3)$$

Коэффициенты этого уравнения вычисляются по формулам (2) в которых следует положить  $T_2 = 0$ ,  $k_{02} = 0$ .

2. Упругая мембрана находится только на внутренней поверхности двухслойной жидкости. В этом случае частотное уравнение (1) имеет вид

$$a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} = 0. \quad (4)$$

При вычислении коэффициентов этого уравнения в формулах (2) следует положить  $T_1 = 0$ ,  $k_{01} = 0$ .

3. Упругая мембрана находится на свободной поверхности однородной жидкости. В этом случае частотное уравнение имеет вид (3), а коэффициент  $\tilde{a}_{1n}$  вычисляется по формуле

$$\tilde{a}_{1n} = \frac{\omega_n^2 - \sigma^2}{k_n \tanh \kappa_n + \tilde{\rho}(\sigma^2 - \omega_n^2)} \tilde{\rho}. \quad (5)$$

Здесь  $\omega_n^2 = gk_n \operatorname{th} \kappa_n$ ,  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{Tk_n^2}$ .

Проведенные численные исследования уравнения (4) показали, что первая собственная частота возрастает при увеличении  $\varepsilon$  от 0 до  $\approx 0.1$ , а от 0.1 до 0.8 — убывает. При  $0.6 < \varepsilon < 1$  наблюдается слабое влияние перегрузки и натяжения мембран на собственные частоты. При определенных значениях отрицательной перегрузки происходит потеря устойчивости плоского равновесного положения мембран.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самодаев В.Е. Влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Труды семинара "Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью". Томск. 1972. С. 180–186.
- [2] Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. О собственных колебаниях многослойной жидкости, разделенной упругими мембранами // Труды IV Междунар. конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону. 1998. Т. 2. С. 49–53.
- [3] Шевченко В.П., Карнаух А.Ю. Влияние перегрузки на свободные колебания кольцевой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости жидкости // Вестник Донецкого ун-та. Сер. А. 2006. Вып. 1. Ч. 1. С. 162–165.

**Shevchenko V.P., Karnauh A.Y.** *The free oscillation of the ring membrane parting the fluid of the different density.* The free oscillations of the ring membranes located on the free and interior surfaces of a two-layer ideal fluid, taking place in a ring cylindrical tanks are explored. Influence of an overload on the first eigen frequency is appreciated depending on geometry of a vacuity, a tension of membranes and depths of filling of a fluid.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Шейдаков Д. Н.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В настоящей работе в рамках трехмерной нелинейной теории упругости исследуется проблема устойчивости тяжелого слоя при двухосном растяжении (сжатии). Упругие свойства слоя предполагаются неоднородными по толщине и описываются моделью полуплинейного материала. Изучение устойчивости проводится в рамках бифуркационного подхода. Путем решения линеаризованных уравнений равновесия найдены критические кривые и область устойчивости в плоскости параметров нагружения, в качестве которых выступают кратности удлинений материала слоя вдоль координатных осей, лежащих в плоскости слоя. Проанализировано влияние толщины слоя, его удельного веса, а также материальных параметров на потерю устойчивости. Установлено, в частности, что учет силы тяжести при исследовании устойчивости целесообразен только для слоя, жесткость которого убывает с глубиной.

Система уравнений эластостатики изотропного сжимаемого тела [1] при учете массовых сил состоит из уравнений равновесия

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{k} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1)$$

и уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2W(\mathbf{G})_{,\mathbf{G}} \quad (2)$$

где  $\overset{\circ}{\nabla}$  – набла-оператор в недеформированной конфигурации тела,  $x_1, x_2, x_3$  – декартовы координаты в недеформированной конфигурации (лагранжевы координаты),  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  – ортонормированный векторный базис декартовых координат,  $\mathbf{D}$  – тензор напряжений Пиолы,  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений Кирхгофа,  $\mathbf{C}$  – градиент деформации,  $\mathbf{G}$  – мера деформации Коши-Грина,  $W(\mathbf{G})$  – удельная потенциальная энергия деформации упругого тела,  $\rho_0$  – плотность тела в недеформированном состоянии,  $\mathbf{k}$  – вектор массовых сил. Если из массовых сил присутствует только сила тяжести, то  $\mathbf{k} = -g\mathbf{i}_3$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

Рассмотрим деформацию двухосного растяжения (сжатия)

$$X_1 = \lambda_1 x_1, \quad X_2 = \lambda_2 x_2, \quad X_3 = f(x_3), \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const}, \quad x_3 \in [0, h] \quad (3)$$

тяжелого неоднородного по толщине слоя под действием распределенных нормальных усилий, приложенных на бесконечности и действующих в направлении координатных осей  $x_1, x_2$ . Здесь  $X_1, X_2, X_3$  – эйлеровы декартовы координаты,  $\lambda_1, \lambda_2$  – кратности удлинений вдоль осей  $x_1, x_2$ ,  $f(x_3)$  – некоторая неизвестная функция, характеризующая деформацию вдоль оси  $x_3$  и определяемая из уравнений равновесия и граничных условий,  $h$  – толщина недеформированного слоя. Градиент

деформации  $\mathbf{C}$  и мера деформации Коши-Грина  $\mathbf{G}$ , соответствующие (3), равны (штрих означает производную по  $x_3$ )

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = \sum_{k=1}^3 G_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad G_k = \lambda_k^2, \quad \lambda_3 = f'(x_3) \quad (4)$$

Ввиду того, что параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  всегда больше нуля, функция  $\lambda_3 = f'(x_3)$  также должна быть положительна на отрезке  $[0, h]$ . В противном случае  $\det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  будет принимать отрицательные (или нулевые) значения для части слоя, что физически невозможно.

Будем считать, что упругие свойства слоя описываются моделью полуплинейного материала Джона [2], удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2} \lambda (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)^2 + \mu [(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2] \quad (5)$$

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  изменяются с глубиной по экспоненциальному закону

$$\lambda = \lambda_0 \exp(-\xi x_3), \quad \mu = \mu_0 \exp(-\xi x_3), \quad \lambda_0, \mu_0, \xi = \text{const} \quad (6)$$

В рамках модели несжимаемой среды закон неоднородности (6) использовался ранее в задачах устойчивости тяжелой полуплоскости [3] и тяжелого полупространства [4].

С помощью соотношений (2), (4), (5), получим выражения тензоров напряжений Кирхгофа  $\mathbf{P}$  и Пиолы  $\mathbf{D}$  для полуплинейного материала

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^3 \chi_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 P_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad P_k = \lambda_k^{-1} \chi_k \quad (7)$$

$$\chi_k = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\lambda_k} = \lambda (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + 2\mu (\lambda_k - 1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Пусть верхняя граница ( $x_3 = h$ ) упругого слоя свободна от нагрузок, а сам слой лежит на идеально гладком (без трения) жестком основании. Это утверждение эквивалентно следующим краевым условиям

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D}|_{x_3=h} = 0, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_1|_{x_3=0} = 0, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_2|_{x_3=0} = 0, \quad f(0) = 0 \quad (9)$$

Из уравнений равновесия (1) и граничных условий (9), с учетом выражений (4), (6)–(8), находится неизвестная функция  $f(x_3)$

$$f(x_3) = \frac{\rho_0 g (\xi [x_3 - h] - 1)}{\xi^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)} \exp(\xi x_3) + \left( 1 - \frac{\lambda_0 [\lambda_1 + \lambda_2 - 2]}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right) x_3 + \frac{\rho_0 g (1 + \xi h)}{\xi^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \lambda_3 = 1 - \frac{\lambda_0 [\lambda_1 + \lambda_2 - 2]}{\lambda_0 + 2\mu_0} - \frac{\rho_0 g (h - x_3)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \exp(\xi x_3) \quad (10)$$

Если толщина упругого слоя не превышает некоторую критическую величину  $h^*$ , то функция  $\lambda_3 = f'(x_3)$ , определяемая решением (10), оказывается положительной всюду на отрезке  $[0, h]$ . В противном случае  $\lambda_3$  будет принимать отрицательные значения для части слоя. Значение критической толщины  $h^*$  зависит от параметров растяжения (сжатия) слоя  $\lambda_1, \lambda_2$ , а также от материальных параметров  $\xi, \lambda_0, \mu_0, \rho_0$ .

Из сказанного выше следует, что при  $h > h^*$  решение (10) становится некорректным с физической точки зрения, т.е. задача о двухосном растяжении–сжатии тяжелого неоднородного по толщине слоя для полулинейного материала не имеет решения. В то же время нужно отметить, что для реальных материалов величина критической толщины  $h^*$  составляет, как правило, не менее 5 километров, в связи с чем полученного решения вполне достаточно для большинства расчетов.

Рассмотрим малое возмущение описанного выше состояния равновесия. Положение частиц тела в возмущенном состоянии задается радиус-вектором  $\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор в начальном напряженном состоянии,  $\mathbf{w}$  – вектор добавочных перемещений,  $\eta$  – малый параметр. Линеаризованные уравнения равновесия сжимаемого тела [1, 5], определяющие это возмущенное состояние, запишем в терминах недеформированной конфигурации

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \mathbf{D}^\bullet = \left[ \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) \right]_{\eta=0}, \quad \mathbf{w} = w_1 \mathbf{i}_1 + w_2 \mathbf{i}_2 + w_3 \mathbf{i}_3 \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{D}^\bullet$  – линеаризованный тензор напряжений Пиолы, компоненты которого в базисе  $\mathbf{i}_k$  имеют вид ( $k, s = 1, 2, 3; k \neq s$ )

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{i}_k = \sum_{m=1}^3 \chi_{km} \frac{\partial w_m}{\partial x_m}, \quad \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{i}_s = \lambda_k \lambda_s f_{ks} \frac{\partial w_k}{\partial x_s} + \left( \frac{\chi_k}{\lambda_k} + \lambda_s^2 f_{ks} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_k} \quad (12)$$

$$f_{ks} = \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} \left( \frac{\chi_k}{\lambda_k} - \frac{\chi_s}{\lambda_s} \right) = \frac{2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_k \lambda_s (\lambda_k + \lambda_s)}$$

Верхняя граница слоя в возмущенном состоянии незагружена, что приводит к следующим краевым условиям

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{x_3=h} = 0 \quad (13)$$

На нижней границе выполнены следующие линеаризованные краевые условия

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{i}_1|_{x_3=0} = \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{i}_2|_{x_3=0} = w_3|_{x_3=0} = 0 \quad (14)$$

соответствующие слою, лежащему на идеально гладком жестком основании.

Будем искать компоненты вектора добавочных перемещений в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3) \sin \alpha x_1 \cos \beta x_2, & w_2 &= W_2(x_3) \cos \alpha x_1 \sin \beta x_2 \\ w_3 &= W_3(x_3) \cos \alpha x_1 \cos \beta x_2, & \alpha, \beta &\geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

который позволяет отделить переменные  $x_1, x_2$  в уравнениях нейтрального равновесия (11) и граничных условиях (13), (14), сводя исследование устойчивости к

решению линейной однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для отыскания условий, при которых краевая задача (11), (13), (14) имеет ненулевые решения, использовался численный метод [6], основанный на конечно-разностной аппроксимации системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод успешно применялся при исследовании различных проблем устойчивости деформируемых тел [6, 7].

В качестве материала слоя при анализе устойчивости рассматривались различные горные породы. В частности, приведенные ниже графики получены для среднезернистого луаврита [8] ( $\rho_0 = 2.68 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda(h) = 8.538 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu(h) = 3.226 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>).

Путем приближенного решения линеаризованной однородной краевой задачи (11), (13), (14), в плоскости параметров нагружения  $\delta_1 = \lambda_1 - 1$  и  $\delta_2 = \lambda_2 - 1$  найдена область устойчивости.

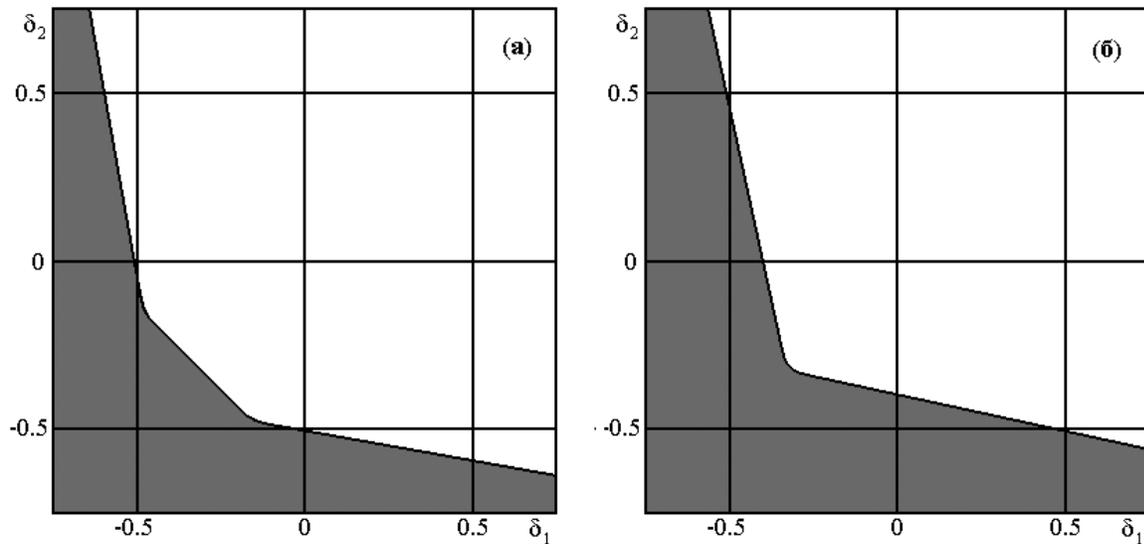


Рис. 1. Область устойчивости (а) при  $h = 100$  м,  $\xi = 0.001$  и (б) при  $h = 1000$  м,  $\xi = -0.001$ .

Область устойчивости при  $h = 100$  м,  $\xi = 0.001$  построена на рис. 1а. Закрашена область неустойчивости. Как показали расчеты, потеря устойчивости слоя, жесткость которого увеличивается с глубиной ( $\xi > 0$ ), почти не зависит от толщины слоя  $h$ , материальных параметров  $\lambda_0, \mu_0$ , удельного веса  $\rho_0 g$ , а также значения параметра  $\xi$ . В силу этого, при других значениях указанных параметров область устойчивости будет малоотличима от представленной на рис. 1а. Если жесткость уменьшается с глубиной ( $\xi < 0$ ), то потеря устойчивости достаточно сильно зависит от параметров слоя. Область устойчивости при  $h = 1000$  м,  $\xi = -0.001$  построена на рис. 1б (при  $h = 100$  м,  $\xi = -0.001$  область устойчивости мало отличается от приведенной на рис. 1а). С увеличением толщины слоя  $h$ , с ростом его удельного веса  $\rho_0 g$ , а также с уменьшением его жесткости  $\xi, \lambda_0, \mu_0$  граница области устойчивости сдвигается вдоль прямой  $\delta_1 = \delta_2$  к точке  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , соответствующей ненагруженному состоянию.

В результате исследования устойчивости неоднородного по толщине слоя при двухосном растяжении и сжатии в случае полулинейного материала установлено, что при любом пути нагружения бифуркация равновесия тяжелого слоя происходит при меньшей деформации, чем выпучивание невесомого слоя. При этом учет силы тяжести при анализе устойчивости целесообразен только в случае, когда жесткость слоя убывает с глубиной ( $\xi < 0$ ), так как согласно полученным результатам при  $\xi > 0$  величина удельного веса  $\rho_0 g$  почти не влияет на потерю устойчивости. Кроме того, следует помнить, что решение (10) задачи о растяжении (сжатии) тяжелого неоднородного слоя для полулинейного материала имеет физический смысл только для слоя, толщина  $h$  которого не превышает некоторую критическую величину  $h^*$ , зависящую от параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00638 и 06-01-00762).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [2] *John F.* Plane problem for a perfectly elastic materials of harmonic type // Commun. Pure and Appl. Math. 1960. V. 12. N. 2. pp. 239–296.
- [3] *Biot M.A.* Mechanics of incremental deformations. Wiley. New York, 1965.
- [4] *Боярченко С.И., Зубов Л.М.* Поверхностная неустойчивость упругого неоднородного тяжелого полупространства // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 1 С. 11–19.
- [5] *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848–852.
- [6] *Зубов Л.М., Моисеенко С.И.* Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №5. С. 78–84.
- [7] *Зубов Л.М., Шейдаков Д.Н.* О влиянии кручения на устойчивость упругого цилиндра при растяжении // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 53–60.
- [8] *Бакулин В.Н., Протосеня А.Г.* О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах // ДАН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 314–316.

**Sheidakov D.N.** *Stability of heavy inhomogeneous layer under biaxial tension and compression.* In the framework of three-dimensional nonlinear theory of elasticity the problem of stability for a heavy layer under biaxial tension and compression is considered. Elastic properties of the layer are inhomogeneous in thickness and described by the model of semi-linear material. In the plane of loading parameters the critical curves and stability region are constructed. The effect of layer thickness, relative density and material constants on the loss of stability is analyzed.

# ЗАКОНЫ КУЛОНА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

**Шехов В. П.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

Идеи законов Кулона, сформулированные для случая скольжения и применяемые в случае качения без проскальзывания, в рамках теоретической механики распространяются на общий случай относительного движения соприкасающихся тел — плоско параллельное движение.

Как правило, механическое взаимодействие между материальными телами происходит при их контакте, когда они имеют, по крайней мере, одну контактную точку, то есть, точку пространства, в которой находятся материальные точки обоих соприкасающихся тел. Механическое взаимодействие, возникающее при контакте между соприкасающимися телами, включает в себя не только отталкивание, не допуская проникновение одного тела в другое, но и прилипание, препятствуя перемещению одного тела относительно другого. Мерой первого является нормальная реакция, второго — сила сцепления и момент сцепления относительно оси, проходящей через точку контакта.

Итак, при решении задач с учетом трения в теоретической механике вводится особый вид механического взаимодействия соприкасающихся тел — сцепление. Ограничение меры этого взаимодействия устанавливается не рамками теоретической механики, где материальные тела рассматриваются, как абсолютно твердые, а законами трения (Кулона). Причем, понятие деформации в этих законах не используется, хотя именно деформация является причиной трения.

Законы Кулона постулируют [1] ограниченность меры сцепления, называя этот предел трением. Эти законы устанавливают независимость трения от кривизны поверхности и размеров соприкасающихся тел, а также пропорциональность трения величине контактного давления. Они определяют свойства трения лишь значениями коэффициентов пропорциональности.

При трении может происходить и смятие (изменение размеров и формы) и истирание поверхности трущихся тел (изменение объема и массы). Трение обязательно сопровождается процессом деформации. Тем не менее, во многих задачах механики, в которых нельзя пренебречь силами трения, можно пренебречь процессом деформации, то есть, не учитывать изменение размеров, формы, объема и массы трущихся тел. Вот при решении этих задач и используется теоретическая механика с учетом сил трения (законами Кулона).

Трущиеся тела считаются абсолютно твердыми и идеально гладкими. При описании механического взаимодействия этих тел к ним добавляются силы сцепления, величина которых ограничена законами трения, которые в свою очередь зависят от характера относительного перемещения соприкасающихся тел. Относительное перемещение тел при контакте может сопровождаться не только изменением смятия их поверхности, связанным с изменением формы, но и истиранием этих поверхностей, происходящих вследствие их сцепления между собой. Максимальное

сопротивление этим процессам: относительному перемещению с любой комбинацией изменения смятия и истирания, — называется трением.

Сцепление, как механическое взаимодействие между соприкасающимися телами, препятствует их относительному перемещению. Если относительное перемещение между соприкасающимися телами все же происходит, это означает, что препятствие сцепления этому перемещению, достигнув максимального значения, оказалось недостаточным. Та характеристика сцепления, которая достигла максимума, будет характеризовать уже процесс трения. Ограничения количественных характеристик сцепления (их максимальные значения) определяется законами трения. Силами и моментами трения при различных видах относительного перемещения соприкасающихся тел называются предельные (максимальные) значения сил и моментов сцепления.

Основные идеи законов трения скольжения сформулированы несколько веков назад сначала Леонардо да Винчи, а затем Амонтоном и, наконец, Кулоном, который определил предельное значение силы сцепления в виде суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально контактному давлению.

Современная механико-молекулярная теория трения (трибология), основанная на идеях Кулона, определяет [2] силу трения выражением, содержащим два слагаемых, называемых молекулярной и механической составляющими. Молекулярная составляющая силы трения не зависит от нагрузки. Её значение определяется состоянием поверхностей соприкасающихся тел.

Молекулярная составляющая — результат сложных физико-химических процессов. Её величина существенно зависит от времени. Эта составляющая имеет большое значение в задачах, где нет относительного перемещения соприкасающихся тел или в моменты начала их относительного движения после длительных остановок. При долговременном относительном перемещении соприкасающихся тел, когда время контакта между ними мало, роль молекулярной составляющей уменьшается.

Механическая составляющая силы трения пропорциональна контактному давлению и классифицируется по кинематическим признакам: трение скольжения, трение качения, трение верчения. В основу этой классификации полагается значение относительной скорости точки контакта между соприкасающимися телами. Так как далее исследуется плоский случай, то трение верчения рассматриваться не будет.

Все виды возможного плоско параллельного относительного перемещения соприкасающихся тел можно представить комбинацией двух особых видов движения [3-4]: буксования и юза тела 1 относительно тела 2. Буксованием тела 1 по телу 2 называется движение, при котором точка контакта тела 1 имеет скорость только за счет перемещения по поверхности тела 1. Юзом тела 1 по телу 2 называется движение, при котором точка контакта тела 1 имеет скорость только за счет перемещения по поверхности тела 2.

В зависимости от направления векторов этих скоростей и перемещения точки контакта тела 1 по поверхностям соприкасающихся тел относительное движение называется либо скольжением, либо качением. Скольжение — движение, при котором направление этих скоростей совпадает. Качение (в широком смысле слова)

— движение, при котором векторы этих скоростей направлены противоположно.

В зависимости от величины скоростей перемещения точки контакта по поверхностям соприкасающихся тел качение называется по-разному. Качение без проскальзывания или просто качением (в узком смысле) происходит, когда величины этих скоростей равны. Качение с проскальзыванием по ходу движения или качение с юзом происходит, когда скорость перемещения точки по поверхности тела 1 меньше, чем по поверхности тела 2. Качение с проскальзыванием против хода движения или качение с буксованием происходит, когда скорость перемещения точки по поверхности тела 1 больше, чем по поверхности тела 2.

Три режима движения тела 1 относительно тела 2, при которых на него налагается дополнительная кинематическая связь, будем называть особыми. К этим режимам относятся: буксование, юз и качение без проскальзывания, которое далее будем называть просто качением.

В остальных режимах движения тело 1, перемещаясь относительно тела 2, имеет две степени свободы. Эти режимы представляют собой комбинации двух из особых режимов движения, и поэтому называются смешанными.

Выберем в качестве обобщенных координат при особых режимах движения следующие характеристики. При буксовании это — угол поворота вокруг центра кривизны поверхности движущегося тела, равный отношению перемещения точки контакта к радиусу кривизны поверхности движущегося тела. При юзе это — угол поворота вокруг центра кривизны поверхности опоры, равный отношению перемещения точки контакта к радиусу кривизны поверхности опоры. При качении это — угол поворота вокруг точки контакта, равный отношению перемещения точки контакта к "радиусу кривизны контакта". Радиус кривизны контакта равен величине, обратной суммарной кривизне поверхностей соприкасающихся тел.

Введем понятия обобщенных сил трения, соответствующие трем выбранным обобщенным координатам. Сформулируем положения, определяющие трение в динамических задачах теоретической механики при плоско параллельном относительном движении трущихся тел.

1. Сцепление между соприкасающимися телами происходит вследствие их деформирования и характеризуется силой сцепления и моментом сцепления относительно оси, проходящей через точку контакта. Величины характеристик сцепления ограничены значениями обобщенных сил трения.

2. В широкой области изменения параметров внешней нагрузки обобщенные силы трения пропорциональны контактному давлению между соприкасающимися телами.

3. Существует область изменения всех физико-химических и геометрических параметров задачи, в которой обобщенные силы трения не зависят ни от площади контакта соприкасающихся тел, ни от их размеров. Из последнего следует, что

- обобщенная сила при буксовании пропорциональна радиусу кривизны поверхности движущегося тела,

- обобщенная сила при юзе пропорциональна радиусу кривизны поверхности опоры,

- обобщенная сила при качении пропорциональна радиусу кривизны контакта.

4. Безразмерные коэффициенты пропорциональности при обобщенных силах

трения зависят от физико-химических свойств соприкасающихся тел, шероховатости их поверхности, состояния окружающей среды и других условий. Их значения в задачах теоретической механики считаются постоянными и определяются опытным путем. Величина этих трех коэффициентов ограничена условием: каждый из них не превосходит сумму двух других и не меньше модуля их разности.

Сформулированные положения выражают законы Кулона при плоском относительном движении соприкасающихся тел и определяют параметры сцепления. Использование этих законов различно в зависимости от относительного перемещения соприкасающихся тел.

1. При относительном покое соприкасающихся тел сила и момент сцепления между ними определяются из уравнений равновесия. Выражения трёх обобщенных сил трения определяют условия нагружения соприкасающихся тел, при которых возможно их относительное равновесие.

2. При относительном перемещении соприкасающихся тел в особых режимах движения сила и момент сцепления определяются из одного выражения соответствующей обобщенной силы и уравнений движения. Выражение остальных двух обобщенных сил трения определяют условия нагружения соприкасающихся тел, при которых возможно их относительное движение в этом особом режиме.

3. При относительном перемещении соприкасающихся тел в смешанных режимах движения сила и момент трения полностью определяются законами Кулона из двух выражений соответствующих обобщенных сил.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. шк. 2003. 416 с.
- [2] *Основы трибологии (трение, износ, смазка).* / Под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
- [3] *Шехов В.П.* Детализация понятия механического трения. // Изв. ВУЗ Сев.-Кав. рег., 2001, № 2, С. 30–32.
- [4] *Шехов В.П.* Особенности механического трения. // Тр. Междунар. конгр. "Механика и трибология транспортных систем - 2003", Ростов н/Д, 2003. С. 395–398.

**Shehov V.P.** *The Coulomb's laws under plane motion.* The Coulomb's laws apply under sliding and rolling of physical bodies without slippage. In this article these laws popularizes on general case of relative motion — plane-parallel motion.

# СОВМЕСТНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРА И ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЕГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Шкуренко Е. Ю.**

*Ростовский государственный университет*

Рассматривается плоская задача о движении цилиндра и заполняющей его вязкой несжимаемой жидкости. Цилиндр совершает крутильные колебания под действием силы упругости пружины, на которой он закреплен. Жесткость пружины периодически зависит от времени. Исследуется параметрическое возбуждение неустойчивости. Численно построены нейтральные кривые, разделяющие пространство параметров на области устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим плоскую задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей бесконечный круглый цилиндр, вращающийся вокруг своей оси.

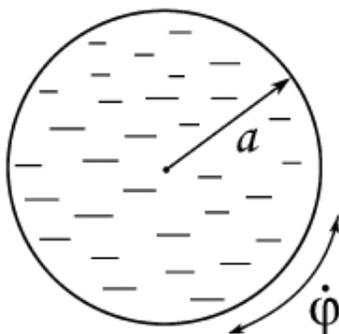


Рис. 1.

Скорость движения жидкости  $v = (v_r, v_\theta)$  и давление  $p$  подчиняются уравнениям Навье-Стокса, которые в полярных координатах  $r$  и  $\theta$  имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости, которая считается постоянной,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Предположим, что движение жидкости чисто вращательное. Это означает, что радиальная компонента скорости  $v_r = 0$ , а азимутальная компонента  $v_\theta = v(r, t)$  не зависит от угла  $\theta$ .

При сделанных предположениях давление  $p$  в жидкости есть функция лишь переменных  $r$  и  $t$  и определяется из уравнения:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

а азимутальная компонента скорости  $v_\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (3)$$

Общая краевая задача для этого уравнения включает граничное условие

$$v_\theta|_{r=a} = a\dot{\varphi}, \quad (4)$$

здесь  $\dot{\varphi}(t)$  — угловая скорость вращения цилиндра,  $\varphi(t)$  — угол отклонения цилиндра от некоторого положения,  $a$  — радиус цилиндра.

Цилиндр совершает колебания под действием момента силы упругости, периодически зависящей от времени.

Запишем уравнение движения стенки цилиндра в общем виде

$$J\ddot{\varphi} = -K(t)\varphi - M_{hydr}, \quad (5)$$

где

$J$  — момент инерции вращения стенки цилиндра,

$K(t)$  — жесткость пружины (момент силы упругости),

$M_{hydr}$  — момент силы вязкого трения или гидродинамический момент.

Положим  $K(t) = K_0 + K_1 \cos(\gamma t)$ , где первое слагаемое  $K_0$  — это среднее значение жесткости, а второе —  $K_1 \cos(\gamma t)$  — модуляция жесткости,  $K_1$  и  $\gamma$  амплитуда и частота, соответственно.

Заметим, что вместо  $\cos(\gamma t)$  можем взять любую  $2\pi$ -периодическую функцию  $F(\gamma t)$ , имеющую нулевое среднее.

Считаем, что величины  $J$  и  $K(t)$  заданы. Момент силы трения определяется формулой [1]

$$M_{hydr} = 2\pi\mu a^2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) |_{r=a} \quad (6)$$

$\mu$  — коэффициент динамической вязкости.

Далее будем индекс  $\theta$  при переменной  $v_\theta$  опускать, и подразумевать под обозначением  $v$  — азимутальную компоненту скорости.

В результате обезразмеривания исходная задача (2)–(6) принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (7)$$

$$v|_{r=1} = \dot{\varphi} \quad (8)$$

$$\ddot{\varphi} = -K(t)\varphi - 2\pi\eta\nu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) |_{r=1} \quad (9)$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (10)$$

где  $\eta$  — отношение плотности жидкости к плотности цилиндра;  $K(t) = 1 + \cos(\gamma t)$

Неизвестными задачи (7)–(10) являются: азимутальная компонента скорости  $v(r, t)$ , давление жидкости  $p(r, t)$ , угол отклонения —  $\varphi(t)$  и угловая скорость вращения цилиндра  $\dot{\varphi}(t)$ .

Задача (7)–(10) имеет решение, соответствующее состоянию покоя:  $v^0 \equiv 0$ ,  $p^0 \equiv 0$ ,  $\varphi^0 \equiv 0$ . Исследуем его устойчивость по отношению к вращательно симметричным возмущениям. Задача, описывающая эволюцию возмущений состояния покоя, не претерпит изменений по сравнению с исходной задачей. Поэтому вид задачи для возмущений ничем не отличается от (7)–(10).

Как видно, уравнение для определения давления отделилось, поэтому мы его пока отбросим, а когда найдем скорость  $v(r, t)$ , то из формулы (10) найдем и давление.

Ищем решения Флоке в виде произведения показательной функции  $e^{\sigma t}$  и функции, зависящей от  $r$  и  $t$ ,  $2\pi$ -периодической по времени функции. Показатель Флоке  $\sigma$  — неизвестное комплексное число, которое должно быть выбрано так, чтобы решение Флоке было ненулевым. Для параметра  $\sigma$  было получено дисперсионное уравнение [3]

$$-M_0 + \frac{-1}{-M_1 + \frac{-1}{-M_2 + \dots}} = \frac{-1}{M_{-1} + \frac{-1}{M_{-2} + \dots}}, \quad (11)$$

причем вывод уравнения осуществлялся двумя способами, и для каждого конкретного способа определены свои  $M_n$ :

$$M_n^1 = \frac{2(i\gamma n + \sigma)^2}{A} + \frac{2}{A} + \frac{4\pi\eta\nu(i\gamma n + \sigma)}{A} \left[ \sqrt{\frac{i\gamma n + \sigma}{\nu}} \frac{I_1\left(\sqrt{\frac{i\gamma n + \sigma}{\nu}}\right)}{I_1\left(\sqrt{\frac{i\gamma n + \sigma}{\nu}}\right)} - 1 \right] \quad (12)$$

$$M_n^2 = \frac{2(i\gamma n + \sigma)^2}{A} + \frac{2}{A} + \frac{8\pi\eta\nu(i\gamma n + \sigma)^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{in\gamma + \sigma + \nu x_k^2} \quad (13)$$

Далее выяснилось, что имеет место равенство  $M_n^1 = M_n^2$ . Подробно это показано в [5].

При выводе дисперсионного уравнения было получено явное выражение для скорости движения жидкости [2]

$$v(r, t) = r\dot{\varphi} + \int_{-\infty}^t K(r, t - \tau)\dot{\varphi}(\tau)d\tau \quad (14)$$

$$K(r, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu x_n^2(t-\tau)} \frac{2J_1(rx_n)}{x_n J_2(x_n)} \quad (15)$$

С помощью этого представления можно выписать выражение для давления  $p$

$$p(r, t) = \int_{r_0}^r \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{r} + 2\dot{\varphi} \int_{\infty}^t K(r, t - \tau)\dot{\varphi}(\tau)d\tau + \frac{1}{r} \left[ \int_{\infty}^t K(r, t - \tau)\dot{\varphi}(\tau)d\tau \right] \right) dr \quad (16)$$

Для построения амплитудно-частотных характеристик были рассмотрены случаи  $\sigma = 0$  и  $\sigma = i\frac{\gamma}{2}$ . В обоих указанных случаях рассматриваемое дисперсионное уравнение приводится к вещественному виду [3]– [5].

1. При  $\sigma = 0$  уравнение (11) принимает вид

$$Re \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \dots}} = \frac{M_0}{2} \quad (17)$$

На рис. 2 изображены первые ветви нейтральных кривых  $A(\gamma)$  при  $\nu = 0.0001$ ,  $\eta = 1$ .

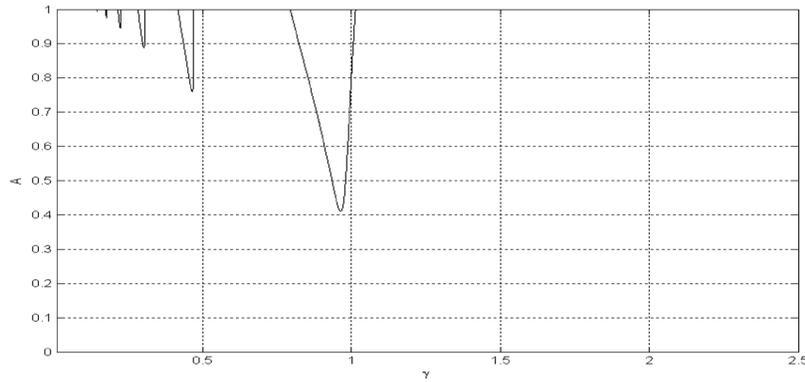


Рис. 2.  $\nu = 0.0001$ ,  $\eta = 1$ ,  $\sigma = 0$

2. При  $\sigma = i\frac{\gamma}{2}$  уравнение (11) имеет вид

$$\left| M_0 - \frac{1}{M_1 - \frac{1}{M_2 - \dots}} \right|^2 = 1 \quad (18)$$

На рис. 3 изображены нейтральные кривые  $A(\gamma)$  при  $\nu = 0.0001$ ,  $\eta = 1$

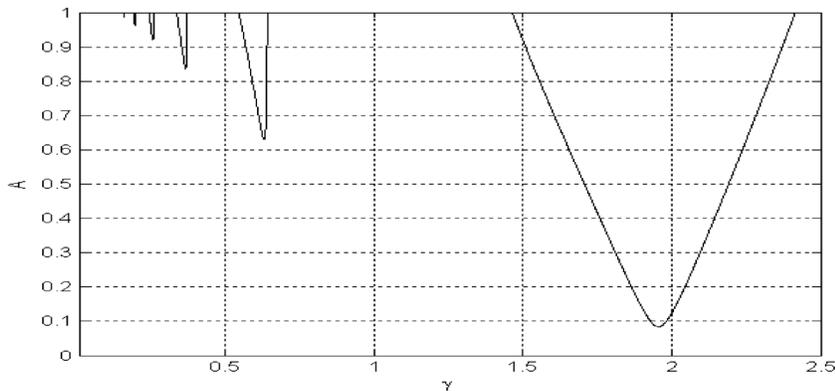


Рис. 3.  $\nu = 0.0001$ ,  $\eta = 1$ ,  $\sigma = \frac{i\gamma}{2}$

Проанализировав оба случая, можем сделать выводы. При нулевой вязкости, как и должно быть, мы имеем нейтральные кривые для уравнения Матъе. Графики кривых, полученных при резонансах  $\sigma = 0$  и  $\sigma = i\frac{\gamma}{2}$ , чередуются стандартным образом, и с приближением к оси ординат становятся все уже. С появлением вязкости же чередование кривых остается, но их место расположение на графике меняется. С увеличением вязкости они смещаются вверх и влево.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№05-01-00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-5747.2006.1)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., 1965.
- [2] Юдович В.И. Лекции об уравнениях математической физики. Ростов-на-Дону, 1998.
- [3] Зеньковская С.М., Юдович В.И. Метод интегро-дифференциальных уравнений и цепных дробей в задаче о параметрическом возбуждении волн // ЖВМиМФ. 2004. № 4.
- [4] Мешалкин Л.Д., Синай А.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой жидкости // ПМШ. 1961. т. 25, вып. 6.
- [5] Шкуренко Е.Ю. Совместная задача о движении твердого цилиндра и заполняющей его вязкой жидкости. Деп. в ВИНТИ №1105-В2006.

**Shkurenko E.Yu.** *Joint problem about movement of cylindrical vessel filled with viscous fluid.* Annotation. The 2-dimensional problem of the motion of a cylinder and an incompressible viscid fluid filling it is considered. The cylinder undergoes the torsional oscillations under the action of elastic force of the spring it is fixed at. The rigidity of spring depends periodically on time. The parametric excitation of instability is examined. The neutral curves dividing the parameter space into the areas of stability and instability are numerically plotted.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ

**Шлейкель А. Л.**

*Ростовский госуниверситет*

Рассматривается задача о влиянии вертикальных колебаний твердой стенки на возникновение термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое вязкой теплопроводной однородной жидкости. Предполагается, что слой ограничен сверху свободной деформирующейся поверхностью, на которой действуют силы поверхностного натяжения с коэффициентом, линейно зависящим от температуры. На границах слоя заданы условия теплообмена общего вида.

Указанная задача в случае, когда частота колебаний велика, амплитуда скорости конечна, а направление вибрации произвольно, рассмотрена в [1, 2]. Было получено, что высокочастотные вибрации оказывают стабилизирующее влияние, причем наибольший эффект достигается при вертикальных колебаниях.

Случай вертикальных колебаний конечной частоты рассмотрен в [3, 4]. В этих работах были изучены области параметрических резонансов и найдены частоты, при которых происходит выход на асимптотические значения большой частоты.

В данной работе основное внимание уделено поведению нейтральных кривых, соответствующих резонансным областям, при изменении частоты вибрации. Вычисления проведены для случая твердой нетеплопроводной стенки.

**Постановка задачи.** Рассматривается движение в слое вязкой несжимаемой однородной теплопроводной жидкости, ограниченном сверху свободной поверхностью  $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ , а снизу — твердой стенкой  $x_3 = H$ . Учитываются деформируемость свободной границы и силы поверхностного натяжения с коэффициентом  $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ . Предполагается, что стенка совершает вертикальные колебания по закону  $x_3 = \tilde{a}f(\tilde{\omega}t)$ , где  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция с нулевым средним,  $\tilde{\omega}$  — частота,  $\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{\omega})$  — амплитуда колебаний.

Спектральная задача для нормальных возмущений функции тока, температуры и возвышения свободной границы имеет вид [3, 4]

$$\begin{aligned} (D^2 - \alpha^2)\tilde{\psi}_t &= \delta(D^2 - \alpha^2)^2\tilde{\psi}, \\ \tilde{\theta}_t &= Pr^{-1}(D^2 - \alpha^2)\tilde{\theta} - \alpha^2\tilde{\psi}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \tilde{\eta}_t &= \alpha^2\tilde{\psi}, \quad D^2\tilde{\psi} + \alpha^2\tilde{\psi} = MaPr^{-1}(\tilde{\theta} + \tilde{\eta}), \\ D\tilde{\psi}_t - \delta(D^2 - \alpha^2)D\tilde{\psi} + 2\mu D\tilde{\psi} - (Q(\omega t) + C\alpha^2)\tilde{\eta} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$D\tilde{\theta} - Bi(\tilde{\theta} + \tilde{\eta}) = 0,$$

$$z = h: \quad \tilde{\psi} = 0, \quad D\tilde{\psi} = 0, \quad D\tilde{\theta} + B\tilde{\theta} = 0. \tag{3}$$

Здесь  $\delta = \frac{\nu T}{\mathcal{L}^2}$  — безразмерная вязкость,  $Pr = \frac{\mathcal{L}^2}{\chi T}$  — число Прандтля,  $Ma = \frac{\sigma_T A \mathcal{L}^2}{\rho_0 \nu \chi}$  — число Марангони,  $C = \frac{\sigma_0 T^2}{\rho_0 \mathcal{L}^3}$  — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения,  $Bi = \frac{b_1 \mathcal{L}}{k_1}$  — число Био,  $B = \frac{b_2 \mathcal{L}^2}{k_2}$  — параметр теплоотдачи,  $\omega = \tilde{\omega} T$  — безразмерная частота модуляции,  $h = H/\mathcal{L}$  — средняя толщина слоя.  $Q(t) = Ga - a\omega^2 f''(\omega t)$  — переменное безразмерное ускорение, причем  $Ga = \frac{g_0 T^2}{\mathcal{L}}$  — число Галилея,  $a\omega^2 f''(\omega t)$  — модуляция ускорения с амплитудой  $a\omega^2$  ( $a = A/\mathcal{L}$  — безразмерная амплитуда модуляции),  $D \equiv \partial/\partial z$ ,  $( )_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\mu = \delta\alpha^2$ .

Далее будем считать, что  $f(\omega t) = \cos \omega t$ . Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z, t) &= e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n(z) e^{in\omega t}, \quad \tilde{\theta}(z, t) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n(z) e^{in\omega t}, \\ \tilde{\eta}(t) &= e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma$  — показатель Флоке. Подставляя (4) в (1)–(3), для неизвестных  $\psi_n(z)$ ,  $\theta_n(z)$ ,  $c_n$  получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\sigma + in\omega)(D^2 - \alpha^2)\psi_n = \delta(D^2 - \alpha^2)^2\psi_n, \quad (5)$$

$$(\sigma + in\omega)\theta_n = Pr^{-1}(D^2 - \alpha^2)\theta_n - \alpha^2\psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (6)$$

$$z = 0: \quad \alpha^2\psi_n = (\sigma + in\omega)c_n, \quad D^2\psi_n + \alpha^2\psi_n = MaPr^{-1}(\theta_n + c_n), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &(\sigma + in\omega)D\psi_n + 3\delta\alpha^2 D\psi_n - \delta D^3\psi_n - \\ & - (C\alpha^2 + Ga)c_n - \frac{a\omega^2}{2}(c_{n-1} + c_{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$D\theta_n - Bi(\theta_n + c_n) = 0, \quad (9)$$

$$z = h: \quad \psi_n = 0, \quad D\psi_n = 0, \quad D\theta_n + B\theta_n = 0. \quad (10)$$

Теперь при каждом значении  $n$  выразим неизвестные  $\psi_n(z)$  и  $\theta_n(z)$  через  $c_n$ , решив задачу (5)–(7), (9), (10), а затем подставим их в краевое условие (8). В результате для коэффициентов  $c_n$  получаем бесконечную трехдиагональную систему, которую запишем в виде

$$M_n c_n = -q(c_{n-1} + c_{n+1}), \quad n = 0, \pm 1, \quad (11)$$

В случае  $\sigma + in\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} M_n &= (\sigma + in\omega) [-(\sigma + in\omega + 2\mu)\varkappa_n \operatorname{cth} \alpha h + \\ & + 2\mu\beta_n \alpha^{-1}(\varkappa_n + 1) \operatorname{cth} \beta_n h] + \Omega^2, \\ 2q &= a\omega^2 \alpha, \quad \Omega^2 = C\alpha^3 + Ga\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varkappa_n = -\frac{(\sigma + in\omega)(\sigma + in\omega + 2\mu) + MaPr^{-1}\mu(\lambda(m_n + 1) - 1 + r_n)}{(\sigma + in\omega)^2 + MaPr^{-1}\mu(\lambda(m_n + 1) - l_n - 1)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
l_n &= \frac{l_1(k_1\alpha + k_4\gamma_n) + \lambda\alpha(k_1\beta_n + k_6\gamma_n) + l_0(k_3\gamma_n - k_1Bi)}{l_0(k_2\gamma_n + k_1Bi)}, \\
m_n &= \frac{-(\lambda^{-1}\beta_n(k_1\alpha + k_4\gamma_n) + l_2(k_1\beta_n + k_6\gamma_n) - l_0(k_5\gamma_n - k_1Bi))}{l_0(k_2\gamma_n + k_1Bi)}, \\
r_n &= \frac{k_1Bi}{k_2\gamma_n + k_1Bi},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n h + B \operatorname{sh} \gamma_n h, & k_2 &= \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n h + B \operatorname{ch} \gamma_n h, \\
k_3 &= -(\alpha \operatorname{sh} \alpha h + B \operatorname{ch} \alpha h), & k_4 &= -(\alpha \operatorname{ch} \alpha h + B \operatorname{sh} \alpha h), \\
k_5 &= -(\beta_n \operatorname{sh} \beta_n h + B \operatorname{ch} \beta_n h), & k_6 &= -(\beta_n \operatorname{ch} \beta_n h + B \operatorname{sh} \beta_n h).
\end{aligned}$$

Если  $\sigma + i n \omega = 0$  получаем

$$M_{\bar{n}} = \Omega^2 - \frac{8\mu\alpha^3 h^2 Ma Pr^{-1} (\alpha \operatorname{sh} \alpha h + B \operatorname{ch} \alpha h)}{\alpha \bar{a}_1 + B \bar{b}_1}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= Ma[(\alpha^3 h^3 + 2\alpha h) \operatorname{sh} \alpha h - (\alpha^2 h^2 + \operatorname{sh}^2 \alpha h) \operatorname{ch} \alpha h] + \\
&+ 8\alpha(\operatorname{ch} \alpha h \operatorname{sh} \alpha h - \alpha h)(\alpha h \operatorname{sh} \alpha h + Bi \operatorname{ch} \alpha h),
\end{aligned}$$

$$\bar{b}_1 = Ma(\alpha^3 h^3 \operatorname{ch} \alpha h - \operatorname{sh}^3 \alpha h) + 8\alpha(\operatorname{ch} \alpha h \operatorname{sh} \alpha h - \alpha h)(Bi \operatorname{sh} \alpha h + \alpha \operatorname{ch} \alpha h).$$

Для трехдиагональных систем оказывается возможным записать дисперсионное соотношение для  $\sigma$  в явном виде с использованием цепных дробей [5, 6]. В [3, 4] было получено, что дисперсионное уравнение, определяющее показатель Флоке  $\sigma$ , имеет вид

$$-M_0 + \frac{-q^2}{-M_1 + \frac{-q^2}{-M_2 + \dots}} = \frac{-q^2}{M_{-1} + \frac{-q^2}{M_{-2} + \dots}}, \tag{16}$$

**Численные результаты.** Выберем масштабы  $\mathcal{L} = H$ ,  $\mathcal{T} = \frac{H^2}{\nu}$ , тогда безразмерные параметры примут вид:  $\delta = 1$ ,  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ ,  $Ma = \frac{\alpha_T A H^2}{\rho_0 \chi \nu}$ ,  $C = \frac{\alpha_0 H}{\rho_0 \nu^2}$ ,  $\omega = \frac{\tilde{\omega} H^2}{\nu}$ ,  $h = 1$ ,  $Ga = \frac{g_0 H^3}{\nu^2}$ ,  $a = \frac{\tilde{a}}{H}$ . При действии высокочастотной вибрации характерным вибрационным параметром является число Рейнольдса  $Re = \frac{\tilde{a} \tilde{\omega} H}{\nu}$  (точнее — параметр  $\mu_s = Re^2/2$ ). В случае конечных частот имеем безразмерный параметр  $q = \frac{a \omega^2 \alpha}{2} = \left(\frac{\tilde{a} \tilde{\omega} H}{\nu}\right) \frac{\omega \alpha}{2} = \frac{Re \omega \alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mu_s}{2}} \omega \alpha$ .

Известно, что при изменении параметров показатель Флоке  $\sigma$  может пройти через мнимую ось через ноль (монотонная неустойчивость), через  $i\omega/2$  (возмущения двойного периода), либо через точки мнимой оси  $\pm ic$ ,  $c > 0$  (колебательная неустойчивость). В силу того, что вместе с каждой точкой  $\sigma$  спектру Флоке принадлежат и точки  $\sigma + i n \omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то все равенства нужно понимать как равенства по модулю  $i\omega$ . В данной работе при решении уравнения (16) были численно найдены области параметрического резонанса, соответствующие  $\sigma = i\omega/2$  и  $\sigma = 0$ .

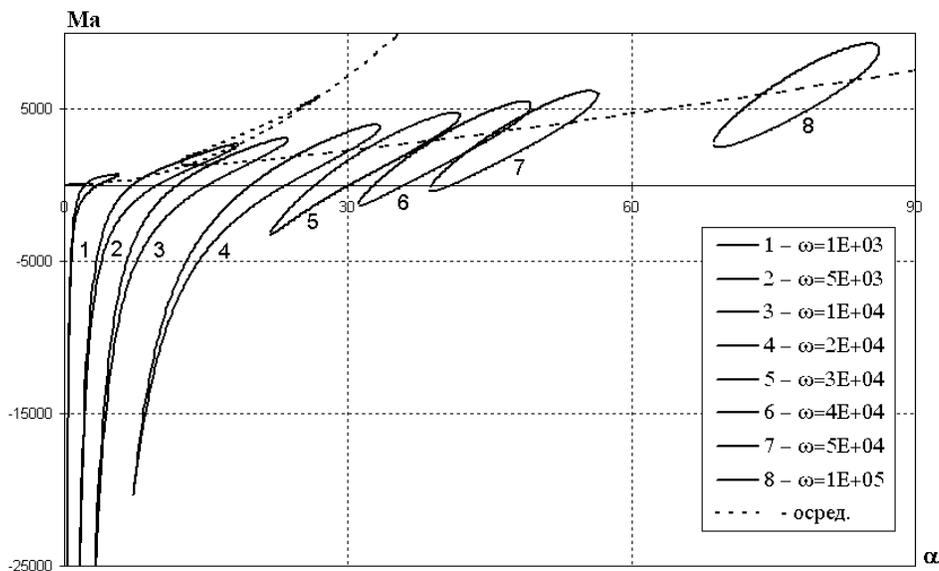


Рис. 1. Границы областей параметрических резонансов ( $\sigma = i\omega/2$ )

Вычисления проводились при  $Pr = 0.01$ ,  $Bi = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 10^4$ ,  $Ga = 0$ ,  $\mu_s = 10^4$ . В случае  $\sigma = i\omega/2$  нейтральные кривые, начиная с некоторого  $\omega$  становятся замкнутыми, и с увеличением частоты  $\omega$  сдвигаются вправо (коротковолновая неустойчивость) и поднимаются вверх. При  $\sigma = 0$  существуют такие значения

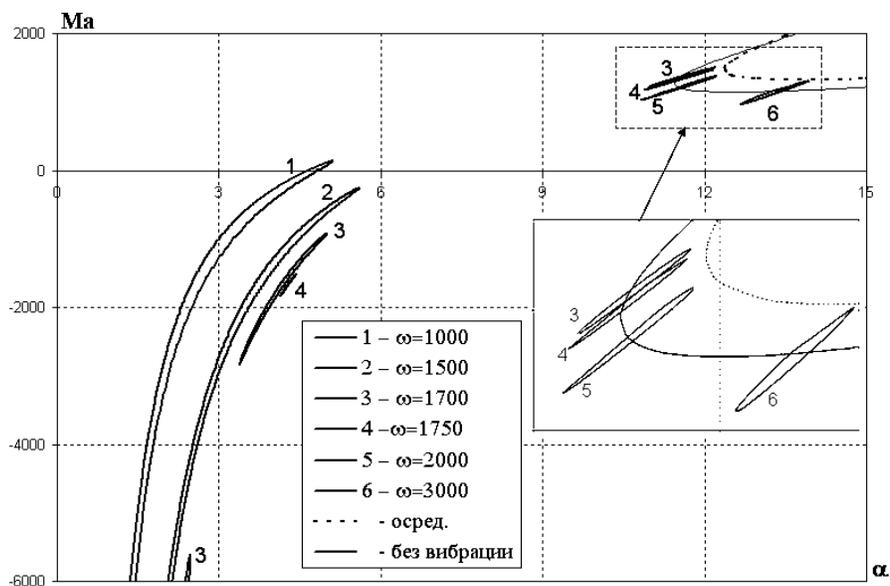


Рис. 2. Границы областей параметрических резонансов ( $\sigma = 0$ )

$\omega$ , при которых нейтральная кривая состоит из трех компонент (см. кривая 3 на рис. 2) – при этом две из них замкнуты, а третья – нет. Далее, с ростом  $\omega$ , две компоненты, соответствующие  $Ma < 0$ , исчезают, а третья – остается в области  $Ma > 0$  и “нанизывается” на нижнюю ветку нейтральной кривой колебательной

неустойчивости осредненной задачи, аналогично случаю  $\sigma = i\omega/2$  (см. кривые 5–8 на рис. 1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№05-01-00567) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ–5747.2006.1)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости // Докл. РАН. 2002, т. 382, № 5. С. 632–636.
- [2] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002, т. 66, с. 573–583.
- [3] Зеньковская С.М., Новосядлый В.А., Шлейкель А.Л. Влияние вертикальных вибраций конечной частоты на возникновение термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое // Ростов-на-Дону, 36 с., Деп. в ВИНТИ. 27.07.03. N1440–2003.
- [4] Зеньковская С.М., Новосядлый В.А., Шлейкель А.Л. Влияние вертикальных колебаний на возникновение термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПММ (принята в печать).
- [5] Мешалкин Л.Д., Синай А.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. матем. и механ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
- [6] Зеньковская С.М., Юдович В.И. Метод интегро-дифференциальных уравнений и цепных дробей в задаче о параметрическом возбуждении волн // Журнал выч. математики и матем. физики, 2004, № 2, стр. 370–384.

**Shleykel A.L.** *Numerical investigation of thermocapillary convection under the action of vertical oscillations.* The influence of harmonic vertical oscillations of hard wall on the onset of thermocapillary convection in horizontal layer of viscous thermal conductive homogenous fluid was investigated. The layer is limited from above by free deformable boundary on which the surface tension forces with coefficient, linearly dependent on temperature, are present. The heat exchange condition of general form are set at the layer boundaries.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОФОРЕТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ОБЪЕМНЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

**Яламов Ю. И., Хасанов А. С.**

*Московский государственный областной университет*

Методами гидродинамики с учетом структурных особенностей частиц и их гидродинамического взаимодействия моделируется термофоретическое движение вдоль линии центров двух одинаковых крупных твердых сферических аэрозольных частиц. Методами теории линейных операторов получены точные формулы для поправки к закону Стокса, для скорости термофореза и термофоретической силы, для возмущений полей вокруг одной частицы, генерируемых другой частицей, и оценено влияние объемных и гидродинамических эффектов на движение частиц.

Движение аэрозольной частицы в поле постоянного на большом удалении от нее градиента температуры называется термофоретическим движением [1] и математическое моделирование такого движения основано на следующих представлениях о процессах, происходящих вблизи поверхности частицы. Рассмотрим крупную твердую сферическую однородную одиночную аэрозольную частицу, взвешенную в однокомпонентном неоднородном по температуре газе. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает скользить вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Тепловое скольжение газа вызывает появление термофоретической силы, действующей на частицу. Под действием этой силы частица приходит в ускоренное движение. Но на частицу действует и сила вязкого сопротивления среды, величина которой растет с увеличением скорости. Когда величина суммарной силы, действующей на частицу, становится равной нулю, частица начинает двигаться равномерно и прямолинейно с некоторой скоростью, называемой скоростью термофореза. Основной целью моделирования является нахождение этой скорости. Так как частица является крупной, то средняя длина свободного пробега молекул газа является величиной малой по сравнению с радиусом частицы, газ рассматривается как сплошная среда и моделирование термофоретического движения ведется гидродинамическим методом.

Частицу не всегда можно рассматривать как одиночную и в таких случаях гидродинамический метод обобщается с учетом эффекта гидродинамического взаимодействия частиц [2,3]. Под гидродинамическим взаимодействием понимается такое взаимодействие, при котором движущаяся частица генерирует в газовой среде поле скорости, влияющее на движение других частиц. Для понимания сути появляющегося при этом гидродинамического эффекта и механизма взаимодействия этого эффекта с другими эффектами достаточно анализировать случай двух гидродинамически взаимодействующих частиц (дублета частиц). В этом случае при нахождении результирующего поля скорости и давления вблизи одной частицы,

к полю вблизи нее, записанному без учета гидродинамического эффекта, прибавляется возмущение этого поля, вызванное движением второй частицы.

Дальнейшим обобщением модели термофоретического движения является модель, учитывающая не только гидродинамический эффект, но и структурные особенности частиц. В состав встречающихся на практике аэродисперсных частиц входят частицы как однородные, так и неоднородные по своим теплофизическим свойствам. К частицам с неоднородными теплофизическими свойствами относятся, например, двухслойные частицы. Двухслойные частицы образуются в ходе конденсации молекул паров какого-либо вещества на поверхности твердого ядра. Коэффициент теплопроводности двухслойной частицы терпит скачок на поверхности ядра. Обобщением модели двухслойной частицы является модель многослойной частицы. Если точку скачка коэффициента теплопроводности частицы не удастся определить, то можно использовать модель частицы с переменной внутренней теплопроводностью. Под переменной внутренней теплопроводностью мы имеем в виду непрерывную зависимость коэффициента теплопроводности в каждой точке частицы от координат этой точки. Если рассмотреть эту зависимость в сферической системе координат, то для большого класса аэрозольных частиц зависимость коэффициента теплопроводности от радиус-вектора оказывается более существенной, чем зависимость от других координат. Если, упрощая математическую сторону дела, оставить зависимость коэффициента теплопроводности в каждой точке частицы только от радиус-вектора данной точки, то вклад переменной внутренней теплопроводности в величину скорости частицы можно изучать при довольно общих условиях на эту зависимость. Для выполнения расчетов в общем случае можно получить рекуррентные формулы. Однако для выяснения сути явления необязательно рассматривать общий случай. Достаточно рассмотреть, например, случай экспоненциального семейства зависимостей коэффициента теплопроводности от радиус-вектора, в котором вместо рекуррентных формул можно получить обычные формулы. На примере экспоненциального класса можно оценить вклад переменной внутренней теплопроводности на скорость частицы.

Нами обобщена модель термофоретического движения двух аэрозольных частиц с учетом гидродинамического эффекта и неоднородности их по теплопроводности. Рассмотрены дублеты, состоящие из двух одинаковых крупных твердых сферических однородных, двухслойных, многослойных аэрозольных частиц и частиц с переменной внутренней теплопроводностью, коэффициент теплопроводности которых меняется по экспоненциальному закону (движение дублетов происходит вдоль линии центров частиц параллельно постоянному градиенту температуры). Для нахождения точных решений с учетом объемных особенностей частиц используется подход, основанный на теории линейных операторов, отображающих полное бесконечномерное линейное нормированное пространство (банахово пространство) в себя [4]. Поля температур, скоростей и давления представляются в виде рядов, поиск неопределенных коэффициентов этих рядов сводится к поиску векторов в банаховом пространстве. С помощью теории линейных операторов можно получить точное решение задачи о термофорезе дублета однородных частиц и обобщить результаты на случаи двухслойных и многослойных частиц, а также частиц и с переменной внутренней теплопроводностью. Получены записан-

ные на операторном языке точные формулы для поправок к закону Стокса, для термофоретической силы и скорости термофореза, для возмущений полей вокруг одной частицы, генерируемых другой частицей.

Так как точные формулы записаны через бесконечномерные операторы, то практические расчеты на компьютере выполняются по приближенным формулам, записанным через усеченные операторы. Точные операторы зависят от отношения радиуса частицы к расстоянию между центрами частиц, а в усеченных операторах не учитываются те степени этого отношения, вклад которых в результат незначителен. С помощью приближенных формул на компьютере проведены расчеты для большого количества дублетов с разными структурными особенностями и составлены таблицы поправок, характеризующих влияние этих особенностей и гидродинамического взаимодействия на движение дублета частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных средах. Ер.: Луйс, 1985. 208 с.
- [2] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
- [3] Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337–341.
- [4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

**Yalamov Yu.I., Khasanov A.S.** *Thermophoresis of two aerosol particles with regard to volume and interaction effects.* Using the methods of hydrodynamics and taking into account volume and interaction effects, a theory of thermophoresis is constructed for the case of two large identical solid spherical aerosol particles moving parallel to their center line. Strong formulas for the correction to the Stocks law, for the thermophoretic force and velocity, for the perturbation of fields near one of the particles due to the motion of another is obtained using the linear operator approach. Influence of the volume and interaction effects on the motion of the particles is estimated.