

Содержание

Азарова П.А., Явруян О.В. О влиянии затухания на процедуру реконструкции трещины в слое	6
Акопян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Черпаков А.В. Теоретико-экспериментальное исследование колебательных процессов в моделях элементов рамных конструкций с надрезом	11
Александров В.М., Саламатова В.Ю. Контактная задача для эллиптической накладки, взаимодействующей с упругим полупространством .	18
Алексеев А.А. Пересечение бифуркаций рождения вихрей Тейлора и азимутальных волн в задаче Куэтта-Тейлора в нерезонансном случае .	23
Альтенбах Х., Еремеев В. А. Об изгибе пластинок из градиентных материалов	28
Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерной задачи гидроупругопластичности о развитии процесса запроектной аварии внутри силового корпуса реактора на быстрых нейтронах	34
Баженов В.Г., Кибец А.И., Романов В.И., Рябов А.А. Экспериментально-теоретическое исследование деформирования авиаконтейнера для транспортировки радиоактивных материалов при продольном ударе о преграду	39
Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Рагнедда Ф. О формах тел, внедряющихся на максимальную глубину в твердую деформируемую среду	44
Батищев В.А., Хорошунова Е.В. Спиральные течения Пуазейля малой амплитуды	49
Бауэр С.М., Клец О.Г., Морозов Н.Ф. О динамической устойчивости трансверсально изотропной цилиндрической оболочки	54
Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Применение метода гранично-временных элементов к решению трехмерных динамических задач теории упругости	59
Беляк О.А. Прямые и обратные задачи для анизотропного слоя с цилиндрической полостью	64
Беркович В.Н. Плоская смешанная задача динамики неоднородной клиновидной среды	69
Бескопыльный А.Н., Иванова Д.В., Кадомцев И.Г. Уругопластический удар конического индентора по полубесконечному стержню	74
Боев Н.В. Прямой численный метод в трехмерной задаче дифракции с переотражениями: численное моделирование и сравнение с лучевым методом	79
Бочарова О.В., Ватульян А.О. Обратные задачи для стержней	84
Ватульян А.О. Об обратных задачах идентификации неоднородного предварительного напряженного состояния	89
Глушков Е.В., Кваша О.В. Моделирование волн, возбуждаемых в упругом слое симметрично расположенными на его поверхностях пьезоэлементами	94
Глушкова Н.В., Фоменко С.И. Моделирование волновых полей в скважинных волноводах с препятствиями	99

Глушкова Н.В., Ерёмин А.А. Блокирующие свойства полосы с включениями различной конфигурации	104
Говорухин В.Н. Численный анализ протекания идеальной жидкости сквозь прямоугольный канал	108
Есипов Ю.В., Мухортов В.М. Экспериментальное исследование критериев устойчивости сложной конструкции	113
Жуков М. Ю., Самадова Ю. К., Ширяева Е. В. Влияние поля тяжести на перенос электрическим полем в прямоугольном канале	118
Зеленина А.А., Зубов Л.М. Первые интегралы уравнений равновесия в одномерных задачах нелинейной теории упругости.	123
Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Длинноволновые асимптотики в задаче о конвекции Марангони в двухслойной системе	128
Зимин В.Н. Моделирование раскрытия трансформируемых космических конструкций	133
Зубов Л.М. Линейная теория оболочек с дислокациями и дисклинациями.	138
Илюхин А.А., Тимошенко Д.В. Точное решение системы уравнений Кирхгофа для естественно закрученного стержня с равными жёсткостями на изгиб	144
Казаков К.Е. Плоский конформный контакт штампа и вязкоупругого основания с покрытием	148
Карапетьян Г.Я., Днепровский В.Г., Багдасарян А.С., Багдасарян С.А. Разработка для устройств считывания алгоритмов обнаружения и распознавания сигналов от датчиков физических величин	153
Кетов А.И., Марценюк М.А., Скляренко М.С., Тетерин П.А. Мехатронное моделирование локомотивов	158
Кизилова Н.Н. Исследование биологического роста: обзор экспериментальных данных и континуальные модели	163
Кувыркин Г.Н. Моделирование термомеханических процессов в металлах и сплавах при фазовом превращении	168
Кусливая А.А. Нелинейные вторые гармоники нормальных SH волн в пластине монокристалла кубической системы со скользящей заделкой граней	173
Ляпин А.А. О построении фундаментальных решений для слоистых полуограниченных сред	178
Мазин В.А., Пряхина О.Д., Смирнова А.В. К анализу особых множеств определителей матриц-символов Грина краевых задач для изотропных сред с нарушением сплошности	181
Мелехов А.П., Ревина С.В. Устойчивость трехмерных пространственно-периодических сдвиговых течений относительно длинноволновых возмущений	185
Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. Нерезонансный случай ($Res\ 0$) при пересечении бифуркаций в задаче Куэтта-Тейлора	190
Новосядлый В.А. Влияние термокапиллярного эффекта на параметрическое возбуждение волн в двухслойной системе	195

Норкин М.В. Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности экспоненциально-стратифицированной жидкости	200
Паршин Д.А. Усиление конической опоры методом наращивания	205
Попов А.В. Исследование устойчивости толстостенного составного кольца	210
Сатуновский П.С. Метод реконструкции характеристик неоднородного упругого слоя	215
Скляренко М.С., Марценюк М.А. Экспериментальное исследование процесса диффузии методами компьютерного видения	220
Тодоров Н.Ф. Обработка акустических сигналов при распространении звука в помещениях с приложением к практической аурализации	225
Устинов Ю.А., Романова Н.М. Об изгибе цилиндра с винтовой анизотропией	230
Цибулин В.Г. Численное исследование разрушения семейства стационарных режимов в плоской задаче конвекции Дарси	235
Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Некоторые алгоритмы улучшения качества решения смешанных задач теории изгиба	240
Шевцов С.Е., Сумбатян М.А. Ранние отражения в архитектурной акустике	245
Шишкин А.Н. Частотный анализ колебания стержня под действием последовательных тепловых импульсов	250
Юдин А.С., Юдин С.А. Пластическая вытяжка купола из круглой пластинки: теория и эксперимент	255

О ВЛИЯНИИ ЗАТУХАНИЯ НА ПРОЦЕДУРУ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕЩИНЫ В СЛОЕ

Азарова П. А., Явруян О. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована антиплоская задача о колебаниях вязкоупругого изотропного слоя, ослабленного внутренней туннельной трещиной. Построено поле перемещений на верхней границе слоя. Решена обратная задача об определении геометрических параметров трещины по заданному (измеренному) полю перемещений на поверхности слоя. Изучено влияние реологических свойств на процедуру идентификации.

Задача об идентификации дефектов в вязкоупругом материале является одной из актуальных проблем неразрушающего контроля. Это обусловлено широким распространением композиционных материалов, которым присуще затухание.

Достаточно подробно исследованы задачи об идентификации трещиноподобных дефектов в упругих слоистых средах. Например, в работе [1] представлен алгоритм решения прямой и обратной задач, основанный на асимптотическом анализе задачи для трещин малого относительного размера.

Работа посвящена определению влияния вязкости материала на процедуру идентификации трещины и сравнению результатов с упругим случаем.

Исследованы установившиеся антиплоские колебания вязкоупругого слоя S толщины h , нижняя грань l_1 которого жестко закреплена. На части верхней границы $l_{20} \subset l_2$ приложена нагрузка $p(x_1)e^{i\omega t}$. Ненулевой компонентой вектора перемещений является компонента $u_2 = u_2(x_1, x_3) = u$.

Слой ослаблен внутренней туннельной трещиной, ось которой совпадает с осью x_2 . Трещина описывается как математический разрез в области с берегами l_0^\pm , на которых компонента вектора перемещений терпит конечный скачок: $\chi = u|_{l_0^+} - u|_{l_0^-}$. На основе теории дислокаций [2] действие трещины заменяется действием фиктивной массовой силы f с носителем на трещине, которая выражается через функцию раскрытия трещины χ . Полагаем, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют и свободны от напряжений.

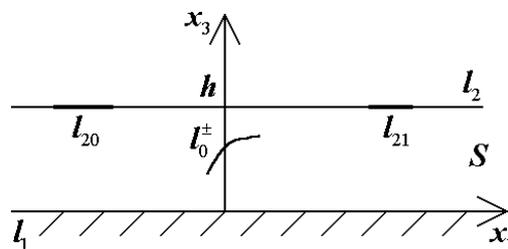


Рис. 1.

Учет затухания осуществлен в рамках концепции комплексных модулей, в которой предполагается, что в случае стационарных гармонических колебаний упругие константы материала заменяются на комплексные характеристики, являющиеся функциями частоты колебаний. Такой подход позволяет исключить время из

уравнений и решить задачу теории упругости, но с комплексными характеристиками.

В случае изотропного материала компоненты тензора комплексных модулей имеют вид [3]:

$$C_{ijkl}^*(i\omega) = \lambda^*(i\omega)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^*(i\omega)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

В антиплоском случае ненулевыми компонентами являются

$$C_{2121}^*(i\omega) = C_{2323}^*(i\omega) = \mu^*(i\omega)$$

После отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$\sigma_{2j,j} + \rho\omega^2 u + f = 0;$$

$$\sigma_{21} = \mu^*(i\omega)u_{,1}; \sigma_{23} = \mu^*(i\omega)u_{,3};$$

$$u|_{l_1} = 0; \sigma_{23}|_{l_{20}} = p; \sigma_{23}|_{l_2 \setminus l_{20}} = 0;$$

$$\sigma_{2j}n_j^\pm|_{l_0^\pm} = 0, j = 1, 3$$

где σ_{2j} , $j = 1, 3$ – ненулевые компоненты тензора напряжений, ρ – плотность среды, $f = -[\mu^*(i\omega)\chi\delta(\zeta)]_{,1}$, ζ – координата, отсчитываемая по нормали к l_0^+ , n_j^\pm – компоненты единичных векторов нормалей к поверхностям l_0^\pm .

Задача идентификации трещины в слое состоит в определении параметров трещины по полям перемещений, измеренным на части верхней границы слоя $u|_{l_{21}} = g(x)$, $x \in l_{21} \subset l_2$.

В данной задаче рассмотрен случай точечного нагружения в точке $x_1 = -L$: $p(x_1) = p\delta(x_1 + L)$.

Решение прямой задачи осуществлено методом граничных интегральных уравнений. Интегральные представления для волновых полей в слое построены при помощи формул Сомильяны [4] и представимы в виде:

$$u(\xi) = u^{et}(\xi) + \int_{l_0^+} B(x, \xi)\chi(x)dl, \xi \in V;$$

$$\text{где } u^{et}(\xi) = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sh(\lambda\xi_3)}{\lambda ch(\lambda h)} e^{-i\alpha_1(\xi_1+L)} d\alpha_1; p_0 = \frac{p}{\mu^*(i\omega)}$$

$$B(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1(\xi_1-x_1)} \left[\frac{g_1}{\lambda} e^{-\lambda|\xi_3-x_3|} + \frac{g_3 e^{-\lambda(h-\xi_3)} sh(\lambda\xi_3) - g_2 e^{-\lambda x_3} ch(\lambda(h-\xi_3))}{\lambda ch(\lambda h)} \right] d\alpha_1$$

$$g_1 = i\alpha_1 n_1^+ + n_3^+ \lambda sign(\xi_3 - x_3), g_2 = i\alpha_1 n_1^+ - n_3^+ \lambda, g_3 = i\alpha_1 n_1^+ + n_3^+ \lambda$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu^*(i\omega)}, \lambda^2 = \alpha_1^2 - k^2, Re(\lambda) > 0.$$

Устремляя $\xi \rightarrow y \in l_0^+$ в представлении для поля перемещений и удовлетворяя условию отсутствия напряжений на трещине, получаем граничное интегральное уравнение относительно неизвестной функции раскрытия трещины:

$$\int_{l_0^+} K(x, y)\chi(x)dl = F(y); y \in l_0^+$$

Интегральный оператор $K(x, y)$ имеет следующий вид:

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1(x_1-y_1)} R(\alpha_1, x, y) d\alpha_1$$

Ядро $R(\alpha_1, x, y)$ интегрального оператора, как и в упругом случае, является гиперсингулярным, имеет особенность $|x - y|^{-2}$, и соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [5].

Дискретизация полученного интегрального уравнения осуществлена на основе метода граничных элементов. В результате получена СЛАУ относительно узловых значений компонент функций раскрытия трещины, на основе которых вычисляются поля перемещений в любой точке слоя.

Получены формулы полей перемещений на верхней границе слоя. Так, для точек поверхности, лежащих справа от дефекта, поле перемещений имеет вид:

$$u(\xi_1, h) = u^{et}(\xi_1, h) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{iRe(\beta_n)\xi_1} e^{-Im(\beta_n)\xi_1}$$

где $\beta_n^2 = k^2 - \beta_{0n}^2$, $Im(\beta_n) > 0$, $\beta_{0n} = \frac{\pi}{h}(n - 0.5)$, $n \in N$

$$u^{et}(\xi_1, h) = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\beta_n|\xi_1+L|}}{\beta_n \beta_{0n}}$$

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}}{h} \int_{l_0^+}^+ (in_1^+ sh(i\beta_{0n}x_3) + sign(x_1 - \xi_1) \frac{i\beta_{0n}n_3^+}{\beta_n} ch(i\beta_{0n}x_3)) e^{-i\beta_n x_1} \chi(x) dl$$

На основе предложенного алгоритма получены численные результаты решения прямой задачи для слоя с прямолинейной трещиной длины $l = 2l_0$, наклоненной к нижней грани слоя под углом θ , средняя точка которой находится на расстоянии d_0 от нижней грани и на расстоянии L от точки приложения нагрузки.

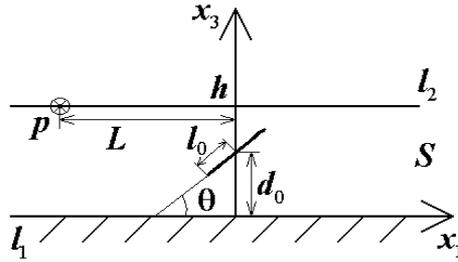


Рис. 2.

Для численной реализации использована модель стандартного вязкоупругого тела с длительным модулем H , мгновенным модулем E и временем релаксации n . Комплексные модули изотропного материала выбраны следующим образом:

$$\nu = const, E^*(i\omega) = \frac{-Eni\omega + H}{-ni\omega + 1}$$

$$\text{Тогда } \mu^*(i\omega) = \frac{E^*(i\omega)}{2(1+ni)}.$$

Введен параметр $k_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\mu^*(0)}}\omega$. Он совпадает с волновым числом для упругого материала с модулем упругости, по величине равным H .

Для численных расчетов взят вязкоупругий материал со следующими свойствами: $\rho = 1.2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $E = 1.1 \cdot 10^9$ Па, $H = 1 \cdot 10^9$ Па, $n = 0.001$ с.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерного комплексного модуля сдвига $\mu_\sigma^*(ik_0) = \frac{\mu^*(ik_0)}{\mu^*(0)}$ от k_0 . Точками на оси k_0 отмечены частоты толщинных резонансов (равные β_{0n} , $n \in N$), соответствующие упругому материалу с модулем упругости равным H . Заметим, что при $k_0 < \beta_{01}$ в упругом случае нет бегущих волн, поля перемещений экспоненциально затухают и процедура восстановления трещин в таком диапазоне частот в упругом случае невозможна.

Из рис. 3 видно, что вязкоупругие тела, участвующие в очень медленных ($k_0 \ll 1$) и очень быстрых ($k_0 > 10$) процессах, ведут себя практически как упругие, а наиболее существенно влияние вязкости наблюдается при средних частотах колебаний [6].

На рис. 4 представлены поля перемещений в вязкоупругом (колебания с затухающей амплитудой) и упругом (колебания с постоянной амплитудой) случаях. Упругому случаю соответствует волновое число, равное k_0 . На левом графике изображены вещественные части полей смещений, а на правом — мнимые. Для вычислений выбраны: $l = 0.3$, $\theta = 60^\circ$, $L = 2$, $d_0 = 0.5$ и $k_0 = 1.77$.

Анализ графиков полей перемещений позволяет выявить благоприятные с точки зрения идентификации интервалы координат (на которых наблюдается макси-

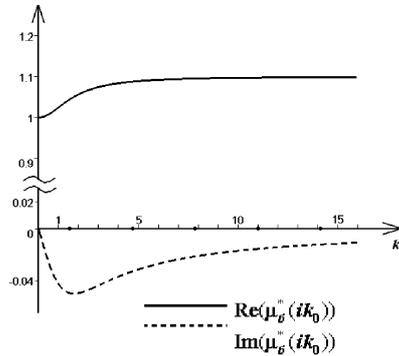


Рис. 3.

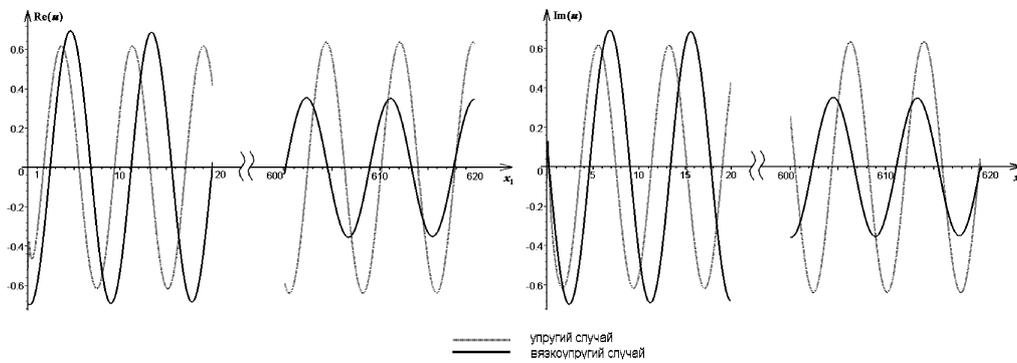


Рис. 4.

мальное значение амплитуд), где следует выбрать точки съема данных.

Реконструкция трещины сводится к отысканию параметров, однозначно ее определяющих, которые находятся из условия минимума неквадратичного функционала невязки. При использовании позиционного зондирования в качестве входных данных задаются значения компонент поля перемещений $g(\xi_i)$ в N точках $\xi_i \in l_{21}$ при фиксированной частоте колебаний. Функционал невязки определяется следующим выражением: $\Phi(q_k) = \sum_{i=1}^N |u(\xi_i, q_k) - g(\xi_i)|^2$, $\xi_i \in l_{21}$ где q_k — параметры трещины.

Для минимизации функционала невязки использовался метод оврагов. В качестве входной информации для решения обратной задачи использовались результаты решения прямой задачи для трещины с заданными параметрами.

На рис. 5 представлены результаты вычислительных экспериментов по определению двух параметров наклонной прямолинейной трещины ($l = 0.3$, $\theta = 65^\circ$) при условии, что два других параметра известны ($L = 2$, $d_0 = 0.5$) в зависимости от k_0 . Осуществлено сравнение вязкоупругого и упругого случаев.

Относительные погрешности вычислений определяются по формулам:

$\varepsilon_l = \left| \frac{l^t - l}{l^t} \right| 100$ (в процентах), $\varepsilon_\theta = \left| \frac{\theta^t - \theta}{\theta^t} \right| 100$ (в процентах), где l^t , θ^t — точные значения соответствующих параметров.

Результаты идентификации, представленные на рис. 5, свидетельствуют об устойчивой процедуре восстановления (в пределах 2 процентов).

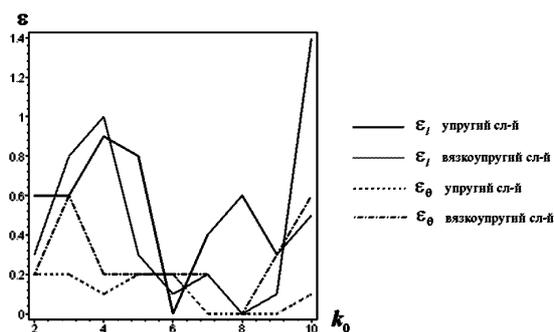


Рис. 5.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00734, 06-01-08041).

Список литературы

- [1] Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. № 4. С. 714–724.
- [2] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. Т. VII. М.: Наука, 1978. С. 248.
- [3] Новацкий В. Теория упругости. Т. VII. М.: Мир. 1975. С. 872.
- [4] Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1989. С. 320.
- [5] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука. 1985. С. 253.
- [6] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. С. 338.
- [7] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. С. 223.

Azarova P.A., Yavruyan O.V. *The influence of reological properties on the procedure of the identification crack in the layer.* The antiplane problem of oscillation of visco-elastic isotropic layer with inner tunnel crack is investigated. The field of displacements on upper boundary of the layer is derived. The inverse problem of calculating of the geometrical parameters of the crack based on the given (measured) field of displacements on the layer's surface is solved. The influence of reological properties on the identification procedure is studied.

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В МОДЕЛЯХ ЭЛЕМЕНТОВ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НАДРЕЗОМ

**Акопьян В. А.,* Рожков Е. В.,* Соловьев А. Н.,*
Черпаков А. В.****

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*** Ростовский государственный строительный университет*

В работе описаны результаты конечно-элементного анализа параметров колебаний в моделях элементов рамных конструкций с надрезом. Проведено экспериментальное исследование амплитудно - частотных и модальных характеристик моделей, результаты которых сравниваются с численным расчетом. Показано, что формы 8 и 9 мод колебаний являются плоскими и изолированными, что позволило найти корреляцию между частотами их резонансов и критической глубиной надреза.

Введение. Среди основных задач в строительстве и машиностроении важное место занимает проблема надежной эксплуатации зданий и сооружений в условиях воздействия меняющихся факторов внешней среды, а также при различного рода перестройках зданий, которые могут привести к изменению исходных расчетных нагрузок, заложенных при их проектировании. В частности, проблема обеспечения необходимой прочности и надежности металлоконструкций различного назначения приобрела в последние годы особое значение в связи с участвовавшими авариями сооружений общественного назначения.

Один из путей обеспечения прочности и надежности строительных конструкций в процессе их эксплуатации заключается в проведении мониторинга их дефектных, наиболее нагруженных элементов. В последнее время за рубежом эта проблема получила общее название “Structural health monitoring” (SHM), решению которой посвящено достаточно много публикаций о результатах исследований в рамках крупных правительственных программ., финансируемых не только в США, но и в Китае, Евросоюзе [1]-[5]. Анализ известных публикаций показал, что мониторинг и техническая диагностика зданий и сооружений осуществляется чаще всего с помощью систем неразрушающего контроля (НК), включающих в себя как аппаратные (тензометрические, акустоэмиссионные и оптические измерительные тракты, блоки регистрации и обработки информации), так и необходимое программное и методическое обеспечение.

Процедура использования систем НК к различным объектам контроля (ОК) обычно предваряется математическим натурным моделированием поведения элементов конструкций ОК под действием внешних, в основном, динамических нагрузок.

При экспериментальном исследовании свойств механических колебательных систем часто используют метод свободных колебаний, позволяющий выявить основные закономерности поведения характеристик диссипации энергии. В частности, их можно описать из анализа затухающего процесса свободных колебаний в рамках, например, частотно-зависимых моделей трения [6].

При этом достоверность результатов анализа может быть повышена при оценке не только амплитудно-частотных, но и модальных характеристик колебательной системы, которые были исследованы комплексно как методом конечных элементов, так и экспериментально.

В данной работе приведены результаты математического моделирования собственных колебаний в элементах ферменных конструкций треугольной геометрии с помощью конечно-элементных комплексов ACELAN и ANSYS — модальный анализ консольно закрепленного стержневого элемента ферменной конструкции с надрезами.

В дополнение к этому в работе был проведен натурный эксперимент по исследованию амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) такой же модели, как и для численного эксперимента. В соответствии с программой исследований были проанализированы корреляционные связи параметров АЧХ и форм колебаний модели.

Цель исследований заключалась в нахождении корреляционных связей между резонансными частотами и формами различных мод колебаний и размером надреза в элементе ферменной конструкции.

Конечноэлементная модель. В качестве механической модели был выбран консольно закрепленный элемент ферменной конструкции треугольной формы с дефектом (надрезом) различной глубины. Модель имела форму равностороннего треугольника с размерами сторон равными 250 мм и поперечного сечения — 4 × 8 мм. Надрезы были расположены в вершине треугольника, противостоящей точке закрепления модели и ориентированы по углом 30° относительно оси X (рис. 1). В численном эксперименте анализировались собственные колебания модели.

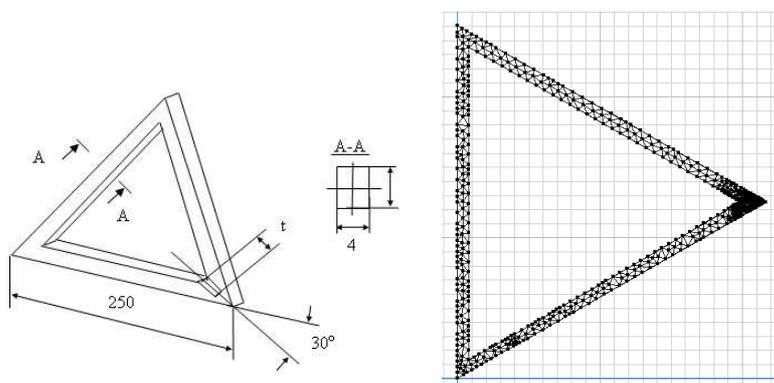


Рис. 1. Треугольная стержневая конструкция и ее КЭ модель в ACELAN

Первым шагом численного анализа были расчет собственных частот и форм колебаний конструкции в рамках плосконапряженного состояния, т.к. в связи с геометрией надреза очевидно было предполагать, что наиболее чувствительными к его размеру будут плоские формы колебаний. Результаты этого анализа отражены на рис. 2., на котором на горизонтальной оси откладывается размер надреза t , а по вертикали изменение относительной частоты ($f_r(t)$ — резонансная частота)

$$\varepsilon = (f_r(t) - f_r(0))/f_r(0)$$

Как видно из этого рисунка наиболее чувствительными к размеру дефекта оказались собственные частоты 2, 4 и 8 — собственные формы, которых соответствуют интенсивному раскрытию дефекта (рис. 2.).

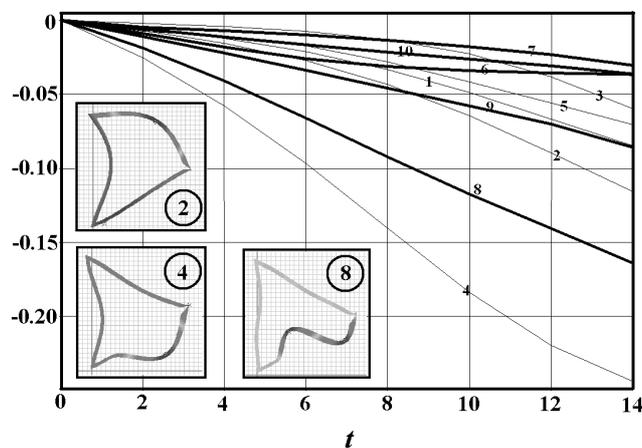


Рис. 2. 2D — модальный анализ

Критерием того, что разрез достиг некоторого критического значения может служить перестройка форм колебаний на смежных собственных частотах. Так на рис. 3 представлена зависимость 5-ой и 6-ой собственной частоты от размера разреза, с перестройкой формы колебаний на этих частотах, в диапазоне размера разреза 6–8 мм.

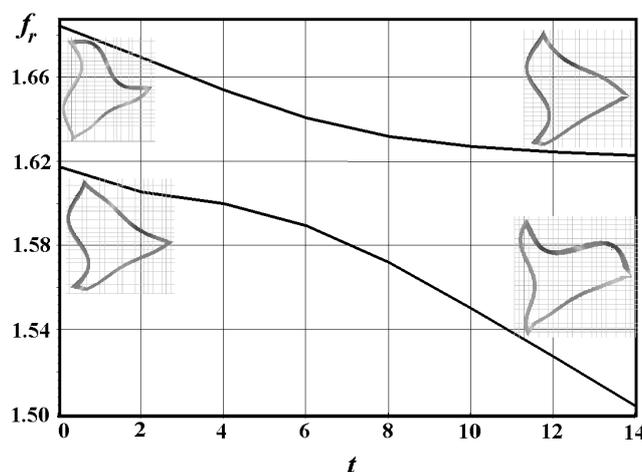


Рис. 3. Перестройка мод колебаний

Частотный и модальный анализ колебаний трехмерной конечноэлементной модели охватил диапазон частот от 0 до 875 Гц и при этом были рассчитаны резонансы 10 мод колебаний для моделей с размером дефекта (надреза) $t = 0, 4.5, 7, 9, 11, 13, 14, 15$ мм. Ширина надреза была одинаковой. Значения резонансных частот 10 мод колебаний модели с надрезами глубиной 4,5; 9 мм приведены в таблицах 1, 2. Сравнение расчетных и экспериментальных значений резонансных

частот свободных колебаний (для глубины надреза 4,5 мм) отражены в табл. 1, в которой в колонке *I* — отмечены номера мод колебаний, в *II* частоты резонансов в Гц, в 1 — расчетное значение, в 2 — эксперимент, в 3 — Расхождение в %. В табл. 2 представлены аналогичные результаты для глубины надреза 9 мм.

Таблица 1. Глубина надреза 4,5 мм

I	II			
	1	2		3
		пьезо-датчик	акселерометр	
1	40,4	37,1	54,7	8,2/35
2	68,2	54,7	-	19,8
3	82,7	99,6	99,6	20,0
4	267,5	232,4	271,5	13,1/1,5
5	366,5	341,8	241,8	6,7
6	425,9	-	-	-
7	435,6	505,9	505,9	16,1
8	716,2	735,2	705,1	1,5/1,5
9	809,6	814,5	802,7	0,6/0,8
10	853,4	845,7	841,8	0,9/1,3

Примечание: в столбцах 3 таблиц 1, 2 указана относительная величина расхождений в %, причем в числителе подсчитана это величина между расчетом и пьезоэлектрическим измерении деформаций, а в знаменателе — расчетных и значений, определенных по величине вибро смещений.

Таблица 2. Глубина надреза 9,0 мм

I	II			
	1	2		3
		пьезо-датчик	акселерометр	
1	40,2	-	58,6	-
2	67,7	-	-	-
3	80,8	95,7	97,7	18,7/20,1
4	265,7	296,7	306,6	11,7/15,4
5	362,7	337,9	373,0	6,8/2,8
6	406,6	460,9	416,0	13,3/2,3
7	434,6	505,9	482,4	16,4/11,0
8	709,8	695,3	699,2	2,0/1,5
9	721,4	765,1	759,8	6,0/5,3
10	846,4	818,4	818,4	3,3

По расчетным относительным значениям частот резонансов и размера надреза была построена зависимость $\Delta f_r(t)$ (рис. 4).

$$\Delta f_r(t) = \frac{f_r^i}{f_r^o} 100,$$

где f_r^o, f_r^i — значения частот резонансов при глубине надреза $t=0$ и $t_i= 4,5; 7,9; 11; 13; 14; 15$ мм соответственно. Из графиков зависимостей $\Delta f_r(t)$ видно, что частоты резонансов с ростом глубины надреза уменьшаются. Причем наибольшее уменьшение частот f_r наблюдается на 8, 9 модах колебаний. На других модах колебаний это снижение частот резонансов проявляется существенно меньше. Такой характер графиков зависимостей $\Delta f_r(t)$ в общем объясняется тем, что с увеличением глубины надреза жесткость модели уменьшается и поэтому частоты резонансов уменьшаются

На этом же рисунке (рис. 4) приведены графики форм колебаний 1, 3, 8, 9, 10 мод. Эти формы колебаний отличаются от форм других мод колебаний тем, что в диапазоне размера дефекта 1...4 мм у них преобладает плоская форма (вероятно, изгибных) колебаний. Расчет форм колебаний других мод показал, что у них наблюдаются сложные пространственные формы колебаний.

Анализ форм колебаний, полученных численно, показал следующее. У двух мод колебаний (8 и 9) при изменении глубины надреза от 1 до 15 мм наблюдаются только плоские формы колебаний (плоскость XOY).

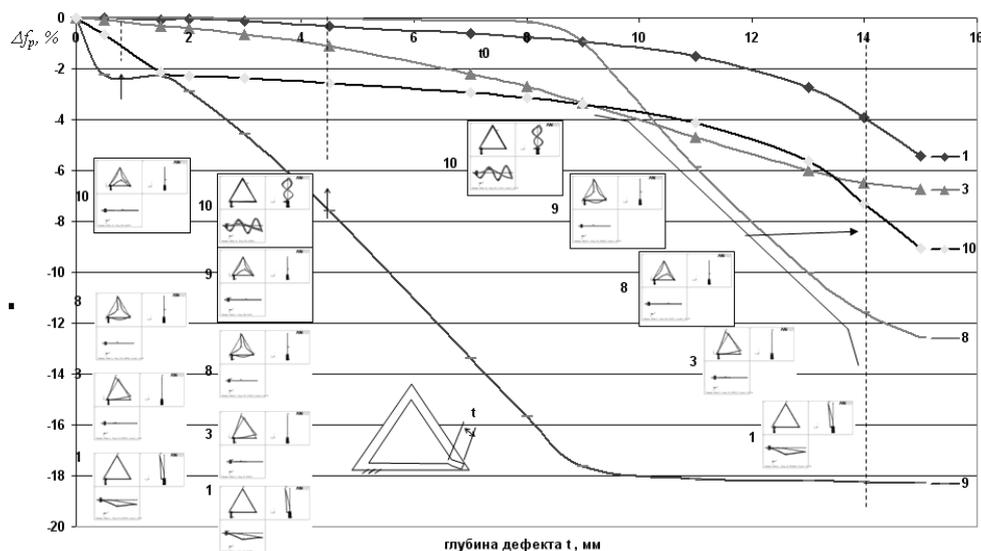


Рис. 4. Зависимость относительной резонансной частоты от глубины дефекта

Натурный эксперимент. Натурное моделирование собственных колебаний элемента ферменной конструкции проводилось с помощью испытательного стенда для анализа деформационных образцов моделей стержневых конструкций, разработанной ранее в НИИ МиПМ им. Воровича И.И. ЮФУ и описанного в работе [7]. Устройство стенда легко понять из фотографии, приведенной на рис. 5.

Физическая модель треугольной конструкции из стали 10 (показана на рис. 5) была полностью идентична описанной выше конечно-элементной модели.

Методика эксперимента заключалась вкратце в следующем. С помощью блока ударного нагружения стенда по боковой поверхности треугольника модели наносился одиночный удар, который возбуждал в модели собственные затухающие колебания. В соответствии с программой исследований эксперимент проводился вначале с моделью без надреза, а на втором и последующих этапах с моделями, в которых были сделаны надрезы глубиной $t = 4,5, 7, 9, 11$ мм, соответственно.

С помощью пьезоэлектрических датчиков были проведены измерения деформаций нижней (заземленной) стороны треугольной модели и одновременно ее вибросмещения акселерометром ADXL [6] в диапазоне частот $10 \dots 875$ Гц.

Для примера осциллограммы сигналов датчиков (вибросмещений (а), тензометрического (б), тонкопленочного сегнетоэлектрического (в), оптического (г), пьезоэлектрического (д)) зарегистрированные на наиминишей частоте собственных колебаний испытуемой модели (глубина надреза $t = 9$ мм) приведены на рис. 6.

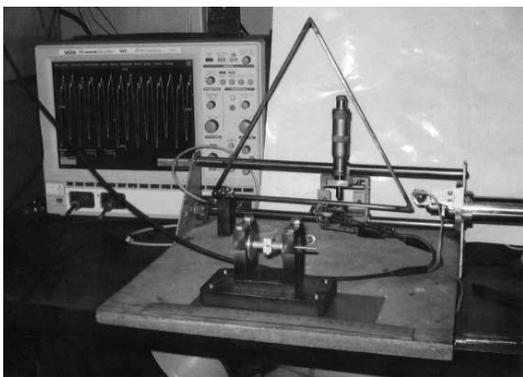


Рис. 5. Испытательный стенд

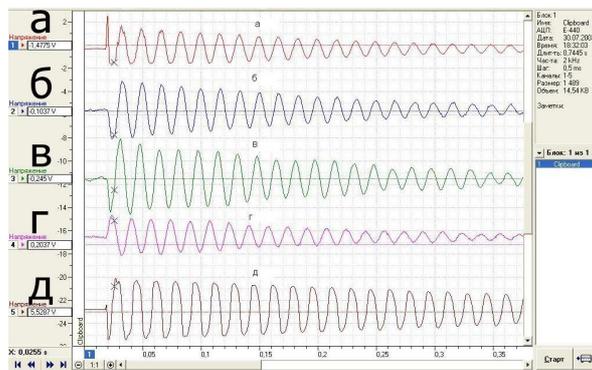


Рис. 6. Осциллограммы сигналов датчиков

С помощью преобразования Фурье временные сигналы датчика вибросмещений были пересчитаны в значения квадратурного спектра частот свободных колебаний и определены частоты резонансов десяти гармоник, которые приведены выше в таблице.

Заключение. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот резонансов показало следующее. В диапазоне частот от наиминишего резонанса колебаний до ~ 505 Гц расхождение этих значений велико и колеблется от 6 до 20%. В отличие от этого на частоте 5 выше 709-714 Гц (на 8, 9 модах) колебаний расхождение не превышает 2% (для модели с нарезом $t = 4,5$ мм) и укладывается в пределах 2–6% (при $t = 9$ мм), что вполне объяснимо погрешностями экспериментальных измерений. Можно предположить, что большие отличия расчета и эксперимента при частотах до 500 Гц связаны с наблюдаемыми в этом диапазоне сложными (пространственными) формами колебаний, являющихся суперпозицией плоских (XOY) и трехмерных форм, при которых разные по величине частоты резонансов изолированных мод колебаний накладываются друг на друга и их нельзя относить к каким-то конкретным гармоникам (модам) колебаний. Это видно на рис. 4, где формы колебаний 8 и 9 мод являются плоскими и их можно считать изолированными, а значения резонансов этих мод — резонансами изолированных изгибных мод колебаний. Значения резонансов в первом диапазоне (до 405 Гц)

являются резонансными суперпозициями пространственных форм колебаний.

При глубине разреза $8 \text{ мм} \leq t \leq 9 \text{ мм}$ жесткость соединения стержней уменьшается до значения, при котором происходит трансформация собственных форм колебаний на 8-ой и 9-ой резонансных частотах.

Обнаруженная особенность поведения форм колебаний 8 и 9 мод может быть использована как один из критериев степени поврежденности элемента конструкции, возможно, и как признак предразрушающего состояния конструкции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 07-08-12193, 06-01-08041-ОФИ, 06-08-01259).

Список литературы

- [1] *Garden E.P. and Fanning P.* Vibration Based Conditioning Monitoring: A. Review” Structural Health Monitoring. 2004. Vol. 3. Pp. 355–377.
- [2] *Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M. and an.* 2003. //A. Review Structural Health Monitoring Literature: 1996-2001. Los Alamos National Laboratory. USA
- [3] *Diego F. Giraldo.* A Structural Health Monitoring Framework for Civil Structures// A dissert Washington University. 2006. Saint Louis. Missouri.
- [4] *Zhu Hong-Ping, He Bo, Chen Xiao-qiang.* Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency// J. Natur. Sci. 2005. 10. № 6. P. 1069–1073.
- [5] *Norita Koichi, Teshigawara Masaomi, Hamamoto Takuju.* Detection and Estimation of Damage to Steel Frames Through Shaking Table Test// Structural Health Monitoring. 2005. 12. № 3–4. P. 357–380.
- [6] *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа. 1980. 408 с.
- [7] *Акопян В.А., Есипов Ю.В., Рожков Е.В.* Испытательный стенд для анализа деформационных образцов моделей стержневых конструкций // Измерительная техника, 2007. № 10. С. 48–57.

Акопян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Черпачков А.В. *Theoretical and experimental investigation of vibration in the models elements framework with a cut.* The results analyses of the characteristics vibration in models elements framework with size cut are described. Experimental investigation of the impedance and modal characteristics model are executed. The results of nature experiments are compared with numeric experiments dates. Correlation of the resonance frequencies 8th and 9th mode vibration with a size cut are revealed.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ НАКЛАДКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Александров В. М., Саламатова В. Ю.

Институт проблем механики РАН, Москва

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии накладки, имеющей эллиптическую в плане форму, не сопротивляющейся изгибным деформациям, но жесткой на растяжение, с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности растягивающим усилием, направленным параллельно границе полупространства. Задача сведена к системе интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных контактных касательных напряжений. Указан метод её решения и получены формулы для контактных касательных напряжений

§ 1 Постановка задачи

Воспользуемся прямоугольной системой координат x, y, z , ось z которой перпендикулярна к границе полупространства.

Пусть граница $z = 0$ упругого полупространства $z \leq 0$ усилена штампом, имеющим в плане эллиптическую форму. Область контакта Ω между стрингером и упругой средой описывается неравенством:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (b \leq a) \quad (1.1)$$

Упругое полупространство нагружено на бесконечности растягивающим усилием p .

Граничные условия для упругого полупространства имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, 0) &= 0; \\ \tau_{zx}(x, y, 0) &= 0 \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}); \\ \tau_{zy}(x, y, 0) &= 0 \quad ((x, y) \in \bar{\Omega}); \\ u(x, y, 0) &= 0 \quad ((x, y) \in \Omega); \\ v(x, y, 0) &= 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \end{aligned} \quad (1.2)$$

на бесконечности

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = p \quad (1.3)$$

и остальные напряжения исчезают.

Здесь $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$ — напряжения в полупространстве, u — перемещение точек полупространства вдоль оси x , v — перемещение точек полупространства вдоль оси y , $\bar{\Omega}$ — дополнение к области Ω до всей плоскости.

Разыскивая решение уравнений Ламе при граничных условиях (1.2), (1.3) в форме

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{px}{G(1+\nu)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \\ v(x, y, z) &= -\frac{\nu p y}{G(1+\nu)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta, z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \\ w(x, y, z) &= -\frac{\nu p z}{G(1+\nu)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta, z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (1.4)$$

где G и ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона полупространства, w — перемещение точек полупространства вдоль оси z . И применяя известную технику двумерного интегрального преобразования Фурье [1], сведем задачу (1.2), (1.3) к определению контактных касательных напряжений τ_{zx}, τ_{zy} из системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{q_1(x-\xi)^2}{R^3} \right) \tau_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta + q_1 \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{R^3} \tau_{zy}(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \\ &= -\frac{2\pi p x}{1-\nu^2}, \quad (x, y) \in \Omega \\ \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{q_1(y-\eta)^2}{R^3} \right) \tau_{zy}(\xi, \eta) d\xi d\eta + q_1 \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{R^3} \tau_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \\ &= \frac{2\pi \nu p y}{1-\nu^2}, \quad (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad q_1 = \nu/(1-\nu) \quad (1.7)$$

§ 2 Решение системы интегральных уравнений

Теорема Галина [3] утверждает, что если правая часть интегрального уравнения:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} = \pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} x^i y^j, \quad (2.2)$$

то его решение представимо в форме

$$p(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (2.3)$$

Можно показать [2], что теорема, аналогичная теореме Галина Л.А., будет иметь место для интегральных уравнений вида (1.5), (1.6) а именно для следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)^2 p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^3} &= \pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ \iint_{\Omega} \frac{(y-\eta)^2 p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^3} &= \pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)(y-\eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^3} &= \pi f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, решение системы (1.5), (1.6) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(x, y) &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} c_1 x \\ \tau_{zy}(x, y) &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} c_2 x \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляем (2.5) в уравнения (1.5), (1.6), и, используя соответствующие соотношения монографии [4] для вычисления интегралов вида:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)^2 \xi^i \eta^j d\xi d\eta}{R^3 \gamma(\xi, \eta)}, \quad \iint_{\Omega} \frac{(y-\eta)^2 \xi^i \eta^j d\xi d\eta}{R^3 \gamma(\xi, \eta)}, \quad \iint_{\Omega} \frac{(x-\xi)(y-\eta) \xi^i \eta^j d\xi d\eta}{R^3 \gamma(\xi, \eta)} \\ \gamma(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

получаем систему для нахождения постоянных c_1, c_2

$$\begin{aligned} a_{01}c_1 + a_{02}c_2 &= -\frac{p}{1-\nu^2} \\ a_{11}c_2 + a_{12}c_1 &= \frac{p\nu}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{01} &= b(S_{10}(e) + \frac{q_1}{e^4}((2-e^2)K(e) - 2E(e))) \\ a_{02} &= bq_1 \frac{(1-e^2)}{e^4} (2E(e) + (e^2-2)K(e)) \\ a_{11} &= b((1-e^2)S_{01}(e) + \frac{q_1}{e^4}((2e^2-2)E(e) + (e^4-3e^2+2)K(e))) \\ a_{12} &= bq_1 \frac{1}{e^4} (2E(e) + (e^2-2)K(e)) \\ S_{01}(e) &= \frac{E(e) - (1-e^2)K(e)}{e^2(1-e^2)} \\ S_{10}(e) &= \frac{K(e) - E(e)}{e^2} \\ e^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$K(e), E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Решив систему (2.7), находим неизвестные константы c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{((2\nu e^2 - 2\nu + e^2)E(e) + (e^4 + \nu e^4 - e^2 - 3\nu e^2)K(e))p}{b(\nu + 1)((\nu + 1)E^2(e) + (e^2 - 2)K(e)E(e) + (\nu e^2 - \nu + 1 - e^2)K^2(e))} \\ c_2 &= \frac{\nu((e^2 - 2)E(e) + (2 - 2e^2)K(e))p}{b(\nu + 1)((\nu + 1)E^2(e) + (e^2 - 2)K(e)E(e) + (\nu e^2 - \nu + 1 - e^2)K^2(e))} \end{aligned} \quad (2.9)$$

далее подставляя (2.9) в (2.5), получаем искомое решение — выражения для контактных касательных напряжений.

§ 3 Численное решение

Обезразмерим выражения для τ_{zx}, τ_{zy} . Для этого введем следующие безразмерные величины:

$$\tau'_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{p}; \quad \tau'_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{p}; \quad x' = \frac{x}{a}; \quad y' = \frac{y}{b}. \quad (3.1)$$

Выражения для обезразмеренных контактных напряжений примет вид:

$$\tau'_{zx} = A \frac{x'}{\sqrt{1 - (x')^2 - (y')^2}}; \quad (3.2)$$

$$A = \frac{((2\nu e^2 - 2\nu + e^2)E(e) + (e^4 + \nu e^4 - e^2 - 3\nu e^2)K(e))}{\sqrt{1 - e^2}(1 + \nu)((\nu + 1)E^2(e) + (e^2 - 2)K(e)E(e) + (\nu e^2 - \nu + 1 - e^2)K^2(e))}$$

$$\tau'_{zy} = B \frac{y'}{\sqrt{1 - (x')^2 - (y')^2}}; \quad (3.3)$$

$$B = \frac{\nu((e^2 - 2)E(e) + (2 - 2e^2)K(e))}{(\nu + 1)((\nu + 1)E^2(e) + (e^2 - 2)K(e)E(e) + (\nu e^2 - \nu + 1 - e^2)K^2(e))}$$

ниже приведены значения коэффициентов A, B при различных значениях e^2 :

e^2	A	B
0	-1,238671955	0,2592569208
0,1	-1,251926887	0,2525275352
0,3	-1,286570970	0,2372516850
0,5	-1,340337123	0,2184029683
0,7	-1,440813361	0,1929699207
0,9	-1,757437474	0,1493433991

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00003).

Список литературы

- [1] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955.
- [2] Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.

- [3] Галин Л.А. Контактные задачи упругости и вязкоупругости. М: Наука, 1980
- [4] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974

Alexandrov V.M., Salamatova V.Yu. *The contact problem for the elliptic reinforcing cover plate interacting with an elastic half-space.* In the paper there is considered a problem about the contact interaction of the reinforcing cover plate with the elastic half-space loaded at the infinity by a tensile force. The cover plate has an elliptic form, is not resistant with respect to bending strain, being rigid with respect to any extension. The problem is reduced to a system of integral equations of the first kind relatively unknown contact tangential stress. We propose a method of solution for this system and give explicit formulas for contact tangential stresses.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ БИФУРКАЦИЙ РОЖДЕНИЯ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА И АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Алексеев А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена изучению режимов течения жидкости между вращающимися цилиндрами в окрестности точки пересечения нейтральных кривых монотонной и колебательной потери устойчивости в нерезонансном случае. Для исследования используются методы теории бифуркаций коразмерности 2 в системах с цилиндрической симметрией. Исследованы равновесия фактор-системы на инвариантных подпространствах, которым отвечают стационарные и периодические режимы исходной системы. Найдены их асимптотики, условия существования и устойчивости.

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными цилиндрами радиусов r_1, r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно (задача Куэтта-Тейлора). Безразмерные уравнения движения (уравнения Навье-Стокса) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + Av &= -\nabla p - R_1 L(v, v), \\ \nabla v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $v = (v_r, v_\theta, v_z)$ — скорость течения, p — давление, r, θ, z — цилиндрические координаты, ось z направлена вдоль оси цилиндров, $R_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости, $d = \eta - 1$ — безразмерный зазор между цилиндрами, $\eta = r_2 / r_1$ — отношение радиусов цилиндров. Линейный оператор A и нелинейный оператор L определяются следующими дифференциальными выражениями:

$$\begin{aligned} (Av)_r &= -\Delta v_r + \frac{v_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \\ (Av)_\theta &= -\Delta v_\theta + \frac{\theta_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \\ (Av)_z &= -\Delta v_z, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ (L(v, u))_r &= v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{v_\theta u_\theta}{r}, \\ (L(v, u))_\theta &= v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta u_r}{r}, \\ (L(v, u))_z &= v_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \nabla &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

На твердых границах задано условие прилипания:

$$\begin{aligned} v_r = v_z = 0, v_\theta = 1/(\eta - 1), r = 1/(\eta - 1), \\ v_r = v_z = 0, v_\theta = \Omega\eta/(\eta - 1), r = \eta/(\eta - 1), \end{aligned}$$

где $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$ — отношение угловых скоростей вращения цилиндров.

Система (1) обладает группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$ — она инвариантна относительно вращений L_θ^δ , трансляций L_z^h и инверсии J , действующих на поле скоростей по правилам:

$$\begin{aligned} (L_\theta^\delta v)(t, r, \theta, z) &= v(t, r, \theta + \delta, z), \\ (L_z^h v)(t, r, \theta, z) &= v(t, r, \theta, z + h), \\ (Jv)(t, r, \theta, z) &= (v_r(t, r, \theta, z), v_\theta(t, r, \theta, z), -v_z(t, r, \theta, -z)) \end{aligned}$$

для любых вещественных δ и h .

При всех значениях параметров система имеет точное решение $v_0(r) = (0, v_{0\theta}(r), 0)$ — течение Куэтта. Здесь:

$$v_{0\theta} = ar + b/r, \quad a = \frac{R_2 - R_1}{R_1(\eta^2 - 1)}, \quad b = -\frac{R_2 - R_1\eta^2}{R_1(\eta^2 - 1)d^2},$$

где $R_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2/\nu$, $R_2 = \Omega_2 r_2^2 d^2/\nu$ — числа Рейнольдса.

Рассматривается случай потери устойчивости течением Куэтта, при котором в спектре устойчивости находятся нулевое и пара чисто мнимых собственных значений. Это соответствует пересечению нейтральных кривых монотонной и колебательной потери устойчивости. В указанном случае линеаризованная на течении Куэтта задача устойчивости имеет три независимые нейтральные моды:

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= e^{-ik\alpha z} \phi_0(r), \\ \Phi_{01} &= e^{-i(\omega_n t + n\theta + l\alpha z)} \phi_1(r), \\ \Phi_{11} &= e^{-i(\omega_n t + n\theta - l\alpha z)} J\phi_1(r). \end{aligned} \tag{2}$$

В окрестности точки пересечения все эти моды сильно взаимодействуют, что может приводить к появлению разнообразных режимов движения.

Асимптотическое решение нелинейной системы в окрестности точки пересечения ищется в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots, \\ \Phi &= \xi_{00}(\tau)\Phi_{00} + \xi_{01}(\tau)\Phi_{01} + \xi_{11}(\tau)\Phi_{11}, \end{aligned}$$

где ξ_{ij} — неизвестные комплексные амплитуды, зависящие от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$, а Φ_{ij} — нейтральные моды (2).

При малых ε с помощью теоремы о нейтральном многообразии ([1]-[2]) строится система комплексных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд. Предполагается, что осевые квантовые числа k и l различны. Случай

$k = l$ (резонансный случай) рассмотрен в [3]. В нерезонансном случае амплитудные уравнения содержат только члены, отвечающие обязательным резонансам, и имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{00} &= \xi_{00}(\sigma + A|\xi_{00}|^2 + B|\xi_{01}|^2 + B^*|\xi_{11}|^2), \\ \dot{\xi}_{01} &= \xi_{01}(\mu + D|\xi_{00}|^2 + E|\xi_{01}|^2 + F|\xi_{11}|^2), \\ \dot{\xi}_{11} &= \xi_{11}(\mu + D|\xi_{00}|^2 + F|\xi_{01}|^2 + E|\xi_{11}|^2).\end{aligned}\tag{3}$$

Вещественные коэффициенты σ, A и комплексные коэффициенты μ, B, D, E, F системы (3) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач.

Полная система амплитудных уравнений получается добавлением к системе (3) соответствующих комплексно-сопряженных уравнений.

Система (3) наследует симметрию исходной задачи.

Рассмотрим равновесия амплитудной системы (3) на инвариантных подпространствах, на которых обращается в ноль одна, две или три амплитуды. Подчеркнем, что устойчивость найденных режимов исследуется относительно возмущений общего вида, а не только принадлежащих инвариантным подпространствам.

1. Течение Куэтта (Подпространство $\xi_{00} = 0, \xi_{01} = 0, \xi_{11} = 0$).

При всех значениях параметров у системы (3) существует тривиальное решение, соответствующее течению Куэтта. Течение Куэтта асимптотически устойчиво в области плоскости параметров надкритичности, в которой одновременно выполняются $\sigma < 0, \mu_r < 0$.

2. Вихрь Тейлора (Подпространство $\xi_{00} \neq 0, \xi_{01} = \xi_{11} = 0$).

Вихрь Тейлора — стационарный по t осесимметричный режим. Вектор скорости найденного режима имеет вид:

$$v = v(r, k\alpha z) = v_{00} + \varepsilon(\rho_{00}e^{-i(k\alpha z + \phi_{00})}\phi_0(r) + k.c.) + O(\varepsilon^2),$$

где ϕ_{00} — произвольная постоянная, v_{00} — вектор скорости течения Куэтта при критических значениях параметров.

Область устойчивости описывается следующими неравенствами:

$$\sigma > 0, \quad \mu - D\frac{\sigma}{A} < 0.$$

3. Инверсионно связанная пара спиральных волн. (Подпространства $\xi_{00} = 0, \xi_{01} \neq 0, \xi_{11} = 0$ и $\xi_{00} = 0, \xi_{01} = 0, \xi_{11} \neq 0$).

При выполнении условия

$$\frac{\mu_r}{E_r} < 0$$

существует режим движения с вектором скорости, который может быть записан в виде:

$$v = v(r, \omega_n t + n\theta + l\alpha z) = v_{00} + \varepsilon(L_\theta^{\phi(t)}X_0 + k.c.) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$X_0 = \sqrt{-\frac{\mu_r}{E_r}}e^{i(-n\theta - l\alpha z)}\phi_{01}(r), \quad \phi(t) = \omega_n t/n - d_1/n,$$

d_1 — произвольная постоянная.

Этот режим носит название спиральной волны. Преобразование J дает нам второе решение из J -связанной пары, которое представимо в виде:

$$v = v(r, \omega_n t + n\theta - l\alpha z).$$

Для обоих решений получены следующие условия устойчивости:

$$\sigma + B_r \left(-\frac{\mu_r}{E_r} \right) < 0, E_r - F_r > 0, E_r < 0, E_i < |E|. \quad (4)$$

4. *Смешанные спиральные волны.* (Подпространство $\xi_{00} \neq 0, \xi_{01} \neq 0, \xi_{11} = 0$). Смешанные спиральные волны — это пара инверсионно связанных режимов, представляющих собой вихрь Тейлора с бегущей по нему спиральной волной.

$$\begin{aligned} v &= v(r, k\alpha z, \omega_n t + n\theta + l\alpha z) \\ &= v_{00} + \varepsilon(L_z^{d_0/k\alpha} \rho_{00} \Phi_{00} + L_\theta^{\phi(t)} X_0 + k.c.) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Режим существует, если

$$\rho_{00} = \frac{\mu_r B_r - \sigma E_r}{A E_r - D_r B_r} > 0, \quad \rho_{01} = \frac{\sigma D_r - \mu_r A}{A E_r - D_r B_r} > 0.$$

Здесь $X_0, \phi(t)$ даются формулами:

$$X_0 = \rho_{01} e^{i(-n\theta - l\alpha z)} \phi_{01}(r), \quad \phi(t) = \omega_n t/n - d_1/n.$$

d_1 — произвольная постоянная.

Аналогично предыдущему случаю, преобразование J дает нам второе решение из J -связанной пары, которое представимо в виде:

$$v = v(r, k\alpha z, \omega_n t + n\theta - l\alpha z).$$

Явные выражения для собственных значений матрицы линеаризации и условия устойчивости опустим, ввиду их громоздкости.

5. *Азимутальные волны.* (Подпространство $\xi_{00} = 0, |\xi_{01}| = |\xi_{11}| \neq 0$). Азимутальные волны — инверсионно-симметричный режим, представляющий собой нелинейную смесь пары инверсионно-связанных спиральных волн.

Режим существует, если $\mu > 0$ и $E_r + F_r < 0$ или $\mu < 0$ и $E_r + F_r > 0$.

$$v = v(r, \omega_n t + n\theta + l\alpha z, \omega_n t + n\theta - l\alpha z) = v_{00} + \varepsilon(L_z^\psi L_\theta^{\phi(t)} \rho X_0 + k.c.) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь:

$$X_0 = e^{-in\theta} (e^{-il\alpha z} \phi_1(r) + e^{il\alpha z} J\phi_1(r)) \quad (5)$$

и

$$\phi(t) = \omega_n t - (d_1 + d_2)/(2n), \quad \psi = (d_2 - d_1)/(2l\alpha), \quad \rho = \sqrt{-\frac{\mu_r}{E_r + F_r}}.$$

Азимутальные волны устойчивы, если:

$$\sigma + 2B_r \rho^2 < 0, \quad (E_r + F_r) < 0, \quad (E_r - F_r) < 0. \quad (6)$$

Заметим, что третье из условий (6) противоположно по знаку аналогичному условию из (4). Следовательно, азимутальные волны и инверсионно-связанная пара спиральных волн не могут быть устойчивыми одновременно.

б. *Смешанные азимутальные волны.*

(Подпространство $\xi_{00} \neq 0, |\xi_{01}| = |\xi_{11}| \neq 0$).

Смешанные азимутальные волны — инверсионно-симметричный режим, представляющий собой нелинейную смесь вихря Тейлора и пары бегущих навстречу друг другу спиральных волн. Режим существует, если

$$\rho_{00} = \frac{2\mu_r B_r - \sigma(E_r + F_r)}{A(E_r + F_r) - 2D_r B_r} > 0, \quad \rho = \frac{\sigma D_r - \mu_r A}{A(E_r + F_r) - 2D_r B_r} > 0.$$

Вектор скорости режима имеет вид:

$$v = v_{00} + \varepsilon(L_z^{d_0/k\alpha} \rho_{00} \Phi_{00} + L_z^\psi L_\theta^{\phi(t)} \rho X_0 + k.c.) + O(\varepsilon^2),$$

где $\phi(t) = \omega_n t - (d_1 + d_2)/(2n)$, $\psi = (d_2 - d_1)/(2l\alpha)$, X_0 определяется из (5).

Явные выражения для собственных значений матрицы линеаризации и условия устойчивости опущены, ввиду их громоздкости.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту Моршневой И.В. за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Ш-5747.2006.1.

Список литературы

- [1] Юдович В.И. Переходы и возникновения хаоса в течениях жидкости // Аннотации докладов 6-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
- [2] Chossat P., Iooss G. The Couette-Taylor problem. New York: Springer-Verlag, 1994. 233p.
- [3] Колесов В.В., Юдович В.И. Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн // Изв.РАН, МЖГ, 1998, № 4, 81-93.

Alexeev A.A. *The intersection of bifurcations of Taylor instability and azimuthal waves (non-resonant case) in the Couette-Taylor problem.* The regimes of flow near point of intersection are studied. Amplitude equations are constructed, their solutions in the invariant subspaces, which correspond to stationary and periodic flows, are found. The conditions of their existence and stability are given.

ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНОК ИЗ ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Альтенбах Х. *, Еремеев В. А. **

* Университет Мартина Лютера, Халле-Виттенберг

** Южный федеральный университет и Южный научный центр РАН,
Ростов-на-Дону

Представлены результаты анализа изгиба пластины, изготовленной из функционально-градиентного материала (металлической пены), основанного на прямом подходе к формулировке теории пластин и концепции эффективных модулей.

Металлические пены представляют собой новый класс материалов, обладающих помимо малой плотности целым рядом других уникальных свойств. В настоящее время они достаточно широко используются в авиа- и самолетостроении, а также других областях техники [1, 2]. Это делает весьма актуальной задачу построения инженерных теорий пластин и оболочек, изготовленных из таких материалов, учитывающих, в частности, неоднородное по толщине строение.

Здесь в рамках прямого подхода к построению двумерной линейной теории пластин и оболочек [3, 4] рассмотрена задача определения эффективных модулей пластин, изготовленных из металлических пен в зависимости от строения пластины как трехмерного тела. Определение эффективных модулей для пластин и оболочек сложной структуры рассматривалось в [5, 6, 7], а для функционально-градиентных пластин в [8].

1. Основные соотношения. Следуя [3, 4], приведем основные уравнения линейной теории оболочек.

- Уравнения движения

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho \Theta_1 \cdot \ddot{\varphi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{m} = \rho \Theta_1^T \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \rho \Theta_2 \cdot \ddot{\varphi} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{T} и \mathbf{M} – тензоры усилий и моментов, \mathbf{q} и \mathbf{m} – поверхностные силы и моменты, \mathbf{T}_\times – векторный инвариант тензора усилий [9], ∇ – плоский набла-оператор, \mathbf{u}, φ – векторы перемещений и поворотов, Θ_1, Θ_2 – тензоры инерции, ρ – плотность оболочки, $(\dots)^T$ обозначает транспонирование и (\dots) – производную по времени.

- Геометрические соотношения

$$\boldsymbol{\mu} = (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^{\text{sym}}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{c} \cdot \varphi, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \varphi$$

\mathbf{a} – метрический тензор в касательной плоскости к поверхности оболочки, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к оболочке, $\mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ – дискриминантный тензор [4], $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ – тензор деформаций в плоскости, вектор деформаций поперечного сдвига и тензор изгибно-крутильных деформаций, $(\dots)^{\text{sym}}$ обозначает симметричную часть тензора.

- Краевые условия

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{l} \quad (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0) \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \varphi = \varphi^0 \quad \text{на } S \quad (2)$$

Здесь \mathbf{f} и \mathbf{l} внешние силы и моменты, действующие на краю пластины S , \mathbf{u}^0 и φ^0 – заданные функции (перемещения и повороты края оболочки), $\boldsymbol{\nu}$ – единичная нормаль к контуру S ($\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n} = 0$). Соотношения (2) – статические и кинематические краевые условия. Шарнирному опиранию соответствуют краевые условия

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор к S ($\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$).

В случае малых деформаций уравнения состояния пластины даются соотношениями [4, 5, 6].

- Плотность энергии деформации W

$$W(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa})$$

Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – тензоры жесткостей четвертого ранга, $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2$ – третьего, $\boldsymbol{\Gamma}$ – второго. В общем случае число материальных постоянных равно 36.

- Уравнения состояния для усилий в плоскости, поперечных сил и моментов

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

$$\mathbf{M}^T = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2$$

2. Определение эффективных свойств. Ограничимся случаем пластины постоянной толщины h и ортотропного материала, свойства которого могут зависеть от поперечной координаты z . Тогда эффективные тензоры жесткостей даются формулами [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{11} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + A_{12} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + A_{22} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + A_{44} \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4, \\ \mathbf{B} &= B_{13} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 + B_{14} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 + B_{23} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{B}_{24} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 + B_{42} \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{C} &= C_{22} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + C_{33} \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + C_{34} (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_3) + C_{44} \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4, \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_2 \mathbf{a}_2, \quad \boldsymbol{\Gamma}_1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{c} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1,$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные ортогональные векторы.

Компоненты тензоров жесткости даются формулами [5, 6]

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 + 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\rangle, & A_{12} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 - E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\rangle, \\
A_{22} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 - 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\rangle, \\
B_{13} &= -\frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 + 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z \right\rangle, & -B_{23} = B_{14} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 - E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z \right\rangle, \\
B_{24} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 - 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z \right\rangle, \\
C_{33} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 + 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z^2 \right\rangle, & C_{34} &= -\frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 - E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z^2 \right\rangle, \\
C_{44} &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 - 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z^2 \right\rangle, \\
\Gamma_1 &= \frac{1}{2} (\lambda^2 + \eta^2) \frac{A_{44}C_{22} - B_{42}^2}{A_{44}}, & \Gamma_2 &= \frac{1}{2} (\eta^2 - \lambda^2) \frac{A_{44}C_{22} - B_{42}^2}{A_{44}},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}, G_{1n}, G_{2n}$ – упругие модули, $\langle (\dots) \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) dz$ – операция осреднения по толщине, λ^2 и η^2 определяются как наименьшие собственные значения краевых задач

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left(G_{2n} \frac{dZ}{dz} \right) + \lambda^2 G_{12} Z &= 0, & \frac{dZ}{dz} \Big|_{|z|=\frac{h}{2}} &= 0, \\
\frac{d}{dz} \left(G_{1n} \frac{d\tilde{Z}}{dz} \right) + \eta^2 G_{12} \tilde{Z} &= 0, & \frac{d\tilde{Z}}{dz} \Big|_{|z|=\frac{h}{2}} &= 0
\end{aligned}$$

В случае изотропного материала формулы (4), (5) существенно упрощаются [5, 6].

3. Эффективные жесткости функционально градиентной пластинки.

Используемые в инженерной практике металлические пены являются примером функционально неоднородного материала, для которого определяющим является распределение пористости [1, 2]. Обозначим толщину пластины через h , а плотность сплошного материала, из которого изготовлена пена, и минимальную плотность пены через ρ_s и ρ_p соответственно. Симметричное распределение пористости может быть описано степенным законом

$$V(z) = \rho + (1 - \rho) \left| \frac{2z}{h} \right|^n, \tag{6}$$

где $\rho = \frac{\rho_p}{\rho_s}$. Отметим, что для коммерческих пен значение ρ может достигать значения 0.02. Упругие модули пены существенно зависят от пористости [1, 2]:

$$\frac{E_p}{E_s} \sim \rho^m, \quad \frac{G_p}{G_s} \sim \rho^m,$$

где E_p и G_p модули Юнга и сдвига для пены, E_s и G_s – модули Юнга и сдвига для материала, из которого синтезирована пена. Значение m зависит от структуры пены. Для замкнутых ячеек (closed-cell) $m = 1$, для открытых (open-cell) – $m \approx 2$. Для изотропного случая графики A_{11} , A_{44} , C_{33} , C_{22} , Γ_1 приведены на рис. 1. Здесь

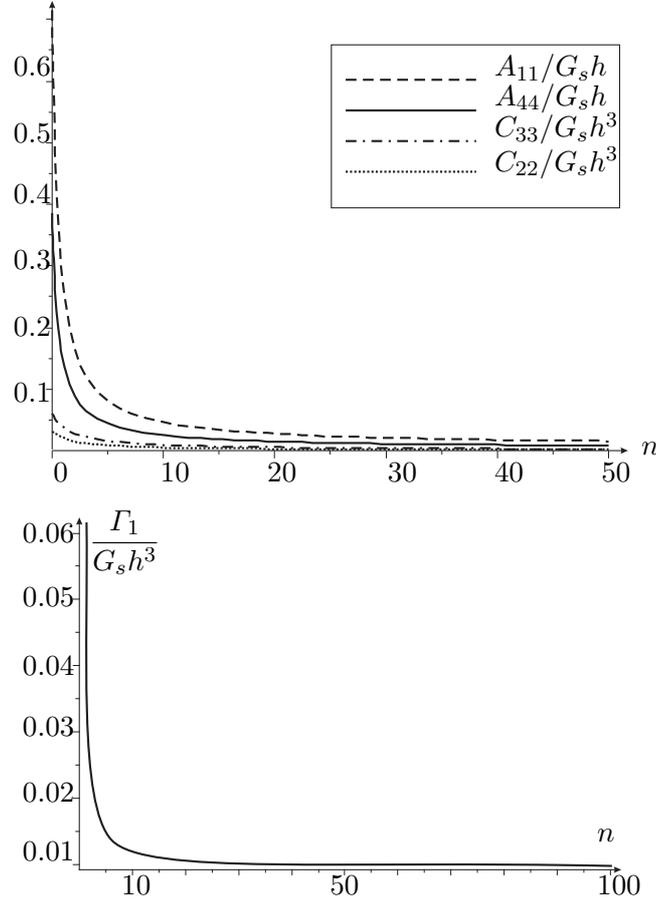


Рис. 1. Эффективные упругие модули в зависимости от n

$m = 2$, $\rho = 0.1$, $\nu = 0.3$.

В [8] также определены эффективные модули для других законов распределения свойств материала по толщине, а также для пластин несимметричного по толщине строения.

4. Изгиб квадратной пластинки. В качестве примера рассмотрим изгиб прямоугольной изотропной пластинки симметричного по толщине строения. Для краткости будем считать, что $m_1 = m_2 = 0$, $x_1 \in [0, a]$, $x_2 \in [0, b]$. При $\nu = \text{const}$ уравнения (1) могут быть приведены к виду [8]

$$D_{\text{eff}} \Delta \Delta w = q_n - \frac{2}{1 - \nu} \frac{1}{\lambda^2 h^2} \Delta q_n, \quad D_{\text{eff}} = C_{33} + C_{44}, \quad w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (7)$$

Введем безразмерные величины формулами

$$\bar{w} = h^{-1} w, \quad \bar{x}_1 = h^{-1} x_1, \quad \bar{x}_2 = h^{-1} x_2, \quad \bar{x}_1 \in \left[0, \frac{a}{h}\right], \quad \bar{x}_2 \in \left[0, \frac{b}{h}\right], \quad \bar{q} = \frac{q_n h^3}{D_{\text{eff}}}$$

Модель	W/W_K	$\Gamma_1/G_s h^3$
Кирхгофа	1	∞
Миндлина [10]	1.01	$\frac{\pi^2}{12} \approx 0.82$
FGM (6)		
$n = 2$	1.12	0.027
$n = 5$	1.15	0.012
$n = 10$	1.05	0.01

Таблица 3. Максимальные прогибы и соответствующая поперечная жесткость на сдвиг Γ_1

Рассмотрим нагрузку вида $\bar{q} = Q \sin \frac{\pi h \bar{x}_1}{a} \sin \frac{\pi h \bar{x}_2}{b}$ ($Q = \text{const}$) и краевые условия шарнирного опирания (3). Тогда решение (7) имеет вид

$$\bar{w} = \frac{K}{\eta^2} Q \sin \frac{\pi h \bar{x}_1}{a} \sin \frac{\pi h \bar{x}_2}{b}, \quad K = 1 + \frac{2\eta}{1 - \nu} \frac{1}{\lambda h^2}, \quad \eta = \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi h}{b} \right)^2$$

Для теории пластин Кирхгофа $K = K_K \equiv 1$, для теории Миндлина [10] $K = K_M \equiv 1 + \frac{2\eta}{1 - \nu} \frac{1}{\pi^2}$. Максимальный прогиб обозначим через $W = \frac{K}{\eta^2} Q$. Тогда для теории пластин Кирхгофа $W_K = \frac{1}{\eta^2} Q$, для теории Миндлина $W_M = \frac{K_M}{\eta^2} Q$, и в общем случае $W_F = \frac{K}{\eta^2} Q$. Некоторые значения безразмерных прогибов и соответствующие им жесткости представлены в Табл. 1 при $\nu = 0.3$, $a = b$, $h = 0.05a$.

Заключение. В рамках прямого подхода к построению теории пластин, основанного на формулировке двумерных уравнений состояния и уравнений движения и концепции эффективных модулей, решена задача об определении жесткостей сильно неоднородной по толщине пластины и ее изгибе. Полученные результаты показывают существенное влияние поперечной сдвиговой жесткости на статические прогибы пластины даже в случае наиболее простых краевых условий (шарнирного опирания) и достаточно гладкой нагрузки. Большого влияния следует ожидать для других краевых условий, а также в задачах динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке DFG (436RUS17/21/07), Фонда содействия отечественной науке и РФФИ (07-01-00525, 07-08-13589-офи_ц).

Список литературы

- [1] *Ashby M. F., Evans A. G., Fleck N. A., Gibson L. J., Hutchinson J. W., Wadley H. N. G.* Metal foams: a design guide. Boston: Butterworth-Heinemann, 2000. 251 p.
- [2] *Gibson L. J., Ashby M. F.* Cellular solids: structure and properties, 2nd edn. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 510 p.
- [3] *Альтенбах Х., Жилин П. А.* Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики (Advances in Mechanics). 1988. Vol. 11. № 4. Pp. 107–148.
- [4] *Жилин П. А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
- [5] *Altenbach H.* An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates // Int. J. Solids Struct. 2000. Vol. 37. № 25. Pp. 3503–3520.
- [6] *Altenbach H.* On the determination of transverse shear stiffnesses of orthotropic plates // ZAMP. 2000. Vol. 51. Pp. 629–649.
- [7] *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of composite structural elements. Berlin: Springer, 2004. 468 p.
- [8] *Altenbach H., Eremeyev V. A.* Direct approach based analysis of plates composed of functionally graded materials // Archive of Applied Mechanics. (submitted).
- [9] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [10] *Mindlin R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Trans. ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. Pp. 31–38.

Altenbach H., Eremeyev V. A. *On the bending of plates made of functionally graded materials.* The paper presents the extension of the direct approach and the use of the concept of effective stiffness to plates made from functionally graded materials (FGM) – metallic foams.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ О РАЗВИТИИ ПРОЦЕССА ЗАПРОЕКТНОЙ АВАРИИ ВНУТРИ СИЛОВОГО КОРПУСА РЕАКТОРА НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

Баженов В. Г., Кибец А. И.

НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

На основе МКЭ в трехмерной постановке рассматривается гидроупругопластический процесс нестационарного деформирования конструкции реактора типа БН с жидким теплоносителем в условиях постулируемой запроектной аварии с выделением энергии в активной зоне. Исследуется влияние внутрибакового оборудования на напряженно-деформированное состояние и гидродинамическое нагружение корпуса реактора. Анализируется возможность локализации гипотетической аварии.

В соответствии с нормативными документами [1] неотъемлемой частью обоснования безопасности любой атомной станции (АС) является анализ запроектных аварий (ЗА). В частности, конструкции интегральных реакторов на быстрых нейтронах типа БН должны обеспечивать герметичность корпуса при обесточивании АС с потерей источников энергоснабжения, включая резервные, с одновременным несрабатыванием всех средств воздействия на реактивность [2]. В активной зоне в этом случае образуется пузырь паров натрия — зона энерговыделения (ЗЭ) — с повышенным уровнем давления, от которой во внутреннюю полость реактора начинают распространяться волны сжатия, способные вызвать большие смещения теплоносителя, упругопластические деформации или разрушения в конструктивных элементах реактора. В этих условиях важнейшим аспектом обеспечения безопасности становится анализ динамической прочности корпуса реактора и внутриреакторного оборудования при их взаимодействии с теплоносителем.

Расчетная схема реактора типа БН представлена на рис. 1, где цифрами обозначены: 1 — корпус реактора; 2 — большая поворотная пробка; 3 — центральная колонна; 4 — зона энерговыделения (ЗЭ); 5 — отражатель нейтронов; 6 — опорный пояс; 7 — промежуточный теплообменник (ПТО); 8 — главный циркуляционный насос (ГЦН); 9 — элеватор. Элементы конструкции реактора выполнены из стали 08Х18Н9, физико-механические свойства которой приведены в [2]. Предполагалось, что моменту $t = 0$ соответствует завершение фазы разгона реактора и образование во внутренней полости аппарата сферической зоны энерговыделения. Источник энерговыделения располагался в центре активной зоны. Зависимость от времени давления P на границе ЗЭ с учётом теплообмена с холодными металлоконструкциями корпуса представлена на рис. 2, где $P_0 = 3\text{МПа}$.

Система уравнений, определяющих динамическое деформирование конструкции, записывается в переменных Лагранжа. Вариационное уравнение движения формулируется, исходя из принципа возможных перемещений в форме Журдена и дополняется соответствующими начальными и кинематическими граничными

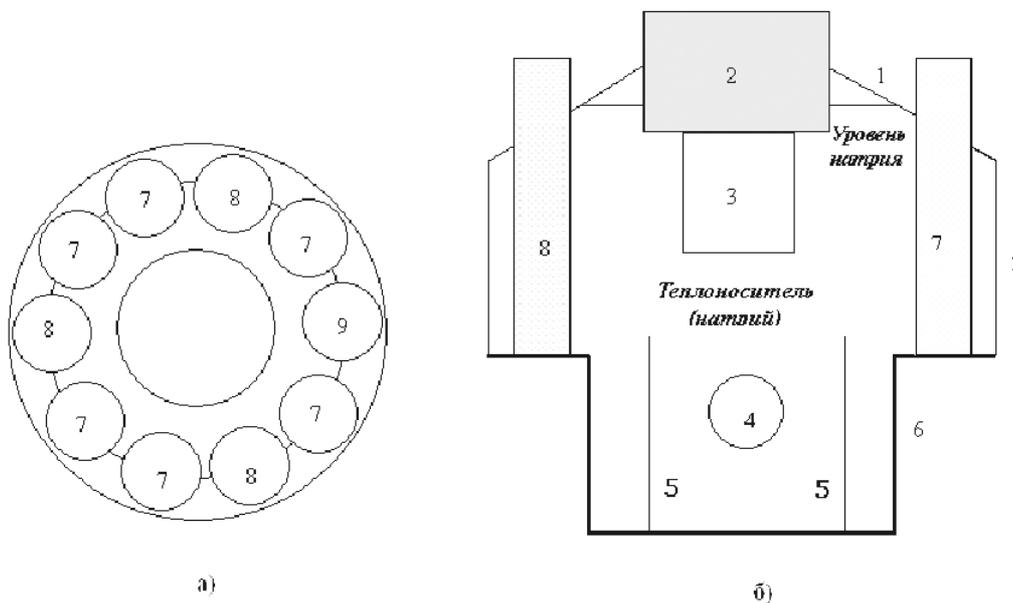


Рис. 1.

условиями. Связь тензора скоростей деформаций со скоростями перемещений линейна, но строится в метрике текущего состояния. В качестве физических соотношений для металлов применяются уравнения теории пластического течения [3]. Теплоноситель моделируется как жидкая среда, в которой девиаторные компоненты напряжений полагаются равными нулю, а связь между гидростатическим давлением и плотностью берется в виде уравнения состояния квазиакустического типа [2]. Контакт между теплоносителем и конструктивными элементами реактора моделировался условиями непроникания. Решение трехмерной нелинейной задачи динамики основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа “крест” [3], реализованных в рамках вычислительной системы “Динамика-3” [4]. Деформируемая конструкция заменяется сеткой из 8-узловых конечных элементов (КЭ). В узлах сетки определяются перемещения, скорости и ускорения в общей системе координат, используемой для стыковки КЭ. В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис, ориентация которого в пространстве корректируется с учетом вращения КЭ как жесткого целого. Для предотвращения развития мод нулевой энергии скорости деформаций и напряжений аппроксимируются внутри конечных элементов в виде суммы безмоментных и моментных составляющих. При расчете разрывных решений применяется процедура сглаживания [5]. С учетом циклической симметрии рассматриваемой конструкции (рис. 1) и условий нагружения в качестве расчетной области выбрана 1/20 часть реактора. Общее количество узлов дискретной модели расчетной области составило 13325. Из них 1212 узлов приходилось на корпус реактора и обечайку защиты. Применение относительно грубой дискретизации конструкции стало возможным благодаря принятой в [3] аппроксимации напряжений, которая является по существу численной реализацией шестимодального варианта теории

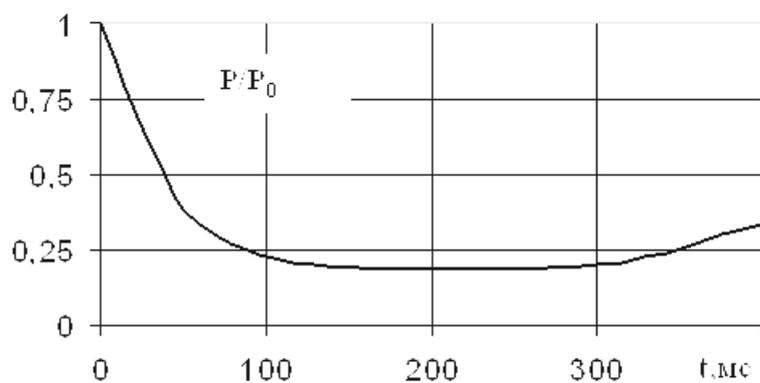


Рис. 2.

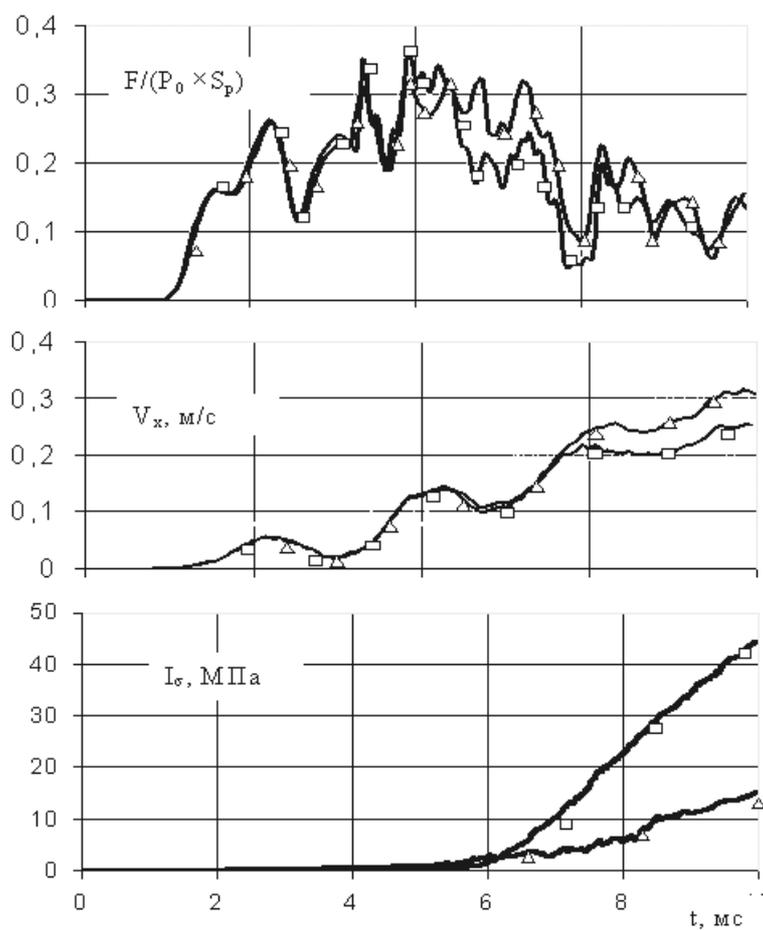


Рис. 3.

типа Тимошенко и позволяет моделировать динамику тонкостенных оболочек на сетках с одним элементом по толщине

Результаты решения представлены на рис. 3 в виде графиков временной зави-

симости: а) контактной силы \tilde{F} , действующей на днище центральной колонны и поворотной пробки; б) скорости вертикального смещения V поворотной пробки; в) интенсивности напряжений, вычисленных в среднем по вертикали поперечном сечении цилиндрической обечайки корпуса. Квадратиками и треугольниками на этих рисунках выделены результаты решения осесимметричной и трехмерной задач (без учета и с учетом внутрибакового оборудования). Анализ процесса деформирования позволяет сделать следующие выводы.

1. На рассмотренном интервале времени ГЦН и ПТО существенно снижают гидродинамическую нагрузку на корпус реактора и интенсивность напряжений в корпусе. Так максимальное значение интенсивности напряжений, достигаемое в среднем по вертикали поперечном сечении цилиндрической обечайки, по сравнению с предыдущим вариантом задачи уменьшилось в 3 раза.
2. Влияние ГЦН/ПТО на гидродинамическую нагрузку на днище центральной колонны незначительно. Максимальное значение интегральной гидродинамической нагрузки $F(t) = F_k + F_p$, действующей на днище центральной колонны (F_k) и поворотной пробки (F_p) меняется мало. Очевидно, это связано с тем, что возрастание нагрузки на днище поворотной пробки, вызванное волнами, отраженными от ГЦН/ПТО, происходит в промежутки времени, когда нагрузка, действующая на днище центральной колонны со стороны зоны энерговыделения, уже убывает.
3. Изменение гидродинамической нагрузки увеличивает скорость вертикального смещения поворотной пробки примерно на 16%. Под влиянием волн разряжения цилиндрическая обечайка силового корпуса смещается в радиальном направлении к центральной оси реактора.
4. По завершению нестационарной стадии развития запроектной аварии ($8 \text{ мс} \leq t \leq 10 \text{ мс}$) влияние внутрибакового оборудования на гидродинамическую нагрузку на днище центральной колонны и поворотной пробки незначительно. Поэтому исследование более длительной квазистатической стадии развития запроектной аварии на основе трехмерной вычислительной модели нецелесообразно.
5. Максимальный уровень напряжений в корпусе реактора при реализации ЗА не превышает допустимых для аварийной ситуации значений [6].

Таким образом проведенный анализ продемонстрировал потенциальную возможность локализации внутри силового корпуса реактора последствий запроектной аварии, развивающейся по энергетическому сценарию, предотвращения опасного радиационного воздействия на персонал АС и окружающую среду, что подтверждает высокий уровень безопасности реакторной установки.

Работа выполнена при частичном финансировании по грантам РФФИ (проект 05-08-33618-а, 07-08-13637-офи_ц) и гранту Президента РФ для господдержки научных исследований, проводимых ведущими научными школами РФ ИШ 6391.2006.8 (госконтракт 02.516.11.6053).

Список литературы

- [1] Общие положения обеспечения безопасности атомных станций ОПБ-88/97, НП-001-97 (ПНАЭ Г-01-011-97) // – М.: Энергоатомиздат. 1998.
- [2] Баженов В.Г., Жуков В.В., Замятин В.А., Кочетков А.В., Крылов С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния корпусов реакторов типа БН в условиях гипотетической аварии //Машиноведение. М.: Наука, 1985. № 3. С. 62–68.
- [3] Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций //Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20–26.
- [4] Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.МЕ.20.Н00338.
- [5] Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В. Численное исследование нестационарной дифракции упругой волны на цилиндрической оболочке // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций: Всесоюз. межвуз. сб. Нижегород.ун-т.1991. С. 71–78.
- [6] Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. (ПНАЭ Г-7-002-86). М.: Энергоатомиздат, 1989.

Bazhenov V.G., Kibec A.I. *Numerically modeling 3-dimension hydroelasticplasticity problem of developing the process of a non-design basis accident inside the power vessel of a fast breeder reactor (FBR).* Based on a 3-D FE-formulation, the hydro-elastoplastic process of nonstationary deformation of structural elements of the FBR with a liquid coolant in the event of a postulated non-design basis core heat-up accident is examined. The effect of the internal equipment of the vessel on the stressed-strained state of the reactor pressure vessel is studied. The possibility of localizing the hypothetical accident is analyzed.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО–ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АВИАКОНТЕЙНЕРА ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ РАДИОАКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ О ПРЕГРАДУ

Баженов В. Г.* , Кибец А. И.* , Романов В. И. , Рябов А. А.****

* *НИИ механики ННГУ им.Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*

** *РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров*

Представлены результаты численного моделирования и экспериментального исследования динамического деформирования упаковочного комплекта для авиационной транспортировки ядерного топлива АЭС при осевом соударении с жесткой преградой со скоростью 90 м/с. Проведено сопоставление данных вычислительных и натуральных экспериментов по уровням перегрузок и остаточных формоизменений конструкции, возникающих в результате удара.

Проектируемые транспортные упаковочные комплекты (ТУК), предназначенные для перевозки радиоактивных материалов воздушным транспортом, согласно требованиям безопасности должны выдерживать соударение с жесткой преградой со скоростью не менее 90 м/с. Как показывает практика для уменьшения материальных затрат экспериментальную проверку ударопрочности таких конструкций целесообразно проводить после всестороннего расчетного исследования. Решение этой задачи возможно только на основе компьютерного моделирования процессов высокоскоростного деформирования. Ниже приводятся результаты численных исследований деформирования находящегося в эксплуатации транспортного упаковочного комплекта при осевом ударе о жесткую плиту, полученные на основе вычислительной системы “Динамика-3” [1]–[3].

Конструктивная схема транспортного упаковочного комплекта приведена на рис. 1. Комплект состоит из четырех секций – стальных корпусных труб ($h =$

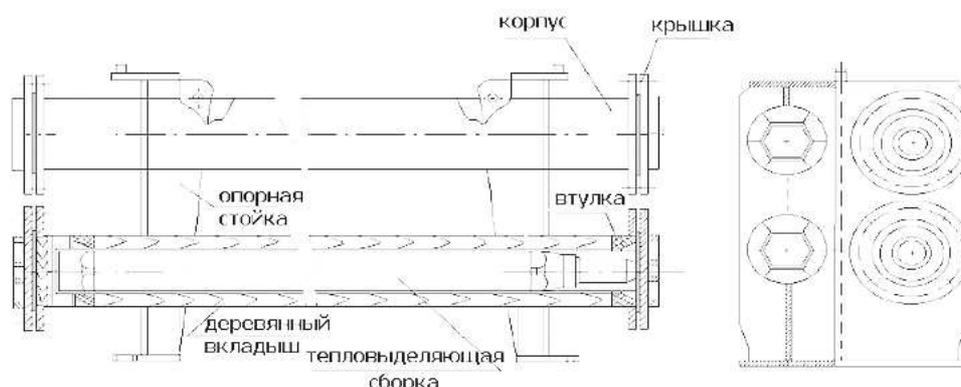


Рис. 1.

0.85 см, $R/h = 12.4$, $L/R = 30.83$, сталь Ст10), закрытых торцевыми крышками с кольцевыми соосными демпферами. Трубы соединены между собой посредством опорных стоек и центрального дистанционирующего ребра, изготовленных из стальной пластины (Ст3) шириной 1 см. Внутри каждой трубы в деревянных вкладышах упакована тепловыделяющая сборка (ТВС) – тонкостенный шестигранный циркониевый чехол с пучком тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ), в которых находится ядерное топливо. Соединение крышек с корпусом – фланцевое и обеспечивается восемью шпильками по каждой крышке.

Для проведения численных исследований разработана компьютерная модель. С учетом симметричности ТУК и условий нагружения в расчетах рассматривается половина конструкции. ТВС заменяется габаритно-весовой моделью, геометрические и физико-механические параметры которой выбраны на основе расчетно-экспериментального анализа поведения ТВС при различных видах статического нагружения. Динамика конструкции описывается в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред. Уравнение движения выводится из вариационного принципа Журдена. Скорости деформаций определяются в метрике текущего состояния. Уравнения состояния устанавливаются отдельно для шаровых и девиаторных составляющих скоростей деформаций и напряжений. Зависимость шаровых компонент скоростей деформаций и напряжений предполагается баротропной. Девиаторные составляющие тензора напряжений вычисляются с помощью соотношений теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [1]. На контактной поверхности формулируются условия непроникания или жесткой склейки. Решение определяющей системы уравнений при заданных начальных и граничных условиях основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа “крест” [1]. Для анализа нестационарного деформирования массивных тел и оболочек применяется 8-узловой изопараметрический элемент с полилинейными функциями формы. Численная схема для определения контактного давления и статически эквивалентных ему узловых сил приведена в [2]. Расчетная область разбивается конечно-элементной сеткой, которая содержит 45000 узлов и имеет сгущение в концевой зоне корпуса, вступающей в контакт с преградой (рис. 2). Результаты численного решения задачи приведены на рис. 3 и в таблице 1. На рис. 3 изображена остаточная форма фрагмента конструкции, примыкающего к зоне соударения с плитой. В табл. 1 представлено сравнение расчетных и экспериментальных [4] данных.

Процесс соударения ТУК с плитой при данных начальных и граничных условиях длится 5 мс. Корпусные секции, рассматриваемых ТУК относятся к классу оболочек средней толщины. При высоком уровне ударного нагружения для них характерна многостадийная потеря устойчивости в упругопластической области с образованием складок вблизи торцов. В этом случае после замыкания первой складки, образуется вторая, затем третья и т.д. В зоне складок имеет место сложное нагружение, которое наиболее существенно проявляется в наружных волокнах оболочки [5], [6]. Непосредственно после момента соударения, вдоль оболочки распространяется волна сжатия. Вслед за ее фронтом возникают кольцевые сжимающие напряжения, вызывающие поперечные колебания секционных стенок. Волновое взаимодействие на этой стадии оказывает существенное влияние на

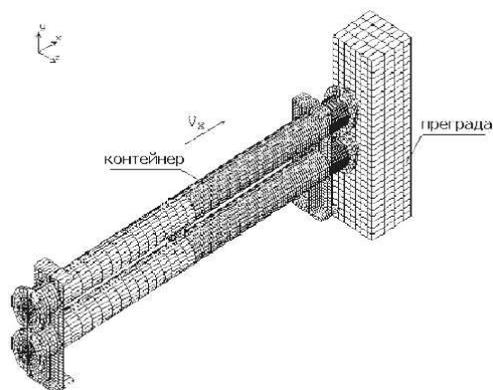


Рис. 2.

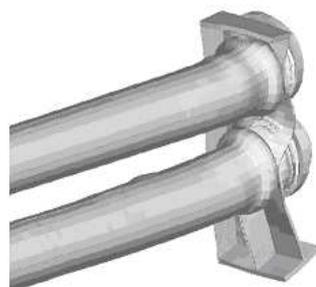


Рис. 3.

Параметр	Расчет	Эксперимент
Количество складок	3	4
Высота складок, мм	32-51	до 50
Изменение длины труб, мм	267-275	245
Смятие демпферных колец, мм	5-6	Незначительное
Уровень перегрузок:		
В ударной зоне		
нижняя секция	9200	8300 (≥ 7500)
верхняя секция	8250	
В среднем сечении		
нижняя секция	4700	4000-6000
верхняя секция	4200	4700-5500
В зоне, противоположной удару		
нижняя секция	4600	4200-6300
верхняя секция	4300	4700-7000

Таблица 1.

форму изгиба срединной поверхности секций. После того, как напряженное состояние вдоль длины оболочек выравнивается, формы изгиба получают дальнейшее

развитие. Возникновение изгибных пластических деформаций в зоне выпучины приводит к уменьшению продольной жесткости секций, в результате чего образуется складка вблизи торца. В процессе образования складки, рост прогибов на остальной части секции замораживается. Развитие выпучины заканчивается замыканием ее внутренней поверхности, после чего начинается образование новой. В процессе деформирования цилиндрических оболочек в процессе продольного соударения возможна трансформация осесимметричной формы потери устойчивости в неосесимметричную. В рассматриваемой задаче ТВС и деревянные вкладыши препятствуют развитию неосесимметричных форм потери устойчивости. Взаимодействие секций с опорными стойками приводит к изгибанию их осей в зоне соударения. Однако при этом не происходит потери устойчивости, характерной для упругопластического деформирования длинных стержней, при которой имеет место значительное локальное формоизменение оси в зоне соударения. Т.о. при заданном уровне нагружения, вблизи опорных стоек происходит упругопластическое выпучивание секций, результатом которого является образование нескольких кольцевых складок. Величина продольного укорочения корпусных труб после соударения составляет 267 – 275 мм, что с точностью до 12% соответствует экспериментальным данным [4].

Опорные стойки изгибаются в направлении удара, а в центральной зоне передней стойки образуется гофр. Демпфер деформируется незначительно (5–6 мм). Уровень перегрузок в контейнере существенно меняется по мере удаления от области взаимодействия с плитой. В ударной зоне между фланцем и передней опорной стойкой до момента образования первой складки перегрузки составляют 8000 – 9000 ед. В средней и концевой частях корпуса уровни перегрузок близки и составляют 4000 – 6000 ед. Максимальные уровни перегрузок ТВС существенно выше и достигают 20000 ед. Анализ скоростей деформаций показывает, что их максимальные значения составляют 1700 с^{-1} и реализуются в ударной зоне демпфера. В трубе пиковые скорости деформаций достигают 700 с^{-1} . Распределение деформаций корпуса в результате удара существенно неравномерно. Уровень пластических деформаций демпферов составляет 10 – 11%. В локальных зонах вершин 1-й и 2-й складок пластические деформации достигают 42%, что говорит о возможности появления разрывов в корпусе (величина предельного относительного удлинения образцов материала корпуса при растяжении – 30%). В остальных зонах складок уровень интенсивности пластических деформаций находится в интервале 21–30%.

Оценка прочности элементов крепления крышек, показала, что в рассмотренном варианте конструкции крепеж может быть разрушен.

Работа выполнена при частичном финансировании по грантам РФФИ (проект 05-08-33618-а, 07-08-13637-офи_ц) и гранту Президента РФ для господдержки научных исследований, проводимых ведущими научными школами РФ НШ 6391.2006.8 (госконтракт 02.516.11.6053).

Список литературы

- [1] Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестациона-

нарного деформирования упругопластических конструкций методом конечного элемента // Изв. РАН МТТ. 1994. № 1. С. 52–59.

- [2] Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 20–26.
- [3] Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.МЕ.20.Н00338.
- [4] Барканов Б.П., Барченков А.И., Матвеев В.З. и др. Испытания ТУК на соударение с жесткой преградой со скоростью 90 м/с. // Доклад на 5-й Международной конференции “ТУК и безопасность транспортирования радиоактивных веществ”. Санкт-Петербург. 1999.
- [5] Баженов В.Г., Ломунов В.К. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек при осевом ударе // Прикл. Механика. 1983. Т. 19, № 6. С. 23–29.
- [6] Баженов В.Г., Ломунов В.К. Устойчивость и закритическое состояние оболочек вращения при осевом ударе // Прикл. Механика. 1986. Т.2 2, № 9. С. 28–33.

Bazhenov V.G., Kibec A.I., Romanov V.I., Ryabov A.A. *Experimentally-theoretical studying deformation of a container used for an air transportation of radioactive materials resulting from a longitudinal impact against an obstacle.* Results of numerically modeling and experimentally studying dynamic deformation of a packing unit used for air-transportation of nuclear fuel for APP's axially impacting on a rigid obstacle at the velocity of 90 m/s are presented. The computational and experimental results are compared for the levels of loads and residual deformations of the structure resulting from the impact.

О ФОРМАХ ТЕЛ, ВНЕДРЯЮЩИХСЯ НА МАКСИМАЛЬНУЮ ГЛУБИНУ В ТВЕРДУЮ ДЕФОРМИРУЕМУЮ СРЕДУ

Баничук Н. В.*, Иванова С. Ю.*, Рагнедда Ф.**

* *Институт проблем механики РАН, Москва*

** *Университет, Кальяри*

В данной работе изучается проблема отыскания оптимальной формы осесимметричного ударника, внедряющегося на максимальную глубину. При этом рассматривается двухстадийная модель проникновения ударника в деформируемую среду, состоящая из начального переменного (по силе сопротивления погружению) участка и последующего интервала инерционного торможения. Для определения силы сопротивления среды движению в ней ударника исследуется трехчленная модель взаимодействия, предложенная в работах Форрестала и др. [1, 2] для упруго-пластической и растрескавшейся упруго-пластической сред и эффективно использовавшаяся в [3, 4]. Применение в настоящей работе данной модели и последующее проведение оптимизационных расчетов приводит к оптимальному проекту осесимметричного ударника, имеющего затупленную форму.

Рассмотрим нормальное внедрение жесткого ударника в бетонное полубесконечное покрытие (полубесконечную среду) с начальной скоростью W . Предположим, что ударник имеет форму тела вращения, описываемую функцией $y = y(x)$, $0 \leq x \leq L$ в декартовых координатах xOy . Здесь L — длина ударника.

На первой стадии внедрения сила сопротивления D является линейной функцией текущей глубины внедрения h . Имеем $D = \varkappa h$, $0 \leq h \leq 4R$, где \varkappa — постоянная величина, не зависящая от h , и R — заданный радиус тела при $x = L$ ($y(L) = R$). На второй стадии внедрения ($h \geq 4R$) сила сопротивления вычисляется в соответствии с моделью расширения сферической полости, предложенной в [1, 2]. Давление на поверхность внедряющегося тела определяется формулой $\sigma = \sigma(v_n) = Y_{sh}[A_0 + A_1(kv_n) + A_2(kv_n)^2]$, где $k = \sqrt{\gamma_{sh}/Y_{sh}}$, Y_{sh} — прочность при одноосном сжатии, γ_{sh} — плотность материала среды, v_n — проекция скорости ударника на нормаль \bar{n} к его поверхности, A_i ($i = 0, 1, 2$) — заданные коэффициенты модели. Сила сопротивления D при $h \geq 4R$ будет равна $D = D^{nose} + D^{lat} + D^{fr}$. Воздействие D^{nose} на плоский носик ($x = 0$) внедряющегося тела, имеющий радиус r ($r > 0$ — искомая величина), проекция силы давления на боковую поверхность ударника D^{lat} в направлении оси x , и проекция D^{fr} силы трения на ось x оцениваются по формулам

$$D^{nose} = \pi Y_{sh}[A_0 + A_1 kv + A_2 k^2 v^2], \quad D^{lat} = 2\pi Y_{sh} \int_0^L y y_x [A_0 + \frac{A_1 k v y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} + \frac{A_2 k^2 v^2 y_x^2}{1 + y_x^2}] dx, \quad D^{fr} = 2\pi \mu Y_{sh} \int_0^L y [A_0 + \frac{A_1 k v y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} + \frac{A_2 k^2 v^2 y_x^2}{1 + y_x^2}] dx \quad (1)$$

Суммарная сила сопротивления дается выражением

$$D = \pi Y_{sh} r^2 (A_0 + A_1 kv + A_2 k^2 v^2) + 2\pi Y_{sh} \int_0^L y (y_x + \mu) (A_0 + \frac{A_1 k v y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} + \frac{A_2 k^2 v^2 y_x^2}{1 + y_x^2}) dx \quad (2)$$

Исключая из (2) с помощью геометрических соотношений неизвестную величину r^2 и выполняя элементарные преобразования, будем иметь

$$\frac{D}{\pi Y_{sh}} = R^2(a_0 + a_1 V + a_2 V^2), \quad V = kv \quad (3)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов a_0 , a_1 , a_2

$$a_0 = A_0(1 + \frac{2}{R^2} J_0), \quad J_0 = \mu \int_0^L y dx, \quad J_1 = \int_0^L yy_x [1 - \frac{(y_x + \mu)}{\sqrt{1 + y_x^2}}] dx \quad (4)$$

$$a_1 = A_1(1 - \frac{2}{R^2} J_1), \quad a_2 = A_2(1 - \frac{2}{R^2} J_2), \quad J_2 = \int_0^L yy_x [1 - \frac{(y_x + \mu)y_x}{1 + y_x^2}] dx \quad (5)$$

Заметим, что в дальнейших рассмотрениях трение не учитывается ($\mu = 0$). При этом функционал J_0 обращается в ноль. Полная глубина проникновения ударника в деформируемую среду складывается из начального участка, длина которого равна $4R$, и основного пути, длина которого определяется с помощью закона Ньютона ($mdV^2/dh = -2k^2D$ при $4R \leq h \leq H$). Интегрирование данного уравнения движения ударника массы m с учетом двух стадий движения приводит к следующему выражению для величины заглубления ударника

$$J = \frac{H}{4R} = 1 + \omega \int_0^{V_*} \frac{V dV}{a_0 + a_1 V + a_2 V^2}, \quad \omega = \frac{m}{4\pi\gamma_{sh}R^3} \quad (6)$$

Здесь J — глубина внедрения, а значение скорости $V = V_*$ соответствует $h = 4R$. Нахождение величины V_* приводит к ограничению на величину скорости W в начальный момент соударения твердого тела с деформируемой средой $W > \sqrt{a_0/\omega}$, означающее, что для реализации второй стадии внедрения ударника ($h \geq 4R$) начальная скорость W должна быть достаточно большой.

В рамках принятой модели рассматривается следующая задача оптимизации формы внедряющегося тела. Требуется найти форму $y = y(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq L$), такую что функционал J (глубина проникновения ударника) достигает максимума

$$J = J(y) = F(J_1(y), J_2(y)) \longrightarrow \max_y \quad (7)$$

при выполнении геометрических ограничений на форму и объем внедряемого тела, записываемых в безразмерном виде

$$y(1) = \tau, \quad J_3 = \int_0^1 y^2 dx = \beta \quad (8)$$

где $\tau = R/L$, $\beta = m/\pi\gamma_{im}L^3$, γ_{im} — плотность материала ударника, $F = F(J_1, J_2)$ — заданная функция интегральных функционалов. Все дальнейшие выкладки проводятся в безразмерных переменных (x/L , y/L). Для искомой функции $y(x)$, удовлетворяющей условию $y(1) = \tau$, составляется расширенный функционал J^a и формулируется следующая задача оптимизации расширенного функционала

$$J^a = J - \lambda |J_3 - \beta| \longrightarrow \max_y, \quad \lambda \geq 0 \quad (9)$$

Здесь λ — неизвестный штрафной коэффициент, подбираемый в процессе максимизации функционала J^a . Максимизация функционала (9) осуществлялась численно с применением генетического алгоритма [5, 6]. В отличие от метода локальных вариаций, примененного в [3, 4], численный метод генетического алгоритма позволяет найти глобальный, а не локальный экстремум. Это особенно важно при решении оптимизационных задач с неаддитивными функционалами, к которым относятся функционалы (7) и (9).

Заметим, что в расчетах полагалось также, что искомая функция $y(x)$ удовлетворяет дополнительному ограничению $y(x) \geq \tau x$, ($0 \leq x \leq 1$), которое согласуется с выбранной моделью [1, 2].

Успешное применение генетического алгоритма при решении задачи (9) существенно зависит от эффективности вычислений, выполняемых для оценки величины J^a . С этой целью при подсчете J^a выполнялись следующие алгоритмические шаги:

1. Выбирается функция $y(x)$, удовлетворяющая граничному условию $y(1) = \tau = R/L$ и ограничению $y(x) \geq \tau x$, ($0 \leq x \leq 1$).

2. Вычисляются функционалы J_1 , J_2 , J_3 , фигурирующие в постановке оптимизационной задачи:

$$J_1(y) = \int_0^1 y(x)y_x(x)\left(1 - \frac{y_x}{\sqrt{y_x^2(x) + 1}}\right)dx, \quad (10)$$

$$J_2(y) = \int_0^1 \frac{y(x)y_x(x)}{y_x^2 + 1}dx, \quad J_3(y) = \int_0^1 y^2(x)dx$$

3. Для $\tau = R/L$ вычисляются значения величин a_0 , a_1 , a_2 :

$$a_0 = A_0, \quad a_1 = A_1\left(1 - \frac{2}{\tau^2}J_1\right), \quad a_2 = A_2\left(1 - \frac{2}{\tau^2}J_2\right) \quad (11)$$

4. Выбираются значения параметров задачи, удовлетворяющие условию $W > \sqrt{a_0/\omega}$, где $\omega = m/4\pi\gamma_{sh}R^3$, и находятся величины:

$$\alpha = \omega W^2 - a_0, \quad V_* = \frac{a_1}{2(a_2 + \omega)}\left[\sqrt{1 + \frac{4\alpha(a_2 + \omega)}{a_1^2}} - 1\right] \quad (12)$$

5. Вычисляется величина функционала J по формуле

$$J(y) = 1 + \frac{\omega}{2a_2}\left[\ln\left(1 + \frac{a_1}{a_0}V_* + \frac{a_2}{a_0}V_*^2\right) - a_1K\right] \quad (13)$$

в которой величина K принимает значения K_1 , K_2 , K_3 в зависимости от знака выражения $D = a_1^2 - 4a_0a_2$:

$$K = K_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln\left[\left(\frac{a_1 + 2V_*a_2 - \sqrt{D}}{a_1 + 2V_*a_2 + \sqrt{D}}\right)\left(\frac{a_1 + \sqrt{D}}{a_1 - \sqrt{D}}\right)\right], \quad (D > 0);$$

$$K = K_2 = \frac{4V_*a_2}{a_1(2V_*a_2 + a_1)}, \quad (D = 0);$$

$$K = K_3 = \frac{2}{\sqrt{-D}}\left[\arctan\left(\frac{2V_*a_2 + a_1}{\sqrt{-D}}\right) - \arctan\left(\frac{a_1}{\sqrt{-D}}\right)\right], \quad (D < 0)$$

С использованием вычисленных значений J , J_3 и фиксированных величин λ , ω по формуле (9) подсчитывается значение функционала J^a .

При проведении расчетов полагалось $A_0 = 4.05$, $A_1 = 1.36$, $A_2 = 3.51$ [1]. Данные значения соответствуют несжимаемой растрескавшейся упруго-пластической среде. Полученные в результате расчетов оптимальные формы ударника показаны на рис. 1 кривыми с номерами 1, 2, 3, 4, 5, отвечающими значениям $\beta = 0.8$; 0.75; 0.6; 0.5; 0.33 ($\tau = 1$, $W = 1000$). Как это видно, для всех значений β

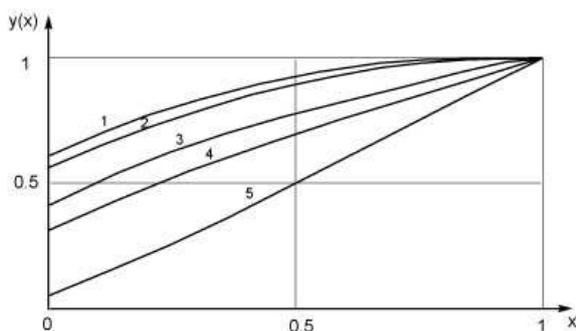


Рис. 1. Оптимальные формы ударника для $\tau = 1$ и различных значений β .

оптимальное тело, внедряющееся на максимальную глубину, имеет затупленный носик. На рис. 2 для тех же значений $\tau = 1$, $W = 1000$ представлена зависимость величины оптимизируемого функционала от параметра β . Наибольшая глубина

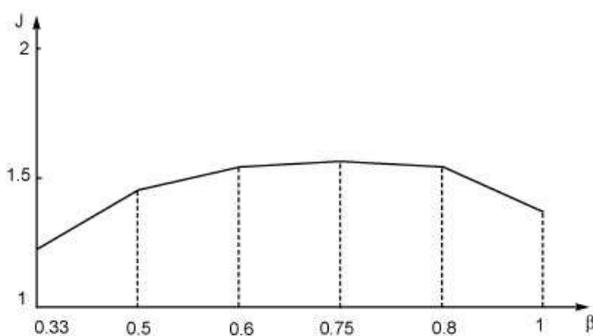


Рис. 2. Зависимость оптимизируемого функционала от параметра β .

внедрения ударника соответствует значению $\beta = 0.75$. На рис. 3 показаны оптимальные формы ударника для различных значений безразмерной скорости соударения W . Сплошной кривой 1 для случая, когда $\tau = 1$, $\beta = 0.75$, показана оптимальная форма ударника, соответствующая значению параметра $W = 1000$. Пунктирная кривая 2 отвечает значению $W = 50$. Расчеты показывают, что с увеличением скорости соударения W сохраняется характерная для оптимального ударника затупленная форма носика.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-18094а), Программы ОЭМПУ № 14 “Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, температурных и радиационных воздействиях” и Программы поддержки ведущих научных школ НШ-1245.2006.1.

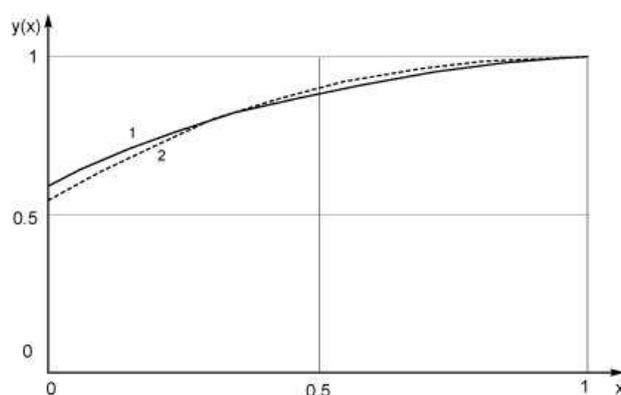


Рис. 3. Оптимальные формы ударника для разных значений скорости W .

Список литературы

- [1] Forrester, M.J., Tzou, D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // International Journal of Solids and Structures. 1997. № 31-32. P. 4127–4146.
- [2] Forrester, M.J., Altman, B.S., Cargile, J.D., Hanchak, S.J. An empirical equation for penetration depth of ogive-nose projectiles into concrete targets // International Journal of Impact Engineering. 1994. № 4. P. 395–405.
- [3] Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. Numerical solution for shape optimization of an impactor penetrating into a semi-infinite target // Computers and Structures. 2003. № 1. P. 9–14.
- [4] Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. Modelling of high-speed penetration into concrete shields and shape optimization of impactors // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2006. № 2. P. 139–156.
- [5] Goldberg D.E. Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning. M.A.: Westley Publ. Comp., inc., 1989. 154 p.
- [6] Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Makeev E.V., Sinitsin A.V. Optimal shape design of axisymmetric shells for crack initiation and propagation under cyclic loading // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2005. № 2. P. 253–269.

Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Ragnedda F. *Shapes of the Bodies for Maximum Depth of Penetration into Solid Media.* The problem of optimization of the depth of penetration of rigid impactor into incompressible elastic-cracked-plastic medium using two-stage model and experimental data of Forrester and Tzou (1997). The shape of the axisymmetric impactor was taken as unknown design variable. To solve the formulated problem of optimization of non-additive functional, expressed the depth of penetration of impactor into elastic-cracked-plastic medium under constraint on the mass (weight) of the impactor, we apply evolutionary approach based on genetic algorithm. As a result of performed computations we found optimal solutions and showed that the optimal impactor has the blunt shape.

СПИРАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Батищев В. А., Хорошунова Е. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассчитаны вращательно-симметричные стационарные возмущения течения Пуазейля в круглой трубе конечной длины. Для спиральных возмущений, затухающих вниз по потоку, найдена зависимость коэффициента затухания от числа Рейнольдса. Показано, что с определенной погрешностью, эти возмущения проникают в трубу на конечное расстояние, линейно растущее с ростом числа Рейнольдса. Решения построены численно для конечных чисел Рейнольдса и асимптотически при их больших значениях. Проведено сравнение с экспериментальными данными.

Рассматривается стационарное вращательно-симметричное течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе кругового сечения радиуса a и конечной длины L , вызванное полем скоростей, заданным на входе в трубу. Движение жидкости изучается на основе системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned}(v, \nabla)v &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta v \\ \operatorname{div} v &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

На стенках цилиндра выполняется условие прилипания для поля скорости. На оси цилиндра скорость ограничена. Известно точное решение системы (1) — течение Пуазейля [1]

$$v_{z0} = U_m \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad v_r = v_\theta = 0, \quad p_0 = c - \frac{4\nu\rho U_m z}{a^2}\tag{2}$$

Здесь (r, θ, z) — цилиндрические координаты, ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, $U_m = a^2\Delta p/(4\nu\rho L)$ — максимальное значение скорости. Δp — перепад давлений между начальным и конечным сечениями цилиндра.

Построим решения системы (1), отличные от (2) в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned}v_z &= v_{z0} + \varepsilon^2 v_{z2} + O(\varepsilon^4), \quad v_\theta = \varepsilon v_{\theta1} + O(\varepsilon^3), \\ v_r &= \varepsilon^2 v_{r2} + O(\varepsilon^4), \quad p = p_0(z) + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^4)\end{aligned}\tag{3}$$

Вращательная симметрия означает, что поле скоростей и давление не зависят от окружной координаты θ . Здесь ε малый параметр, пропорциональный амплитуде возмущений. Отметим, что осевая компонента скорости много больше окружной компоненты v_θ , которая, в свою очередь, много больше радиальной v_r .

В первом приближении в безразмерных переменных окружная компонента скорости находится из линейной краевой задачи

$$\begin{aligned}(1 - r^2)\frac{\partial v_{\theta1}}{\partial z} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta1}}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_{\theta1}}{\partial z^2} - \frac{v_{\theta1}}{r^2} \right) \\ v_{\theta1} &= 0 \quad (r = 1), \quad v_{\theta1} \text{ ограничено при } r \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Ниже будет показано, что $v_{\theta 1} = 0$ на оси цилиндра $r = 0$.

Известно, что при определенных условиях, возмущения течения Пуазейля затухают вниз по потоку при удалении от начального сечения. Такие решения построим в виде

$$v_{\theta 1} = f(r) \exp(\alpha z) \quad (4)$$

Функция $f(r)$ и параметр α зависят от числа Рейнольдса $Re = U_m a / \nu$ и определяются из краевой задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(\alpha^2 - \alpha Re + \alpha Re r^2 - \frac{1}{r^2} \right) f &= 0 \\ f(1) = 0, \quad f(r) \text{ ограничено при } r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем асимптотику функции $f(r)$ вблизи оси цилиндра

$$\begin{aligned} f(r) &= c_* (r + a_1 r^3 + a_2 r^5 + \dots) \\ a_1 &= (\alpha Re - \alpha^2 / 8), \quad a_2 = -\alpha Re / 24 + (\alpha^2 - \alpha Re)^2 / 192 \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянная c_* неизвестна, зависит от параметров задачи и определяется при сращивании с численным решением. Из асимптотической формулы следует, что $f(0) = 0$.

Структура решений определяется при построении асимптотики для малых чисел Рейнольдса

$$\begin{aligned} f(r) &= f_0(r) + Re f_1(r) + \dots, \\ \alpha &= \alpha_0 + \alpha_1 Re + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения коэффициентов этих рядов получаем цепочку краевых задач. В первом приближении находим $f_0 = J_1(r j_{1,k})$, $\alpha_0 = -j_{1,k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Здесь $J_1(r j_{1,k})$ функция Бесселя, а $j_{1,k}$ — нули этой функции. Итак, задача для $f_0(r)$ имеет счетное число собственных функций и собственных значений. Такую же структуру решений имеет и задача (5) при малых числах Рейнольдса. Высшие приближения находятся численно, например, для первой моды $\alpha_1 = -0.32958$.

Для конечных чисел Рейнольдса собственные решения задачи (5) определяются путем численного продолжения асимптотических решений (7). В расчетах применялся метод пристрелки с использованием нормировки $f'(1) = 1$. Численное интегрирование проводилось от твердой стенки к оси цилиндра. Вблизи оси проводилось сращивание с асимптотикой (6) и находилась постоянная c_* , как функция числа Рейнольдса. Например, при сращивании в точке $r = 0.001$ для $Re = 200$ в случае первой моды у численного и асимптотического значений функции $f(r)$ совпали первые пять значащих цифр. Здесь найдены значения $c_* = 2.00141$, $\alpha = -0.10683$. Функция $c_*(Re)$ в (6) принимает конечное значение при $Re = 0$, монотонно возрастает с ростом Re и стремится к конечному пределу при $Re \rightarrow \infty$. Для первой моды этот предел равен 2.00212.

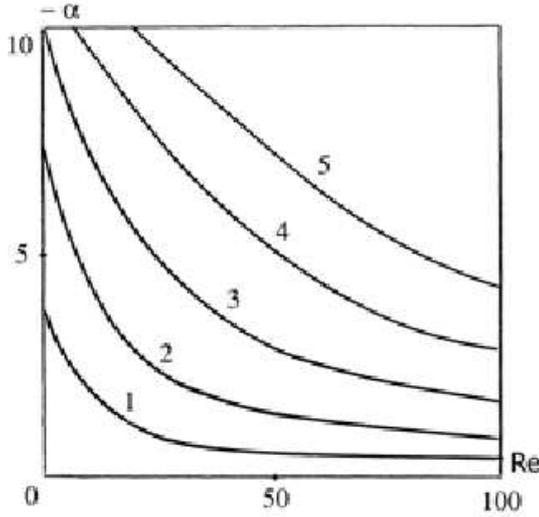


Рис. 1

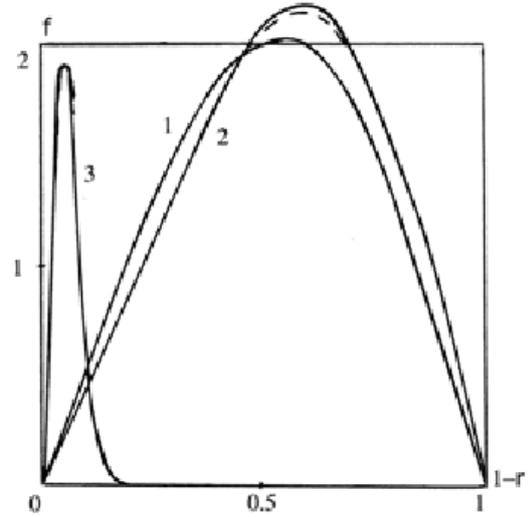


Рис. 2

На рис. 1 приведена зависимость $|\alpha(Re)|$ для первых пяти мод при $Re \in [0, 100]$. Номер кривой соответствует номеру моды. Здесь параметр α отрицателен. При $Re = 0$ собственные числа принимают значения $-j_{1,k}$ по формулам (7). С ростом числа Рейнольдса модули $|\alpha(Re)|$ монотонно убывают и стремятся к нулю при $Re \rightarrow \infty$. Очевидно, что при $\alpha < 0$ возмущения монотонно убывают вниз по потоку.

Расчеты проведены и для положительных значений параметра α . Численно найдены ветви значений $\alpha(Re)$, которые при $Re = 0$ принимают значения равные $J_{1,k} > 0$, ($k = 1, 2, 3 \dots$). Собственные числа монотонно возрастают с ростом числа Рейнольдса. Собственным решениям соответствуют возмущения, задаваемые на выходе из цилиндра, которые быстро затухают вверх против потока.

При больших числах Рейнольдса построены асимптотические разложения решений задачи (5) как при положительных, так и при отрицательных значениях параметра α . Для каждой моды при $\alpha < 0$ асимптотика построена по отрицательным степеням числа Рейнольдса

$$f_n(r) = f_{n0}(r) + \frac{f_{n1}(r)}{Re^2} + \dots, \tag{8}$$

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n0}}{Re} + \frac{\alpha_{n1}}{Re^3} + \dots, \quad (Re \rightarrow \infty)$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер моды. Численное значение для первой моды равно $\alpha_{10} = -21.3823$. Второй член асимптотики дает поправку $\alpha_{11} = 647.649$. На рис. 2 приведены графики нормированных собственных функций $f(r)$ для первой моды. Кривым 1 и 2 соответствуют числа Рейнольдса $Re = 1$ и $Re = 50$. Пунктиром изображен график для предельного значения $Re = \infty$.

Нормированные собственные функции слабо изменяются в зависимости от числа Рейнольдса.

Константа срачивания имеет асимптотическое разложение

$$c_* = c_0 + \frac{c_1}{Re^2} + O\left(\frac{1}{Re^4}\right) \quad (Re \rightarrow \infty)$$

Здесь $c_0 = 2.00212$, $c_1 = -28.464$ для первой моды.

При положительных значениях параметра α и больших числах Рейнольдса вблизи стенок цилиндра возникает тонкий пограничный слой. Асимптотические разложения для n -ой моды строятся по формулам

$$f(r) = f_{n0}(s) + \frac{f_{n1}(s)}{\sqrt{Re}} + \frac{f_{n2}(s)}{Re} + O(Re^{-3/2}),$$

$$\alpha = \alpha_{n0}\sqrt{Re} + \alpha_{n1} + \frac{\alpha_{n2}}{\sqrt{Re}} + O(Re^{-1}), \quad (Re \rightarrow \infty)$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер моды. В пограничном слое введено преобразование растяжения $r = 1 - s/\sqrt{Re}$. Главный член асимптотики выражается через функцию Эйри

$$f_{n0}(s) = Ai\left((2\alpha_{n0})^{1/3}s - \alpha_{n0}^{4/3}4^{-1/3}\right)$$

Собственные значения находятся как корни уравнения $Ai(-\alpha_{n0}^{4/3}4^{-1/3}) = 0$, где $Ai(x)$ — функция Эйри. Второй член асимптотики найден численно. На рис. 2 кривой 3 соответствует график функции $f(r)$ для $Re = 500$. Итак, при $\alpha > 0$ спиральное течение, возникающее вблизи выхода из цилиндра и распространяющееся вверх против потока, сосредоточено только в тонком пограничном слое.

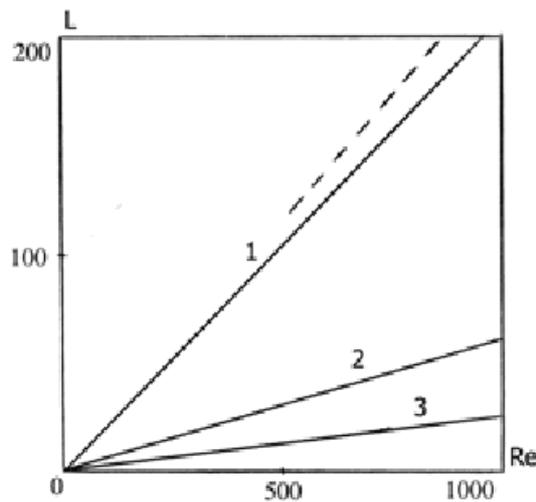


Рис. 3

Найдем безразмерную длину L_1 ($L_1 = L/a$) участка трубы, в сечении которого максимальная скорость возмущений окружной компоненты скорости v_θ составляет 1% от максимальной скорости в начальном сечении (по аналогии с толщиной пограничного слоя). Фактически, это асимптотическое расстояние, на которое проникают в цилиндр спиральные возмущения. На рис. 3 изображен график изменения параметра L_1 в зависимости от числа Рейнольдса. Кривым 1, 2, 3 соответствует номер моды. Пунктирной линией изображена кривая, полученная экспериментально для произвольных возмущений. Для этой кривой в работе [2] приведена формула, которая в принятых здесь обозначениях имеет вид $L_1 = 0.24Re$. Асимптотическая формула (8) приводит к значениям $L_1 = 0.2154Re$. Относительная погрешность экспериментальной и асимптотической формул составляет около 10%.

Итак, спиральные возмущения заполняют небольшую часть трубы, причем длина этого участка почти линейно растет с ростом числа Рейнольдса.

Численно рассчитаны нелинейные поправки к компонентам скорости. Расчеты показали, что спиральные возмущения тормозят жидкость вблизи стенок и ускоряют поток вблизи оси цилиндра. Этот факт хорошо известен при течении нефти в трубопроводе. Вблизи стенок нефтепровода возникает застойная зона, поперечный размер которой составляет приблизительно одну треть от радиуса цилиндра.

Список литературы

- [1] *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: Изд. Иностран. Лит., 1951, 576 с.
- [2] *Павельев А.А., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Федосеев С.Г.* О нижнем критическом числе Рейнольдса для течения в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 47–55.

Batischev V.A., Choroshunova E.V. *The spiral perturbations with small amplitude of Poiseuille flow.* The stationary perturbations of Poiseuille flow in circular pipe is considered. We found the decrement of damping as function of Reynolds number for spiral perturbation. The perturbation penetrate into pipe at the finite distance. We constructed the regimes by asymptotics and numerical methods. The results were comparison with experimental date.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Бауэр С. М., Клец О. Г., Морозов Н. Ф.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Рассматривается задача о потере устойчивости трансверсально-изотропной длинной цилиндрической оболочки, находящейся под действием динамического внешнего давления. Проводится сравнение результатов, полученных по двумерным теориям Кирхгофа-Лява и Тимошенко.

В работах [1, 2] представлен ряд задач статики и свободных колебаний однородных трансверсально-изотропных тонкостенных конструкций, для которых результаты, получающиеся по приближенным моделям, основанным на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява и Тимошенко сравниваются с асимптотическими решениями трехмерных уравнений теории упругости. Показано, что для тонкостенных конструкций теория Кирхгофа-Лява является первым асимптотическим приближением трехмерной теории. Теория Тимошенко, учитывающая сдвиг, для тел из изотропного материала является асимптотически противоречивой и существенно уточняет теорию Кирхгофа-Лява. Однако показано, что для тел из трансверсально-изотропного материала с малой поперечной жесткостью ситуация меняется, теория Тимошенко существенно уточняет теорию Кирхгофа-Лява.

Рассмотрим устойчивость длинной цилиндрической оболочки, сжатой динамической радиальной нагрузкой. На основе теории Кирхгофа-Лява эта задача была исследована в работе [3], в которой был предложен новый подход к решению задач устойчивости конструкций при динамических нагрузках, быстро возрастающих по времени. Предполагалось, что к системе, имеющей начальные несовершенства, внезапно прикладывается нагрузка, превышающая статическую критическую нагрузку, при этом возникает движение, в результате которого система не возвращается в первоначальное положение. Полагалось также, что на начальной фазе этого движения перемещения всех элементов системы пропорциональны одной функции времени. Если эта функция гармоническая, то система совершает нормальные колебания. Если нагрузка достаточно велика, то возникает движение, описываемое экспоненциальной функцией и соответствующее потере устойчивости. Число форм динамической потери устойчивости тем больше, чем больше величина внезапно приложенной нагрузки, так как известно, что нагрузки, при которых наряду с основной формой равновесия возможны близкие искривленные, образуют некоторую возрастающую последовательность. Начальные несовершенства, соответствующие различным формам нормальных движений, предполагались имеющими один порядок малости. В работе [3] показано, что наиболее быстро меняются те формы, которым соответствует наибольший коэффициент в показателе экспонент функции времени, относящейся к соответствующему движению.

В работе [3] уравнение малых движений трубы, полученное по классической модели Кирхгофа-Лява, и учитывающее только зависимость нормального прогиба

w от угла θ и времени t , а также начальное отклонение формы оболочки от круговой — $w_0(\theta)$, имеет вид:

$$\frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \rho h R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) + q \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = f(\theta), \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки, h — толщина оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, $f(\theta) = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w_0}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + q \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right)$.

При выводе уравнения (1) деформация растяжения–сжатия срединной поверхности предполагается отсутствующей.

После подстановки $w(\theta, t) = \sum_{m=2}^{\infty} w_m(t) \sin m\theta$ для функции $w_m(t)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 w_m}{dt^2} + \frac{D}{\rho h R^4} \frac{m^2(m^2-1)(m^2-\eta^2)}{m^2+1} w_m = \frac{f_m}{\rho h R(m^2+1)}, \quad (2)$$

где $f_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta$, $\eta^2 = 3q/q_e + 1$, $q_e = 3D/R^3$ — статическое критическое значение внешнего давления длинной цилиндрической оболочки.

Как отмечалось в [3], целая часть числа η определяет номер наивысшей возможной статической формы потери устойчивости. Решение уравнения (2) ищется в виде $w_m(t) = e^{\alpha t}$. При $m > \eta$ возникают колебания оболочки, при $m < \eta$ происходит потеря устойчивости.

Безразмерный коэффициент α^* в экспоненте ($\alpha^{*2} = \alpha^2 \rho h R^4 / D$), характеризующий быстроту потери устойчивости по динамической форме с номером m , определяется выражением:

$$\alpha^{*2} = \frac{m^2(m^2-1)}{m^2+1} \left(3 \frac{q}{q_e} + 1 - m^2 \right). \quad (3)$$

Уравнение устойчивости по теории Тимошенко

Если при выводе уравнения устойчивости цилиндрической оболочки использовать теорию оболочек Тимошенко [4, 5], учитывающую инерцию вращения нормального элемента и деформации, связанные с поперечными силами $Q_y = k^2 G' h \beta_y$, где β_y — соответствующий угол поворота отрезка нормали ($y = R\theta$), k^2 — коэффициент сдвига, то уравнение устойчивости имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \rho h R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) + q \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\
& - \frac{Dq}{k^2 R^2 G' h} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \left(\frac{\partial w^2}{\partial \theta^2} + w \right) - \frac{D\rho}{k^2 G' R} \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) - \\
& - \frac{\rho h^4}{12R} \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + \frac{\rho h^2 q}{12k^2 G'} \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = f^*(\theta),
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
f^*(\theta) = & \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w_0}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + q \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) - \\
& - \frac{Dq}{k^2 R^2 G' h} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + w_0 \right).
\end{aligned}$$

Здесь G' — модуль поперечного сдвига. Для изотропных оболочек $G' = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. При расчетах полагаем $k^2 = 5/6$, как это было предложено Э. Рейснером [4], и как это принято в уточненных теориях оболочек и пластин [1, 2].

Полагая, как и в работе [3], $w(\theta, t) = \sum_{m=2}^{\infty} w_m(t) \sin m\theta$ для функции $w_m(t)$ получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho h^3}{12k^2} \frac{\rho R}{G'} \frac{d^4 w_m}{dt^4} + \rho R h \frac{d^2 w_m}{dt^2} \left(\left(1 + \frac{Dm^2}{k^2 G' R^2 h} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left(1 - \frac{qR}{k^2 G' h} \right) \frac{m^2(m^2-1)}{m^2+1} \right) - \\
& - w_m \frac{m^2(m^2-1)}{m^2+1} \left(q - \frac{D}{R^3} (m^2-1) + \frac{Dqm^2}{k^2 R^2 G' h} \right) = \frac{f_m}{m^2+1},
\end{aligned} \tag{5}$$

Решение уравнения (5), по-прежнему, ищем в виде $w_m = e^{\alpha t}$. При $\alpha = 0$ можно определить нагрузки, при которых увеличивается число возможных искривленных форм оболочки. В данном случае эти значения ниже значений, получающихся по классической теории:

$$q_{\text{крит}}^T = \frac{D(m^2-1)}{R^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{Dm^2}{k^2 G' R^2 h}} \right), \quad m = 2, 3, 4, \dots \tag{6}$$

Критическое значение статической задачи соответствует номеру $m = 2$.

Чтобы сравнить динамические формы потери устойчивости, получающиеся по теории Кирхгофа-Лява и по теории Тимошенко при одинаковых нагрузках, положим, как и в работе [3], $q = D(\eta^2 - 1)/R^3$, в этом случае нагрузки равны последовательным критическим нагрузкам статической задачи, полученным по классической теории. Сравнивая это соотношение с равенством (6), можно получить номер

наивысшей возможной статической формы, полученной по теории Тимошенко — N . То есть, для целого N должно выполняться неравенство

$$\frac{D(N^2 - 1)}{R^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{DN^2}{k^2 G' R^2 h}} \right) < \frac{D(\eta^2 - 1)}{R^3} \quad \text{или} \quad N^2 \left(1 + \frac{D(1 - \eta^2)}{k^2 G' R^2 h} \right) < \eta^2,$$

последнее равенство выполняется для любого N , если $1 + \frac{D(1 - \eta^2)}{k^2 G' R^2 h} < 0$, то есть, если приложенная нагрузка удовлетворяет равенству $q > 3k^2 G' h / R$. Это обстоятельство, как отмечается в работе [2], говорит о неприемлемости оболочечной модели при малом значении G' (или при очень большой величине нагрузки), так как в этом случае сам материал теряет устойчивость [2].

Для безразмерного коэффициента α^* , характеризующего быстроту потери устойчивости по динамической форме с номером m , в этом случае по уравнению (5) можно получить биквадратное уравнение, из которого, по-прежнему, может быть определен один положительный корень, соответствующий потере устойчивости.

Наибольшее значение коэффициента α^* соответствует номеру $m = m^*$. Ниже представлены некоторые результаты расчетов. В таблице (2) представлены результаты работы [3], полученные по классической теории. Эти результаты от параметров оболочки (отношений h/R , G'/E) не зависят. Расчеты показывают, что значения коэффициента α^* , характеризующего скорость возрастания динамической формы потери устойчивости, несколько больше при использовании теории Тимошенко. При малых нагрузках результаты, полученные по теории Тимошенко, близки к результатам, представленным в [3]. Однако видно, что отношение E/G' при больших нагрузках существенно влияет на форму потери устойчивости.

η	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m^*	2	3	4	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11
q/q_e	2,7	5	8	11,7	16	21	26,7	33	40	47,7	56	65	74,7
α^*	3,4	7,1	11,3	16,8	23,5	30,9	39,1	49	59,5	70,6	83,4	97	111,3

Таблица 2. Лаврентьев — Ишлинский

q/q_e	2,7	5	8	11,7	16	21	26,7	33	40	47,7	56	65	74,7
N	3	4	5	6	7	8	10	11	13	15	17	20	24
m^*	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	12	13	15
α^*	3,5	7,2	11,7	17	24,2	32,5	41,9	53	65	79,5	95,7	114,9	137,7

Таблица 3. Теория Тимошенко ($h/R = 0,05$, $E/G' = 10$)

Видно, что для оболочек с малой поперечной жесткостью теория Тимошенко дает существенные поправки к решениям, полученным по классической теории. Чем больше отношение E/G' , тем раньше наступает потеря устойчивости материала ($N = \infty$).

q/q_e	2,7	5	8	11,7	16	21	26,7	33	40	47,7	56	65
N	3	4	5	6	7	9	12	14	18	25	46	∞
m^*	2	3	4	5	6	7	8	9	11 или 12	15	23	∞
α^*	3,5	7,3	12	17,9	25,2	34,3	45,3	58,5	75,2	97,3	131,2	∞

Таблица 4. Теория Тимошенко ($h/R = 0,05$, $E/G' = 20$)

q/q_e	2,7	5	8	11,7	16	21	26,7
N	3	4	6	8	11	21	∞
m^*	2	3	4	5	7	11	∞
α^*	3,5	7,5	12,9	19,9	30,1	46,1	∞

Таблица 5. Теория Тимошенко ($h/R = 0,05$, $E/G' = 50$)

Таким образом, в задачах динамической устойчивости, как и при решении задач статики и колебаний оболочек [1, 2], учет поперечного сдвига и инерции вращения (теория Тимошенко) может приводить к существенным поправкам по сравнению с классической теорией, особенно для мягких или слоистых оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00452, № 07-01-00250).

Список литературы

- [1] *Tovstik P.E., Tovstik T.M.* On the 2D models of plates and shell including the shear.// ZAMM. 2007г, Vol. 87 № 2. С. 160–171.
- [2] *Товстик П.Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек.// Вестник СПбГУ, 2007, Сер.1, Вып. 3. С. 49–54.
- [3] *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем.// Доклады Академии Наук СССР. 1949. № 6. С. 779–781.
- [4] *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972.
- [5] *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.

Bauer S.M., Klets O.G., Morozov N.F. *On dynamic stability of cylindrical shells.* The dynamic stability of transversal isotropic cylindrical shells under radial pressure is studied on the basis of the Kirchhoff-Love and Timoshenko theories. The case when the material stiffness in the tangential directions is much larger than the stiffness in the transversal direction is considered.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Белов А. А., Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю.
НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

Представлена схема метода граничных элементов для численного решения гранично-временных интегральных уравнений трехмерной изотропной теории упругости. Схема не требует знания фундаментального решения в явном времени и пошаговой сплайн-аппроксимации граничных функций по времени. Приведены примеры.

1. Постановка задачи

Рассматривается кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ , границы однородных частей $\Omega_k (k = 1, \dots, K)$ — через Γ_k . Предполагается, что Ω_k являются изотропными упругими телами. Введем следующие обозначения для параметров материала каждой однородной части (подконструкции) Ω_k : ρ_k — плотность материала, λ_k и μ_k — параметры Ламе материала. Динамическое состояние каждой части тела Ω_k описывается системой дифференциальных уравнений Ламе в перемещениях. Искомыми являются $u^k(x, t)$ — вектор перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t .

2. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованное гранично-временное интегральное уравнение без объемных сил и начальных деформаций, т.е.

$$\alpha_{\Omega} u_k(x, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \{T_{ik}(x, y, t-\tau)[u_i(y, \tau) - u_i(x, \tau)] - U_{ik}(x, y, t-\tau)t_i(y, \tau)\} dS_x d\tau = 0, \\ (x \in \partial\Omega),$$

где $x \in \Gamma = \partial\Omega$ называется точкой наблюдения или коллокационной точкой. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\Gamma = \partial\Omega$ на N_E граничных элементов $E_e (1 \leq e \leq N_E)$ совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы (рис.1), каждый из которых отображается на некий контрольный элемент Δ_e (каждый Δ_e — это либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$). Элемент E_e отображается на элемент Δ_e через следующее уравнение:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ — глобальный номер узла, имеющего в k -ом элементе локальный номер l , $N^l(\xi)$ — функции формы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Естественный базис (a_1, a_2) , метрический тензор g и единичная нормаль n на E_e запишутся как

$$a_\alpha(\xi) = \sum_{q=1}^N N_\alpha^l(\xi)x^q, \quad g_{\alpha\beta}(\xi) = a_\alpha(\xi)a_\beta(\xi), \quad J(\xi)n(\xi) = a_1 \wedge a_2, \\ J^2(\xi) = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(\xi), \quad (\xi \in \Delta_e, \alpha, \beta = 1, 2).$$

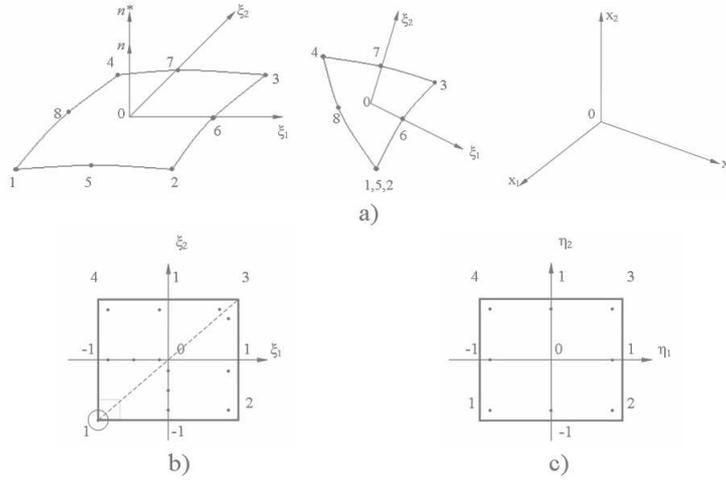


Рис. 1.

Неизвестные граничные поля (u, t) также интегрируются через узловые значения $u^k = u(z^k)$ и $t^k = t(z^k)$ в интерполяционных узлах z^k . Множество интерполяционных узлов отличается от множества геометрических узлов, а множество интерполяционных функций не совпадает с множеством функций формы. Рассматривается случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил — постоянные элементы. При этом будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k :

$$u_i(y) = \sum_{l=1}^4 R^l(\xi)u_i^{\chi(k,l)}, \quad t_i(y) = t_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad y \in S_k.$$

При упругой связи между h -ой и j -ой подконструкциями рассматривается соотношение:

$$t_i^h(y) = -t_i^j(y) = -\gamma_i^{hj}(y)(u_i^h(y) - u_i^j(y)), \quad i = 1, 2, 3; \quad y \in S_k, \quad S_k \subset \Gamma_{hj} = \Gamma_h \cap \Gamma_j.$$

Здесь $R^l(\xi)$ — функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. За узлы коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подконструкции:

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{2} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N_1} B_{ij}^{m,k} t_j^k - \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^4 D_{ij}^{m,k,l} (u_j^{\chi(k,l)} - u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}),$$

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{8} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^{N_1} B_{ij}^{m,k} t_j^k - \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^4 D_{ij}^{m,k,l} (u_j^{\chi(k,l)} - u_j^{\bar{\chi}(\bar{k},l)}),$$

$$N = N_1 + N_2,$$

где $\bar{\chi}(\bar{k}, l) = \bar{m}$ — глобальный номер узла некоторой (сопряженной) подконструкции, находящейся с рассматриваемой подконструкцией в упругой связи по k -ому элементу, \bar{k} — номер элемента сопряженной подконструкции, где задана упругая связь; N_1 — число элементов границы без упругих связей; N_2 — число элементов с упругой связью.

Вместо использования пошаговой сплайн-аппроксимации по времени будем использовать алгоритм С. Lubich [2, 3]:

$$y(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}(\gamma(R e^{il2\pi L^{-1}})/\Delta t) e^{-inl2\pi L^{-1}}, \quad (1)$$

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 x_n = \Delta t [\beta_k (s x_{n+k} + g((n+k)\Delta t)) + \dots + \beta_0 (s x_n + g(n\Delta t))],$$

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 p^k + \dots + \alpha_k}{\beta_0 p^k + \dots + \beta_k}, \quad x(t, p) = \int_0^t e^{p(t-\tau)} g(\tau) d\tau.$$

3. Гранично-элементные расчеты

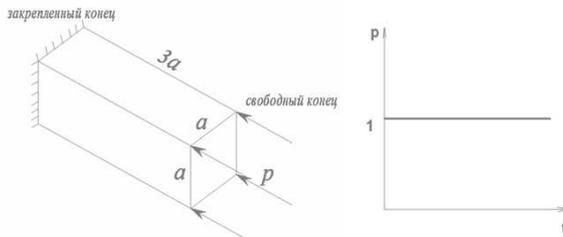


Рис. 2.

Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $p = 1\text{Н/м}^2$ призматического тела ($a = 1\text{м}$) с жестко закрепленным концом (рис. 2) и параметрами материала: плотность $\rho = 7850\text{кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$, модуль Юнга $E = 2,11 \cdot 10^{11}\text{Па}$. Задача имеет аналитическое решение, и известно ее МГЭ-решение в сочетании с методом

С. Lubich [1]. Результаты расчетов перемещений на свободном торце приведены на рис. 3.

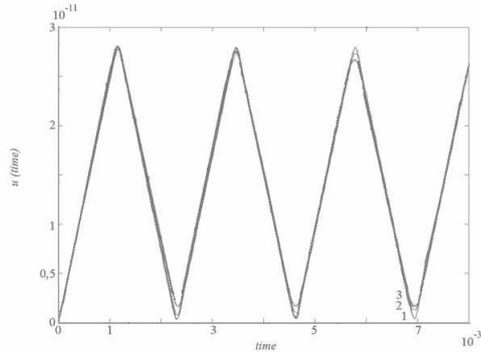


Рис. 3

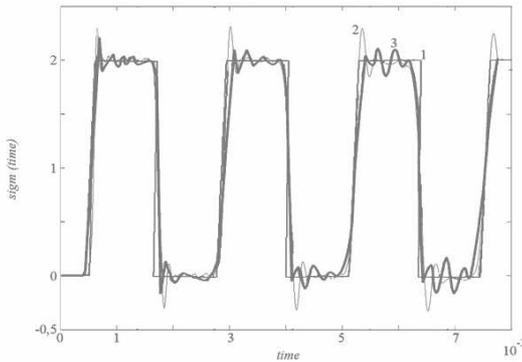


Рис. 4

Параметры материалов приведены в таблице.

Материал	E	ν	ρ	λ	μ	c_1	c_2
штамп	$3 \cdot 10^8$	0,2	2000	$8,33 \cdot 10^7$	$1,25 \cdot 10^8$	322,74	250
полупространство	$1,38 \cdot 10^8$	0,35	1966	$1,19 \cdot 10^8$	$0,51 \cdot 10^8$	335,64	161,24

Длина ребра штампа 2м. В качестве исследуемой точки выбрана точка $A(2,33; 2,33; 0)$, за начало координат — центр контактной грани штампа. Параметры схемы С. Lubich следующие: $\Delta t = 0,002$; $N = 2000$; $R = 0,984$. На рис. 5 представлен отклик поверхностных перемещений. Кривая 1 соответствует расчетам, приведенным в [4] с использованием схемы С. Lubich, кривая 2 — МГЭ-решение, построенное по описанной методике.

На рис. 6 приведены действительная и мнимая части для спектральной функции перемещений кривой 2 на рис. 5.

Расчетные примеры демонстрируют высокую вычислительную точность и устойчивость представленной ГЭ-схемы с использованием варианта метода С. Lubich.

Кривая 1 соответствует аналитическому решению, кривая 2 — МГЭ-решение, полученное с помощью метода С. Lubich со 126 четырехугольными ГЭ на четверти равномерной сетки, кривая 3 — МГЭ-решение из [1] с 324 треугольными ГЭ на неравномерной сетке. Параметры схемы С. Lubich выбраны следующие: $\Delta t = 0,00005$; $N = 2000$; $R = 0,9948$. Соответствующий отклик напряжений представлен на рис. 4.

Для демонстрации работоспособности методики при решении контактных задач рассмотрим задачу о штампе. Базовая гранично-элементная сетка представлена на рис. 5. Расчеты велись для случая, когда каждый элемент разбивался на четыре дополнительных четырехугольных элемента. В итоге четверть равномерной сетки штампа содержала 24 ГЭ, а четверть ГЭ сетки дневной поверхности — 108 четырехугольных ГЭ.

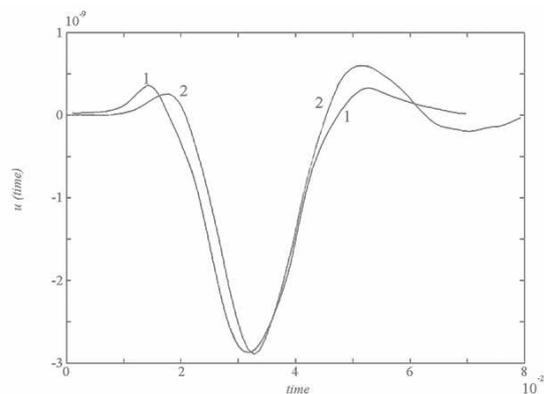


Рис. 5.

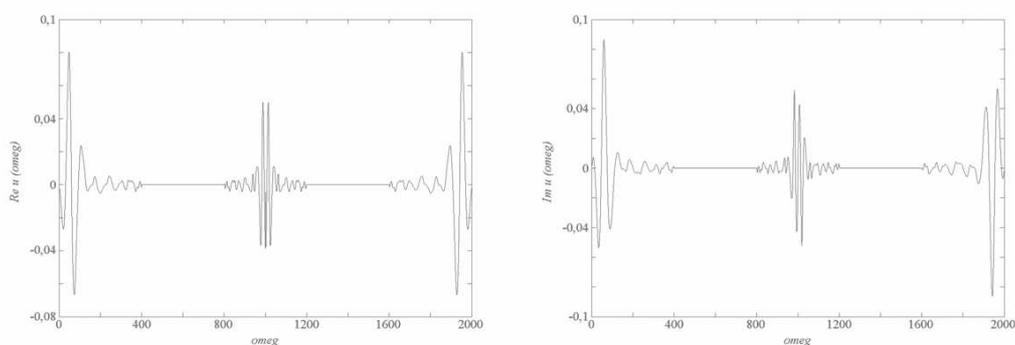


Рис. 6.

Список литературы

- [1] Schanz, M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua.// Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [2] Lubich, C. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I.// Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
- [3] Lubich C. Convolution quadrature and Discretized Operational calculus. II. //Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–425.
- [4] Gaul, L. [et. al.] Boundary Element Methods for the Dynamic Analysis of Elastic, Viscoelastic, and Piezoelectric Solids.// Jhon Wiley and Sons, Ltd., 2004. Encyclopedia of Computational Mechanics: Edited by E. Stein, R. de Borst and Thomas J. R. Hughes. Vol. 2: Solids and Structures. P. 751–769.

Belov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu. *Using the time-boundary element method for analyzing 3-d dynamic problems of elasticity.* A scheme of a boundary element method for numerically analyzing time-boundary integral equations of 3-D isotropic viscoelasticity is presented. The scheme does not require knowing the fundamental solution in explicit time and the stepped spline-approximation of the boundary functions in time. Examples are given.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Беляк О. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены прямые и обратные задачи о колебаниях слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения, приведен обзор основных методов решения. Представлены результаты численных экспериментов по восстановлению невыпуклых контуров.

Многие актуальные проблемы техники, такие как сейсмостойкость сооружений, разведка полезных ископаемых, проектирование и эксплуатация конструкций работающих в условиях динамического нагружения, неразрушающий контроль требуют решения динамических задач теории упругости для слоистых структур с дефектами различной конфигурации. Многие из аспектов перечисленных проблем могут быть изучены на основе исследования математических моделей, которые базируются на решениях краевых задач о колебаниях анизотропного слоя с дефектами различной природы: полости, включения, а также задач об определении конфигурации дефекта и его месторасположения по информации о полях перемещений на поверхности слоя. С точки зрения причинно-следственной связи задачи о колебаниях упругих тел условно принято разделять на два класса. Первый — класс прямых задач, целью которых является определение волнового поля в упругом теле с известной геометрией дефекта на основе заданных граничных условий. Второй класс — это обратные задачи (ОЗ), в которых требуется по известным полям смещений, заданным на части границы области, определить местоположение и конфигурацию полости. В последнее время методы решения ОЗ активно развиваются, что связано с моделированием различных динамических процессов в упругих средах (дефектоскопия, геофизика, сейсморазведка). Одним из наиболее эффективных методов решения стационарных задач колебаний тел с полостями, особенно неканонической формы, является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). К настоящему моменту решение задач о колебаниях упругих тел, ослабленных дефектами, изучены достаточно подробно и в основном опираются на метод сведения исходной краевой задачи к системе ГИУ и на его дискретный аналог — метод граничных элементов (МГЭ), однако обратные задачи о реконструкции параметров полости по некоторой информации о полях перемещений на части границы изучаемого упругого тела исследованы недостаточно. Задачи динамической теории упругости о колебаниях полуограниченных тел с полостями изучались в работах [1]–[9], в которых используются методы сведения динамических задач к граничным интегральным уравнениям, сведение к бесконечным системам линейных уравнений, метод многократных отражений, принцип суперпозиции. Кроме отмеченных подходов для решения исследуемых задач применялись методы интегральных преобразований и метод, основанный на применении обобщенной теоремы взаимности.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях ортотропного упругого слоя толщины h с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения с гладкой направляющей l_0 и образующей, параллельной оси Ox_2 . Считаем, что колебания в слое вызывает нагрузка $p(x_1)$ приложенная на его поверхности $x_3 = h$ осциллирующая по закону $\exp(-i\omega t)$. После отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} u_{k,l}, \\ u_i|_{x_3=0} &= 0, \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i(x_1), \\ \sigma_{ij} n_j|_{l_0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — плотность среды, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных материала, n_j — компоненты единичного вектора нормали к гладкой кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи 1 условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [10].

В зависимости от характера приложения нагрузки краевая задача (1) распадается на задачи о плоских и антиплоских колебаниях слоя с цилиндрической полостью. Метод решения возникающих краевых задач базировался на сведении их к системам ГИУ на основе идей теории потенциала и требует построения матриц-функций Грина для слоя с граничными условиями, порожденными исходной задачей [11], [12]. Такой подход позволяет снизить размерность исследуемой задачи на единицу. Матрица-функция Грина представима в виде интеграла по контуру σ , который выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и огибает положительные особенности подынтегральной функции снизу, а отрицательные сверху. На основе обобщенной теоремы взаимности [13] построено поле перемещений в слое в случае антиплоских и плоских колебаний для значений индексов $(j = 1, 3, i, m = 2)$, $(i, j, m = 1, 3)$ соответственно.

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(x, \xi) u_i(x) dl_x, \\ K_{im}(x, \xi) &= \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j(x), \quad u_m^*(\xi) = - \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(0, h, \xi) \\ x &= (x_1, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение для смещений (2) представлено в виде суммы двух слагаемых. Первое — так называемое эталонное поле смещений в среде без дефекта, второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. Представление (2) позволяет рассчитывать поле смещений всюду внутри области, занятой упругой средой, если известно поле смещений на контуре дефекта. Для определения поля смещений на контуре полости сформулирована система ГИУ на основании соотношения (2) только лишь по границе дефекта l_0 для антиплоских и плоских колебаний слоя. Дискретизация системы ГИУ осуществлялась на основе метода коллокаций [11], [13]. В результате получены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения узловых значений функций смещений на контуре полости. Матрицы СЛАУ имеют явное диагональное преобладание, являются хорошо обусловленными и их решения устойчивы к малым вычислительным погрешностям элементов

СЛАУ. На основе найденных узловых значений функций смещений на контуре полости построены волновые поля перемещений на верхней границе слоя. Произведен ряд численных экспериментов [11], [15], [16] для слоя из различных материалов с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения для плоских и антиплоских колебаний слоя. На основе описанной схемы решения задач для плоских и антиплоских колебаний слоя с полостью, а также анализа волновых полей на поверхности для различных конфигураций и месторасположения дефектов в слое рассмотрены ОЗ, которые состоят в определении формы контура по некоторой информации о полях перемещений на поверхности слоя $x_3 = h$. В случае плоских и антиплоских колебаний слоя с дефектом ОЗ сводятся к сложным нелинейным системам операторных уравнений относительно смещений на контуре полости и самого контура полости [15]. Решение ОЗ для случая плоских и антиплоских колебаний слоя предлагается отыскивать в два этапа: на основании метода регуляризации на компактных множествах разыскивается начальное приближение в классе простейших конфигураций контура (окружность, эллипс), причем характеристики контура находятся из условия минимума неквадратичного функционала невязки. На втором этапе форма начального приближения уточняется путем некоторого итерационного процесса, который в свою очередь опирается на линеаризованную постановку обратных задач в окрестности начального приближения. Первый этап решения был реализован в работах [11], [15], [16] для цилиндрической полости с поперечным сечением типа окружность, эллипс. Начальное приближение контура разыскивалось в классе эллипсов. Пять параметров, однозначно определяющих положение дефекта в слое, находились из условия минимума неквадратичного функционала невязки. Результаты численных экспериментов показали, что описанный алгоритм решения ОЗ эффективен для реконструкции элементарных контуров дефектов, типа окружности, эллипса, устойчив к малым измерительным погрешностям входной информации. Отметим, что удалось восстановить и невыпуклые контура типа трехлепестковой розы. Проведен ряд численных экспериментов для цилиндрической полости, с поперечным сечением в виде трехлепестковой розы, эллипса. Радиус-вектор, описывающий в полярной системе координат контур дефекта, представлялся в виде отрезка ряда Фурье

$$r(\varphi) = a_0/2 + a_1 \cos(\varphi) + b_1 \sin(\varphi) + a_2 \cos(2\varphi) + b_2 \sin(2\varphi) + a_3 \cos(3\varphi) + b_3 \sin(3\varphi) \quad (3)$$

Таким образом, искомый контур дефекта отыскивался в девятимерном пространстве изменений его характеристик. Поиск минимума функционала невязки осуществлялся генетическим алгоритмом [14]. На рис. 1 изображены искомый (сплошная линия) и восстановленный (точки) контур дефекта. В расчетах использовались упругие постоянные для кварца. На рис. 1 справа представлены результаты восстановления контура l_0 — трехлепестковая роза: $r(\varphi) = 0.1 \sin(3\varphi) + 0.2$, координаты центра полости $(0, h/2)$, а слева представлены результаты восстановления контура l_0 — эллипс с полуосями $a = 0.2$, $b = 0.1$ с центром в точке $(0, h/2)$, причем безразмерный параметр $\kappa = 3.7$ отвечает 3-м бегущим волнам в слое, а число ГЭ $N = 32$.

Относительная разница между восстановленной и искомой площадями поперечного сечения цилиндрической полости составила менее 6%, относительная по-

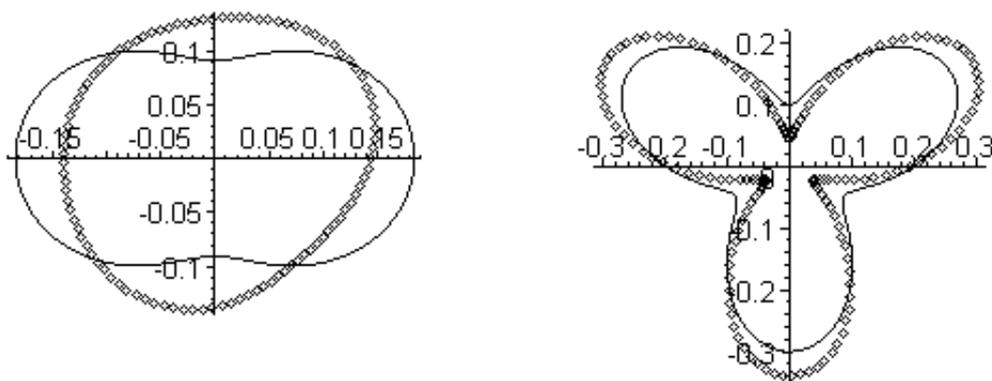


Рис. 1. Искомый (сплошная линия) и восстановленный (точки) контура

грешность восстановления координат центра полости составила менее 4%. Данные, полученные в результате численных экспериментов, позволяют останавливать процедуру реконструкции дефекта на этапе поиска начального приближения без уточнения итерационной процедурой на основе метода линеаризации, поскольку площади искомого и восстановленного дефектов незначительно отличаются друг от друга.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Ватульяну А.О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00734).

Список литературы

- [1] Ватульян А.О. Обратные задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007, 223 с.
- [2] Боев Н.В., Ватульян А.О., Сумбатян М.А. Восстановление контура препятствия по характеристикам рассеянного поля в коротковолновой области // Акустический журнал. 1997, т.43, № 4. С. 458–462.
- [3] Бабешко В.А., Селезнев М.Г., Селезнева Т.Н., Соколов В.П. Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость // ПММ. 1983, т. 47, № 1. С. 115–121.
- [4] Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. К.: Наукова думка, 1987. 307 с.
- [5] Ворович И.И., Сумбатян М.А., Боев Н.В. Восстановление формы дефекта по рассеянному волновому полю в двумерной упругой среде. // ДАН СССР. 1991, т. 318, № 4. С. 880–882.
- [6] Colton D., Kress R. Using fundamental solutions in inverse scattering. // Inverse Problems, 2006, № 22. P. 49–66.

- [7] *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland Publ.Co, 1973. 452 p.
- [8] *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity.// *Inverse Problems*, 2005, № 21. P. 1–50.
- [9] *Rangelov T.V., Manolis G.D., Dineva P.S.* Elastodynamic fundamental solutions for certain families of 2d inhomogeneous anisotropic domains: basic derivations.// *European Journal of Mechanics A. Solids*, 2005, v. 24. P. 820–836.
- [10] *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
- [11] *Ватульян А.О., Суворова О. А.* Об обратной задаче для упругого слоя с полостью. // *Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС)*. 2005, № 1. С. 10–16.
- [12] *Ватульян А. О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применение. // *Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки*. 1989. № 2. С. 81–85.
- [13] *Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир. 1987. 524 с.
- [14] *Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред. // *Вычислительные технологии* 2006, № 3. С. 14–26.
- [15] *Беляк О.А., Баранов И.В.* Обратная задача для слоя с полостью Современные проблемы механики сплошной среды.// *Труды X международной конференции г. Ростов-на-Дону* 2006. С. 56–61.
- [16] *Беляк О.А.* Восстановление формы полости в ортотропной полосе.// *Труды V школы-семинара “Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика”*. Ростов-на-Дону. Изд-во ООО “ЦВВР”, 2007. С. 47–50.

Belyak O.A. *Direct and inverse problems for an anisotropic layer with a cylindrical cavity.* The direct and inverse problems about oscillations of a layer with a cylindrical cavity of any cross- section are considered, the review of the basic methods of the decision is resulted. Results of numerical experiments on reconstruction of not convex contours are submitted.

ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЫ

Беркович В. Н.

*Филиал Московского государственного университета технологий
и управления в г. Ростове-на-Дону*

В настоящей работе предложен метод решения плоской смешанной задачи об установившихся колебаниях неоднородной клиновидной среды, составленной из 2-х упругих материалов с радиальной линией их раздела и находящейся в условиях плоской деформации. Плоские основные задачи динамики упругого клина рассматривались в ряде частных случаев [1-3] и др. На основе метода, разработанного автором [4, 5], рассматриваемая задача сведена к эквивалентной системе граничных интегральных уравнений относительно неизвестных напряжений в области задания источников колебаний и указан способ построения её приближенного решения в аналитическом виде. Изучен характер волнового поля смещений свободной поверхности. Аналитически исследована проблема существования поверхностных и каналовых волн в рассматриваемой среде.

1. Будем рассматривать упругую клиновидную среду $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, составленную из 2-х жестко сцепленных упругих клиньев Ω_1, Ω_2 с общим ребром, углами раствора φ_1, φ_2 и различными механическими характеристиками соответственно. Указанную среду будем называть клиновидным композитом. Нижняя грань $\theta = -\varphi_2$ композита предполагается свободной или жестко закрепленной, а на верхней грани $\theta = \varphi_1$ задан плоский вектор смещений $\bar{f}(r) \exp(-i\omega t)$, $a < r < b$ в полосе $\Pi = (0, \infty) \times (a, b)$, параллельной ребру клина. Оставшаяся часть верхней грани считается свободной от напряжений. В условиях установившихся колебаний ставится задача определения неизвестной амплитуды вектора напряжений $\bar{\sigma} = \{\sigma_r, \sigma_{r\theta}\}$ в полосе Π .

Поставленная выше задача сводится к решению динамических уравнений теории упругости относительно неизвестной амплитуды вектора смещений $\bar{u}(r, \theta)$ в клиновидной среде со смешанными граничными условиями и условиями сопряжения на границе раздела сред $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, -\varphi_2) &= \bar{0}, & (\bar{\sigma}(r, -\varphi_2) &= \bar{0}), & 0 < r < \infty \\ \bar{u}(r, \varphi_1) &= \bar{f}(r), & \bar{\sigma}(r, \varphi_1) &= \bar{0}, & r \notin (a, b) \end{aligned} \quad (1)$$

$$[\bar{u}]_{\varphi=0} = [\bar{\sigma}]_{\varphi=0} = \bar{0} \quad (2)$$

На ребре предполагается выполнение условий ограниченности смещений, а на бесконечности — выполнение условий излучения Зоммерфельда.

Воспользуемся представлением общего решения динамических уравнений теории упругости [6] в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\mu\bar{V} &= -\nabla F + 4(1-\nu)\bar{\Psi}, & F(r, \theta) &= \Psi_0(r, \theta) + r\Psi_r(r, \theta) \\ \nabla^2\Psi_0 + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} &= \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)r\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2}, & \bar{\Psi} &= \{\Psi_r(r, \theta), \Psi_\theta(r, \theta)\} \\ \nabla^2\Psi_{1,2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi_{1,2}}{\partial t^2} &= 0, & \Psi_r &= \Psi_1(r, \theta)\cos\theta + \Psi_2(r, \theta)\sin\theta \\ & & \Psi_\theta &= -\Psi_1(r, \theta)\sin\theta + \Psi_2(r, \theta)\cos\theta \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) μ — модуль сдвига, $c_{1,2}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно, ν — коэффициент Пуассона.

Так как при решении плоской задачи с помощью представлений (3) одна из неизвестных функций $\Phi_{0,1,2}$ оказывается произвольной, то, следуя [4] будем дополнительно предполагать выполнение следующих условий на границе :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta} - \frac{1}{g}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\right)_{\partial\Omega} = 0, \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta} + \frac{1}{g}\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\right)_{\partial\Omega} = 0, \quad g = 1 + \varkappa_2 a$$

2. Поскольку удовлетворение смешанным граничным условиям (1) и условиям сопряжения (2) в классическом смысле оказывается невозможным, в данной работе развивается предложенный в [4, 5] подход, основанный на удовлетворении этих условий в обобщенном смысле.

При удовлетворении граничным условиям типа (1) вспомогательной смешанной задачи для однородного клина произвольного угла раствора α в результате достаточно громоздких преобразований приходим к соотношениям связи между трансформантами Конторовича-Лебедева от векторов амплитуд смещений $\bar{U}(\alpha, \tau)$ и напряжений $\bar{Q}(\alpha, \tau)$ на границе $\theta = \alpha$:

$$\frac{1}{2\mu}\bar{Q}(\alpha, \tau) = \varkappa_1 Re\{[\mathbf{A}(\tau + i) + \mathbf{B}(\tau + i)] \cdot \mathbf{A}^{-1}(\tau + i) \cdot \bar{U}(\alpha, \tau + i)\}, \quad (4)$$

$-\infty < \tau < \infty$

Соотношение (4) является частным случаем векторной краевой задачи Карлемана со сдвигом в комплексной плоскости [7] относительно функции $\bar{U}(\alpha, z)$, аналитической в полосе $|Imz| \leq 1$. Однако, равенству (4) можно легко удовлетворить, полагая

$$-i\frac{1}{2\mu}\bar{Q}^*(\tau) = [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)] \cdot \mathbf{A}^{-1}(\tau) \cdot \bar{U}(\alpha, \tau), \quad \bar{Q}^*(\tau) = \int_0^\infty \bar{q}(\rho)K_{-i\tau}(\varkappa_1\rho)d\rho$$

Матрицы $\mathbf{A}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$ формата 2×2 зависят от геометрических и упругих характеристик клиновидной среды. При рассмотрении отдельно задач для различных граничных условий на нижней грани однородной клиновидной среды возникают соотношения вида:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{U}(\tau) \\ \bar{Q}^*(\tau) \end{pmatrix} &= \mathbf{P}(\tau|\varphi_1; \varkappa_1) \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}(\tau) \\ \bar{Q}^*(\tau) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}(\tau|\varphi_1; \varkappa_1) &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{A}(\tau)[\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)]^{-1} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{C}(\tau)[\mathbf{C}(\tau) + \mathbf{D}(\tau)]^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

В указанных соотношениях пары матриц $\mathbf{A}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$ и $\mathbf{C}(\tau)$, $\mathbf{D}(\tau)$ связаны с решением задач для однородной клиновидной среды в случае жестко закрепленной и свободной нижней грани соответственно.

Применяя соотношение (5) последовательно для каждой компоненты клиновидного композита и удовлетворяя условиям сопряжения (2) с помощью теоремы работы [5], придем в результате к системе граничных интегральных уравнений относительно неизвестных амплитуд контактных напряжений $\bar{q}(r) = \bar{\sigma}(r, \varphi_1)$:

$$\int_a^b \mathbf{k}(r, \rho) \cdot \bar{q}(\rho) d\rho = \bar{f}(r), \quad a < r < b \quad (6)$$

$$\mathbf{k}(r, \rho) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 r) I_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 \rho), & \rho < r \\ I_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 r) K_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 \rho), & \rho > r \end{pmatrix} \text{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\} d\tau$$

$$\mathbf{H}(-i\tau) = [\mathbf{E}_2^T \cdot \mathbf{P}(\tau | \varphi_1; \mathfrak{x}_1) \cdot \mathbf{P}(\tau | \varphi_2; \mathfrak{x}_2) \cdot \mathbf{E}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{E}_2^T \cdot \mathbf{P}(\tau | \varphi_1; \mathfrak{x}_1) \cdot \mathbf{P}(\tau | \varphi_2; \mathfrak{x}_2) \cdot \mathbf{E}_2]$$

$$\mathbf{E}_1^T = (\mathbf{E} | \mathbf{O}), \quad \mathbf{E}_2^T = (\mathbf{O} | \mathbf{E}), \quad \mathfrak{x}_{1,2} = -ik_{1,2}$$

В соотношениях (6) матрица \mathbf{O} есть нуль-матрица формата 2×2 , матрицы $\mathbf{E}_{1,2}$ имеют формат 2×4 , показатель T означает операцию транспонирования, $k_{1,2}$ — соответствующие волновые числа. Система (6) детально исследована в [5], где установлены условия ее разрешимости в пространствах Соболева-Слободецкого $W_2^{\pm\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ и получено аналитическое представление решения в виде интегралов, связанных с преобразованием Конторовича-Лебедева [8].

3. На основе решения системы (8) можно получить представления волновых полей смещений свободной поверхности клиновидного композита. Продолжим правую часть уравнения (6) с отрезка $a < r < b$ на всю полуось $0 < r < \infty$, используя её левую часть и решение $\bar{q}(r)$. Тогда получим следующие представления амплитуды смещений на грани $\theta = \varphi_1$:

$$\bar{u}_b(r, \varphi_1) = \int_a^b \bar{q}(\rho) d\rho \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 r) I_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 \rho) \text{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\} \tau d\tau = O[(r/b)^{-\lambda}],$$

$r \rightarrow \infty \quad (b < r < \infty)$

$$\bar{u}_a(r, \varphi_1) = \int_a^b \bar{q}(\rho) d\rho \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 r) K_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 \rho) \text{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\} \tau d\tau = O[(\mathfrak{x}_1 r)^{\lambda}],$$

$r \rightarrow 0 \quad (0 < r < a)$

В выражениях \bar{u}_a , \bar{u}_b показатель $\lambda = \text{Im}\zeta_1 > 0$, где ζ_1 — полюс $\det \text{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\}$ в верхней полуплоскости с наименьшей мнимой частью, является наименьшим положительным собственным числом самосопряженного оператора динамической теории упругости, возникающего при исследовании вопросов концентрации напряжений в окрестности угловой точки $r = 0$.

Для получения поля смещений на грани $\theta = -\varphi_2$ необходимо воспользоваться равенством (5) и выразить эти смещения через $\bar{u}(r, \varphi_1)$

$$\bar{u}(r, -\varphi_2) = \int_0^{\infty} \bar{u}(\rho, \varphi_1) \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-i\tau}(\mathfrak{x}_1 \rho) I_{-i\tau}(\mathfrak{x}_2 r) \left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}\right)^{-i\tau} \text{Im}\{\mathbf{H}(-i\tau)\} d\tau$$

$$\mathbf{H}_u(-i\tau) = \mathbf{E}_1^T \cdot [\mathbf{P}(\tau | \varphi_1; \mathfrak{x}_1) \cdot \mathbf{P}(\tau | \varphi_2; \mathfrak{x}_2)]^{-1} \cdot \mathbf{E}_1$$

4. Для изучения особенности волновых полей рассматриваемой клиновидной среды исследуются вопросы существования поверхностных и каналовых волн. Из представлений (3) можно получить для уравнений динамической теории упругости функционально-инвариантные решения Смирнова-Соболева в форме плоских “комплексных” волн [3]:

$$\begin{aligned}\Phi_1(r, \varphi, t) &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \operatorname{Im} f\left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} - i \frac{r \sin \varphi}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right) \\ \Phi_2(r, \varphi, t) &= \operatorname{Re} f\left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} - i \frac{r \sin \varphi}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right) \\ \Phi_0(r, \varphi, t) &= \operatorname{Re} \check{f}_0\left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} - i \frac{r \sin \varphi}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}\right) - \\ &- r[\Phi_1(r, \varphi, t) \cos \varphi + \Phi_2(r, \varphi, t) \sin \varphi]\end{aligned}\quad (7)$$

где $f(z)$, $f_0(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного аргумента z , при этом c — произвольный параметр, имеющий физический смысл фазовой скорости поверхностной волны. При задании режима установившихся гармонических колебаний среды указанные функции выбираются в виде $f(z) = B \exp(-iwt)$, $f_0(z) = D \exp(-iwt)$, где B , D — произвольные постоянные. Удовлетворяя одному из условий свободных поверхностей для однородной клиновидной среды угла раствора φ , приходим к следующему уравнению:

$$(1 + \gamma^2 - t^2)(1 - 0.5t^2) - 2\sqrt{1 - \gamma^2 t^2} \sqrt{1 - t^2} = 0, \quad t = c/c_2^2, \quad \gamma^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (8)$$

имеющему действительный корень c_* — скорость распространения поверхностной волны ($0, 5 < t_* < 1, 0$). При этом, как следует из (8), эта волна не обладает дисперсией и является волной релеевского типа. Удовлетворяя оставшимся однородным условиям, получаем выражения для углов раствора φ_* и критических частот w_* появления этой волны:

$$\begin{aligned}tg^2 \varphi_* &= \frac{(1 + \gamma^2 - t_*^2)(2\gamma^2 - t_*^2) + \gamma^2(1 + \gamma^2)m_1 M_1}{(1 + \gamma^2 - \gamma^2 t_*^2)(2\gamma^2 - t_*^2) + \gamma^2(1 + \gamma^2)m_1 M_1} < 1 \\ w_* &= \frac{(2 - t^2)(1 - M_1 tg^2 \varphi_* - 0.5t^2)}{2m_1 M_1 (1 - tg^2 \varphi_*)}, \quad m_1 = \sqrt{1 - t_*^2}, \quad M_1 = \sqrt{1 - \gamma^{-2} t_*^2}\end{aligned}\quad (9)$$

Представления (7) можно использовать при построении аналогичных решений в 2-х компонентном клиновидном композите. При этом к однородным граничным условиям на свободных поверхностях добавляются условия сопряжения (2).

Удовлетворение одному из указанных выше условиям приводит к уравнению для определения скорости каналовой волны c_{**} на границе раздела $\varphi = 0$, которое имеет следующий вид ($k = \frac{w}{c}$):

$$\det \begin{pmatrix} P_1(k) & 1 & -\delta P_2(k) & -\delta \\ k^2 & S_1(k) & -\delta k^2 & -S_2(k) \\ 2k^2 P_1(k) & \gamma_1^2 k^2 + S_1^2(k) & -2k^2 P_2(k) & -\gamma_2^2 k^2 - S_2^2(k) \\ k^2 + 0.5K_1^2 & -S_1(k) & -k^2 - 0.5K_1^2 & S_2(k) \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$P_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}, \quad S_{1,2} = \sqrt{k^2 - K_n^2}, \quad \gamma_n^2 = \frac{1 - 2\nu_n}{2(1 - \nu_n)}, \quad \delta = \mu_1/\mu_2, \quad n = 1, 2$$

В соотношениях (10) k_n , K_n — волновые числа продольных и поперечных волн упругих компонент композита, μ_n , ν_n — их модули сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно. Из соотношения (10) следует, что решение c_{**} существенно зависит от частоты ω . Это означает, что в случае появления каналовой волны, последняя обладает дисперсией. Критические соотношения связи геометрических и механических параметров, при которых возникает каналовая волна, определяются равенствами, аналогичными (9), которые имеют вид ($t_n = c_{**}/C_n$, $c_n/C_n = \gamma_n$, $n = 1, 2$):

$$tg^2\varphi_{*n} = \frac{(1 + \gamma_n^2 - t_n^2)(2\gamma_n^2 - t_n^2) + \gamma_n^2(1 + \gamma_n^2)m_nM_n}{(1 + \gamma_n^2 - \gamma_n^2t_n^2)(2\gamma_n^2 - t_n^2) + \gamma_n^2(1 + \gamma_n^2)m_nM_n} \quad (11)$$

$$w_{**} = \frac{(2 - t_n^2)(1 - M_n tg^2\varphi_{**} - 0.5t_n^2)}{2m_nM_n(1 - tg^2\varphi_{*n})}, \quad m_n = \sqrt{1 - t_n^2}, \quad M_n = \sqrt{1 - \gamma_n^{-2}t_n^2}$$

В соотношениях (11) C_n , c_n — скорости распространения поперечных и продольных волн n -й упругой компоненты.

Список литературы

- [1] Морозов Н.Ф., Суровцова И.Л. // Задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с угловыми точками контура. Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61. № 4. С. 654–659.
- [2] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 327 с.
- [3] Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: МГУ. 1992. 204 с.
- [4] Беркович В.Н. // Плоская смешанная задача динамики клиновидной среды. Тр. X Междун. конф. НИИМ и ПМ. Ростов-на-Дону: ЮФУ. 2006. Т.Е2. С. 64–69.
- [5] Беркович В.Н. // К теории смешанных задач динамики наклонно-слоистой среды. Экол. вестник научн. центров ЧЭС. Краснодар: КубГУ. 2006. № 2. С. 16–22.
- [6] Зильберглейт А.С., Златина И.Н. // О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости. Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 71–74.
- [7] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: 1978. Наука. 295 с.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2. М.: Наука. 1966. 295 с.

Berkovich V.N. *Plane mixed problem of the dynamics of the heterogeneous wedge-shaped elastic medium.* The paper is devoted to the investigation of the mixed boundary value problem of the wedge-shaped elastic composite of two components excited by plane harmonic vibrations. The problem is reduced to the system of integral equations. Problems of surface and channel wave existence are studied and equations to estimate its phase velocity are obtained.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ УДАР КОНИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА ПО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ

Бескопыльный А. Н.* , Иванова Д. В. , Кадомцев И. Г.****

* *Ростовский государственный строительный университет*

** *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Задача о неупругом ударе в точной постановке приводит к динамической упруго-пластической задаче, которая в силу своей сложности решается либо численно, либо приближенно. Полагая, что скорость удара много меньше скорости звука в телах, можно пренебречь инерцией местного смятия в телах и решать задачу в квазистатической постановке, т.е. считать, что зависимость местного смятия в зоне контакта тел от силы контактного взаимодействия остается такой же, что и в статической задаче. В работе принимается, что общие перемещения стержня упругие, а местные, в зоне контакта, — упругопластические. Применяется построенная ранее модель местного смятия, которая учитывает вытекание материала в зоне контакта и хорошо согласуется с известными экспериментальными результатами. Построено численное и асимптотическое решение задачи, которые хорошо совпадают между собой, а также совпадают с известными экспериментальными данными.

Эффективным средством обеспечения надежности объектов строительства и машиностроения является оперативный контроль качества изделий, сущность которого заключается в установлении на каждой стадии технологического процесса строгого соответствия характеристик материалов требованиям нормативных документов. В последние годы стали применяться методы ударной диагностики материалов конструкций, позволяющие быстро и точно измерять требуемые показатели в любой точке реальной конструкции. Ударные методы обладают рядом достоинств, например, при меньших габаритах может быть развита большая контактная сила, регистрируется больше информации о реакции материала на динамическое воздействие, и другие. Такой подход широко применяется при определении твердости материалов, а последнее время — при определении комплекса механических характеристик: пределов текучести, прочности, относительного удлинения и других.

Наиболее привлекательным в динамических испытаниях материалов является конический индентор.

В качестве индентора возьмем стержень с коническим наконечником, и рассмотрим продольный удар его по полупространству. Этот случай и рассмотрим в двух вариантах:

1) Удар массивного штампа массы m конической формы по полубесконечному стержню, конец которого гладкое тело вращения

2) удар массивного штампа массы m шарообразной формы по полубесконечному стержню, конец которого имеет форму конуса. здесь m — масса стержня. Эти два случая эквивалентны.

Ставится задача изучить характеристики взаимодействия (местное смятие $\alpha(t)$, силу контакта $P(t)$ и время контакта).

Поместим начало координат в точке начального касания тела и стержня. Уравнение продольных колебаний стержня имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad a_1 = (E_1/\rho_1)^{1/2}. \quad (1)$$

u_1 — продольное смещение точек стержня; E_1 — модуль Юнга; ρ_1 — плотность материала стержня.

Перемещение тела описывается уравнением

$$m\ddot{u}_2 = -P(t). \quad (2)$$

здесь u_2 — перемещение тела, m — его масса, $P(t)$ — сила контактного взаимодействия между телом и стержнем.

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = 0 \\ \dot{u}_1(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x, 0) = 0 \\ \dot{u}_2(x, 0) = V_0 \end{cases} \quad (3)$$

V_0 — начальная скорость соударения.

Для определения местного смятия $\alpha = u_1 - u_2$ воспользуемся результатами работы [1]

$$\alpha = CP^{1/2}; \quad c = ctg\gamma(1 - \delta)\chi^{-1/2} + (1 + (\delta - 2)/\pi)\chi^{1/2}E^{-1} \quad (4)$$

δ характеризует безразмерный подъем свободной поверхности на границе области контакта $\delta = 0.22$, $\chi = \lambda\pi k$, $\lambda = 5.7$. k — пластическая константа конического штампа.

На конце стержня выполняется условие :

$$E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = -P(t) \quad (5)$$

F_1 — площадь поперечного сечения.

Применим к (1) и (2) преобразование Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = x^2 \frac{U_1}{a_1^2} \quad sU_1(0, s) = a_1 \frac{Q}{E_1 F_1} \quad (6)$$

$$U_1 = s \int_0^\infty u_1(x, t) e^{-st} dt, \quad Q = s \int_0^\infty P(t) e^{-st} dt$$

Из (6) и условия $U_1(\infty, s) = 0$ вытекает

$$u_1 = C_1 e^{-sx/a_1}, \quad C_1 = Q a_1 (E_1 F_1 s)^{-1} \quad (7)$$

обращая (7) получаем

$$\dot{u}_1(0, t) = \frac{a_1 P(t)}{E_1 F_1} \quad (8)$$

Таким образом, исходная задача сведена к задаче Коши:

$$m\ddot{u}_2(0, t) = -P(t)\dot{u}_1(0, t) = \frac{a_1 P(t)}{E_1 F_1} \quad (9)$$

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = 0 \\ \dot{u}_1(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x, 0) = 0 \\ \dot{u}_2(x, 0) = V_0 \end{cases}$$

Из (9) можно перейти к задаче Коши

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\alpha^2}{c^2 m} - \frac{2a_1 \alpha \dot{\alpha}}{c^2 E_1 F_1} \quad \begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \dot{\alpha}(0) = V_0 \end{cases} \quad (10)$$

которая решалась численно методом Рунге-Кутты. Все исходные данные для расчетов были взяты такими же как для экспериментов из [2].

Стальные стержни длиной l и массой m падали с начальной скоростью V_0 на основание из Стали-15. Конец стержня конический с углом 2γ . Были получены следующие результаты:

Угол раствора γ	75°	45°	67.5°
Масса m (кг)	12	6.3	10
V_0 (м/с)	21.8	12.5	12.2
$t_{max} 10^{-3}$ с	0.36	0.75	0.55
$\alpha_{max} 10^3$ мм (эксп.)	5.5	6.2	4.4
$\alpha_{max} 10^3$ мм	6.004	7.3	5.107
$P_{max} 10^5$ Н (эксп.)	15	1.93	4.58
$P_{max} 10^5$ Н	13	1.82	4.29

Таблица 1. Численное решение для Стали-15

Угол раствора γ	90°	90°	50°
Масса m (кг)	3.44	8.45	6.3
V_0 (м/с)	5.43	4.43	12.5
$t_{max} 10^{-3}$ с	0.87	1.4	1.5
$\alpha_{max} 10^3$ мм (эксп.)	2.9	2.5	11
$\alpha_{max} 10^3$ мм	3.2	2.9	12
$P_{max} 10^5$ Н (эксп.)	0.783	0.855	1.20
$P_{max} 10^5$ Н	0.455	0.343	1.23

Таблица 2. Численное решение для Д1-Т

Далее, перейдем к безразмерным координатам и получим асимптотику решения путем разложения по малому параметру. Сделаем замену: $t = K_t \cdot \tau$; $\alpha(t) = K_\alpha \cdot y(\tau)$, тогда уравнение (10) примет вид :

$$\ddot{y} \cdot K_\alpha \cdot K_t^2 + \frac{2a_1}{C^2 E F_1} K_\alpha^2 \cdot K_t \cdot y \cdot \dot{y} + \frac{1}{C^2 m} K_\alpha^2 y^2 = 0 \quad (11)$$

Полагая

$$K_t = (C^2 m)^{-1/4} \quad K_\alpha = (C^2 m)^{1/2} \quad (12)$$

Переходим к уравнению:

$$\ddot{y} + \varepsilon \cdot y \cdot \dot{y} + K_\alpha^2 \cdot y^2 = 0 \quad \varepsilon = \frac{2a_1 m^{3/4}}{E_1 F_1 C^{1/2}} \quad (13)$$

t1	y1	t2	y2	расхождение	ϵ
1.64	0.893	1.43	0.915	2.463%	1
1.52	0.996	1.54	1.018	2.208%	1/2
1.56	1.062	1.55	1.084	2.071%	1/4
1.59	1.122	1.65	1.144	1.960%	1/16
1.60	1.139	1.65	1.161	1.931%	1/64
1.60	1.143	1.65	1.166	2.012%	1/256

Таблица 3. Результаты численного решения (13)

Если положить $\varepsilon = 0$, то получим нулевой член асимптотики решения

$$y_{0max} = (1/5)^{1/3} \cong 1.145 \quad \tau_{0.1} = y_{0max} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \cong 1.605 \quad (14)$$

Сравнение показывает что численные результаты хорошо стыкуются с асимптотическими. Если $\varepsilon > 1$, то удобнее ввести безразмерные координаты τ^* и y^* , положив

$$K_t = \sqrt[3]{\frac{2a_1}{c^2 E_1 F_1}}, \quad K_\alpha = \frac{1}{K_t^2} = \left(\frac{2a_1}{c^2 E_1 F_1}\right)^{-2/3} \quad (15)$$

Тогда соответствующая задача Коши примет вид:

$$\ddot{y}^* + y^* \dot{y}^* + \varepsilon y^{*2} = 0 \quad y^*(0) = 0, \dot{y}^*(0) = 1 \quad (16)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2 m} \left(\frac{2a_1}{c^2 E_1 F_1}\right)^{-4/3} \quad (17)$$

t1	y1	t2	y2	расхождение	ϵ
1.76	1.016	1.76	1.037	2.06%	1/2
2.11	1.124	2.09	1.144	1.77%	1/4
2.48	1.213	2.53	1.233	1.64%	1/8
2.89	1.281	2.86	1.3	1.48%	1/16
3.31	1.33	3.30	1.348	1.35%	1/32
3.76	1.362	3.74	1.381	1.39%	1/64

Таблица 4. Результаты численного решения (16)

Асимптотику решения отыскиваем следующим итерационным методом

$$\ddot{y}_i + y_{i-1} \dot{y}_i + \varepsilon y_{i-1}^2 = 0, y_i(0) = 0, \dot{y}_i(0) = 1 \quad (18)$$

Здесь i — номер итерации, “*” над y далее опускается. Нулевой член асимптотики находим из задачи

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 \dot{y}_0 = 0 \\ y_0(0) = 0 \\ \dot{y}_0(0) = 1 \end{cases} \quad y_0(t) = \sqrt{2}th\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (19)$$

Откуда в первом приближении имеем

$$y_{1max} = \sqrt{2} + \varepsilon_1(\ln \varepsilon + \frac{5}{2} \ln 2 - 1) + o(\varepsilon \ln \varepsilon) \quad \tau_{1,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \varepsilon + \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln 2 + o(1) \quad (20)$$

Первая из формул (20) дает погрешность менее 3% при $\varepsilon > 10$, а вторая при $\varepsilon > 50$.

Таким образом, полученные результаты можно использовать для определения экспериментально с большой точностью, чем принято в существующих методах.

Список литературы

- [1] Кадомцев И.Г. Осесимметричное упругопластическое соударение двух тел, одно из которых коническое. // Известия СКНЦ ВШ. 1990. № 4. С. 50–54.
- [2] Батуев Г.С., Голубков Ю.Ф., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.

Beskopilniy A.N., Ivanova D.V., Kadomcev I.G. *Conical indenter's elastic-plastic blow by half-infinity rod.* The problem of inelastic impact with precise formulation reduces to dynamic elastic-plastic problem, which can be solved either numerically or approximately because of its complication. Suppose that impact velocity more less then speed of sound it can neglect the inertia of local collapse and solve the problem at quasistatic formulation i.e. assume that dependence the local bearing at contact zone from the contact force will be the same that in static analysis. At the article we suppose, that general displacements of rod are elastic, and the local displacements are elastic-plastic. We use the model of local bearing that has received lately, that takes into account the floating of material at contact zone and well agree with experimental data.

ПРЯМОЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ С ПЕРЕОТРАЖЕНИЯМИ: ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СРАВНЕНИЕ С ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ

Боев Н. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

На основе четырехкратного дифракционного интеграла Кирхгофа разработан прямой численный метод в трехмерной задаче коротковолновой дифракции сферической волны с учетом её двукратного переотражения на системе двух абсолютно твердых шаровых препятствий, находящихся в безграничной акустической среде. Проведено сравнение давления в двукратно переотраженной акустической волне, полученного на основе численного метода с лучевым приближением решения этой задачи, которое получено на основе модификации интегрального представления Кирхгофа.

Постановка задачи. В безграничной акустической среде рассмотрим систему двух абсолютно твердых шаровых препятствий радиуса R и расстояния между их центрами $2h$ (рис. 1). Отнесем препятствия к основной правой декартовой системе координат $OXYZ$ и двум вспомогательным декартовым системам координат $O_iX_iY_iZ_i$, $i = 1, 2$, связанным с препятствиями. Взаимное расположение систем координат показано на рис. 1. Точечный источник сферической волны находится в координатной плоскости $X_1O_1Z_1$ в точке A с координатами в системе $OXYZ$: $A(-a, -h, b)$, $a > 0$, $h > 0$, $b > 0$. Датчик для приема переотраженной волны расположен в координатной плоскости $X_2O_2Z_2$ в точке D с координатами в системе $OXYZ$: $D(a, h, b)$.

Найдем давление в двукратно отраженной акустической сферической волне в точке D при распространении её вдоль кратчайшего пути $A - B - C - D$. Точка зеркального отражения B расположена на левой сфере, а точка зеркального отражения C расположена на правой сфере (рис. 1 и 2).

Метод решения. Из симметрии расположения шаровых препятствий относительно координатных плоскостей декартовой системы $OXYZ$ и симметричного относительно оси OZ расположения источника A и приемника D акустической волны, кратчайшее расстояние $A - B - C - D$ следует искать для точек B и C , симметрично расположенных относительно оси OZ . Выпишем координаты точек B и C в системах координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$ соответственно

$$B \left(x_1, y_1 - h, \sqrt{R^2 - x_1^2 - y_1^2} \right), C \left(x_2, y_2 + h, \sqrt{R^2 - x_2^2 - y_2^2} \right).$$

В координатах z_1 и z_2 учтено, что точки B и C расположены на сферах. Введем в рассмотрение функцию $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ — сумму расстояний $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = |AB| + |BC| + |CD|,$$

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1, x_2, y_2) = & \left[(x_1 + a)^2 + y_1^2 + \left(\sqrt{R^2 - x_1^2 - y_1^2} - b \right)^2 \right]^{1/2} + \\
& + \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1 + 2h)^2 + \left(\sqrt{R^2 - x_2^2 - y_2^2} - \sqrt{R^2 - x_1^2 - y_1^2} \right)^2 \right]^{1/2} + \\
& + \left[(a - x_2)^2 + y_2^2 + \left(b - \sqrt{R^2 - x_2^2 - y_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

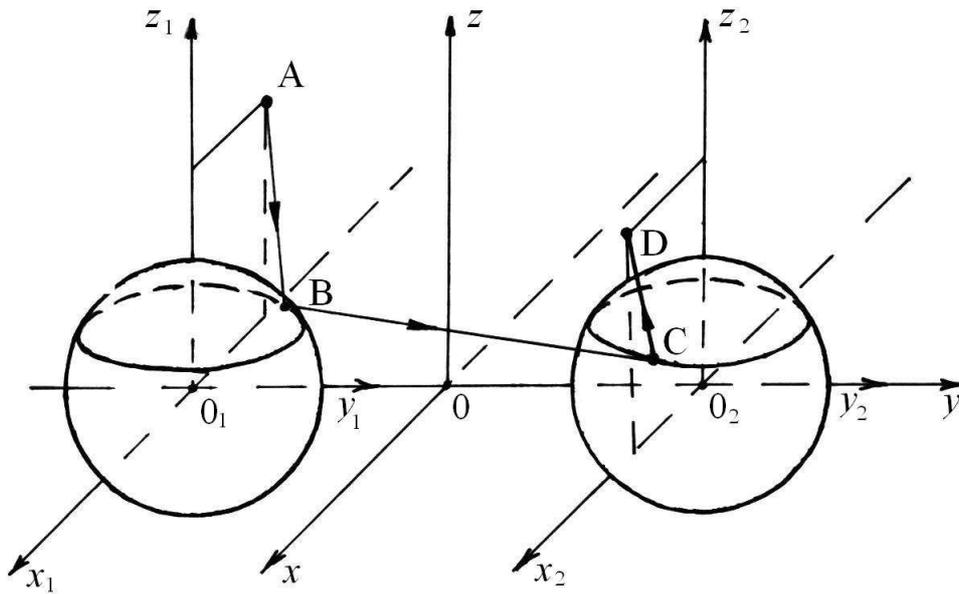


Рис. 1. Двукратное переотражение высокочастотной акустической сферической волны от шаровых отражателей. Общий вид.

Параметры задачи выбраны следующими: $a = 4, 2$; $h = 1, 1$; $b = 1, 8$; $R = 1$. Координаты точек зеркального отражения B и C определены при численном решении задачи на условный экстремум для нахождения кратчайшего расстояния $A - B - C - D$ методом Ньютона $x_1 = -0.324$, $y_1 = 0.798$, $x_2 = 0.324$, $y_2 = -0.798$.

Для прямого численного расчета давления в точке D в высокочастотной акустической волне будем исходить из интегрального представления [1], [2]

$$p(D) = -\frac{k^2 \cos \gamma_2 \cos \gamma_1}{4\pi^2 L_0 L_1 L_2} \iint_{S_2} \iint_{S_1} e^{ik(|x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3|)} dS_1 dS_2. \quad (1)$$

В данном случае $L_0 = |AB|$, $L_1 = |BC|$, $L_2 = |CD|$; γ_1 — угол между направлением падения волны AB и нормалью к сфере в точке B , γ_2 — угол между направлением BC и нормалью к сфере в точке C .

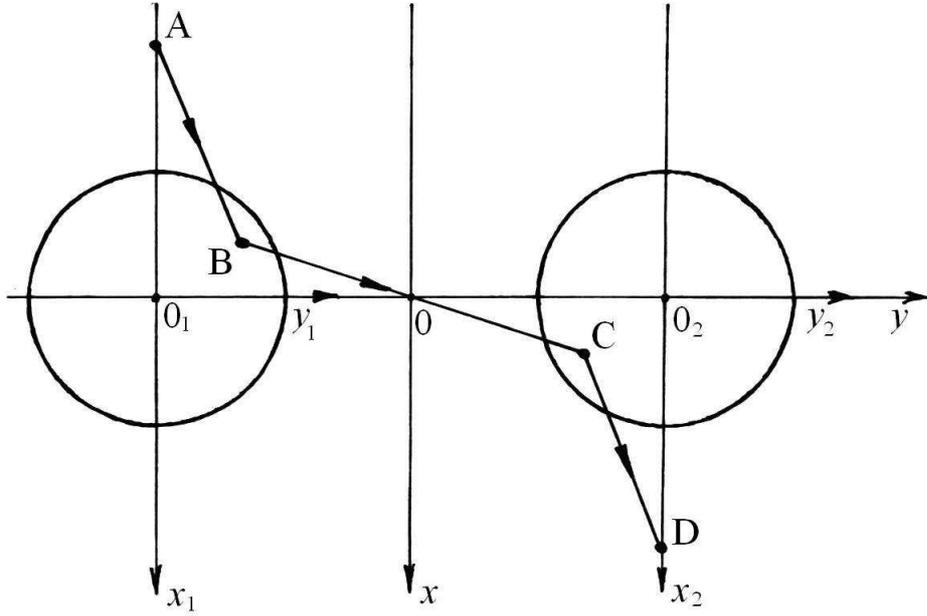


Рис. 2. Двукратное переотражение высокочастотной акустической сферической волны от шаровых отражателей. Вид сверху.

При численном расчете давления $p(D)$ не будем учитывать постоянного множителя перед интегралом

$$p(D) \sim \iint_{S_2} e^{ik|y_2-x_3|} \left[\iint_{S_1} e^{ik(|x_0-y_1|+|y_1-y_2|)} dS_1 \right] dS_2.$$

Элемент площади на сфере $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\psi$ (θ — широта, ψ — долгота). В дальнейшем полагается $R = 1$. Для обеих сфер берется равномерная сетка по θ и по ψ с одинаковым угловым шагом. Для левой сферы узловые значения θ и ψ снабжаются индексами i_1 и j_1 : θ_{i_1} и ψ_{j_1} , а для правой сферы — индексами i_2 и j_2 : θ_{i_2} и ψ_{j_2} . Интегрирование ведется по областям S_1 (левая сфера): $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$ и S_2 (правая сфера): $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \psi < 2\pi$, при этом шаг по углу берется $h_0 = \pi/(2N)$. Области S_1 и S_2 содержат точки зеркальных отражений: B — от левой сферы, C — от правой сферы.

Приближенная формула для давления имеет вид:

$$p(D) = p_1 + ip_2 = \sum_{i_2=1}^N \sum_{j_2=1}^N [\cos(k|x_3 - y_{i_2, j_2}|) + i \sin(k|x_3 - y_{i_2, j_2}|)] \times \\ \times \sum_{i_1=1}^N \sum_{j_1=1}^N \left\{ \left[\cos \left(k \left| x_0 - (y_1)_{i_1, j_1} \right| + \left| (y_1)_{i_1, j_1} - (y_2)_{i_2, j_2} \right| \right) \right] + \right.$$

$$+i \sin \left(k \left| x_0 - (y_1)_{i_1, j_1} \right| + \left| (y_1)_{i_1, j_1} - (y_2)_{i_2, j_2} \right| \right) \Big\},$$

$$A(p(D)) = |p_1 + ip_2|. \quad (2)$$

kR	$ A $						
200	0,846	214	0,778	228	0,683	242	0,779
202	0,768	216	0,813	230	0,626	244	0,874
204	0,705	218	0,831	232	0,570	246	0,947
206	0,664	220	0,829	234	0,527	248	0,989
208	0,657	222	0,812	236	0,523	250	1,00
210	0,682	224	0,780	238	0,576	252	0,981
212	0,729	226	0,735	240	0,672		

Вычислялась вещественная амплитуда давления $p(D)$ в высокочастотной области. Были взяты целочисленные значения в промежутке $kR \in [200, 252]$.

Количество точек N разбиения по θ и ψ каждой из областей S_1 и S_2 определялось из условия, что при рассматриваемых k на длине волны бралось 8 – 10 точек.

В рассматриваемом диапазоне изменения kR значение N бралось равным $N=360$. В таблице приведены значения вещественной амплитуды в диапазоне $kR \in [200, 250]$ с шагом 2. Эти же данные приведены и на рис. 3, где численный расчет сравнивается с лучевым решением.

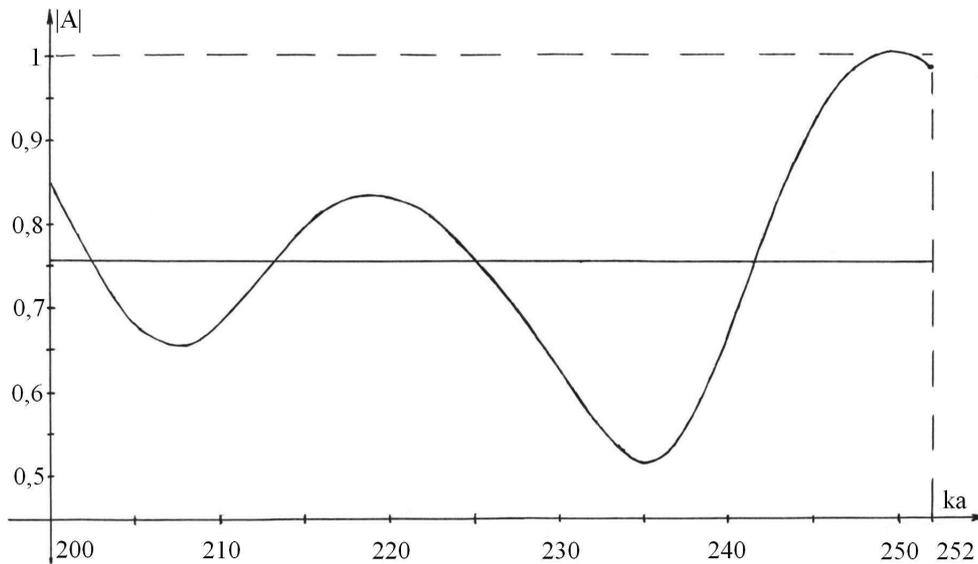


Рис. 3. Сравнение асимптотического (отрезок прямой) и прямого численного расчета (волнистая линия) в задаче двукратного отражения акустической волны от двух сферических препятствий, находящихся в акустической среде.

Лучевое решение. Лучевое решение задачи коротковолновой дифракции в случае двукратного отражения акустической волны от системы двух препятствий,

ограниченных двумя произвольными гладкими замкнутыми поверхностями и находящимися в акустической среде, получено в [1], [2] асимптотической оценкой дифракционного интеграла Кирхгофа (1) методом четырехмерной стационарной фазы [4]. Применительно к данной задаче это решение имеет вид

$$p(D) = \frac{\cos^2 \gamma}{L_0 L_1 L_2} \frac{\exp \left\{ i \left[k (L_0 + L_1 + L_2) + \frac{\pi}{4} \delta_4 \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_4)|}}. \quad (3)$$

В нашем случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. При взятых параметрах задачи угол падения волны $\gamma = 72^\circ$, угол поворота плоскости падающего луча $A - B - C$ в точке C равен $\Phi = 119^\circ$.

Для нахождения численного значения давления (1) в случае переотражения акустической волны на двух сферах (рис. 1 и рис. 2) элементы матрицы Гессе D_4 получены на основе работ [2], [3].

Из рис. 3 видно, что численное решение осциллирует относительно асимптотического решения.

Исследования выполнены при поддержке гранта № К - 07 - Т - 130 ФГОУ ВПО “Южный федеральный университет” по программе “Развитие сети национальных университетов”.

Список литературы

- [1] Боев Н.В., Сумбатян М.А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т.392. № 5. С. 614–617.
- [2] Боев Н.В. Рассеяние высокочастотных волн на поверхностях в сплошных средах с учетом переотражений // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 756–761.
- [3] Боев Н.В. Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 65–80.
- [4] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Boyev N.V. *Direct numerical method in a three-dimensional diffraction problem with re-reflections: numerical modeling and comparison with the ray method.* On the basis of four-fold diffraction Kirchhoff integral there is developed a direct numerical method in the three-dimensional short-wave problem about diffraction of a spherical wave with its double reflection from a system of two acoustically hard spherical obstacles placed in an unbounded acoustic medium. It is performed a comparison of the acoustic pressure in the doubly reflected acoustic wave, which is obtained on the basis of a numerical method, with the ray approximation constructed on the basis of the modified integral Kirchhoff representation.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

Бочарова О. В., Ватульян А. О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены задачи о восстановлении модуля упругости и плотности в стержне при анализе продольных и изгибных колебаний. Для решения поставленных задач предложен итерационный алгоритм, основанный на аппарате интегральных уравнений. Рассмотрены конкретные примеры восстановления.

Задачи определения распределенных неоднородностей в упругих телах представляют собой важную задачу диагностики, которая может быть решена в рамках подхода, основывающегося на идеологии обратных коэффициентных задач теории упругости. В настоящей работе решены задачи о реконструкции модуля упругости и плотности в стержне при анализе его продольных и изгибных колебаний.

Краевая задача, описывающая продольные колебания стержня постоянного поперечного сечения после отделения временного множителя имеет вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) + \rho(x) \omega^2 u(x) = 0 \quad (1)$$

$$u(0) = 0$$

$$E(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l) = -p_0$$

Здесь $E(x)$, $\rho(x)$ — неизвестные функции модуля упругости и плотности. Также известна дополнительная информация об амплитудно-частотной характеристике торца стержня следующего вида:

$$u(l, \omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (2)$$

Задача (1)–(2) представляет собой коэффициентную обратную задачу для дифференциального оператора 2-го порядка и является нелинейной и некорректной проблемой [2].

Для решения поставленной задачи был использован метод линейаризации [3] в окрестности начального приближения $E_0(x)$, $\rho_0(x)$, с помощью которого задача была сведена к системе интегральных уравнений (3)–(4).

$$u_0(x) - \omega^2 \int_0^l \rho_0(t) u_0(t) K(t, x) dt = -p_0 \int_0^x \frac{d\xi}{E_0(\xi)} \quad K(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{d\xi}{E_0(\xi)} \quad (3)$$

$$\int_0^l (u_0'(x, \omega))^2 E_1(x) dx - \omega^2 \int_0^l u_0(x, \omega)^2 \rho_1(x) dx = p_0 u_1(l), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4)$$

Отметим, что в настоящей работе как при анализе продольных колебаний, так и при анализе изгибных колебаний каждая из двух неизвестных функций восстанавливалась, когда известен закон изменения другой из них, поскольку в противном случае восстановление искомым характеристик неединственно. На основе системы уравнений (3)–(4) можно построить итерационный процесс в каждой из подзадач. Для задачи о восстановлении модуля Юнга при известной плотности i -тый шаг итерационного процесса описывается системой операторных уравнений следующего вида:

$$u_0^i(x) - \omega^2 \int_0^l \rho(t) u_0^i(t) W^i(t, x) dt = -p_0 \int_0^x \frac{d\xi}{E_0^i(\xi)} \quad W^i(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{d\xi}{E_0^i(\xi)} \quad (5)$$

$$u_1^i(l, \omega) = f_1(\omega) - u_0^i(l, \omega)$$

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u_0^i(x, \omega)}{\partial x} \right)^2 E_1^i(x) dx = p_0 u_1^i(l) \quad , \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

$$E_0^{i+1}(x) = E_0^i(x) + E_1^i(x)$$

Отметим, что первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. В настоящей работе начальное приближение $E_0(x)$ строилось в классе линейных положительных ограниченных функций, так как это показано в [4]. На каждом шаге построенного процесса посредством решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода находилось новое начальное приближение u_0 , с помощью которого вычислялись правая часть интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода и его ядро. После решения этого уравнения вычислялась поправка к неизвестной функции, и с ее учетом производился следующий этап итерационного процесса.

i -тый шаг итерационного процесса для задачи о восстановлении плотности при известном модуле упругости имеет вид (6):

$$u_0^i(x) - \omega^2 \int_0^l \rho_0^i(t) u_0^i(t) W(t, x) dt = -p_0 \int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)} \quad W(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{d\xi}{E(\xi)} \quad (6)$$

$$u_1^i(l, \omega) = f_1(\omega) - u_0^i(l, \omega)$$

$$\omega^2 \int_0^l (u_0(x, \omega))^2 \rho_1^i(x) dx = -p_0 u_1^i(l) \quad , \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

$$\rho_0^{i+1}(x) = \rho_0^i(x) + \rho_1^i(x)$$

Особенностью этой задачи является то, что ядро интегрального уравнения Фредгольма первого рода пропорционально $(u_0(x, \omega))^2$, а из краевого условия задачи имеем, что $u_0(0, \omega) = 0$, и решение неединственно. Обычно в этом случае требуется задавать плотность при $x = 0$.

Отметим, что в том случае когда, информация о значении плотности на защемленном конце стержня не задана, погрешность ее восстановления на этом конце составляет более 20%.

Аналогично решается задача о восстановлении функций $\rho(x)$, $E(x)$ при анализе изгибных колебаниях стержня. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) J \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \omega^2 F \rho(x) w(x) = 0 \quad (7)$$

$$w(0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$$

$$\left(J E(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (l) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(J E(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) (l) = -P$$

$$w(l, \omega) = f_2(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (8)$$

Здесь F и J — соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения стержня. Решение задачи (7)–(8) сводится к решению системы интегральных уравнений (9)–(10).

$$w_0(x) - \frac{\omega^2 F}{J} \int_0^l \rho_0(t) w_0(t) K(t, x) dt = \frac{P}{J} \int_0^x \frac{(x - \xi)(l - \xi)}{E_0(\xi)} d\xi \quad (9)$$

$$K(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{(x - \xi)(t - \xi)}{E_0(\xi)} d\xi$$

$$J \int_0^l (w_0''(x, \omega))^2 E_1(x) dx - \omega^2 F \int_0^l w_0(x, \omega)^2 \rho_1(x) dx = -P w_1(l), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (10)$$

I-тый шаг итерационного процесса для задачи о восстановлении плотности при известном модуле упругости имеет вид (11):

$$w_0^i(x) - \frac{\omega^2 F}{J} \int_0^l \rho_0^i(t) w_0^i(t) K(t, x) dt = \frac{P}{J} \int_0^x \frac{(x - \xi)(l - \xi)}{E_0(\xi)} d\xi \quad (11)$$

$$K(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{(x - \xi)(t - \xi)}{E_0(\xi)} d\xi \quad w_1^i(l, \omega) = f_2(\omega) - w_0^i(l, \omega)$$

$$\omega^2 \int_0^l (w_0(x, \omega))^2 \rho_1^i(x) dx = \frac{P}{F} w_1^i(l) \quad , \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

$$\rho_0^{i+1}(x) = \rho_0^i(x) + \rho_1^i(x)$$

В этой задаче также как и в задаче о восстановлении плотности при продольных колебаниях стержня для обеспечения единственности решения необходимо знать значение функции плотности в точке $x = 0$.

I-тый шаг итерационного процесса для задачи о восстановлении модуля Юнга при известной плотности описывается системой операторных уравнений следующего вида:

$$w_0^i(x) - \frac{\omega^2 F}{J} \int_0^l \rho_0(t) w_0^i(t) K^i(t, x) dt = \frac{P}{J} \int_0^x \frac{(x - \xi)(l - \xi)}{E_0^i(\xi)} d\xi \quad (12)$$

$$K^i(t, x) = \int_0^{\min(t, x)} \frac{(x - \xi)(t - \xi)}{E_0^i(\xi)} d\xi$$

$$w_1^i(l, \omega) = f_2(\omega) - w_0^i(l, \omega)$$

$$J \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_0^i(x, \omega)}{\partial x^2} \right)^2 E_1^i(x) dx = -P w_1^i(l), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

$$E_0^{i+1}(x) = E_0^i(x) + E_1^i(x)$$

Особенностью задачи является то, что в ядро интегрального уравнения Фредгольма первого рода входит множитель $(w_0''(x, \omega))^2$. Из краевого условия задачи известно, что $w_0''(l, \omega) = 0$, поэтому для решения поставленной задачи необходимо знать значение функции модуля упругости в точке $x = l$.

Была проведена серия вычислительных экспериментов.

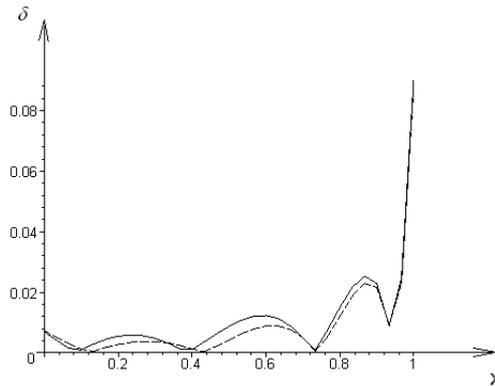


Рис. 1. Относительная погрешность при восстановлении плотности

Введем обозначения $\rho(x) = \rho_0 g_1(x)$, $E(x) = E_0 g_2(x)$. На рисунке 1 приведен график относительной погрешности δ для восстановления плотности стержня при изгибных (сплошной линией) и продольных (пунктиром) колебаниях для следующих законов $g_1(x) = 2 - x^3$, $g_2(x) = 3 + 0.5x$. Безразмерный отрезок измерения амплитудно-частотной характеристики имел длину 1, измерения производились для трех значений внутри выбранного диапазона. Из рисунка видно, что как при

продольных, так и при изгибных колебаниях максимум погрешности ($\approx 9\%$) достигается на свободном конце стержня. Значение функции плотности на защемленном конце стержня считалось известным.

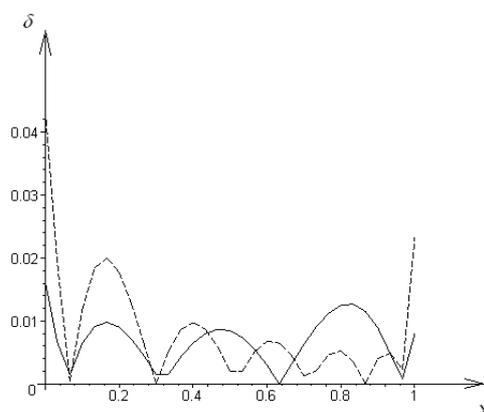


Рис. 2. Относительная погрешность при восстановлении модуля Юнга

На рисунке 2 приведен график относительной погрешности для восстановления модуля упругости стержня при следующих законах $g_1(x) = 1 + x$, $g_2(x) = 1 + (x - 0.5)^2$. При изгибных колебаниях рассматривался безразмерный частотный отрезок длины 1, измерения производились для двух значений внутри выбранного диапазона, значение модуля упругости на свободном конце стержня считалось заданным. При продольных колебаниях отрезок измерений имел длину 1.5, измерения производились в семи частотах внутри выбранного диапазона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 05-01-00734.

Список литературы

- [1] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
- [2] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
- [3] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [4] Бочарова О.В. Идентификация модуля упругости в стержне. // Труды X Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Изд-во "ЦВВР". 2006. Т 2. С. 94–98

Bocharova O. V., Vatulyan A. O. *Inverse problems for rods.* The problems about reconstruction modulus of elasticity and density of the rod upon it's longitudinal and bending oscillations are considered. For analysis of formulated problems the iteration algorithm based on the aparatous of integral equations is proposed. Concrete examples of reconstruction are examined.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Ватульян А. О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены постановки задач об идентификации предварительного напряженного состояния на основе акустических методов. Предложена формулировка обобщенных соотношений взаимности, на основе которых построены итерационные процессы по определению искомым характеристик.

Введение. Контроль уровня предварительного напряженного состояния сооружений и конструкций является одной из важнейших технических проблем, имеющей приложения в горной механике и геофизике, в биомеханике, в совершенствовании методик неразрушающего контроля, а также в определении уровня предварительных напряжений в аварийных конструкциях [1]. Отметим, что акустические методы исследования являются одними из главных источников получения информации о внутренних напряжениях, об их структуре и уровне. К настоящему времени достаточно подробно изучено влияние однородного напряженного состояния на волновые процессы в стержнях, пластинах, в канонических областях типа слоя, бесконечного цилиндра [2-7], в частности на амплитудно-частотные характеристики и скорости распространяющихся упругих волн, что привело к созданию нового экспериментального направления – акустоупругости [4,5], нашедшего значительные практические приложения. При этом проблема описывается краевой задачей для системы дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с постоянными коэффициентами, зависящими от уровня напряженного состояния. При описании колебаний упругих тел в условиях неоднородного предварительного состояния коэффициенты дифференциальных уравнений являются некоторыми функциями координат. Задача определения уровня и структуры этих функций (особенно в окрестности концентраторов различного вида) по измеренному полю перемещений на части границы тела является весьма важной проблемой при организации регулярного мониторинга для сооружений ответственного назначения. Проблемы такого типа относятся к обратным коэффициентным задачам теории упругости, причем ключевым моментом в их исследовании является формулировка операторных соотношений, связывающих заданные (измеренные) и искомые функции [8-10]. Это обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде общих представлений решений для соответствующих операторов, как это имеет место для операторов с постоянными коэффициентами. Что же касается построения операторных соотношений в обратных задачах, то можно сформулировать итерационные процессы отыскания неизвестных функций, основанные на обобщении теоремы взаимности [11-13] и на

сведении исходной задачи к поэтапному решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами. Отметим также, что значительный интерес для этого класса задач имеют принципы разработки численных методов на основе различных регуляризованных подходов [14], а также формулировка условий, гарантирующих единственность решения.

1. Постановка обратных коэффициентных задач по определению предварительного напряженного состояния. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$, а n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S .

Будем считать, что в теле имеется неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ и компонентами вектора перемещений $u_i^{(0)}$. Будем считать, что колебания вызываются нагрузкой, приложенной на части S_σ , а часть S_u закреплена. Линеаризованные относительно дополнительных смещений u_i уравнения колебаний после отделения времени имеют следующий вид [13]

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

$$T_{ij} = \sigma_{mj} (\delta_{im} + u_{i,m}^0) + u_{i,m} \sigma_{mj}^0 \quad (2)$$

$$\sigma_{mj} = c_{mjkl} u_{k,l} \quad (3)$$

$$u_i|_{S_u} = 0 \quad , \quad T_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i \quad (4)$$

T_{ij} — компоненты несимметричного тензора, определяемого согласно (2). Наличие предварительного напряженного состояния приводит к изменению амплитудно-частотных характеристик точек тела V , которое может быть положено в основу процедуры идентификации начальных напряжений. Обычно в качестве дополнительной информации в обратной задаче фигурирует граничное условие

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (5)$$

моделирующее измерение поля смещений на границе тела в эхо-режиме в некотором частотном диапазоне.

В качестве модельного примера приведем вид соответствующих краевых задач при одноосном предварительном напряженном состоянии для консольно закрепленного стержня при действии силы на свободном конце

а) при продольных колебаниях

$$\begin{aligned} ((E + \sigma_{11}^0)u)' + \rho\omega^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0, \quad (E + \sigma_{11}^0(l))u'(l) = -p \\ u(l, \omega) &= f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{aligned} \quad (6)$$

б) при изгибных колебаниях

$$\begin{aligned} & ((E + \sigma_{11}^0)Jw'')'' - F(\sigma_{11}^0 w')' - \rho\omega^2 Fw = 0 \\ & w(0) = w'(0) = 0, (E + \sigma_{11}^0)Jw''(l) = 0, ((E + \sigma_{11}^0)Jw''(l))' = -p \\ & w(l, \omega) = f(\omega), \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{aligned} \quad (7)$$

Реконструкция предварительного напряжения σ_{11}^0 осуществляется на основе решения обратной коэффициентной задачи для дифференциального оператора соответственно второго или четвертого порядка [9, 10]. Существенным отличием этих задач от коэффициентных задач по определению модуля упругости или плотности, является отсутствие априорной информации о положительности или отрицательности искомых функций [10], что осложняет процедуру их идентификации.

2. О формулировке обобщенного соотношения взаимности и его использовании. Для получения аналитических соотношений, связывающих заданные и искомые функции, в обратных коэффициентных задачах, которые являются нелинейными, наиболее часто используется метод линеаризации [9,10]. При этом для нахождения искомой операторной связи необходимо обращать дифференциальные операторы с переменными коэффициентами, что практически невозможно для произвольных видов зависимостей. Как правило, большинство авторов, исследуя различные задачи неоднородной теории упругости, осуществляют замену исходного дифференциального оператора на дифференциальный оператор, который может быть обратим аналитически (как правило, это операторы с постоянными коэффициентами). Отметим, что процедура линеаризации требует вычисления производных операторов по Фреше. В то же время возможно избежать этой громоздкой процедуры, используя обобщенное соотношение взаимности, которое построено в [11-13] для различных вариантов модели предварительного напряженного состояния, которое при постоянных модулях упругости и плотности приводят к следующему соотношению

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{mj}^{(02)} - \sigma_{mj}^{(01)}) u_{i,j}^{(1)} u_{i,m}^{(2)} dV + \int_V (u_{i,m}^{(02)} - u_{i,m}^{(01)}) c_{mjkl} u_{k,l}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} dV + \\ & + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что если в модели, описывающей предварительное напряженное состояние, пренебречь величинами $u_{i,m}^{(0j)}$ по сравнению с единицей [3] (что часто осуществляется в постановках [12]), то соотношение (9) упрощается и принимает вид

$$\int_V (\sigma_{mj}^{(02)} - \sigma_{mj}^{(01)}) u_{i,j}^{(1)} u_{i,m}^{(2)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (9)$$

Построенные соотношения взаимности (8)–(9) позволяют сразу формулировать итерационные процессы во всех типах обратных задач, минуя процедуру решения задач первого приближения, которая получается традиционным способом, описанным, например, в [9-10].

На основе соотношений (8) и (9) можно строить итерационные процессы, формулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром.

Будем исходить из соотношения (8). Полагая в нем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(01)} &= t_{ij}^{(n-1)}, & \sigma_{ij}^{(02)} &= t_{ij}^{(n-1)} + t_{ij}^{(n)}, & u_i^{(1)} &= u_i^{(n-1)}, & u_i^{(2)} &= u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}, \\ u_i^{(01)} &= \nu_i^{(n-1)}, & u_i^{(02)} &= \nu_i^{(n-1)} + \nu_i^{(n)} \end{aligned}$$

и, сохраняя линейные относительно возмущений слагаемые, получим

$$\int_V t_{mj}^{(n)} u_{i,j}^{(n-1)} u_{i,m}^{(n-1)} dV + \int_V \nu_{i,m}^{(n)} c_{mjkl} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(0)}) dS = 0, \quad (10)$$

$\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

Это уравнение можно использовать для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию, которое также может быть выбрано простейшим образом, например однородным.

В общем случае отыскания предварительного напряженного состояния требуется определить 6 компонент симметричного тензора $t_{mj}(x)$ и одного интегрального уравнения типа (10) недостаточно, чтобы осуществить процедуру реконструкции. Для формулировки дополнительных интегральных уравнений такого же вида необходимо либо изменить структуру функций нагружения p_i , либо область приложения нагрузки S_σ ; при этом получатся аналогичные уравнения с другими ядрами и правыми частями.

Уравнения типа (10) порождают операторные уравнения Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывными операторами, при обращении которых необходимо использовать регуляризующую процедуру в той или иной форме. Множество поиска можно сузить также при наличии дополнительной информации, что искомые функции зависят лишь от одной координаты, что часто встречается в приложениях. Как правило, интегральное уравнение или система сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых переменных на основе одной из проекционных схем, в частности и конечноэлементной аппроксимации [13]. При численной реализации процедуры обращения был использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [14]. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний является весьма важным как с точки зрения обоснования единственности поставленных обратных задач, так и с точки зрения построения эффективных численных схем.

Примеры численной реконструкции простейших законов неоднородности (одноосное напряженное состояние, зависящее от одной координаты) для плоской области приведены в [13]. Метод реконструкции, основанный на предложенном итерационном процессе, показал достаточно хорошую точность определения предварительного напряженного состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00734)

Список литературы

- [1] Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240с.
- [2] Гузь А.Н., Жук А.П., Ф.Г. Махорт. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев. Наукова думка, 1976. 104 с.
- [3] Гузь А.Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений. // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 1. С. 3–17.
- [4] Бакулин А.В., Троян В.Н., Бакунин В.Н. Акустоупругость горных пород. С. – Петербург.: Изд С-Пб унив., 2000. 316с.
- [5] Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н.Новгород.: ТАЛЛАМ, 2005. 208с.
- [6] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
- [7] Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240с.
- [8] Isakov V. Inverse problems for PDE. Springer-Verlag. 2005. 284p.
- [9] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206с.
- [10] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [11] Ватульян А.О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния// Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. № 2. С. 23–25.
- [12] Ватульян А.О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестник Самарского госуниверситета, естественные науки. 2007. № 4 (54). С. 93–103.
- [13] Ватульян А. О., Соловьев А.Н. Об определении неоднородного предварительного напряженного состояния в твердых телах //Материалы XVII международной школы им. акад С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках”. Алушта. 2007. С. 80–83.
- [14] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Vatulyan A.O. *About the inverse problems of the identification of the heterogeneous prestressed state.* The definitions of the problems of the prestress condition identification based on the acoustical methods are researched. The formulation of the generalized reciprocity equations is suggested and the variational processes for the definition desired characteristics, using such conditions, are created.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В УПРУГОМ СЛОЕ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТЯХ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТАМИ

Глушков Е. В., Кваша О. В.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматривается плоская задача о контактном взаимодействии упругого слоя и двух пьезоэлектрических накладок, симметрично расположенных на его верхней и нижней поверхностях. Исследуются резонансные свойства системы при различных способах фазирования управляющих электрических полей.

В настоящее время всё более широкое применение получают электромеханические системы с пьезоэлектрическими возбудителями упругих волн, выполненными в виде гибких поверхностных накладок или внутренних прослоек волноводных структур. Примером здесь могут служить оболочечные конструкции аэрокосмических изделий, снабженные системой сенсоров, системы активного виброгашения в салоне автомобиля или в помещении, системы прецизионного позиционирования, работающие на упругих поверхностных волнах и др.

Так как пьезоэлектрические наклейки часто используются для наблюдения за состоянием тонкостенных элементов конструкций, в первую очередь были изучены низкочастотные изгибные и продольные колебания, возбуждаемые ими в балках, пластинах и оболочках (см., например, [1] и имеющийся там обзор). В этих моделях действие пьезоэлементов моделируется парами сосредоточенных сил, приложенных к концам областей их контакта с упругим телом. Величины сил вычисляются при этом исходя из геометрических и физических свойств волновода и пьезоэлементов. Такой подход позволяет получить достаточно простое и физически наглядное описание происходящих в системе волновых процессов. Тем не менее, область его применимости ограничена низкочастотным диапазоном, где характерные длины волн значительно больше толщины волновода.

Для преодоления этого ограничения требуется использовать более сложные модели как для волновода (упругий слой, полупространство, пакет слоёв и так далее) так и самих пьезоэлементов, и строго учитывать их взаимодействие. Все эти цели могут быть достигнуты с использованием метода конечных элементов [2]. Такой подход, однако, сопряжён с существенными вычислительными затратами, и, что более важно, существенно затрудняет получение физически ясной и наглядной картины волновых явлений, происходящих в системе.

В то же время имеется возможность получить с одной стороны физически наглядное описание волновых полей (как в упрощённых инженерных моделях), с другой — такую же строгую количественную информацию как при использовании метода конечных элементов. Её даёт интегральный подход, основы которого были заложены в фундаментальных исследованиях И.И. Воровича и В.А. Бабешко [3]. Практическая реализация этого подхода связана, однако, с использованием достаточно сложного математического аппарата, поэтому к настоящему времени

имеется сравнительно небольшое число примеров его использования для решения задач контактного взаимодействия пьезоэлектрических элементов с упругими структурами [4]–[8]. Данная работа представляет собой логическое продолжение исследований, получивших отражение в статьях [7, 8], и является первым шагом на пути обобщения построенной в них на основе интегрального подхода модели на случай группы пьезоэлементов, расположенных на обеих сторонах упругого слоя, и исследования свойств таких систем.

Рассматривается однородный изотропный упругий слой толщины h : $-\infty < x < \infty$, $-h \leq z \leq 0$, к верхней и нижней поверхностям которого приклеены тонкие и гибкие полосковые пьезоэлектрические накладки толщины h_0 и ширины $2a$ (рис. 1). Материал каждой из них принадлежит классу симметрии $6mm$, причём для верхних накладок он поляризован в направлении оси z , а для нижних — в противоположном направлении. Вне областей контакта с накладками поверхности слоя свободны от напряжений. Установившиеся гармонические колебания в слое $\mathbf{u}(x, z)e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u} = \{u_x, u_z\}$ — комплексная амплитуда вектора смещений) возбуждаются касательными контактными напряжениями $\tau_{xz}|_{z=0} = q_1$ и $\tau_{xz}|_{z=-h} = -q_2$, возникающими в областях контакта при продольной деформации накладок вдоль оси x под действием поперечных электромагнитных полей с заданными векторами электрического напряжения $\mathbf{E}_1 = (0, 0, E_{z,1})$ и $\mathbf{E}_2 = -(0, 0, E_{z,2})$ (здесь и далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, изложение как правило ведётся в терминах комплексных амплитуд соответствующих величин).

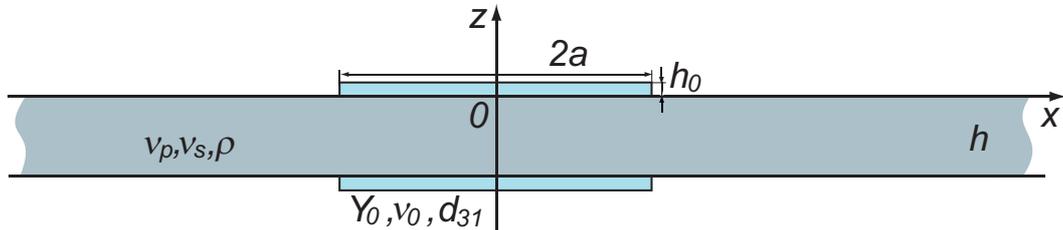


Рис. 1. Упругий слой с пьезоэлектрическими накладками.

Предполагается, что в силу малости толщины ($h_0 \ll \lambda$, где λ — характерная длина объёмных волн в пьезокерамике) продольные компоненты смещений точек накладок v_n не зависят от z . Кроме того, для тонкой и гибкой накладки сдвиговые деформации γ_{xz} и нормальные напряжения σ_z считаются пренебрежимо малыми. Относительно электрического поля $E_{z,n}$ предполагается, что оно однородно в пределах каждой накладки. В рамках этих допущений задача сводится к нахождению неизвестных контактных напряжений под накладками q_n и продольных смещений их точек v_n из следующей интегро-дифференциальной системы:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a k_1(x - \xi)q_1(\xi)d\xi + \int_{-a}^a k_2(x - \xi)q_2(\xi)d\xi &= v_1(x), \\ \int_{-a}^a k_2(x - \xi)q_1(\xi)d\xi + \int_{-a}^a k_1(x - \xi)q_2(\xi)d\xi &= v_2(x), \end{aligned} \quad x \in [-a, a], \quad (1)$$

$$v_n''(x) + \kappa_0^2 v_n(x) = b_0 q_n(x), \quad (2)$$

$$v_n'(\pm a) = e_n, \quad n = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $k_n(x)$ — элемент $k_{11}(x, z)$ матрицы Грина упругого слоя, взятый при $z = 0$ ($n = 1$) или при $z = -h$ ($n = 2$); $\kappa_0^2 = \omega^2 \rho_0 (1 - \nu_0^2) / Y_0$, $b_0 = (1 - \nu_0^2) / (h_0 Y_0)$, $e_n = (1 + \nu_0) d_{31} E_{z,n}$; Y_0 , ν_0 , ρ_0 , d_{31} — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность и пьезоэлектрический модуль материала накладок.

Для решения интегро-дифференциальной задачи (1)–(3) был использован метод сведения к бесконечной алгебраической системе, возникающей при замене интегральных операторов суммой вычетов в вещественных и комплексных полюсах (см., например, статью [7], где рассматривалась аналогичная задача для случая накладок, расположенных на одной из поверхностей слоя), который позволил провести исследования в широком диапазоне значений параметров слоя и накладок.

Наиболее интересными из полученных результатов представляются те, которые касаются резонансных свойств рассматриваемой системы. Как показал численный анализ, проведённый в [7, 8], в случае одного пьезоэлемента зависимость осреднённого за период колебаний потока поступающей в слой энергии E_0 от ширины пьезоэлемента a носит периодический характер. В высокочастотном диапазоне её резонансные максимумы достигаются при значениях a , удовлетворяющих условию

$$2a = \lambda_l (k + 1/2), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\lambda_l = 2\pi / z_l$ — длина волны одной из нормальных мод, возбуждаемых в области контакта слоя с накладкой, причём с ростом частоты ω соответствующие ветви дисперсионных кривых $z_l(\omega)$ выстраиваются вдоль одной линии. В области низких частот в случае, когда число вещественных нормальных мод двуслойной структуры накладка-слой совпадает с числом вещественных нормальных мод упругого слоя, такая же формула справедлива для максимумов зависимостей $E_i^\pm(a)$, если взять в ней $l = i$. При этом частота, начиная с которой резонанс определяет только одна из мод двухслойной структуры, увеличивается при уменьшении толщины накладки.

В рассматриваемом случае ситуация оказывается вполне аналогичной. При асимметричном возбуждении пьезоэлементов ($e_1 = -e_2$) максимумы $E_0(a)$ достигаются при значениях a , удовлетворяющих условию (4), где в качестве z_l берётся волновое число одной из антисимметричных нормальных мод трёхслойной структуры накладка-слой-накладка, а в случае симметричного возбуждения ($e_1 = e_2$) — волновое число одной из её симметричных нормальных мод.

Пример нескольких первых вещественных ветвей дисперсионных зависимостей трёхслойной структуры накладка-слой-накладка $z_l(\omega)$ приводится на рис. 2. Там же для сравнения приведены и дисперсионные зависимости упругого слоя $\zeta_k(\omega)$. Все численные результаты здесь и далее представлены в безразмерном виде, в единицах, выраженных через три базовые величины: толщину h (для линейных размеров), скорость S -волн v_s и плотность ρ волновода. При этом безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f h / v_s$, где f — размерная частота в герцах. Упругие свойства слоя при $v_s = 1$ определяются коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Накладки всегда берутся одинаковой толщины и свойств, в безразмерном виде $h_0 = 1/6$, $Y_0 = 0.866$, $\nu_0 = 0.3$, $\rho_0 = 0.997$.

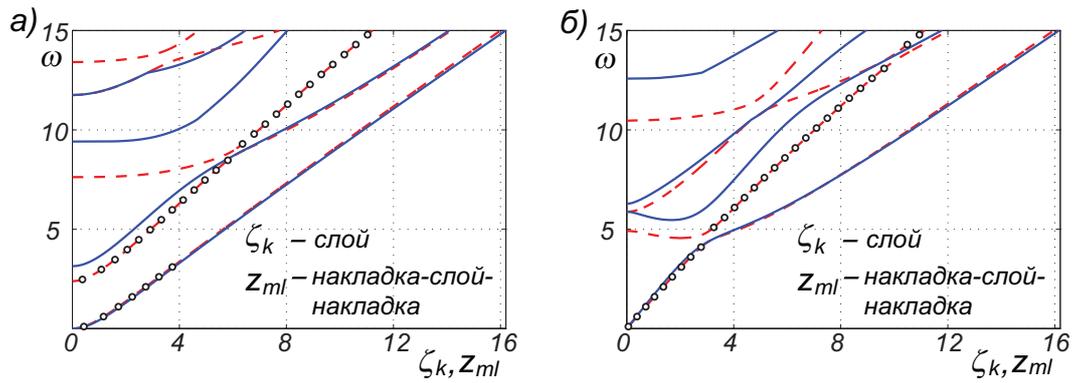


Рис. 2. Волновые числа антисимметричных (а) и симметричных (б) нормальных мод упругого слоя и трёхслойной структуры накладка-слой-накладка в зависимости от частоты.

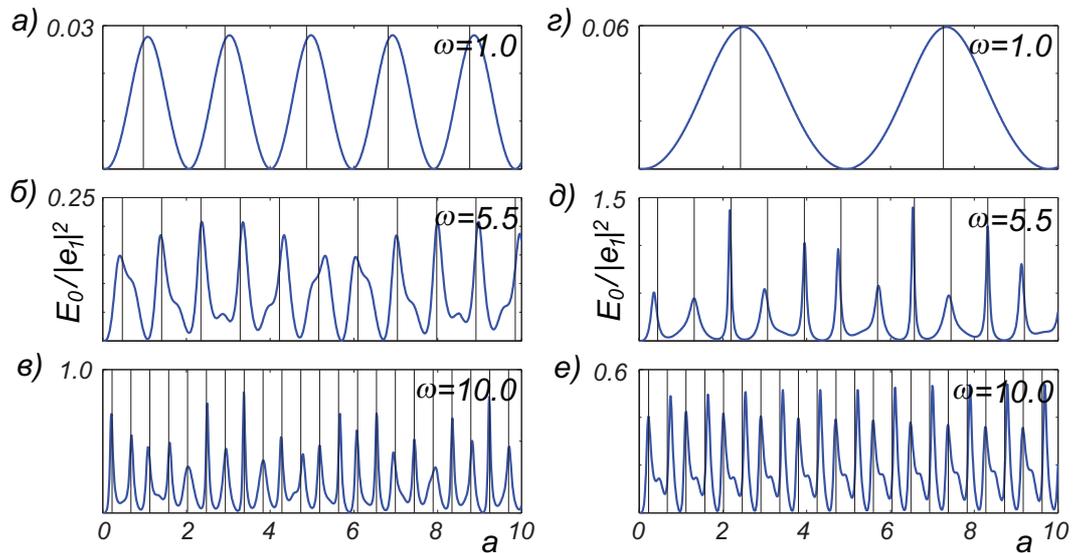


Рис. 3. Осреднённый за период колебаний поток энергии, поступающей в слой от двух симметрично расположенных на его поверхностях пьезоэлементов при их асимметричном (а-в) и симметричном (д-е) возбуждении.

Ветви дисперсионных кривых $z_l(\omega)$, определяющие условие резонанса, отмечены маркерами. Интересно, что с ростом частоты, по аналогии со случаем одной накладки, они выстраиваются вдоль некоторых гладких кривых. Исключения возникают в достаточно узких частотных диапазонах, где появляются новые вещественные ветви $z_l(\omega)$. Обычно при этом число вещественных z_l и ζ_k , соответствующих антисимметричным или симметричным нормальным модам соответствующих структур, различно (например, в случае антисимметричного возбуждения исключение из общего правила составляет диапазон $2.3 < \omega < 3.2$).

Примеры зависимостей $E_0(a)$ для различных значений частоты ω приведены на рис. 3. Для случаев, приведённых на графиках (а-в) были заданы параметры,

соответствующие асимметричному возбуждению пьезоэлементов, а для случаев на графиках (г-е) — их симметричному возбуждению. Вертикальными линиями отмечены значения a , полученные из условия (4) с соответствующим выбором ветвей $z_l(\omega)$. Как видно, они достаточно точно совпадают с точками максимума функций $E_0(a)$, получающимися путём строго решения задачи (1)–(3).

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00307.

Список литературы

- [1] *Banks H.T., Smith R.C. and Wang Yun* The Modelling of Piezoceramic Patch Interactions with Shells, Plates, and Beams // Quarterly of Applied Mathematics. 1995. Vol. LIII. No. 2. P. 353–381.
- [2] *Moulin E., Assaad J. and Delebarre C.* Modeling of Lamb Waves Generated by Integrated Transducers in Composite Plates Using a Coupled Finite Element-Normal Modes Expansion Method // Journal of the Acoustical Society of America. 2000. Vol. 107. No. 1. P. 87–94.
- [3] *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [4] *Ватульян А.О., Скрипочка Л.Н.* О колебаниях пьезоэлектрической пластины на упругом полупространстве // Дефектоскопия. 2000. Т. 1. С. 76–82.
- [5] *Wang X.D., Huang G.L.* Wave Propagation in Electromechanical Structures: Induced by Surface-Bonded Piezoelectric Actuators // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2001. Vol. 12. P. 105–115.
- [6] *Кочетков И.Д., Рогачева Н.Н.* Контактное взаимодействие активного пьезоэлектрического элемента и упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 882–895.
- [7] *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Зеemann В., Кваша О.В.* Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 4. С. 470–479.
- [8] *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Seemann W.* Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // Smart Materials and Structures. 2007. Vol. 16. P. 650–664.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V. *The modelling of waves excited in an elastic layer by piezoelectric actuators bonded to its surfaces.* The dynamic plane strain problem for an elastic layer with two piezoelectric actuators symmetrically bonded to both its surfaces is considered. The resonance properties of the system is investigated for various cases of phasing of driving electric fields.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СКВАЖИННЫХ ВОЛНОВОДАХ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Глушкова Н. В., Фоменко С. И.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматривается задача о возбуждении бегущих волн в многослойном цилиндрическом волноводе (скважинной структуре) с жидкими, упругими и пористыми водонасыщенными слоями и их дифракции на внутреннем препятствии, которое моделируется упругим цилиндрическим включением. Отраженное волновое поле строится в виде линейной комбинации фундаментальных решений для вспомогательных фиктивных источников, расположенных в рассматриваемом волноводе без препятствия.

1. Интерес к исследованию распространения волн в цилиндрических волноводах обусловлен многочисленными приложениями в оптоэлектронике (оптоволоконная связь), геофизике (скважинный каротаж) и в газо- и нефтеразведке и добыче. Начиная с первых теоретических исследований 50-х годов [1], к настоящему времени проведен достаточно полный анализ характеристик бегущих волн, возбуждаемых в скважинах, заполненных жидкостью. Менее исследованными остаются, однако, вопросы влияния дифракции на внутренних искусственных или естественных препятствиях на характеристики работы источника колебаний, на отдаваемую им энергию и на ее распределение между возбуждаемыми волнами различных типов. Традиционно для решения подобного класса задач прибегают к помощи численных методов, таких как метод конечных элементов (МКЭ), либо к помощи полуаналитических схем, таких как метод фундаментальных решений или граничных элементов (МФР/МГЭ). Предлагаемая ниже численная схема отличается от традиционных МФР и МГЭ только выбором базисных функций. В МФР и МГЭ в качестве базиса используются решения для точечных источников в безграничном однородном пространстве [2, 3], в том время, как в рамках данной работы волновое поле в слоистой скважинной структуре представляется в виде разложения по базисным функциям, которые удовлетворяют граничным условиям между слоями цилиндрического волновода и поэтому строго учитывают волновую структуру решения [4].

2. Рассматривается слоистая скважинная структура: внутренний жидкостный цилиндр $D_1: 0 \leq r \leq b_1, -\infty < z < \infty$, упругая стенка $D_2: b_1 \leq r \leq b_2, -\infty < z < \infty$ и внешняя пористая среда (грунт), занимающая область $D_3: b_2 \leq r < \infty, -\infty < z < \infty, r = \sqrt{x^2 + y^2}$. В скважинной жидкости в начале координат расположено препятствие (рис. 1), которое представляет собой упругое цилиндрическое включение (заглушку) высоты $2h$ и радиуса b_1 . На некотором расстоянии d от заглушки расположен источник гармонических колебаний, моделируемый сосредоточенной объемной силой давления $\delta(x, y, z - z_0)e^{-i\omega t}$.

Волновое поле в скважинной жидкости, в упругом слое и в водонасыщенной пористой среде описывается соответственно уравнениями Гельмгольца, Ламе и

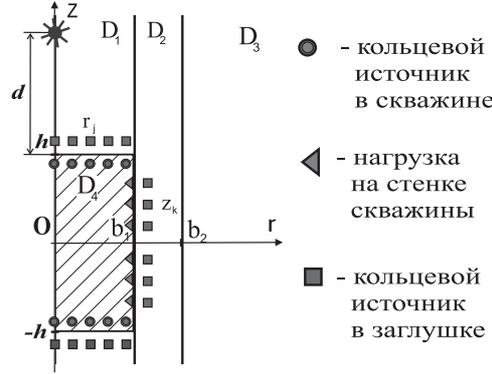


Рис. 1. Схематическое изображение вспомогательных источников.

Био-Френкеля [5]. На границе скважинной жидкости и упругой стенки выполняются условия проскальзывания (равенство нормальных перемещений и напряжений при отсутствии касательных напряжений). На внутренних границах упругих и пористых слоев заданы условия жесткой заделки: непрерывность перемещений и напряжений, а также условие отсутствия радиальной компоненты вектора относительного смещения фаз в пористой среде [5].

Условия на границе между упругим включением и внутренними слоями скважинной структуры имеют вид:

$$\mathbf{u}_4(b_1, z) = \mathbf{u}_2(b_1, z), \quad \boldsymbol{\tau}_{4r}(b_1, z) = \boldsymbol{\tau}_{2r}(b_1, z), \quad -h \leq z \leq h \quad (1)$$

$$u_{4z}(r, \pm h) = u_{1z}(r, \pm h), \quad \boldsymbol{\tau}_{4z}(r, \pm h) = -p_1(r, \pm h)\mathbf{n}_r, \quad 0 \leq r \leq b_1 \quad (2)$$

Здесь \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_4 — комплексные амплитуды смещений точек в скважинной жидкости D_1 , в слое D_2 и в упругом препятствии D_4 соответственно; $\boldsymbol{\tau}_{in} = T_n \mathbf{u}_i$ — напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} в области D_i ; p_1 — давление в D_1 .

3. Согласно принципу суперпозиции общее поле \mathbf{u} в волноводе с препятствием складывается из исходного поля \mathbf{w}_0 для однородной по осевой координате z структуры и поля \mathbf{u}_{sc} , появляющегося в результате дифракции \mathbf{w}_0 на препятствии. Примечательно, что вне заглушки волновая структура поля \mathbf{u}_{sc} такая же, как и у \mathbf{w}_0 , поскольку она определяется той же геометрией и упругими свойствами скважины и грунта. Тем самым, \mathbf{u}_{sc} можно искать в виде суперпозиции базисных решений \mathbf{w}_j и $\mathbf{v}_i^{(1)}$, $\mathbf{v}_i^{(2)}$, порождаемых в рассматриваемом волноводе структуры, фиктивными источниками, расставленными вдоль границ препятствия:

$$\mathbf{u}_{sc} \approx \sum_{j=1}^{2N_r} t_j \mathbf{w}_j + \sum_{i=1}^{N_z} p_i^{(1)} \mathbf{v}_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_z} p_i^{(2)} \mathbf{v}_i^{(2)} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{w}_j — поля, порождаемые кольцевыми источниками $\delta(r - r_j)\delta(z - z_{1j})$, расставленными в скважинной жидкости, вдоль оснований заглушки (рис. 1). Давление $p_{j,1}$, характеризующее поле \mathbf{w}_j в области D_1 , удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Delta p_{j,1} + \alpha_{1p}^2 p_{j,1} &= \delta(r - r_j)\delta(z - z_{1j}), \quad (x, y, z) \in D_1, \\ r_j < b_1, \quad z_{1j} &\in \{-h + \Delta h, h - \Delta h\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 2N_r\} \end{aligned}$$

где $\Delta h > 0$ — некоторый отступ от основания заглушки, а радиальная δ -функция $\delta(r - r_j)$ задается условием: $2\pi \int_0^\infty \delta(r - r_j) f(r) r dr = f(r_j)$.

Базисные решения $\mathbf{v}_i^{(1)}$, $\mathbf{v}_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \dots, N_z$ — волновые поля, возбуждаемые элементарными δ -образными нагрузками $\widehat{\varphi}_i(z)$, заданными на границе между жидкостью и упругой стенкой. Они удовлетворяют граничным условиям:

$$\boldsymbol{\tau}_{i,2r}^{(k)}(b_1, z) + p_{i,1}^{(k)}(b_1, z) \mathbf{n}_r = \mathbf{f}_i^{(k)}(z),$$

в которых $\boldsymbol{\tau}_{i,2r}^{(k)}$ — напряжение на внутренней стенке скважины, $p_{i,1}^{(k)}$ — давление скважинной жидкости, $\mathbf{f}_i^{(1)} = \{\widehat{\varphi}_i, 0\}$ и $\mathbf{f}_i^{(2)} = \{0, \widehat{\varphi}_i\}$. В рамках данной работы в качестве $\widehat{\varphi}_i$ были выбраны сплайны-"шапочки" заданные в узлах сетки $[z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2N_z}]$: $\widehat{\varphi}_i(z) = \widehat{\varphi}((z - z_{2i})/h_z)$, где

$$\widehat{\varphi}(z) = \begin{cases} 1 - |z|, & |z| \leq 1 \\ 0, & |z| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

$h_z = 2h/N_z$ — шаг сетки, $z_{2i} = -h + (i + 1/2)h_z$.

Фундаментальные решения \mathbf{w}_j и $\mathbf{v}_j^{(k)}$ строятся в виде обратного преобразования Фурье:

$$\mathbf{w}_j(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{W}_j(r, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad \mathbf{v}_j^{(k)}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(r, \alpha) \mathbf{F}^{(k)}(\alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha$$

Здесь $\mathbf{W}_j(r, \alpha) = \mathcal{F}_z[\mathbf{w}_j(r, z)]$ — преобразование Фурье по координате z вектора \mathbf{w}_j ; $\mathbf{F}^{(k)}$ — Фурье-символ нагрузки $\mathbf{f}^{(k)}$, а $K(r, \alpha)$ — матрицы Грина $k(r, z)$, столбцами которой являются решения для сосредоточенных нагрузок $\{\delta(z), 0\}$ и $\{0, \delta(z)\}$, приложенных к поверхности $r = b_1$. Компоненты \mathbf{W}_j и K выражаются через линейные комбинации функций Бесселя или Ханкеля, в которых коэффициенты разложения $c_k(\alpha)$ определяются из линейной алгебраической системы, возникающей при удовлетворении граничным условиям между слоями.

Волновое поле в области D_4 (упругое препятствие), аппроксимируется суммой:

$$\mathbf{u}_4 = \sum_{j=1}^{N_z+2Nr} s_j^{(1)} \mathbf{w}_{j,4}^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_z+2Nr} s_j^{(2)} \mathbf{w}_{j,4}^{(2)}, \quad (5)$$

в которой базисные функции $\mathbf{w}_{j,4}^{(k)} = \nabla \varphi_{j,4}^{(k)} + \text{rot } \psi_{j,4}^{(k)} \mathbf{n}_\theta$ ($k = 1, 2$; \mathbf{n}_θ — азимутальный вектор цилиндрической системы координат) выражаются через потенциалы $\varphi_{j,4}^{(k)}$ и $\psi_{j,4}^{(k)}$, являющимися фундаментальными решениями волновых уравнений, заданных в безграничной среде:

$$\Delta \varphi_{j,4}^{(1)} + \varkappa_{4p}^2 \varphi_{j,4}^{(1)} = \delta(r - r_j) \delta(z - z_{4j}), \quad \psi_{j,4}^{(1)} \equiv 0 \quad (6)$$

$$\Delta \psi_{j,4}^{(2)} + (\varkappa_{4s}^2 - 1/r^2) \psi_{j,4}^{(2)} = \delta'(r - r_j) \delta(z - z_{4j}), \quad \varphi_{j,4}^{(2)} \equiv 0 \quad (7)$$

Символ "штрих", при радиальной δ -функции в (7) означает производную по r . Частные решения уравнений (6) и (7) находятся в виде интегралов:

$$\varphi_{j,4}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varkappa_{4p} R_j}}{R_j} d\gamma, \quad \psi_{j,4}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i\varkappa_{4s} R_j}}{R_j} d\gamma,$$

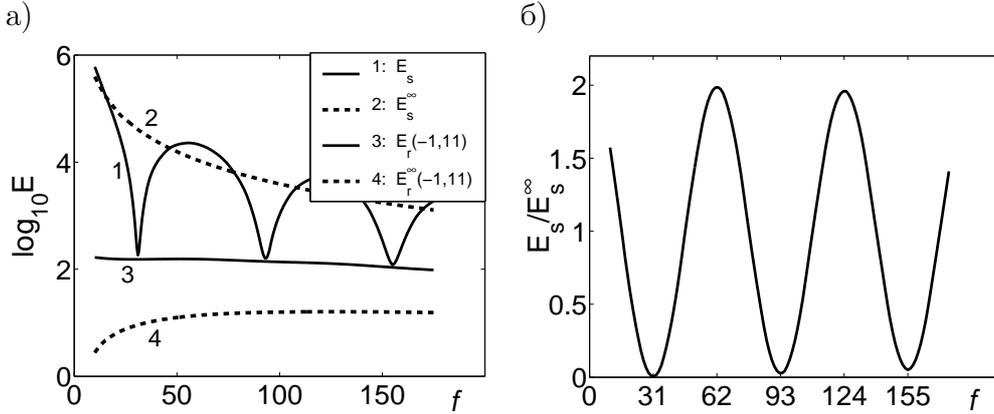


Рис. 2. Влияние заглушки на энергию волнового поля в скважине

здесь $R_j = \sqrt{r^2 + r_j^2 - 2rr_j \cos \gamma + (z - z_{4j})^2}$. Расстановка источников показана на рис. 1.

Поскольку решения \mathbf{w}_j , $\mathbf{v}_i^{(1)}$, $\mathbf{v}_i^{(2)}$ автоматически удовлетворяют всем граничным условиям на цилиндрических границах раздела слоев $r = \text{const}$, неизвестные t_j , $p_i^{(1)}$, $p_i^{(2)}$ и $s_j^{(1)}$, $s_j^{(2)}$ выбираются так, чтобы суммарное поле $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sc}$ и поле \mathbf{u}_4 удовлетворяли только граничным условиям на поверхности препятствия. Минимизация невязки между полями в условиях (1) по схеме Галеркина с проекторами $\hat{\varphi}_k$ (4) приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_4(b_1, z) - \mathbf{u}_{sc}(b_1, z), \hat{\varphi}_k)_{L_1} &= (\mathbf{w}_0(b_1, z), \hat{\varphi}_k)_{L_1} \\ (\boldsymbol{\tau}_{4r}(b_1, z) - \boldsymbol{\tau}_{sc}(b_1, z), \hat{\varphi}_k)_{L_1} &= (\boldsymbol{\tau}_0(b_1, z), \hat{\varphi}_k)_{L_1}, \quad k = 1, 2, \dots, N_z \end{aligned}$$

подстановка в которые \mathbf{u}_{sc} и \mathbf{u}_4 в виде (3) и (5), а также в условия (2) с последующей их дискретизацией по методу коллокаций, приводит к линейной алгебраической системе $\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{b}$ относительно вектора неизвестных $\mathbf{t} = \{t_j, p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, s_i^{(1)}, s_i^{(2)}\}$. Элементы матрицы \mathbf{A} выражаются через базисные функции, а вектор правой части \mathbf{b} — через заданное поле \mathbf{w}_0 .

4. В качестве примера рассмотрим следующий трехслойный скважинный волновод: жидкость ($v_{1p} = 1.5$ км/с, $\rho_1 = 1$ кг/м³, $b_1 = 8$ см), бетонная стенка ($v_{2p} = 2.92$, $v_{2s} = 1.88$ км/с, $\rho_2 = 4.17$ кг/м³, $b_2 = 11$ см), пористый водонасыщенный песок ($\rho_s = 2.65$, $\rho_f = 1$ кг/м³ — плотности фаз; $\varepsilon = 0.3$ и $\tilde{\alpha} = 1.25$ — пористость и коэффициент извилистости грунта; $K_s = 36$ и $K_f = 2.3$ ГПа (1 ГПа = 10⁹ Па) — модуль всестороннего сжатия твердого скелета с пустыми порами и модуль сжимаемости поровой жидкости; $\nu = 0.33$ и $\mu = 0.05$ ГПа — коэффициент Пуассона и модуль сдвига пористой среды [5]). Свойства препятствия высотой $2h = 2$ м описывается параметрами: $v_{4p} = 2.37$, $v_{4s} = 1.56$ км/с и $\rho_4 = 2.3$ кг/м³; источник расположен на расстоянии $d = 10$ м от препятствия.

Средний за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ поток энергии E через поверхность S гармонического волнового поля определяется интегралом: $E = \iint_S e_n dS$, где $e_n = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_n)$ — средняя плотность потока энергии через площадку с нормалью \mathbf{n} в текущей точке поверхности S .

Расчеты частотных зависимостей энергии источника в скважине с заглушкой и без (E_s и E_s^∞ соответственно) показали четко выраженную интерференционную картину (рис. 2). На определенных частотах с некоторым периодом происходит удвоение энергии источника, а на промежуточных частотах практически полное ее гашение из-за сложения в противофазе излучаемого поля \mathbf{w}_0 с отраженным \mathbf{u}_{sc} . На основе этой гипотезы можно получить простое соотношение: $f_n = \frac{v_1}{2d}n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, связывающее расстояние d и скорость скважинной волны v_1 с частотами f_n , на которых происходит удвоение энергии источника. Поскольку для данной скважинной структуры $v_1 \approx 1.24$ км/с, то имеем $f_1 \approx 62$, $f_2 \approx 124$ Гц и т.д. Сравнение этих частот с частотами максимумов излучаемой энергии на рис. 2б показывает их хорошую согласованность. Интересно, что даже на частотах $f \approx 31, 93, 155$, когда общий уровень энергии источника E_s падает, энергия $E_r(-1, 11)$, уходящая вбок через ограниченный участок внешней стенки трубы: $-1 \leq z \leq 11$, $r = b_2$, почти на порядок больше, по сравнению с энергией $E_r^\infty(-1, 11)$ в том же волноводе без препятствия (кривые 3 и 4 на рис. 2а).

Работа поддержана грантами РФФИ (№ 06-01-96607) и INTAS (№ 05-1000008-7979).

Список литературы

- [1] Biot M. A. Propagation of elastic waves in cylindrical bore containing a fluid// J. Appl. Phys. 1952. № 23. P. 997–1005.
- [2] Лильков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
- [3] Ватумлян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применение. // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–86.
- [4] Glushkov E. V., Glushkova N. V., Timofeev D. V. A layered element method for simulation elastodynamic behaviour of laminate structures with defects. In monograph: Advances in the Meshless Method /edited by: J. Sladek, V. Sladek, and S.N. Atluri. USA: Tech Science Press, 2006.
- [5] Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 248 с.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Fomenko S.I. *Modelling of wave fields in borehole with an obstacle.* The problem of wave excitation, propagation and diffraction in a layered borehole with an elastic cylindrical inclusion (plug) is considered. The wave field scattered by the plug is derived using the method of fundamental solutions. In this way, the solution of the problem is obtained in terms of wave fields excited by a set of elementary sources located in the cylindrical waveguide under consideration.

БЛОКИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛОСЫ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Глушкова Н. В., Ерёмин А. А.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматривается дифракция бегущих волн на эллиптических жестких включениях в упругой полосе. Для моделирования рассеянного включениями поля используется метод слоистых элементов. Исследуется зависимость частоты непрохождения одномодового сигнала от линейных размеров тонкого вертикального включения. Для системы включений анализируется влияние их взаимного расположения на величину коэффициента прохождения нормальных мод. В частности, обнаружен эффект появления полосы пропускания в частотном диапазоне сильного блокирования при добавлении дополнительного препятствия.

1. Во многих композитных материалах для улучшения прочностных свойств используются армирующие волокна с существенно большей жесткостью, чем у заполнителя. В плоской постановке, при рассмотрении прохождения упругих волн в направлении перпендикулярном волокнам, их можно моделировать включениями из более жесткого материала круговой или эллиптической формы. В настоящей работе рассматриваются абсолютно жесткие неподвижные включения. Для анализа степени виброгашения, обеспечиваемого армированными композитными пластинами, определен интерес представляет изучение блокирования отдельных бегущих волн или волновых пакетов одиночными включениями или системами жестких включений в упругом волноводе.

2. В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u} = (u_x, u_z)$) упругого слоя, занимающего область $\Omega = \{|x| < \infty, -H \leq z \leq 0\}$, с системой эллиптических абсолютно жестких включений I_k :

$$\frac{(x - x_{c,k})^2}{a_k^2} + \frac{(z - z_{c,k})^2}{b_k^2} \leq 1, \quad k = 1..N.$$

Перемещения \mathbf{u} удовлетворяют уравнениям Ламе [1] и граничным условиям отсутствия напряжений на внешней поверхности волновода: $\boldsymbol{\tau}|_{z=0,-H} = 0$, и перемещений на поверхности включений: $\mathbf{u}|_{I_k} = 0$.

Исходное поле \mathbf{u}_0 , возбуждаемое в слое некоторой поверхностной нагрузкой \mathbf{q} , можно представить в виде

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1)$$

где $K(\alpha, z)$ и $\mathbf{Q}(\alpha)$ — Фурье-символы матрицы Грина для полосы и заданной нагрузки [2]. Бегущие волны (нормальные моды), уходящие от области приложения

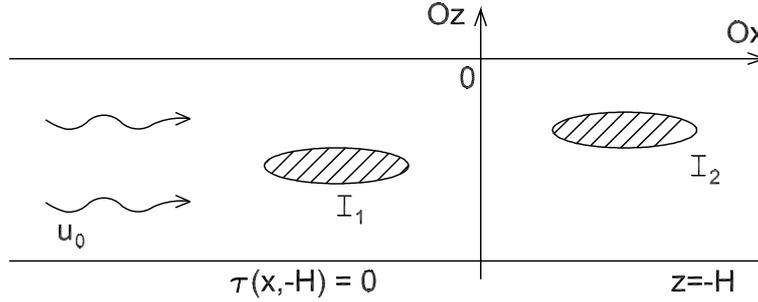


Рис. 1. Постановка задачи

нагрузки на бесконечность, описываются при этом вычетами в вещественных полюсах ζ_k элементов матрицы K . Далее в качестве \mathbf{u}_0 будем рассматривать одну из бегущих волн:

$$\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{a}_{0,k}(z)e^{i\zeta_k x}, \quad \mathbf{a}_{0,k} = -i \operatorname{res} K_0(\alpha, z)|_{\alpha=-\zeta_k} \mathbf{Q}(-\zeta_k) \quad (2)$$

(для волны, приходящей от источника, расположенного слева от включений).

Волновое поле \mathbf{u} ищется в виде суммы заданного поля \mathbf{u}_0 и поля \mathbf{u}_1 , отраженного включениями I_k . Для аппроксимации отраженного поля \mathbf{u}_1 используются слоистые элементы [3] с центрами, расположенными в областях I_k на некотором расстоянии от их границ:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_1 \approx \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N_{s,k}} L_j \mathbf{c}_j^k \quad (3)$$

Здесь L_j — слоистые элементы, то есть матрицы 2×2 , столбцами которых являются перемещения, вызванные в слоистом волноводе без дефекта элементарными источниками, заданными в некоторой точке $s_j^k = (x_j^k, z_j^k)$; $\mathbf{c}_j^k = \{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}$ — неизвестные коэффициенты разложения; $N_{s,k}$ — число узлов s_j^k , попадающих в область I_k (т.е. число элементов L_j , аппроксимирующих поле, отраженное k -тым включением).

В отличие от классического метода граничных элементов (МГЭ), в котором искомое волновое поле раскладывается по фундаментальным решениям для безграничного упругого пространства, слоистые элементы автоматически удовлетворяют граничным условиям на всех внешних и внутренних (в случае многослойного волновода) границах слоев, так что для определения неизвестных коэффициентов \mathbf{c}_j^k остается удовлетворить только граничным условиям на поверхности включений I_k . Для этого можно воспользоваться как методом коллокаций, так и методом Петрова-Галёркина [4].

В волноводе без препятствий энергия, переносимая нормальной модой, полностью уходит на бесконечность. В случае волновода с дефектом перераспределение энергии, вызванное дифракцией на включениях, характеризуется коэффициентами прохождения и отражения $\kappa^\pm = E^\pm/E_0$, где E_0 — энергия, переносимая исходной нормальной модой, E^+ и E^- — энергия, уносимая прошедшими и отраженными волнами вправо и влево от препятствий.

3. На низких частотах колебания свободного упругого слоя характеризуются двумя фундаментальными модами — симметричной (s_0) и антисимметричной (a_0).

На частотах выше первой частоты отсечки ω_1 появляются дополнительные высшие моды a_1, s_1, a_2 и т.д. [5]. В качестве примера рассмотрим дифракцию фундаментальных мод на тонком вертикальном включении ($b \gg a$) и на системе двух горизонтально протяженных включений (рис. 1). Результаты приводятся в безразмерном виде для следующих значений входных параметров: плотность $\rho = 1$, модуль сдвига $\mu = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ и толщина волновода $H = 1$.

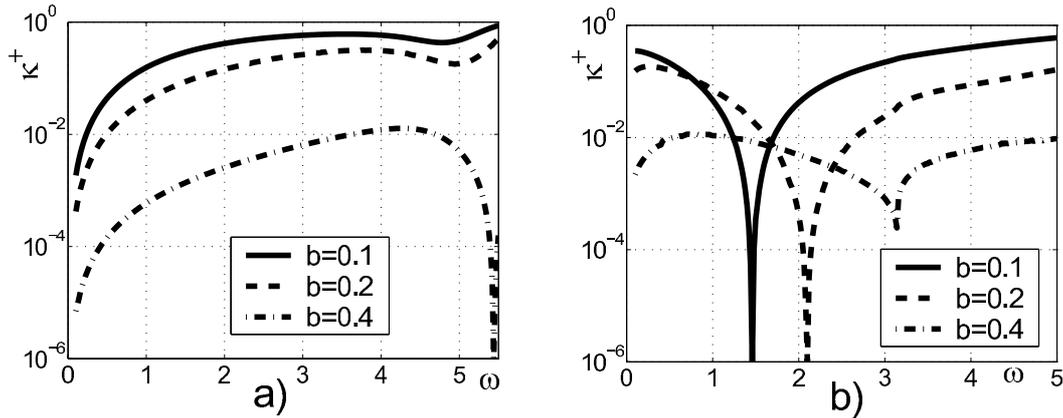


Рис. 2. Коэффициент прохождения κ^+ для симметричной моды s_0 — рис. а) и антисимметричной моды a_0 — рис. б). Сплошная линия — $b = 0.1$, пунктирная — $b = 0.2$, штрих-пунктирная — $b = 0.4$

Для случая вертикального включения рассматривается зависимость коэффициента прохождения κ^+ для моды s_0 (рис. 2а) и a_0 (рис 2б) от безразмерной круговой частоты $\omega = 2\pi fH\sqrt{\rho/\mu}$ и вертикального размера препятствия b при $a = 10^{-4}$. В то время как для моды s_0 увеличение размера препятствия приводит к монотонному уменьшению κ^+ в рассматриваемом диапазоне частот (рис. 2а), для антисимметричной моды a_0 существует зависящая от b частота резкого минимума κ^+ (рис. 2б). Даже при относительно малых размерах препятствия (например, $b = 0.1$) на данной частоте наблюдается практически полное отражение, т.е. запираение волновода для данной моды. При увеличении b частота запираения смещается вправо, достигая при определенном размере экрана частоты отсечки $\omega_1 = \pi$, после чего минимум κ^+ перестает быть таким резким (за счет переноса энергии дополнительной высшей модой a_1). Но общий уровень κ^+ при этом уже меньше 1% во всем диапазоне частот.

В случае системы из двух горизонтальных включений наличие второго ведет к существенному уменьшению величины κ^+ по сравнению со случаем единичного включения. При этом κ^+ зависит не только от частоты, но и от взаимного расположения включений. Так на рис. 3 показана поверхность $\kappa^+(\omega, z_{c,2})$ для моды a_0 , где $z_{c,2}$ — вертикальная координата центра второго включения, определяющая глубину его расположения в волноводе при фиксированном положении первого ($(x_{c,1}, z_{c,1}) = (-1, -0.5)$, $x_{c,2} = 1$, $a_1 = a_2 = 0.5$, $b_1 = b_2 = 0.1$). На рисунке хорошо видна зона почти полного блокирования сигнала (черная область вплоть до $\omega \approx 1.9$). Затем следует резкое увеличение κ^+ , связанное с резонансными свойствами системы двух включений. Далее опять идет зона почти полного блокирования.

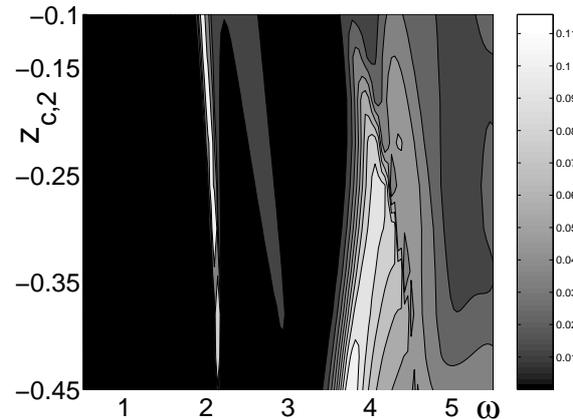


Рис. 3. Линии уровня коэффициента прохождения κ^+ для моды a_0 в зависимости от частоты ω и центра второго включения $z_{c,2}$

При $\omega > \pi$, т.е. после частоты появления моды a_1 , наблюдается существенное увеличение κ^+ , вызванное перераспределением энергии между нормальными модами. Работа поддержана грантом INTAS (Nr. 05-1000008-7979).

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука. 1987.
- [2] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [3] E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, D. V. Timofeev. A layered element method for simulation elastodynamic behaviour of laminate structures with defects. In monograph: Advances in the Meshless Method /edited by: J. Sladek, V. Sladek, and S.N. Atluri, Tech Science Press, USA, 2006.
- [4] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир. 1988. 352 с.
- [5] Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука. 1966. 168 с.

Glushkova N.V., Eremin A.A. *Blocking properties of an elastic waveguide with rigid inclusions.* Blocking properties of an elastic waveguide with a single vertical thin inclusion or with a system of horizontal elliptical rigid ones are considered. For the simulation of traveling wave diffraction by the inclusions the layered element method (LEM) is used. The dependence of stop frequency on the length of vertical rigid inclusion is investigated. For the system of two rigid inclusions the dependence of wave energy transmission on their mutual location is analyzed as well.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ КАНАЛ

Говорухин В. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложена численная схема анализа задачи протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал при заданных на границах нормальной компоненты скорости и завихренности жидкости на входе. Для аппроксимации уравнений Эйлера, записанного в терминах функции тока и вихря, используется метод вихрей-в-ячейках. Проведен анализ динамики жидкости при различных условиях протекания и начальных состояниях. Показано, что при достаточно больших начальных завихренностях и малых скоростях промыва жидкости существуют стационарные режимы с различным числом застойных зон.

Общая задача о протекании идеальной однородной и несжимаемой жидкости сквозь заданную область была поставлена Н.Е. Кочиним [1]. В [2] было показано, что в двумерном случае эта задача разрешима глобально по времени, а ее корректность имеет место, если, кроме нормальной скорости, на входе задана касательная компонента вихря или скорости [3]. В статье [4] установлено, что двумерная стационарная задача протекания с заданным на входе вихрем имеет обобщенное решение при любых граничных данных. Течение в этом случае подразделяется на проточную и застойную зоны. Первая состоит из частиц, пребывающих в области течения конечное время, а во второй частицы остаются вечно.

Течения с застойными зонами в двумерном случае были обнаружены в ряде работ. Такие течения возникают в полуплоскости, при существовании неровностей на твердой границе [5], в канале конечной длины с неровностями, что показано численно см., например, [6] и ссылки в ней. В случае ровных границ и конечного канала таких течений пока обнаружено не было.

Задача поиска и анализа непроточных течений в конечном канале при заданных скорости жидкости на входе и выходе канала, и значении вихря на входе, практически не рассматривалась. Проточные течения и их устойчивость изучались в [7], где были указаны классы асимптотически устойчивых по линейному приближению стационарных режимов. Стационарная задача при заданных условиях на границе, и искривлении канала, решалась численно в [8], где разностным методом были исследованы проточные течения, изучено влияние на их характеристики искривления канала. Нестационарная задача до сих пор численно не исследовалась, по крайней мере автору не удалось найти работ на эту тему.

При численном решении двумерного уравнения Эйлера динамики несжимаемой невязкой жидкости часто применяют различные варианты так называемого метода вихрей (см. [9] и ссылки в них). Для метода вихрей имеется обоснование его сходимости, оценки погрешности. В данной статье предложен метод численного решения задачи протекания жидкости сквозь прямоугольный канал при заданных на границах нормальной компоненты скорости и завихренности жидкости на входе, исследована динамика вихревого пятна при различных скоростях протекания.

1 Математическая формулировка задачи

Рассматривается задача протекания жидкости сквозь канал D :

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1\}. \quad (1)$$

Уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах вихря течения ω и функции тока ψ записываются в виде

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0; \quad (2)$$

$$-(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \omega; \quad (3)$$

Функция тока ψ связана с полем скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ равенствами $v_1 = \psi_y$, $v_2 = -\psi_x$, так что $\omega = \mathbf{rot} \mathbf{v} = v_{2x} - v_{1y} = -\Delta\psi$.

Возможные постановки граничных и начальных условий для системы уравнений (2)–(3) обсуждались в работах [2, 3]. В данной работе рассматриваются граничные условия, поставленные Юдовичем в [2], и рассмотренные в [8], когда на входе и выходе канала задан профиль скорости, и завихренность на входе:

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L} = \psi^w(y), \quad \psi^w(y) > 0, \quad y \in [0, 1]; \quad (4)$$

$$\psi|_{y=0} = 0; \quad \psi|_{y=1} = \psi^w(1); \quad (5)$$

$$\omega|_{x=0} = \omega^w(y). \quad (6)$$

Условия (4)–(5) в терминах скорости принимают вид $v_1|_{x=0,L} = v^w(y) > 0$, $v_2|_{y=0,1} = 0$, так что жидкость втекает в канал через сечение $x = 0$ и вытекает из него через сечение $x = L$ с нормальной скоростью $v^w(y)$. В [2] показано, что задача (2)–(6) всегда имеет единственное решение, глобально разрешимое по времени.

Для завихренности задается условие в начальный момент времени:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y) \quad (7)$$

Отметим, что рассматриваемая задача протекания включает механизм диссипации — накачки: жидкие частицы, попадая в область течения, приносят энергию и вихрь, а покидая её, уносят [2, 7]. Это делает возможным асимптотическую устойчивость стационарных режимов, и других явлений, необычных для динамики идеальной жидкости.

Задача (2-6) допускает стационарные режимы. Одним из таких режимов при $\omega^w = -2Q_2 - 6Q_3y$, $\psi^w(y) = Q_1y + Q_2y^2 + Q_3y^3$ является :

$$\omega = -2Q_2 - 6Q_3y, \quad \psi = Q_1y + Q_2y^2 + Q_3y^3, \quad (8)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — произвольные положительные константы. В [7] показано, что это течение является асимптотически устойчивым, т.е. малые возмущения этого режима покидают канал за конечное время.

2 Численный метод

Распространенным методом численного решения задачи (2)–(3) является метод вихрей. Функция $\omega(x, y)$ в каждый момент t аппроксимируется ее значениями в частицах с координатами $(x_i(t), y_i(t))$. Это справедливо т.к. заданное в начальный момент значение вихря в частице жидкости сохраняется, то есть $\omega(x_i(t), y_i(t)) = \omega_0(x_i(t_0), y_i(t_0))$. Из (3) находится функция тока, а динамика частиц описывается системой уравнений:

$$\dot{x}_i = \psi_y(x_i, y_i) = v_1, \quad \dot{y}_i = -\psi_x(x_i, y_i) = v_2 \quad (9)$$

Существует много вариантов этого метода (см., например, [9]).

Для вычислений удобно сделать замену переменных $\psi = \Psi + \psi^w$. Тогда уравнений (3) принимает вид:

$$-(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) = \omega + \psi_{yy}^w, \quad (10)$$

а граничные условия для функции Ψ станут следующими:

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=L} = \Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=1} = 0. \quad (11)$$

В каждый момент времени t решение задачи (10)–(11) будем разыскивать в виде отрезка следующего ряда:

$$\Psi \approx \tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} g_{i,j}, \quad g_{i,j} = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin(j\pi y) \quad (12)$$

После подстановки (12) в (10), и операций проектирования на функции $g_{i,j}$, получим следующее выражение для неизвестных коэффициентов $\Psi_{i,j}$:

$$\Psi_{i,j} = \frac{4L}{\pi^2(i^2 + L^2 j^2)} \int_0^L \int_0^1 [\omega(x, y) + \psi_{yy}^w(y)] \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin(j\pi y) dx dy \quad (13)$$

Для аппроксимации $\omega(x, y)$ вводится разбиение области D на $N_{box} = n_x \times n_y$ ячеек прямоугольной формы. В каждой ячейке с номером k функция $\omega(x, y)$ приближается многочленом третьей степени $\phi_k(x, y)$ от двух переменных:

$$\omega(x, y) \approx \sum_{k=1}^{N_{box}} \phi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{N_{box}} \sum_{i,j=0,i+j \leq 3}^3 a_{k,i,j} x^i y^j. \quad (14)$$

Коэффициенты $a_{k,i,j}$ находится из условия минимизации выражения:

$$S_k = \sum_m \left(\sum_{i,j=0,i+j \leq 3}^3 a_{k,i,j} x^i y^j - \omega(x_m, y_m) \right)^2 \quad (15)$$

Здесь суммирование идет по номерам тех частиц, которые принадлежат данной ячейке с номером k , а $\omega(x_m, y_m)$ – значение вихря в частице с номером m .

Для каждой частицы решается задача (9). После вычисления коэффициентов $\Psi_{i,j}$ дискретизованное поле скорости $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ будет иметь вид:

$$\tilde{v}_1 = \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} + \psi_y^w, \quad \tilde{v}_2 = \dot{y}_i = - \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \quad (16)$$

Легко показать, что пространственная аппроксимация вида (16) сохраняет несжимаемость исходного векторного поля (9).

В каждой ячейке с номером k в начальный момент времени задается $N_p(k)$ частиц. Значение завихренности в частице определяется начальным условием (7). Общее количество частиц $N_p = \sum_k N_p(k)$. В процессе вычислений частица может покинуть канал. При уходе частицы из канала, на входе задается новая частица, завихренность в которой определяется граничным условием (6). Для решения задач Коши (9) для частиц применялся псевдосимплектический интегратор PS36.

3 Результаты вычислений

Изложенная схема расчетов позволила провести исследование динамики развития начального вихревого пятна в задаче протекания жидкости сквозь прямоугольный контейнер в зависимости от интенсивности A начального распределения завихренности $\omega_0(x, y) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin \pi y$.

Рассматривался контейнер D (1) с горизонтальной стороной $l = 3$. Задавалась однородная нормальная скорость жидкости на входе и выходе канала $v^w = Q_1 = 3/100$, а завихренность на входе $\omega^w(y) = 0$. Использовались следующие значения параметров и констант метода: число жидких частиц $N_p = 48000$; число членов в разложении (12): $k_x = k_y = 15$; разбиение прямоугольника при аппроксимации на $N_{box} = 1200$ ячеек ($n_x = 60, n_y = 20$); шаг интегрирования по времени $h = 0.1$.

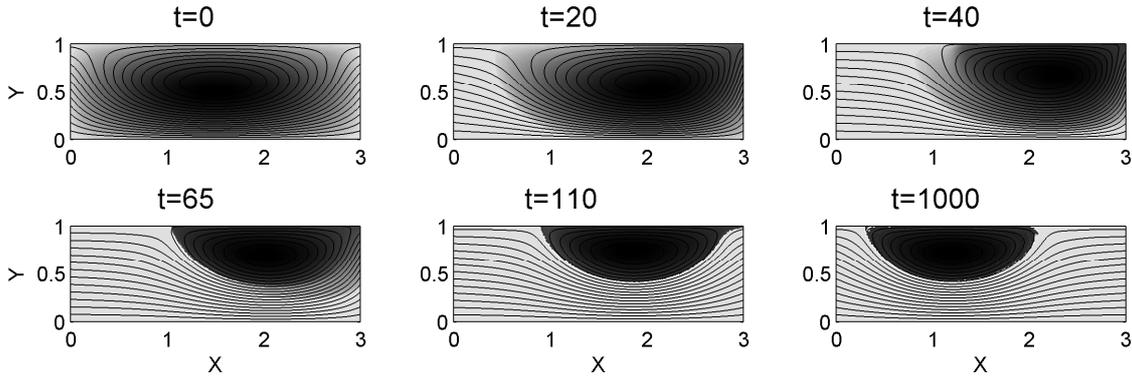


Рис. 1. Формирование течения с застойными зонами при $A = 0.4$. На рисунке изображено поле завихренности и линии тока течения в различные моменты времени.

При малых значениях A канал быстро вымывается, вся начальная завихренность выносится, и устанавливается стационарный режим (8), что полностью согласуется с теорией [7]. При росте A процесс выноса начальной завихренности за-

медляется. При достаточно большой начальной завихренности в контейнере устанавливается течение с застойной зоной. Этапы формирования течения с застойной зоной приведены на рис. 1. Аналогичные результаты получены и для других граничных условий, соответствующих классическим течениям на входе и выходе канала — течениям Куэтта и Пуазейля, и во всех случаях при достаточно большой начальной завихренности формировались течения с застойными зонами.

Работа выполнена в рамках Европейской исследовательской лаборатории “Регулярная и хаотическая гидродинамика” при поддержке РФФИ гранты № 05-01-00567 и № 07-01-92213, гранта Президента России поддержки ведущих научных школ (НШ-5747.2006.1), а также фонда CRDF грант RUM1-2842-RO-06.

Список литературы

- [1] *Кочин М.Е.* Об одной теореме существования гидродинамики// Прикл. математика и механика, 1957. Т.20. № 10. С.5–20.
- [2] *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область// Мат. сб. 1964. Т.64. № 4. С. 562–588.
- [3] *Кажихов А.В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости// Прикл. математика и механика, 1980. Т.44. № 5. С.947–949.
- [4] *Алексеев Г.В.* Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости// Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1972. Вып. 10. С. 5–28.
- [5] *Elcrat, Alan; Fornberg, Bengt; Horn, Mark; Miller, Kenneth.* Some steady vortex flows past a circular cylinder// J. Fluid Mech. 2000. 409. P. 13–27.
- [6] *Lee, T.S., Liao, W., Low, H.T.* Numerical simulation of turbulent flow through series stenoses// Internat. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 42. P. 717–740.
- [7] *Morgulis A., Yudovich V.* Arnold’s method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary// Chaos. 2002. V. 12, № 2. P. 356–371.
- [8] *Moshkin N., Mounnamprang, P.* Numerical simulation of vortical ideal fluid flow through curved channel// Internat. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 41. № 11. P.1173–1189.
- [9] *Cottet, Georges-Henri; Koumoutsakos, Petros D.* Vortex methods: Theory and practice. Cambridge University Press, 1999, xiii, 310 p.

Govorukhin V.N. *Numerical analysis of the flow of an ideal incompressible fluid through a rectangular duct.* The results of numerical study of the non-stationary problem in which the governing equations are the 2D Euler equations are presented. The variant of vortex particles-in-cells method is proposed and is used for PDE approximation. We have found that for sufficiently big perturbations of initial vorticity a new stable separated flows can be realized.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Есипов Ю. В., Мухортов В. М.

Южный научный центр РАН

Способом ударного возбуждения получены Фурье-образы откликов конструкции, выполненной в виде семи ярусной сварной стержневой этажерки. В области спектра 0...100 Гц установлены области высокой добротности, диссипации и потери устойчивости. На основании повторяемости и неизменности частот при разных алгоритмах обработки откликов можно сделать вывод о регистрации нами ряда собственных резонансных частот модельной конструкции. Во всех трёх узлах конструкции наблюдалась повторяемость области потери устойчивости конструкции в диапазонах частот спектра 22.5...26.5 Гц, 17...18 и 73...75 Гц. Проведенные на физической модели исследования позволяют сделать выводы о возможности установления спектральных критериев для выявления показателей потери устойчивости конструкций.

Введение. Определим сложную конструкцию как механический объект, при некотором возмущении которого возникают неустойчивые состояния, приводящие к нелинейным деформационным процессам. При этом в качестве нелинейных рассматриваются знакопеременные деформационные процессы, а также бифуркации в виде “хлопков” и “перескоков” в устойчивом состоянии конструкции. Установление критериев различения состояний сложной конструкции основано на экспериментальных и теоретических исследованиях её поведения и откликов на естественные и (или) специальные воздействия. Можно утверждать, что выявление и описание эффектов потери устойчивых состояний в конструкции и является основой для ранней её диагностики. Целью данной работы является установление Фурье-образа реакций модельной конструкции на варьируемые по импульсу силы ударные воздействия и поиск алгоритма классификации её состояний.

1. Формулировка задачи. Большинство конструкций строятся из элементов, которые в технической механике в одномерном и двухмерном представлении определяются как стержень, треугольная, круглая и квадратная рамы. При анализе устойчивости конструкции (системы) [1,2] возникают неясности при ответе на следующие вопросы: 1) каково поведение совместно связанных элементов? 2) до каких пределов сохраняется “коллективная устойчивость” или устойчивость за счет конструктивных связей? 3) как сопрячь (учесть) результаты прочности и (или) ресурса разнородных элементов или отдельно взятых испытаний с ними для принятия решений о ресурсе системы в целом? Для ответа на эти вопросы требуется применительно к набору типовых моделей конструкций построить и обосновать критерии идентификации их неустойчивости.

2. Средства экспериментального исследования. Для исследования деформационных образов и оценки устойчивости стержневых конструкций в ЮНЦ РАН создана *испытательная установка* в составе: 1) семиярусной этажерки; 2) системы сегнетоэлектрических датчиков деформации; 3) информационно-измерительного канала.

Модель конструкции сварена из 8 цельно вырезанных рам и 28 стержней - стоек, поперечное сечение которых одинаково и составляет 4×8 мм, рисунок 1. Соотношение сторон сечения 1:2 (узкая и широкая стороны) обуславливают различия в формировании в узлах сопряжения этажерки, в первую очередь, поперечных и изгибных деформационных волн. Масса конструкции 3.6 кг. Анализируются два варианта подвески этажерки: 1) режим “несвободной подвески”; 2) подвеска на нитях, закрепленных на кронштейны.

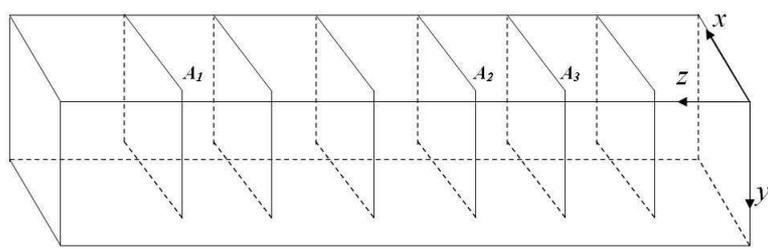


Рис. 1. Этажерка 7 ярусная, горизонтальное расположение

Сегнетоэлектрические датчики динамической деформации. Основу датчика составляет сегнетоэлектрическая плёнка $Pb(Zr, Ti)O_3$ (ЦТС) толщиной ≈ 0.3 мкм, нанесённая методом ВЧ распыления [3] на подложку из металлической фольги толщиной 40 мкм. После нанесения на пленку верхнего алюминиевого электрода толщиной 0.1 мкм в пленке создается полевым и температурным воздействием устойчивое поляризованное состояние с величиной пьезомодуля $d_{33} = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл·Н⁻¹. Датчик имеет токовые выводы и загерметизирован эпоксидным компаундом К400. К испытуемой модели датчик закрепляется с помощью клея. Произведенные оценки основных характеристик датчика следующие: чувствительность к относительной деформации при минимальной величине сигнала — $10 \text{ мкВ } 5 \times 10^{-10}$; динамический диапазон деформации — 150 dB, емкость — 800 pF, диапазон частот — 10^{-4} — — 10^8 Гц, верхняя граница диапазона рабочих температур — $190^\circ\text{C} \dots 200^\circ\text{C}$, размеры — $1 \times 1 \times 0,004$ мм³, масса (не более) — 10^{-3} г.

Система датчиков. Датчики установлены в узлах сопряжения A_1, A_2, A_3 на “широких” и “узких” сторонах стержней этажерки. Вследствие этого созданы две различающиеся системы датчиков (СД): $\text{СД}_{\text{III}} = \{A_1, A_2, A_3\}_{\text{III}}$; $\text{СД}_{\text{У}} = \{A_1, A_2, A_3\}_{\text{У}}$. Установленная на “широкую” сторону конструкции система датчиков $\text{СД}_{\text{III}} = \{A_1, A_2, A_3\}_{\text{III}}$; включает в себя датчики Д1...Д6 и Д-А, Д-С, Д-В, тогда как система датчиков $\text{СД}_{\text{У}} = \{A_1, A_2, A_3\}_{\text{У}}$ включает датчики Д11...Д16.

3. Алгоритм проведения и обработки результатов экспериментов. Возбуждение собственных колебаний конструкции осуществлялось однократным ударом стального шарика (радиус — 11 мм, масса — 34 г) по углу последней (восьмой) рамы этажерки в направлении Oz , в выбранной системе координат $Oxyz$ это точка $\{x_y = 0, y_y = 25 \text{ см}, z_y = 0\}$, рисунок 1. Варьирование импульсом силы удара проводилось путем отклонения подвески шарика на следующих значениях: 26; 96; 180; 235; 356; 520; 680 (мН×с). Колебания маятника происходили в плоскости $\{x_1 = 0, y, z\}$. Для обеспечения синхронизации запуска и регистрации колебаний на вход 1 цифрового осциллографа подавалось коммутирующее напряжение

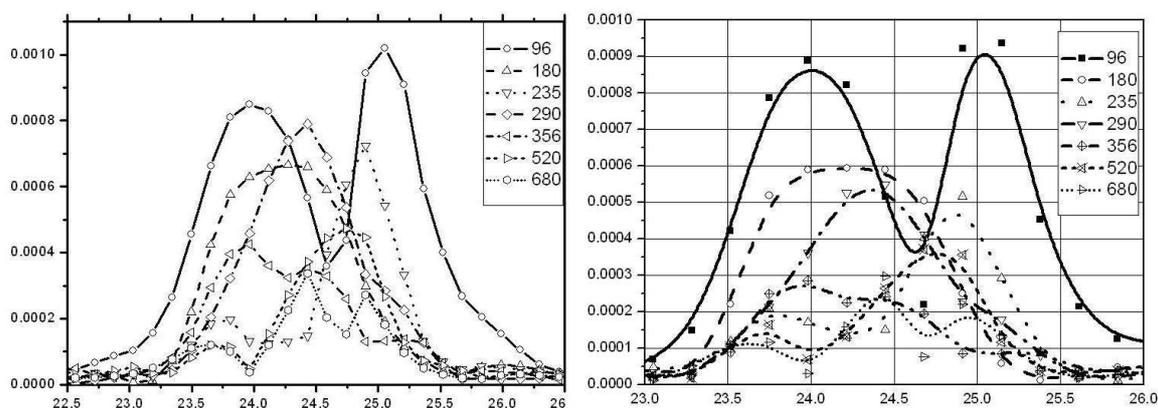


Рис. 2. Относительный модуль спектральной плотности деформации от импульса силы в диапазоне 96–680 (мН×сек) ударного возбуждения конструкции в диапазоне частот 22.5–26.5 Гц. Регистрация деформационных колебаний датчиками Д-А и Д-6 области потери устойчивости

“батареяка - шарик - конструкция” , а на вход 2 — снимаемый через зарядовый усилитель сигнал от датчика деформации (*T*-форма). Время однократной регистрации *T*-формы сигнала о колебании конструкции составляло 4.3 сек. Интервал дискретизации Δt был равен 33 мкс. Датчиками Д1, Д2, Д3, Д12, Д-А, Д-С, Д-В, Дб в узлах A_1, A_2, A_3 конструкции регистрировались временные формы деформационного возбуждения конструкции. На основании *T*-форм были построены Фурье - образы деформационного возбуждения конструкции, примеры которых приведены на рис. 2 и 3.

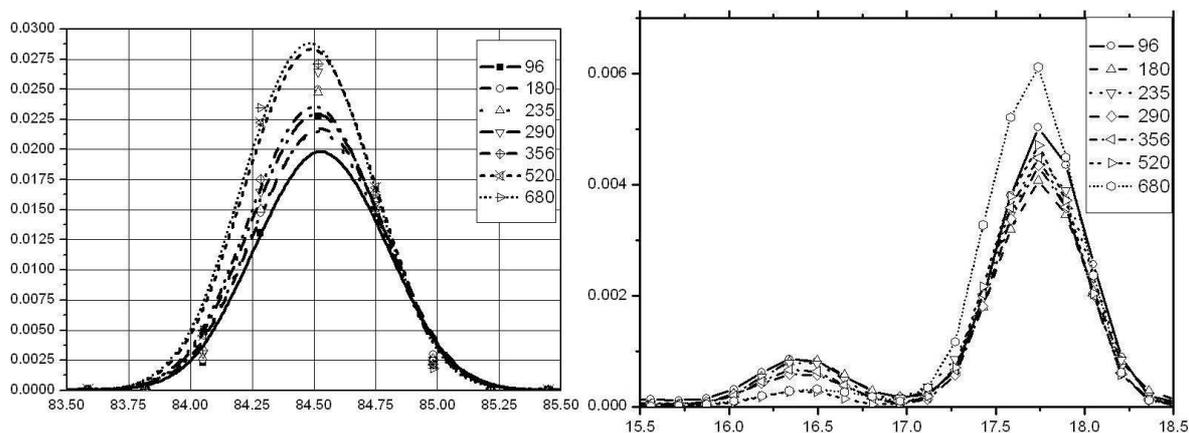


Рис. 3. Регистрация деформационных колебаний датчиком б области высокой добротности в диапазоне частот 83.5. . . 85.5 Гц и датчиком — слева направо областей диссипации энергии и высокой добротности в диапазоне частот 15.5 - 18.5 Гц

4. Краткий анализ результатов экспериментов. Обработанные результаты экспериментов с конструкцией, подвешенной в четырёх точках через нити к кронштейнам (режим “свободной подвески”) сведены в таблицу 1.

В Фурье-образе конструкции были выявлены следующие области: 1) область потери устойчивости конструкции, характеризуемой нелинейными колебаниями

в диапазоне частот 22...6 Гц, рисунок 2, а также в диапазоне 17...18 и 73...75 Гц, датчик Д12; 2) области высокодобротных откликов в диапазоне частот 15.5... 18.5, 36... 39, 61... 63,5 и 83,5...85,5 Гц, причем первая и последняя области спектра, зарегистрированные с помощью датчиков Д-А и Д6 приведены соответственно на рисунке 3; 3) область диссипация энергии колебаний, пример которой для диапазона частот 15...19 Гц, датчик Д-А рисунок 3.

В областях высокой добротности установлена линейная зависимость модуля спектральной плотности колебаний конструкции от импульса силы удара. При этом в режиме подвески наблюдается строгая повторяемость и неизменность частот при разных алгоритмах обработки в каждом узле, см. таблицу 2, колонки 3 и 4. Например, для узла 3 это частоты 9.5; 17.8; 38.5; 61.5; 84.5; 95.5 Гц. Тем самым, по “широкой” стороне стержней с относительной погрешностью не более 0.015, зарегистрирован ряд собственных резонансных частот модельной конструкции. По “узкой” стороне стержней, Д12, имеется другой ряд собственных резонансных частот: 9.2; 12; 21.7; 29; 45; 72 (Гц). Полученные результаты указывают на возможность уменьшения количества датчиков для наблюдения, в принципе до 2-3. В сравнении со способом регистрации резонансных частот конструкции по вынужденным колебаниям рассматриваемый способ более оперативен и требует меньше затрат.

Таблица 1. Характеристика Фурье - образов T -форм сигналов, снятых с датчиков деформации. Рассматриваемая область частот 0...100 Гц.

Номер датчика	Количество нелинейных областей	Количество “резонансных” областей	Частоты “резонансов”	Примечание
Д1	1,(22.5-26.5 Гц)	4	38.5; 61.5; 84.5(макс); 95	Узел 1, “широкая сторона”
Д2	1,(22.5-26.5 Гц)	4	39; 61.5(макс); 84.5; 95	Узел 1, “широкая сторона”
Д3	1,(22.5-26.5 Гц)	5	9; 20; 39; 61.5; 84.5(макс)	Узел 1, “широкая сторона”
Д12	2,(17-18; 73-75 Гц)	6	9.2; 12; 21.7; 29; 45; 72	Узел 3, “широкая сторона”
Д-А	1,(23... 26 Гц)	4	9.5; 17.8; 38.5; 84.5	Узел 1, “узкая сторона”
Д-С	1,(23... 26 Гц)	7	9.5; 18; 38.5; 61.5; 66; 84.5; 95.5	Узел 3, “широкая сторона”
Д-В	1,(23... 26 Гц)	6	9.5; 18; 38.5; 66; 84.5; 95.5	Узел 3, “широкая сторона”
Д6	1,(22.5-26.5 Гц)	6	9.5; 17.8; 38.5; 61.5; 84.5; 95.5	Узел 2, “широкая сторона”

Область потери устойчивости конструкции зарегистрирована датчиками Д1, Д2, Д3, Д6, Д-А, Д-С, Д-В в диапазоне частот спектра 22.5 — 26.5 Гц, тогда

как датчиком Д12 (узкая сторона) — в области частот 17-18 и 73-75 Гц. Тем самым наблюдается повторяемость эффекта во всех трёх узлах конструкции. Модуль спектральной плотности колебаний конструкции в этой области более чем на порядок меньше значения модуля в области 2 (высокой добротности). На наш взгляд, появление нелинейных колебаний связано с наличием в сложной конструкции “бифуркаций” и (или) областей неустойчивости.

Выводы. Способом ударного возбуждения получены Фурье-образы откликов конструкции, выполненной в виде семи ярусной сварной стержневой этажерки. В области спектра 0...100 Гц установлены области высокой добротности, диссипации и потери устойчивости. На основании повторяемости и неизменности частот при разных алгоритмах обработки откликов можно сделать вывод о регистрации нами ряда собственных резонансных частот модельной конструкции. Во всех трёх узлах конструкции наблюдалась повторяемость области потери устойчивости конструкции в диапазонах частот спектра 22.5...26.5 Гц, 17...18 и 73...75 Гц. Проведенные на физической модели исследования позволяют сделать выводы о возможности установления спектральных критериев для выявления показателей потери устойчивости конструкций.

Данная статья выполнена в рамках грантов РФФИ 06-08-01259, 07-08-12193.

Список литературы

- [1] *Есипов Ю.В., Аюпьян В.А., Мухортов В.М., Герасимов В.Л.* Возможностная оценка риска в ходе мониторинга и анализа динамических деформационных образов конструкций // Проблемы Безопасности и Чрезвычайных Ситуаций. № 3. 2006. С. 77–83.
- [2] *Томпсон Дэс. М. Т.* ННеустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 254 с.
- [3] *Mukhortov V.M. Golovko Y.I., Tolmachev G.N., Klevtsov A.N.* The synthesis mechanism of complex oxide films formed in dense rf-plasma by reactive sputtering of stoichiometric targets. // Ferroelectrics 2000. Vol. 247. № 1-3. P. 75–83

Yesipov Yu.V., Mukhortov V.M. *The experimental research of stability criterions of the complex structure.* The way of shock excitation receives Furie-images of responses of the design executed as seven stage welded rod stack. On spectrum 0 ... 100 Hz are established areas of high good quality, dissipation and losses of stability. On the basis of repeatability and an invariance of frequencies at different algorithms of processing of responses it is possible to draw a conclusion on registration by us of some own resonant frequencies of a modelling design. In all three units of a design repeatability of area of loss of stability of a design in ranges of frequencies of a spectrum 22.5 ... 26.5 Hz, 17 ... 18 and 73 ... 75 Hz was observed. The researches lead on physical model allow to draw conclusions on an opportunity of an establishment of spectral criteria for revealing parameters of loss of stability of designs.

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ НА ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

Жуков М. Ю., Самадова Ю. К., Ширяева Е. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Математическое моделирование процессов переноса примесей под действием электрического поля является одной из актуальных задач электрофореза (см. [1]– [4]) — метода выделения примесей из смесей, широко применяемого в химии, биологии и медицине. Влияние гравитационного поля может привести к конвективному перемешиванию смеси и существенно исказить финальную стадию процесса.

В работе численными методами изучена задача о переносе примеси электрическим полем в двухмерном микроканале, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Обнаружено, что гравитационное поле может оказывать сильное влияние на перенос примеси и искажать начальную форму “пятна” примеси. В частности, круглое пятно незначительно меняет свою форму при движении, в то время как пятно прямоугольной формы существенно видоизменяется в процессе переноса. В первую очередь это связано с образованием сильных вихревых течений в окрестности пятна при его затоплении (всплывании) в жидкости под действием силы тяжести. Найден широкий интервал параметров, при которых форма пятна примеси искажается слабо и интенсивного конвективного перемешивания не происходит.

Расчеты проводились на основе специальных явных и неявных конечно-разностных схем для уравнений переноса, а также методом конечных элементов. Основное внимание уделялось аппроксимации граничных условий, что позволило обеспечить выполнение конечно-разностных аналогов законов сохранения массы и, в конечном итоге, добиться высокой точности результатов вычислений.

1. Постановка задачи. Уравнения, описывающие поведение смеси, имеют следующий вид (в безразмерных переменных) [1]–[3]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \tilde{\mu}\Delta\mathbf{v} + \beta c \mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (1)$$

$$\frac{dc}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} = -\varepsilon|\mu|\nabla c + \mu c \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = s \mathbf{E}, \quad s = 1 + \alpha c > 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, w)$ — скорость, p — давление, \mathbf{E} , φ — напряженность и потенциал электрического поля, c — концентрация примеси, \mathbf{i} — плотность потока примеси, \mathbf{j} — плотность электрического тока, s — проводимость смеси, $\tilde{\mu}$ — кинематическая вязкость жидкости, μ — электрофоретическая подвижность примеси, β — коэффициент концентрационного сжатия ($\beta > 0$ соответствует легкой примеси, $\beta < 0$ — тяжелой примеси), α — коэффициент влияния примеси на проводимость смеси, ε — характерный коэффициент диффузии ($\varepsilon|\mu|$ — коэффициент диффузии примеси), \mathbf{k} — единичный вектор в направлении оси z , противоположном действию силы тяжести.

Предполагаем, что процесс переноса осуществляется в прямоугольном канале $D = \{(x, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b\}$, границы которого непроницаемы для жидкости и примеси (\mathbf{n} — нормаль к границе):

$$\mathbf{v}|_{\partial D} = 0, \quad (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})|_{\partial D} = 0, \quad (4)$$

на части границы задан потенциал, а остальная часть границы изолирована:

$$\varphi|_{x=0} = \varphi_L, \quad \varphi|_{x=a} = \varphi_R, \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)|_{y=0;b} = 0. \quad (5)$$

В начальный момент времени жидкость неподвижна и задано начальное распределение концентрации примеси:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad c|_{t=0} = c^0(x, z). \quad (6)$$

2. Численная реализация. Для численного исследования задачи (1)–(6) использованы явно-неявные конечно-разностные схемы на разнесенных сетках. Уравнения движения жидкости аппроксимировались при помощи явной схемы, а уравнение движения примеси — при помощи неявной схемы. При определении давления p и электрического потенциала φ конечно-разностные эллиптические уравнения решались методом последовательной верхней релаксации. Этот же метод использовался при определении концентрации c из уравнения движения примеси, аппроксимированного при помощи неявной разностной схемы.

При расчетах явная схема, в отличие от неявной, позволяет сохранять массу примеси $\int_D c(x, z, t) dx dz = \text{const}$ для небольших интервалов времени. Однако, если расчеты нужно проводить для больших интервалов времени, то лучше все же использовать неявную схему, так как это позволяет предотвратить сильные осцилляции решения.

3. Вычислительный эксперимент. Расчеты представлены для различных значений коэффициента влияния примеси на проводимость смеси α и коэффициента концентрационного сжатия β . Остальные параметры выбирались следующими: $\varphi_L = -10$, $\varphi_R = 10$, $\tilde{\mu} = 0,01$, $\mu = -0,35$, $\varepsilon = 0,01$, $a = 2$, $b = 1$.

Эксперимент показал, что результаты вычислений на сетках размера 64×32 и 128×64 практически одинаковы и относительная погрешность значений концентрации в соответствующих узлах сетки не превышает 0,004.

На рис. 1–3 приведены линии уровня концентрации для $\beta = 200$ (легкая примесь) при различных значениях параметра α и начальных формах пятна примеси в моменты времени $t = 0,0256$; $0,1024$; $0,1792$; $0,2304$.

Начальная форма пятна выбиралась в виде круга (рис. 1, рис. 2)

$$c^0(x, z) = 0,5 \left(1 + \text{th}(-\delta((x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2)) \right),$$

и в виде квадрата (рис. 3)

$$c^0(x, z) = 0,25 \left(1 + \text{th}(-\delta((x - x_0)^2 - r^2)) \right) \left(1 + \text{th}(-\delta((z - z_0)^2 - r^2)) \right)$$

при $x_0 = 0,5$, $z_0 = 0,5$, $r = 0,15$, $\delta = 100$.

Эффекты размытия пятна обусловлены диффузией (параметр ε), электромиграционным размытием, возникающим в результате зависимости проводимости от концентрации (параметр α), и перемешиванием жидкости в результате всплывания примеси (параметр β). При выбранных параметрах электромиграционное размытие слабо заметно (рис. 1, рис. 2). Укажем только, что при $\alpha < 0$ на переднем фронте пятна наблюдается сгущение линий уровня (ударная волна, сильно размытая диффузией), а на заднем фронте — волна разрежения. При $\alpha > 0$ задний фронт является ударной волной, а передний — волной разрежения.

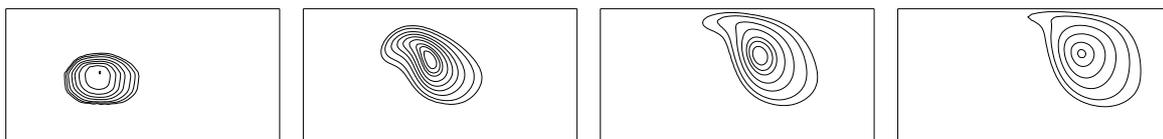


Рис. 1. Линии уровня концентрации. $\alpha = 0,4$

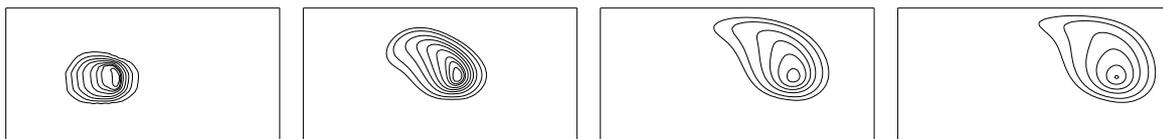


Рис. 2. Линии уровня концентрации. $\alpha = -0,4$

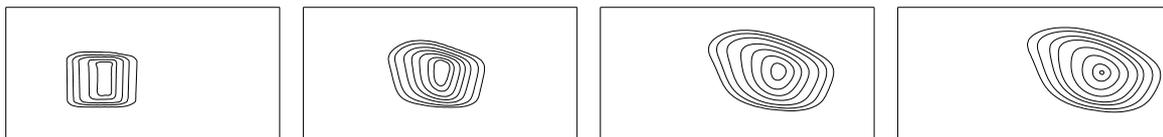


Рис. 3. Линии уровня концентрации. $\alpha = -0,4$

Отметим, что на начальных этапах движения первоначальная форма пятна существенно деформируется. В случае начального круглого пятна изменения слабо заметны, а в случае начального квадратного пятна (рис. 3) такие изменения более значительны. На заключительных этапах движения, в результате диффузии, пятна сильно размыты, независимо от их первоначальной формы. Эффекты всплывания примеси при $\beta = 200$ проявляются слабо — примесь лишь незначительно смещается вверх при переносе ее электрическим полем.

На рис. 4 при $\alpha = -0,4$ показаны линии уровня концентрации в моменты $t = 0,0512$; $0,1024$; $0,1280$ для случая, когда влияние поля тяжести приводит к серьезным изменениям первоначальной формы пятна (первоначально круглому пятну соответствует верхний ряд, а квадратному — нижний ряд).

Рассмотрена примесь в пять раз более легкая ($\beta = 1000$), чем в случае рис. 1–3. Хорошо видно, что всплывание примеси привело к взаимодействию с непроницаемой стенкой и существенному деформированию первоначальной формы — пятно

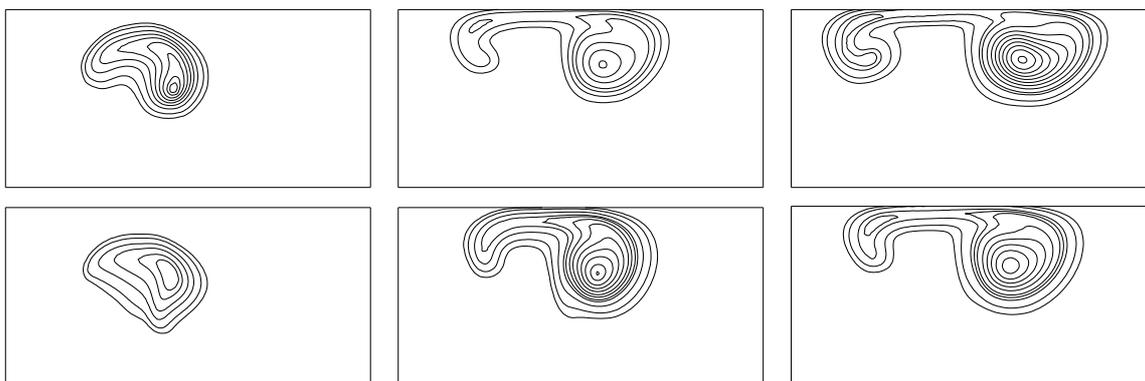


Рис. 4. Линии уровня концентрации

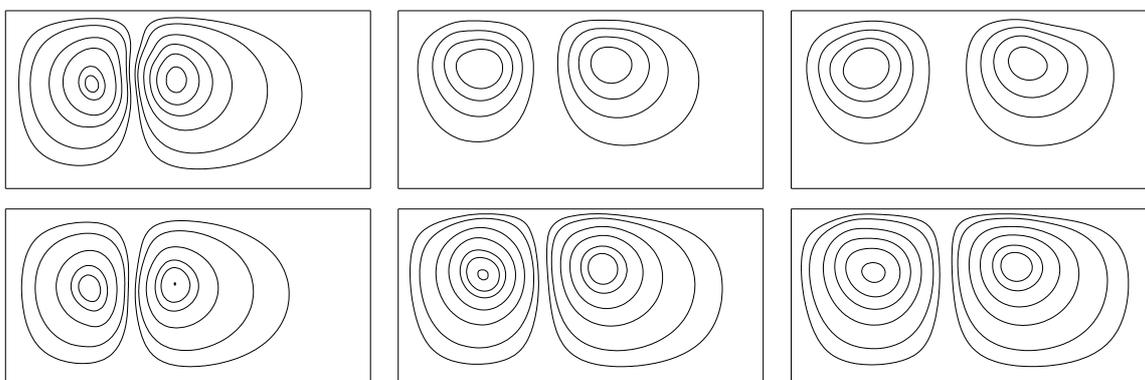


Рис. 5. Линии уровня функции тока

фактически распалось на два пятна. Рис. 4 ярко демонстрирует процесс конвективного перемешивания примеси и показывает, что поле тяжести может полностью исказить процесс переноса электрическим полем. Более того, деформация пятна происходит независимо от его первоначальной формы.

Отметим, что результаты расчетов хорошо согласуются с решением одномерной задачи о распаде начального разрыв [3]. В рассматриваемом случае для $s = \sigma_0(1 + \alpha c)$ схема распада имеет вид, показанный на рис. 6 ($\sigma_0 = 1$). Например, для $\alpha < 0$ на переднем фронте имеется ударная волна, а на заднем фронте — волна разрежения. В двухмерном случае, как уже говорилось, это соответствует сгущению линий уровня концентраций на переднем фронте и их разрежению на заднем фронте.

Работа выполнена в рамках Европейского научного объединения “Регулярная и хаотическая гидродинамика” (грант РФФИ 07-01-9213), а также при финансовой поддержке гранта РФФИ (07-01-00389а) и гранта Президента поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.5747.2006.1).

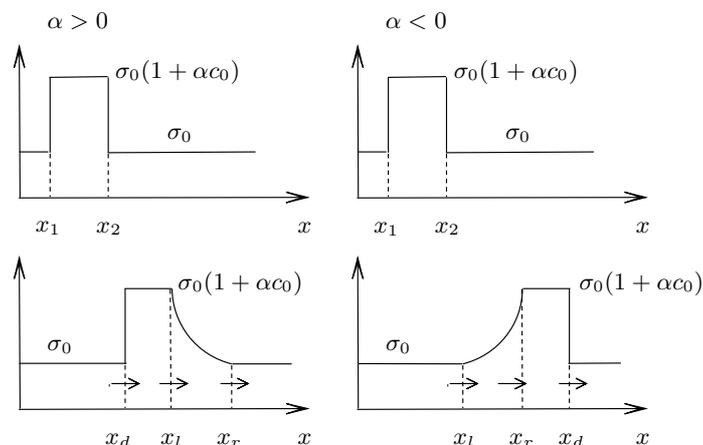


Рис. 6. Схема распада начального разрыва (одномерный случай)

Список литературы

- [1] Бабский В.Г., Жуков М.Ю. Биофизические методы: Теоретические основы электрофореза. М.: Изд-во МГУ, 1990. 77 с.
- [2] Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая модель электрофореза. Применения к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова думка, 1983. 202 с.
- [3] Жуков М.Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2005. 216 с.
- [4] Mosher R. A., Saville D. A., Thorman W. The Dynamics of Electrophoresis. VCH Publishers, New York, 1992. 236 p.

Zhukov M. Yu., Samadova Yu. K., Shiryaeva E. V. *Influence of the gravity field on impurity transport in rectangular microchannel.* Mathematical modeling of impurity transport under action of an electric field is the actual problem of electrophoresis. Electrophoresis is a method of separation of mixtures and widely used in chemistry, biology and medicine. Gravity can lead convective flow and deform a final stage of process. The problem of the impurity transport under action an electric field in the two-dimensional microchannel filled viscous incompressible liquid is investigated by numerical methods. It is shown, that the gravity can strong influence on an impurity transport and deform the initial shape of impurity “spot”. In particular, the circle spot weakly changes its shape at movement, while the rectangular spot strong changes during movement. In the first place it is connected to onset strong vortical flow in vicinities impurity spot going down in a liquid under gravity. To calculate the special implicit and explicit finite difference methods and finite elements method are used. We focus attention on the approximation of boundary conditions that allowed to satisfy the finite difference analogues of mass conservation laws and to achieve high accuracy of results.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Зеленина А. А.* , Зубов Л. М.**

* НИИ М и ПМ им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

При помощи законов сохранения теории конечных деформаций простых материалов и материалов с моментными напряжениями найдены первые интегралы системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изгиб, растяжение и кручение упругого анизотропного слоя. Первые интегралы могут использоваться для понижения порядка системы дифференциальных уравнений, получения точных решений, а также для контроля точности вычислений при численных процессах решения дифференциальных уравнений нелинейной теории упругости. С использованием первых интегралов построено точное решение задачи о больших деформациях чистого изгиба упругой плиты в классе изотропных несжимаемых микрополярных материалов.

1. Система уравнений статики нелинейно упругой среды при отсутствии массовых сил имеет вид [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}} \quad (2)$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T), \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = X_s \mathbf{i}_s \quad (3)$$

и состоит из уравнений равновесия для напряжений (1), уравнений состояния (2) и геометрических соотношений (3). Здесь div и grad — операторы дивергенции и градиента в лагранжевых координатах, \mathbf{C} — градиент деформации, X_s ($s = 1, 2, 3$) — декартовы координаты частиц деформированного тела (эйлеровы координаты), \mathbf{i}_s — координатные орты, \mathbf{G} — мера деформации Коши, \mathbf{D} — несимметричный тензор напряжений Пиолы, \mathbf{P} — симметричный тензор напряжений Кирхгофа, $W(\mathbf{G})$ — удельная потенциальная энергия деформации. Здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Предположим, что упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму прямоугольного параллелепипеда (плиты) $0 \leq x_1 \leq h_1$, $0 \leq x_2 \leq h_2$, $0 \leq x_3 \leq h_3$, где x_m ($m = 1, 2, 3$) — декартовы координаты отсчетной конфигурации. Тело предполагается однородным, но может обладать произвольной анизотропией.

Введем цилиндрические эйлеровы координаты R, Φ, Z

$$X_1 = R \cos \Phi, \quad X_2 = R \sin \Phi, \quad X_3 = Z$$

и рассмотрим следующую деформацию данной плиты

$$R = \rho(x_1), \quad \Phi = \chi(x_1) + ax_2 + bx_3, \quad Z = \xi(x_1) + kx_2 + lx_3 \quad (4)$$

Здесь a, b, k, l — постоянные. Семейство деформаций (4) относится к классу движений сплошной среды, для которого компоненты меры деформации Коши \mathbf{G} зависят только от одной координаты x_1 [2, 3]. Формулы (4) описывают изгиб прямоугольной плиты,

при котором она превращается в сектор полого кругового цилиндра или в замкнутый цилиндр (трубу) с осью, параллельной вектору \mathbf{i}_3 . Указанный цилиндрический сектор подвергается затем кручению, растяжению и осевому сдвигу.

Согласно (3) градиент деформации, отвечающий преобразованию (4), выражается формулой ($m, s = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= C_{ms} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{e}_s \\ C_{11} &= \rho', \quad C_{12} = \rho\chi', \quad C_{13} = \xi', \quad C_{21} = C_{31} = 0, \\ C_{22} &= a\rho, \quad C_{23} = k, \quad C_{32} = b\rho, \quad C_{33} = l, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \Phi + \mathbf{i}_2 \sin \Phi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin \Phi + \mathbf{i}_2 \cos \Phi \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по переменной x_1 . Из (5) следует, что величины C_{ms} не зависят от координат x_2, x_3 . Поэтому мера деформации Коши, задаваемая соотношением

$$\mathbf{G} = C_{ms} C_{ps} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_p$$

будет функцией только одной координаты x_1 . В силу (2) отсюда вытекает, что тензор напряжений Кирхгофа \mathbf{P} не зависит от переменных x_2, x_3 , а тензор напряжений Пиолы имеет представление

$$\mathbf{D} = D_{sm}(x_1) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_m \quad (6)$$

Для заданного материала компоненты напряжений D_{sm} при помощи уравнений состояния (2) и соотношений (5) выражаются через функцию ρ и первые производные функций ρ, χ, ξ . Подстановка (6) в (1) приводит к компонентной форме уравнений равновесия

$$D'_{11} - \chi' D_{12} - a D_{22} - b D_{32} = 0, \quad D'_{12} + \chi' D_{11} + a D_{21} + b D_{31} = 0, \quad D'_{13} = 0 \quad (7)$$

Система (7) — это система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями ρ, χ, ξ . Граничными условиями для данной системы могут служить заданные на концах отрезка $0 \leq x_1 \leq h_1$ значения функций ρ, χ, ξ или заданные равномерно распределенные по поверхностям $x_1 = 0, x_1 = h$ внешние нагрузки. В последнем случае краевые условия имеют вид

$$D_{1m} = f_m, \quad f_m = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_m \quad (\mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$$

где \mathbf{f} — вектор распределенной нагрузки, а f_m — постоянные величины. Возможны и комбинированные граничные условия, например, когда при $x_1 = 0, x_1 = h_1$ заданы значения функций ρ, D_{12}, D_{13} . В практически важном случае, когда к внутренней и внешней поверхностям цилиндрической трубы, полученной изгибом прямоугольной плиты, прикладываются гидростатические давления p_0 и p_1 , граничные условия записываются так

$$D_{11}(0) = -p_0(al - bk)\rho(0), \quad D_{11}(h_1) = -p_1(al - bk)\rho(h_1), \quad (8)$$

$$D_{12}(0) = D_{13}(0) = D_{12}(h_1) = D_{13}(h_1) = 0$$

Таким образом, предположения (4) о характере деформации упругой среды позволяют точно удовлетворить уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхностях $x_1 = 0, x_1 = h_1$. Краевые условия на поверхностях $x_2 = 0, x_2 = h_2$ и $x_3 = 0, x_3 = h_3$ могут быть выполнены лишь в интегральном (осредненном) смысле Сен-Венана за счет подбора постоянных a, b, k, l .

Система уравнений (7) допускает первые интегралы. Их можно найти при помощи закона сохранения Эшелби [4, 5], согласно которому на всех решениях уравнений равновесия однородного упругого тела обращается в нуль дивергенция тензорного поля \mathbf{K} :

$$\operatorname{div}\mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{K} = \mathbf{W}\mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \quad (9)$$

Здесь \mathbf{E} — единичный тензор. Если тело испытывает деформацию вида (4), то тензор \mathbf{K} не зависит от переменных x_2, x_3 . Отсюда и из (5)–(7), (9) вытекает

Теорема 1. *В случае однородного анизотропного упругого тела система уравнений (7) имеет три первых интеграла:*

$$W - \rho' D_{11} - \rho\chi' D_{12} - \xi' D_{13} = A_1, \quad \rho D_{12} = A_2, \quad D_{13} = A_3 \quad (10)$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — постоянные.

2. Рассмотрим теперь обобщение исследованной выше задачи о деформации упругого слоя, состоящее в учете микроструктуры материала. Воспользуемся моделью нелинейно упругой микрополярной среды [6, 7], т.е. среды с моментными напряжениями, применяемой для описания структурно-неоднородных, композиционных и наноструктурных материалов. В этой модели уравнение равновесия (1) дополняется уравнением баланса моментов

$$\operatorname{div}\mathbf{G} + (\mathbf{C}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D})_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

а уравнения состояния имеют вид

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H}, \quad W = W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \quad (12)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{L} \times \mathbf{E} = -(\operatorname{grad}\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \quad (13)$$

В (11)–(13) \mathbf{G} — псевдотензор моментных напряжений типа Пиолы, \mathbf{H} — собственно ортогональный тензор микроповорота, \mathbf{Y} — мера деформации, \mathbf{L} — псевдотензор изгибной деформации, символ $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$ означает векторный инвариант [1, 8] тензора второго ранга \mathbf{T} .

Задавая деформацию упругой плиты из микрополярного материала в виде, обеспечивающем сведение трехмерной задачи к одномерной, подстановку (4) необходимо дополнить выражением для тензорного поля микроповоротов \mathbf{H} , которое зададим следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_{tm}(x_1)\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{e}_t = \mathbf{H}_0(x_1) \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_s \\ \mathbf{H}_0(x_1) &= (4 + \Theta^2)^{-1}[(4 - \Theta^2)\mathbf{E} + 2\Theta \otimes \Theta - 4\mathbf{E} \times \Theta] \\ \Theta^2 &= \Theta \cdot \Theta, \quad \Theta = \Theta_s(x_1)\mathbf{i}_s \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использовано известное [8] общее представление собственно ортогонального тензора через вектор конечного поворота Θ . Согласно (5), (14) мера деформации \mathbf{Y} и псевдотензор изгибной деформации \mathbf{L} не зависят от координат x_2, x_3 и имеют вид

$$\mathbf{Y} = Y_{ms}(x_1)\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_s, \quad Y_{ms} = C_{mt}H_{st} \quad (15)$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{i}_1 \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial x_1} \cdot \mathbf{H}_0^{\mathbf{T}} \right)_{\mathbf{x}} + (\chi'\mathbf{i}_1 + a\mathbf{i}_2 + b\mathbf{i}_3) \otimes \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{H}_0^{\mathbf{T}} = L_{ms}(x_1)\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_s$$

Из (12), (14), (15) следует, что выражение (6) для тензора напряжений Пиолы остается справедливым и в случае однородной анизотропной микрополярной среды, а псевдотензор моментных напряжений выражается аналогично формуле (6)

$$\mathbf{G} = G_{sm}(x_1)\mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_m \quad (16)$$

На основании (5), (6), (11), (16) приходим к компонентной форме уравнения баланса моментов

$$\begin{aligned} G'_{11} - \chi' G_{12} - aG_{22} - bG_{32} + \rho\chi' D_{13} + a\rho D_{23} - kD_{22} + \xi' D_{12} + b\rho D_{33} - lD_{32} &= 0 \\ G'_{12} + \chi' G_{11} + aG_{21} + bG_{31} - \rho' D_{13} + \xi' D_{11} + kD_{21} + lD_{31} &= 0 \\ G'_{13} + \rho' D_{12} - \rho\chi' D_{11} - a\rho D_{21} - b\rho D_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку величины D_{sm} и G_{sm} для заданного материала, т.е. для заданной функции $W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})$ выражаются при помощи (12) через неизвестные функции $\rho, \chi, \xi, \Theta_k$ ($k = 1, 2, 3$) и их первые производные, уравнения (7) и (17) образуют систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно указанных функций. Граничные условия при $x_1 = 0, x_1 = h_1$, указанные в разд. 1, теперь надо дополнить заданием краевых значений моментных напряжений G_{1m} ($m = 1, 2, 3$). Таким образом, подстановки (4) и (14) приводят исходную задачу о больших деформациях упругой плиты из микрополярного материала к одномерной нелинейной краевой задаче.

Как установлено ранее [9], при отсутствии массовых сил и моментов в состоянии равновесия однородного микрополярного тела с произвольной анизотропией выполняется закон сохранения

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{W}\mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^{\mathbf{T}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{L}^{\mathbf{T}} \right) = 0 \quad (18)$$

Из (5), (6), (15), (16), (18) вытекает

Теорема 2. Система уравнений (7) и (17), описывающая большие деформации однородной плиты из микрополярного анизотропного материала, имеет четыре первых интеграла:

$$\begin{aligned} W - \rho' D_{11} - \rho\chi' D_{12} - \xi' D_{13} - G_{1n} H_{pn} L_{1p} &= B_1, \\ a\rho D_{12} + G_{1n} H_{pn} L_{2p} &= B_2, \quad b\rho D_{12} + G_{1n} H_{pn} L_{3p} = B_3, \quad D_{13} = B_4 \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь B_α , ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) — постоянные.

3. В ряде случаев найденные выше первые интегралы позволяют построить точное решение дифференциальных уравнений, описывающих большие деформации прямоугольного параллелепипеда. Рассмотрим частный случай деформации вида (4), (14) микрополярной среды, соответствующий чистому изгибу плиты, когда $\chi = \xi = b = k = 0$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}$. Мера деформации и псевдотензор изгибной деформации в данном случае принимают вид

$$\mathbf{Y} = \rho' \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + a\rho \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + l \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{L} = \varkappa \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \quad (20)$$

Микрополярную среду будем считать изотропной и несжимаемой. Свойство изотропности накладывает следующее ограничение на функцию упругого потенциала

$$W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) = W[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}, (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}] \quad (21)$$

где \mathbf{Q} — любой ортогональный тензор. При помощи (20) и (21) доказываем, что все компоненты напряжений и моментных напряжений, за исключением компонент $D_{11}, D_{22}, D_{33}, G_{23}, G_{32}$, равны нулю. Для несжимаемого тела тензор напряжений Коши определяется функцией удельной энергии с точностью до аддитивного шарового тензора, а тензор напряжений Пиолы представляется так

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* - q\mathbf{C}^{-\mathbf{T}}, \quad \mathbf{D}^* = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} \quad (22)$$

Здесь q — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. Условие несжимаемости $\det \mathbf{Y} = 1$ в силу (20) дает уравнение относительно функции $\rho(x_1)$:

$$al\rho\rho' = 1,$$

которое имеет следующее решение

$$\rho = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{2x_1}{al}}, \quad \rho_0 = \rho(0) \quad (23)$$

С учетом (22) в рассматриваемом частном случае деформации плиты первые интегралы (19) сводятся к одному

$$W + q - \rho'D_{11}^* = B_1 \quad (24)$$

откуда сразу находится функция $q(x_1)$. Напряженно-деформированное состояние плиты полностью выражается через найденные функции ρ и q . Постоянные ρ_0 и B_1 определяются из краевых условий (8). Моментная нагрузка на поверхностях $x_1 = 0$, $x_1 = h_1$ в полученном решении отсутствует.

Найденное точное решение нелинейной задачи о чистом изгибе упругой плиты имеет универсальный характер в том смысле, что относится к любому материалу из класса несжимаемых изотропных микрополярных тел.

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ МК-962.2007.1.

Список литературы

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
- [3] Zubov L.M. // ДАН. 1981. Т. 256. № 3. С. 556–559.
- [4] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
- [5] Knowles J.K., Sternberg E. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44. P. 187–211.
- [6] Toupin R.A. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. P. 85–112.
- [7] Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997. 205 p.
- [8] Zubov L.M., Карякин М.И. Тензорное исчисление. Основы теории. М.: Вузовская книга, 2006. 120 с.
- [9] Nikitin E., Zubov L.M. // J. Elasticity. 1998. V. 51. P. 1–22.

Zelenina A.A., Zubov L.M. *The first integrals of equilibrium equations in plane strain problems of nonlinear elasticity theory.* The first integrals of ordinary nonlinear differential equations system for bending, tension and twisting of elastic anisotropic layer were found with the help of final deformation theory conversation principles for ordinary material and materials with couple stresses.

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ О КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Зеньковская С. М., Новосядлый В. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о вибрационной конвекции Марангони в двухслойной системе вязких несмешивающихся жидкостей с деформируемой поверхностью раздела. Изучается асимптотический случай малых волновых чисел. Построены асимптотики критических значений и собственных функций монотонной и колебательной неустойчивости. В случае монотонной неустойчивости показано, что главные члены прямо пропорциональны гравитации, найдены члены асимптотики, которые зависят от поверхностного натяжения. Для колебательной неустойчивости найдены главные члены для критических параметров и собственных функций. Получено, что главные члены асимптотики не зависят от вибрации.

Введение

Задача о длинноволновой асимптотике конвекции Марангони была рассмотрена в [1]–[3] в случае однослойной жидкости со свободной деформируемой поверхностью. в [1], [2] изучалась длинноволновая монотонная неустойчивость. Было показано, что в случае вибрационной конвекции Марангони главные члены асимптотики не зависят от вибрации. В работах [4], [5] рассматривались двухслойные системы, при этом в [4] изучалась монотонная неустойчивость, для числа Марангони найдены главные члены асимптотики. В [5] рассмотрена асимптотика колебательной неустойчивости двухслойной системы в предположении, что частота нейтральных колебаний $c = c_1 \alpha^2 + \dots$. Найдено выражение для c_1 и соответствующего числа Марангони.

В данной работе изучается длинноволновая асимптотика монотонной и колебательной неустойчивости вибрационной конвекции Марангони в двухслойной системе с деформируемой поверхностью раздела.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев вязких несмешивающихся жидкостей, ограниченную снаружи твердыми или “мягкими” стенками и имеющую деформируемую границу раздела с коэффициентом поверхностного натяжения, линейно зависящего от температуры по закону $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T T$. Жидкости однородны. Координаты будем обозначать x_1, x_2, x_3 , ось x_3 совпадает с вектором силы тяжести. Температура плоской равновесной границы раздела принята за начало отсчета. Плоскость $x_3 = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью раздела. Предполагается, что система как целое совершает колебания вдоль орта $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ по закону $x_3 = af(\omega t)$, где f — 2π -периодическая функция с нулевым средним. Будем рассматривать случай, когда частота ω велика, а амплитуда $a = b/\omega$ мала, так что амплитуда b скорости вибрации конечна. При этом предполагаем, что период вибрации меньше характерных гидродинамических времен, так что можно не учитывать вибрационные пограничные слои. Кроме того, считаем, что выполняется условие использования модели несжимаемой жидкости (длина звуковой волны

должна быть много больше характерного размера). При сделанных предположениях к данной задаче применим метод осреднения Крылова-Боголюбова [6]–[7]. После осреднения, линеаризации и отделения переменных приходим к следующей спектральной задаче:

$$\lambda L\psi^k = \nu_k L^2\psi^k, \quad \lambda\theta^k - A_k\psi^k = C_k L\theta^k, \quad L = D^2 - \alpha^2, \quad D = \partial/\partial x_3, \quad (1)$$

$$x_3 = 0 : \quad \psi^1 = \psi^2, \quad D\psi^1 = D\psi^2, \quad \psi^k = -\lambda\eta, \quad \theta^1 + A_1\eta = \theta^2 + A_2\eta, \quad (2)$$

$$\mu_1 D^2\psi^1 - \mu_2 D^2\psi^2 + \alpha^2(\mu_1 - \mu_2)\psi^1 = -\alpha^2 M(\theta^k + A_k\eta) \quad (3)$$

$$3\alpha^2(\mu_1 - \mu_2)D\psi^1 + \lambda(\rho_1 - \rho_2)D\psi^1 - (\mu_1 D^3\psi^1 - \mu_2 D^3\psi^2) + \alpha^2(Q_r\eta + C_v\alpha\eta) = 0, \quad \varkappa_1 D\theta^1 = \varkappa_2 D\theta^2, \quad Q_r = Q_0(\rho_1 - \rho_2), \quad (4)$$

$$C_v = C\alpha + \mu_v \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1 \operatorname{cth} \alpha h_1 + \rho_2 \operatorname{cth} \alpha h_2}, \quad \mu_v = b^2 \langle f'^2 \rangle \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

$$x_3 = h_1, -h_2 : \quad \psi^k = 0, \quad D\psi^k = 0, \quad B_{1k}D\theta^k + B_{0k}\theta^k = 0 \quad (6)$$

Жидкость с номером 1 находится снизу, с номером 2 — сверху. Безразмерные величины введены с использованием масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры величины \mathcal{L} , \mathcal{T} , $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$, $\rho\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}$, $A\mathcal{L}$. Здесь ρ — характерный масштаб плотностей, A — характерный вертикальный градиент температур. Здесь ψ^k — функции тока, θ^k — температуры, μ_k , $\nu_k = \mu_k/\rho_k$, $C_k = \chi_k\mathcal{T}/\mathcal{L}^2$, \varkappa_k — безразмерные коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и теплопроводности. $Q_0 = g_0\mathcal{T}^2/\mathcal{L}$ — постоянная часть гравитации, $C = \sigma_0\mathcal{T}^2/\rho\mathcal{L}^3$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $M = \sigma_T A\mathcal{T}^2/\rho\mathcal{L}^2$ — число Марангони.

Заметим, что система (1)–(6) отличается от полученной в [4] в случае однородных жидкостей только краевым условием (4), а именно, присутствием эффективного поверхностного натяжения C_v , пропорционального вибрационному параметру $m\nu_v$, вместо обычного поверхностного натяжения.

Случай монотонной неустойчивости

Первый член асимптотики монотонной неустойчивости для числа Марангони был построен в [4] для изотермических стенок и показано, что он прямо пропорционален гравитации. Если же гравитация равна нулю, то нужно найти следующие члены асимптотики. Займемся их построением.

Из анализа численных результатов следует, что нужно искать асимптотику вида:

$$\begin{aligned} \psi^k &= \alpha^2\psi_0^k + \alpha^2\psi_1^k \dots, \quad \theta^k = \theta_0^k + \alpha^2\theta_1^k \dots, \\ \eta &= \eta_0 + \alpha^2\eta_1 \dots, \quad M = M_0 + \alpha^2M_1 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда из (5) получаем $C_v = \alpha C_{v0} + \dots$, $C_{v0} = C + \mu_v \frac{(\rho_{01} - \rho_{02})^2}{\rho_{01}/h_1 + \rho_{02}/h_2}$.

Подставляя разложения (7) в уравнения (1)–(6), приходим к задаче для глав-

ных членов:

$$\begin{aligned}
D^4\psi_0^k &= 0, \quad D^2\theta_0^k = 0, \\
z = 0 : \quad \psi_0^1 &= \psi_0^2 = 0, \quad D\psi_0^1 = D\psi_0^2, \\
\mu_1 D^2\psi_0^1 - \mu_2 D^2\psi_0^2 &= -M_0(\theta_0^k + A_k\eta_0), \quad \theta_0^1 + A_1\eta_0 = \theta_0^2 + A_2\eta_0, \\
\mu_1 D^3\psi_0^1 - \mu_2 D^3\psi_0^2 - Q_r\eta_0, \quad \varkappa_1 D\theta_0^1 &= \varkappa_2 D\theta_0^2, \\
z = h_1, -h_2 : \quad \psi_0^k &= 0, \quad D\psi_0^k = 0, \quad B_{1k}D\theta_0^k + B_{0k}\theta_0^k = 0
\end{aligned}$$

Решая эту задачу, находим:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \frac{2Q_r h_1 h_2 (\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)(l_1 + l_2)}{3(\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2)(A_1 l_1 + A_2 l_2)}, \quad \eta_0 = -N_{01} l_{\eta_0}, \\
\psi_0^1 &= -N_{01} Q_r l_3 h_2^2 z(z - h_1)^2, \quad \psi_0^2 = -N_{01} Q_r l_3 h_1^2 z(z + h_2)^2, \\
\theta_0^1 &= -N_{01} \frac{B_{01} z - B_{01} h_1 - B_{11}}{B_{01} h_1 + B_{11}}, \quad \theta_0^2 = -N_{01} \frac{\varkappa_1 B_{01}(z B_{02} + B_{02} h_2 - B_{12})}{\varkappa_2 B_{02}(B_{01} h_1 + B_{11})}, \\
l_1 &= \varkappa_1 B_{01}(B_{02} h_2 - B_{12}), \quad l_2 = \varkappa_2 B_{02}(B_{01} h_1 + B_{11}), \\
l_3 &= \frac{1}{6} \frac{l_1 + l_2}{l_2 (\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2)(A_1 - A_2)}, \quad l_{\eta_0} = \frac{l_1 + l_2}{l_2 (A_1 - A_2)}
\end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha \rightarrow 0$ получаем, что функции $\psi^k \rightarrow 0$, θ^k — линейные функции, а η отлична от нуля, так что имеет место деформация поверхности раздела. Таким образом, может иметь место опрокидывание поверхности раздела под действием термокапиллярных сил.

Перейдем к следующему приближению, которому соответствует задача:

$$\begin{aligned}
D^4\psi_1^k &= 2D^2\psi_0^k, \quad C_k(D^2\theta_1^k - \theta_0^k) + A_k\psi_0^k = 0, \\
z = 0 : \quad \psi_1^1 &= \psi_1^2 = 0, \quad D\psi_1^1 = D\psi_1^2, \quad \theta_1^1 + A_1\eta_1 = \theta_1^2 + A_2\eta_1, \\
\mu_1 D^2\psi_1^1 - \mu_2 D^2\psi_1^2 + M_0(\theta_1^k + A_k\eta_1) + M_1(\theta_0^k + A_k\eta_0) &= 0, \\
3(\mu_1 - \mu_2)D\psi_0^1 - \mu_1 D^3\psi_1^1 + \mu_2 D^3\psi_1^2 + \\
+ C_{v0}\eta_0 + Q_r\eta_1 &= 0, \quad \varkappa_1 D\theta_1^1 = \varkappa_2 D\theta_1^2, \\
z = h_1, -h_2 : \quad \psi_1^k &= 0, \quad D\psi_1^k = 0, \quad B_{1k}D\theta_1^k + B_{0k}\theta_1^k = 0
\end{aligned}$$

В результате решения находим следующие члены асимптотики. Приведем выражения для них в случае невесомости и изотермических стенок:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{2h_1 h_2 C_{v0} (\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1) (\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1)}{3(\varkappa_2 h_1 A_2 + A_1 \varkappa_1 h_2) (\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2)}, \\
\psi_1^1 &= N_{01} \frac{1}{6} \frac{h_2^2 C_{v0} (\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1) z(z - h_1)^2}{\varkappa_2 (A_1 - A_2) (\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2)}, \\
\psi_1^2 &= N_{01} \frac{1}{6} \frac{h_1^2 C_{v0} (\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1) z(z + h_2)^2}{\varkappa_2 (A_1 - A_2) (\mu_1 h_2^2 - \mu_2 h_1^2)} + \dots, \\
\theta_1^1 &= \frac{z - h_1}{6h_1} (N_{01} z h_1 (z - 2h_1) - 6N_{11}), \\
\theta_1^2 &= \frac{\varkappa_1 (z + h_2)}{6\varkappa_2 h_1} (N_{01} h_1 (z^2 + 2h_2 z + 2h_1^2 - 2h_2^2) - 6N_{11}), \\
\eta &= \frac{1}{3} \frac{\varkappa_1 h_1 h_2 N_{01} (h_1^2 - h_2^2) - 3N_{11} (\varkappa_1 h_2 + \varkappa_2 h_1)}{h_1 \varkappa_2 (A_1 - A_2)}
\end{aligned}$$

Константы N_{01} и N_{11} находятся из какого-нибудь дополнительного условия на собственные функции, например $D\theta_1(0) = 1$. Заметим, что если внешние стенки нетеплопроводные, то асимптотика вида (7) не существует.

Случай колебательной неустойчивости

Если $\lambda \neq 0$, то в системе (1)–(6) существует асимптотика вида:

$$M = \alpha^{-2}M_0, \quad \lambda = \lambda_0 + \dots, \quad \psi^k = \psi_0^k + \dots, \quad \theta^k = \theta_0^k + \dots, \quad \eta = \eta_0 + \dots$$

Для главных членов асимптотики имеем задачу:

$$\begin{aligned} \lambda_0 D^2 \psi_0^k &= \nu_k D^4 \psi_0^k, \quad \lambda_0 \theta_0^k - A_k \psi_0^k = C_k L \theta_0^k, \\ x_3 = 0 : \quad \psi_0^1 &= \psi_0^2, \quad D\psi_0^1 = D\psi_0^2, \quad \psi_0^k = -\lambda_0 \eta_0, \\ \theta_0^1 + A_1 \eta_0 &= \theta_0^2 + A_2 \eta_0, \quad \mu_1 D^2 \psi_0^1 - \mu_2 D^2 \psi_0^2 = -M_0(\theta_0^k + A_k \eta_0), \\ \lambda_0(\rho_1 - \rho_2) D\psi_0^1 &- (\mu_1 D^3 \psi_0^1 - \mu_2 D^3 \psi_0^2) = 0, \quad \varkappa_1 D\theta_0^1 = \varkappa_2 D\theta_0^2, \\ x_3 = h_1, -h_2 : \quad \psi_0^k &= 0, \quad D\psi_0^k = 0, \quad B_{1k} D\theta_0^k + B_{0k} \theta_0^k = 0 \end{aligned}$$

Формулы для решения получены, но они достаточно громоздкие, поэтому здесь не приводятся.

Результаты вычислений

Вычисления по асимптотическим формулам были проведены для системы жидкостей силиконовое масло — флюоринерт, параметры которой приведены в [8]. Рассматривался случай невесомости, глубина нижнего слоя $h_1 = 0.6$. Сравнение проводилось с результатами и формулами для конечных α , приведенных в [6], [7]. В случае монотонной неустойчивости имеем:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0, \quad M_1 = 246.261, \\ \psi_0^1 &= 0, \quad \psi_1^1 = z(-59.525 + 198.418z - 165.348z^2), \\ \psi_0^2 &= 0, \quad \psi_1^2 = z(-59.525 - 297.627z - 372.034z^2), \\ \theta_0^1 &= \frac{5}{3}z + 1, \quad \theta_1^1 = -0.72 + z + 0.5z^2 - 0.28z^3, \\ \theta_0^2 &= -0.8694z - 0.3477, \quad \theta_1^2 = 0.227 + 0.521z - 0.174z^2 - 0.145z^3, \\ \eta_0 &= -4.2873, \quad \eta_1 = 3.013 \end{aligned}$$

Для колебательной неустойчивости получаем:

$$M_0 = -84401.735, \quad \lambda_0 = 10.117$$

При $\alpha = 0.01$ результаты, полученные по асимптотическим формулам, отличаются от результатов, полученных по полным формулам, менее чем на 1%.

Заключение

Таким образом, приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что, как и в случае однослойной системы, главные члены асимптотики не зависят от параметров вибрации.

Исследование проводилось при частичной поддержке грантов РФФИ (05-01-00587, 07-0100099-а), гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5747.2006.1) и в рамках ЕНО “Регулярная и хаотическая гидродинамика” (проект РФФИ 07-01-92213-НЦНИЛ_а).

Список литературы

- [1] *Takashima M.* Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection. II. Overstability // *J. Phys. Soc. Japan.* 1981. Vol. 50, N 8. P. 2745–2756.
- [2] *С.М. Зеньковская, А.Л. Шлейкель.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // *ПММ.* Т. 66. В. 4. 2002. с. 573–583.
- [3] *Зеньковская С.М.* Длинноволновая колебательная неустойчивость Марангони в горизонтальном слое жидкости // *ПММ.* Т. 71. В. 5, 2007. С. 849–855.
- [4] *Zeren R.W., Reynolds W.C.* Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers // *J. Fluid Mech.* 53 (1972), pp. 305–327.
- [5] *Непомнящий А.А.* О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей // В сб. науч. трудов "Конвективные течения Пермь, ПГПИ, 1983. С. 25–31.
- [6] *Зеньковская С.М., Новосядлый В.А.* Влияние высокочастотной вибрации произвольного направления на возникновение конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Деп. в ВИНТИ 29.06.2007 N 683-В 2007, 60 p.
- [7] *Zenkovskaya S.M., Novosiadliy V.A.* Influence of high-frequency vibration on the onset of convection in two-layer system // *C. R. Mecanique* (2007), doi:10.1016/j.crme.2007.10.009.
- [8] *Zhou B., Liu Q., Tang Z.* Rayleigh-Marangoni-Benard instability in two-layer fluid system // *Acta Mechanica Sinica* 20, 4 (2004), pp. 366–373.

Zenkovskaya S.M., Novosiadliy V.A. *Long-wave asymptotics for Marangoni convection in two-layer system.* Marangoni convection in two-layer system of viscous immiscible fluids with deformable interface is studied. The asymptotic case of small wave numbers (large wave lengths) is considered. Asymptotics of stationary and oscillatory instability was constructed. For the stationary instability the first term was shown to be directly proportional to gravity. Terms, dependent on surface tension, were derived as well. Main asymptotic terms for critical parameters and eigenfunctions were obtained. They are found to be not dependent on vibration.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Зимин В. Н.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Предложен подход к описанию динамики трансформируемых конструкций в процессе их раскрытия. Модель шарнирного узла включает в себя вращательную пару, допускающую относительное движение смежных элементов трансформируемой конструкции, и устройства, обеспечивающие их раскрытие и фиксацию в раскрытом рабочем положении. Результаты расчетов с использованием рассмотренной модели шарнирного узла позволяют выбрать рациональные параметры всех элементов устройств раскрытия и фиксации, обеспечивающих плавное раскрытие конструкции с минимальными динамическими нагрузками. Данный подход можно эффективно использовать для анализа возможных нештатных ситуаций при раскрытии трансформируемых конструкций.

При проектировании крупногабаритных трансформируемых ферменных конструкций (рис. 1) проводится анализ различных вариантов конструктивно-силовых схем и компоновок с целью выбора наиболее рациональной конструкции с точки зрения веса, технологии изготовления, а также с учетом плавности и надежности раскрытия при эксплуатации [1]. На ранних стадиях проектирования особую ценность представляют методы и программы, которые с достаточной для практики степенью точности при малых вычислительных затратах позволяют сделать конструктивные разработки различных вариантов, оценить их характеристики и выбрать наиболее рациональный вариант. Основным требованием к рабочей программе на этом этапе является минимальное время расчета одного варианта при достаточной для практики точности.

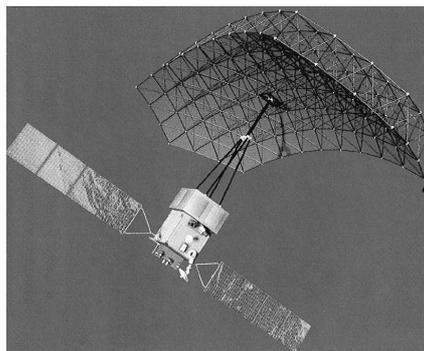


Рис. 1. Космический аппарат с трансформируемой ферменной конструкцией

Рассматриваемые конструкции образованы двумя поясами складывающихся стержней, соединенными между собой диагональными стержнями. Пояс, связанный со штангой, которая закрепляется на космическом аппарате, будем называть верхним поясом, а другой — нижним. Узловые шарнирные соединения верхнего пояса располагаются на образующей поверхности, которая может быть плоской

или осесимметричной. Сам же верхний пояс может не обладать какой-либо симметрией. Следует отметить, что в данном случае под осесимметричной ферменной конструкцией понимается конструкция, для которой узловые шарнирные соединения расположены на осесимметричной образующей поверхности.

Если массу диагональных стержней ферменной конструкции можно разнести по узлам активных элементов, то достаточно рассматривать движение одной из радиальных полос (рис. 2).

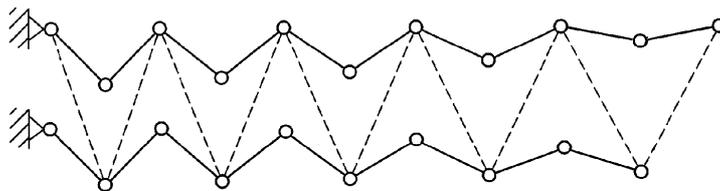


Рис. 2. Модель в виде цепочки складывающихся стержней

Расчетная модель в виде цепочки складывающихся стержней формируется на основе заданной геометрии первоначально плоской ферменной конструкции. Она основана на функциональном разделении элементов ферменной конструкции: верхнего, нижнего и среднего поясов стержней. В качестве активного элемента конструкции принята верхняя цепочка складывающихся стержней.

В процессе раскрытия при определенном относительном положении трубчатых элементов складывающихся стержней на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное перемещение.

Техническое исполнение налагаемых связей может быть самым разнообразным: различного рода упоры или фиксаторы. Простейшая расчетная схема таких устройств может быть представлена в виде упругого и демпфирующего элементов с соответствующими характеристиками [2].

Рассмотрим установку на упор или фиксатор одного элемента трансформируемой конструкции.

Уравнение движения имеет вид

$$J_0 \ddot{\varphi} = -k(\varphi + \varphi_z) - (k_y \Delta\varphi + c_d \dot{\varphi}) \cdot H(\Delta\varphi),$$

где J_0 — момент инерции элемента раскрывающейся (трансформируемой) конструкции; k — коэффициент жесткости пружины, обеспечивающей раскрытие; φ_z — угол предварительной закрутки пружины; k_y — коэффициент жесткости упругой компоненты модели упора (фиксатора); c_d — коэффициент демпфирования вязкой компоненты модели упора (фиксатора); φ — угол поворота элемента конструкции, $\Delta\varphi = (\varphi - \varphi_k)$ — относительный угол, соответствующий моменту установки на упор (фиксатор); $H(\Delta\varphi)$ — функция, которая принимает значение 0 ($\Delta\varphi \geq 0$) или 1 ($\Delta\varphi < 0$).

При проведении численного эксперимента коэффициент жесткости упругой компоненты модели упора варьировался в пределах от 10 до 100000 Н·м, увеличиваясь от одного расчета к другому на порядок. Анализ полученных результатов (рис. 3) показал, что чем выше коэффициент жесткости, тем более высокий коэффициент демпфирования вязкой компоненты модели упора нужно выбирать для

получения аналогичной картины затухания колебаний элемента конструкции. Так при увеличении коэффициента жесткости на порядок требуется увеличить коэффициент демпфирования в 3...3,5 раза.

Параметр φ_z , характеризующий предварительное заневоливание пружины, оказывает существенное влияние на время затухания колебаний элемента конструкции. При изменении параметра φ_z от 0 до $\pi/2$ время раскрытия элемента конструкции сокращается почти на порядок. Однако дальнейшее увеличение φ_z до π несущественно влияет на время раскрытия.

$$K = 0,3 \text{ н·м}, \quad \varphi_z = \frac{\pi}{2}, \quad K_y = 1000 \text{ н·м}$$

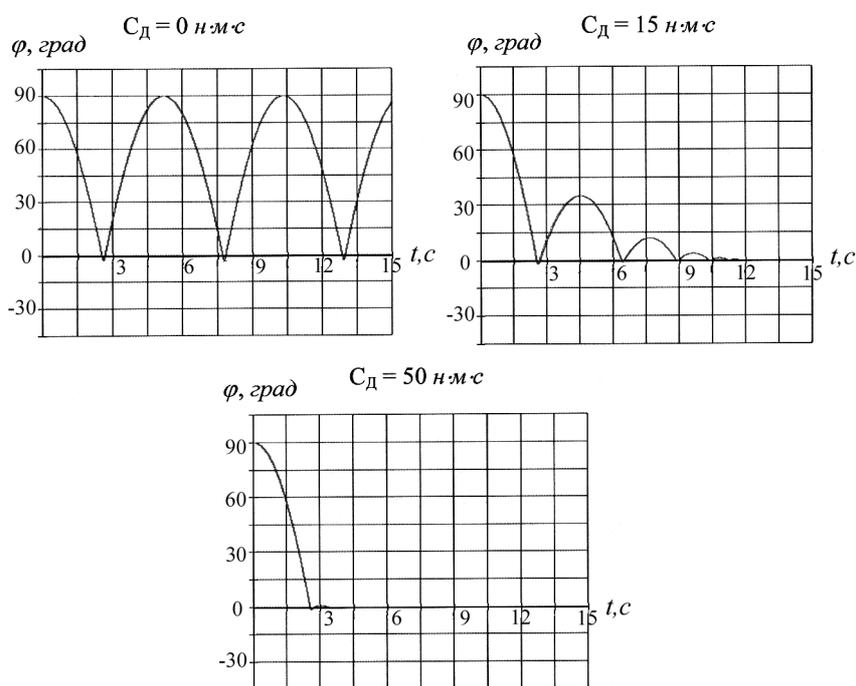


Рис. 3. Результаты численного эксперимента при изменении коэффициента демпфирования вязкой компоненты модели упора (фиксатора)

Частота колебательного процесса элемента конструкции возрастает с ростом коэффициента жесткости пружины, обеспечивающей раскрытие. В вычислительном эксперименте этот параметр изменялся от 0,1 до 1,0 Н·м. В этих пределах коэффициент жесткости пружины значительно влияет на время раскрытия элемента конструкции. Дальнейшее увеличение коэффициента жесткости не приводит к существенному уменьшению времени раскрытия.

В большинстве практических случаев для определения характеристик упругого и демпфирующего элементов модели упора (фиксатора) проводят экспериментальные исследования раскрытия элементов трансформируемой конструкции. Значения коэффициентов жесткости упругого элемента и демпфирования вязкой компоненты модели упора (фиксатора) подбираются путем сравнения экспериментальных и численных результатов для трансформируемых конструкций, состоящих из малого числа звеньев. При установке элементов конструкции на упоры

(фиксаторы) при различных соотношениях коэффициентов жесткости и демпфирования возникают или осцилляционные режимы движения, или затухающие осцилляционные движения, или аperiodические режимы движения элементов конструкции.

Для определения параметров модели упора складывающихся стержней ферменной конструкции был проведен цикл экспериментов по раскрытию стержней реальной ферменной конструкции. Качественное совпадение результатов экспериментальных исследований и расчетов позволяет использовать такие модели упоров (фиксаторов) для расчета раскрытия ферменных трансформируемых конструкций.

При исследовании процесса раскрытия ряда ферменных конструкций на основе модели в виде цепочки складывающихся стержней при различных массовых характеристиках стержней и жесткостей пружин были получены следующие результаты. На рис. 4 приведены соответствующие изменения кинематических параметров радиальной полосы.

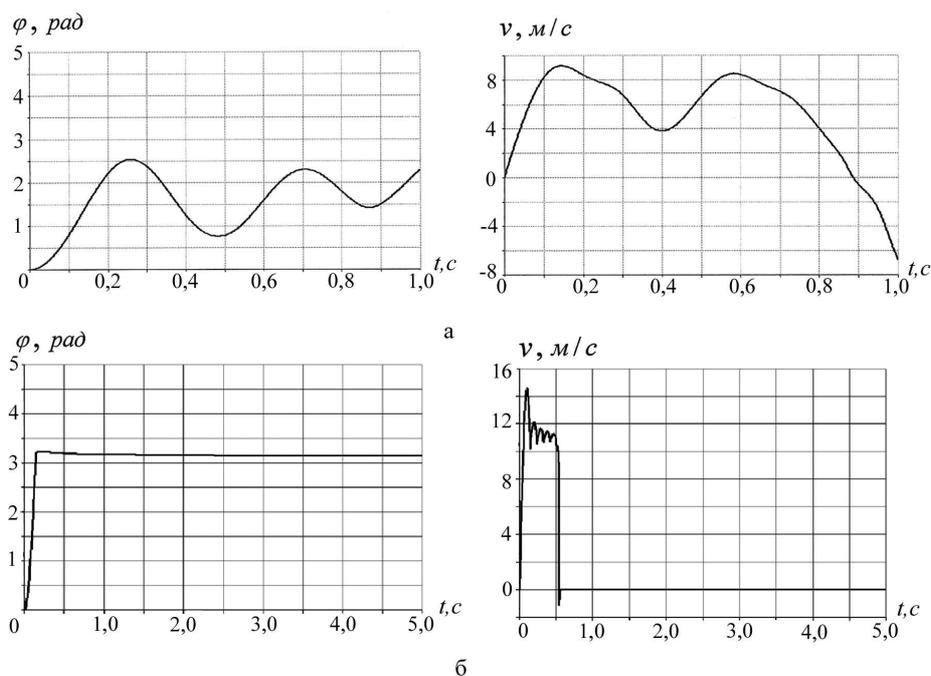


Рис. 4. Изменения параметров раскрытия (угла и линейной скорости) крайнего складывающегося стержня: а — при установке складывающихся стержней на упоры; б — при установке складывающихся стержней на фиксаторы

Если в ферменных конструкциях используются упоры, то при одинаковых массовых характеристиках стержней и жесткостей пружин процесс раскрытия происходит неравномерно, волнообразно, с большими изменениями углов и угловых скоростей между стержнями. Это может привести к большим динамическим нагрузкам в элементах конструкции в момент установки складывающихся стержней на упоры. Однако за счет рационального распределения жесткостей пружин можно добиться равномерного раскрытия. Если используются фиксаторы, то также

за счет рационального распределения жесткостей пружин можно уменьшить динамические нагрузки в элементах конструкции.

Полученные результаты дают новые возможности для рационального выбора различных конструктивных решений при проектировании раскрывающихся крупногабаритных трансформируемых конструкций. Предложенная модель может быть отнесена к категории рабочих или исследовательских моделей, необходимых на этапе эскизного проектирования. Она адекватно отражает основные механические свойства реальных элементов конструкции. С ее помощью можно оценить динамические нагрузки, возникающие в элементах конструкции в момент установки на упоры или фиксаторы складывающихся стержней. Кроме того, данная модель может быть использована на стадии рабочего проектирования и в процессе экспериментальной отработки раскрытия крупногабаритных ферменных конструкций для моделирования различных нештатных ситуаций.

Список литературы

- [1] Механика больших космических конструкций / Н.В. Баннчук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. М.: Факториал, 1997. 302 с.
- [2] Зимин В.Н. Механика трансформируемых структурных конструкций // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 105–114.

Zimin V.N. *Simulation of transformable space structures deploy.* The method for investigation of the transformable structure dynamics during deploy is suggested. The hinged joint model includes a rotary couple, making possible the relative motion of the deployable structure adjacent elements, and devices that provide the elements deploy and fixation in unfolded operating position. The output computations based on the model under consideration, permit to choice the efficient parameters for all devices of structure deploy and fixation so that to provide the smooth structure deploy with minimal dynamic loads. The considered method can be used effectively for analysis of contingencies during structure deploy.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК С ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках классической теории Кирхгофа-Лява рассмотрена задача о напряженном состоянии тонкой упругой оболочки, содержащей непрерывно распределенные дислокации и дисклинации. Решена задача об изгибаниях замкнутой сферы с распределенными дислокациями.

1. Упругие свойства тонкой оболочки в рамках теории типа Кирхгофа-Лява [1]–[3] определяются заданием функции удельной (на единицу площади срединной поверхности) потенциальной энергии деформации W

$$W = W(\varepsilon, \varkappa)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\text{grad } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\text{grad } \mathbf{u})^T] - \mathbf{b}w \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = -\text{grad } \mathbf{n}$$

$$\varkappa = \varkappa^T = (\text{grad } \Theta) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{b} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T$$

$$\Theta = \text{grad } w + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{grad } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \otimes \partial \Phi / \partial y^\alpha \quad (2)$$

$$\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{r}_\beta = \partial \mathbf{r} / \partial y^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Здесь \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности оболочки σ , \mathbf{g} и \mathbf{b} — первый и второй фундаментальные тензоры на σ [3], \mathbf{E} — трехмерный единичный тензор, \mathbf{v} — векторное поле смещений поверхности σ , ε и \varkappa — тензоры соответственно тангенциальных и изгибных деформаций оболочки, y^α — гауссовы координаты на σ , \mathbf{r} — радиус-вектор точки поверхности σ , δ_β^α — символ Кронекера, $\Phi(y^1, y^2)$ — некоторое дифференцируемое тензорное поле произвольного ранга, grad — оператор градиента на поверхности [3]. Ниже будут также использоваться операторы дивергенции и ротора на σ :

$$\text{div } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \cdot \partial \Phi / \partial y^\alpha, \quad \text{rot } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \times \partial \Phi / \partial y^\alpha$$

Введя в рассмотрение векторное поле поворотов ω [1]–[3]

$$\omega = \Theta \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{u}) \mathbf{n}, \quad (3)$$

из (1), (3), получим

$$\text{grad } \mathbf{v} = \varepsilon - \mathbf{g} \times \omega \quad (4)$$

Если оболочка, рассматриваемая как двумерный континуум, т.е. как материальная поверхность σ , перемещается как абсолютно твердое тело, то поле смещений имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где \mathbf{v}_0 , ω_0 , \mathbf{r}_0 — постоянные векторы. В этом случае из (1)–(3) получаем соотношения $\varepsilon = \varkappa = 0$, $\omega = \omega_0$, разъясняющие геометрический смысл величин ε и \varkappa , ω . Вместо тензора \varkappa в качестве меры изгибной деформации можно применять [3], [4] симметричный тензор \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} [(\text{grad } \omega) \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot (\text{grad } \omega)^T] = \varkappa - \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \mathbf{b}), \quad \mathbf{e} = -\mathbf{n} \times \mathbf{g}, \quad (5)$$

где \mathbf{e} — дискриминантный тензор поверхности.

Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах могут быть представлены [3] в форме одного векторного уравнения относительно симметричного тензора мембранных усилий \mathbf{T} и симметричного тензора моментов \mathbf{M} :

$$\text{div} \left[\mathbf{T} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{g} \cdot (\text{div} \mathbf{M}) \otimes \mathbf{n} \right] + \text{div}(\mu \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

Здесь \mathbf{f} — интенсивность распределенной по поверхности σ внешней силовой нагрузки, μ — интенсивность распределенного по σ внешнего момента. Заметим, что в уравнении равновесия (6) не участвует нормальная составляющая $\mu \cdot \mathbf{n}$ внешней моментной нагрузки. Симметричные тензоры усилий и моментов выражаются через деформации оболочки при помощи определяющих соотношений [3], [4]

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad \mathbf{M} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{k}} \quad (7)$$

2. Рассмотрим задачу определения поля перемещений оболочки по заданным полям тензора деформаций ε и вектора поворотов ω , которые предполагаются дифференцируемыми функциями координат на поверхности σ . На основании (4) имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot (\varepsilon - \mathbf{g} \times \omega) + \mathbf{v}(\mathbf{r}_0), \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha dy^\alpha \quad (8)$$

Если поверхность σ односвязна, то необходимое и достаточное условие независимости интеграла в (8) от пути интегрирования заключается в выполнении равенства

$$\text{div}(\mathbf{e} \cdot \varepsilon) = \text{div}(\mathbf{e} \times \omega) \quad (9)$$

Предположим теперь, что поверхность оболочки σ многосвязна и гомеоморфна кругу с круговыми отверстиями, а функции ε и ω однозначны в этой многосвязной области. Поле перемещений в этом случае будет, вообще говоря, обладать неоднозначностью, состоящей в том, что при обходе замкнутого контура, охватывающего одно из отверстий, вектор \mathbf{v} получает приращение, равное вектору Бюргерса \mathbf{B}_s :

$$\mathbf{B}_s = \oint_{\gamma_s} d\mathbf{r} \cdot (\varepsilon - \mathbf{g} \times \omega) \quad (10)$$

Вектор \mathbf{B}_s не зависит от выбора контура γ_s при условии, что контур охватывает только одно s -е отверстие. При помощи (10) найдем суммарный вектор Бюргерса

для системы дислокационных дефектов, расположенных на некотором участке σ_0 поверхности σ :

$$\mathbf{B} = \sum_s \mathbf{B}_s = \sum_s \oint_{\gamma_s} d\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (11)$$

В силу известных свойств криволинейных интегралов и однозначности полей $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ сумму интегралов в (11) можно заменить одним интегралом по замкнутому контуру γ_0 , охватывающему все отверстия в области σ_0

$$\mathbf{B} = \oint_{\gamma_0} d\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (12)$$

Для перехода от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению диаметры отверстий устремляем к нулю, а поля тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ считаем дифференцируемыми функциями в области σ_0 , ограниченной контуром γ_0 . Преобразуя контурный интеграл в (12), получим

$$\mathbf{B} = \iint_{\sigma_0} \alpha d\sigma, \quad \alpha = \operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (13)$$

Так как \mathbf{B} — суммарный вектор Бюргера всех дислокаций, содержащихся в области σ_0 , векторную величину α следует назвать плотностью дислокаций. При $\alpha = 0$ соотношение (13) переходит в уравнение (9).

Далее предположим, что оболочка, содержащая непрерывно распределенные дислокации, занимает многосвязную область, и поставим задачу об определении поля поворотов $\boldsymbol{\omega}$ в многосвязной области по заданным однозначным и дифференцируемыми полям $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ и α . Теперь мы отказываемся от требования однозначности поворотов. Составим на основании (1), (2), (3), (13) уравнение для определения поля поворотов. Из (1) находим

$$(\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \alpha) \otimes \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (14)$$

Из определения тензора $\boldsymbol{\varkappa}$ (2) имеем

$$(\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

откуда и из (5), (14) получаем

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \quad (15)$$

$$\mathbf{L} \equiv -\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{g} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \alpha) \otimes \mathbf{n}$$

Важно отметить, что в правой части уравнения (15) не участвует нормальная составляющая плотности дислокаций $\alpha \cdot \mathbf{n}$, соответствующая винтовым дислокациям. Интегрирование уравнения (15) дает

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) \quad (16)$$

В многосвязной области поле поворотов, задаваемое формулой (16), вообще говоря, неоднозначно. При обходе замкнутого контура, охватывающего одно из отверстий, вектор ω получает приращение, равное вектору Франка

$$\mathbf{Q}_k = \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}.$$

Отличие от нуля постоянных \mathbf{Q}_k означает существование изолированных дисклинаций в многосвязной оболочке с непрерывно распределенными дислокациями. Суммарный вектор Франка дискретного набора дисклинаций выражается формулой

$$\mathbf{Q} = \sum_k \mathbf{Q}_k = \sum_k \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \oint_{\gamma_0} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} \quad (17)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, перейдем от дискретного набора дисклинаций к их непрерывному распределению с векторной плотностью β , для которой получается выражение

$$\beta = \operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}) \quad (18)$$

Считая плотности дислокаций и дисклинаций заданными функциями координат на поверхности, из (15) и (18) приходим к уравнению несовместности теории оболочек

$$\operatorname{div} \left[\mathbf{k}' + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{g} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}') \otimes \mathbf{n} \right] + \operatorname{div}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \beta = 0 \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}$$

В частном случае, когда дисклинации отсутствуют ($\beta = 0$), уравнение (19) было выведено ранее [5]. При $\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\beta = 0$ оно переходит в известное [4], [5] уравнение совместности (неразрывности) теории оболочек типа Кирхгофа-Лява.

Заметим, что поскольку нормальная составляющая вектора плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}$ не входит в уравнение несовместности (19), двумерная модель оболочки типа Кирхгофа-Лява не позволяет рассматривать непрерывное распределение винтовых дислокаций. Учет непрерывно распределенных винтовых дислокаций возможен в рамках двумерной теории оболочек типа Коссера [6].

Между уравнениями равновесия (6) и уравнениями несовместности (19) обнаруживается статико-геометрическая аналогия, согласно которой эти уравнения переходят друг в друга при заменах $\mathbf{T} \rightleftharpoons \mathbf{k}'$, $\mathbf{M} \rightleftharpoons \boldsymbol{\varepsilon}'$, $\boldsymbol{\mu} \rightleftharpoons \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{f} \rightleftharpoons \beta$.

Ранее статико-геометрическая аналогия была известна [1], [2], [4] для оболочки без дислокаций, дисклинаций и поверхностных нагрузок.

В случае изотропного материала уравнения состояния оболочки имеют вид [3]

$$\mathbf{T} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}], \quad \mathbf{M} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\mathbf{k} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{k}] \quad (20)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки.

3. Рассмотрим некоторые простые задачи о равновесии упругих оболочек с непрерывно распределенными дефектами. Пусть в замкнутой сферической оболочке радиуса r_0 дислокации отсутствуют ($\alpha = 0$), а вектор плотности дисклинаций равен $\beta_0 \mathbf{n}$ ($\beta_0 = \text{const}$), что соответствует равномерному распределению клиновых дисклинаций. Внешние нагрузки отсутствуют. Легко проверить, что система уравнений (6), (19), (20), описывающая равновесие оболочки, имеет следующее решение

$$\varepsilon = 0, \quad \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{k} = \frac{\beta_0 r_0}{2} \mathbf{g}, \quad \mathbf{M} = -\frac{Eh^3 \beta_0 r_0}{24(1-\nu)} \mathbf{g} \quad (21)$$

Предположим теперь, что толщина оболочки весьма мала, вследствие чего она не сопротивляется изгибу, т.е. $\mathbf{M} \equiv 0$. Будем разыскивать изометрические деформации оболочки, когда $\varepsilon \equiv 0$. В этом случае в силу (20) имеем $\mathbf{T} \equiv 0$ и уравнения равновесия (6) при отсутствии внешних нагрузок тождественно удовлетворяются. Возникает чисто геометрическая задача об изгибаниях поверхности, которая сводится к решению уравнения (19). В случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$ — это классическая и хорошо исследованная проблема бесконечно малых изгибаний поверхности (см., например, [7]). Как известно, замкнутая сфера — жесткая поверхность, т.е. не допускает изгибаний. Однако при наличии распределенных дислокаций, как показано ниже, сфера может стать изгибаемой.

Введем на сфере географические координаты: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (широта) и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (долгота) и допустим, что плотность дисклинаций равна нулю, а вектор плотности дислокаций задан в виде $\alpha = \alpha_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta$, где $\alpha_0 = \text{const}$, а \mathbf{e}_θ — единичный вектор, касательный к меридиану. Решая уравнение (19) при $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$, найдем

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{3} \alpha_0 \cos\theta (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi), \quad (22)$$

где \mathbf{e}_φ — единичный вектор, касательный к параллели.

При изгибаниях поверхности, как известно [7], каждая элементарная площадка перемещается как абсолютно твердое тело. Поле поворотов элементарных площадок ω можно найти из уравнения (15). В рассматриваемом примере при помощи (22) получаем

$$\omega = \frac{\alpha_0 r_0}{6} [2\cos^2\theta \mathbf{e}_\rho + (\sin 2\theta - 4\theta) \mathbf{e}_z] + \mathbf{\Omega}_0, \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{n} \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta \quad (23)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_0$ — произвольный постоянный вектор, \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный по оси, соединяющей полюсы сферы.

Таким образом, при наличии распределенных дислокаций в замкнутой сфере существует нетривиальное поле поворотов элементарных площадок.

Список литературы

- [1] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
- [2] Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. Ч. 2. 395 с.
- [3] Зубов Л.М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во РГУ. 1982. 143 с.
- [4] Budiansky B., Sanders J.L. // Progress in applied mechanics (W. Prager Anniv. Vol.). N.Y.: Macmillan Comp., 1963. P. 129–140.
- [5] Зубов Л.М., Филиппова Л.М. // ДАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 619–622.
- [6] Зубов Л.М. // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 102–110.
- [7] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.

Zubov L.M. *The problem about thin elastic shell state of stresses with continuously distributed dislocations and disclinations is considered in the framework of classical Kirchhoff-Love theory. The problem of reserved sphere bending with distributed dislocations was solved.*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ С РАВНЫМИ ЖЁСТКОСТЯМИ НА ИЗГИБ

Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.

Таганрогский государственный педагогический институт

Построено точное решение системы дифференциальных уравнений одномерной теории естественно закрученных стержней в случае равных жёсткостей на изгиб. Основные переменные задачи представлены в виде эллиптических функций дуговой координаты оси стержня. Показано, что при деформации закрученность стержня будет изменяться в определённых пределах.

Естественно закрученные стержни являются ответственными элементами различных технических конструкций, подвергающихся значительным воздействиям, поэтому исследования их упругого поведения и изменения геометрии в результате различного рода воздействий являются весьма актуальными. Успех таких исследований во многом зависит от достоверности используемых математических моделей, от того, с какой степенью точности они описывают реальные физические процессы при деформации исследуемых элементов.

При построении одномерной теории упругих стержней возникает необходимость обращения к уравнениям теории упругости. Это связано с тем, что получающаяся из условий равновесия бесконечно малого элемента стержня при деформации концевыми нагрузками система шести дифференциальных уравнений Кирхгофа

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 = 0, \\ \frac{dM_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 + P\gamma_3 = 0, \\ \frac{dM_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 - P\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\gamma_1}{ds} + \gamma_3 \omega_2 - \gamma_2 \omega_3 = 0, \\ \frac{d\gamma_2}{ds} + \gamma_1 \omega_3 - \gamma_3 \omega_1 = 0, \\ \frac{d\gamma_3}{ds} + \gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

является незамкнутой. Здесь $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор Дарбу оси стержня, P — равнодействующая концевых сил, $M(M_1, M_2, M_3)$ — вектор-момент внутренних сил, $\gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор вдоль концевой силы. Классическая теория упругих стержней Кирхгофа-Клебша исходит из предположения, что компоненты вектора-момента пропорциональны соответствующим компонентам вектора Дарбу:

$$M_1 = B_1 \omega_1, \quad M_2 = B_2 \omega_2, \quad M_3 = B_3 \omega_3, \quad (2)$$

где B_1 — диагональные элементы матрицы жёсткостей стержня [1].

Использование соотношений (2) приводило к заметным погрешностям в исследовании деформаций стержней достаточно сложной конфигурации, особенно в тех случаях, когда длина стержня лишь в несколько раз превышает диаметр его поперечного сечения [1]–[4]. Кроме того, классическая теория не могла объяснить ряд экспериментально наблюдаемых эффектов при испытании различных технических элементов (например, винтов летательных аппаратов) [3, 4]. Следует также

отметить нетривиальное применение, которое теория стержней получила в последние годы: применение стержневых моделей для описания геометрии молекул биополимеров и, прежде всего, нуклеиновых кислот [5, 6]. Попытки использования в данной области классической теории Кирхгофа-Клебша также зачастую не позволяли описать некоторые из экспериментально установленных свойств указанных молекул.

Приведённые примеры показывают, насколько важную роль играет характер замыкающих соотношений системы уравнений Кирхгофа при решении задач механики стержней. В связи с этим были получены различные обобщения зависимостей (2) [2] – [4]. Одним из таких обобщений служат зависимости, полученные в [4] Г. Ю. Джанелидзе. Он рассмотрел растяжимый стержень, имеющий в естественном состоянии прямолинейную форму и равномерно закрученный по длине на величину r .

Соотношения, полученные Г. Ю. Джанелидзе, имеют вид:

$$\begin{cases} M_1 = B_1(\omega_1 - r) + E(I_p - T)r\varepsilon \\ M_2 = B_2\omega_2 \\ M_3 = B_3\omega_3 \\ \gamma_1 = \frac{E\Omega}{P}\varepsilon + \frac{E}{P}(I_p - T)r(\omega_1 - r) \end{cases} \quad (3)$$

где E — модуль Юнга; Ω — площадь поперечного сечения стержня, — геометрическая жёсткость при кручении; I_p — полярный момент инерции сечения стержня относительно центра тяжести; r — первоначальное (естественное) кручение стержня, ε — относительное удлинение в процессе деформации.

Поставим задачу проинтегрировать систему уравнений Кирхгофа (1) с замыкающими соотношениями (3). Получение точных решений системы (1) для естественно закрученных стержней, так же как и в теории Кирхгофа - Клебша имеет большое значение, поскольку с их помощью можно проводить качественный анализ поведения деформированного стержня.

Рассмотрим случай, когда стержень имеет равные жёсткости на изгиб, то есть:

$$B_2 = B_3. \quad (4)$$

Система (1), (3) допускает три интеграла:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (5)$$

$$M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = K, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M_1^2}{B_1} + \frac{1}{B_2}(M_2^2 + M_3^2) \right) - p\gamma_1 = H. \quad (7)$$

Из соотношения (4) и первого уравнения системы (1) следует дополнительный интеграл:

$$M_1 = C_1. \quad (8)$$

С помощью формул (3) перейдём в интегралах (6) – (8) от компонент M_i вектора-момента к компонентам ω_i вектора Дарбу, дополнительно исключив из всех интегралов величину относительного удлинения ε . В результате получим:

$$B_1\omega_1\gamma_1 + B_2(\omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3) + r \left(\frac{I_p - T}{\Omega} P\gamma_1^2 - B_1\gamma_1 \right) = K, \quad (9)$$

$$B_1\omega_1^2 + B_2(\omega_2^2 + \omega_3^2) - 2P\gamma_1 + 2r\omega_1 \left(\frac{I_p - T}{\Omega} P\gamma_1 - B_1 \right) = H, \quad (10)$$

$$M_1 = B_1(\omega_1 - r) + r \frac{(I_p - T)P}{\Omega} \gamma_1 = C_1. \quad (11)$$

Согласно теории последнего множителя Якоби, четырёх интегралов (5) - (8) достаточно для интегрирования системы (1), (3) в конечном виде, то есть для нахождения девяти неизвестных величин M_i, ω_i , и γ_i как функций дуговой координаты s . С этой целью воспользуемся кинематическими формулами Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}, & \gamma_1 &= \cos \vartheta, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, & \gamma_2 &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, & \gamma_3 &= \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины ψ, ϑ, φ представляют собой углы Эйлера, определяемые как углы между осями неподвижного базиса и естественного базиса стержня в деформированном состоянии.

Введём безразмерные величины

$$(H - B_1\omega_1^2)/2P = h, \quad C_1/\sqrt{2PB_2} = b, \quad K/\sqrt{2PB_2} = \beta, \quad B_1\omega_1/\sqrt{2PB_2} = \omega, \quad (13)$$

$$\sqrt{B_2/2P} = n, \quad (I_p - T)/\Omega = I, \quad B_2/B_1 = b_1, \quad B_1r\omega_1/P = b_2, \quad r\omega_1(I_p - T)/\Omega = b_3.$$

Преобразуем интегралы (8) и (9), воспользовавшись представлением (12) основных переменных через углы Эйлера и равенствами (13). В результате получим уравнение для величины γ_1 :

$$n^2 \left(\frac{d\nu}{ds} \right)^2 = f(\nu) = (\delta + (\omega^2 - b^2)b_1 + \nu)(1 - \nu^2) - (h - \beta\nu)^2, \quad (14)$$

где введены обозначения $\gamma_1 = \cos \vartheta = \nu$, $\delta = h + b^2 - \beta^2$. Интегрирование уравнения (14) позволяет найти γ_1 в виде эллиптической функции дуговой координаты s .

Используя интеграл (9) и соотношения (12), получим уравнение для производной угла ψ :

$$\dot{\psi} = \frac{K - C_1\nu}{B_2(1 - \nu^2)}. \quad (15)$$

Откуда интегрированием находим ψ в виде квадратуры от эллиптической функции дуговой координаты.

Величину ω_1 найдём из интеграла (11):

$$\omega_1 = \frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) + r \frac{(T - I_p)P}{B_1\Omega} \nu. \quad (16)$$

Соотношение (16) позволяет сделать важный вывод о поведении закрученности стержня в процессе деформации. В самом деле: (16) определяет линейную зависимость закрученности ω_1 от ν в процессе деформации. Однако, величина ν

в силу соотношений (12) и (14) изменяется в промежутке $[-1; 1]$, поэтому закрученность ω_1 при деформации также будет величиной ограниченной:

$$\frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) - r \frac{(T - I_p)P}{B_1\Omega} \leq \omega_1 \leq \frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) + r \frac{(T - I_p)P}{B_1\Omega}. \quad (17)$$

Из уравнений (12) и соотношений (14) – (16) оставшиеся семь неизвестных величин ($M_1, M_2, M_3, \omega_2, \omega_3, \gamma_2, \gamma_3$) находятся в виде квадратур от эллиптических функций дуговой координаты s . Полученное решение является обобщением известного в классической теории Кирхгофа-Клебша решения Лагранжа системы уравнений Кирхгофа (1) на случай естественно закрученного стержня.

Список литературы

- [1] *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев, “Наукова думка”, 1979. 216 с.
- [2] *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М., 2003. 128 с.
- [3] *Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю.* Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим. ДАН, т. XXIV, № 1–№ 3, 1939.
- [4] *Джанелидзе Г.Ю.* Соотношения Кирхгофа для естественно закрученных стержней и их приложения. Труды Ленинградского политехнического института, 1946, № 1.
- [5] *Кугушев Е.И., Старостин Е.Л.* Математическая модель образования трёхмерной структуры ДНК. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1997, № 77.
- [6] *Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Сабитов Д.И., Энеев Т.М.* Компьютерный анализ процессов структурообразования нуклеиновых кислот. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 19, 2002, № 42.

Илюхин А.А., Timoshenko D.V. *The exact solution of Kirchhoff equations system for naturally twisted rod with equal bend rigidities.* The exact solution of system of the differential equations of the one-dimensional theory of naturally twirled rods in case of equal bend rigidities is constructed. The basic variable of a problem are presented in the form of elliptic functions of arc coordinate of an axis of a rod. It is shown, that at deformation rod twisting will change in the certain limits.

ПЛОСКИЙ КОНФОРМНЫЙ КОНТАКТ ШТАМПА И ВЯЗКОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ С ПОКРЫТИЕМ

Казаков К. Е.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Исследуется плоское контактное взаимодействие жесткого штампа и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампа и покрытия являются конформными (взаимоповторяющимися). Такая задача возникает, например, в случае, когда штамп погружается в покрытие до его полного затвердевания, в результате чего поверхность покрытия принимает форму основания штампа. Для указанной задачи выведено разрешающее смешанное интегральное уравнение, решение которого построено на основании обобщенного проекционного метода. Проведены численные расчеты, сделаны качественные выводы.

На недеформируемом подстилающем основании лежит вязкоупругий слой с покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавливается гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ и эксцентриситетом ее приложения $e(t)$ (рис. 1). Считается, что форма покрытия в недеформированном состоянии (при $t < \tau_0$) совпадает с формой штампа. Область контакта $[-a, a]$ со временем не изменяется, длина линии контакта равна $2a$. Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта ($h(x) \ll 2a$). И тонкое покрытие, и нижний слой произвольной толщины H изготовлены из вязкоупругих материалов и стареют однородно (покрытие — в момент времени $\tau_1 \leq \tau_0$, нижний слой — в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$). В данной статье будем рассматривать случай плоской деформации.

Для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(x, t) = -q(x, t)$, действующей на том же участке $[-a, a]$ и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(x, t)$ можно записать в форме [1]:

$$u_z(x, t) = k_\nu (\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t)h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad (1)$$
$$\mathcal{F}f(x, t) = \int_{-a}^a k_{\text{pl}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) f(\xi, t) d\xi,$$
$$\mathcal{V}_k f(x, t) = \int_{\tau_0}^t K^{(k)}(t - \tau_k, \tau - \tau_k) f(x, \tau) d\tau, \quad k = 1, 2,$$

где $E_k(t - \tau_k)$ — модули упругомгновенной деформации покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$), ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя; \mathcal{I} — тождественный оператор; \mathcal{V}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$, $k = 1, 2$, (см., например, [1]); k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, ν_1 — коэффициент Пуассона покрытия, \mathcal{F} — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{\text{pl}}[(x - \xi)/H]$ (см., например, [2, 3]).

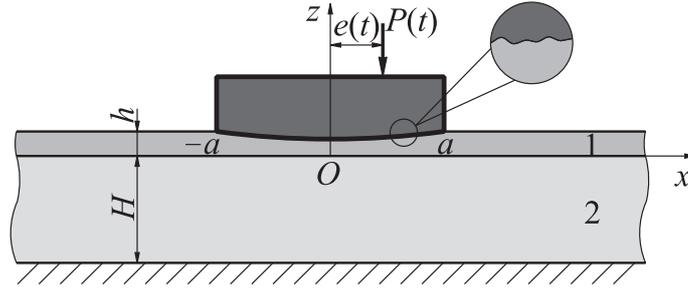


Рис. 1. Конформный контакт штампа и вязкоупругого основания в плоском случае

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (1) получим интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде:

$$k_\nu(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t)h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x, \quad -a \leq x \leq a, \quad (2)$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота.

Уравнение (2) дополним условиями равновесия штампа на слое

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = M(t). \quad (3)$$

Здесь через $M(t) = e(t)P(t)$ обозначен момент приложения силы $P(t)$.

Сделав в (2) и (3) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \\ \delta^*(t^*) &= k_P \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = k_P \alpha(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{k_m E_1(t - \tau_1)}, \quad m^*(x^*) = \frac{k_m k_\nu h(x)}{1 - \nu_2^2} \frac{1}{2a}, \\ q^*(x^*, t^*) &= \frac{2(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^*(t^*) = \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2k_P M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a^2}, \\ \mathcal{V}_k^* f(x^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_k(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*, \quad k = 1, 2, \quad (4) \\ K_1(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_2)}{E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \\ K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \quad \mathcal{A}^* f(x^*, t^*) = \int_{-1}^1 \frac{k_{pl}^*(x^*, \xi^*)}{m^*(x^*)} f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\ k_{pl}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) = \frac{1}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Безразмерные коэффициенты k_m и k_P вводятся исключительно для улучшения вида функций $m^*(x^*)$, $c^*(t^*)$, $P^*(t^*)$ и $M^*(t^*)$. Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{A}q(x, t) = \frac{\delta(t)}{m(x)} + \frac{\alpha(t)x}{m(x)}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q(\xi, t) d\xi = M(t). \quad (6)$$

Ядро оператора \mathcal{A} является ядром Шмидта. Оно в общем случае несимметрично, но обладает всеми свойствами симметричных ядер. Входящее в его состав ядро $k_{pl}(x, \xi)$ является симметричным положительно определенным ядром Фредгольма. Умножая на $\sqrt{m(x)}$ уравнение (5) и вводя обозначения

$$Q(x, t) = \sqrt{m(x)}q(x, t), \quad k(x, \xi) = \frac{k_{pl}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \quad \mathcal{F}Q(x, t) = \int_{-1}^1 k(x, \xi)Q(\xi, t) d\xi,$$

интегральное уравнение (5) с несимметричным ядром Шмидта приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Дополнительные условия (6) также подвергаются преобразованию:

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (8)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (7), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (8).

Применение традиционных классических методов приводит, к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра, что вносит теоретические трудности и существенные вычислительные проблемы при решении конкретных задач. Использование обобщенного проекционного метода [4] для построения решения задач позволяет получать вместо бесконечных систем последовательности независимых интегральных уравнений Вольтерра для коэффициентов разложения контактных давлений в ряды по специальным базисам пространства $L_2[-1, 1]$, а также выражения для осадки и угла поворота штампа. Приведем лишь окончательные результаты.

Итак, решение задачи ищется в классе функций непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$ (см., например, [1, 5]). Построим сначала ортонормированную в $L_2[-1, 1]$ систему функций такую, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(x)}$, а остальные функции можно было представить в виде произведения функций, зависящих от x и весовой функции $1/\sqrt{m(x)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным требованиям, может быть построена на основании [6]

$$\int_{-1}^1 p_i(\xi)p_j(\xi) d\xi = \delta_{ij}, \quad p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}, \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{m(\xi)} d\xi,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_{-1} = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n} \end{vmatrix}.$$

Решение задачи (7) при дополнительных условиях (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Q(x, t) &= z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x), \\
 z_0(t) &= \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1(t) = \frac{J_0M(t) - J_1P(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2 - J_1^2)}}, \\
 z_k(t) &= -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)[z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k}, \quad k = 2, 3, \dots, \\
 \varphi_k(x) &= \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(x), \quad \sum_{n=2}^{\infty} R_{mn} \varphi_n^{(k)} = \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad k, m = 2, 3, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad \mathcal{W}_k f(x, t) = \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, \\
 K_k^{(0)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Здесь $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, 3, \dots$) — резольвенты ядер

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Следует отметить, что полученное контактное давление имеет структуру $q(x, t) = m(x)^{-1}[z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \dots]$, то есть удается выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит и связанную с ней заменой (4) функцию толщины покрытия $h(x) \sim m(x)$. Решение такого вида позволяет производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, имеющих толщину, которая описывается быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Этого невозможно добиться другими известными методами.

Выражения для угла поворота $\alpha(t)$ и осадки $\delta(t)$ штампа имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_1(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)}z_k(t) \right] \right\}, \\
 \delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)}z_k(t) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что в вид зависимости угла поворота штампа от времени вносит значительный вклад непостоянная толщина покрытия. Даже если основание штампа симметрично и нагрузка приложена центрально, неоднородное покрытие способно вызвать перекося штампа, причем, если основание вязкоупругое, этот перекося, в общем случае, будет меняться с течением времени.

Расчеты показывают, что в зависимости от места приложения нагрузки $P(t) \equiv P$ (от эксцентриситета $e(t) \equiv e$) сильно меняется поведение штампа на слое. Участок приложения нагрузки $[-1, 1]$ можно условно разделить на три подобласти: 1) подобласть $(e_{\text{right}}, 1]$, в которой в начальный момент времени штамп

поворачивается по часовой стрелке и затем продолжает отклоняться в ту же сторону ($\alpha(t) > 0$, $\dot{\alpha}(t) > 0$); 2) подобласть $[-1, e_{\text{left}})$, в которой в начальный момент времени штамп поворачивается против часовой стрелки и затем продолжает отклоняться в ту же сторону ($\alpha(t) > 0$, $\dot{\alpha}(t) > 0$); 3) подобласть $(e_{\text{left}}, e_{\text{right}})$, в которой в начальный момент времени штамп отклоняется в одну сторону, а потом начинает поворачиваться в другую ($\alpha(t)\dot{\alpha}(t) \leq 0$, $\dot{\alpha}(t) \neq 0$). В зависимости от функции $m(x)$ одна из точек e_{left} и e_{right} является точкой, в которой в начальный момент времени $\alpha(0) = 0$, а другая — в которой изменение угла поворота с течением времени практически несущественно ($\alpha(t) \approx \text{const}$). Отметим, что в упругом случае эти две точки совпадают и образуются всего лишь на две подобласти: подобласть $(e_0, 1]$, где $\alpha(t) \equiv \alpha > 0$, и подобласть $[-1, e_0)$, где $\alpha(t) \equiv \alpha < 0$. В точке e_0 угол наклона $\alpha(t) \equiv 0$.

Автор благодарен Манжирову А.В. за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №05-01-00693 и №06-01-00521), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ №НШ-1245.2006.1.

Список литературы

- [1] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [2] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
- [3] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [4] Манжиров А.В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 221–224.
- [5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [6] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.

Kazakov K.E. *Plane conformal contact of punch and viscoelastic foundation with a coating.* Plane contact interaction of rigid punch and viscoelastic foundation with a thin coating in the case, when a shape of the surface of the coating conform the shape of the punch base, was assumed. Such a problem arises, for example, if a punch plunge into the foundation before its full induration, and as a result the surface of coating shapes to bottom of punch. Resolving mixed integral equation for this problem was produced. Using generalized projection method its solution was constructed. A number of numerical calculations is realized. Qualitative conclusions are made.

РАЗРАБОТКА ДЛЯ УСТРОЙСТВ СЧИТЫВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ ОТ ДАТЧИКОВ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Карапетьян Г. Я.* , Днепровский В. Г.* , Багдасарян А. С. ,
Багдасарян С. А.****

** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

*** ИРЭ РАН, Москва*

Рассматривается задача создания эффективного устройства считывания для обнаружения и распознавания сигналов от датчиков физических величин. Получены параметры опросных сигналов для эффективного обнаружения сигналов от датчиков физических величин в условиях реальной помеховой обстановки.

Проблема беспроводного дистанционного контроля физических параметров (давления, температуры, влажности, радиационного фона) в настоящее время осуществляется с помощью различных датчиков по радиосигналу, т.е. к датчику придается радиопередатчик, который и осуществляет беспроводную передачу информации от датчика. Вместе с тем, для передатчика требуется источник питания и поэтому при его расходе возникает необходимость его замены. Так как датчик может стоять в труднодоступном месте или в условиях, при которых невозможна замена источника питания при работающем контролируемом объекте, т.е. для замены источника питания надо останавливать работу объекта, что не всегда возможно. Предлагаемые же датчики являются пассивными устройствами и не требуют источника питания, так, что проблема замены источника питания отпадает. Такой датчик может быть установлен в труднодоступном или опасном месте лишь однажды. Он представляет собой линию задержки (ЛЗ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ), содержащей один встречно-штыревой преобразователь (ВШП), соединенный с антенной и отражательный ВШП, соединенный с нагрузкой Z , величина которой зависит от измеряемого параметра (давления, влажности, температуры, интенсивности излучения), на торцах ЛЗ нанесены акустопоглотители, для подавления отраженных от краев подложки ПАВ, как показано на рис. 1.

При изменении величины нагрузки под действием измеряемой физической величины (давления, температуры, влажности, радиационного фона) меняется коэффициент отражения от отражательного ВШП, что приводит к зависимости амплитуды отраженного сигнала (который поступает в ЛЗ через антенну, а далее преобразуется в ПАВ ВШП, соединенным с антенной) от измеряемой физической величины.

Устройство считывания для такого пассивного датчика является одним из важнейших компонентов системы дистанционного контроля физических величин. В простейшем случае, когда для считывания информации от датчика создаются

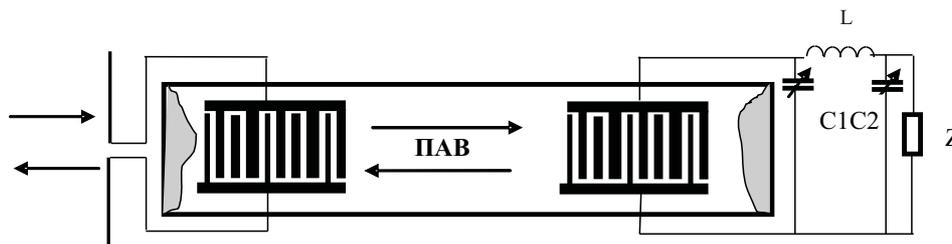


Рис. 1. Датчик физической величины

условия для считывания только одного датчика в реальном времени, очевидно, не возникают коллизии. В этом случае устройство считывания должно осуществлять следующую последовательность операций, направленных на идентификацию отраженного от датчика физической величины в реальном масштабе времени:

- формирует и посылает опросный радиоимпульс;
- принимает последовательность отраженных радиоимпульсов от пассивного датчика физической величины;
- детектирует и идентифицирует отраженный радиоимпульс;
- определяет амплитуду отраженного импульса.

Чтобы обеспечить максимальную дальность и достоверность идентификации следует разработать алгоритм обнаружения и идентификации радиоимпульсов, отраженных от датчиков радиочастотных меток, выработать параметры опросных сигналов и их кодировки.

Блок-схема считывателя показана на рис. 2 [1].

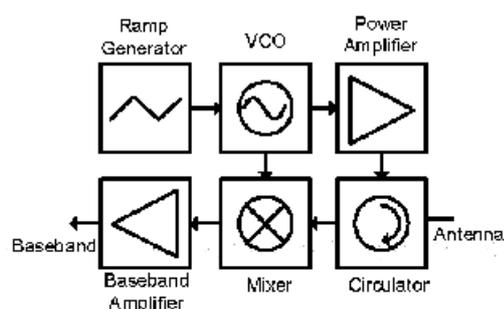


Рис. 2. Блок-схема считывателя

Считыватель работает следующим образом:

- генератор пилообразного напряжения (Ramp generator) модулирует высокочастотный генератор, управляемый напряжением (VCO), который и выдает сигнал;

- этот сигнал усиливается и через циркулятор поступает в антенну и излучается на метку;

- отраженный от метки сигнал принимается антенной и через циркулятор подается на смеситель (mixer), а далее на полосовой усилитель для дальнейшей обработки. В этом случае выходной сигнал представляет собой амплитудно-частотную характеристику принятого сигнала, если каждому моменту времени поставить в

соответствие частоту сигнала в этот момент времени. Далее временные характеристики можно получить путем Фурье-преобразования полученной частотной характеристики. В этом случае приемник имеет в каждый момент времени узкую полосу пропускания, что значительно улучшает отношение сигнал/шум.

В настоящей работе исследовался считыватель аналогичный предыдущему. Измеритель амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) (рис. 3) выдает сигнал в цифровой форме в виде таблицы из двух колонок (частота, затухание). Эта таблица обрабатывается с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье.

Таким образом, для обнаружения сигнала от датчика достаточно получить частотную характеристику от приемо-передающего ВШП. В измерителе АЧХ применяется генератор качающейся частоты, который выдает сигнал с линейно-изменяющейся во времени частотой. Очевидно такой же сигнал можно снять, если вместо приемо-передающего ВШП подсоединить антенну, которая будет излучать сигнал с линейно-изменяющейся частотой и принимать отраженный от антенны, подсоединенной к приемо-передающему ВШП метки как показано на рис. 3.

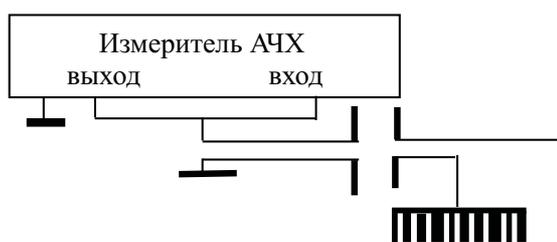


Рис. 3. Измерительный стенд, имитирующий считыватель

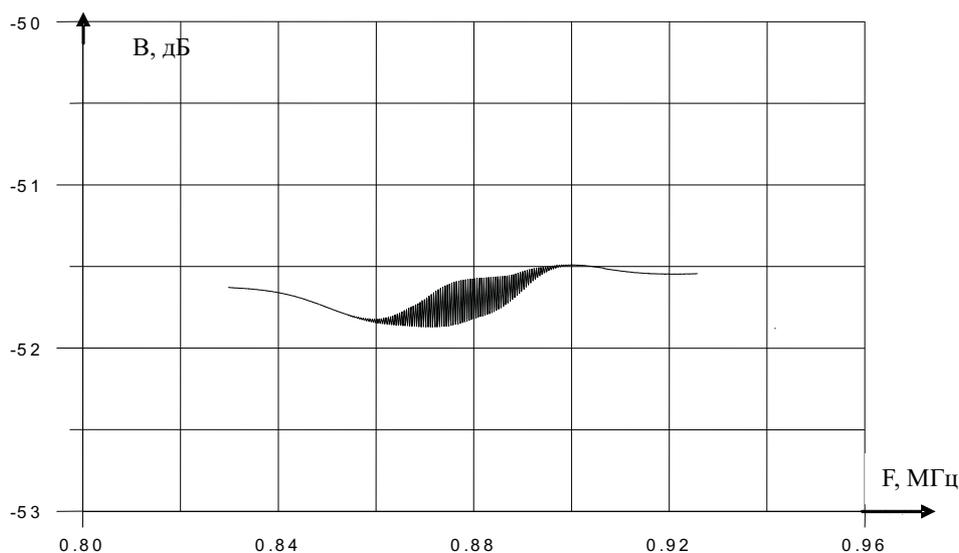


Рис. 4. АЧХ отраженного от датчика сигнала

На рис. 4 показана разность АЧХ антенны подсоединенной к прибору для измерения частотных характеристик, когда на расстоянии 0,5 м от нее находится

датчик с антенной. На рисунке видно влияние отраженных от датчика сигналов. На рис. 5 показано Фурье преобразование АЧХ, показанной на рис. 4. Из этого рисунка видно, что импульсная последовательность полностью совпадает с импульсной последовательностью, полученной при непосредственном измерении АЧХ, но вносимые потери в этом случае многократно возрастают. Это и понятно, так как не вся излученная передающей антенной энергия доходит до антенны датчика, а также присутствует некоторая несогласованность антенны с приемо-передающим ВШП. Так как отражательный ВШП нагружен на терморезистор, то коэффициент отражения ПАВ зависит от температуры. Сплошной линией показан импульс, отраженный от отражательного ВШП при температуре 25°, а пунктирной линией — при температуре 100°.

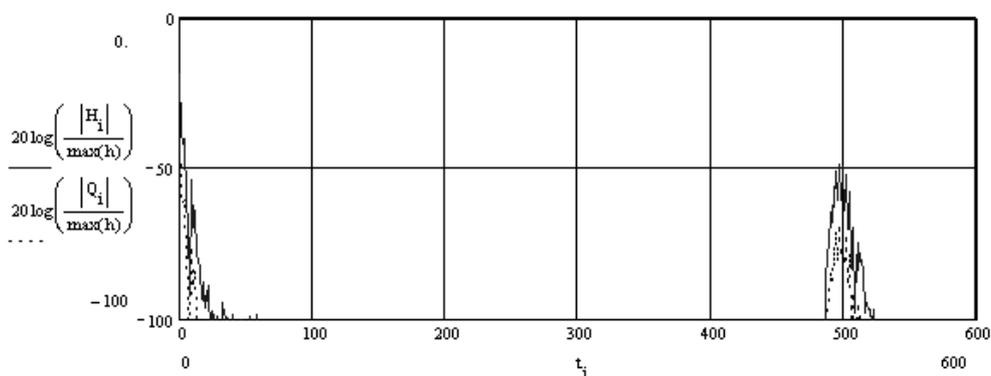


Рис. 5. Сигнал, отраженный от метки

Как следует из вышесказанного, запросный сигнал должен иметь линейно-изменяющуюся во времени частоту (ЛЧМ). Длительность импульса с ЛЧМ должна быть много больше времени задержки в датчике, таким образом, чтобы частота сигнала не успела значительно измениться за время задержки в датчике. Т.е. если частота опросного сигнала имеет вид: $f = f_0(1 + \alpha t)$, то за промежуток времени $\Delta\tau$, равный задержке сигнала в датчике, изменение частоты Δf должно быть много меньше текущей частоты f и полосы пропускания датчика ΔF . В этом случае сигнал любой текущей частоты успеет провзаимодействовать с имеющимся в датчике отражателем. Тогда отраженный от датчика сигнал будет представлять собой АЧХ приемо-передающего ВШП, на который непрерывно падают ПАВ отраженные от отражателя, т.е. АЧХ датчика в целом. Тогда Фурье преобразование такой АЧХ будет представлять собой отраженный импульс. Если в момент времени t_1 частота сигнала равна f_1 , а в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta\tau$ частота сигнала равна f_2 , то изменение частоты $\Delta f = \alpha \cdot \Delta\tau \ll f, \Delta F$. Следовательно, $\alpha \cdot \Delta\tau \ll 1$ и $\alpha \ll 1/\Delta\tau$. Для датчика на центральную частоту $f_0 = 875$ МГц $\Delta\tau = 10$ мкс и $\alpha \ll 0,1$ МГц. Пусть $\alpha = 100$ Гц, тогда при полосе рабочих частот для датчика в $\Delta F = 30$ МГц длительность опросного импульса равна: $T \geq \Delta F / f_0 \alpha = 30 / (875 \cdot 0,0001) = 343$ мкс.

Таким образом, опросный сигнал представляет собой импульс с ЛЧМ, полосой частот 30 МГц и длительностью не менее 0,343 мс. В этом случае отраженный от датчика импульс будет представлять собой АЧХ датчика, Фурье преобразование

которой несет полную информацию об отраженном импульсе. При таких параметрах сигнала приемник считывателя может иметь узкую полосу пропускания (не более 1 кГц) в каждый момент времени, что значительно повышает чувствительность и помехоустойчивость системы идентификации, в отличие от системы, где опросный импульс имеет длительность $\Delta\tau = 1/\Delta F = 20$ нс.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 07-08-00583.

Список литературы

- [1] *Gerhard A. Hofbauer* - Member IEEE, Pulsar Electronics Corp., Waldsach, Austria
FMCW Based Readout System Accuracy Enhancement Techniques for Surface Acoustic Wave RFID sensors. 1-4244-0688-9/07/\$20.00 C2007 IEEE.

Karapetyan G. Ya, Dneprovski V.G., Bagdasarian A.S., Bagdasarian S.A.
Development for devices of reading of algorithms of detection, recognition of signals from sensors of physical values. The task of making of effective device of reading for the detection and recognition of signals from the sensors of physical values is considered. The parameters of answering signals for the effective detection of signals from the sensors of physical values in the conditions answering of the real noise situation are received.

МЕХАТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКОМОЦИЙ

**Кетов А. И., Марценюк М. А., Скляренко М. С.,
Тетерин П. А.**

Пермский государственный университет

Разработана и построена мехатронная модель «животного», которое может менять свою ориентацию, совершая деформационный цикл изменения формы. Для интерпретации локомоций использована калибровочная теория. Проведенная идентификация параметров модели показала хорошее совпадение теоретических и наблюдаемых углов поворота «животного».

Биомеханика локомоций (пространственных перемещений живых организмов) [1] находится на стыке биологии, механики тел меняющейся формы (механика гибких тел) и топологии (калибровочная теория локомоций). Особую сложность представляет экспериментальное изучение этого явления. Цель работы состояла в разработке моделей и методов количественного анализа локомоций. Была создана мехатронная («механика плюс электроника») модель животного, совершающего повороты в пространстве за счет деформации своей формы. В качестве исполнительных устройств используются шаговые двигатели, управляемые микропроцессорным блоком, встроенным в модель. Питание модели производится от автономного «бортового» источника. Программа, вложенная в микропроцессор, допускает реализацию нескольких вариантов внутренних деформаций модели. При совершении замкнутой траектории в пространстве форм, происходит поворот модели как целого на некоторый угол. Были проведены расчеты калибровочного потенциала и угла поворота модели. Идентификация параметров траектории в процессе локомоций осуществлялась с помощью цифровой фотосъемки и последующей обработки результатов методами компьютерного видения. Обнаруженное отклонение угла поворота от расчетного объясняется сухим трением, имеющим место в точке подвеса модели. Таким образом, показана полная адекватность используемых методов анализа и наблюдения локомоций.

Описание модели. Кинематическая схема модели показана на рис.1. Массивные рычаги 1, 2 подвешены на осях роторов шаговых двигателей 3, 4. Статоры двигателей 3,4 объединены общей балкой 10, которая, в свою очередь, подвешена на оси ротора шагового двигателя 5. На этой же балке 10 смонтированы аккумуляторы, питающие шаговые двигатели, и электронный блок управления 9, задающий программу включения шаговых двигателей. Статор шагового двигателя 5 жестко связан с массивным диском 6. Диск 6 подвешен на шарике, находящемся в верхней части оси 7. Ось 7 жестко закреплена на лабораторном столе. Модель сбалансирована таким образом, что как целое легко вращается вокруг оси 7. Таким образом, модель представляет собой автономный объект, который при определенной программе управления шаговыми двигателями может совершить поворот вокруг оси 7 за счет внутренних сил, вызывающих деформацию формы.

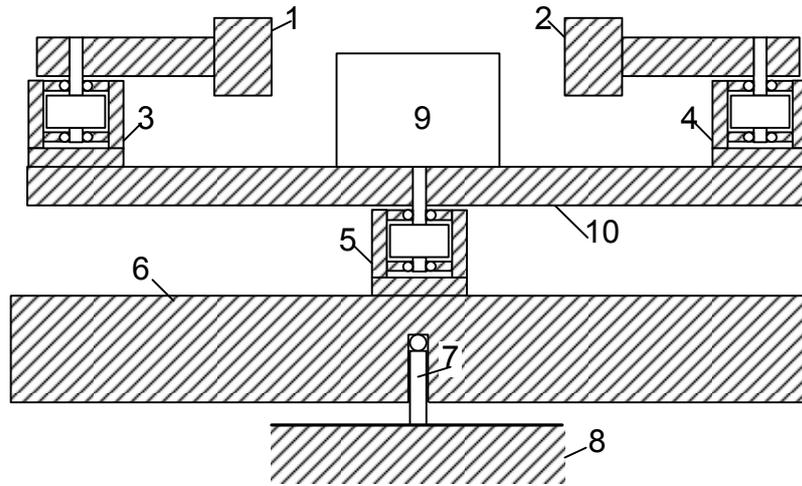


Рис. 1. Кинематическая схема модели

Калибровочная теория поворота подробно рассмотрена в работах [2-4]. Схема устройства, изображенного на рис. 1, может быть представлена в виде конструкции из масс и стержней (рис. 2). Углы α и β являются параметрами формы. Угол θ задает ориентацию модели относительно лабораторной системы координат X, Y .

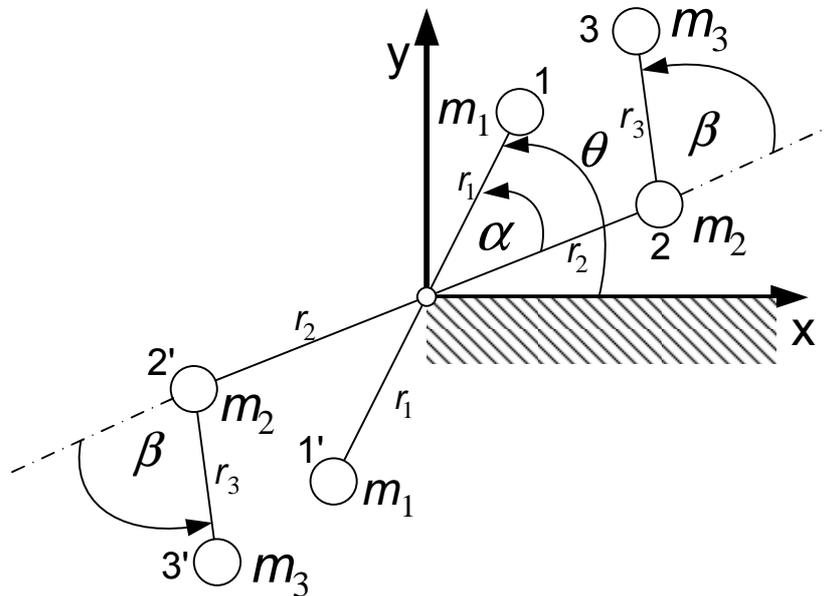


Рис. 2. Кинематическая схема модели

Будем исходить из закона сохранения момента импульса системы:

$$L_z = \sum_{a=1}^6 m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a), \quad (1)$$

где $x_a, y_a, \dot{x}_a, \dot{y}_a$ — координаты и скорости частиц относительно лабораторной си-

стемы координат. Выразим эти переменные через углы α , β и θ и их производные по времени, используя соотношения:

$$x_a = r_a \cos(\phi_a), \quad y_a = r_a \sin(\phi_a). \quad (2)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), после сокращения на dt получим связь между дифференциалами $d\theta$, $d\alpha$ и $d\beta$

$$d\theta = -(A_\alpha d\alpha + A_\beta d\beta), \quad (3)$$

где введены калибровочные потенциалы

$$A_\alpha = \frac{(3 + 2 \cos \beta)}{(4 + 2 \cos \beta)}, \quad A_\beta = \frac{(1 + \cos \beta)}{(4 + 2 \cos \beta)}. \quad (4)$$

Полученные уравнения (3), (4) полностью описывают кинематику модели. Когда параметры формы $d\alpha$ и $d\beta$ претерпевают изменения, то, в соответствии с законом сохранения углового момента, происходит изменение угла $d\theta$. Если запрограммировать микропроцессор модели таким образом, что в пространстве параметров будет пройдена некоторая траектория $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, где s — параметр на кривой, то интеграл от формы (3) по этой кривой (рис. 3) даст результирующее изменение угла $\Delta\theta$.

Легко, однако, видеть, что уравнения (3), (4) зависят от выбора системы отсчета, связанной с телом. На рис. 2 эта система была “привязана” к стержню $1 - 1'$. Если же привязать её, например, к стержню $2 - 2'$, то вид калибровочных потенциалов изменится, а также изменится приращение угла $\Delta\theta'$ после прохождения траектории в пространстве формы. Как говорят, эти величины не являются калибровочно-инвариантными (зависят от выбора системы отсчета, связанной с телом). Калибровочно-инвариантный результат для приращения угла может быть получен, только если траектория в пространстве формы является замкнутой.

Идентификация модели. Для описания модели, показанной на рис. 1 мы должны считать все её движущиеся части твердыми телами с соответствующими моментами инерции. После несложного расчета можно представить дифференциальную форму в виде (3), где теперь калибровочные потенциалы выражаются через параметры модели следующим образом:

$$A_\alpha = \frac{I_2 + 4I_3(1 + \cos \beta)}{I_1 + I_2 + 4I_3(1 + \cos \beta)}, \quad A_\beta = \frac{2I_3(1 + \cos \beta)}{I_1 + I_2 + 4I_3(1 + \cos \beta)}, \quad (5)$$

где I_1 — момент инерции нижней части, I_2 — момент инерции средней части, I_3 — момент инерции верхней части модели.

Для определения моментов инерции тел была создана простая установка, состоящая из упругой спиральной пружины, один конец которой прикреплен к лабораторному столу, а другой — к колеблющемуся исследуемому телу. Измерения периода колебаний физического маятника позволяет определить момент инерции с каждого тела с точностью до коэффициента жесткости пружины k . Как оказалось, моменты инерции тел, входящие в формулу (5) имеют следующие значения:

$$I_1 = 0,4998k, \quad I_2 = 0,2756k, \quad I_3 = 0,0487k. \quad (6)$$

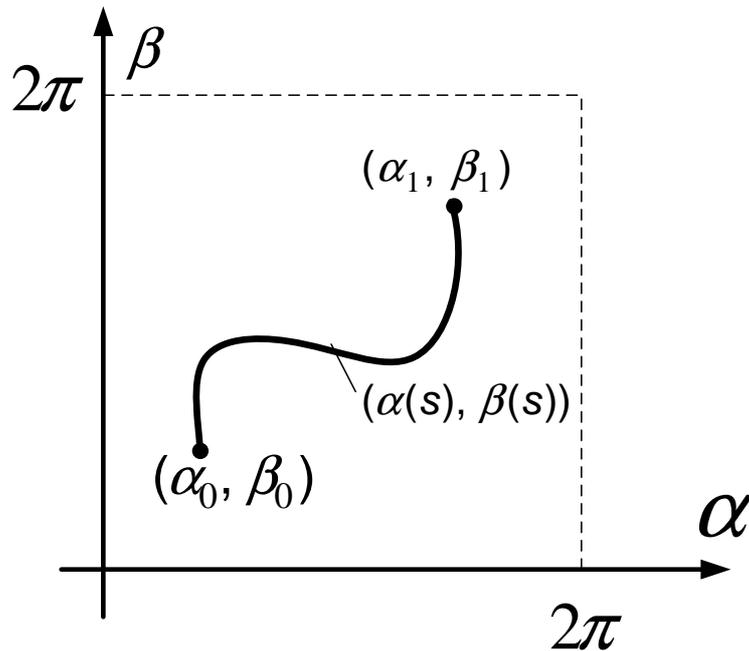


Рис. 3. Кинематическая схема модели

Траектория изменения формы тела в пространстве (α, β) имела вид прямоугольника с координатами вершин:

$$(0, 0) \rightarrow (123^\circ, 0) \rightarrow (123^\circ, 180^\circ) \rightarrow (0, 180^\circ) \rightarrow (0, 0). \quad (7)$$

Расчет изменения угла θ по приведенным выше формулам дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow (123^\circ, 0) && : \Delta\theta = -70,5^\circ \\ (123^\circ, 0) &\rightarrow (123^\circ, 180^\circ) && : \Delta\theta = -86,7^\circ \\ (123^\circ, 180^\circ) &\rightarrow (0, 180^\circ) && : \Delta\theta = -35,8^\circ \\ (0, 180^\circ) &\rightarrow (0, 0) && : \Delta\theta = -19,3^\circ \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, теоретически после прохождения замкнутого цикла модель должна повернуться на $19,3^\circ$. Измерения дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow (123^\circ, 0) && : \Delta\theta = -57^\circ \\ (123^\circ, 0) &\rightarrow (123^\circ, 180^\circ) && : \Delta\theta = -68^\circ \\ (123^\circ, 180^\circ) &\rightarrow (0, 180^\circ) && : \Delta\theta = -25^\circ \\ (0, 180^\circ) &\rightarrow (0, 0) && : \Delta\theta = -14^\circ \end{aligned} \quad (9)$$

Имеющееся расхождение составляет $5,3^\circ$ и объясняется тем, что реальная модель испытывает трения в точке подвеса на оси 7 (см. рис. 1) и поэтому момент импульса не сохраняется, как это было предположено при выводе теоретической формулы.

Предварительные измерения показали, что с хорошей степенью точности в построенной модели может быть использован закон «сухого» трения. То есть момент силы трения K является постоянной величиной, которая не зависит от угловой скорости вращения. Чтобы учесть сухое трение, запишем вместо использованного

ранее условия $L_z = 0$, из которого следовал закон изменения угла θ , задаваемый уравнением (3), уравнение вида $\frac{dL_z}{dt} = K$, имеющее решение $L_z = Kt$. Учитывая, что $L_z = I \frac{d\theta}{dt}$, где I — полный момент инерции модели, найдем что за время полного цикла изменение угла θ за счет трения составит величину

$$\Delta\theta_{fric} = \frac{K\tau^2}{2I}, \quad (10)$$

где τ — время, в течение которого система проходит полный локомоторный цикл за вычетом тех промежутков, когда она не движется.

Отношение момента силы трения K к моменту инерции I было найдено путем измерения угла поворота θ и времени до остановки модели при свободном вращении после толчка и оно оказалось равным $\frac{K}{I} = (3,94 \pm 0,05)^\circ c^{-2}$.

Далее можно использовать формулу (10), где, однако, кроме найденного отношения $\frac{K}{I}$ необходимо знать время τ . Для измерения τ была использована видеосъемка со скоростью 15 кадров в сек. После обработки было найдено, что $\tau = 1c$. В результате поправка, связанная с учетом силы трения оказалась равной $\Delta\theta_{fric} = (1,97 \pm 0,03)^\circ$.

Заключение. Таким образом, в работе показано, что калибровочная теория адекватно описывает локомоторное движение модели.

Список литературы

- [1] Смолянинов В.В. Пространственно-временный задачи локомоторного управления. // «Успехи физических наук» 2000. Т. 170. № 10. С. 1063–1127.
- [2] Littlejohn R. G., Reinsch M. Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n-body problem. // «Reviews of Modern Physics» 1997. Vol. 69. № 1. С. 213–274.
- [3] Кислухин Н.М., Марценюк М.А. Синтез оптимального управления для механической системы со многими степенями свободы. // «Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии». 2003. № 6. С. 35–48.
- [4] Кислухин Н.М., Марценюк М.А. Компьютерная модель самоуправления ориентацией тела во время бега животного. // «Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии». 2001. № 5. С. 93–108.
- [5] Кислухин Н.М., Марценюк М.А. Синтез локомоторного управления в задаче плавания. // «Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии» 2005. № 4. С. 52–62

Ketov A.I., Martsenyuk M.A., Sklyarenko M.S., Teterin P.A. *Mechatronic modeling of locomotion.* Mechatronic model of the “animal” that can change its orientation when doing shape deformation cycle was build. Interpretation of the locomotion was made in terms of the gauge theory. Identification of model parameters was done and it was found good agreement of observed rotation angles with the theory.

ИССЛЕДОВАНИЕ БИОЛОГИЧЕСКОГО РОСТА: ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Кизилова Н. Н.

Харьковский национальный университет, Украина

Моделирование роста растительных и животных тканей и организмов составляет одну из актуальных задач современной биомеханики. Экспериментальные исследования роста нормальных и генетически модифицированных тканей в обычных условиях и под действием заданной растягивающей, сжимающей и других видов нагрузки проводились с растительными и животными тканями, и данные о кинематике роста широко представлены в современной литературе. В то же время моделирование роста ограничивается в большинстве случаев простейшими нульмерными моделями, содержащими лишь уравнение баланса массы (длины, площади, объема) растущего тела. Корректные модели растущих биологических сплошных сред учитывают наличие нескольких жидких и твердых фаз среды, внутренние параметры, для которых также записываются балансовые уравнения, уравнения эволюции для открытой термодинамической системы, рост которой обеспечивается притоком массы извне, а также граничные условия в смешанной форме. В работе приведен обзор литературных данных по исследованию кинематики и динамики роста корней, стеблей и листьев растений и различных математических моделей растущих сред.

Рост биологических тел связан с необратимыми изменениями массы (размеров, объема), сопровождающимися изменениями формы, пористости и структуры тела. Практический интерес к исследованию и моделированию биологического роста связан, в первую очередь, с приложениями теории к моделированию нормального и патологического роста биосистем, к формированию новообразований, возможностями контроля за ростом с помощью внешних химических и механических факторов, а также выращивания культуры тканей и целых органов в лабораторных условиях *in vitro* из нескольких клеток-предшественниц, взятых у пациента (*tissue engineering*). Объемный рост связан с изменением объема растущего тела за счет откладки нового вещества во внутренних точках тела за счет деления клеток и производства ими внеклеточного вещества. Для описания объемного роста вводится связанная с образцом Лагранжева система координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , а для каждой индивидуализированной точки определяется закон движения $X_{1-3} = X_{1-3}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, описывающий объемные ростовые деформации [1]. При поверхностном росте изменение объема тела связано с отложением нового вещества на поверхности тела. Если выделить поверхность, образованную точками, возникшими в момент времени $\tau \in [t_0, t]$, то положение любой точки такой поверхности можно описать набором значений $\{\xi^1, \xi^2, \tau\}$. Тогда закон движения для случая поверхностного роста $X_{1-3} = X_{1-3}(t, \tau, \xi^1, \xi^2)$ [1]. Объемный рост обычно сопровождается возникновением поля напряжений, тогда как при поверхностном росте материал может оставаться в ненапряженном состоянии. Внутренний рост (*remodelling*) связан с откладкой или растворением вещества на внутренних поверхностях тела (порах, клеточном каркасе, внеклеточных образованиях),

что сопровождается изменением структуры, пористости, степени неоднородности материала. Внутренние перестройки ведут к упрочнению работающих тканей и ослаблению неработающих, что в норме приводит к формированию тканей, структура которых оптимальна по отношению к заданным механическим условиям. Внутренний рост активно исследуется в материаловедении в связи с возможностями разработки новых видов адаптивных материалов. Объектом исследования современной механики является также биологический морфогенез – сложный механохимический процесс, сопровождающийся ростом, конечными деформациями нелинейных анизотропных материалов, образующих тело, появлением новых органов и элементов тела за счет неоднородного деформирования его отдельных частей [2]. Существующие математические модели морфогенеза развиты, в основном, для относительно простых случаев эпителиальных морфогенезов.

Эмпирические данные показывают, что в целом растяжение стимулирует, а сжатие угнетает рост в соответствующем направлении. Поле механических напряжений влияет на деление и рост клеток, ориентацию клеток и внеклеточных структур, что делает возможным управление формой, структурой и механическими характеристиками растущего тела с помощью внешних нагрузок. В настоящее время предложены различные методы ускорения роста монослоев тканей в искусственных условиях под действием постоянной и периодической растягивающей нагрузки. Растительные ткани (стволы деревьев, стебли растений), которые используются в промышленности, растут под влиянием значительных ветровых нагрузок, что ведет к формированию определенной структуры древесины [3]. Экспериментально показано, что постоянные и переменные изгибные деформации ведут к переходу поперечного сечения стебля или ствола от кругового к эллиптическому, длинная ось которого вытянута в направлении действия силы (ветровой нагрузки), образованию реактивной ткани и соответствующим внутренним перестройкам, ведущим к упрочнению конструкции [4]. Под действием растягивающей нагрузки, превышающей некоторую пороговую, наблюдается ускоренный рост корней проростков, сопровождающийся изменениями их диаметра, размерами клеток и ориентацией клеточных стенок [5]. Прорастание корней в почве, содержащей плотные включения, приводит к изгибным ростовым деформациям и появлением извитых корней. Механизмы реакции биосистем на нагрузку связаны с процессами на клеточном уровне. Так, растяжение-сжатие проростков приводит к быстрым изменениям ориентации микротрубочек в клетках эпидермиса колеоптиля в перпендикулярном направлении, что в конечном счете ведет к изменению скорости и направления клеточных делений [6]. Биология и медицина представляют обширнейший экспериментальный материал для разработки новых концепций и математических моделей биологического роста.

Биофизическая модель клеточного роста связывает скорость объемной деформации клетки с внутриклеточным давлением P :

$$1/V * dV/dt = \lambda (P - P^*) \text{ при } P > P^* \text{ и } V = const \text{ при } P \leq P^*$$

Увеличение давления происходит за счет осмотической накачки воды в клетку, в результате чего клетка увеличивается в объеме, происходит ее деление. Эти процессы сопровождаются сложными изменениями внутриклеточной структуры, цитоскелета, клеточной стенки. Простейшее моделирование ткани, каждая или

отдельные клетки которой способны расти, производится с помощью клеточных автоматов [2]. Наиболее перспективными являются континуальные модели роста, в которых растущие ткани рассматриваются как неоднородные анизотропные материалы с источниками массы.

Самые простые кинематические модели роста сводятся к описанию количественных характеристик (размеров L_i , площади S , объема V , массы M , числа N_i или числовых концентраций n_i различных клеток) как функций времени $\{g_i(t)\}_{i=1}^k$, которые удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dg_i}{dt} = f_i(t, g_i), \quad g_i|_{t=0} = g_i^0 \quad (1)$$

решение которых $g_i(t)$ имеет характерный S-образный вид (см. обзор моделей в [7]). При этом физический смысл функций $f_i(t, g_i)$ остается не всегда ясен.

При наличии данных наблюдений за кинематикой роста, например, об изменении координат $\{\mathbf{X}(t, \xi^i)\}_{i=1}^k$ индивидуализированных точек растущего материала, можно определить параметры уравнения (1) в терминах модели с сосредоточенными параметрами. Подобный подход позволяет провести количественные оценки скорости роста, но не позволяет описать изменение реологических характеристик тканей, оценить вклад механических напряжений в структурную перестройку объекта. Более плодотворным является континуальное моделирование растущего тела. При этом закон сохранения массы имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = f(t, \mathbf{r}) \quad (2)$$

где \mathbf{V} — скорость перемещения точек объекта, которая может либо задаваться исходя из результатов исследования кинематики роста, либо рассчитываться на основе решения соответствующей динамической задачи. В первом случае на основе (2) можно рассчитать локальную массопroduкцию в точках растущего тела.

В диффузионных моделях для описания роста вводится распределение концентрации $c(t, \mathbf{r})$ вещества, обеспечивающего деление и рост клеток и рассматривается уравнение диффузии этого вещества:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c + m - \alpha c \quad (3)$$

где m — скорость производства вещества (например, в листьях растений за счет фотосинтеза), α — скорость поглощения клетками. При этом граничные условия задаются на подвижной поверхности растущего тела. Например, рост лишайника, который занимает круг с радиусом $R(t)$, моделировался на основе (3) с граничными условиями [8]:

$$R_t' = -kDc_r'(t, R(t)), \quad c_r'(t, 0) = 0, \quad c(t, R(t)) = 0$$

Для роста сферической опухоли с радиусом R_2 с учетом развития внутри нее зоны некроза (при $0 < r < R_1$) [9]:

$$c(R_1) = c_1, \quad c(R_2) = c_2, \quad c_r'(t, R_1) = 0$$

Реакционно-диффузионные модели широко используются для описания изменений формы растущего тела, окраски или внутренней структуры. В этом случае записываются уравнения диффузии питательного вещества, обеспечивающего рост, а также одного или нескольких управляющих факторов роста, например, гормонов (фитогормонов), которые производятся в определенных областях (тканях), определяя тем самым неоднородность ростовых полей и изменение формы растущего тела [10]. Рост органов и тканей связан с притоком массы извне, который у высших растений и животных протекает благодаря специальным проводящим системам. У животных это кровеносные сосуды, а у растений — сосуды ксилемы и флоэмы. Таким образом, наряду с диффузионным, важно учитывать конвективный приток массы к клеткам растущего тела по проводящим путям.

Механические модели учитывают поле напряжений как определяющий фактор биологического роста. В квазиодномерном приближении материал рассматривается как вязкоупругая жидкость:

$$V_{ik} = K_{ik} + L_{iklm}\sigma_{lm} + M_{iklm}\dot{\sigma}_{lm} \quad (4)$$

где σ_{ik} — тензор напряжений, точка обозначает дифференцирование по времени, V_{ik} — тензор скоростей деформаций, K_{ik} — тензор собственных скоростей роста при отсутствии напряжений, L_{iklm} , M_{iklm} — тензорные реологические коэффициенты. Динамические уравнения в силу больших характерных времен роста записываются в статической форме:

$$\operatorname{div}(\hat{\sigma}) + \mathbf{F} = 0 \quad (5)$$

где \mathbf{F} — равнодействующая внешних сил. Различные аспекты задачи (4–5) и вид тензорных коэффициентов в (4) обсуждались в [11–13]. Идентификация коэффициентов в (4) проводилась на базе экспериментальных исследований кинематики роста двумерных объектов — листьев растений. Получены уравнения Бельтрами-Мичела для растущей среды, обобщены классические задачи о растяжении-сжатии, изгибе и кручении бруса, прогибе круглой пластины, задачи Мелана о передаче нагрузки от стрингера в объем тела и задачи Эйлера об устойчивости стержня на случай растущего материала [11–13]. Полученные результаты позволяют выращивать в искусственных условиях неоднородные, слоистые и армированные волокнами биокompозиты с заданными механическими свойствами, обладающими оптимальными прочностными свойствами по отношению к заданной внешней нагрузке.

В последнее время интенсивно исследуются термодинамические модели растущих материалов как многофазных сред, содержащих несколько жидких (вне- и внутриклеточная жидкости, доставляющие жидкости) и твердых (клеточные стенки, внеклеточное вещество, стенки проводящих элементов) фаз. Модели включают уравнения баланса массы, импульсов и энергии для фаз и ряда растворенных компонент, которые регулируют рост (факторы роста), определяют осмотическое давление и локальную скорость роста.

Список литературы

- [1] Skalak R., Dasgupta G., Moss M. Analytical description of growth. //J.Theor.Biol. 1982. V. 94. P. 555–577.
- [2] Taber L.A. Biomechanics of growth, remodeling and morphogenesis. //Appl.Mech.Rev. 1995. V. 48, № 8. P. 487–545.
- [3] Leelavanichkul S., Cherkaev A. Why grain in tree's trunks spiral: mechanical perspective. // Struct. Multidisc. Optimiz. 2004. Vol.28,№ 2-3. P. 127–135.
- [4] Раздорский В.Ф. Архитектоника растений. М.:Советская наука, 1955. 432С.
- [5] Кизилова Н.Н., Литвинов Д.Г. Динамика роста корней растений под действием растягивающей нагрузки: экспериментальные результаты и теоретическая модель. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Труды III Всероссийской школы-семинара. Ростов. 2007. С. 48.
- [6] Zandomeni K., Schopfer P. Mechanosensory microtubule orientation in the epidermis of maize coleoptiles subjected to bending stress. //Protoplasma. 1994. V. 182. P. 96–101.
- [7] Кизилова Н.Н. Транспортная система и рост листа //Современные проблемы биомеханики.Вып.10. М.:Изд-во Московского университета. 2000. С. 379–405.
- [8] Childress S. Lichen growth.//J. Theor. Biol. 1980. V. 82. P. 157–165.
- [9] Косевич А.М., Кругликов И.Л. Диффузионная модель роста солидной опухоли. //ДАН. 1980. Т. 251, № 1. С. 226-230.
- [10] Franks N.R., Britton N.F. The possible role of reaction-diffusion in leaf shape. //Proc. Royal Soc. London. Ser.B. 2000. V. 267. P. 1295-1300.
- [11] Kizilova N. Stress-strain state of the plate from a growing biomaterial: load transfer from the fiber into the medium. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 2007. V. 56, № 2. P. 162–169.
- [12] Kizilova N.N., Egorova E.S. Modelling of laminated growing biological materials. //J.Mech.Eng. 2005. V. 56, № 5. P. 306–318.
- [13] Kizilova N.N. Identification of rheological parameters of the models of growing biological continuous media. // J. Biomech. 2006. Vol.39, Suppl. 1. P. 351–352.

Kizilova N.N. *Investigation of biological growth: a review of the experimental data and continuous models.* Modeling of biological growth is one of challenging problems in modern biomechanics. Experimental study of normal and genetically modified tissues at normal conditions and under the action of given extension, compression or other load have been carried out for the plant and animal tissues and the experimental data are widely presented in literature. Growth modeling is mainly restricted by lumped models based on the balance equation for mass (length, square, volume) of the growing body. Detailed models take into consideration several liquid and solid phases, internal variables and the balance equations, evolution equation for the open thermodynamic system, which growth is determined by the external mass flux, have to be considered as well. The survey of the measured data on growth kinematics and dynamics of plant leaf, stem, root growth and different mathematical models are presented.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ ПРИ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

Кувыркин Г. Н.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Предложена математическая модель поведения металлов и сплавов при фазовом превращении, не сопровождающемся изменением агрегатного состояния. Изложены результаты численного анализа термонапряженного состояния.

Для многих металлов и сплавов в некотором, сравнительно узком диапазоне температур характерны фазовые превращения, не сопровождающиеся изменением состава и агрегатного состояния. К числу простейших фазовых превращений такого типа относятся полиморфные превращения, упорядочение и мартенситные реакции.

Полиморфное превращение, сопровождающееся смещением атомов, происходит при “распрямлении связей”, когда атомы остаются окруженными теми же соседями. Так как при таком превращении не происходит разрыва связей, то оно может идти с большой скоростью, что может привести к растрескиванию хрупких материалов.

Упорядочение состоит в том, что сплав с хаотично распределенными атомами в узлах кристаллической решетки превращается в сплав с упорядоченной структурой. При этом не происходит изменение координационного числа (числа находящихся в контакте соседних с рассматриваемым ионов), но требуется диффузионное перемещение атомов.

Некоторые фазовые превращения происходят путем коллективного смещения атомов, напоминающего процесс сдвига. Гранецентрированная кубическая решетка в результате сдвигового смещения для одних сплавов может превратиться в объемноцентрированную, а для других — в гексагональную плотноупакованную. Фазовые превращения такого типа называют мартенситными (мартенситными реакциями). Они характерны, например, для сплавов с эффектом памяти формы. Мартенситные превращения характеризуются зависимостью температур начала и окончания превращения от скорости изменения температуры, обратимым характером превращения, заметным несовпадением температур начала и окончания прямой и обратной реакции (гистерезис), зависимостью температур начала и окончания фазового превращения от механических напряжений и т.п. Низкотемпературную модификацию сплава называют мартенситом, высокотемпературную — аустенитом. Переход сплава из аустенитного состояния в мартенситное происходит при понижении температуры на отрезке $[M_s, M_f]$, где M_s, M_f — температуры начала (s — “start”) и окончания (f — “finish”) перехода. Обратный переход из мартенситной фазы в аустенитную называют аустенитным превращением. Этот переход происходит при повышении температуры на отрезке $[A_s, A_f]$, где A_s, A_f — температуры начала и окончания перехода мартенсита в аустенит. В общем случае

$A_f > M_s > A_s > M_f$ и $M_s - M_f \neq A_f - A_s$. В связи с трудностями при определении последних небольших количеств остаточного мартенсита температура A_f соответствует объемной доле мартенсита в сплаве $\chi = 0,01$, а температура M_f — объемной доле аустенита в сплаве, равной $0,01$, т.е. $\chi = 0,99$. Отметим, что диапазон изменения разностей $M_s - M_f$ и $A_f - A_s$ для большого числа металлов и сплавов составляет $20 \dots 50$ К.

При построении математической модели поведения металлов и сплавов при фазовом превращении исходим из соотношений рациональной термодинамики необратимых процессов для сплошной среды с внутренними параметрами состояния. В качестве единственного внутреннего параметра состояния принята объемная доля $\chi \in [0, 1]$ мартенсита в сплаве.

Положим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки определяется четырьмя термодинамическими функциями — активными переменными: массовыми плотностями свободной энергии A и энтропии h , тензором напряжений с компонентами σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и вектором плотности теплового потока с компонентами q_i . Аргументами этих функций являются следующие реактивные переменные: тензор малой деформации с компонентами $\varepsilon_{kl} = (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2$ ($k, l = 1, 2, 3$), где u_k — компоненты вектора перемещения, x_k — декартовы прямоугольные координаты; абсолютная температура T и ее градиент с компонентами $\vartheta_k = \partial T / \partial x_k$, а также внутренний параметр состояния χ . Для определения χ должно быть задано кинетическое уравнение

$$\dot{\chi} = \kappa(\varepsilon_{kl}, T, \partial T / \partial x_k, \chi), \quad (1)$$

где $(\dot{}) = \partial() / \partial t$, t — время.

Из совместного рассмотрения закона сохранения энергии

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \partial q_i / \partial x_i, \quad (2)$$

где $\rho = \text{const}$ — плотность; $u = u(\varepsilon_{kl}, h, \partial T / \partial x_k, \chi)$ — массовая плотность внутренней энергии, и второго закона термодинамики в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема

$$\rho \dot{h} + \partial(q_i / T) / \partial x_i \geq 0 \quad (3)$$

с учетом преобразования Лежандра $u = A + Th$ следуют достаточные условия выполнения неравенства (3):

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_k} = 0, \quad \delta_D - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} q_i \geq 0, \quad (4)$$

где $\delta_D = -\rho(\partial A / \partial \chi) \dot{\chi}$ — диссипативная функция. Закон сохранения энергии (2) с учетом первых трех равенств из (4) примет следующий вид:

$$-\rho T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho T \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial \chi} \dot{\chi} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \delta_D. \quad (5)$$

Положим далее, что малы не только компоненты тензора полной деформации ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$), но и температурной с компонентами $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и фазовой с компонентами

$\varepsilon_{ij}^{(\chi)}$, $|\varepsilon_{ij}^{(T)}| \ll 1$ и $|\varepsilon_{ij}^{(\chi)}| \ll 1$. Отметим, что $\varepsilon_{ij}^{(T)} = 0$ при температуре $T_0 = \text{const}$ естественного состояния и $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(\chi)} = 0$ при $\dot{\chi} = 0$. В линейном приближении $\varepsilon_{ij}^{(\chi)} = \alpha_{ij}^{(\chi)} \chi$, где $\alpha_{ij}^{(\chi)}$ — компоненты тензора коэффициентов фазовой деформации.

Представим выражение для объемной плотности свободной энергии в виде

$$\rho A = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \varepsilon_{ij} + \rho B(T, \chi), \quad (6)$$

где C_{ijkl} — компоненты симметричного тензора коэффициентов упругости; $B(T, \chi)$ — часть свободной энергии единицы массы сплошной среды, зависящая только от абсолютной температуры и внутреннего параметра состояния, $B(T_0, 0) = 0$. Отметим, что при $\varepsilon_{ij} = 0$ из (6) следует, что объемная плотность свободной энергии зависит только от T и χ , $\rho A = \rho B(T, \chi)$.

Из первого равенства (4) с учетом (6) получим выражение, связывающее компоненты σ_{ij} тензора напряжений с ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)}$,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right). \quad (7)$$

Если разрешить (7) относительно компонентов тензора малой деформации, то

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{(T)} + \varepsilon_{ij}^{(\chi)}, \quad (8)$$

где B_{ijkl} — компоненты симметричного тензора коэффициентов податливости.

Для изотропного материала (7) и (8) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (K + 2\mu/3) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - 3K \left(\varepsilon^{(T)} + \varepsilon^{(\chi)} \right) \delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{K - 2\mu/3}{3K} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \left(\varepsilon^{(T)} + \varepsilon^{(\chi)} \right) \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $K = K(T, \chi)$, $\mu = \mu(T, \chi)$ — модули всестороннего сжатия и сдвига соответственно; δ_{ij} — символ Кронекера.

Закон сохранения энергии (5) с учетом выражения (6) преобразуется к виду

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \chi} \dot{\chi} + T C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \delta_D. \quad (10)$$

Отметим, что в (10) не учитываются слагаемые, линейно и квадратично зависящие от ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)}$, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с оставшимися.

Если положить, что компоненты вектора плотности теплового потока связаны с компонентами градиента температуры законом Фурье $q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \partial T / \partial x_j$, где $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda_{ij}^{(T)}(T, \chi)$ — компоненты симметричного тензора теплопроводности, то закон сохранения энергии переходит в уравнение теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} - \rho m_\varepsilon \dot{\chi} + T C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \delta_D, \quad (11)$$

где $c_\varepsilon = -T \partial^2 B / \partial T^2$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; $m_\varepsilon = T \partial^2 B / \partial T \partial \chi$ — удельная массовая конфигурационная теплоемкость при постоянной деформации (количество энергии Q , затрачиваемой на фазовое превращение единицы массы при постоянной деформации), $\int_0^1 m_\varepsilon d\chi = Q$. Очевидно,

что в (11) второе слагаемое в левой части и последнее — в правой отличны от нуля только для $t \in [t_s, t_f]$, где t_s, t_f — моменты времени начала и окончания фазового превращения.

В том случае, когда фазовое превращение происходит в поле напряжений, температуры начала и окончания прямого (обратного) фазового превращения можно представить в виде

$$M(A)_{s,f}^\sigma = M(A)_{s,f} + k s_{ij} s_{ij} / \sigma_u,$$

где k — коэффициент, зависящий от вида материала; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; σ_u — интенсивность напряжений.

Использование приведенных соотношений для решения задач термомеханики наталкивается на определенные трудности, связанные с отсутствием информации о свойствах материалов при фазовом превращении. Экспериментальное определение свойств материалов при фазовом превращении в принципе невозможно в силу кинетического характера этого процесса, поэтому целесообразно подойти к получению оценок свойств материалов в рассматриваемых условиях с использованием методов математического моделирования. Обобщение некоторых известных подходов позволяет получить полный набор требуемых термомеханических свойств металлов и сплавов в зоне фазового превращения.

Для анализа кинетики фазового превращения рассмотрим несколько конкретных форм записи кинетического уравнения (1). Для определенности рассмотрим переход мартенсита в аустенит, который происходит при $T \in [A_s, A_f]$.

Простейшее кинетическое уравнение для определения χ имеет вид

$$\tau \dot{\chi} = \bar{\chi} - \chi, \quad (12)$$

где $\tau, \bar{\chi}$ — время релаксации и равновесное значение внутреннего параметра состояния. При $t = t_s$ имеем $\chi = \chi_s$ и $T = A_s$; в данном случае $\bar{\chi} = \chi_f$ — объемная доля мартенсита в сплаве к моменту окончания фазового превращения при $T = A_f$ ($\chi_f = 0,01$). Из (12) следует

$$\chi = \chi_f - (\chi_f - \chi_s) \exp\left(-\frac{t - t_s}{\tau}\right), \quad t \in [t_s, t_f], \quad (13)$$

где $\chi_s = 0,99$ при $t = t_s$.

Более сложное выражение для χ можно получить, если принять зависимость равновесного значения внутреннего параметра состояния от текущего значения температуры, $\bar{\chi} = (T - A_f) / (A_s - A_f)$. В этом случае

$$\chi = \bar{\chi} - \int_{t_s}^t \exp\left(-\frac{t - t_s}{\tau}\right) \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t'} dt', \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (14)$$

Такое задание $\bar{\chi}$ позволяет в явном виде учесть влияние абсолютной температуры и скорости ее изменения на характер фазового превращения.

Другой возможный вариант кинетического уравнения имеет вид

$$\tau \dot{\chi} = \chi(\bar{\chi} - \chi). \quad (15)$$

Отметим, что уравнение типа (15) используют в синергетике, а также и в механике разрушения.

Проведенный для тела с однородной по объему температурой, нагреваемого конвективным тепловым потоком, анализ соотношений (12) и (15) свидетельствует о необходимости разделения процессов аккумуляции теплоты и фазового превращения.

Для оценки влияния характера изменения внутреннего параметра состояния, а также метода оценки термоупругих и фазовых свойств материала на термонапряженное и фазовое состояния, была решена осесимметричная задача для полого цилиндра, находящегося в плоском деформированном состоянии. В силу нелинейности системы разрешающих уравнений был использован метод конечных разностей с итерационным уточнением на каждом временном шаге решения нестационарной задачи с использованием схемы предиктор–корректор. Проведенные расчеты свидетельствуют о том, что термонапряженное и фазовое состояния заметно зависят от выбранной схемы определения соответствующих термомеханических свойств. В меньшей мере это сказывается на процессе теплопроводности. Использование правила смеси для определения свойств материалов приводит к существенному отличию решения соответствующей задачи от решения той же задачи, но полученного с использованием оценок тех же свойств на основе двойственных вариационных формулировок. Кроме того, при фазовом превращении термонапряженное состояние оказывает существенное влияние на процессы теплопроводности и фазового превращения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05 – 01 – 0586.

Kuvyrkin G.N. *Modeling of thermomechanical processes in metals and alloys during phase transformation.* The mathematical model of a metal and alloy behavior during phase transformation without the aggregative state modification is suggested. Results of the numerical analysis of thermo-stressed state are represented.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ НОРМАЛЬНЫХ SH ВОЛН В ПЛАСТИНЕ МОНОКРИСТАЛЛА КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКОЙ ГРАНЕЙ

Кусливая А. А.

Донецкий национальный университет, Украина

Пространственная задача распространения упругих нормальных волн в монокристаллическом слое германия со скользящей заделкой граней рассматривается на основе модели нелинейного геометрического и физического динамического деформирования анизотропных упругих сред класса $m\bar{3}m$ кубической системы с упругим потенциалом, содержащем квадратичные и кубические члены по деформациям. Проанализированы малые нелинейные добавки в полях упругих волновых смещений в окрестности волн Лаве, описанных первыми двумя членами в разложении в ряд векторных функций интенсивностей нормальных волн по степеням акустического числа Маха. В аналитической форме получены представления для вторых гармоник монохроматических SH волн. Исследованы амплитудно-частотные зависимости функций интенсивности нелинейных вторых гармоник нормальных упругих волн.

Задачи о распространении нормальных упругих волн в слое из монокристаллических материалов различных классов имеют важное применение в акустоэлектронике – используются для трансформации и задержки сигналов. До последнего времени теоретические решения задач о распространении волн в кристаллическом слое были получены и исследованы применительно к линейным волнам, а вопрос об оценках нелинейных эффектов оставался практически открытым в виду крайней сложности соотношений соответствующих граничных задач.

В данной работе рассматривается задача определения нелинейных ангармонических возмущений для нормальных волн, которые распространяются в плоскопараллельном анизотропном упругом волноводе (слое пространственной геометрии толщиной $2h$) из материала кубической системы. Материалом волновода является монокристалл класса $m\bar{3}m$. На плоских граничных поверхностях (гранях слоя) по предположению имеется скользящая заделка.

Модель нелинейных волновых процессов в рассматриваемом волноводе базируется на представлении упругого потенциала

$$U = \frac{1}{2}c_{iqrk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk} + \frac{1}{6}c_{iqrklm}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk}\varepsilon_{lm} \quad (1)$$

и нелинейных представлениях компонент тензора упругих деформаций

$$\varepsilon_{rk} = \frac{1}{2}(u_{r,k} + u_{k,r} + u_{l,r}u_{l,k}), \quad u_{r,k} = \partial u_r / \partial x_k. \quad (2)$$

Нормированные компоненты тензора механических напряжений σ_{jd} представляются в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d} = \sigma_{jd}^{(0)} + \sigma_{jd}^{(1)}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{jd}^{(0)} = c_{jdrk}u_{r,k}, \quad \sigma_{jd}^{(1)} = \frac{1}{2}c_{jdrk}u_{l,r}u_{l,k} + c_{pdrk}u_{j,p}u_{r,k} + \frac{1}{2}c_{jdrklm}u_{r,k}u_{l,m}. \quad (4)$$

Тензоры упругих постоянных второго и третьего порядков монокристаллического материала слоя в рассматриваемом случае характеризуются соответственно тремя независимыми постоянными второго порядка \tilde{c}_{ij} , шестью независимыми постоянными третьего порядка \tilde{c}_{ijk} .

Тензорные уравнения движения для рассматриваемого волновода имеют вид

$$\rho\ddot{u}_j - \sigma_{jd,d}^{(0)} = \sigma_{jd,d}^{(1)} \quad (j = \bar{1}, \bar{3}). \quad (5)$$

На имеющих скользящую заделку плоских граничных поверхностях $x_3 = \pm h$ формируются граничные условия вида:

$$(\sigma_{j3}^{(0)})_{x_3=\pm h} + (\sigma_{j3}^{(1)})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (u_3)_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = \bar{1}, \bar{2}). \quad (6)$$

Анализ нелинейных волновых эффектов в рассматриваемом волноводе основывается на методике определения нелинейных “добавок” в представлениях функций волновых упругих смещений пропорциональных малому параметру — акустическому числу Маха, которые определяют как нелинейные ангармонические возмущения разных порядков или так называемые высшие гармоники стационарных упругих волн.

По этой методике компоненты вектора упругих волновых смещений представляются в виде ряда:

$$u_j = \sum_{k=0}^n u_j^{(k)}, \quad (7)$$

в котором $|u_j^{(k)}| \sim \delta |u_j^{(k-1)}|$, δ — число Маха.

На основе выделения в равенствах составляющих одного порядка по малому параметру δ формируется рекуррентная последовательность краевых задач для уравнений вида

$$\rho\ddot{u}_j^{(k)} - (\sigma_{jd,d}^{(0)})_{u=u^{(k)}} = (\sigma_{jd,d}^{(1)})_{u=u^{(k-1)}} \quad (k \geq 1) \quad (j = \bar{1}, \bar{2}), \quad (8)$$

с граничными условиями

$$(\sigma_{j3}^{(0)})_{x_3=\pm h} + (\sigma_{j3}^{(1)})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (u_3^{(k)})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = \bar{1}, \bar{2}). \quad (9)$$

Из рекуррентной последовательности краевых задач (8), (9) с учетом используемого представления U корректно могут быть найдены только составляющие $u_j^{(0)}$ и $u_j^{(1)}$, соответственно определяемые из линейной спектральной краевой задачи

$$\rho\ddot{u}_j^{(0)} - c_{jdkr}u_{r,dk}^{(0)} = 0, \quad (\sigma_{23}^{(0)})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (10)$$

и неоднородной краевой задачи

$$\rho \ddot{u}_j^{(1)} - c_{jdkr} u_{r,dk}^{(1)} = c_{jdkr} u_{r,dk}^{(0)} u_{l,r}^{(0)} + c_{pdrk} (u_{j,dp}^{(0)} u_{r,k}^{(0)} + u_{r,dk}^{(0)} u_{j,p}^{(0)}) + c_{jdkrlm} u_{r,dk}^{(0)} u_{l,m}^{(0)}, \quad (11)$$

$$(\sigma_{j3}^{(0)})_{x_3=\pm h} + (\sigma_{j3}^{(1)})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (u_3^{(k)})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = 1, \bar{2}). \quad (12)$$

Из решения задачи линейной задачи (10) следует описание моды с номером n в линейном спектре нормальных SH -волн в упругом слое кубической системы

$$u_{2n}^{(0)} = f_n \cos(\alpha_n x_3) E(x_1, t, \omega, k) \quad (n = 1, \bar{\infty}), \quad (13)$$

$$\alpha_n = n\pi/h, \quad E(x_1, t, \omega, k) = e^{-i(\omega t - x_1 k_n)}, \quad k_n = \sqrt{(\Omega^2 + c_{44} \alpha_n^2)/c_{44}}, \quad (14)$$

где f_n является произвольной константой — амплитудной характеристикой.

Соответствующая задача для определения ангармонических возмущений $u_j^{(1)}$ принимает вид

$$\rho \ddot{u}_{1n}^{(1)} - c_{11} u_{1n,11}^{(1)} - \Delta_8 u_{3n,31}^{(1)} - c_{44} u_{1n,33}^{(1)} = \beta_{1n}(x_3) E(x_1, t, 2\omega, 2k), \quad (15)$$

$$\rho \ddot{u}_{2n}^{(1)} - c_{44} (u_{2n,11}^{(1)} + u_{2n,33}^{(1)}) = 0,$$

$$\rho \ddot{u}_{3n}^{(1)} - c_{11} u_{3n,33}^{(1)} - \Delta_8 u_{1n,13}^{(1)} - c_{44} u_{3n,11}^{(1)} = \beta_{3n}(x_3) E(x_1, t, 2\omega, 2k)$$

$$(\sigma_{j3}^{(0)})_{x_3=\pm h} + (\sigma_{j3}^{(1)})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (u_3^{(1)})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = 1, \bar{2}). \quad (16)$$

где $\Delta_8 = c_{12} + c_{14}$, $\beta_{1n}(x_3) = A_{1n} + a_{1n} \cos(2\alpha_n x_3)$, $\beta_{3n}(x_3) = a_{2n} \sin(2\alpha_n x_3)$.

Качественный анализ задачи (15)–(16) показывает, что вторыми гармониками, которые сопровождают распространение симметричных нормальных SH -волн, являются только симметричные волны P-SV-типа с удвоенной частотой. Компонента $u_{2n}^{(1)}$ в данном случае равна 0.

Полное решение неоднородной системы уравнений (15)–(16) состоит из суммы её частного решения $\tilde{u}_{jq}^{(1)}$ и общего решения $\hat{u}_{jq}^{(1)}$ соответствующей однородной системы:

$$u_{1n}^{(1)} = \tilde{u}_{1n}^{(1)}(x_1, x_3, t) + \hat{u}_{1n}^{(1)}(x_1, x_3, t), \quad (17)$$

$$u_{3n}^{(1)} = \tilde{u}_{3n}^{(1)}(x_1, x_3, t) + \hat{u}_{3n}^{(1)}(x_1, x_3, t). \quad (18)$$

Частное решение неоднородной системы построено в виде

$$\tilde{u}_{1n}^{(1)}(x_1, x_3, t) = (\mu_{1n} + \mu_{2n} \cos(2\alpha_n x_3) + \mu_{3n} x_3 \sin[2\alpha_n x_3]) E(x_1, t, 2\omega, 2k), \quad (19)$$

$$\tilde{u}_{3n}^{(1)}(x_1, x_3, t) = (\mu_{4n} \sin(2\alpha_n x_3) + \mu_{5n} x_3 \cos[2\alpha_n x_3]) E(x_1, t, 2\omega, 2k), \quad (20)$$

а общее решение имеет структуру:

$$\hat{u}_{1n}^{(1)}(x_1, x_3, t) = (V_{11n} \cos(\chi_{1n} x_3) + V_{31n} x_3 \sin[\chi_{2n} x_3]) E(x_1, t, 2\omega, 2k), \quad (21)$$

$$\hat{u}_{3n}^{(1)}(x_1, x_3, t) = (V_{12n} \sin(\chi_{1n} x_3) + V_{32n} x_3 \cos[\chi_{2n} x_3]) E(x_1, t, 2\omega, 2k). \quad (22)$$

Построенное аналитическое решение позволяет осуществить анализ кинематических закономерностей, свойственных явлению возникновения нелинейных ангармонических возмущений для линейных мод нормальных симметричных SH -волн в волноводах со скользящей заделкой граней. Численный анализ осуществлен применительно к волнам, распространяющимся вдоль оси упругой симметрии OX_1 , в слое монокристалла германия.

Первоочередные вопросы численного анализа нелинейных вторых гармоник касаются закономерностей изменения их амплитудно-частотных характеристик. При этом особый интерес для изучения представляет анализ эффектов резкого возрастания нормированных интенсивностей волновых движений в ангармонических возмущениях в окрестности определенных частот. Такие эффекты можно характеризовать как резонансное возбуждение вторых гармоник.

Эти эффекты выявляются при анализе частотных зависимостей в представлениях $u_{1n}^{(1)}$ и $u_{3n}^{(1)}$, представленных в частности на рисунке 1 для величин $U_j = |(u_{jn}^{(1)})_{x_3=0.6}|$ от значений приведенного частотного параметра в случае, когда линейная монохроматическая нормальная SH волна принадлежит моде $n = 1$ нормальных волн.

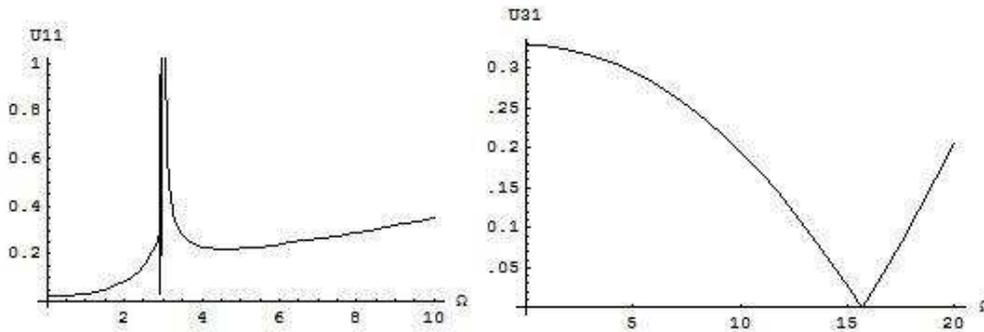


Рис. 1. Распределения максимальных по толщине слоя волновых перемещений во вторых гармониках нормальных SH -волн первой моды

Проанализировав аналитически частотные зависимости в представлении $u_{1n}^{(1)}$ от значений приведенного частотного параметра нормальной монохроматической линейной SH волны моды для слоя со скользящей заделкой граней, можно отметить, что при $\Omega = k_n \sqrt{c_{11}/\rho}$ наблюдается резкое возрастание нормированных интенсивностей волновых движений, связанные с неограниченным возрастанием параметра μ_{1n} , при обращении в ноль его знаменателя при $\Omega = k_n \sqrt{c_{11}/\rho}$. Но данная зависимость представляет собой уравнение моды продольной объемной волны вдоль направления OX_1 монокристалла германия. Таким образом, при совпадении фазовых скоростей объемных продольных и нормальных поперечных SH волн наблюдается резонансное возбуждение вторых гармоник.

Представляет также интерес сопоставительный анализ соотношений между интенсивностями линейной нормальной SH волны и её второй гармоники. Соответствующие расчеты в частности проведены для волн, которые принадлежат низшей моде линейного спектра нормальных SH -волн при значениях нормированной частоты $\Omega_k = \Omega_k + \Delta\Omega k$, где $k = 1, 15$, и отражены в нижеследующей таблице (рис. 2).

Ω_k	$\bar{u}_{2n}^{(0)} = u_{2n}^{(0)} / F_n$	$\bar{u}_{1n}^{(1)} = u_{1n}^{(1)} / F_n^2$	$\bar{u}_{3n}^{(1)} = u_{3n}^{(1)} / F_n^2$
1.7	1	0.770074	0.551062
1.9	1	0.707	0.549431
2.1	1	0.630624	0.547619
2.3	1	0.536575	0.545626
2.5	1	0.416952	0.543452
2.7	1	0.256424	0.541096
2.9	1	0.224072	0.53856
3.1	1	0.957169	0.535842
3.3	1	0.805381	0.532943
3.5	1	0.87884	0.529862
3.7	1	0.971362	0.526601
3.9	1	1.06605	0.523158
4.1	1	1.15969	0.519534
4.3	1	1.2516	0.515729
4.5	1	1.34178	0.511743

Рис. 2. Интенсивности линейной нормальной SH волны и её второй гармоники, распространяющейся в слое со скользящей заделкой грани

Таким образом, установлено, что в достаточно широком исследованном частотном спектре амплитуда смещения $u_{3n}^{(1)}$ второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды линейной нормальной волны с коэффициентами в диапазоне от 0.51 до 0.55, а амплитуда смещения $u_{1n}^{(1)}$ второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды линейной нормальной волны с коэффициентами в диапазоне от 0.22 до 1.34 для слоя со скользящей заделкой граней.

Список литературы

- [1] Космодамианский А. С., Сторожев В. И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. К.: Наук. думка, 1985. 176 с.
- [2] Куренная К. И., Сторожев В. И. Вторые гармоники нелинейных нормальных SH -волн в пластине из монокристалла германия // Теорет. и прикладная механика. 2002. № 35. С. 131–138.

Kuslivaya A.A. *Nonlinear second harmonic normal SH waves in the plate monocrystal cubic system with a sliding stopping brink.* The tree dimensional problem of propagation of elastic normal waves in monocrystal germanium layer with mixed boundary conditions stopping the brink of sliding plate is considered on the basis of model geometrically and physically nonlinear dynamic deformation of anisotropic elastic bodies of class m3m cubic system with the elastic potential containing square and cubic components on deformations. Small nonlinear additives in fields of elastic wave moving in surface Love waves described by first two members in decomposition of a vector function of intensity of normal waves in series on degrees of acoustical Math number are analyzed. In the analytical form of the second harmonics of monochromatic SH normal wave are received. Research of amplitude frequency dependences of functions of intensity of nonlinear second harmonics normal waves carried out.

О ПОСТРОЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ СРЕД

Ляпин А. А.

Ростовский военный институт ракетных войск

Предлагается подход к построению фундаментальных решений для многослойной упругой среды, используемых при решении краевых задач для слоистых сред с неоднородностями методом граничных интегральных уравнений. В основе решений лежат представления полей перемещений и напряжений в однородной полуплоскости. Обосновывается эффективность предлагаемого метода в широком частотном диапазоне при значительном числе слоев среды.

Одной из основных проблем при применении метода граничных интегральных уравнений к решению динамических задач для многослойных полуограниченных сред является построение матрицы фундаментальных решений, соответствующих действию сосредоточенного усилия в рассматриваемых средах. В работе [1] предлагается подход, основывающийся на построении таких решений при возбуждении установившихся гармонических с частотой ω колебаний для одного слоя со свободными от напряжений гранями с последующей стыковкой полученных выражений с оставшимися компонентами слоистой среды. Однако возможные варианты пересечения локальной неоднородностью границ раздела слоев делают такой метод малоэффективным. Возникает необходимость построения фундаментальных решений в целом для многослойной среды с возможной миграцией источника через границы раздела слоев.

Пусть упругая среда занимает область в виде N -слойной полуплоскости. В рамках каждого слоя материал считается однородным, определяемым плотностью и упругими параметрами Ламе: $\rho_j, \lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, N$. h_j — толщины слоев. Матрицы Грина фундаментальных решений в каждой компоненте слоистой среды $x \in (0, h_j)$, $y \in (-\infty, +\infty)$ разыскиваются в виде:

$$\mathbf{U}^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \mathbf{U}^{(1,j)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^{(2,j)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^{(0,j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \cdot \delta_{jk} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}^{(i,j)}(\mathbf{r}), i = 1, 2$ — решения для однородной полуплоскости от действия вектора поверхностных усилий $\mathbf{X}^{(i,j)}(y)$, $\mathbf{U}^{(0,j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ — классическая матрица фундаментальных решений для плоскости с источником в точке $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$, k — номер слоя с источником (см. рис. 1).

Для определения неизвестных функций $\mathbf{X}^{(i,j)}(y)$ используются условия сопряжения слоев по перемещениям и напряжениям в форме преобразований Фурье по координате y . В этом случае фундаментальные решения, например, для перемещений в преобразованном виде достаточно просты:

$$\mathbf{U}^{(1,j)}(x, \alpha) = \mathbf{P}^{(1,j)}(x, \alpha) \cdot \tilde{\mathbf{X}}^{(1,j)}(\alpha) \quad (2)$$

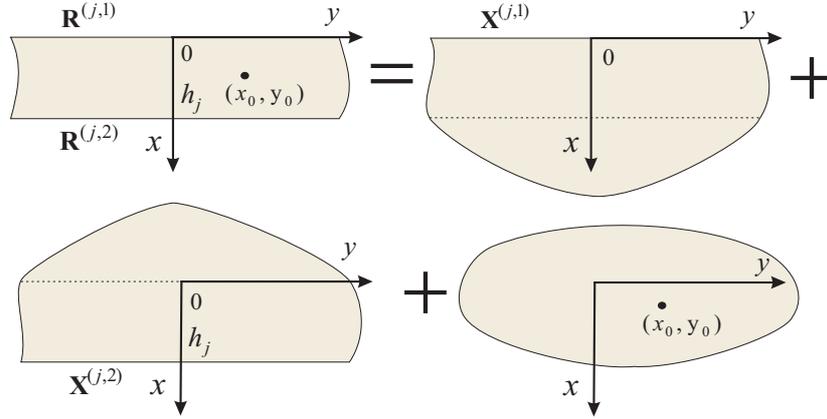


Рис. 1. Представление фундаментальных решений

$$\mathbf{P}^{(1,j)}(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \sigma_{1j}(-\zeta_1^2 e_{1j}(x) + 2\alpha^2 e_{2j}(x))/\Delta & i\alpha(-2\sigma_{1j}\sigma_{2j}e_{1j}(x) + \zeta_1^2 e_{2j}(x))/\Delta \\ i\alpha(-\zeta_1^2 e_{1j}(x) + 2\sigma_{1j}\sigma_{2j}e_{2j}(x))/\Delta & \sigma_{2j}(2\alpha^2 e_{1j}(x) - \zeta_1^2 e_{2j}(x))/\Delta \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Delta = -4\alpha^2\sigma_{1j}\sigma_{2j} + \zeta_1^2; \quad \zeta_1^2 = \alpha^2 + \sigma_{2j}^2; \quad \sigma_{ij} = \sqrt{\alpha^2 - \theta_{ij}^2}; \quad e_{ij}(x) = \exp(-\sigma_{ij}x)$$

$$\theta_{1j} = \frac{\omega}{Vp_j}; \quad \theta_{2j} = \frac{\omega}{Vs_j}$$

Функции $\mathbf{U}^{(1,j)}(\mathbf{r})$ определяют набор волн, отраженных и излучаемых с верхней грани j -го слоя. Соответственно для представления волнового поля, связанного с нижней гранью слоя, получим:

$$\mathbf{U}^{(2,j)}(x, \alpha) = \mathbf{P}^{(2,j)}(x, \alpha) \cdot \tilde{\mathbf{X}}^{(2,j)}(\alpha) \quad P_{lm}^{(2,j)}(x, \alpha) = (-1)^{l+m-1} P_{lm}^{(2,j)}(h_j - x, \alpha) \quad (4)$$

Для поля источника $\mathbf{U}^{(0,j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ имеем:

$$\mathbf{U}^{(0,j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}^{(0,j)}(x_0, x, \alpha) \exp(-i\alpha(y - y_0)) d\alpha \quad (5)$$

$$\mathbf{U}^{(0,j)}(x_0, x, \alpha) = \frac{1}{2\theta_{2j}^2} \begin{pmatrix} -\sigma_{1j}e_{1j}^0 + \alpha^2 e_{2j}^0 / \sigma_{2j} & -i\alpha[e_{1j}^0 - e_{2j}^0] \text{sign}(x - x_0) \\ -i\alpha[e_{1j}^0 - e_{2j}^0] \text{sign}(x - x_0) & \alpha^2 e_{1j}^0 / \sigma_{1j} - \sigma_{2j} e_{2j}^0 \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}^0 = \exp(-\sigma_{ij} |x - x_0|).$$

Удовлетворяя далее равенствам компонент векторов перемещений и напряжений при переходе через границы раздела $x = -\sum_{j=2}^m h_j$, $m = 2, \dots, N - 1$, получим систему линейных алгебраических уравнений с $4N + 2$ неизвестными:

$$\mathbf{A}(\alpha) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(\alpha) = \mathbf{B}(\alpha),$$

где $\tilde{\mathbf{X}}(\alpha)$ — общий вектор неизвестных напряжений для многослойной структуры.

Несложно показать, что определитель данной системы обращается в ноль в точках $\alpha = \alpha_n$, соответствующих корням дисперсионного уравнения для N-слойной полуплоскости и определяющих волновые числа распространяющихся на поверхности и границах раздела слоев поверхностных и каналовых волн. Рассматривая асимптотическое поведение определителя при $|\alpha| \rightarrow +\infty$, получим $\det(\mathbf{A}(\alpha)) \sim \frac{Const}{\alpha^2}$, что обеспечивает численную устойчивость обращения системы уравнений при произвольных α .

Построенные фундаментальные решения позволяют рассмотреть ряд задач для многослойной полуплоскости с произвольным расположением неоднородности в ней методом граничных интегральных уравнений [2].

Список литературы

- [1] Собисевич Л.Е, Селезнев М.Г. и др. Локальные резонансы в слоистых средах. М.: ОИФЗ РАН, МФ ГНИЦ ПГК при Куб.ГУ МО России, 2000.
- [2] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.

Lyapin A.A. *About construction of fundamental solutions for layered half-limited medium.* The approach to construction of fundamental solutions for the multilayered elastic medium, used at the solution for layered medium with inhomogeneous a method of the boundary integral equations, is offered. In a basis of solutions lay representations of fields of displacements and stresses in homogeneous half-plane. Efficiency of an offered method proves in a wide frequency range at significant number of layers of medium.

К анализу особых множеств определителей матриц-символов Грина краевых задач для изотропных сред с нарушением сплошности

Мазин В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.

Кубанский государственный университет, Краснодар

В работе приводятся новые аналитические представления для определителей матриц-символов ядер систем интегральных уравнений динамических смешанных задач для однородных упругих сред с включением.

Динамические задачи для полуограниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, несмотря на значительное число посвященных им публикаций, на сегодняшний день имеют большое количество мало изученных аспектов. Актуальным направлением исследований в этой области является создание численно-аналитических методов построения элементов и определителей матриц-символов ядер для систем интегральных уравнений (ИУ) большой размерности, являющихся основой анализа волноводных, в том числе и резонансных, свойств механических систем.

В [1, 2, 3, 4, 5, 6] для задач о вибрации упругих полуограниченных слоистых сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, изложен метод и получены рекуррентные формулы, позволяющие эффективно вычислять элементы и определители указанных матриц, приведены примеры их использования в исследовании краевых задач в различных постановках. Построенные аналитические выражения выявляют структуру корневых и полярных множеств определителей символов ядер многомерных систем ИУ, что особенно важно для изучения условий локализации вибрационных процессов системой неоднородностей [7].

В частности, если среда содержит неоднородности типа жестких включений, ориентированные параллельно относительно ее слоистой структуры, то искомые определители выражены через произведение определителей специальным образом введенных матриц \mathbf{G}_{Np} , описывающих положение включений в слоистой среде. Индекс N указывает на количество слоев, а индекс p — на порядковый номер границы их раздела, содержащей включение.

$$\mathbf{G}_{Np} = [\mathbf{K}_p^-(h_1, h_2, \dots, h_p)]^{-1} - [\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N)]^{-1}.$$

Здесь \mathbf{K}_p^- — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, \mathbf{K}_{N-p} — матрица Грина пакета $(N - p)$ слоев на жестком основании. Элементы выписанных матриц зависят от параметров преобразования Фурье, частоты гармонических колебаний, а также физико-механических и геометрических параметров слоев, полутолщины которых приведены в качестве аргументов. Достоинством метода является возможность исключения корневых и полярных множеств определителя, имеющих пересечения при произвольных значениях параметров механической системы, что является важным при определении спектральных характеристик волновых полей, возбуждаемых системой дефектов.

В настоящей работе в качестве примера использования предложенного метода приводятся аналитические соотношения для определителей систем ИУ, соответствующих нескольким частным случаям расположения включений в однородных средах.

Рассмотрим однородный упругий слой толщины $H = 2(h_1 + h_2)$, занимающий объем $(-\infty < x, y < +\infty; -H \leq z \leq 0)$, с жестко защемленной нижней гранью и содержащий включение на глубине $z = -2h_1$. В этом случае символом ядра системы ИУ относительно скачка вектора напряжений на границах включения является матрица $\mathbf{K} = \mathbf{G}_{21}^{-1}$, при этом [6]

$$\mathbf{G}_{21} = [\mathbf{K}_1^-(h_1)]^{-1} - [\mathbf{K}_1(h_2)]^{-1}.$$

Следуя результатам работы [5]

$$\det \mathbf{K} = \left[\frac{\Delta_{21}(h_1) D_{21}(h_2)}{\Delta_{21}(h_1 + h_2)} \right] \times \left[\frac{\Delta_{11}(h_1) D_{11}(h_2)}{\Delta_{11}(h_1 + h_2)} \right], \quad (1)$$

где

$$D_{21}(h_2) = \frac{1}{4} (\lambda^4 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(2\sigma_1 h_2) \operatorname{sh}(2\sigma_2 h_2) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2 [\operatorname{ch}(2\sigma_1 h_2) \operatorname{ch}(2\sigma_2 h_2) - 1],$$

$$D_{11}(h_2) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma_2 h_2)}{\sigma_2},$$

$$\Delta_{21}(h_1) = \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 \left[\frac{1}{4} \kappa_2^4 - (\gamma + \lambda^2)^2 + \left(\frac{1}{4} \kappa_2^4 + (\gamma + \lambda^2)^2 \right) \operatorname{ch}(2\sigma_1 h_1) \operatorname{ch}(2\sigma_2 h_1) \right] - \lambda^2 (\gamma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(2\sigma_1 h_1) \operatorname{sh}(2\sigma_2 h_1),$$

$$\Delta_{11}(h_1) = \operatorname{ch}(2\sigma_2 h_1),$$

$$\gamma = \lambda^2 - 0,5\kappa_2^2, \quad \sigma_2^2 = \lambda^2 - \kappa_2^2, \quad \sigma_1^2 = \lambda^2 - \varepsilon\kappa_2^2, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\kappa_2^2 = \rho\omega^2/\mu, \quad \varepsilon = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu).$$

Здесь μ, ν, ρ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность материала соответственно.

В (1) и далее в выражениях для определителей систем ИУ, соответствующих пространственной постановке краевых задач, в квадратные скобки заключены составляющие, равные определителям в плоской (первый сомножитель) и антиплоской (второй сомножитель) постановках краевых задач.

Функция $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ является вещественной на вещественной оси $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и мероморфной в комплексной плоскости λ . Полярное множество $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ совпадает с полярным множеством определителя матрицы Грина слоя толщины $2(h_1 + h_2)$ на жестком основании. Корневое множество $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ является объединением полярного множества определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_1$ и корневого множества определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_2$. Существует диапазон частот $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$

запираания волноводных свойств слоя с включением, в котором $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ не имеет вещественных нулей и полюсов.

Используя (1), можно путем подбора глубины погружения включения $2h_1$ управлять динамическими свойствами механической системы. Например, при $2h_1 = \frac{1}{3}H$ часть полюсов оказывается заблокированной. При этом количество волн перемещения, распространяющихся от включения при фиксированном значении частоты $\omega > \omega_{кр}$ и уносящих энергию на бесконечность, уменьшается, что приводит к частичной локализации вибрационного процесса [6].

Определитель матрицы-символа \mathbf{K}_1 системы ИУ, порождаемой задачей о колебаниях однородного полупространства ($-\infty < x, y < +\infty; z \leq 0$), вызванных вибрацией границ включения, расположенного в плоскости $z = -2h_1$, получим, переходя в (1) к пределу при $h_2 \rightarrow \infty$

$$\det \mathbf{K}_1 = \left[\frac{(\sigma_1 \sigma_2 - \lambda^2) \Delta_{21}(h_1)}{\sigma_1 \sigma_2 \kappa_2^4 (\gamma^2 - \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2)} \exp(-2\sigma_1 h_1) \exp(-2\sigma_2 h_1) \right] \times \\ \times \left[\frac{\Delta_{11}(h_1)}{\sigma_2} \exp(-2\sigma_2 h_1) \right]. \quad (2)$$

Функция $\det \mathbf{K}_1(\lambda, \omega)$ наряду с вещественными нулями и полюсами имеет точки ветвления $\lambda = \pm \kappa_i$ ($i = 1, 2$). Единственным вещественным полюсом определителя является рэлеевский полюс матрицы Грина однородного полупространства, расположенный в области $|\operatorname{Re} \lambda| \geq \kappa_2$. Вещественные нули $\det \mathbf{K}_1(\lambda, \omega)$ совпадают с полюсами определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_1$, которые, как известно, расположены в области $|\operatorname{Re} \lambda| < \kappa_2$.

Определитель матрицы-символа \mathbf{K}_0 ядра системы ИУ для включения в однородном пространстве получим, переходя в (2) к пределу при $h_1 \rightarrow \infty$

$$\det \mathbf{K}_0 = \left[\frac{(\sigma_1 \sigma_2 - \lambda^2)^2}{\sigma_1 \sigma_2 (4\kappa_2^4)} \right] \times \left[\frac{1}{2\sigma_2} \right].$$

Функция $\det \mathbf{K}_0(\lambda, \omega)$ не имеет вещественных нулей и полюсов, ее особыми точками являются точки ветвления $\lambda = \pm \kappa_i$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-08-00671), РФФИ, администрации Краснодарского края и региональных инвесторов (06-01-96600, 06-01-96639, 06-01-96638, 06-01-0817-офи), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

Список литературы

- [1] *Бабешко В.А., Пряжина О.Д., Смирнова А.В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. № 2. С. 3–10.
- [2] *Пряжина О.Д., Смирнова А.В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.

- [3] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 87–97.
- [4] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории “вирусов” вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.
- [5] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Влияние жестких включений на волноводные свойства пакета упругих слоев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №1. С. 45–51.
- [6] Пряхина О.Д., Смирнова А.В. К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. №3. С. 330–333.
- [7] Бабешко В.А. Тела с неоднородностями; случай совокупности трещин // ДАН. 2000. Т. 373. №2. С. 191–193.

Mazin V.A., Pryakhina O.D., Smirnova A.V. *Towards the analysis of singular manifolds of the determinants of green's matrix-symbols in boundary-value problems for discontinuous isotropic media.* The work provides new analytic representations for the determinants of matrix-symbols of integral equations systems kernels in dynamic mixed problems for homogeneous elastic media with an inclusion.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мелехов А. П., Ревина С. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности (волновое число α стремится к нулю). Для основного течения вида: $\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2))$, $\langle V_3 \rangle = 0$ получены явные формулы главных членов асимптотики. Показано, что в отсутствие вырождений, происходит колебательная потеря устойчивости.

1. Введение. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном пространстве $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 и x_3 с периодами L_1, L_2 и L_3 соответственно. Поле скоростей \mathbf{v} и давление p удовлетворяют системе уравнений Навье–Стокса и условию несжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости \mathbf{v} по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 с периодами L_1, L_2, L_3 соответственно. Предполагается, что $L_3 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$. Пусть $z = \alpha x_3$. Тогда поле скоростей периодично по z с периодом 2π .

Всюду в дальнейшем через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по переменным x_1, x_2 :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2,$$

а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по параллелепипеду периодов:

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, 2\pi].$$

Среднее значение скорости \mathbf{v} считается заданным:

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений $\mathbf{v} = (0, V_2(x))$ получена в [1]. Исследованию автоколебаний,

возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида $\mathbf{v} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$, $\langle V_3 \rangle \neq 0$ рассмотрена в [3]. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [4–7].

Настоящая работа посвящена исследованию задачи устойчивости стационарного течения вида

$$\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2)), \quad \langle V_3 \rangle = 0. \quad (1)$$

Явно найдены первые члены асимптотики по параметру α собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи.

2. Линейная задача устойчивости. Для нормальных возмущений вида $u = \varphi(x_1, x_2, z)e^{\sigma t}$ получается спектральная задача:

$$i\omega_0\varphi_j + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_j = -\frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$i\omega_0\varphi_3 + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varphi_s \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_3 = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s} + \alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad \langle \langle \varphi \rangle \rangle = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — плоский оператор Лапласа, индексы j, s меняются от 1 до 2, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Неизвестные собственные значения, собственные функции и критическое значение вязкости ν_c будем разыскивать в виде рядов по параметру α :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_0^k \alpha^k, & \nu_c &= \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k, \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, & P &= \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k. \end{aligned}$$

Из уравнений (2)–(4) следует, во-первых, что $P(x_1, x_2, z)$ — периодическая функция своих аргументов и $\langle P \rangle = -2\langle V_3 \varphi_3 \rangle$, во-вторых, $\langle \varphi_3 \rangle = 0$.

Выпишем из уравнений (2)–(4) систему при α^0 :

$$i\omega_0^0 \varphi_j^0 - \nu^* \Delta_0 \varphi_j^0 = -\frac{\partial P^0}{\partial x_j}, \quad i\omega_0^0 \varphi_3^0 + \varphi_s^0 \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu^* \Delta_0 \varphi_3^0 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_s^0}{\partial x_s} = 0, \quad \langle \langle \varphi_k^0 \rangle \rangle = 0. \quad (6)$$

Из (5), (6) выводим, что коэффициент $\omega_0^0 = 0$, функции φ_j^0 и P^0 зависят только от z : $\varphi_j^0 = \varphi_j^0(z)$ и $P^0 = P^0(z)$, а φ_3^0 имеет вид:

$$\varphi_3^0 = \frac{1}{\nu^*} \varphi_s^0(z) \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s},$$

где $\Delta_0\theta_3(x_1, x_2) = V_3$, $\langle\theta_3\rangle = 0$.

Приравнивая выражения при α^1 , из (2)–(4) выводим равенства:

$$i\omega_0^1\varphi_j^0(z) + V_3\frac{d\varphi_j^0}{dz} - \nu^*\Delta_0\varphi_j^1 = -\frac{\partial P^1}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$i\omega_0^1\varphi_3^0 + V_3\frac{\partial\varphi_3^0}{\partial z} + \varphi_s^1\frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu^*\Delta_0\varphi_3^1 - \nu_1\Delta_0\varphi_3^0 = -\frac{dP^0}{dz}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi_s^1}{\partial x_s} + \frac{\partial\varphi_3^0}{\partial z} = 0, \quad \langle\langle\varphi_k^1\rangle\rangle = 0. \quad (9)$$

После осреднения уравнения (7) приходим к задаче для нахождения ω_0^1, φ_j^0 :

$$i\omega_0^1\varphi_j^0(z) + \langle V_3\rangle\frac{d\varphi_j^0}{dz} = 0, \quad \varphi_j^0(z + 2\pi) = \varphi_j^0(z),$$

откуда, т. к. $\langle V_3\rangle = 0$, получаем: $\omega_0^1 = 0$, $\varphi_j^0(z)$ — остаются неопределенными.

Из (7), (9) найдем P^1 и φ_j^1 :

$$P^1 = -2\frac{d\varphi_j^0}{dz}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_j} + \langle P^1\rangle, \quad \varphi_j^1 = \frac{1}{\nu^*}\frac{d\varphi_j^0}{dz}\left[\theta_3 - 2\delta_{js}\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s\partial x_j}\right] + \langle\varphi_j^1\rangle,$$

средние P^1 и φ_j^1 пока не определены, функция F_3 определяется из уравнений: $\Delta_0 F_3(x_1, x_2) = \theta_3$, $\langle F_3\rangle = 0$.

Из условия разрешимости уравнения (8) находим P^0 : $P^0 = \text{const}$. Из (8) находим

$$\varphi_3^1 = \frac{1}{\nu^{*2}}\frac{d\varphi_s^0}{dz}G_s + \frac{1}{\nu^*}\langle\varphi_s^1\rangle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s} - \frac{\nu_1}{\nu^*}\varphi_3^0, \quad (10)$$

где функция G_s определяется как решение задачи

$$\Delta_0 G_s = \frac{\partial}{\partial x_s}(\theta_3\Delta_0\theta_3) - 2\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s\partial x_j}\frac{\partial\Delta_0\theta_3}{\partial x_j}, \quad \langle G_s\rangle = 0. \quad (11)$$

Приравнивая выражения при α^2 , из (2)–(4) выводим равенства:

$$i\omega_0^2\varphi_j^0(z) + V_3\frac{\partial\varphi_j^1}{\partial z} - \nu^*\Delta_0\varphi_j^2 - \nu_1\Delta_0\varphi_j^1 - \nu^*\frac{d^2\varphi_j^0}{dz^2} = -\frac{\partial P^2}{\partial x_j}, \quad (12)$$

$$i\omega_0^2\varphi_3^0 + V_3\frac{\partial\varphi_3^1}{\partial z} + \varphi_s^2\frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu^*\Delta_0\varphi_3^2 - \nu_1\Delta_0\varphi_3^1 - \nu_2\Delta_0\varphi_3^0 - \nu^*\frac{\partial^2\varphi_3^0}{\partial z^2} = -\frac{\partial P^1}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial\varphi_s^2}{\partial x_s} + \frac{\partial\varphi_3^1}{\partial z} = 0, \quad \langle\langle\varphi_k^2\rangle\rangle = 0. \quad (14)$$

Для нахождения среднего $\langle\varphi_j^1\rangle$ осредним уравнение (12) по переменным x_1, x_2 :

$$i\omega_0^2\varphi_j^0(z) - \nu^*\frac{d^2\varphi_j^0}{dz^2} + \frac{1}{\nu^*}a_{js}\frac{d^2\varphi_s^0}{dz^2} = 0, \quad (15)$$

где компоненты матрицы $A = \{a_{js}\}$ определяются формулой:

$$a_{js} = 2\left\langle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}\right\rangle - \delta_{js}\langle(\nabla_0\theta_3)^2\rangle. \quad (16)$$

Уравнение (15) имеет 2π -периодическое решение вида $\varphi_j^0 = C_j^0 e^{-imz}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие равенства нулю определителя системы

$$i\omega_0^2 C_j^0 + \nu^* m^2 C_j^0 - \frac{m^2}{\nu^*} a_{js} C_s^0 = 0.$$

Следовательно, получаем

$$(i\omega_0^2 + \nu^* m^2)^2 + \frac{m^4}{\nu^{*2}} \det A = 0 \quad (\det A < 0).$$

Отсюда находим $\omega_0^2 = 0$. Нулевой член разложения критического значения вязкости является собственным значением матрицы A : $AC^0 = \nu^{*2} C^1$ и

$$\nu^{*2} = \sqrt{-\det A} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}. \quad (17)$$

При $a_{12} \neq 0$ компоненты вектора C^0 определим по формулам

$$C_1^0 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\nu^{*2} - a_{11})^2}}, \quad C_2^0 = \frac{\nu^{*2} - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\nu^{*2} - a_{11})^2}}, \quad (18)$$

если же $a_{12} = 0$, то $C_1^0 = 1$, $C_2^0 = 0$ при $a_{11} > 0$ и $C_1^0 = 0$, $C_2^0 = 1$, когда $a_{11} < 0$.

Применив операцию взятия плоской дивергенции к уравнению (12), находим P^2 :

$$P^2 = \frac{2}{\nu^*} \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} Q_s - 2 \frac{d\langle \varphi_s^1 \rangle}{dz} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} + \langle P^2 \rangle, \quad (19)$$

где Q_s есть решение задачи

$$\Delta_0 Q_s = 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_j \partial x_s} \frac{\partial V_3}{\partial x_j} - \theta_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_s}, \quad \langle Q_s \rangle = 0.$$

Подставив полученное выражение P^2 в (12), для φ_j^2 получаем уравнение:

$$\nu^* \Delta_0 \varphi_j^2 = V_3 \frac{\partial \varphi_j^1}{\partial z} - \nu_1 \Delta_0 \varphi_j^1 - \nu^* \frac{d^2 \varphi_j^0}{dz^2} + \frac{2}{\nu^*} \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} \frac{\partial Q_s}{\partial x_j} - 2 \frac{d\langle \varphi_s^1 \rangle}{dz} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x_j \partial x_s}. \quad (20)$$

В осредненном по x_1, x_2 уравнении (2) выпишем слагаемые при α^3 :

$$\nu^* \frac{d^2 \langle \varphi_j^1 \rangle}{dz^2} - \frac{1}{\nu^*} a_{js} \frac{d^2 \langle \varphi_s^1 \rangle}{dz^2} = i\omega_0^3 \varphi_j^0(z) - \nu_1 \frac{d^2 \varphi_j^0}{dz^2} - \frac{\nu_1}{\nu^{*2}} a_{js} \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} + \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{d^3 \varphi_s^0}{dz^3} f_{js}, \quad (21)$$

где через f_{js} обозначено следующее выражение:

$$f_{js} = \langle \delta_{js} \theta_3^2 \Delta_0 \theta_3 - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \theta_3 \Delta_0 \theta_3 + 2 \frac{\partial Q_s}{\partial x_j} \theta_3 \rangle.$$

Среднее $\langle \varphi_j^1 \rangle$ имеет вид: $\langle \varphi_j^1 \rangle = \beta C_j^1 e^{-imz}$, где C^1 есть собственный вектор матрицы A : $AC^1 = -\nu^{*2} C^1$. Из условия разрешимости уравнения (21) получаем:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0, & \omega_0^3 &= -\frac{m^3}{\nu^{*2}} \xi_1, \\ \operatorname{Re} \beta &= 0, & \operatorname{Im} \beta &= -\frac{m}{2\nu^{*3}} \xi_2, \end{aligned}$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются из уравнения $f_{js}C_s^0 = \xi_1 C_j^0 + \xi_2 C_j^1$.

Если $\xi_1 \neq 0$, то происходит колебательная потеря устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05–01–00567, № 07–01–92213–НЦНИЛ) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ–5747.2006.1).

Список литературы

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости двумерного стационарного пространственно-периодического течения относительно длинноволновых возмущений // Совр. пробл. мех. сплош. среды: Тр. V Междунар. конф. Ростов н/Д, 2000. Т. 1. С. 119–123.
- [5] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Там же. С. 157–161.
- [6] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [7] Мелехов А. П., Ревина С. В. Неустойчивость двумерных стационарных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 170–173.

Melekhov A.P., Revina S.V. *The stability problem of 3-D shearing motion streams of viscous flow with respect to long-wave length disturbances.* We consider the stability problem of stationary 3-D spatially-periodic stream $\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2))$, $\langle V_3 \rangle = 0$, with respect to long-wave length disturbances, when one of the periods goes to infinity (the wave number α goes to zero). The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained. When nondegeneracy conditions are fulfilled the oscillating loss of stability takes place.

НЕРЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ (RES 0) ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ БИФУРКАЦИЙ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА

Моршнева И. В., Овчинникова С. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются пересечения бифуркаций в задаче Куэтта-Тейлора о течении вязкой несжимаемой жидкости между твердыми соосными вращающимися цилиндрами. Эта задача инвариантна относительно линейного ортогонального действия группы $SO(2) \times O(2)$ и имеет точное решение — чисто вращательное течение Куэтта.

Точке пересечения нейтральных кривых (точке пересечения бифуркаций) в задаче Куэтта-Тейлора отвечает несколько независимых нейтральных мод. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности такой точки, становится возможным сильное взаимодействие всех этих (точнее, слегка измененных) мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии.

Построению нелинейной системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта-Тейлора и изучению различных возможных режимов течения для значений параметров вблизи точки пересечения двух нейтральных кривых посвящены работы [1]–[3]. Однако в этих работах не рассмотрен ряд специфических резонансных ситуаций, которые были указаны в [4]–[6].

Резонансные слагаемые амплитудной системы подразделяются на *обязательные*, отвечающие обязательным, всегда присутствующим резонансам, и дополнительные, возникающие при выполнении специальных *резонансных соотношений* между параметрами задачи. В окрестности точек пересечения бифуркаций несимметричных мод (не обладающих вращательной симметрией) имеется шесть резонансных соотношений, влияющих на ведущие кубические члены амплитудной системы. Соответствующие им амплитудные системы различаются дополнительными слагаемыми.

В работе рассмотрен *нерезонансный* случай (Res 0), когда в амплитудной системе присутствуют лишь обязательные резонансные слагаемые. Перечислены стационарные решения амплитудной системы на инвариантных подпространствах. Условия их существования и устойчивости представляют собой соотношения между коэффициентами амплитудной системы. Приведены результаты расчета точек резонанса Res 0. Для каждой из этих точек вычислены коэффициенты амплитудной системы. В некоторых точках Res 0 проведен анализ условий существования и устойчивости стационарных решений амплитудной системы на инвариантных подпространствах.

Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными твердыми цилиндрами радиусов r_1, r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно, описывается безразмерными уравнениями Навье-Стокса. Предполагается, что решения уравнений движения имеют периодические вдоль оси цилиндров (оси z) поля скорости и давления с заданным периодом $2\pi/\alpha$. Система Навье-Стокса зависит от четырех безразмерных параметров: α — осевого волнового числа, $\eta = r_2/r_1$ — отношения радиусов цилиндров и двух чисел Рейнольдса $R_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu$, $R_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu$ (ν — коэффициент кинематической вязкости).

Хорошо известно, что при любых значениях параметров существует точное стационарное решение уравнений движения — течение Куэтта. Устойчивость течения Куэтта может быть исследована методом линеаризации [7].

Как система Навье-Стокса, так и линеаризованная на течении Куэтта задача обладают группой симметрии $SO(2) \times O(2)$ — инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси z и преобразования инверсии. Симметрия задачи позволяет разыскивать нормальные колебания в виде

$$\Phi(r, \theta, z, t) = e^{i\omega t - i(m\theta + k\alpha z)} \varphi(r),$$

где m (целое) — азимутальное, k (целое) — осевое квантовые числа.

Точка пересечения (R_{1*}, R_{2*}) двух нейтральных кривых определяется такими критическими значениями чисел Рейнольдса R_{1*} и R_{2*} , при которых линеаризованная задача имеет нетривиальные решения (нейтральные моды) с различными азимутальными (m, n) и осевыми (k, l) квантовыми числами. В каждой точке пересечения нейтральных кривых (R_{1*}, R_{2*}) таких независимых нейтральных мод четыре:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{0m}(r, \theta, z), & \Phi_2(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{1m}(r, \theta, z), \\ \Phi_3(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{0n}(r, \theta, z), & \Phi_4(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{1n}(r, \theta, z), \end{aligned}$$

где $\Phi_{0m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta + k\alpha z)} \varphi_{0m}(r)$, $\Phi_{0n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta + l\alpha z)} \varphi_{0n}(r)$, $\Phi_{1m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta - k\alpha z)} \varphi_{1m}(r)$, $\Phi_{1n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta - l\alpha z)} \varphi_{1n}(r)$, m, n — азимутальные, k, l — осевые квантовые числа.

Малая окрестность точки пересечения (R_{1*}, R_{2*}) состоит из точек $R_1 = R_{1*} + k_1 \varepsilon^2$ и $R_2 = R_{2*} + k_2 \varepsilon^2$, где ε — малый параметр, k_1, k_2 — константы надкритичности ($k_1^2 + k_2^2 = 1$), которые можно выбирать произвольно. Далее изучаются возможные бифуркации, которые возникают при обходе точки пересечения в плоскости параметров надкритичности (при повороте вектора (k_1, k_2)) по плану В.И. Арнольда [8].

Асимптотическое решение уравнений движения в малой окрестности (R_{1*}, R_{2*}) разыскивается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{00} + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v}_{00} — вектор скорости течения Куэтта при R_{1*} и R_{2*} , символ $*$ означает комплексное сопряжение, $\Phi = \xi_{0m}(\tau)\Phi_1 + \xi_{1m}(\tau)\Phi_2 + \xi_{0n}(\tau)\Phi_3 + \xi_{1n}(\tau)\Phi_4$, $\xi_{0m}(\tau)$, $\xi_{1m}(\tau)$, $\xi_{0n}(\tau)$, $\xi_{1n}(\tau)$ — неизвестные комплексные амплитуды, зависящие от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$.

При малых ε с помощью теоремы о центральном многообразии или метода осреднения по быстрому времени строятся системы комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд. Впервые такие амплитудные системы для задачи Куэтта-Тейлора были построены в работах [1]–[3]. Вид амплитудных систем в точках пересечения неосесимметричных мод зависит от соотношений между азимутальными m и n , осевыми k и l квантовыми числами, а иногда и между фазовыми частотами ω_m и ω_n нейтральных мод. Имеется шесть резонансных соотношений, которым отвечают амплитудные системы с различными дополнительными слагаемыми. В данной работе рассматривается нерезонансный случай $\text{Res } 0$, когда эти соотношения не выполняются. Соответствующая система амплитудных уравнений

содержит лишь обязательные резонансные слагаемые и имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_{0m} &= \xi_{0m}(\sigma + A|\xi_{0m}|^2 + B|\xi_{1m}|^2 + C|\xi_{0n}|^2 + D|\xi_{1n}|^2), \\
 \dot{\xi}_{1m} &= \xi_{1m}(\sigma + B|\xi_{0m}|^2 + A|\xi_{1m}|^2 + D|\xi_{0n}|^2 + C|\xi_{1n}|^2), \\
 \dot{\xi}_{0n} &= \xi_{0n}(\mu + P|\xi_{0m}|^2 + S|\xi_{1m}|^2 + U|\xi_{0n}|^2 + V|\xi_{1n}|^2), \\
 \dot{\xi}_{1n} &= \xi_{1n}(\mu + S|\xi_{0m}|^2 + P|\xi_{1m}|^2 + V|\xi_{0n}|^2 + U|\xi_{1n}|^2).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Коэффициенты этой системы выражаются через нейтральные моды Φ_{jp} ($j = 0, 1; p = m, n$), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же нейтральных мод. Выражения для коэффициентов приведены в работе [6].

Точки резонанса $\text{Res } 0$ образуют поверхности (двухпараметрические семейства) в четырехмерном пространстве Π параметров задачи R_1, R_2, η, α . На рис. 1 пред-

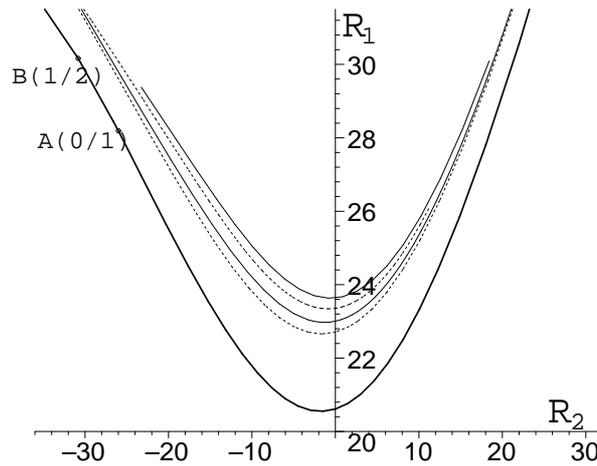


Рис. 1. Нижняя сплошная кривая — кривая первого перехода, B — точка пересечения кривых первой потери устойчивости для $m = 1$ и $m = 2$, точка A — для $m = 0$ и $m = 1$. Все остальные кривые состоят из точек $\text{Res } 0$. Нижняя штриховая линия отвечает квантовым числам $m/n = 1/1$ и $k/l = 1/2$, следующая сплошная — числам $m/n = 1/2$ и $k/l = 1/2$, следующая штриховая — $m/n = 1/2$ и $k/l = 2/1$ и верхняя сплошная — числам $m/n = 2/2$ и $k/l = 1/2$.

ставлены кривая первой потери устойчивости и кривые, состоящие из точек резонанса $\text{Res } 0$, для отношения радиусов $\eta = 1.2$. Нижняя сплошная кривая первого перехода, отвечает числам Рейнольдса $R_1 = R_{1*}(\alpha_*, R_2) = \min_{\alpha} R_{1*}(\alpha, R_2)$. На этой кривой до точки B ($R_2 < -31.18$) наиболее опасны (им отвечает наименьшее критическое значение R_{1*}) возмущения с азимутальным квантовым числом $m = 2$, между точками B и A ($-31.18 < R_2 < -26.27$) — с $m = 1$, а за точкой A ($R_2 > -26.67$) — с $m = 0$. Все остальные кривые состоят из точек резонанса $\text{Res } 0$. Нижняя штриховая линия отвечает квантовым числам $m/n = 1/1$ и $k/l = 1/2$,

следующая сплошная — числам $m/n = 1/2$ и $k/l = 1/2$, следующая штриховая — $m/n = 1/2$ и $k/l = 2/1$ и верхняя сплошная — числам $m/n = 2/2$ и $k/l = 1/2$. Заметим, что точки $\text{Res } 0$ существуют для цилиндров, вращающихся в любых направлениях.

При определенных значениях параметров надкритичности k_1, k_2 у амплитудной системы помимо тривиального решения, отвечающего течению Куэтта, существуют другие предельные режимы. Некоторые из них являются равновесиями на инвариантных подпространствах. Этим равновесиям отвечают стационарные, периодические, квазипериодические режимы уравнений движения (системы Навье-Стокса). Перечислим их:

1. *Инверсионно - связанная пара спиральных волн.* Могут существовать две пары таких решений — спиральные m - и n - волны, представляющие собой вторичные периодические режимы.

2. *Азимутальные волны.* Азимутальная волна представляет собой вторичный инверсионно-симметричный периодический режим. Таких решений может быть два — азимутальные m - и n - волны. Азимутальные m - волны (или n -волны) представляют собой нелинейную смесь пары инверсионно-связанных спиральных m - волн (или n -волн), бегущих вдоль оси цилиндров z навстречу друг другу.

Такие режимы (спиральные и азимутальные волны) возникают и при переходах общего положения, вне точек пересечения нейтральных кривых.

3. *Инверсионно-связанные двойные спиральные волны.* Может существовать два двухпараметрических семейства таких смешанных режимов. Они представляют собой нестационарные двухчастотные (с частотами ω_m и ω_n) квазипериодические режимы системы Навье-Стокса. Двойные спиральные волны первого семейства представляет собой нелинейную смесь спиральной m - волны и спиральной n - волны, бегущих вдоль оси z навстречу друг другу, а режимы второго семейства — смесь спиральных волн, бегущих в одном направлении.

4. *Суперпозиция азимутальной m - и азимутальной n -волн.* Каждое из этих решений представляет собой нестационарный двухчастотный квазипериодический режим — нелинейную смесь бегущих вдоль оси z азимутальных m - и n - волн.

5. *Равновесия лишь с одной нулевой амплитудой на инвариантных трехмерных подпространствах* Таким равновесиям отвечают трехчастотные квазипериодические режимы системы Навье-Стокса.

6. *Равновесия общего положения* Равновесиям общего положения отвечают нестационарные четырехчастотные квазипериодические решения системы Навье-Стокса.

Существование и устойчивость перечисленных решений зависит от значений коэффициентов амплитудных уравнений, параметров надкритичности и некоторых соотношений между ними. Для всех точек $\text{Res } 0$, изображенных на рис. 1, рассчитаны значения коэффициентов амплитудной системы (2).

Вычисления, проведенные для рассчитанных точек резонанса $\text{Res } 0$, показывают, что для $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ могут существовать различные устойчивые или неустойчивые спиральные и азимутальные волны. Для некоторых точек $\text{Res } 0$ найдены области в плоскости надкритичности (k_1, k_2) , где существуют устойчивые или неустойчивые двойные спиральные волны и суперпозиция азимутальных

волн.

Работа выполнена в рамках ЕНО “Регулярная и хаотическая гидродинамика” (грант РФФИ № 07-01-92213 НЦНИЛ_а), а также при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Ш-5747.2006.1.

Список литературы

- [1] В. И. Юдович. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости. Шестой всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов, с. 661.
- [2] P.Chossat, Y. Demay and G. Iooss. Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette-Taylor. Arch. Rational Mech. Anal., 99, 213–248, 1987.
- [3] P.Chossat and G. Iooss. The Couette-Taylor problem. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] С. Н. Овчинникова, В.И. Юдович. Резонансные режимы при пересечении бифуркаций. Труды международной школы-семинара “Симметрия и косимметрия в динамических системах физики и механики”. SCDS-II 2001. С. 148–153.
- [5] V.I. Yudovich, S.N. Ovchinnikova. Resonances in the intersections of bifurcation in the Couette-Taylor problem. Patterns and Waves, A. Abramian, S. Vakulenko, V. Volpert(Eds.), Saint Petersburg, 2003, pp. 55–77.
- [6] В.И. Юдович, С. Н. Овчинникова. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта-Тейлора. I. Нерезонансный случай. Деп. в ВИНТИ, 6.04.05, № 458, В-2005, 33 с.
- [7] В. И. Юдович. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.
- [8] В.И. Арнольд. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. Успехи матем. наук, 1972. Т. 27. В. 5. С. 119–184.

Morshneva I.V., Ovchinnikova S.N. *Nonresonance case (Res 0) in the intersection of bifurcations in the Couette-Taylor problem.* The present paper is devoted to bifurcations in the Couette flow between rigid co-axial rotating cylinders. We study interaction of nonaxisymmetric neutral modes in the case of resonance Res 0. We present the results of numerous calculations of intersections for two neutral curves, give the list of some solutions of amplitude system which correspond to the stationary, periodic and quasi-periodic regimes of Navier-Stokes equations and investigate numerically their existence and stability.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА НА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Новосядлый В. А.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Изучается задача о возбуждении волн вертикальными поступательными колебаниями в двухслойной системе вязких несмешивающихся жидкостей. Поверхность раздела деформируемая, с коэффициентом поверхностного натяжения, линейно зависящим от температуры. Выведены явные формулы для дисперсионных соотношений в случае различных законов колебаний. Проведены расчеты и сравнения с результатами других авторов, получен выход на высокочастотную асимптотику. Наличие термокапиллярного эффекта приводит к появлению колебательной неустойчивости, помимо синхронной и субгармонической. Кроме того, колебательная неустойчивость в такой системе может возбуждаться раньше, чем синхронная или субгармоническая. Найдены значения параметров, при которых это становится возможным.

Введение

В данной статье рассматривается влияние вертикальной поступательной вибрации вида $x_3 = af(\omega t)$ конечной частоты ω на возникновение конвекции в двухслойной системе однородных вязких несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела. Внешние границы — твердые стенки, на которых заданы условия теплообмена общего вида.

В работе применяется подход, развитый в работах [1]–[2] для однослойной изотермической жидкости и одночастотной функции колебаний, в [3] для многочастотной функции колебаний, и в [4] для конвекции Марангони в однослойной системе однородной жидкости. К спектральной задаче, полученной при исследовании устойчивости квазиравновесия, применяются теория Флоке и метод Фурье. В результате для коэффициентов Фурье получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Если вторая производная $f''(\omega t)$ имеет конечный ряд Фурье, то решение задачи сводится к нахождению собственных значений матрицы. Если же она является гармонической, то бесконечная система получается трехдиагональной, и к ней применяется метод цепных дробей ([1]–[2]) для получения дисперсионных соотношений.

Во всех случаях выписаны явные формулы — либо для элементов матрицы, либо для элементов цепных дробей. Ввиду громоздкости они здесь не приводятся, подробный вывод приведен в [5]. Проведены расчеты, найдены значения частоты колебаний, соответствующих выходу на высокочастотную асимптотику, полученную в [6]–[8].

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев вязких несмешивающихся жидкостей, ограниченную снаружи твердыми или “мягкими” стенками и имеющую деформируемую границу раздела с коэффициентом поверхностного натяжения,

линейно зависящего от температуры по закону $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T T$. Жидкости однородны. Координаты будем обозначать x_1, x_2, x_3 , ось x_3 совпадает с вектором силы тяжести. Температура плоской границы раздела принята за начало отсчета, и на ней же выбрано начало координат, при этом плоскость $x_3 = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью раздела. Предполагается, что система как целое совершает вертикальные поступательные колебания по закону $x_3 = af(\omega t)$, где f — периодическая функция с нулевым средним. Безразмерные уравнения конвекции, записанные в подвижной системе координат, имеют вид [9]–[10]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial t} + (\mathbf{v}^k \cdot \nabla) \mathbf{v}^k = -\frac{1}{\rho_k} \nabla p^k + \nu_k \Delta \mathbf{v}^k + g(t) \boldsymbol{\gamma}, \quad g(t) = Q_0 - a\omega^2 f''(\omega t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^k = 0, \quad \frac{\partial T^k}{\partial t} + (\mathbf{v}^k \cdot \nabla) T^k = C_k \Delta T^k, \quad (2)$$

$$x_3 = \xi(x_1, x_2, t) : \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2, \quad \mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\ell} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad T^1 = T^2, \quad \varkappa_1 \frac{\partial T^1}{\partial \mathbf{n}} = \varkappa_2 \frac{\partial T^2}{\partial \mathbf{n}} \quad (3)$$

$$-(p^1 - p^2) n_i + (\tau_{ij}^1 - \tau_{ij}^2) n_j = -2K \sigma n_i - (\nabla_\Gamma \sigma)_i, \quad \sigma = C - MT, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\ell} = (-\xi_{x_1}, -\xi_{x_2}, 1), \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\ell}}{|\boldsymbol{\ell}|}, \quad \nabla_\Gamma(\sigma)_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} n_k n_i, \quad (5)$$

$$2K = \nabla_2 \frac{\nabla_2 \xi}{\sqrt{1 - |\nabla_2 \xi|^2}}, \quad \nabla_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad (6)$$

$$x_3 = h_1, -h_2 : \mathbf{v}^k = 0, \quad B_{1k} \frac{\partial T^k}{\partial x_3} + B_{0k} T^k = b_k. \quad (7)$$

Безразмерные величины введены с использованием масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры величины $\mathcal{L}, T, \mathcal{L}T^{-1}, \rho L^2 T^{-2}, A\mathcal{L}$. Здесь ρ — характерный масштаб плотностей, A — характерный вертикальный градиент температур. Выбор конкретных значений масштабов будет сделан позднее, поскольку в различных случаях их целесообразнее выбирать по-разному. $\mathbf{v}^k = (v_1^k, v_2^k, v_3^k)$ — относительные скорости, p^k — давления, T^k — температуры, ρ_k — плотности, $\nu_k, C_k = \chi_k T / \mathcal{L}^2$ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно. Функция $g(t)$ — переменное ускорение силы тяжести, $Q_0 = g_0 T^2 / \mathcal{L}$ — его средняя часть, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ — орт оси x_3 , $\boldsymbol{\ell}$ — вектор нормали к поверхности раздела, направленный внутрь первой жидкости, \mathbf{n} — ее орт $\boldsymbol{\tau}^k$ — тензоры вязких напряжений, K — средняя кривизна, μ_k и \varkappa_k — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, $C = \sigma_0 T^2 / \rho \mathcal{L}^3$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $M = \sigma_T A T^2 / \rho \mathcal{L}^2$ — число Марангони.

Квазиравновесное решение. Спектральная задача для возмущений

Задача (1)–(7) имеет решение, соответствующее относительному равновесию и плоской границе раздела:

$$\mathbf{v}^{k0} = 0, \quad \xi^0 = 0, \quad T^{0k} = A_k z, \quad p^{0k} = \rho_k z g(t)$$

Линеаризуем задачу (1)–(7), положив $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^{0k} + \mathbf{u}^k$, $\xi = \xi^0 + \eta$, $p^k = P^k + p^{0k}$, $T^k = \theta^k + T^{0k}$. Считая возмущения плоскими, вводим функции тока, полагая $u_1^k = \partial \psi^k / \partial x_3$, $u_3^k = -\partial \psi^k / \partial x_1$, и исключаем давление. Далее представляем возмущения

в нормальной форме:

$$(\psi^k(x_1, x_3, t), \theta^k(x_1, x_3, t), \eta(x_1, t)) = e^{i\alpha x_1}(\psi^k(x_3, t), i\alpha\theta^k(x_3, t), i\alpha\eta(t))$$

В результате приходим к спектральной задаче:

$$L\psi_t^k = \nu_k L^2\psi^k, \quad \theta_t^k - A_k\psi^k = C_k L\theta^k, \quad L = (D^2 - \alpha^2), \quad D = \partial/\partial x_3, \quad (8)$$

$$x_3 = 0: \quad \psi^1 = \psi^2, \quad D\psi^1 = D\psi^2, \quad \psi^k = -\eta_t, \quad (9)$$

$$\mu_1 D^2\psi^1 - \mu_2 D^2\psi^2 + \alpha^2(\mu_1 - \mu_2)\psi^1 = -\alpha^2 M(\theta^k + A_k\eta), \quad (10)$$

$$3\alpha^2(\mu_1 - \mu_2)D\psi^1 + \rho_1 D\psi_t^1 - \rho_2 D\psi_t^2 - (\mu_1 D^3\psi^1 - \mu_2 D^3\psi^2) + \\ + \alpha^2(g(t)(\rho_1 - \rho_2)\eta + C\alpha^2\eta) = 0, \quad \theta^1 + A_1\eta = \theta^2 + A_2\eta, \quad \varkappa_1 D\theta_n^1 = \varkappa_2 D\theta_n^2, \quad (11)$$

$$x_3 = h_1, -h_2: \quad \psi^k = 0, \quad D\psi^k = 0, \quad B_{1k}D\theta^k + B_{0k}\theta^k = 0 \quad (12)$$

Вывод дисперсионного соотношения

Далее будем считать, что функция $f''(\omega t)$ имеет разложение Фурье: $f''(\omega t) = \sum f_j e^{ij\omega t}$ (суммирование по индексу здесь и далее от $-\infty$ до $+\infty$). Решение задачи (8)–(12) ищем в виде:

$$(\psi^k(x_3, t), \theta^k(x_3, t), \eta(t)) = e^{\lambda t} \sum (\bar{\psi}_n^k(x_3), \bar{\theta}_n^k(x_3), c_n) e^{in\omega t}$$

где λ — показатель Флоке — неизвестное комплексное число, определяющее поведение возмущений по времени. Для неизвестных $\bar{\psi}_n^k(x_3)$, $\bar{\theta}_n^k(x_3)$, c_n получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений ($\lambda_n = \lambda + in\omega$, $\Omega^2 = C\alpha^2 + Q_0(\rho_1 - \rho_2)$, черту сверху далее опускаем):

$$\lambda_n \rho_k L\psi_n^k = \mu_k L^2\psi_n^k, \quad \lambda_n \theta_n^k - A_k\psi_n^k = C_k L\theta_n^k, \\ x_3 = 0: \quad \psi_n^1 = \psi_n^2, \quad D\psi_n^1 = D\psi_n^2, \quad \psi_n^k = -\lambda_n c_n, \\ \mu_1 D^2\psi_n^1 - \mu_2 D^2\psi_n^2 + \alpha^2(\mu_1 - \mu_2)\psi_n^1 = -\alpha^2 M(\theta_n^k + A_k c_n), \\ (3\alpha^2(\mu_1 - \mu_2) + \lambda_n(\rho_1 - \rho_2))D\psi_n^1 - (\mu_1 D^3\psi_n^1 - \mu_2 D^3\psi_n^2) + \\ - a\omega^2\alpha^2(\rho_1 - \rho_2) \sum f_j c_k + \alpha^2\Omega^2 c_n = 0, \quad j + k = n \quad (13)$$

$$\theta_n^1 + A_1 c_n = \theta_n^2 + A_2 c_n, \quad \varkappa_1 D\theta_n^1 = \varkappa_2 D\theta_n^2, \\ x_3 = h_1, -h_2: \quad \psi_n^k = 0, \quad D\psi_n^k = 0, \quad B_{1k}D\theta_n^k + B_{0k}\theta_n^k = 0$$

Теперь для каждого значения n выразим неизвестные функции ψ_n^k и θ_n^k через c_n и подставим их в краевое условие (13). В результате для коэффициентов Фурье c_n получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$M_n c_n = -a\omega^2\alpha(\rho_1 - \rho_2) \sum f_j c_k, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad j + k = n \quad (14)$$

Как было указано в [4], вид матрицы системы (14) зависит от разложения функции $f''(\omega t)$ в ряд Фурье. Если число коэффициентов Фурье этой функции конечно, то критические значения амплитуды колебаний можно определить, решая задачу на собственные значения матрицы, считая параметр $a\omega^2\alpha(\rho_1 - \rho_2)$ характеристическим значением. В случае, когда $f(\omega t) = \cos \omega t$, матрица системы становится трехдиагональной и оказывается возможным записать дисперсионное

соотношение для λ в явном виде с использованием цепных дробей [1]– [2]. Подробно вывод коэффициентов изложен в [5].

Численные результаты

Полученные формулы позволяют рассчитать нейтральные кривые $a^*\omega(\omega)$ ($a^* = \min_{\alpha} a(\alpha)$) в случаях синхронного, субгармонического резонансов, квазипериодических возмущений, а также амплитуду поверхности раздела и изолинии функций тока и температуры. Для этого численно решалось уравнение (14) в виде цепных дробей в случае $f(\omega t) = \cos \omega t$, или же находились собственные значения системы (14). Масштабы были выбраны следующим образом: $T = \frac{\rho \mathcal{L}^2}{\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2}$, $\rho = \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2$, $\mathcal{L} = H_1 + H_2$. Заметим, что теперь имеют место соотношения: $h_1 + h_2 = \rho_1 + \rho_2 = 1 = \mu_1 + \mu_2 = 1$. Подобным образом параметры выбраны в [11]; такой подход для исследования двухслойной системы дает возможность уменьшить число изучаемых параметров.

Для расчетов была выбрана система силиконовое масло 10cSt–флюоринерт FC70 (флюоринерт заполняет нижний слой), суммарной толщиной 5 мм. Данные жидкости использовались для расчетов неустойчивости Рэлея-Бенара-Марангони в [12], а также в [6], [7] для исследования влияния высокочастотной вибрации на конвекцию Марангони. Глубина нижнего слоя $h_1 = 0.6$. При данной конфигурации в системе присутствует колебательная термокапиллярная неустойчивость при нагреве сверху. Получен выход на высокочастотную асимптотику из [6], [7] при $\omega \approx 10^4$.

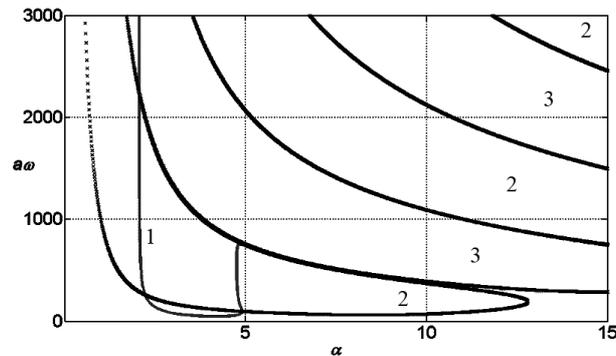


Рис. 1. Силиконовое масло — флюоринерт. $M = -54608.6$, $w = 300$. Области неустойчивости: 1 — колебательной, 2 — субгармонической, 3 — синхронной.

На рис. 1 показана картина устойчивости двухслойной системы в зависимости от амплитуды колебаний при выбранной частоте. Ведущим типом неустойчивости является колебательная.

Исследование проводилось при частичной поддержке грантов РФФИ (05-01-00587, 07-0100099-а) и гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5747.2006.1).

Список литературы

- [1] *В.И. Юдович.* Метод цепных дробей в спектральной теории линейных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами // Юбилейный сборник, посвященный 75-летию В.А. Какичева. Великий Новгород. 2001. с. 20–24.
- [2] *Зеньковская С.М., Юдович В.И.* Метод интегро-дифференциальных уравнений и цепных дробей в задаче о параметрическом возбуждении волн // Журн. выч. матем. и матем. физ. 2004. № 4. С. 370–384.
- [3] *C. Huepe, Y. Ding, P. Umbanhowar, M. Silber* Forcing function control of Faraday wave instabilities in viscous shallow fluids // Phys. Rev. E 73, 016310 (2006) 11 p.
- [4] *Зеньковская С.М., Новосядлый В.А., Шлейкель А.Л.* Влияние вертикальных колебаний на возникновение термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. // ПММ. Т. 71, вып. 2. 2007. С. 277–288.
- [5] *Новосядлый В.А.* Действие вертикальных поступательных вибраций конечной частоты на возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойной системе // Деп. в ВИНТИ, 2007 г.
- [6] *Зеньковская С.М., Новосядлый В.А.* Влияние высокочастотной вибрации произвольного направления на возникновение конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Деп. в ВИНТИ 29.06.2007, № 683-В 2007, 60 с.
- [7] *Zenkovskaya S.M., Novosiadlyy V.A.* Influence of high-frequency vibration on the onset of convection in two-layer system // C. R. Mecanique (2007), doi:10.1016/j.crme.2007.10.009.
- [8] *С.М. Зеньковская, А.Л. Шлейкель.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. Т. 66, вып. 4. 2002. С. 573–583.
- [9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред // М.: Гостехиздат, 1953.
- [10] *Пухначев В.В.* Движение вязкой жидкости со свободными границами: Учеб. пособие // Новосиб. ун-т. Новосибирск, 1989. 96 с.
- [11] *Бирюх Р.В., Бушуева С.В.* Термокапиллярная неустойчивость в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 13–20.
- [12] *Zhou B., Liu Q., Tang Z.* Rayleigh-Marangoni-Benard instability in two-layer fluid system // Acta Mechanica Sinica 20, 4 (2004), pp. 366–373.

Novosiadlyy V.A. *Parametric wave excitation under influence of thermocapillary effect.* Parametric wave excitation in two-layer system of immiscible fluids by vertical progressive oscillations is studied. Interface is deformable with surface tension coefficient linearly dependent on temperature. Explicit expressions for dispersion relations were obtained for different cases of oscillation functions. Comparison with results of other authors was made and correspondence with high-frequency asymptotics results was achieved. Thermocapillary effect can lead to appearance of oscillatory instability, which can become leading. Parameters, corresponding to leading oscillatory instability, were calculated.

ОТРЫВНОЙ УДАР ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Норкин М. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована плоская задача об отрывном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности неоднородной и несжимаемой жидкости. Особенность данной задачи заключается в том, что область контакта тела с жидкостью заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости после удара. Вследствие этого поставленная задача — нелинейна и относится к классу задач со свободными границами.

Рассматривается плоская задача об ударе эллиптического цилиндра, наполовину погруженного в несжимаемую неоднородную жидкость, наполняющую ограниченный бассейн. Предполагается, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности цилиндра (удар с отрывом). Согласно [1] математическая постановка данной задачи имеет вид:

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \Phi \right) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n, \quad \Phi \geq 0 \quad r \in S_{11}, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \geq V_n, \quad \Phi = 0 \quad r \in S_{12}, \quad (3)$$

$$\Phi = 0, \quad r \in S_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \quad (5)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$V_n = v_x n_x + v_y n_y + \omega (y n_x - x n_y), \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\rho} (\nabla \Phi)^2 dD < \infty. \quad (8)$$

Здесь $\rho = \rho(x, y, z)$ — известная функция — распределение плотности после удара, совпадающее с распределением плотности до удара, Φ — импульсивное давление; D — область, занятая жидкостью; $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$ — погруженная в жидкость половина эллипса, причем S_{11} — часть границы на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а S_{12} — зона отрыва; S_2 — свободная поверхность жидкости; S_3 — неподвижная твердая граница бассейна; v_x, v_y, ω — поступательные вдоль осей x и y и угловая скорости, приобретенные эллипсом в результате удара; $n = (n_x, n_y)$ — вектор нормали к границе тела, направленный внутрь области D . Условие (6)

добавляется в случае неограниченной жидкости. Ограничение (8) является достаточным и физически оправданным требованием регулярности решения данной задачи вблизи особых точек границы области D . Теорема существования и единственности решения задачи (1)–(8) доказана в [1]. После решения задачи (1)–(8) скорости жидких частиц сразу после удара находятся из уравнения: $\rho u = -\nabla\Phi$, где u — приращение скорости в результате удара.

Для полной постановки задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса плавающего тела при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и точкой его приложения с одной стороны и векторами поступательной и угловой скорости, приобретенными телом в результате удара, с другой:

$$\bar{G} = - \int_{S_1} \Phi \bar{n} ds + \bar{P}; \quad \bar{M} = - \int_{S_1} \Phi \bar{R} \wedge \bar{n} ds + \bar{R}_0 \wedge \bar{P}, \quad (9)$$

где \bar{G} — количество движения твердого тела; \bar{M} — главный момент количества движения тела относительно начала координат; \bar{P} — импульс внешней ударной силы, приложенный к телу в точке с радиус-вектором \bar{R}_0 .

Важно подчеркнуть, что область контакта тела с жидкостью (равно как и зона отрыва) заранее неизвестна и подлежит определению вместе с импульсивным давлением Φ . На основании этого поставленная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Наряду с задачей (1)–(8) рассмотрим линейную смешанную краевую задачу в области D :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla W \right) = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial n} = f, \quad r \in S_1, \quad W = 0, \quad r \in S_2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \quad W \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Пусть $K: L_2(S_1) \rightarrow L_2(S_1)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial n}$ на S_1 решение задачи (10)–(12) на S_1 :

$$W = K(f). \quad (13)$$

С учетом (13) граничные условия (2), (3) приводят к следующим односторонним ограничениям для новой функции u , определенной на S_1 :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + V_n = -u, \quad (14)$$

$$K(u) \geq -K(V_n), \quad u = 0, \quad r \in S_{11}, \quad (15)$$

$$K(u) = -K(V_n), \quad u \geq 0, \quad r \in S_{12}. \quad (16)$$

Естественно предположить, что существует область $S_0 = \{M: K(V_n) < 0\}$, $K(V_n) \geq 0$ при $M \notin S_0$ ($S_0 \subset S_1$). Условие $K(V_n) \geq 0$ на всей границе S_1 соответствует задаче о безотрывном ударе плавающего тела.

Далее, следуя статье [2], введем в рассмотрение нелинейные операторы v^- и v^+ :

$$v^- = v^-(M) = \infty\{v(M), 0\}, \quad v^+ = v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}, \quad (17)$$

$$v(M) = v^-(M) + v^+(M)$$

и рассмотрим относительно неизвестной функции v нелинейное операторное уравнение:

$$Tv = 0, \quad Tv = \mu v^- + K(v^+) + K(V_n), \quad (18)$$

где μ — произвольный положительный параметр. Справедливо следующее утверждение.

Если v^* — решение уравнения (18), то $(u = v^{*+}, S_{12} = \{M: v^* \geq 0\})$ — решение системы (15), (16), причем $S_{12} \neq \emptyset$ при $S_0 \neq \emptyset$; обратно, если (u, S_{12}) — решение системы (15), (16), то функция

$$v^* = -\mu^{-1}K(V_n) + u - \mu^{-1}K(u), \quad M \in S_1 \quad (19)$$

— решение уравнения (18). Область отрыва S_{12} может быть многосвязной.

Доказательство этого утверждения, а также существование единственного решения уравнения (18) в пространстве $L_2(S_1)$ при любом $\mu > 0$ проводится в полной аналогии со статьей [2]. Произвольность параметра μ объясняется следующим образом: если v_1^* и v_2^* — решения уравнения (18), то $v_1^{*+} = v_2^{*+}$.

Таким образом, для решения системы (15)–(16) достаточно найти решение v^* нелинейного операторного уравнения (18). При этом неизвестная заранее зона отрыва S_{12} определяется как множество точек $M \in S_1$, для которых выполняется неравенство: $v^*(M) \geq 0$.

После решения нелинейного уравнения (18) функция Φ на границе S_1 находится по формуле:

$$\Phi = K(v^{*+} + V_n).$$

В дальнейшем будет рассматриваться случай экспоненциально стратифицированной жидкости

$$\rho = \rho_0 e^{2ky}, \quad (20)$$

где k — некоторая постоянная. При $k = 0$ получается однородная жидкость.

Для стратифицированной плотности уравнение (1) принимает вид:

$$\Delta\Phi - 2k\Phi_y = 0. \quad (21)$$

Замена

$$W = e^{ky}\chi \quad (22)$$

приводит задачу (21), (11)–(12) к следующей краевой задаче:

$$\Delta\chi - k^2\chi = 0, \quad (23)$$

$$-\left[\frac{\partial\chi}{\partial n} + kn_y\chi\right] = \rho_0 e^{ky} f, \quad r \in S_1, \quad \chi = 0, \quad r \in S_2, \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial\chi}{\partial n} + kn_y\chi\right] = 0, \quad r \in S_3, \quad e^{ky}\chi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Таким образом, построение оператора K сводится к решению смешанной краевой задачи (23)–(25) для любой заданной функции f и определению на основе полученного решения функции W на границе S_1 по формуле (22).

В случае неограниченной жидкости для оператора K справедливо представление:

$$K(f)(M) = e^{ky}\chi(M), \quad M \in S_1, \quad (26)$$

$$\chi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{S_1} g_0(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial\chi(\xi, \eta)}{\partial n} ds_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \chi(\xi, \eta) \frac{\partial g_0(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds_\zeta, \quad (27)$$

где $g_0(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина для полуплоскости, представимая в виде ($K_0(x)$ — функция Макдональда):

$$g_0(x, y; \xi, \eta) = K_0(|k|\rho_1) - K_0(|k|\rho_2), \quad (28)$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}. \quad (29)$$

Выражая из граничного условия (24) нормальную производную $\partial\chi/\partial n$ через функцию χ , получим для определения функции χ на границе S_1 интегральное уравнение второго рода:

$$\begin{aligned} \chi(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \chi(\xi, \eta) \left[kn_\eta g_0(x, y; \xi, \eta) + \frac{\partial g_0(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right] ds_\zeta = \\ = \frac{\rho_0}{\pi} \int_{S_1} e^{k\eta} f(\xi, \eta) g_0(x, y; \xi, \eta) ds_\zeta, \end{aligned} \quad (30)$$

где n — нормаль в точке $M(\xi, \eta)$, направленная внутрь жидкости.

Решение нелинейного уравнения (18) находится численно методом последовательных приближений с использованием модифицированного метода Ньютона:

$$v_{n+1} = v_n - (T'v_0)^{-1} T v_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Если в качестве начального приближения выбрать функцию $v_0(x) \equiv -c$, $c = \text{const}$, $c > 0$, то производная Фреше $T'v_0$ оператора $T: C(S_1) \rightarrow C(S_1)$ существует и представляет собой линейный оператор следующего вида (E — единичный оператор):

$$T'v_0 = \mu E.$$

В этом случае приходим к явному итерационному процессу. Отметим, что оператор T дифференцируем по Фреше не на всех элементах пространства $C(S_1)$, а только на некоторых специальных множествах.

Проведенные численные исследования показывают, что случай $k_1 > 0$ ($k_1 = ka$) препятствует отрыву плавающего тела, а случай $k_1 < 0$, напротив, способствует

его отрыву. В качестве примера рассмотрим горизонтальный удар эллипса, полагаем $\omega = 0$, $\varepsilon = b/a2$, где a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса. При $k_1 \approx 0$ получаем совпадение с хорошо известным результатом для случая однородной жидкости [3]. Если $k_1 > 0$, то вначале (при очень малых значениях k_1) зона отрыва немного увеличивается, а затем начинает уменьшаться и, как видно из таблицы, при $k_1 > 0,5$ становится практически незаметной. При уменьшении коэффициента k_1 , напротив, зона отрыва увеличивается и начиная со значения $k_1 \approx -1,5$ наблюдается отрыв почти всей левой половины смоченной границы эллипса ($C_{1x} = c_{1x}/a$, $C_{1y} = c_{1y}/a$, где c_{1x} , c_{1y} — координаты точки отрыва эллиптического цилиндра).

k_1	-1,5	-1	-0,5	-0,1	0,01	0,1	0,25	0,26	0,3	0,5
C_{1x}	-0,05	-0,15	-0,28	-0,36	-0,38	-0,38	-0,36	-0,53	-0,84	-0,99
C_{1y}	1,99	1,98	1,92	1,86	1,85	1,85	1,87	1,70	1,08	0,27

Работа выполнена в рамках Европейского научного объединения «Регулярная и хаотическая гидродинамика» (грант РФФИ 07-01-9213), а также при финансовой поддержке гранта Президента поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.5747.2006.1).

Список литературы

- [1] Юдович В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владик. матем. журнал. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.
- [2] Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
- [3] Кудрявцева Н.А. Горизонтальный удар плавающего эллипса о несжимаемую жидкость // ПММ. 1960. Т. 24. С. 258–261.

Norkin M.V. *Separation impact on a ellipse floating on the surface of an inhomogeneous incompressible fluid.* The plane problem of separation impact on a ellipse floating on the surface of an inhomogeneous incompressible fluid. In this problem the zone of contact between the body and the fluid is not known in advance and must be determined together with the fluid flow. As a result, the problem formulated is nonlinear and belongs to the class of free-boundary problems.

УСИЛЕНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ОПОРЫ МЕТОДОМ НАРАЩИВАНИЯ

Паршин Д. А.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Рассматривается достаточно высокая осесимметричная коническая опора, несущая осевую нагрузку. Осуществляется математическое моделирование процесса усиления этой опоры под заданной нагрузкой посредством непрерывного присоединения дополнительного ненапряженного материала к свободной боковой поверхности. Материал считается однородным изотропным и проявляющим свойства линейной ползучести и старения. Анализируется влияние скоростного режима наращивания на эволюцию распределения напряжений в усиливаемой бетонной опоре и на эффективность усиления в смысле достигаемого за счет наращивания разгрузки ее центральной части.

1. Пусть имеется осесимметричная коническая опора, несущая центральную осевую сжимающую нагрузку P , распределенную по верхней торцевой поверхности. Нижний торец опоры закреплен на некотором основании (рис. 1). Материал опоры обладает свойствами ползучести и старения, причем старение материала во всем объеме протекает однородно. Момент изготовления материала примем за начало отсчета времени t . Считаем, что сила P приложена к опоре в момент $t = t_0$.

В некоторый момент времени $t_1 \geq t_0$ начинается процесс непрерывного утолщения (наращивания) рассматриваемой опоры посредством присоединения к ее свободной боковой поверхности слоев дополнительного, предварительно не напряженного материала, изготовленного одновременно с материалом исходной части опоры, имеющего с ним одинаковые механические свойства и стареющего так же, как он. Считается, что под воздействием приложенной нагрузки наращиваемая опора претерпевает малые деформации, а влиянием на процесс ее деформирования сил инерции можно пренебречь.

В результате утолщения опоры ее боковая поверхность сохраняет все время коническую форму, при этом радиусы закрепленного на основании и нагруженного торцов изменяются во времени по произвольным известным непрерывным и неубывающим законам $a(t)$ и $b(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, где $t_2 > t_1$ — момент окончания утолщения. Радиусы торцов до начала и по завершении утолщения обозначим через $a_i = a(t_{i+1})$, $b_i = b(t_{i+1})$, $i = 0, 1$. Удаления произвольной точки опоры M от основания и от оси симметрии опоры обозначим соответственно через z и ρ (рис. 1). Будем предполагать, что на протяжении всего процесса высота опоры l значительно превышает ее поперечные размеры, $l \gg 2 \max\{a_1, b_1\}$. В этом

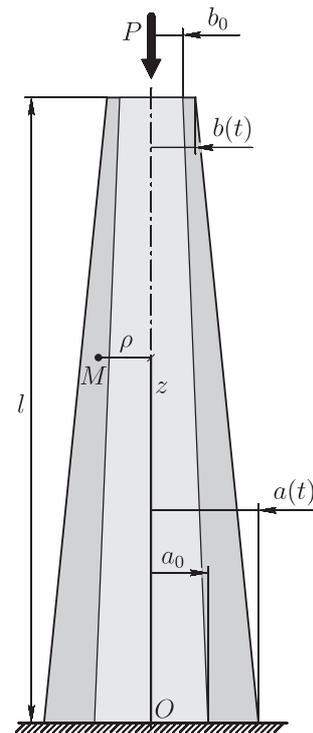


Рис. 1

случае согласно принципу Сен-Венана конкретный вид распределения нагрузки P по верхнему торцу опоры и распределения контактных напряжений по ее нижнему торцу не влияет на напряженно-деформированное состояние преобладающей по высоте ее средней части.

Описанное утолщение опоры осуществляется с целью ее усиления, то есть снижения общего уровня действующих в опоре напряжений, возникших при приложении к ней внешней нагрузки. Это возможно (даже при постоянной во времени силе P) благодаря немгновенному накоплению деформации в рассматриваемом материале, иными словами, наличию у него свойства ползучести.

Ясно, что сколь угодно тонкий слой дополнительного материала, присоединенный к находящейся еще в процессе деформирования поверхности уже сформированного на данный момент наращиваемого тела, начинает деформироваться вместе с этой поверхностью. Это вызывает перераспределение уже имеющихся напряжений во всем рассматриваемом теле вследствие изменения его общей жесткости в процессе деформирования. Процесс перераспределения будет, очевидно, растянут во времени и закончится лишь спустя некоторое время после завершения формирования тела и фиксирования действующей на него нагрузки. Темп протекания этого процесса будет зависеть от внутренних свойств материала, меняющихся со временем вследствие старения, которое продолжается до определенного возраста и протекает независимо от процесса деформирования.

Целью настоящей работы является выявление качественных и количественных особенностей указанного процесса перераспределения напряжений в рассматриваемой конической опоре в результате ее постепенного усиления путем наращивания.

2. Материал опоры будем описывать в рамках линейной теории вязкоупругости однородно стареющих изотропных тел [1, 2], то есть в качестве определяющего соотношения материала возьмем уравнение

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}^{-1} [2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1)$$

Здесь $\tau_0(\mathbf{r})$ — момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором \mathbf{r} ; \mathbf{T} и \mathbf{E} — тензоры напряжений и малой деформации, $\mathbf{1}$ — единичный тензор второго ранга; $\varkappa = (1 - 2\nu)^{-1}$, где $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона. Линейный оператор \mathcal{H}_s с вещественным параметром $s \geq 0$ и обратный к нему оператор \mathcal{H}_s^{-1} представляются в виде $\mathcal{H}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)G(t)^{-1}$ и $\mathcal{H}_s^{-1} = G(t)(\mathcal{I} + \mathcal{N}_s)$, где $G(t)$ — упругий модуль сдвига, \mathcal{I} — тождественный оператор, $\mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau)K(t, \tau) d\tau$, $\mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau)R(t, \tau) d\tau$; $K(t, \tau) = G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau$ и $R(t, \tau)$ — ядра ползучести и релаксации, $\Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau)$, где $\Delta(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге ($t \geq \tau \geq 0$).

В исходно существующей части опоры функция $\tau_0(\mathbf{r})$ тождественно равна t_0 . В дополнительной, то есть сформированной в результате наращивания, части эта функция совпадает с распределением моментов присоединения к наращиваемой опоре частиц \mathbf{r} нового материала — в силу использования для усиления опоры изначально не напряженных материальных элементов. Таким образом, в дополнительной части опоры функция τ_0 зависит только от координат ρ и z и удовлетворяет уравнению $\rho = a(\tau_0(\rho, z))(1 - z/l) + b(\tau_0(\rho, z))z/l$.

Математическая постановка задачи о квазистатическом деформировании осесимметричного конического тела, подчиненного уравнению состояния (1) и наращиваемого в условиях центрального растяжения-сжатия под действием переменной во времени торцевой нагрузки за несколько разделенных произвольными по длительности паузами этапов непрерывного присоединения ненапряженного материала к боковой поверхности, дана в статье [3]. Там же на основании развитого в [4] общего метода решения безынерционных неклассических задач механики для кусочно-непрерывно наращиваемых линейно вязкоупругих однородно стареющих изотропных тел при малых деформациях построено замкнутое (в квадратурах) аналитическое решение данной (математически двумерной) задачи, описывающее изменение напряженно-деформированного состояния рассматриваемого конического тела в процессе и по завершении его наращивания.

3. Опираясь на результаты работы [3], проведем численное моделирование конкретного примера изучаемого в данной работе процесса усиления конической опоры. Для этого зададим меру ползучести рассматриваемого материала в виде произведения [1] $\omega(t, \tau) = A(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$, где параметр $\gamma > 0$ определяет скорость ползучести. Множитель $A(\tau)$, называемый обычно функцией старения, а также зависимость от времени модуля сдвига аппроксимируем экспоненциальными зависимостями (см., например, [5]) $A(\tau) = A_\infty + \Delta A e^{-\beta\tau}$, $G(t) = G_\infty(1 - \delta G e^{-\alpha t})$.

Для выполнения числовых расчетов введем следующую систему базовых безразмерных величин. Величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к модулю сдвига старого материала G_∞ . Величины, имеющие размерность времени, умножим на параметр γ . Линейные величины отнесем к первоначальному радиусу верхнего (нагруженного) торца опоры b_0 . Все исходно размерные величины после приведения к безразмерному виду будем помечать чертой сверху.

Примем следующие значения для коэффициента Пуассона и числовых параметров записанных выше аппроксимаций характеристик рассматриваемого вязкоупругого материала [2]: $\nu = 0.1$; $\bar{A}_\infty = 0.5522$, $\Delta\bar{A} = 4$, $\bar{\beta} = 31/60$; $\delta G = 0.5$, $\bar{\alpha} = 2$.

Отметим, что используемые определяющие соотношения хорошо описывают, в частности, механическое поведение такого распространенного конструкционного материала как бетон при не слишком высоких напряжениях и скоростях их изменения, и выбранные значения материальных параметров согласуются с экспериментальными данными по ползучести некоторых сортов бетона [1, 2, 5, 6, 7].

Пусть в процессе усиления площадь нагруженного торца опоры остается неизменной, $b(t) \equiv b_0$, а радиус закрепленного торца увеличивается по линейному закону $a(t) = a_0 + (a_1 - a_0)(t - t_1)/\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$ — продолжительность процесса наращивания. Положим $\bar{a}_0 = 5$, $\bar{a}_1 = 8$, $\bar{t} = 50$. Возраст материала в момент загрузки опоры и в момент начала ее наращивания примем равным соответственно $\bar{t}_0 = 0.1$ и $\bar{t}_1 = 0.3$. Действующую на опору сжимающую силу будем считать постоянной и равной $\bar{P} = 10$.

На рис. 2 показана эволюция распределения (преобладающих в рассматриваемом теле) сжимающих осевых напряжений $-\sigma_z$ по поперечному сечению наращиваемой опоры, отстоящему от основания на расстоянии $\bar{z} = 40$, при двух скоростных режимах наращивания. В варианте (a) реализуется процесс относительно медленного утолщения опоры, за время $\Delta\bar{t} = 5.0$. Вариант (b) характеризуется

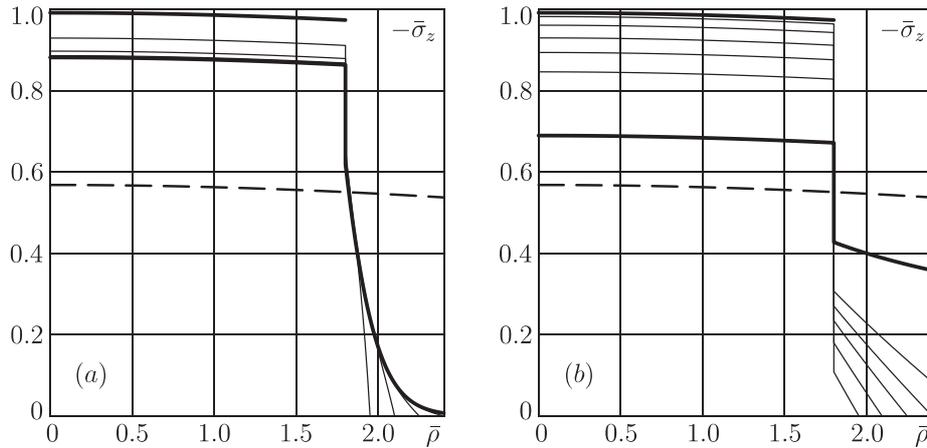


Рис. 2. Сжимающие осевые напряжения в сечении наращиваемой опоры

достаточно высокой скоростью притока дополнительного материала к боковой поверхности опоры, здесь $\Delta \bar{t} = 0.2$. Толстыми сплошными линиями показаны распределение напряжений до начала наращивания¹ и финальные (установившиеся при бесконечном времени) распределения напряжений в усиленной опоре. Тонкие сплошные линии отражают развитие напряжений в сечении в процессе и по завершении наращивания (точки пересечения кривых с осью абсцисс отвечают текущему значению радиуса сечения). Штриховые линии показывают воображаемое распределение напряжений, которое имело бы место в рассматриваемой опоре, если бы она была нагружена только после окончательного утолщения. Как видим, ускорение процесса наращивания в 25 раз приводит к увеличению эффективности разгрузки центральной части опоры почти в 3 раза.

Ввиду свойства затухания ползучести, присущего рассматриваемому вязкоупругому материалу, степень перераспределения напряжений в соответствующем наращиваемом теле должна зависеть от скорости увеличения толщины формируемого на его поверхности дополнительного материального слоя: чем быстрее происходит ощутимое увеличение толщины слоя, тем сильнее он успевает повлиять на процесс деформирования исходного тела и тем более заметным оказывается в результате перераспределение напряжений (наибольшим оно будет, естественно, при мгновенном присоединении к телу материального слоя конечной толщины). Таким образом, при быстром пополнении тела новыми элементами оно должно прийти в итоге к такому состоянию, которое в целом будет достаточно близко к реализуемому при нагружении этого тела уже в готовом виде, то есть в классическом для механики варианте. Однако эта близость в общем случае не может быть неограниченной, поскольку перед присоединением дополнительного материала к исходно существующей части тела в ней в любом случае уже произошла упругая деформация. В результате распределение напряжений в наращиваемом теле неизбежно будет иметь разрывы, не свойственные классическому распределению.

Стоит еще заметить, что потенциально возможная степень перераспределения

¹В соответствии с известным принципом соответствия в линейной теории вязкоупругости [2] напряженное состояние рассматриваемого тела при постоянной нагрузке в течение всего этапа его деформирования до начала наращивания остается неизменным.

напряжений в теле за счет его пополнения новым материалом определяется интенсивностью деформирования тела непосредственно до этого пополнения. Понятно, в частности, что если деформирование тела к этому моменту уже полностью завершено, то перераспределение установившихся в нем напряжений на дополнительный материал вообще невозможно. Так обстоит дело, например, при чисто упругом поведении материала, полное деформирование которого, в отличие от вязкоупругого, происходит мгновенно (без запаздывания).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-1245.2006.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00693, № 06-01-00521).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
- [2] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [3] Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303.
- [4] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [5] Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
- [6] Арутюнян Н.Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 155–202.
- [7] Проктопович И.Е., Зедгендзе В.А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.

Parshin D.A. *Conical Rest Reinforcement via Accretion Technology.* A sufficiently high axisymmetric conical rest bearing an axial load is considered. The mathematical simulation of the rest in question reinforcing process under given loading is carried out. The reinforcement is realized by means of continuous adding unstressed extra material to the free side surface of the rest. The material is supposed to be homogeneous, isotropic and to possess the properties of linear creep and aging. The accretion rate mode influence on the stress distribution evolution in the reinforced concrete rest and the efficiency of the reinforcement in terms of attainable stress relief in the central part of the rest at the expense of accretion is analysed.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЛСТОСТЕННОГО СОСТАВНОГО КОЛЬЦА

Попов А.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках плоской теории упругости рассматривается задача устойчивости толстостенного двухслойного составного кольца, нагруженного внешним равномерно распределенным давлением. Составное кольцо содержит внутренние напряжения, обусловленные посадкой с предварительным натягом.

Уравнения нейтрального равновесия, линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на границе раздела слоев выведены для изотропного несжимаемого материала. Из точного решения нелинейной задачи Ламе для составного кольца определяется невозмущенное состояние равновесия. Рассмотрен класс решений уравнений нейтрального равновесия, для которого задача устойчивости сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Путем численного решения полученной системы в предположении, что материальные свойства составного цилиндра определяются неогуковской моделью, найдены критические значения внешнего давления.

Рассматривается задача об устойчивости составного изотропного нелинейно упругого кольца, образованного следующим образом. Кольцо 1 с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом b_1 вставляется в кольцо 2 внутреннего радиуса a_2 и внешнего радиуса b_2 так, что $b_1 > a_2$ (рис. 1,а). Полученное таким образом составное кольцо подвергается действию внешнего равномерно распределенного давления (рис. 1,б).

Пусть r_1 — радиальная координата первого кольца, r_2 — радиальная координата второго кольца. Тогда, очевидно, $a_1 \leq r_1 \leq b_1$ и $a_2 \leq r_2 \leq b_2$.

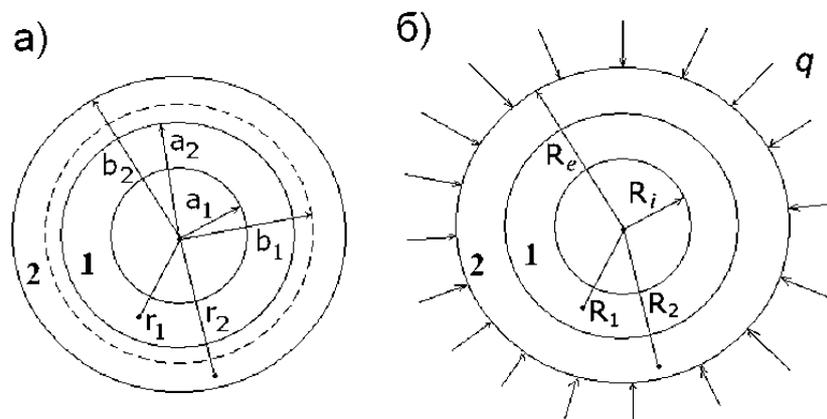


Рис. 1. Общий вид частей составного кольца: а) до вставки с натягом; б) после вставки с натягом и приложения внешнего давления.

Преобразования координат имеют вид:

$$R_k = R_k(r_k), \quad \Phi = \varphi.$$

Здесь r_k , φ и R_k , Φ ($k = 1, 2$) — полярные координаты, соответственно, недеформированной и деформированной конфигураций составного кольца. Соответствующий им тензор градиента деформации:

$$\mathbf{C}_k = R'_k(r_k) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R_k(r_k)}{r_k} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ — ортонормированный векторный базис полярных координат.

Используя условие несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$ и формулу (1), находим радиусы R_1 и R_2 :

$$R_1(r_1) = \sqrt{R_i^2 - a_1^2 + r_1^2}; \quad R_2(r_2) = \sqrt{R_e^2 - b_2^2 + r_2^2}. \quad (2)$$

$$R_i = R_1(a_1), \quad R_e = R_2(b_2)$$

Используется неогуковская модель материала с одинаковым модулем сдвига для обоих цилиндров:

$$\mathbf{D}_k = \mu \mathbf{C}_k + p_k(r_k) \mathbf{C}_k^{-T}, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{D}_k — тензоры напряжений Пиолы, μ — модуль сдвига, $p_k(r_k)$ — функции гидростатического давления в несжимаемом теле.

Уравнения равновесия для обоих колец:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Граничные условия следующие. Боковые поверхности составного кольца считаются свободными от нагрузок:

$$\mathbf{D}_{1, rr}(a_1) = 0, \quad \mathbf{D}_{2, rr}(b_2) = 0. \quad (5)$$

Далее, радиальное нормальное напряжение σ_R текущей конфигурации и радиальная координата считаются равными на границе двух колец

$$\frac{b_1}{\lambda R_1(b_1)} \mathbf{D}_{1, rr}(b_1) = \frac{a_2}{\lambda R_2(a_2)} \mathbf{D}_{2, rr}(a_2), \quad R_1(b_1) = R_2(a_2). \quad (6)$$

Физически последние два условия означают, что во время деформации между кольцами не образуется разрывов.

Используя уравнения (4) и граничные условия (5)–(6), мы можем найти функции гидростатического давления $p_1(r_1)$ и $p_2(r_2)$. Подстановка $R_1(r_1)$, $R_2(r_2)$ из (2) во второе граничное условие (6) даёт соотношение между внутренним R_i и внешним R_e радиусами. После этого получаем связь между внешним давлением q и внешним радиусом R_e деформированного кольца. Благодаря этому величину R_e можно считать параметром деформации рассматриваемого составного кольца, что удобно при численном решении задачи устойчивости.

Пусть равновесное напряженно-деформированное состояние составного кольца, которое определяется радиус-вектором \mathbf{r}_k ($k = 1, 2$) частицы, считается докритическим. Предположим, что одновременно с ним существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиус-вектором $\mathbf{r}_k + \eta \mathbf{w}_k$, где \mathbf{w}_k — вектор добавочного перемещения, η — малый параметр. Возмущённое состояние равновесия несжимаемого тела описывается уравнениями [1, 2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k^\bullet = 0, \quad \text{tr} (\mathbf{C}_k^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}_k) = 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_k^\bullet = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{D} (\mathbf{r}_k + \eta \mathbf{w}_k) \right]_{\eta=0}, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Линеаризованные граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1^\bullet|_{r_1=a_1} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{D}_2^\bullet + q (\mathbf{C}_2^{-T})^\bullet)|_{r_2=a_2} = 0; \quad (9)$$

$$\left(\mathbf{D}_1 \frac{ds_1}{dS_1} \right)^\bullet \Big|_{r_1=b_1} = \left(\mathbf{D}_2 \frac{ds_2}{dS_2} \right)^\bullet \Big|_{r_2=a_2}, \quad \mathbf{w}_1(b_1) = \mathbf{w}_2(a_2). \quad (10)$$

Здесь ds_k, dS_k ($k = 1, 2$) — элементарные материальные отрезки в недеформированной и деформированной конфигурации соответственно.

Из (3), (8) получаем возмущенный тензор напряжений в виде

$$\mathbf{D}_k^\bullet = \mu \nabla \mathbf{w}_k + p_k (\mathbf{C}_k^{-T})^\bullet + p_k^\bullet \mathbf{C}_k^{-T}, \quad k = 1, 2.$$

Запишем компонентное представление вектора перемещений \mathbf{w}_k и тензора \mathbf{D}_k^\bullet в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$: $\mathbf{w}_k = u_k \mathbf{e}_r + v_k \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{D}_k^\bullet = D_{k,rr}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + D_{k,r\varphi}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi + \dots$; $k = 1, 2$. Тогда получим две системы трёх уравнений (7) с неизвестными функциями u_1, v_1, p_1^\bullet и u_2, v_2, p_2^\bullet . Так как все шесть функций являются периодическими по угловой переменной φ , то обе системы допускают решения следующего вида ($k = 1, 2, n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$u_k = U_k(r_k) \cos n\varphi, \quad v_k = V_k(r_k) \sin n\varphi, \quad p_k^\bullet = P_k(r_k) \cos n\varphi. \quad (11)$$

Используя подстановку (11), получаем краевую задачу для двух систем трех обыкновенных уравнений с неизвестными U_k, V_k, P_k и граничными условиями (9)–(10). Применяя конечно-разностную запись [3], данную краевую задачу можно свести [4] к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $U_1(a_1), V_1(a_1), U_2(b_2), V_2(b_2)$. Условие существования нетривиального решения такой системы является характеристическим уравнением для определения критических значений внешнего равномерно распределенного давления q .

В ходе численных экспериментов для разных значений a_1, b_1, a_2 были получены бифуркационные кривые, показывающие зависимость критических значений внешнего давления от величины натяга для различных толщин внутреннего и внешнего колец. Значение радиуса b_2 принято равным единице. На приведённых графиках по оси абсцисс отложена величина натяга d , равная разнице радиусов b_1 и a_2 , а по оси ординат — безразмерное критическое давление $Q^* = q^*/\mu$.

Чтобы определить область устойчивости кольца с внутренними напряжениями на плоскости параметров (d, Q^*) , необходимо построить бифуркационные кривые для различных мод потери устойчивости, то есть для разных значений целочисленного параметра n при фиксированных значениях a_1, a_2 и b_2 . Бифуркационные кривые при $a_1 = 0,7; a_2 = 0,7; b_2 = 1,0$ представлены на рис. 2. Номер кривой совпадает со значением параметра n . Как видно, начиная с некоторого значения натяга d^* , большие значения Q^* критического давления достигаются при меньших значениях n . Таким образом, граница области устойчивости состоит из участков двух кривых. Первый участок является частью бифуркационной кривой, отвечающей значению $n = 2$, на отрезке $[0, d^*]$. Второй участок — часть некоторой асимптотической кривой, представляющей предел бифуркационных кривых при $n \rightarrow \infty$, на отрезке $[d^*, \infty)$. (На рисунках в качестве асимптотической кривой взята бифуркационная кривая, отвечающая значению $n = 100$.) Бифуркационные кривые, построенные при других значениях a_2 , приводят к такому же результату.

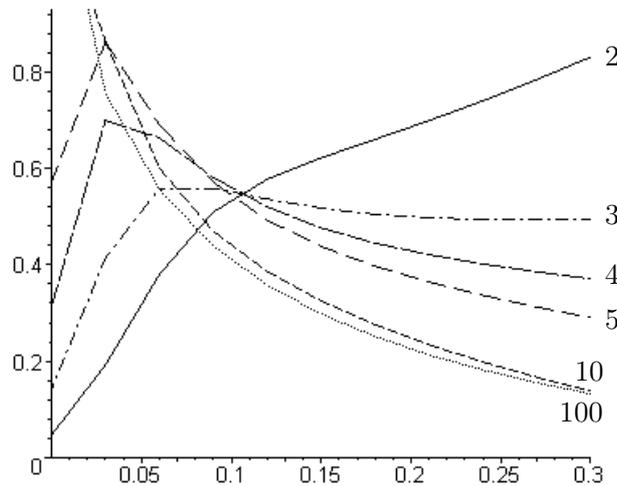


Рис. 2. Бифуркационные кривые для разных значений параметра n .

На рис. 3 представлены границы областей устойчивости для составных колец с разными геометрическими параметрами. (Под областью устойчивости понимается часть координатной плоскости, лежащая ниже границы.) Монотонная штриховая кривая является границей области устойчивости некоторого однородного кольца, у которого внутренний и внешний радиусы в недеформированном состоянии равны, соответственно, внутреннему R_i и внешнему R_e радиусам составного кольца в состоянии равновесия, соответствующем нулевому внешнему давлению. Однородное кольцо вводится для определения влияния начальных внутренних напряжений на явление неустойчивости.

Как видно, начальные напряжения, возникающие в составном кольце вследствие посадки с натягом, приводят как к увеличению устойчивости (рис. 3, кривые 1 и 2), так и к её уменьшению (рис. 3, кривая 3). При этом решающее значение имеет относительная разность внутренних радиусов двух колец $(a_2 - a_1)/a_1$.

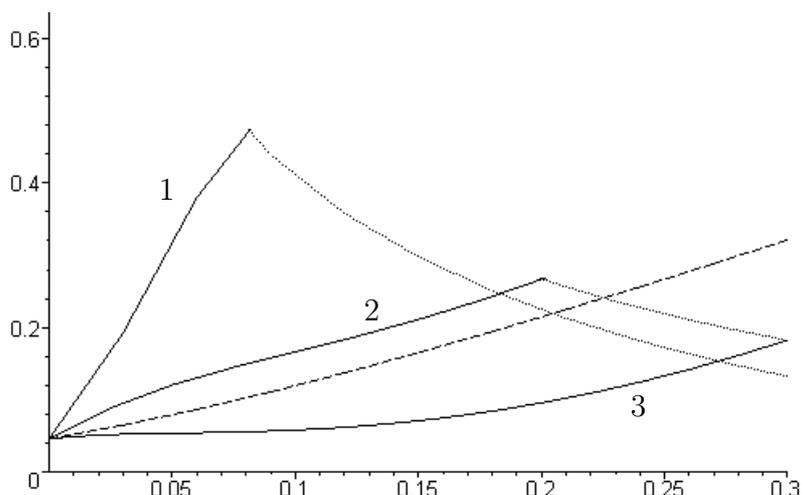


Рис. 3. Бифуркационные кривые для разных значений a_2 : 1 — 0,7; 2 — 0,75; 3 — 0,8. Значения остальных параметров: $a_1 = 0,7$; $b_2 = 1,0$; $d = b_1 - a_2$.

Список литературы

- [1] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
- [2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [3] Зубов Л.М., Моисеенко С.И. Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 78–84.
- [4] Попов А.В. Устойчивость составного цилиндра с предварительным натягом // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X международной конференции. Ростов-на-Дону, 2006 г. С. 227–231.

Попов А.В. *Investigating of the Stability of a Thick-wall Compound Ring.* The problem of stability of a thick-wall compound ring under external pressure is investigated within plain theory of elasticity. The ring contains initial strain due to the difference between outer radius of the inner part and inner radius of the outer part.

The equations of neutral balance, linearised boundary conditions and conditions at the border of two parts of the ring are derived using the model of an isotropic incompressible material. The subcritical state solution is obtained from the exact solution of a nonlinear Lamé's problem for such a compound ring. The problem of finding the critical values of the external pressure yields homogenous boundary-value problem for ODE-system. For the neo-Hookean material model the numerical results are obtained.

МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

Сатуновский П. С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача о реконструкции модуля сдвига и плотности в задаче об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного упругого слоя в антиплоском случае. Разработан метод реконструкции характеристик слоя как функций поперечной координаты по известным полям перемещений на верхней границе слоя. Построена итерационная схема на основе обращения на каждом шаге интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Приведены примеры реконструкции.

Введение. Задача об определении законов изменений упругих характеристик материалов (параметры Ляме и плотность) как функций координат весьма актуальна и имеет многочисленные приложения в геофизике, механике композиционных материалов, био- и наномеханике. В биомеханике особое место занимают вопросы исследования свойств мягких тканей человека, в первую очередь в связи с малой изученностью данных аспектов. На сегодняшний день неинвазивные методы определения механических свойств биологических тканей разработаны весьма слабо. По многочисленным экспериментам известно, что свойства мышечной ткани мало меняются вдоль волокна, в то время как в поперечном направлении неоднородность носит значительный характер, причем изменения претерпевают исключительно сдвиговые характеристики [1]. Тот факт, что скорости сдвиговых волн достаточно малы, позволяет применять ультразвуковые методы для определения таких характеристик как модуль сдвига и плотность. Основную трудность в решении обратной задачи, которая является существенно нелинейной, представляет формулировка соответствующих операторных уравнений с компактными операторами. В настоящей работе исследована задача об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного слоя с жестко закрепленным основанием под действием распределенной нагрузки на верхней границе в антиплоском случае. Модуль сдвига и плотность слоя являются произвольными положительными кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. При этом исследование прямых задач о расчете волновых полей на границе основаны на преобразовании Фурье, предварительном сведении краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода в пространстве трансформант и численном анализе их дискретных аналогов. Разработан метод построения полей перемещений на верхней границе слоя при произвольных законах неоднородности. Предложен новый подход к решению важного класса одномерных обратных задач для слоистой среды, характеристики которой (плотность и модуль сдвига) являются функциями поперечной координаты. Построены итерационные процессы в процедуре реконструкции законов неоднородности слоя на основе метода линеаризации в окрестности некоторого известного состояния. При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать интегральные уравнения Фредгольма первого рода с

ядрами специального вида. Обращение таких операторов осуществлено на основе методов регуляризации, в частности, метода А. Н. Тихонова.

Постановка задачи. Рассматривается задача об установившихся колебаниях с частотой ω для неоднородного изотропного слоя $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$ с жестко закрепленным основанием под действием распределенной нагрузки на верхней границе, параметры Ляме ($\lambda = \lambda(x_3)$ и $\mu = \mu(x_3)$) и плотность $\rho = \rho(x_3)$ слоя являются произвольными положительными ограниченными кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты.

Постановка прямой задачи в плоском и антиплоском случаях, сведение к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, а также некоторые свойства дисперсионных кривых подробно изложены и изучены в [2]. В работе [3] описан метод построения полей перемещений на верхней границе слоя и построено интегральное уравнение Фредгольма первого рода для решения обратной задачи о восстановлении модуля сдвига при известных полях перемещений на верхней границе слоя и известном законе изменения плотности. Общая итерационная схема решения обратной задачи для неоднородного по толщине упругого слоя в плоской и антиплоской постановке описана в [4], в [5] представлены общие интегральные уравнения для решения обратной задачи для неоднородного по толщине слоя в плоской и антиплоской постановке, причем для формулировки операторных уравнений использованы подходы, опирающиеся на теорему взаимности [6]. В работе [5] также приведены примеры реконструкции кусочно-гладких законов изменения модуля сдвига при известном законе изменения плотности, причем закон изменения плотности (в безразмерном виде) совпадал с законом изменения модуля сдвига.

В настоящей работе приведены результаты восстановления кусочно-гладких законов изменения модуля сдвига при известных законах изменения плотности, отличающихся от законов изменения модуля. Следует отметить, что процесс реконструкции в этом случае осуществляется хуже (особенно для разрывных законов), причем восстановление значений модуля сдвига на границах слоя происходит с наибольшей погрешностью.

На рис. 1–3 приведены примеры реконструкции различных законов изменения модуля сдвига: сплошная линия – точный закон, штрих-пунктир – нулевое приближение, пунктир – восстановленный закон. В верхней правой части рисунков изображен соответствующий закон изменения плотности.

Обобщим обратную задачу, рассмотренную в случае антиплоских колебаний, на случай, когда необходимо восстанавливать законы изменения модуля сдвига и плотности одновременно.

Будем считать известными поля перемещений на верхней границе слоя. Требуется восстановить $\mu = \mu(x_3)$ и $\rho = \rho(x_3)$.

Уравнение движения и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} (\mu u_{,1})_{,1} + (\mu u_{,3})_{,3} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ u|_{x_3=0} &= 0, \mu u_{,3}|_{x_3=h} = p(x_1), u|_{x_3=h} = f(x_1). \end{aligned} \quad (1)$$

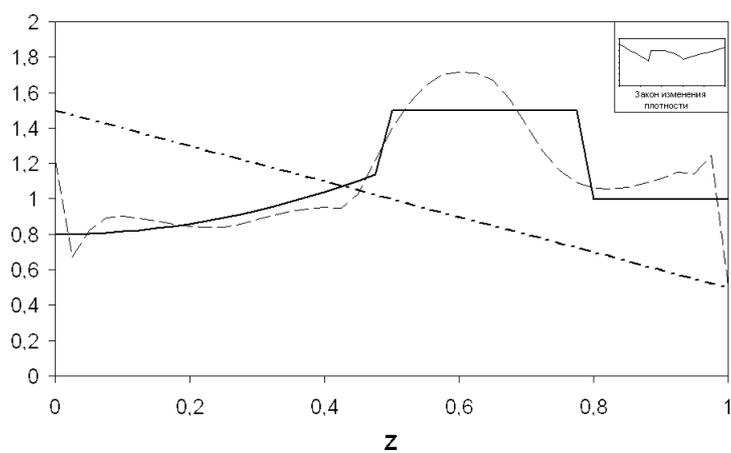


Рис. 1. Реконструкция модуля сдвига за 13 итераций.

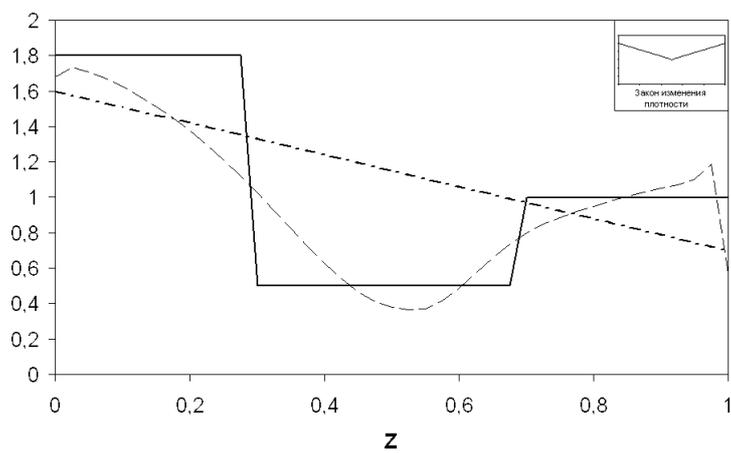


Рис. 2. Реконструкция модуля сдвига за 8 итераций.

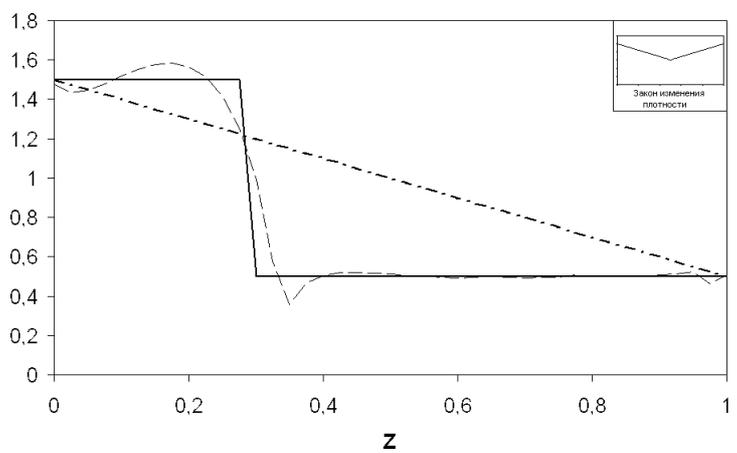


Рис. 3. Реконструкция модуля сдвига за 10 итераций.

При помощи преобразования Фурье по переменной x_1 задача (1) сведена к итеративной процедуре на основе подхода, предложенного в [3–5]. При этом на каждом шаге необходимо решать уравнение Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами относительно поправок $m^{(k)}(z)$ и $r^{(k)}(z)$ следующего вида

$$\int_0^1 m^{(k)}(\beta^2(V^{(k-1)})^2 + (V_{,z}^{(k-1)})^2)dz - \kappa^2 \int_0^1 r^{(k)}(V^{(k-1)})^2 = \\ = V^{(k-1)}(\beta, 1) - F(\beta), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $z = x_3/h$, $\beta = \alpha h$, $\kappa^2 = \mu_0^{-1} \rho_0 \omega^2 h^2$, $M^{(k)}(z) = \mu_0^{-1} \mu^{(k)}(hz) = M^{(k-1)}(z) + m^{(k)}(z)$, $R^{(k)}(z) = \rho_0^{-1} \rho^{(k)}(hz) = R^{(k-1)}(z) + r^{(k)}(z)$, $F(\beta) = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) e^{i\beta x_1/h} dx_1$, $P(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\beta x_1/h} dx_1$, $V^{(k)}(\beta, z) = P(\beta)^{-1} h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(k)}(x_1) e^{i\beta x_1/h} dx_1$. α — параметр преобразования Фурье; μ_0 и ρ_0 — характерные модуль сдвига и плотность.

Отметим, что функцию $V^{(k)}(\beta, z)$ можно найти из решения уравнения Фредгольма второго рода, которое не зависит от вида приложенной нагрузки,

$$V^{(k)}(\beta, z) = \int_0^1 K^{(k)}(\beta, z, \xi) V^{(k)}(\beta, \xi) d\xi + g^{(k)}(\beta, z),$$

где $K^{(k)}(\beta, z, \xi) = (\kappa^2 R^{(k)}(\xi) - \beta^2 M^{(k)}(\xi)) \int_0^{\min\{z; \xi\}} \frac{d\tau}{M^{(k)}(\tau)}$, $g^{(k)}(\beta, z) = \int_0^z \frac{d\xi}{M^{(k)}(\xi)}$.

Следует отметить, что при известном законе изменения плотности уравнение (4) принимает тот же вид что и в [5] (в этом случае $r^{(k)}(z) = 0$).

Автор выражает благодарность А.О. Ватульяну за помощь в проведенной работе.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 05-01-00734).

Список литературы

- [1] *О.В. Руденко, А.П. Сарвазян.* Волновая биомеханика скелетной мышцы. // Акустический журнал. 2006, том 52, № 5. С. 833–846.
- [2] *Ватульян А.О., Двоскин М.А., Сатуновский П.С.* О колебаниях неоднородного упругого слоя. // Журнал “Прикладная механика и техническая физика”. 2006. № 3. С. 157–164.
- [3] *А.О. Ватульян, П.С. Сатуновский.* СН-колебания неоднородного упругого по толщине слоя. // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела. Материалы IV Международной научной конференции, посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского. Донецк: ООО “Юго-Восток, ЛТД”. 2006. № 3. С. 187–189.

- [4] Ватульян А.О., Двоскин М.А., Сатуновский П.С. Прямые и обратные задачи для неоднородного слоя. Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X Международной конференции. 2006 Т. 1. Ростов н/Д: Издательство ЦВВР. С. 76–80.
- [5] А.О. Ватульян, П.С. Сатуновский. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя. // Доклады РАН 2007, т. 414, № 1. С. 36–38.
- [6] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит 2007. 223 с.

Satunovsky P.S. *An approach to identification of nonhomogeneous elastic layer.* We considered the problem of fixed oscillations of an isotropic elastic layer with nonhomogeneous thickness for an antiplane case. As the result of our research we have developed an approach to identification of the layer's properties as functions of the transverse coordinate by the known fields of transitions at the layer's upper border. The conversion-based iteration scheme has been built at each step of Fredholm integral equation of the first kind. Finally, we offer some examples to illustrate our method.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОГО ВИДЕНИЯ

Скляренко М. С., Марценюк М. А.

Пермский государственный университет

В работе предложен метод измерения поля концентрации окрашенных растворов, основанный на обработке изображений процесса диффузии. В статье приведены результаты экспериментов по диффузии в двухкомпонентных жидких смесях, полученные с использованием данного метода.

Введение. Экспериментальное исследование процесса диффузии связано с трудностями в измерении концентрации диффузанта в каждой точке раствора. Появление цифровых фотокамер, а также развитие методов компьютерной обработки изображений предоставляют возможность получения точных данных о концентрации диффузанта в каждой точке (поле концентрации) по яркости окрашенного раствора. В работе предложен метод компьютерной обработки фотографий процесса диффузии в тонком плоском слое, позволяющий восстанавливать поле концентрации в заданный момент времени, а также определять границы областей проникновения диффузанта (диффузионные пятна) и отслеживать эволюцию характерных размеров пятен. В статье приведены результаты экспериментов по диффузии анилинового красителя в плоском слое воды, а также по центрально-симметричной электродиффузии перманганата калия в воде при отсутствии электролиза (изолированные электроды).

Измерение поля концентрации и определение границы диффузионного пятна. Для измерения концентрации по яркости используется предварительно полученная градуировочная зависимость. Для получения градуировочной точки в кювету, установленную на белом или сером фоне, помещают тонкий слой раствора известной концентрации (при этом толщина слоя должна быть одинаковой как при получении градуировочных точек, так и при измерении поля концентрации в основном эксперименте). Кювета освещается рассеянным светом, для получения которого используется осветитель (осветители) и фотокуб. По изображению определяется средняя по пикселям яркость раствора. При этом можно использовать следующие понятия яркости пикселя: $B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 I_i$, где I_i – интенсивности цветовых компонент в пространстве RGB или $B = V$, где V – значение V в пространстве HSV (Hue Saturation Value). Второе представление используется, когда фон на фотографии имеет цветовой оттенок. Для исключения зависимости от яркости осветителя (осветителей) вводится понятие относительной яркости раствора $\frac{B_d}{B_b}$, где B_d – яркость раствора, B_b – средняя яркость фона. Для измерения поля концентрации в конкретном эксперименте необходимо сначала выделить области проникновения диффузанта. Во-первых, измерение концентрации по градуировочной зависимости в областях отсутствия диффузанта приведет к ошибочным значениям поля концентрации (однако, в этих областях $c = 0$), во-вторых,

изучение эволюции границы диффузионного пятна представляет отдельный интерес. Для выделения диффузионных пятен на изображении осуществляется переход из цветового пространства RGB в пространство HSV. Точка изображения принадлежит пятну, если для цветового оттенка H и насыщенности цвета S выполняемы условия: $H_{\min} \leq H \leq H_{\max}$, $S \geq S_{\min}$, где H_{\min} , H_{\max} , S_{\min} – пороговые значения, определяемые экспериментатором вручную при анализе изображения. После определения областей проникновения диффузанта восстанавливается поле концентрации:

$$c(x, y) = f_{cal} \left(\frac{B_d(x, y)}{B_b} \right), (x, y) \in D_i,$$

$$c(x, y) = 0, (x, y) \notin D_i,$$

где f_{cal} — градуировочная зависимость, D_i — области проникновения диффузанта.

Для выделения границ диффузионных пятен используется градиентный детектор краев [1], при этом яркость пикселей в областях отсутствия диффузанта предварительно зануляется с целью максимизации градиента яркости на границе областей проникновения. В случае, если границы областей имеют концентрическую форму, предлагается аппроксимировать контуры границ окружностями с использованием стохастического метода [2]. Таким образом, можно отслеживать эволюцию размеров диффузионных пятен.

Экспериментальные результаты. Объектом исследования служили двухкомпонентные смеси. В качестве растворителя использовалась дистиллированная вода, в качестве диффузанта – перманганат калия ($KMnO_4$) и красный анилиновый краситель, толщина слоя 1,6 мм, характерный размер кюветы 5 см. На рис. 1 приведены градуировочные зависимости концентрации от относительной яркости для данных диффузантов. Градуировочная зависимость для красного анилинового красителя $f_{cal} = 0,0048 \left(\frac{B_d}{B_b} \right)^{-2,0541} \%$, для перманганата калия – $f_{cal} = 14,381e^{-6.2685 \frac{B_d}{B_b}} \%$. Ниже приведено описание экспериментов и обсуждение их результатов.

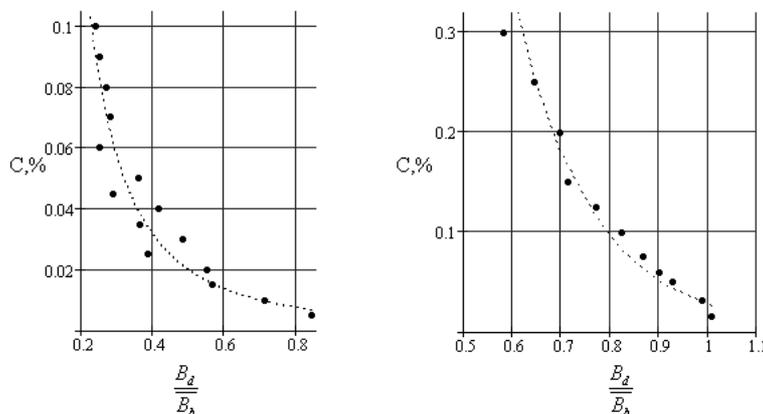


Рис. 1. Градуировочные зависимости (слева для красного анилинового красителя, справа для перманганата калия)

Диффузия при квазиточечных начальных условиях. Для создания начальных условий в кювету с тонким слоем дистиллированной воды помещалась капля раствора диффузанта. В данном случае решается следующая двумерная задача:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= D\Delta c, \\ c(r, 0) &= A\delta(r), \\ \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= 0,\end{aligned}$$

где Γ — граница, образуемая стенками кюветы. Однако, если рассматривать промежуток времени, когда диффузانت не достиг стенок кюветы, то поле концентрации будет решением задачи с граничным условием $c(r = \infty) = 0$ (задача в бесконечном слое). На рис. 2 представлены поля концентрации в два момента времени ($\Delta t = 20c$) при диффузии красного анилинового красителя.

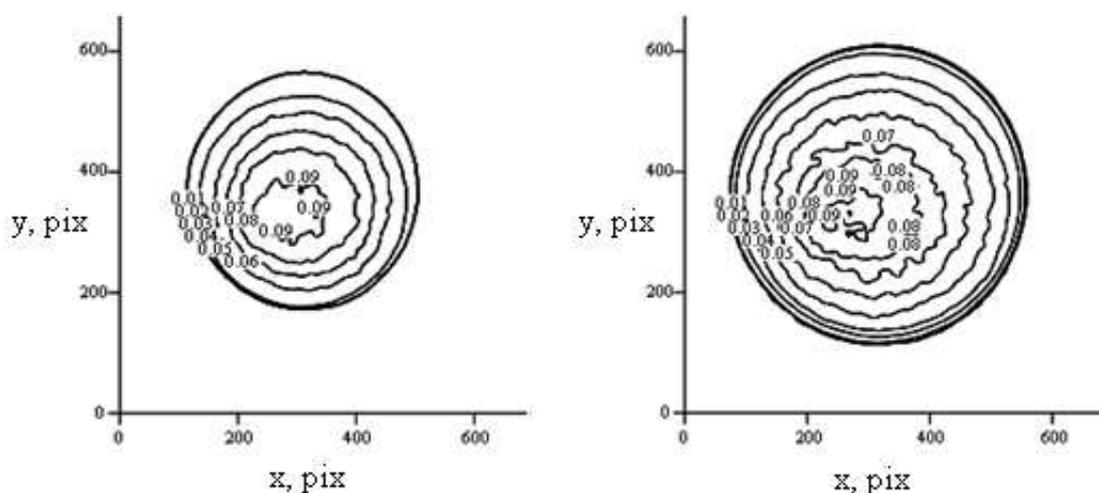


Рис. 2. Поля концентрации красного анилинового красителя (концентрация в %)

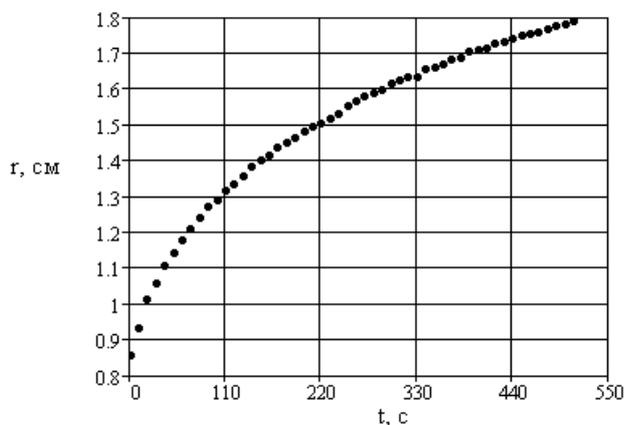


Рис. 3. Эволюция радиуса диффузионного пятна красного анилинового красителя

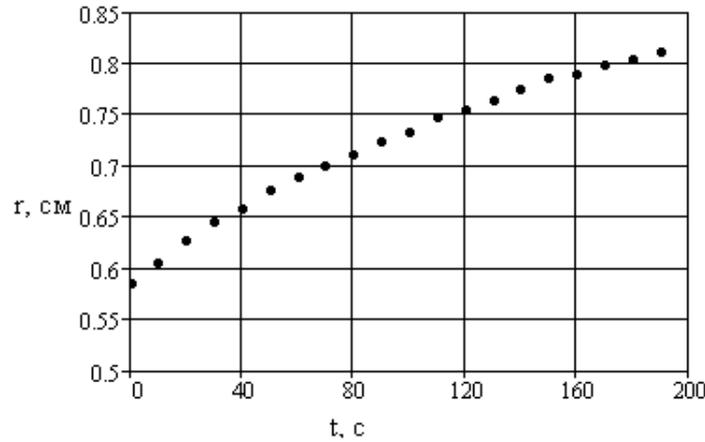


Рис. 4. Эволюция радиуса диффузионного пятна перманганата калия

По зависимости радиуса диффузионного пятна от времени (см. рис. 3, 4) можно определить коэффициент диффузии. Решение двумерной задачи в бесконечном слое имеет следующий вид:

$$c(r, t) = \frac{A}{4\pi Dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}. \tag{1}$$

По аналогии со средним квадратом расстояния, проходимого частицей диффундирующего вещества в трехмерном случае $\overline{r^2} = 6Dt$ [3], определим средний квадрат расстояния проходимого частицей в плоском слое:

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 \omega(r, t) dr = \int_0^\infty \frac{r^3}{2Dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} dr = 4Dt, \tag{2}$$

$$\omega(r, t) dr = \frac{c(r, t)}{A} \cdot 2\pi r dr, \tag{3}$$

где $\omega(r, t) dr$ — вероятность нахождения частицы в момент времени t на расстоянии между r и $r + dr$ от исходной точки. Коэффициенты диффузии, согласно (2):

$D_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(r(510) - r(130))^2}{380s} = 1,24 \cdot 10^{-4} \frac{cm^2}{s}$, $D_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(r(190) - r(60))^2}{130s} = 0,29 \cdot 10^{-4} \frac{cm^2}{s}$, где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии красного анилинового красителя и перманганата калия в воде соответственно.

Центрально-симметричная электродиффузия. Задача рассматривается на примере электродиффузии перманганата калия в дистиллированной воде. Для предотвращения возникновения процесса электролиза внешние электроды изолируются. Для создания центральной симметрии используется точечный и цилиндрический электроды. Как известно, перманганат калия образует в воде ионный раствор, содержащий катионы K^+ и анионы MnO_4^- . При наложении внешнего поля начнется дрейф ионов и появится дополнительный (к диффузионному) электрофоретический поток концентрации:

$$\mathbf{j} = -\frac{q}{|q|} c \mu \mathbf{E}, \tag{4}$$

где q — заряд ионов, μ — электрофоретическая подвижность, \mathbf{E} — электрическое поле (суперпозиция внешнего поля и экранирующего поля внутреннего объемного заряда, появляющегося при дрейфе ионов). Ввиду того, что катионы и анионы дрейфуют в противоположные стороны, вместо концентрации перманганата калия следует рассматривать концентрации положительно и отрицательно заряженных ионов. Окрас раствора перманганата обусловлен наличием анионов MnO_4^- .

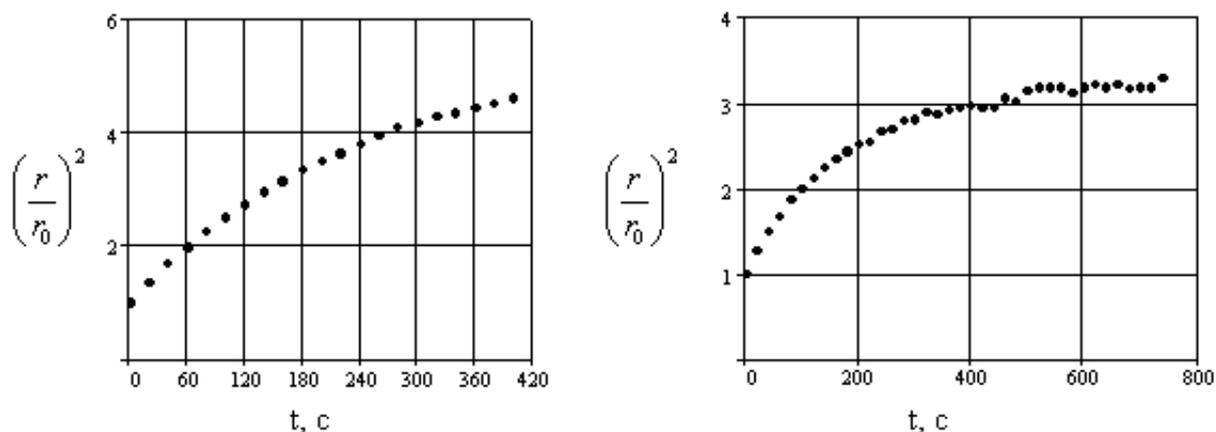


Рис. 5. Эволюция квадрата радиуса диффузионного пятна (слева при положительном потенциале на цилиндрическом электроде, справа — при отрицательном)

Как видно из рис. 5, характер процесса существенно зависит от направления внешнего электрического поля, в первом случае процесс роста диффузионного пятна ускоряется, во втором замедляется.

Список литературы

- [1] Форсайт, Дэвид А., Понс, Жан. Компьютерное зрение. Современный подход.:Пер. с англ. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004–928 с.: ил. Парал. тит. англ.
- [2] Скляренко М.С., Марценюк М.А. Идентификация параметров механических колебаний по данным скоростной фотосъемки // Телекоммуникационные и информационные системы. Труды междунар. конф. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10. Т 6. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

Sklyarenko M.S., Martsenyuk M.A. *Experimental research of diffusion process using computer vision methods.* A method of quantitative analysis of concentration distribution in colored solutions is proposed. The method is based on the computer processing of photographs of diffusion stages. Experimental results on diffusion in two-component water solutions which were obtained using this method are observed.

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ПОМЕЩЕНИЯХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРАКТИЧЕСКОЙ АУРАЛИЗАЦИИ

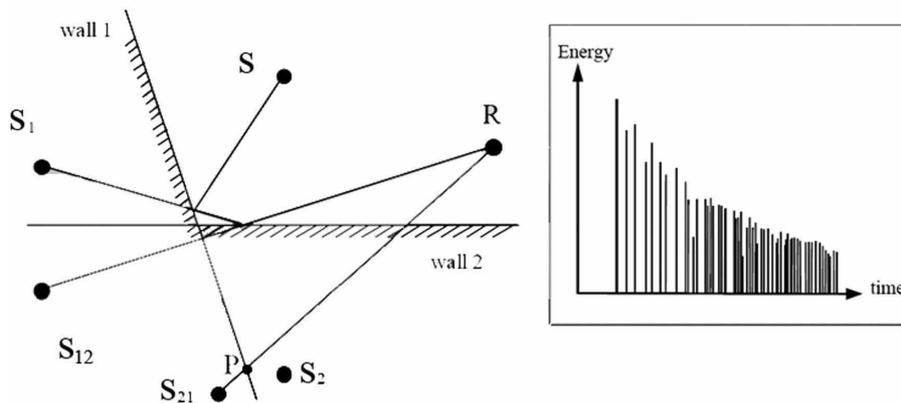
Тодоров Н. Ф.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе исследуется переотражение акустической волны, сгенерированной точечным источником и переотразившейся произвольное число раз на системе отражающих поверхностей. Описывается качественный механизм звукообразования в замкнутых помещениях и анализируется возникновение эффекта реверберации. Рассматривается моделирование звучания реальных звуковых сигналов в тестовой комнате. Полученные результаты могут быть использованы в аурализации при виртуальном моделировании акустики помещения.

Рассмотрим высокочастотную монохроматическую сферическую волну, падающую на систему рассеивателей от точечного источника в точке x_0 . Если любой луч вида $x_0 - y - x$ отражается от поверхности S только один раз, тогда, согласно физической теории дифракции Кирхгофа, давление $p(x)$ в отраженной волне определяется следующим интегралом:

$$p(x) = \iint_S 2p^{inc}(y) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial n_y} dS. \quad (1)$$



$$S \rightarrow S_{n_1} \rightarrow S_{n_1 n_2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{n_1 n_2 \dots n_{i-1}} \rightarrow S_{n_1 n_2 \dots n_i}$$

Рис. 1. Построение переотражений звуковых лучей методом мнимых источников

Здесь $p^{inc}(y)$ — значение давления в падающей волне на границе S , Φ — потенциал фундаментального решения (функция Грина), n_y — внешняя нормаль к поверхности S в точке y , k — волновое число.

$$p^{inc}(y) = e^{ik|x_0-y|} |x_0 - y|^{-1},$$

$$\Phi(y, x) = (4\pi)^{-1} e^{ik|x-y|} |x - y|^{-1}. \quad (2)$$

Давление в точке x_{N+1} в переотраженной произвольное число N раз акустической волне составляет модификация интегрального представления Кирхгофа. После некоторых преобразований его можно представить в виде $2N$ кратного интеграла

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n \iint_{S_N^*} * \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|. \quad (3)$$

Применяя к (3) метод многомерной ($2N$ -мерной) стационарной фазы:

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{L_0} \prod_{n=1}^N \frac{\cos \gamma_n}{L_n} \frac{\exp \left\{ i \left[k \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N} + 2N) \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_{2N})|}} \quad (4)$$

где $D_{2N} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N$ — симметричная матрица гессiana ленточной структуры с шириной ленты, равной семи. Параметр $\delta_{2N} = \text{sign } D_{2N}$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы D_{2N} . Выпишем диагональные элементы d_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{c} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{array} \right\} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{array} \right\} \cos \gamma_n, \quad (5)$$

а внедиагональные элементы имеют похожий вид и не приводятся в целях сокращения записи.

Здесь $\{-\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, -\cos \gamma_n\}$ — направление падающего луча, $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) — главные кривизны поверхности в точке y_n^* ,

Полученные формулы позволяют рассчитать амплитуду любого акустического луча, переотразившегося произвольное число раз в общем случае от любого множества гладких криволинейных отражателей. Такой явный вид является более удобной альтернативой широко распространенному методу мнимых источников (см. рис. 1), при использовании которого основной сложностью является построение полного множества самих мнимых источников.

На основе полученных результатов была разработана компьютерная программа AIST. С её помощью, задав помещение, можно построить полную картину переотражений звуковых лучей и, следовательно, полную форму акустического импульса, формирующегося в процессе многократных переотражений как показано на рис. 2.

Рассмотрим некоторый источник звука, который создаёт определенный акустический сигнал, представляющий собой звуковую волну с зависимостью звукового

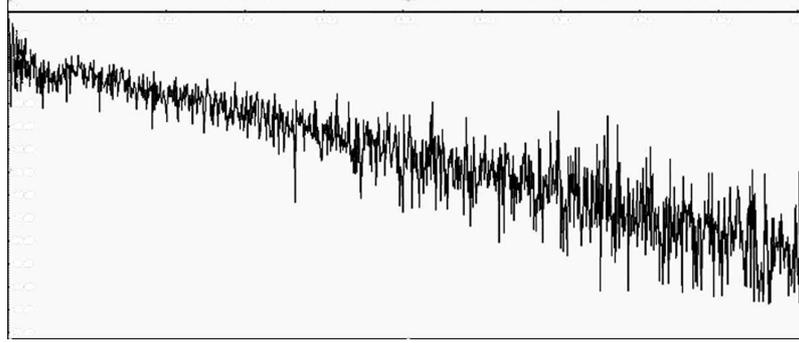


Рис. 2. Форма акустического импульса при многократных переотражениях звуковых лучей от отражающих поверхностей помещения

давления от времени: $p_1(t)$. Затем этот сигнал определенным образом изменяется помещением за счет отражений звуковых волн, процессов затухания, дифракции и т.д. Если рассматривать помещение как линейный фильтр [1,2], который имеет свою амплитудно-временную характеристику $p_r(t)$, то в каждой точке пространства суммарный сигнал получается как “свертка” сигнала источника и характеристика помещения:

$$p^{(\Sigma)}(\tau) = p_1 \oplus p_r = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\tau) p_r(\tau - t) dt. \quad (6)$$

Как формируется слышимый сигнал и возникает эффект реверберации, т.е. задержка длительности акустического импульса за счет переотражений? Сначала рассмотрим простой случай, когда переотражений нет, а сигнал представляет собой дельта-функцию с задержкой t_0 по сравнению с исходным моментом времени. Такая ситуация похожа на выстрел стартового пистолета в безэховой камере.

Пусть для обработки записанного звукового фрагмента используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [3], т.е.

$$P_m = \sum_{j=1}^N p_j e^{2\pi i \frac{mj}{N}}, \quad p_j = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N P_m e^{-2\pi i \frac{mj}{N}}, \quad (7)$$

а для перехода к спектральному составу акустического отклика помещения — континуальное преобразование Фурье:

$$P_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{E_0} \delta(t - t_0) e^{2\pi i f t} dt = \sqrt{E_0} e^{2\pi i f t_0}, \quad f = f_m = m, \quad (8)$$

где E_0 — энергия выстрела. Тогда обращение произведения двух спектральных характеристик дает

$$p_j^{(\Sigma)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N P_m \sqrt{E_0} e^{2\pi i f_m t_0} e^{-2\pi i f_m t_j} = \frac{\sqrt{E_0}}{N} \sum_{m=1}^N P_m e^{-2\pi i m \frac{j-t_0}{N}} = \sqrt{E_0} p_{j-t_0}. \quad (9)$$

При выводе этих соотношений принималось, что рассматривается временной интервал $0 \leq t \leq T = N$, при этом $t_j = j$, $j = 1, \dots, N$ и $f_m = m$, $m = 1, \dots, N$. При этом частота звучания $f_m = m$ выражена в Гц.

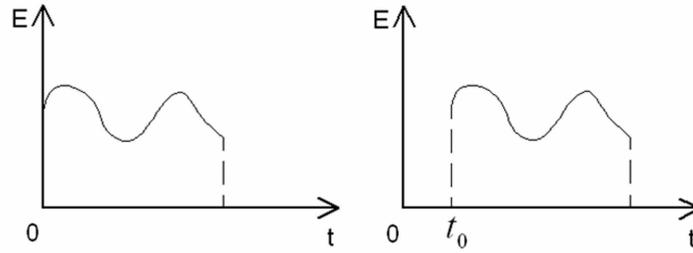


Рис. 3. Моделирование эффекта задержки сигнала при отсутствии отражений от окружающих поверхностей

Таким образом, искомый сигнал совпадает с исходным, но “сдвинутым”, во времени, достигая слушателя, находящегося на некотором расстоянии от источника звука, — как показано на рис. 3.

Теперь рассмотрим ситуацию с переотражением сигнала. Для простоты ограничимся случаем однократного переотражения, как показано на рис. 4.

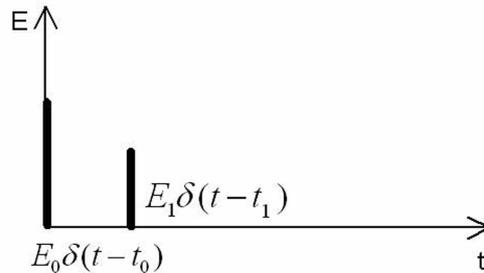


Рис. 4. Импульсный отклик помещения при однократном отражении

Образ Фурье для отклика, показанного на рис. 4, равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{E_0}\delta(t-t_0) + \sqrt{E_1}\delta(t-t_1)]e^{2\pi ift} dt = \sqrt{E_0}e^{2\pi ift_0} + \sqrt{E_1}e^{2\pi ift_1}. \quad (10)$$

Тогда обращение произведения двух образов Фурье, (7) и (10), принимает следующий вид

$$\begin{aligned} p_j^{(\Sigma)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_m [\sqrt{E_0}e^{2\pi if_m t_0} + \sqrt{E_1}e^{2\pi if_m t_1}] e^{-2\pi i \frac{mj}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_m [\sqrt{E_0}e^{-2\pi im \frac{j-j_0}{N}} + \sqrt{E_1}e^{-2\pi im \frac{j-j_1}{N}}] = \sqrt{E_0}p_{j-j_0} + \sqrt{E_1}p_{j-j_1}, \quad (11) \\ t_0 &= \frac{j_0}{N}, \quad t_1 = \frac{j_1}{N}, \quad 0 \leq j_0, j_1 \leq N, \quad f_m = m. \end{aligned}$$

В этом случае слушатель будет воспринимать кроме самого сигнала и его первое переотражение — начиная с момента времени к сигналу будет “добавляться”,

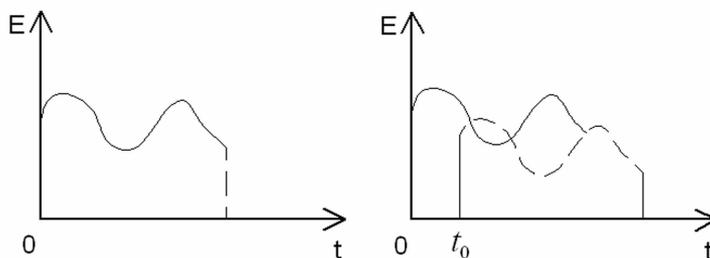


Рис. 5. Наложение исходного сигнала и сигнала с задержкой при однократном отражении звукового луча

его уменьшенная копия. Можно рассмотреть дальнейшие переотражения и получить полную картину реверберационного эффекта, возникающего в помещении, что и реализовано в разработанной программе для аурализации [4].

Список литературы

- [1] *Kuttruff K.H.* Auralization of impulse responses modeled on the basis of Ray-Tracing results // *J. Audio Eng.Soc.* 1993. 41. P. 876–880.
- [2] *R. Heinz.* Binaurale Raumsimulation mit Hilfe eines kombinierten Verfahrens - Getrennte Simulation der geometrischen und diffusen Schallanteile // *Acustica*, 1993. № 79. S. 207–217.
- [3] *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
- [4] *Сумбатян М.А., Боев Н.В., Тодоров Н.Ф.* Алгоритмы траекторий звуковых лучей в акустике помещений // Сборник трудов XVIII сессии Российского акустического общества. М.: ГЕОС, 2006. Т. 3 С. 191–195.

Todorov N.F. *Acoustic signal processing for sound propagation in rooms with application to practical auralization.* In the present paper we study re-reflections of the acoustic wave generated by a point source and arbitrarily re-reflected on a system of reflecting surfaces. We describe a qualitative nature of sound production in closed spaces and analyze the initiation of the reverberation effect. A sounding of real acoustic signals in test rooms is simulated. The obtained results can be used for auralization in virtual modeling of room acoustics.

ОБ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Устинов Ю. А., Романова Н. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Задачи Сен-Венана чистого изгиба и изгиба поперечной силой цилиндра с винтовой анизотропией сведены к краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Интегрирование задач осуществлено аналитическим и численным методами. Исследовано поведение жесткостей и напряженно-деформированного состояния в зависимости от параметров задачи.

Один из способов получения цилиндра с винтовой анизотропией заключается в винтовой намотке тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием их полимерным связующим [1]–[4]. В результате получается композитный материал, который при достаточном количестве слоев намотки можно считать локально трансверсально-изотропным с главной осью симметрии, направленной по касательной к винтовой линии.

Рассмотрим цилиндрическое тело объема $V = S \times [0, L]$, S — кольцо с внутренним и внешним радиусом r_1, r_2 соответственно, L — его длина. С геометрическим центром одного из поперечных сечений цилиндра свяжем декартову (основную) систему координат x_1, x_2, x_3 и цилиндрическую (сопутствующую) систему координат r, θ, z , связанную с первой соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z \quad (\tau = \text{const}).$$

Боковая поверхность цилиндра считается свободной от напряжений.

Решение задачи Сен-Венана [1]–[4] для цилиндра с винтовой анизотропией представляется в виде суммы двенадцати элементарных решений, шесть из которых определяют смещения ЦВА как твердого целого, а остальные шесть являются решениями спектральных задач на сечении $z = \text{const}$.

Решение Сен-Венана задач изгиба [2, 3], является линейной комбинацией ЭР, отвечающих СЗ $\gamma_1^\pm = \pm i\tau$, и может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}_S = 2\text{Re} \left(\sum_{l=1}^4 C_l \mathbf{u}_l(x) \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(z) &= e^{i\tau z} \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_2(z) &= e^{iz} (z\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{u}_3(z) &= e^{i\tau z} \left(\frac{z^2}{2} \mathbf{a}_1 + z\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \right), & \mathbf{u}_4(z) &= e^{i\tau z} \left(\frac{z^3}{6} \mathbf{a}_1 + \frac{z^2}{2} \mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \right) \\ \mathbf{a}_1 &= (e^{i\theta}, ie^{i\theta}, 0)^T, & \mathbf{a}_2 &= (0, 0, -re^{i\theta})^T, \\ \mathbf{a}_3 &= (a_{r,3}e^{i\theta}, ia_{\theta,3}e^{i\theta}, ia_{z,3}e^{i\theta})^T, & \mathbf{a}_4 &= (ie^{i\theta}a_{r,4}, -e^{i\theta}a_{\theta,4}, -e^{i\theta}a_{z,4})^T. \end{aligned}$$

Здесь C_l — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничным условиям на торцах цилиндра.

Исходная трехмерная задача Сен-Венана в случае изгиба сводится к краевым задачам для систем трех дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно функций $a_{r,s}$, $a_{\theta,s}$, $a_{z,s}$. Интегрирование таких систем при произвольных значениях параметра τ возможно только численными методами. Однако, при малых значениях безразмерного параметра $\tau_0 = \tau r_2$ методом малого параметра можно получить приближенные аналитические решения.

В случае малой крутки решение $a_{j,s}$ ищется в виде разложения по τ_0 с сохранением главных членов разложений. После его подстановки в соответствующие краевые задачи и их интегрирования в случаях $s = 3$ и $s = 4$ будем иметь:

$$\begin{aligned} a_{r,3} &= \frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau_0^2), & a_{\theta,3} &= -\frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau_0^2), \\ a_{z,3} &= \frac{\tau_0 B_1}{8c_{44} r_2} \left[r^3 - 3(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{3r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau_0^3), \\ b_{rz,3} &= \frac{3\tau_0 B_1}{8r_2} \left(r^2 - r_1^2 - r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r} \right) + O(\tau_0^3), \\ b_{\theta z,3} &= -\frac{3\tau_0 B_1}{r_2} \left(3r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) + O(\tau_0^3), \\ b_{zz,3} &= -E' r + O(\tau_0^2), & b_{rr,3} &= b_{\theta\theta,3} = b_{r\theta,3} = O(\tau_0^2); \\ a_{r,4} &\simeq O(\tau_0), & a_{\theta,4} &\simeq O(\tau_0), \\ a_{z,4} &= \frac{1}{8G' r_2} \left[B_2 r^3 - B_3(r_1^2 + r_2^2)r - B_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau_0^2), \\ b_{rz,4} &= \frac{B_3}{8} \left[r^2 - (r_1^2 + r_2^2) + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right] + O(\tau_0^2), \\ b_{\theta z,4} &= \frac{1}{8} \left[B_2 r^2 - B_3(r_1^2 + r_2^2) - B_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right] + O(\tau_0^2), \\ b_{rr,4} &\simeq b_{\theta\theta,4} \simeq b_{zz,4} \simeq b_{r\theta,4} \simeq O(\tau_0). \end{aligned}$$

Здесь $\nu' = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}$, $E' = c_{33} - 2\nu' c_{13}$, $G' = c_{44}$,
 $B_1 = E' - 2(1 + \nu')G'$, $B_2 = E' + 2\nu'G'$, $B_3 = 3E' + 2\nu'G'$.

Рассмотрим для примера краевую задачу со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0 : & \quad u_r = u_\theta = u_z = 0 \\ z = L : & \quad \sigma_{rz} = p_r, \quad \sigma_{r\theta} = p_\theta, \quad \sigma_{rz} = p_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Будем предполагать, что вектор внешних усилий p_r, p_θ, p_z в интегральном смысле эквивалентен поперечным силам Q_{x_1}, Q_{x_2} и изгибающим моментам $M_{x_1}^*, M_{x_2}^*$.

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (p_r - ip_\theta) e^{-i(\theta+\tau L)} r dr d\theta = Q_{x_1} - iQ_{x_2}, \quad \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p_z e^{-i(\theta+\tau L)} r^2 dr d\theta = -iM_{x_1}^* - M_{x_2}^*,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p_z r dr d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p_\theta r^2 dr d\theta = 0.$$

После вычисления $\sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zz}$, отвечающих решению (1), и подстановки их в (2) с последующим интегрированием и учетом соотношений обобщенной ортогональности [3] получаем

$$dC_4 = Q_{x_1} - iQ_{x_2}, \quad dC_3 + (Ld + d')C_4 = iM_{x_1}^* + M_{x_2}^*, \quad (3)$$

где $d = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} b_{zz,3} r^2 dr$, $d' = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} b_{zz,4} r^2 dr$ — элементы матрицы жесткостей [3]. При $\tau = 0$ $d = \pi E'(r_2^4 - r_1^4)/2$, $d' = 0$.

Постоянные C_3, C_4 на основании уравнений (3) определяются “точно”, постоянные C_1, C_2 “точно” могут быть определены только на основе решения бесконечной системы алгебраических уравнений. Метод построения одного из вариантов такой системы приведен в [3, 5]. Асимптотический анализ таких систем показывает, что C_1, C_2 имеют порядок r_2/L , и поэтому можно положить $C_1 = C_2 = 0$.

Приведем формулы для смещений и напряжений. В случае чистого изгиба имеем:

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= -\frac{M_{x_1}^*}{d}(a_{r,3} - a_{\theta,3}) \sin 2\psi + \frac{M_{x_2}^*}{d}(z^2 + 2a_{r,3} \cos^2 \psi + 2a_{\theta,3} \sin^2 \psi) \\ u_{x_2} &= -\frac{M_{x_1}^*}{d}(z^2 + 2a_{r,3} \sin^2 \psi + 2a_{\theta,3} \cos^2 \psi) - \frac{M_{x_2}^*}{d}(a_{r,3} - a_{\theta,3}) \sin 2\psi \\ u_{x_3} &= \frac{M_{x_1}^*}{d}(zr \cos \psi + a_{z,3} \cos \psi) - \frac{M_{x_2}^*}{d}(zr \cos \psi + a_{z,3} \sin \psi) \\ \sigma_n &= 2b_{n,3} \left(\frac{M_{x_2}^*}{d} \cos \psi - \frac{M_{x_1}^*}{d} \sin \psi \right) \quad (n = 1, 2, 3, 4) \\ \sigma_n &= -2b_{n,3} \left(\frac{M_{x_1}^*}{d} \cos \psi + \frac{M_{x_2}^*}{d} \sin \psi \right) \quad (n = 5, 6) \end{aligned}$$

Если в формулах для смещений положить $r = 0$ и учесть, что для сплошного цилиндра на его оси $a_{r,3} = a_{\theta,3} = a_{z,3} = 0$, получаем классические уравнения изогнутой оси стержня

$$u_{x_1}^0 = \frac{M_{x_2}^*}{d} z^2, \quad u_{x_2}^0 = -\frac{M_{x_1}^*}{d} z^2.$$

В случае изгиба поперечными силами имеем:

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= \frac{Q_{x_1}}{d} \left[\frac{z^3}{3} - L'z^2 + 2(z - L')(a_{r,3} \cos^2 \psi + a_{\theta,3} \sin^2 \psi) \right] + \\ &+ \frac{Q_{x_2}}{d} [(z - L') \sin 2\psi - 2(a_{r,4} \cos^2 \psi + a_{\theta,4} \sin^2 \psi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{x_2} &= \frac{Q_{x_2}}{d} \left[\frac{z^3}{3} - L'z^2 + 2(z - L')(a_{r,3} \sin^2 \psi + a_{\theta,3} \cos^2 \psi) \right] + \\
&+ \frac{Q_{x_1}}{d} \left[(z - L') \sin 2\psi - 2(a_{r,4} \cos^2 \psi + a_{\theta,4} \sin^2 \psi) \right] \\
u_{x_3} &= \frac{Q_{x_1}}{d} \left[-r \left(\frac{z^2}{2} - L'z \right) \cos \psi + (z - L')a_{z,3} \sin \psi - a_{z,4} \cos \psi \right] + \\
&+ \frac{Q_{x_2}}{d} \left[-r \left(\frac{z^2}{2} - L'z \right) \sin \psi + (z - L')a_{z,3} \cos \psi - a_{z,4} \sin \psi \right] \\
\sigma_n &= 2b_{n,3} \left[\frac{Q_{x_1}^*}{d} (z - L') \cos \psi - \frac{Q_{x_2}^*}{d} (z - L') \sin \psi \right] - \\
&- 2b_{n,4} \left[\frac{Q_{x_1}^*}{d} \sin \psi + \frac{Q_{x_2}^*}{d} \cos \psi \right] \quad (n = 1, 2, 3, 4) \\
\sigma_n &= -2b_{n,3} \left[\frac{Q_{x_1}^*}{d} (z - L') \sin \psi + \frac{Q_{x_2}^*}{d} (z - L') \cos \psi \right] + \\
&+ 2b_{n,4} \left(\frac{Q_{x_2}^*}{d} \sin \psi - \frac{Q_{x_1}^*}{d} \cos \psi \right) \quad (n = 5, 6),
\end{aligned}$$

где $L = L' + d'/d$. Для индекса n имеют место следующие соотношения эквивалентности: $1 \sim rr$, $2 \sim \theta\theta$, $3 \sim zz$, $4 \sim z\theta$, $5 \sim rz$, $6 \sim r\theta$.

Уравнения изогнутой оси в данном случае имеют вид

$$u_{x_1}^0 = \frac{Q_{x_1}}{d} \left(\frac{z^3}{3} - L'z^2 \right), \quad u_{x_2}^0 = \frac{Q_{x_2}}{d} \left(\frac{z^3}{3} - L'z^2 \right).$$

При $\alpha = 0, \alpha = 90^0$ ($\alpha = \arctg \tau_0$), когда винтовая анизотропия вырождается в цилиндрическую, $L' = L$.

Для получения численного решения используется метод прогонки, который сводит интегрирование исходной задачи к интегрированию шести задач Коши для системы шести дифференциальных уравнений первого порядка.

Приведем некоторые результаты численного анализа задачи. Все расчеты проводились для цилиндра из композитного материала со следующими усредненными упругими характеристиками (кгс/см²):

$$E = 3.692 \cdot 10^6, \quad E' = 1.587 \cdot 10^6, \quad G' = 1.073 \cdot 10^6, \quad \nu = 0.31, \quad \nu' = 0.33.$$

На основе численного интегрирования были исследованы зависимости нормированных элементов матрицы жесткостей $d_* = d/d_0$, $d'_* = d'/(r_2 d_0)$ ($d_0 = E'r_2^4(1 - a^4)/2$) от параметра $\alpha = \arctg \tau_0$ для $\alpha \in [0, 90^0]$ при различных значениях параметра $a = r_1/r_2$.

На рис. 1 приведены графики d_* , на рис. 2 — d'_* . Кривые 1 отвечают $a = 0.1$, кривые 2 — $a = 0.4$, кривые 3 — $a = 0.9$.

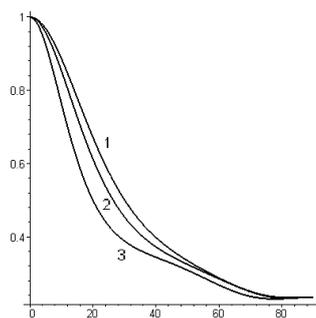


Рис. 1

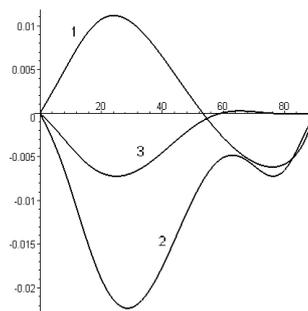


Рис. 2

На рис. 3 и рис. 4 представлены графики соответственно $b_{zz,3}$, $b_{zz,4}$, отвечающие значению $\alpha = 30^\circ$ и иллюстрирующие распределение нормальных напряжений σ_{zz} по поперечному сечению.

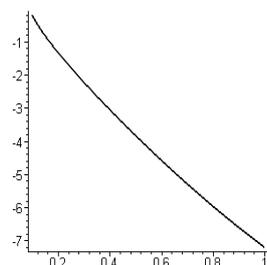


Рис. 3

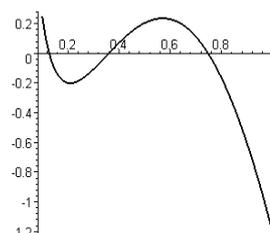


Рис. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (07-01-00254а) и Южного федерального университета.

Список литературы

- [1] Устинов Ю.А. Решение задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией // Докл. РАН, 2001, т. 360, № 6. С. 770–773.
- [2] Устинов Ю.А. Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // ПММ, 2003, т. 67, вып. 1. С. 89–98.
- [3] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: “Наука”. 2003. 128 с.
- [4] Устинов Ю.А. Некоторые задачи для цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики, 2003, № 4. С. 37–62.
- [5] Друзь А.Н., Устинов Ю.А. Тензор Грина для упругого цилиндра и приложения его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 102–110.

Ustinov U.A., Romanova N.M. *About the bending of a cylinder with helical anisotropy.* The Saint-Venant’s problems of pure bending and bending under cross forces are reduced to the boundary problems for ordinary differential systems with variable coefficients. The integration is realised by analytical and numerical methods. The bending rigidity and stress-strain state behaviour in depending on different parameters is researched.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КОНВЕКЦИИ ДАРСИ

Цибулин В. Г.

Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону

Анализируются режимы плоской задачи фильтрационной конвекции при возмущении краевых условий, разрушающем косимметрию. В численном эксперименте на основе метода конечных разностей изучено влияние неравномерности нагрева и фильтрации через боковые стенки на формирующиеся режимы.

Непрерывное семейство стационарных решений в системе дифференциальных уравнений может возникать из-за имеющейся в задаче симметрии или косимметрии [1]. В отличие от систем с симметрией косимметричные семейства равновесий обладают переменным спектром устойчивости [2], что приводит к новым эффектам: неустойчивости части равновесий семейства, ответвлению одного предельного цикла от участка дуги семейства, перезамыканию ветвей семейств. В.И. Юдович отмечал, что исследование вырожденной косимметричной ситуации помогает общему анализу динамики системы. В [3] рассмотрен распад семейства равновесий динамической системы при возмущении, разрушающем косимметрию, и показано, что в условиях общего положения сохраняется не более конечного числа равновесий. Если исчезают все равновесия, то семейство равновесий превращается в предельный цикл с большим периодом при малом возмущении.

В настоящей работе проводится исследование распада семейства стационарных режимов для задачи Дарси при помощи численной схемы [4], основанной на методе конечных разностей и сохраняющей свойство косимметрии. Рассмотрена конвекция в прямоугольнике при неравномерном нагреве и при фильтрации жидкости через боковые стенки, проанализировано поведение системы для больших значений неоднородности краевых условий. При аппроксимации, которая не наследует косимметрии рассматриваемой задачи, возможно разрушение косимметричного семейства стационарных состояний, в этом случае вместо семейства стационарных состояний в расчетах получается конечное число изолированных равновесий [4].

1 Уравнения конвекции Дарси

Для жидкости, подчиняющейся закону Дарси, уравнения в безразмерных переменных имеют вид

$$\theta_t = \Delta\theta + \lambda\psi_x + J(\theta, \psi), \quad 0 = \Delta\psi - \theta_x. \quad (1)$$

Здесь θ – отклонение температуры от равновесного профиля, ψ – функция тока, t – время, x, y – декартовы координаты, $J(\theta, \psi) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x$ λ – фильтрационное число Рэлея. На границе области $\mathcal{D} = [0, a] \times [0, b]$ задаются краевые условия,

соответствующие неравномерности распределения температуры на нижней кромке и постоянной скорости протекания жидкости через боковые стенки

$$\begin{aligned} \theta(x, 0, t) &= \eta_0 f(x); & \theta(x, y, t) &= 0, & (x, y) &\in \partial\mathcal{D} \setminus \{y = 0\}; \\ \psi(x, y, t) &= \mu y, & (x, y) &\in \partial\mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное условие для системы (1) ставится только для температуры: $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$, так как функция тока определяется по θ_0 из краевой задачи для ψ .

При $\eta_0 = \mu = 0$ система (1)–(2) имеет равновесие $\theta = \psi = 0$, и критические значения числа Рэлея даются формулой $\lambda_{nm} = 4\pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2)$, где m и n – целые числа. В [2] показано, что первое критическое значение λ_{11} двукратно для произвольной области, и при переходе λ через λ_{11} от нулевого равновесия ответвляется семейство стационарных режимов, обладающее переменным спектром. Система (1)–(2) при $\eta_0 = \mu = 0$ глобально разрешима и диссипативна, и косимметрией является функция тока ψ [1, 2].

2 Метод конечных разностей

Для численного решения системы (1)–(2) используется метод конечных разностей [4]. По пространственным координатам вводятся сетки $x_n = nh_x$, $n = 0, \dots, N+1$, $h_x = a/(N+1)$, $y_m = mh_y$, $m = 0, \dots, M+1$, $h_y = b/(M+1)$. Температура θ и функция тока ψ определяются в узлах (x_n, y_m) . При аппроксимации используются также смещенные сетки $x_{n+1/2} = (x_n + x_{n+1})/2$, $y_{m+1/2} = (y_m + y_{m+1})/2$.

На двухточечном шаблоне вводятся разностные операторы первых производных и вычисления среднего, охватывающие случаи целых и полуцелых n и m ,

$$\begin{aligned} (\delta_x f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} - f_{n, m}}{x_{n+1} - x_n}, & (\delta_y f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} - f_{n, m}}{y_{m+1} - y_m}, \\ (\delta_{0x} f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} + f_{n, m}}{2}, & (\delta_{0y} f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} + f_{n, m}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

С использованием (3) задаются первые разностные производные на трехточечном шаблоне и дискретный аналог лапласиана

$$(D_x f)_{n, m} = (\delta_x \delta_{0x} f)_{n, m}, \quad (D_y f)_{n, m} = (\delta_y \delta_{0y} f)_{n, m}, \quad (\Delta_h f)_{n, m} = (\delta_x \delta_x f + \delta_y \delta_y f)_{n, m}.$$

Для вычисления среднего и первых производных в четырехугольнике применяются следующие композиции разностных операторов:

$$d_0 = \delta_{0x} \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_{0x}, \quad d_x = \delta_x \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_x, \quad d_y = \delta_y \delta_{0x} \equiv \delta_{0x} \delta_y.$$

Для аппроксимации якобиана используется схема Аракавы

$$J_{n, m}(\theta, \psi) = \beta [D_x (\theta D_y \psi) - D_y (\theta D_x \psi)]_{n, m} + (1 - \beta) [d_x (d_0 \theta d_y \psi) - d_y (d_0 \theta d_x \psi)]_{n, m},$$

которая сохраняет свойство косимметрии для всех значений параметра β и при $\beta = 1/3$ обеспечивает дополнительно выполнение условия гироскопичности,

Конечно-разностные аналоги уравнений (1) записываются для узлов (x_n, y_m) , $n = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$

$$\dot{\theta}_{nm} = (\Delta_h \theta + \lambda D_x \psi)_{nm} + J_{n,m}(\theta, \psi), \quad 0 = (\Delta_h \psi - D_x \theta)_{nm}. \quad (4)$$

Краевые условия представляются следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_{n,0} = 0, \quad \psi_{n,M+1} = 0, \quad \theta_{n,0} = \eta_0 f(x_n), \quad \theta_{n,M+1} = 0, \quad n = 0, \dots, N+1, \quad (5) \\ \theta_{0,m} = \theta_{N+1,m} = 0, \quad \psi_{0,m} = \psi_{N+1,m} = \mu y_m, \quad m = 0, \dots, M+1. \end{aligned}$$

Система (4)–(5) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком точности. Полученная в результате дискретизации система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана для вектора узловых значений температуры Θ

$$\dot{\Theta} = (A + \lambda B A^{-1} B) \Theta + F(\Theta). \quad (6)$$

Здесь матрицы A и B отвечают аппроксимациям лапласиана и первой производной по x , а $F(\Theta)$ есть аппроксимация нелинейных членов.

Для интегрирования полученной системы применяется метод Рунге-Кутты. В [2] показано, что при λ , слегка больших λ_{11} , все равновесия на семействе устойчивы. Это позволяет использовать установление для выхода на одно из равновесий семейства. Вычисление всего семейства производится при помощи алгоритма [4]: матрица линеаризации находится численно, ее ядро определяется из SVD-разложения, для уточнения равновесия применяется метод Ньютона, начальное приближение для следующей точки на семействе вычисляется при помощи метода Адамса.

3 Фильтрация через боковые стенки

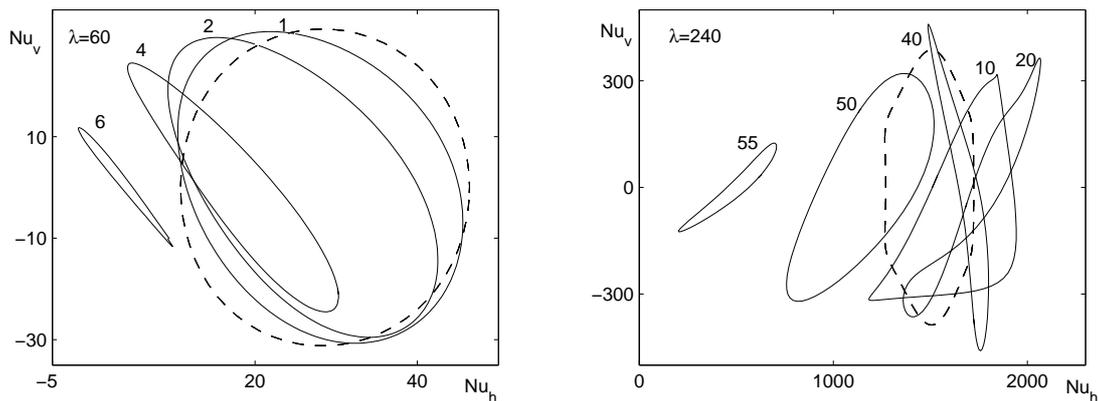


Рис. 1. Семейство равновесий (пунктир) и предельные циклы при различных скоростях протекания жидкости μ : $\lambda = 60$ (слева) и $\lambda = 240$ (справа)

Приведем некоторые результаты численного эксперимента для прямоугольника со сторонами $a = 2$ и $b = 1$, для изображения семейства и орбит предельных циклов использованы интегральные числа Нюссельта $Nu_h = \int_0^b \theta_x(a/2, y) dy$ и $Nu_v = \int_0^a \theta_y(x, 0) dx$.

В [3] описан сценарий, при котором семейство равновесий в задаче конвекции Дарси превращается в предельный цикл большого периода при задании малой фильтрации жидкости через боковые стенки. Из рис. 1 видно, что при малой скорости фильтрации жидкости образующийся предельный цикл располагается вблизи исчезнувшего семейства стационарных решений. С увеличением интенсивности протекания орбита предельного цикла удаляется от кривой семейства равновесий. Дальнейшее повышение скорости протекания приводит к быстрому выносу нагретых жидких частиц и подавлению конвективного режима. При возрастании градиента температуры (рост параметра Рэлея λ) конвективные движения обладают большей сопротивляемостью по отношению к скорости протекания. При $\lambda = 240$ с увеличением μ вначале орбита предельного цикла смещается вправо от кривой семейства, затем происходит деформирование периодического режима, и уже потом большая интенсивность фильтрации приводит к подавлению конвекции.

С увеличением скорости протекания μ уменьшается период цикла T , при этом величина период зависит также от фильтрационного числа Рэлея λ . Однако при разных λ характер изменения периода цикла T от скорости практически не меняется.

4 Неравномерный подогрев снизу

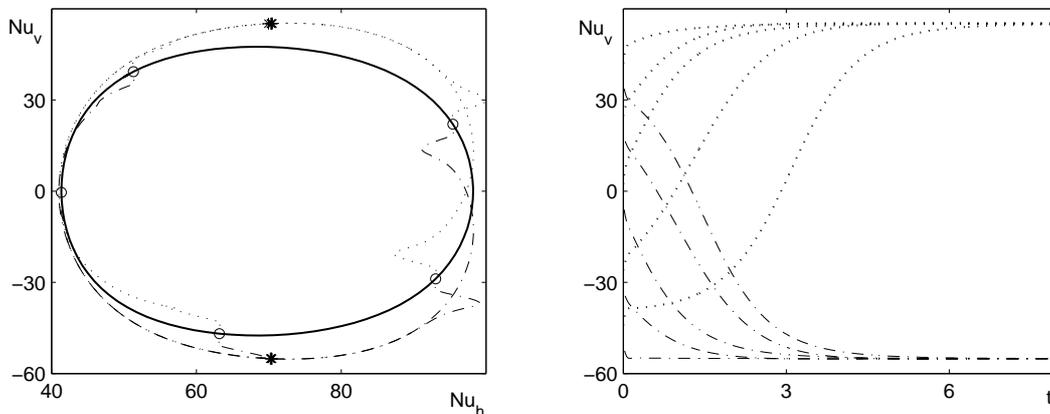


Рис. 2. Семейство равновесий и установление к изолированным стационарам (звезда) при неравномерном подогреве снизу: $\eta_0 = 4$ (пунктир) и $\eta_0 = -4$ (штрихпунктир); $\lambda = 70$, $\kappa_0 = 4$

Расчеты при нулевой скорости фильтрации и неравномерном распределении температуры на дне ($f(x) = \sin(\kappa_0 \pi x/a)$) показали, что в результате разрушения семейства равновесий могут образовываться изолированные стационарные режимы и предельные циклы. Например, при двух гармониках ($\kappa_0 = 4$) семейство распадается на два изолированных равновесия, см. рис. 2. В зависимости от знака амплитуды η_0 устойчивым оказывается одно из равновесий. Установление к изолированному стационарному состоянию происходит вдоль бывшего семейства,

причем чем меньше возмущение граничной температуры, тем медленнее движение к финальному состоянию. При $\kappa_0 = 2$ обнаружены значения параметра Рэлея ($\lambda \in [180, 240]$), для которых вместо косимметричного семейства равновесий появляется предельный цикл.

В [5] проводились численные эксперименты по селекции равновесий семейства для аналогичных возмущений температуры на границе, при этом возмущение задавалось на конечном интервале времени. Было получено, что с увеличением амплитуды подогрева имеется стационарное состояние, к которому стремятся почти все решения, выпущенные из точек, соответствующих равновесиям семейства.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00567) и гранта поддержки ведущей научной школы РФ (проект НШ-5747.2006.1).

Список литературы

- [1] Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
- [2] Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 402–441.
- [3] Юдович В.И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН, 2004. Т. 398. № 1. С. 57–61.
- [4] Karasözen B., Tsybulin V.G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A., 1999. V. 262. P. 321–329.
- [5] Tsybulin V.G., Karasözen B., Ergenç T. Selection of steady states in planar Darcy convection // Physics Letters A. 2006. V. 356. P. 189–194.

Tsybulin V. G. *Numerical study of destruction of the family of steady states in the planar problem of Darcy convection.* The planar problem of natural convection of incompressible fluid in a porous medium is considered. Destruction of the family of steady states under different perturbations is studied via computer experiment based on the finite-difference approach. The results for the rectangular enclosure and different disturbances (heat sources, infiltration) are presented.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА

Шалдырван В. А., Васильев Т. А.
Донецкий национальный университет, Украина

Рассмотрены смешанные задачи изгиба цилиндрических тел с закрепленной боковой поверхностью. На основе МОР и анализа бесконечных систем получены асимптотические соотношения, с помощью которых аналитически обосновывается и совершенствуется алгоритм регуляризации в этих задачах.

В механике деформированного твердого тела для описания границ объекта традиционно используется понятие евклидовой геометрии, т.е. в рассмотрение вводятся упругие тела, граничная поверхность которых может содержать точки с бесконечной кривизной (угловые точки). При определенных ограничениях (граничных условиях) в этих точках становятся неограниченными некоторые характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС), при этом характер сингулярности зависит от последних. Задачам математической физики для областей содержащих угловые точки посвящено большое число работ. В обзоре В.Т. Гринченко и А.Ф. Улитко [1] содержится библиография и анализ существующих направлений по проблеме исследования локальных особенностей физических полей. Особенно отмечены смешанные задачи, в которых на разных частях граничной поверхности задаются условия разного типа. Как правило в окрестности точек (в плоском случае), линий (пространственных задачах) смены типа граничных условий возникает сингулярность в определении некоторых из характеристик НДС.

Исследование особенности является отдельной задачей, которая имеет две принципиально разные реализации. Первый основывается на анализе поля напряжений в окрестности угловой линии пространственного клина, при этом компоненты тензора напряжений представляются в виде разложений по степеням расстояния до угловой линии. В пространственных задачах для составных тел основы этого направления заложены в работе О.К. Аксентян [2]. Вторая реализация основывается на использовании преобразования Меллина и отражена в работах Я.С. Уфлянда [3], D. Vogy [4], G.B. Sinclair [5], M. Williams [6] и др.

Для решения смешанных задач весьма эффективным оказался методом суперпозиции, основанный на анализе бесконечных систем, к которым приводятся эти задачи [7]. В работе Г.С. Буланова и В.А. Шалдырвана [8] в рамках метода однородных решений, с использованием идей [7], решена задача рястяжения-сжатия толстой плиты. В данной работе указанный подход обобщается на задачи изгиба.

§1 Постановка задач и метод решения. Рассмотрим пространственную задачу теории упругости о равновесии изотропного цилиндра $\tilde{V} = \{(\tilde{r}, \theta, \tilde{z}) | \tilde{r} \leq \tilde{R}, |\tilde{z}| \leq H\}$ со смешанными граничными условиями:

на торцах заданы нормальные напряжения

$$\sigma_{zz}(r, \pm 1) = P, \sigma_{rz}(r, \pm 1) = 0, \sigma_{r\theta} \equiv 0, \quad (1)$$

а на боковой поверхности отсутствуют перемещения

$$u(1, z) = w(1, z) = 0, u_\theta \equiv 0 \quad (2)$$

или (другой вариант закрепления) боковая поверхность шарнирно закреплена

$$\sigma_{rr}(1, z) = w(1, z) = 0, u_\theta \equiv 0. \quad (3)$$

Все выкладки, связанные с решением задач, будем производить в безразмерных координатах, выбирая в качестве характерного размера радиус цилиндра \tilde{R} : $r = \tilde{r}/\tilde{R}$, $z = \tilde{z}/\tilde{R} = \tilde{z}/h\tilde{H}$, $u = \tilde{u}/\tilde{R}$, $w = \tilde{w}/\tilde{R}$. ($h = \tilde{H}/\tilde{R}$ — относительная толщина пластины). Силовые характеристики будем относить к $2G_{st}$ (G_{st} — модуль сдвига цилиндра, изготовленного из эталонного материала, в качестве которого выбрана сталь).

Следуя общей схеме метода однородных решений, компоненты вектора перемещений запишем в такой форме [9]

$$\begin{aligned} u(r, z) &= u^n(r, z) + arz + \sum_p n_p(z) A_p P_0^+(\gamma_p^* r) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}, \\ w(r, z) &= w^n(r, z) - \frac{ar^2}{h} + 4hak_1 \left(1 - \frac{\nu z^2}{2}\right) - \sum_p q_p(z) A_p \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}. \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_1 = 1/(1 - \nu)$, ν — коэффициент Пуассона, остальные обозначения совпадают с обозначениями в монографии [10]. Суммирование в (4) осуществляется по корням уравнения $\sin 2\gamma_p - 2\gamma_p = 0$, расположенным в первом квадранте в порядке возрастания модуля. Их асимптотика имеет вид

$$\gamma_p \approx \pi(p - 1/4) + i \ln(4\pi p)/2.$$

Удовлетворение граничных условий модифицированным методом Бубнова-Галеркина приводит к определению неизвестных постоянных a , A_p из БСЛАУ. Для удобства проведения асимптотического анализа последнюю можно структурно записать так

$$\begin{aligned} \alpha_m a + 2Re \sum_p A_p n(\delta_m, \gamma_p) P_0^+(\gamma_p^*) &= c_{1m}/\delta_m^2, \\ \beta_m a - 2Re \sum_p A_p q(\delta_m, \gamma_p) &= c_{2m}/\delta_m^2, m = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{mp} &= \delta_m^2 \cos^2 \gamma_p / (\gamma_p^2 - \delta_m^2)^2, \alpha_m = 2, \beta_m = 1/h - 4hk_1 + 2h\nu k_1 (1 - 2/\delta_m^2), \\ n(\delta_m, \gamma_p) &= ha_{mp} [(\mu - 1)\gamma_p^2 + (\mu + 1)\delta_m^2], q(\delta_m, \gamma_p) = -a_{mp} [(3\mu + 1)\gamma_p^2 - (\mu + 1)\delta_m^2]. \end{aligned}$$

Если же удовлетворять условиям (3), т.е. решать вторую задачу, то система структурно имеет вид (5), в котором следует принять

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 2(1 + \nu)/(1 - \nu), \\ n(\delta_m, \gamma_p) &= ha_{mp} [(\mu - 1)\gamma_p^2 + (\mu + 1)\delta_m^2] (P_0^*(\gamma_p^*) - \gamma_p^{*2}) + (\mu - 1)a_{mp} \gamma_p^2 (\gamma_p^2 - \delta_m^2)/h. \end{aligned}$$

При решении обеих систем методом простой редукции необходимо рассматривать системы с большим количеством неизвестных, так как коэффициенты медленно убывают с ростом p .

§2 Анализ бесконечных систем. Для улучшения сходимости целесообразно выделить главную часть решения, используя асимптотические свойства ее неизвестных. Воспользовавшись результатами работ [1, 5], примем, что при больших номерах поведение коэффициентов задается соотношением

$$A_p \approx A\gamma_p^{\beta-1}/\sin^2 \gamma_p. \quad (6)$$

Достоинство последнего в том, что оно позволяет произвести асимптотический анализ бесконечной системы аналитическим методом. Действительно, если осуществить подстановку (6) в систему (5) и учесть асимптотические представления модифицированных функций Бесселя для больших значений аргумента, то, сохраняя в (5) главные члены, получим конечную систему для определения мнимой и реальной части $A = A_1^* + iA_2^*$

$$\begin{aligned} A_1^*(\mu\beta - 1) \cot \pi\beta/2 + A_2^*(\mu\beta + \mu + 1) &= 0, \\ A_1^*(\mu\beta - \mu - 1) \tan \pi\beta/2 - A_2^*(\mu\beta - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mu = 1/(1 - 2\nu)$. Для существования нетривиального решения однородной системы (7) ее определитель должен быть равен нулю. Из этого условия получаем трансцендентное уравнение для определения показателя степени β

$$(3 - 4\nu) \sin^2 \pi\beta/2 + \beta^2 - 4(1 - \nu)^2 = 0. \quad (8)$$

В случае шарнирно закрепленной боковой поверхности (граничные условия (4)) аналогичным образом установлено, что показатель β определяется из уравнения

$$\sin \pi\beta = 0. \quad (9)$$

Трансцендентные уравнения (8) и (9) совпадают с уравнениями для определения показателя особенности, возникающей в угловой точке плоского или пространственного изотропных клиньев [2, 3]. С учетом (6) система (5) преобразуется к конечной системе

$$\begin{aligned} \alpha_m a + 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^P A_p n(\delta_m, \gamma_p) P_0^+(\gamma_p) + \operatorname{Re} \frac{2Ai}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{z^\beta n(\delta_m, z) dz}{h(\sin 2z - 2z)} &= \frac{c_{1m}}{\delta_m^2}, \\ \beta_m a - 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^P A_p q(\delta_m, \gamma_p) + \operatorname{Re} \frac{2Ai}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{z^{\beta-1} q(\delta_m, z) dz}{\sin 2z - 2z} &= \frac{c_{2m}}{\delta_m^2}, m = \overline{1, P+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где контурные интегралы сводятся к несобственным, которые могут быть вычислены численно.

Из первого уравнения системы (7) находим величину отношения

$$A_2^*/A_1^* = (\mu\beta - 1) \tan(\pi\beta/2)/(\mu\beta - \mu - 1). \quad (11)$$

Таким образом, отношение коэффициентов системы (5) с ростом p должно стремиться к величине отношения A_2^*/A_1^* .

§3 Алгоритм вычислений. При фиксированном порядке $P + 1$ решаем соответствующую конечную систему (10). Поскольку при приближении к боковой поверхности ряды становятся знакопеременными, пользуемся для определения НДС методом Чезаро. С этой целью необходимо вычислить частичные суммы вида

$$U_M = u^n + 2arz + 2Re \sum_{p=1}^P A_p n_p \gamma_p \frac{I_1(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)} + 2Re \left(A \sum_{p=P+1}^M \frac{n_p \gamma_p^\beta I_1(\gamma_p^* r)}{h I_0(\gamma_p^*) \sin^2 \gamma_p} \right).$$

Для остальных компонент НДС их вид структурно аналогичен. Фиксируя N найдем среднеарифметические значения частичных сумм

$$u_N = \sum_{M=0}^N U_M / (N + 1), \dots, \sigma_{zzN} = \sum_{M=0}^N \Sigma_{zzM} / (N + 1). \quad (12)$$

В качестве характеристик НДС возьмем предельные значения величин (если пределы существуют) $u(r, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, z), \dots, \sigma_{zz}(r, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{zzN}(r, z)$. При проведении численных исследований целесообразно использовать рекуррентные выражения для средних арифметических

$$u_N = (Nu_{N-1} + U_M) / (N + 1), \dots, \sigma_{zzN} = (N\sigma_{zzN-1} + \Sigma_{zzM}) / (N + 1). \quad (13)$$

и завершать процесс вычислений, как только $\max_V \{|u_N - u_{N-1}|, \dots, |\sigma_{zzN} - \sigma_{zzN-1}|\} < \epsilon$. При численных экспериментах ϵ бралось $\sim 10^{-9}$.

§4 Некоторые численные результаты. Эффективность построенного алгоритма иллюстрирует рис. 1.

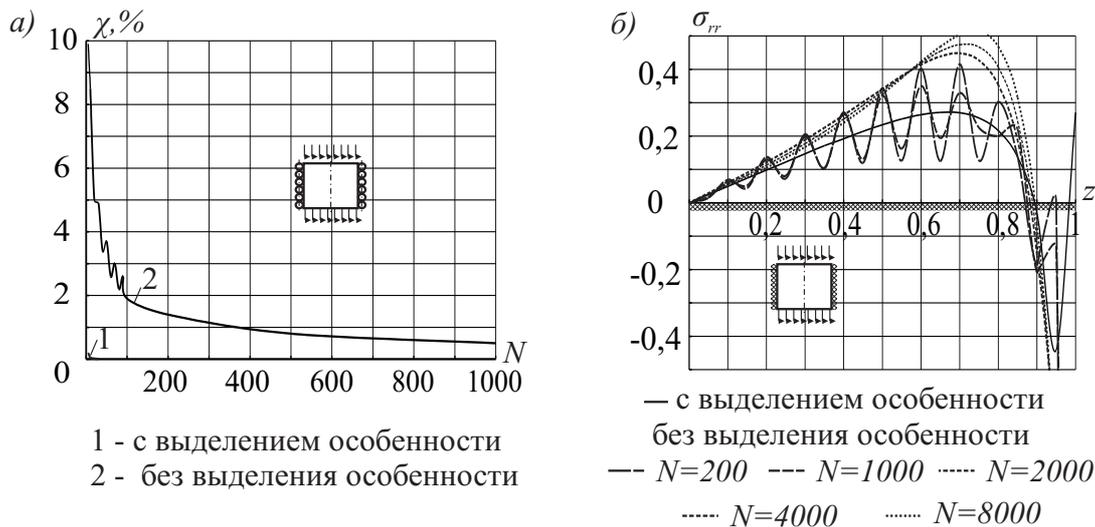


Рис. 1.

На рис. 1а представлена зависимость коэффициента невязки $\chi = \max_{r=1} \{|\sigma_{rr}|, |u|\}$ граничных условий в шарнирно закрепленном кубообразном цилиндре от количества оставляемых в разложении коэффициентов. На рис. 1б представлены эпюры напряжений σ_{rr} на боковой поверхности жестко закрепленного кубообразного цилиндра.

Из представленных кривых следует вывод, что в случае шарнирного закрепления погрешность 0,5 % при выделении особенности достигается уже для систем содержащих только 5 неизвестных, в то время как без выделения той же точности можно добиться лишь при порядка 1000 неизвестных. В случае же жесткой заделки ряды в представлениях напряжений сходятся так медленно, что даже при 8000 неизвестных трудно получить удовлетворительный результат. Исследования показали, что в построенном в §4 алгоритме нужно учитывать от 10^4 ($z = 0,5 \div 0,9$) до 10^7 ($z = 0,9 \div 0,99$) частичных сумм Σ_{zzM} .

Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ. поля. 1998. Т. 41, № 1. С. 12–34.
- [2] Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния в окрестности ребра // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 178–186.
- [3] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
- [4] Vogy D.B. The plane solution for joined dissimilar elastic semistrrips under tension // Trans. ASME. Ser. E. 1975. 45, № 1. P. 93–98.
- [5] Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity - II: Asimptotic identefication // Appl. Mech. Rev. 2004. 57, №5. P. 385–439.
- [6] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. 49. P. 526–528.
- [7] Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
- [8] Буланов Г.С., Шалдырван В.А. К улучшению сходимости метода однородных решений // Прикл. математика и механика. 1980. 44, №5. С. 957–960.
- [9] Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Исследование смешанных задач изгиба кругового цилиндра с помощью решений Лурье-Воровича // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Вып. 2. С. 49–62.
- [10] Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наукова думка, 1980. 240 с.

Shaldyrvan V.A., Vasiliev T.A. *Some algorithms for mixed boundary value problems solutions quality improvement in bending theory.* In present article asymptotics for coefficients were obtained. By means of them the algorithm of regularization in axisymmetric elastic fixed cylindrical bodies bending problems was improved.

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ РАННИХ ОТРАЖЕНИЙ НА СУБЪЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В АРХИТЕКТУРНОЙ АКУСТИКЕ

Шевцов С. Е.*, Сумбатян М. А.**

* Концертно-театральный центр “Югра-Классик”, Ханты-Мансийск

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются объективные акустические параметры залов, связанные со структурой ранних отражений звука. Исследуется связь с субъективными предпочтениями слушателей. Для нахождения оптимальных величин, обеспечивающих комфортные условия звуковосприятия слушателей в музыкальном зале предложен метод определения оптимальных значений параметров с разделением на три частотные полосы. Для этого сэмпированы звуковые фрагменты разных произведений оркестров и ансамблей. С этой целью используется БПФ, примененное к Автокорреляционной Функции (АКФ). В установке, имитирующей звуковое поле зала, проведён эксперимент по проверке субъективной оценки испытуемыми (семь человек) звучания записанных фрагментов с соответствующим образом настроенными параметрами. Первоначальные параметры не соответствуют условиям комфорта. Модернизированный вариант, напротив, определяет хорошие условия и положительные оценки испытуемых. Данное исследование закладывает основу для разработки методов проектирования очертаний, местоположения и свойств поверхностей зала.

В акустическом проектировании параметр Δ_1 играет ключевую роль [1], т.к. он связывает объективные характеристики зала, заложенные в структуре первых отражений, с субъективным восприятием. Акустический параметр Δ_1 определяет амплитуду и время задержки первого отражения. Он определяется следующим образом:

$$\Delta t_1 \approx (1 - \log_{10} A_1) \tau_e, \quad (1)$$

где τ_e — эффективный срок автокорреляционной функции сигнала, а A_1 — амплитуда отражения. Субъективный коррелят этого параметра — интимность. Автором анализа этого параметра является Y. Ando [1]. Им с помощью экспериментов по оценке связи объективных и субъективных данных были исследованы оптимальные значения параметра, как для слушателей, так и для исполнителей с линейной зависимостью амплитуды отражения и временем его задержки.

В выражении (1) даётся определение Δ_1 , где этот параметр соотносится с эффективным течением автокорреляционной функции τ_e . В свою очередь параметр τ_e находится по импульсной характеристике записанного сигнала через экстраполяцию прямой линии с двумя координатами относительно оси ординат: первая — на уровне 0дБ (прямой звук), вторая — на уровне спада сигнала -5дБ, до отметки -10дБ. Примеры графического определения параметра приведены на рис. 1, данное построение легко осуществляется при программной реализации на компьютере.

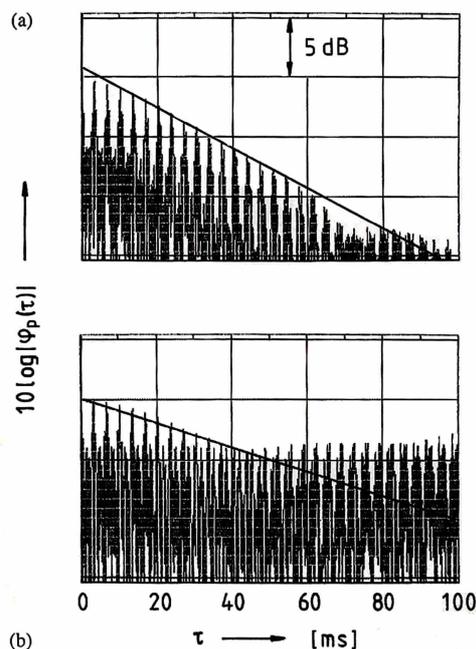


Рис. 1. Определение параметра τ_e через структуру первых отражений на начальном участке акустического импульса

Именно от манеры исполнения, темпов, динамических оттенков и штрихов зависит время τ_e . Однако следует заметить, что в традиционном определении этого ключевого параметра не учтены физические особенности характера спада колебаний отдельных инструментов, одновременно играющих в оркестре. Обращает на себя внимание тот факт, что значения τ_e даны без разделения на частотные диапазоны. Соответственно нет отражения в частотном диапазоне также для параметра Δ_1 . Однако резонно предположить, что значения τ_e отличаются не только у инструментов вообще и, в частности, разных по способу звукоизвлечения, но и в едином музыкальном произведении, в каждом мгновенном его значении, где характер фактуры предполагает, что в высокочастотном регистре звучат короткие быстрые пассажи (импульсы) чаще, чем в низкочастотном регистре. Этот фактор ярко выражен в сигнале, получаемом из симфонической музыки.

Y. Ando [1] для расчёта Δ_1 берёт минимальное значение τ_e , анализируя при этом развёртку записанного сигнала музыкального инструмента, полученного при помощи БПФ, преобразованного к АКФ во всём спектре. Таким образом, не учитываются минимальные значения, которые в развёртке временной функции сигнала записанного оркестра маскируются общим звуковым массивом. Поэтому при соответствующей настройке Δ_1 в звуковом поле, воспринимаемом слушателями, создаётся предпосылка к восприятию короткого эхо (отскока).

В данной работе приводятся данные по Δ_1 сигналов записанного симфонического оркестра (в заглушенной камере) в трёх частотных полосах (соответствующие частоты раздела — 261 и 1244 Гц). В соответствии с полученными пара-

метрами заданы оптимальные величины параметра Δ_1 в трёх частотных полосах. В установке, имитирующей звуковое поле зала, проведён эксперимент по оценке звуковосприятия поля прямого и отражённого сигнала в соответствии с общепринятыми и полученными нами значениями Δ_1 . Предложены оптимальные величины для рассматриваемого ключевого акустического параметра.

Определение параметра τ_e для сигналов записанного в заглушенной камере симфонического оркестра в трёх частотных полосах

Был проведён анализ эффективного срока τ_e нормализованной автокорреляционной функции АКФ семнадцати записанных фрагментов из семи произведений симфонического оркестра, камерного оркестра, оркестра русских народных инструментов, а также нескольких произведений хора.

АКФ записанного акустического сигнала $p(t)$ вычисляется по формуле [2]

$$\phi_p(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t)p(t + \tau) dt. \quad (2)$$

Иногда эту функцию удобнее вычислять с использованием теоремы Винера-Хинчина [2]

$$\phi_p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (3)$$

где $P(\omega)$ — спектральная плотность мощности (или просто “спектр мощности”) данного процесса, т.е.

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T p(t) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (4)$$

Каждый сигнал подвергался быстрому преобразованию Фурье во временной области усреднения 2мин. Автокорреляционная функция вычислена с частотой сэмплирования 44100Гц. Записи производились с помощью микрофонной стереопары (Bruel&Kjaer) в относительно заглушенном помещении. В точке установки микрофона относительный уровень отражений не достигал -20дБ от прямого звука во временном окне 150мс. Место установки стереопары — 1,5м от края посадки оркестра. Высота стойки — два метра. Сэмплировались временные фрагменты 2 = 2 мин. из разных частей произведений в соответствии со сменой темпа и характера исполнения. Сэмплирование происходило с помощью звуковой станции PRO TOOLS v 6.7 и программы AIST. Частота сэмплирования — 44100Гц, разрешение — 24Бит. Сигналы с двух стереоканалов не складывались в один, поскольку и левый и правый канал содержал индивидуальную информацию, согласно посадке исполнителей.

По результатам обработки измеренных акустических фрагментов получены следующие результаты. Средние значения τ_e , в высокочастотном (Вч) диапазоне в

94% случаев меньше, чем у таких же значений в среднечастотном (Сч) и низкочастотном (Нч) диапазонах. В 36% случаев τ_e для Вч близки к τ_e для Сч с разницей в 10мс. В 6% случаев τ_e для Вч полосы совпадало со значением этого параметра для Сч полосы. Таким образом, из полученных результатов можно сделать вывод о том, что общее свойство музыкальных сигналов заключается в их скоротечности в Вч диапазоне. Ясно также, что Нч диапазон отличается большей длительностью. Более тщательный анализ позволяет сопоставить рассматриваемый параметр с временем реверберации T_{60} . Эмпирические формулы, основанные на проведенной обработке записанных сигналов, могут быть представлены в следующем виде. Оказывается, что в Сч и Вч диапазонах с высокой степенью точности справедливы следующие соотношения

$$37\tau_e = T_{60}. \quad (5)$$

При этом значение $T_{60,Сч}$ равно примерно 2сек, а $T_{60,Вч}$ — примерно 1,5сек. Это — оптимальные величины для залов оркестровой музыки [3]. В Нч полосе индекс 37 не подходит, поскольку время реверберации при таких расчетах будет равняться 2,7сек, что превышает любое разумное значение. Выражение (5) объясняет физический смысл снижения времени реверберации на высоких частотах.

Параметр τ_e в Нч диапазоне в 24% случаев меньше чем его значение в Сч полосе, при этом расхождение составляет от 10мс до 68мс, а в 6% случаев составляет примерно 2мс. В то же самое время, в 24% случаев значение этого параметра в Нч диапазоне близко к его значению в Сч диапазоне с разницей от 2 до 10мс. В остальных 76% случаях Нч значения параметра τ_e явно выше соответствующих Сч и Вч значений с расхождением, изменяющимся от 16мс до 70мс. Нами были также определены минимально возможные зарегистрированные значения τ_e : Вч — 4мс, Сч — 13мс и Нч — 8мс.

Экспериментальная проверка субъективной оценки звукового поля с настроенными параметрами Δ_1

При проведении экспериментальных тестов предлагаемой методики в тракт акустической системы (с 10 громкоговорителями, имитирующими звуковое пространство зала) вместе с фонограммой подавалась её копия с временем задержки τ_e без разделения на частотные группы и совпадающее с τ_e в Сч диапазоне. Уровень задержки А равнялся уровню звука прямого сигнала. Задержанная версия подавалась как в громкоговорители окружения, так и с добавлением включения во фронтальные колонки, имитирующие направление прихода прямого звука. В эксперименте участвовали семеро профессиональных музыкантов. Была получена следующая картина. В высокочастотной области отчётливо воспринимается отдельное повторение, вносящее хаос в звучание. Во фрагментах с длинной характеристикой τ_e в низкочастотном регистре создавалось подобное же ощущение, так как у контрабасов в партиях, как правило, часты короткие ноты, играемые приёмом пиццикато.

Далее, минимальные значения (τ_e , Вч — 4мс; τ_e , Сч — 13мс; и τ_e , Нч — 8мс) с распределением на три частотные группы были установлены согласно линейной функции предпочтения. Тракт задержки был разделён на параллельную схему с

индивидуальным значением задержки и частотным диапазоном за счёт обрезных фильтров.

Результат на этот раз определил комфортные условия восприятия, отсутствие ощущения явно слышимых повторений и яркость звучания. Затем производилось варьирование параметров в сторону отклонения от касательной обеих функций. Субъективная оценка показала, что в низкочастотном диапазоне временное изменение ощущается менее чувствительно, то есть различимое отличие было слыσιμο при шаге задержки 15мс.

В результате анализа накопленных экспериментальных данных удалось установить оптимальные значения Δ_1 : в Вч диапазоне — 4мс, в Сч — 13мс, в Нч — 15мс.

Выводы

Из данных, полученных в ходе экспериментов, следует вывод, что в процессе анализа сложного источника звука, такого как оркестр, необходимо произвести подразделение на частотные группы параметра τ_e и, соответственно, Δ_1 . Найдены оптимальные значения Δ_1 , что делает необходимым дополнительный учёт времени задержки отражённого сигнала и его уровня при акустическом проектировании залов музыкального назначения.

Список литературы

- [1] *Ando Y. Architectural Acoustics. Blending Sound Sources, Sound Fields, and Listeners.* Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
- [2] *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
- [3] *Щевьев Ю.П.* Физические основы архитектурной акустики. СПб.: Книга, 1990.

Shevtsov S.E., Sumbatyan M.A. *The influence of the structure of early reflections on subjective characteristics in architectural acoustics.* We analyze the objective parameters in room acoustics, which are connected with the structure of early reflections of sound. The connection with subjective preference of the listeners is studied. In order to find the optimal values of the parameters providing comfortable conditions of the listeners audition in a music hall, there is proposed a method how to define optimal values of these parameters, with a separation to three frequency bands. For this purpose there are formatted sound fragments of various musical compositions of orchestras and consorts. In order to achieve this aim, we use an FFT applied to Autocorrelation function (ACF). On a device imitating a sound field there was performed an experiment on control of subjective evaluation by seven probationers in phonation of some recorded fragments with appropriately attuned parameters. The initial parameters do not correspond to subjective comfort conditions. A modified version, vice versa, provides good conditions and positive impression of the probationers. The present investigation lays the basis for development and design of geometry, disposition and properties of surfaces around the hall.

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

Шишкин А. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Выполнен расчет собственных частот консоли атомно-силового микроскопа с учетом термоупругой связи и без нее. Показано, что сдвиг собственных частот при учете термоупругой связи существенен для высоких гармоник, а для основной частоты данный сдвиг мал. Получены оценки характеристик вынужденных колебаний для термосвязанной консоли под действием последовательных тепловых импульсов.

Постановка задачи:

Рассматриваем балку длины L , ширины b и толщины h .

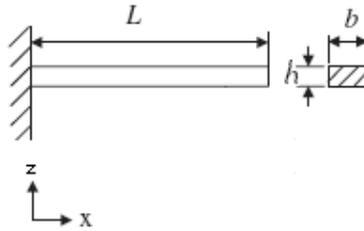


Рис. 1. Балка

Обозначим перемещения $w(x, t)$, в соответствии с теорией Бернулли-Эйлера малые перемещения определяются как:

$$u = -z \frac{dw}{dx}. \quad (1)$$

Рассмотрим соотношение Дюамеля-Неймана в одномерном случае для изотропного стержня:

$$\sigma_x = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta \theta. \quad (2)$$

где E — модуль Юнга, θ — приращение температуры, $\beta = \frac{E\alpha_T}{1-2\nu}$ — термический модуль, α_T — коэффициент линейного термического расширения, ν — коэффициент Пуассона.

Момент определяется как:

$$M(x, t) = - \int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_x z dz = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\beta \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz \quad (3)$$

Обозначим

$$M_T = b\beta \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz - \quad (4)$$

термический момент.

Уравнение движения балки:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Подставим (3) в (5) и получим дифференциальное уравнение движения:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Верхняя и нижняя поверхности балки считаются термоизолированные

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (7)$$

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности:

$$k \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} - kp^2 M_T - c_v \rho \frac{\partial M_T}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (8)$$

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{\nu t}{L}, \nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, W = \frac{w}{L}, \Theta = \alpha_T L M_T, a = \frac{\delta}{h}$$

Уравнения примут вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - A_2 \Theta - A_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + A_4 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0$$

Где

$$A_1 = \frac{12L^2}{h^2}, A_2 = p^2 L^2, A_3 = \frac{c_v \rho \nu L}{k}, A_4 = \frac{\alpha_T T_0 \beta \nu L}{k}$$

Для того чтобы рассмотреть собственные колебания стержня, сделаем замену переменных:

$$W(\xi, \tau) = W_0(\xi) e^{i\omega\tau} \quad (10)$$

$$\Theta(\xi, \tau) = \Theta_0(\xi) e^{i\omega\tau}$$

Уравнения (9) примут вид:

$$\frac{\partial^4 W_0}{\partial \xi^4} - \omega^2 A_1 W_0 + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \xi^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \xi^2} - A_2 \Theta_0 - i\omega \left(A_3 \Theta_0 + A_4 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} \right) = 0$$

Балка является консольной, граничные условия имеют вид:

	Неизотерм.	Изотерм.
	1.892247	1.875104
	2.83793	4.694091
	3.481575	7.854758

$$W|_{\xi=0} = 0, \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0, \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0, \Theta|_{\xi=0} = 0, \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (12)$$

Начальные условия имеют вид:

$$W|_{\tau=0} = 0, \frac{\partial W}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \Theta|_{\tau=0} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (13)$$

Расчет проводился с помощью конечноэлементного пакета FlexPDE.v.5.0.7.

В таблице приведены значения первых трех мод колебаний для каждого из случаев.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим вынужденные колебания стержня под действием лазерного излучения высокой частоты с длительностью импульса $2\tau_s$. Уравнение движения останется неизменным и представимо в виде (6).

Уравнение теплопроводности будем рассматривать в виде:

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - c_v \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \beta z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \tau_0 c_v \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_0 T_0 \beta z \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (14)$$

При $t = 0$ верхняя поверхность, одинаково облучается лазерным лучом. Уравнение теплопроводности, содержащее время ТЗ и слагаемое соответствующее количеству тепла поступающего в следствии нагрева имеет вид:

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - c_v \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \beta z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \tau_0 c_v \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_0 T_0 \beta z \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{R_a I_0}{\delta t_p^2} \exp\left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\delta}\right) (t) = 0 \quad (15)$$

Где c_v — удельная теплоемкость, τ_0 — время термической релаксации, k — удельная теплопроводность, β — термический модуль, t_p — длительность лазерного импульса, δ — глубина поглощения энергии нагрева, R_a — поверхность поглощения, I_0 — лазерная интенсивность.

$$\Gamma(t) = (\tau_0 + (1 - \tau_0/t_p)t) \exp(-t/t_p)$$

После облучения лазером, верхняя и нижняя поверхности балки могут считаться термоизолированными

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=\pm h/2} = 0$$

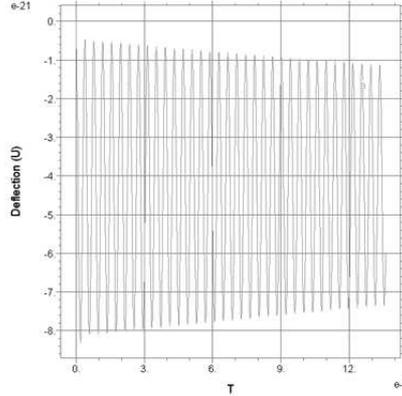


Рис. 2. Форма лазерного импульса $\Gamma(t)$

Получаем уравнение теплопроводности:

$$k \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} - kp^2 M_T - c_v \rho \frac{\partial M_T}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \tau_0 c_v \rho \frac{\partial^2 M_T}{\partial t^2} + \tau_0 T_0 \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{6R_a I_0 (h + 2\delta) + (h - 2\delta)e^{(h/\delta)}}{h^3 t_p^2} e^{(h/\delta)}(t) = 0 \quad (16)$$

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{\nu t}{L}, \nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, W = \frac{w}{L}, \Theta = \alpha_T L M_T, a = \frac{\delta}{h}$$

Уравнения примут вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - A_2 \Theta - A_3 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + A_4 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \tau} - A_5 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + A_6 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + A_7(\tau_0 + A_8 \tau) \exp(-A_9 \tau) = 0.$$

Где

$$A_1 = \frac{12L^2}{h^2}, A_2 = p^2 L^2, A_3 = \frac{c_v \rho \nu L}{k}, A_4 = \frac{\alpha_T T_0 \beta \nu L}{k}, A_5 = \frac{\tau_0 c_v E}{k}$$

$$A_6 = \frac{\tau_0 \alpha_T T_0 \beta E}{\rho k}, A_7 = \frac{6R_a I_0 \alpha_T L^3 (1 + 2a) + (1 - 2a)e^{(1/a)}}{kh^3 t_p^2} e^{(1/a)}$$

$$A_8 = \left(1 - \frac{\tau_0}{t_p}\right) \frac{L}{\nu}, A_9 = \frac{L}{\nu t_p}$$

Граничные и начальные условия для расчета задачи берем в виде (12)–(13). Стержень сделан из кремния. Расчет проводился с помощью конечноэлементного пакета FlexPDE.v.5.0.7. В результате получаем затухающие колебания.

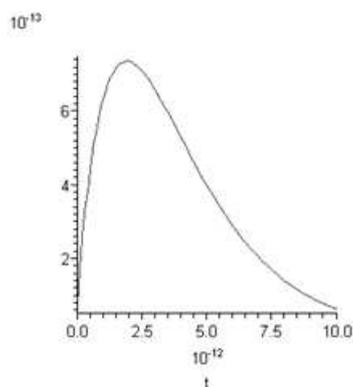


Рис. 3. Временная зависимость колебаний свободного конца стержня

Список литературы

- [1] *В.Новацкий* Динамические задачи термоупругости, Мир, 1970. 256 с.
- [2] *В.Новацкий* Теория упругости, Мир, 1975. 872 с.
- [3] *C.Zener* Theory of internal friction in reeds //Phys.Rev. V.52-54, p.230, p.232, p.582, 1935-1937.
- [4] *Y.Sun* Thermoelastic damping in micro-beam resonators // Int.J.Sol.Struct., V.43. p.3213-3229, 2005.
- [5] *D.Fang* Analysis of Frequency Spectrum of Laser-Induced Vibration of Micro-beam Resonators // Chin.Phys.Lett., V. 23, p. 1554, 2006.
- [6] *R.Lifshitz* Thermoelastic Damping in Micro- and Nano-Mechanical Systems //Cond. Matt. Phys., V. 114, p. 36, 2006.

Shishkin A.N. *Frequency vibration analysis of the cantilever under the thermal impulse series.* Computation of the cantilever frequency of atomic force microscope with thermoelastic effect is done. The frequency shift with account of thermoelastic effect is more essential for highest frequencies, but for main frequency this shift is small. The estimation of forced vibration characteristic for thermoelastic beam under the thermal impulse series is obtain.

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ВЫТЯЖКА КУПОЛА ИЗ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Юдин А. С., Юдин С. А.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Апробируется математическая модель, представленная в [1], в применении к задаче пластической формовки артифицированных хлопающих предохранительных мембран высокой точности срабатывания. Дано сравнение теории и эксперимента.

В безразмерной форме дифференциальная система уравнений для пластины, нагруженной равномерным давлением, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} d\bar{T}^o/d\xi &= \alpha_o \xi \delta_1 \delta_2 p \cos \Phi, & d\bar{\Psi}^o/d\xi &= \alpha_o \bar{N}_2^o - \alpha_o r_o \delta_1 \delta_2 p \sin \Phi, \\ dM^o/d\xi &= \alpha_o M_2^o \cos \Phi + \alpha_o r_o \delta_1 \bar{Q}^o / \varepsilon_*, \\ dw/d\xi &= \alpha_o \delta_1 \sin \Phi, & du/d\xi &= \alpha_o (\delta_1 \cos \Phi - 1), & d\Phi/d\xi &= \alpha_o K_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где :

$$\begin{aligned} \bar{T}^o &= r_o \bar{V}^o, & \bar{\Psi}^o &= r_o \bar{H}^o, & M^o &= r_o M_1^o; \\ \bar{V}^o &= \bar{N}_1^o \sin \Phi + Q^o \cos \Phi, & \bar{H}^o &= \bar{N}_1^o \cos \Phi - Q^o \sin \Phi, \\ \bar{N}_1^o &= \bar{V}^o \sin \Phi + \bar{H}^o \cos \Phi, & \bar{Q}^o &= \bar{V}^o \cos \Phi - \bar{H}^o \sin \Phi, \\ \bar{N}_j^o &= N_j^o + \varepsilon_* (K_1 M_1^o + K_2 M_2^o) / \delta_j, \\ N_1^o &= (k_\sigma / \varepsilon_*) \bar{B}_1 (\bar{\varepsilon}_1 + 0.5 \bar{\varepsilon}_2), & M_1^o &= -k_\sigma \bar{D}_1 (\bar{K}_1 + 0.5 \bar{K}_2), & 1 \rightarrow 2; \\ \bar{\varepsilon}_j &= \ln(1 + \varepsilon_j) = \ln \delta_j, & \bar{K}_j &= K_j / \delta_j, & k_\sigma &= \sigma_B / E_*; \\ \bar{B}_j &= \bar{B} / \delta_j, & j &= 1, 2; & \bar{D}_1 &= \delta_3^3 \delta_2 \bar{D}, & \bar{D}_2 &= \delta_3^3 \delta_1 \bar{D}, \\ \bar{B} &= (4/3) \Lambda(\varepsilon) h_o, & \bar{D} &= (1/9) \Lambda(\varepsilon) h_o^3, & \bar{\varepsilon} &= (2/\sqrt{3}) \sqrt{\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_2^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: $\xi \in [0, 1]$ — независимая радиальная лагранжева координата; α_o — коэффициент Лямэ ($= 1$); p — интенсивность гидростатического давления; $\varepsilon_* = h_*/R_*$ — параметр тонкостенности; h_o — толщина исходной заготовки (пластинки); Φ — угол наклона нормали актуальной конфигурации оболочки к оси вращения; K_j — главные кривизны формуемой оболочки; \bar{V}^o и \bar{H}^o — внутренние усилия в направлениях оси симметрии и радиуса цилиндрической системы координат; N_j^o — тангенциальные усилия; M_j^o — изгибающие моменты; ε_j — относительные удлинения, $\bar{\varepsilon}_j$ — логарифмические деформации, $\bar{\varepsilon}$ — интенсивность логарифмических деформаций; $\Lambda(\bar{\varepsilon})$ — секущий модуль как функция интенсивности логарифмических деформаций. Формулы (2) являются определяющими соотношениями оболочки в процессе пластической деформации при активном нагружении. Применением полуобратного метода к системе (1) в работе [1] получена формула для уровня давления, обеспечивающего вытяжку сегмента эллипсоидной оболочки заданной высоты w_0

из пластины. Формула соответствует дифференциальному способу обработки третьего уравнения системы (1). Представленная ниже формула (3) соответствует варианту, когда это уравнение интегрируется:

$$\tilde{p} = \frac{\xi \tilde{M}_1^o(\varepsilon) + \tilde{r}_p \tilde{M}_r - J_{31}(\xi) - J_{33}(\xi) + J_{34}(\xi) + J_{36}(\xi)}{J_{32}(\xi) + J_{35}(\xi)} \approx const \quad (3)$$

где:

$$\begin{aligned} J_{31}(\xi) &= \int_0^\xi \tilde{M}_2^o \cdot \cos \Phi(\zeta) d\zeta, & J_{33}(\xi) &= \frac{\tilde{P}_0}{2\pi\varepsilon_*} \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot \cos \Phi(\zeta) d\zeta, \\ J_{34}(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon_*} \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot I_{21}(\zeta) \sin \Phi(\zeta) d\zeta, & J_{36}(\xi) &= \frac{\tilde{H}_r}{\varepsilon_*} \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot \sin \Phi(\zeta) d\zeta, \\ J_{32}(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon_*} \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot I_{11}(\zeta) \cos \Phi(\zeta) d\zeta, & J_{35}(\xi) &= \frac{1}{\varepsilon_*} \int_0^\xi \delta_1(\zeta) \cdot I_{22}(\zeta) \sin \Phi(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Здесь \tilde{M}_Γ — константа интегрирования, имеющая смысл радиального изгибающего момента на краевом контуре.

Сопоставление теории и физического эксперимента выполнялось на оболочках типа артифицированных хлопающих мембран (ПМ). Они относятся к элементам устройств систем безопасности, защищающих технологическое оборудование и емкости от разрушения избыточным давлением. Технология изготовления мембран имеет этап свободной вытяжки давлением воздуха до высоты w_1 . При высоте w_1 начинается процесс артификации, связанный с приложением силы сопротивления в вершине, которая действует на приращении высоты Δw . Получаемая высота купола в конце вытяжки становится равной $w_o = w_1 + \Delta w$.

Для сравнения брались мембраны из нержавеющей стали с характеристиками: $E = 0.21 \cdot 10^6$ МПа, $\sigma_{0,2} = 360$ МПа, $e_{0,2} = \sigma_{0,2}/E = 0.001714$, $\sigma_B = 720$ МПа, $\varepsilon_B = 0.615$. Константы степенной аппроксимации диаграммы материала имеют следующие значения: $\eta = 0.1178256$, $C = 762.445$ МПа. Рассмотрим один из вариантов, в котором радиус пластинки на контуре заземления кольцевыми фланцами равен 100 мм, толщины заготовок-пластин находятся в пределах $h_o = 0.38 \dots 0.4$ мм. Номинальная высота подъема 35...36 мм. Давление вытяжки (формовки) $p_\Phi = 2.4$ МПа. Уровень артифицирующей силы $P_0 = 10.1$ н. Номинальное критическое значение оболочки $p_{кр} = 0.432$ МПа.

При задании в расчетах таких же уровней артифицирующих нагрузок, что и в экспериментах, давление формовки по формулам (11) из [1] и (3) согласуется с экспериментальным с точностью 2...3%. При этом геометрия сегмента соответствует приплюснутому сфероиду с эксцентриситетом $e_x = 0.12$ и отношением полуосей $k_e = \sqrt{1 - e_x^2} = 0.993$. Безразмерные значения, которые принимают константы интегрирования для оболочки варианта 2: $\tilde{P}_0 = 0.096$, $\tilde{H}_\Gamma = 0.9$, $\tilde{M}_\Gamma = 0.032$. Таким образом, при вытяжке оболочки из пластинки технологическое артифицирующее

воздействие приводит к слегка сплюснутому сфероиду с полуосями, различающимися в пределах одного процента.

В работе [2] в терминологии понятий вытянутости и сплюснутости исследовалось соотношение между геометрическими параметрами и мембранными напряжениями тонкой оболочки, нагруженной давлением. Вытянутость или сплюснутость рассматривается как мера отклонения формы от сферической. Отмечено, что для тонкой оболочки изменение этой величины имеет сложный характер. Обнаружено, что для испытанных в работе металлов поверхность можно считать сферической только в окрестности полюса. В остальных местах она представляет собой либо вытянутый, либо сплюснутый сфероид. Результаты настоящей работы подтверждают эти выводы, если вытяжка выполняется только гидростатическим давлением. В этом случае до относительной высоты подъема $w = 0.3$ форма оболочки соответствует слегка сплюснутому сфероиду, после слегка вытянутому. Использование в качестве артифицирующего воздействия сосредоточенной силы позволяет оставить оболочку в зоне сплюснутости и для $w > 0.3$, что важно для обеспечения выгодной формы потери устойчивости и снижения чувствительности критической нагрузки к случайным несовершенствам.

Рассмотрим некоторые другие результаты расчетов. На рисунке 1 изображены графики итераций радиального перемещения $\tilde{u}(\xi)$ при решении функционального уравнения (6) из [1]. Кривая 0 отвечает нулевому приближению, кривые 1 и 2 — первому и второму приближениям. Второе приближение практически совпадает с точным решением, что демонстрирует быструю сходимость итерационного процесса.

Рисунок 2 показывает распределения трех компонент относительных удлинений по радиусу как функций нормированной лагранжевой координаты ξ . В зоне купола до $\xi = 0.8$ тангенциальные деформации ε_1 и ε_2 мало различаются, т.е. деформированное состояние достаточно близко к однородному в центральной части. В краевой зоне удлинения ε_1 и ε_2 заметно расходятся.

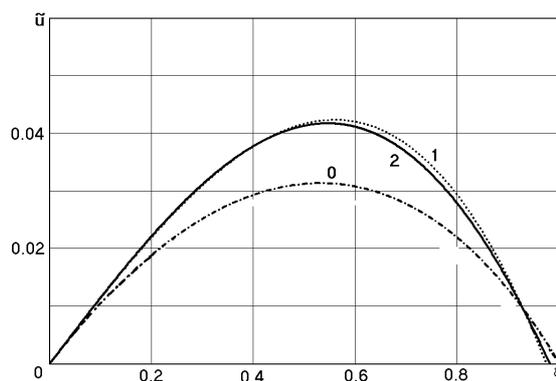


Рис. 1.

Наибольших значений удлинения достигают в вершине купола и составляют 12% для ε_1 , ε_2 и 20% для ε_3 при заданной относительной высоте подъема $w_0 = 0.35$. Величина ε_3 характеризует утонение оболочки в процессе вытяжки. Очевидна

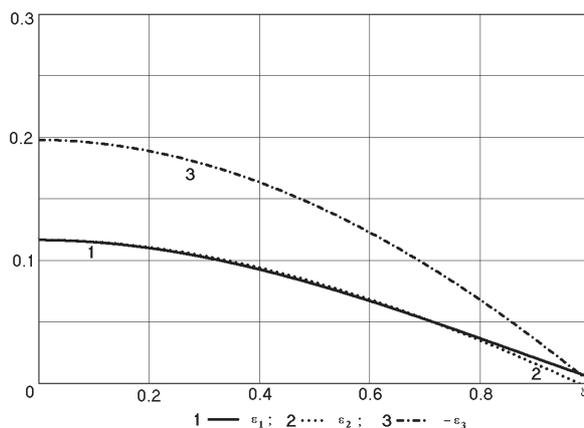


Рис. 2.

существенная переменность толщины получаемой оболочки от исходного значения толщины h_0 пластинчатой заготовки до 0.8 от h_0 в вершине купола.

Анализ изгибающих моментов показывает наличие значительного краевого эффекта. На рисунке 3 показано распределение момента M_1^0 по радиальной координате ξ . В центральной части до $\xi = 0.6$ состояние близко к безмоментному и резко меняется краевой зоне. Краевой эффект можно объяснить не только моментной реакцией краевого пластического шарнира, но и переменностью свойств материала, меняющегося от упругого состояния непосредственно на защемленном контуре, где $\bar{\varepsilon} = 0$, до состояния с развитой интенсивностью деформаций, от которой зависит секущий модуль.

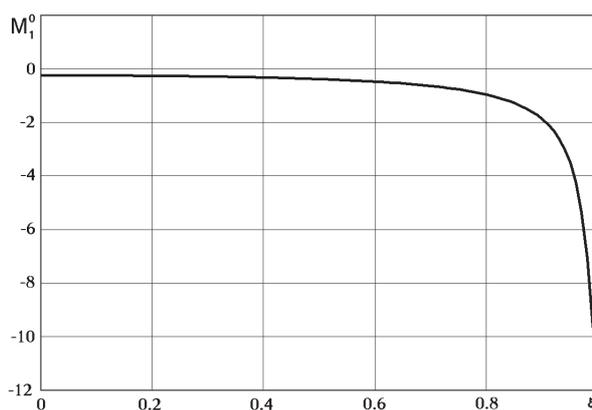


Рис. 3.

В теоретическом решении геометрические параметры оболочки и формирующие силовые воздействия (уровень давления и артифицирующая сила) задаются как параметры. В реальном физическом процессе формовки они изменяются во времени от нулевых уровней до заданных значений. Поскольку в теоретической модели используется степенная аппроксимация, то для согласования с теорией на-

гружение в эксперименте должно быть близким к простому (теорема А.А. Ильюшина о простом нагружении). Т.е. возрастание давления и сосредоточенной силы в вершине должно осуществляться пропорционально времени. За локальное время можно принять давление. Однако конструктивно проще силу менять с высотой подъема купола, что хотя и не точно соответствует условию пропорционального нагружения, но, как показывают имеющиеся эксперименты [3], близко к нему.

В реально используемой технологии зависимость артифицирующей силы от высоты подъема купола имеет ступенчатый характер. Хорошее согласование теории и эксперимента можно объяснить тем, что главным формообразующим фактором является давление среды, а артифицирующая сила лишь корректирует форму. Эта коррекция не очень значима для задачи пластической вытяжки, контролируемой по давлению и высоте подъема купола. Однако, как показывает анализ устойчивости, получаемые при этом несколько разные кривизны в зоне вершины купола, оказываются существенными для критической нагрузки.

Список литературы

- [1] Юдин А.С., Юдин С.А. Моделирование пластической формовки артифицированной хлопающей мембраны // Соврем. пробл. мех. сплош. среды. Тр.Х м/нар. конф. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 2006. Т. 1. С. 290–294.
- [2] Сю (Hsu T.C.), Шан (Shang H.M.), Ли (Lee T.C.), Ли (Lee S.Y.) Напряжения пластического течения в листовом материале при формовке из него изделий почти сферической формы // Теор. основы инж. расчетов. Тр. амер. общ-ва инж.-механиков. М.: Мир, 1975. Т. 97, № 1. С. 66–75.
- [3] Камышев В.В., Сизова Т.П., Суржин Р.Г., Черновисов Г.Н. Исследование зависимости высоты купола, утонения и кривизны мембран из стали 12Х18Н10Т при изменении формообразующего давления // Повыш. безопасн. экпл. нефтеперераб. и нефтехим. пр-в с помощью предохран. мембран. Сб. науч. тр. М.: В/О "Нефтехим". 1979. Вып. 19. С. 82–93.

Yudin A.S., Yudin S.A. *Plastic drawing of the dome from the circular plate: the theory and experiment.* The mathematical model submitted in [1] is approved in application to the problem of plastic forming of artificial buckling safety membranes (bursting disks) of high accuracy of operation. Comparison of the theory and experiment is given.