

Содержание

Азаров А.Д. Модель полимерного материала с изменяющимися механическими свойствами	6
Азаров А.Д., Исаев К.В., Азаров И.Д. Идентификация линейных дифференциальных моделей вязкоупругих материалов	11
Азарова П.А. Фундаментальных решениях для вязкоупругой ортотропной плоскости	16
Айзикович С.М., Андреева Ю.Л. Решение контактных задач механики сплошной среды для полуплоскости с неоднородным упругим покрытием, градиент изменения упругих свойств которого меняет знак	20
Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Внедрение параболического штампа в функционально-градиентное покрытие, модуль Юнга которого меняется немонотонно	24
Акопян В.А., Соловьев А.Н., Кабельков А.Н., Черпаков А.В. Конечно-элементный модальный анализ элемента строительной конструкции треугольной конфигурации с надрезом	29
Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Установившиеся колебания трехслойной изотропной пластины	34
Беркович В.Н. Особенности формирования волнового поля клиновидной среды в условиях плоских установившихся колебаний	39
Болгова А.И. Волны в трехмерном упругом слое, на дневной поверхности которого действуют различные нагрузки.	44
Буравчук Н.И., Гурьянова О.В., Огороков Е.П., Павлова Л.Н. Влияние кремнеземистых материалов из техногенного сырья на свойства ячеистого бетона	49
Воронцов Г.В., Кабельков А.Н. Переходные матрицы в задачах о колебаниях балки, лежащей на упругом основании и подверженной действию подвижной распределённой массы.	54
Дударев В.В. Об уточненной модели изгибных колебаний предварительно напряженной балки	56
Ефремов И.И., Колесникова Ю.Н. Глиссирование тонкого профиля по поверхности слоя весомой жидкости	60
Журавлев Г.А. К определению напряженного состояния тел, моделируемых упругими роликами с пересекающимися осями	65
Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Конвекция двухслойной жидкости в высокочастотном вибрационном поле	70
Зубов Л.М. Уравнения равновесия микрополярных оболочек в усилиях и моментах	76
Капустин М.С. Анализ влияния внутренних нагрузок в слое на контактные напряжения, возникающие под штампом	82
Кизилова Н.Н. Распространение волн в неоднородных трубках переменного сечения	87
Костандов Ю.А., Локшина Л.Я. Проявление динамического характера разрушения горных пород	92

Лавриненко В.В. Об одной нестационарной задаче связанной термоэлек- троупругости для тонкостенного элемента	97
Ляпин А.А., Чебаков М.И., Колосова Е.М. К теории расчета бинарного цилиндрического подшипника	102
Майстренко А.В. Конечно-элементный анализ условий образования кон- центрации напряжений в лонжероне	106
Мелешко В.В., Токовый Ю.В. Алгоритм П.Ф. Папковича в плоских зада- чах термоупругости для прямоугольника	110
Мирошниченко И.П. Исследование напряженно-деформированного состо- яния в слоистых эллиптических конструкциях из анизотропных ма- териалов	115
Мирошниченко И.П., Серкин А.Г., Сизов В.П. О внедрении интерферен- ционных измерительных технологий в практику исследований пер- спективных материалов и изделий	117
Моргулис А.Б. Нелинейная асимптотическая устойчивость стационарных режимов протекания идеальной жидкости сквозь плоский канал . . .	123
Надолин К.А. Редуцированная математическая модель переноса веще- ства в глубоком протяженном русловом потоке	128
Наседкин А.В., Домашенкина Т.В., Рыбьянец А.Н. Расчет ультразвукового фокусирующего излучателя из пористой пьезокерамики по уточнен- ной методике	133
Немцев А.Д. Расчет конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде	138
Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи теплопроводности для неоднородных тел	143
Норкин М.В. Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при отрывном ударе плавающего диска	147
Панфилов И.А., Устинов Ю.А. Отражение однородных волн от торца полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией	152
Самадова Ю.К., Ширяева Е.В. Моделирование процесса переноса приме- сей электрическим полем и жидкостью в плоском крестообразном канале	157
Сафроненко В.Г., Трифонов В.В., Шутько В.М. О методе математическо- го моделирования в виброакустике полимерных композитных оболо- чек вращения	162
Серкин А.Г. Обеспечение точности стационарных средств измерений гео- метрических и механических величин	167
Соловьев А.Н., Спожакин А.С., Напрасников В.В., Шевцов С.Н. Рекон- струкция поврежденного состояния слоистых композитов	172
Солуянов Н.О. Реконструкция полости и включения при анализе устано- вившихся изгибных колебаний пластин	180
Суворова Т.В., Столяров Ю.В. О волновом поле, генерируемом на по- верхности гетерогенного слоя	184
Трофимова А.В., Цибулин В.Г. Расчет нестационарной конвекции в по- ристой кольцевой области	188

Трубчик И.С. Особенности решения контактной задачи для градиентного клина в случае многократно изменяющихся по угловой координате законов неоднородности	193
Филиппова Е.Н., Кизилова Н.Н. Исследование влияния геометрии и свойств вязкоупругих трубок в области бифуркации на течение вяз- кой жидкости.	198
Чебаков М.И., Колосова Е.М. Контактная задача для двух цилиндров конечных размеров с непараллельными осями	203
Шалдырван В.А., Ержаков Г.В. О структуре краевых эффектов в высо- комодульном трансформном слое	208
Шейдаков Д.Н. Потеря устойчивости упругой пористой трубы при трех- параметрическом нагружении	213
Юдин А.С. Математическое моделирование больших пластических фор- моизменений оболочек вращения	218
Якименко Н.С., Мелешко В.В., Улитко А.Ф., Гринченко В.Т. Высокоча- стотные колебания упругих цилиндров конечной длины	223

МОДЕЛЬ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Азаров А.Д.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И., ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

Рассмотрены характерные изменения деформационных механических свойств полимерного материала при длительных многоцикловых воздействиях. Развита метод моделирования с помощью структуры из фазовых компонент, характеризующихся плотностью. Моделируется процесс усталости, ведущий к изменению весовых вкладов фазовых компонент в динамические характеристики.

В настоящей работе рассматривается задача моделирования изменения свойств полимеров при усталости материалов, эксплуатируемых при длительных многоцикловых воздействиях. Эта задача важна для понимания механизма усталости, для проектирования ответственных изделий, и корректной постановки экспериментов. В данной работе рассматриваются твердые конструкционные ПМ. Состав и структура ПМ достаточно изучены методами физико-химии. Основные свойства ПМ определяются силами связей между составляющими компонентами ПМ: внутри- и межмолекулярными [1-4]. Каждый тип связи характеризуется определенной энергией и прочностью. Первым приближением в механике сплошной среды предлагается отображение структуры ПМ в виде набора фазовых компонент (ФК), основным параметром которых является плотность (известна существенная корреляция между жесткостью, прочностью и плотностью для большого класса материалов).

Усталость – одна из разновидностей динамических характеристик, которая определяет количество циклов до разрушения при заданной амплитуде нагрузки. Для усталости характерен способ нагружения, который используется при измерении показателей комплексных (динамических) механических свойств. Анализ литературных данных, показывает, что задача моделирования изменения свойств должна иметь приемлемое для технических приложений решение в области длительной многоцикловой усталости. В этом случае разрушение еще не будет являться основным фактором, и можно следить за изменением механических свойств, используя более детерминированные, а не стохастические законы механики разрушения. Важной является существенная разница между усталостью при испытаниях и при эксплуатации. Это определяется естественным желанием сократить время испытаний, а изделие эксплуатировать длительно. Поэтому при испытаниях специально увеличивают частоту нагружения, что ведет к разогреву, потере формы и даже тепловому разрушению материала.

Физико-механические аспекты усталости полимеров изложены в работах [3-4]. При технических испытаниях основное внимание обращают на амплитуду колебаний, как основной параметр прочности. Но к форме цикла надо относиться внимательно. Его разные участки имеют разный вес в процессе утомления. При

объемном деформировании положительные значения цикла (расширение) направлены на разрушение и дают свободу реализации молекулярных движений, а отрицательные (сжатие) упрочняют материал. Наличие среднего положительного значения приводит к сопутствующим явлениям типа ползучести, повышающим повреждение. При сдвиге положительные и отрицательные значения равноправны (движения вправо или влево не имеют разных реакций). При объемном деформировании можно выделить шесть разных факторов: расширение, разгрузка после расширения, сжатие, разгрузка после сжатия, средний уровень расширения, средний уровень сжатия. При сдвиге – три разных фактора: нагружение, разгрузка, средний уровень. Если НДС содержит две составляющие шаровую и девиаторную, тогда надо одновременно рассматривать сразу два цикла с разными по смыслу реакциями. В термомеханике надо учитывать, что тепло, выделяемое при сдвиговых деформациях, будет приводить к изменениям объема. Реакции на шаровую и девиаторную составляющие деформации, различны из-за вызываемых ими разных тепловых процессов.

Анализ исследований [3-4] показывает, что со временем происходит увеличение податливости материала, с одновременным уменьшением его прочностных характеристик. Наблюдается сдвиг характеристик диссипации в область меньших температур. Интересно, что одновременно протекают процессы уплотнения, упорядочения структуры и разрыхления. Кристаллизующиеся полимера обладают более высокой усталостной прочностью, чем аморфные. Двухфазная структура, в которой кристаллическая фаза, вплавлена в податливую аморфную, замедляет утомление, а сами кристаллиты имеют повышенную прочность.

При изучении механических свойств ПМ важным является переход на термодинамические позиции. Для анализа процессов деформирования надо привлекать и такие теплофизические свойства, как: теплоемкость, коэффициент объемного теплового расширения, теплопроводность. Для анализа важны два типа теплоты при деформировании ПМ: термоупругое тепловыделение/поглощение, диссипация энергии (вязкое трение).

В основу представления свойств ПМ положены связанные друг с другом модели: объемного и сдвигового деформирования [5]. Это естественно с точки зрения механики сплошных сред (любое напряженно-деформированное состояние является соответствующей комбинацией двух указанных), а также в силу особой роли объемного деформирования в реализации релаксационных процессов и прочности.

Второй основой моделирования является представление структуры ПМ в виде набора фазовых компонент (ФК) с определяющим параметром – локальной плотностью [5]. Данный подход согласуется с методами групповых вкладов (моделями инкрементов), которые развиты для представления теплофизических и физико-химических свойств ПМ по данным о составе и свойствах химических элементов [1, 2]. Свойства объемного деформирования нелинейны и в первом приближении упруги. Свойства материала $V(T, P)$ определяются соотношениями, суммирующими объемы ФК с учетом весовой функции $C(r)$

Для данной модели получен термодинамический потенциал Гиббса $\Phi(T, V) = k(-V^{-1} + 2/3V^{-3}) + C_2(T)$ и основные характеристики B – изотермическая сжимаемость, $K = B^{-1}$ – модуль объемного сжатия, β – коэффициент теплового рас-

ширения, C_V – теплоемкость материала. Условие для расчета тепловых процессов имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = -\beta T K C_V^{-1} \frac{dV}{dt}.$$

Свойства объемного деформирования являются определяющими для расчета сдвиговых деформаций. При малых дополнительных объемных деформациях соотношения объемного деформирования определяются путем линеаризации вышеприведенных в окрестности отсчетных давлений P_0 и объема V_0 . Соответствующая часть ММ, представляющая свойства ПМ при сдвиговом деформировании, построена при условии малых сдвиговых деформаций. В этом случае изменения температуры $\theta = T - T_0$ определяются уравнением типа

$$\left(T \frac{C_V}{T_0}\right) \frac{d\theta}{dt} = \eta \left(\frac{de_1}{dt}\right)^2.$$

Рост температуры вызывается деформациями при любом знаке скорости деформации вязких элементов de_1/dt .

Основную роль в разрушении связей в соответствии с кинетической теорией прочности играет тепловое воздействие, а силовое воздействие мешает восстановлению связей. Для определения характера изменения свойств при циклических нагрузках предлагается использовать формулу Журкова, адаптированную к ПМ смещением полюса температур [3]

$$\tau = \tau_m \exp\left(\frac{(U_0 - \gamma \sigma)(1 - T/T_m)}{RT}\right),$$

где τ – долговечность, U_0 – энергия активации термодеструкции, γ – структурно-механический параметр, σ – механическое напряжение, T_m – предельная температура, τ_m – минимальная долговечность, R – универсальная газовая постоянная.

Для расчета U_0 предлагается использовать формулу расчета через плотность вещества [3]. Полезны также физические закономерности корреляции прочностных характеристик с отношением теплоемкости к коэффициенту теплового расширения и с теплопроводностью. Для случая многоциклового длительного нагружения расчет времени долговечности выполняется в соответствии с критерием Бэйли [3], модифицированным для случая переменных значений $\sigma(t)$ и $T(t)$

$$\int_0^{t_{\text{цикл}}} [\tau_m \exp((U_0 - \gamma \sigma(t))(1 - T(t)/T_m)/RT(t))]^{-1} dt = 1.$$

Здесь $t_{\text{цикл}}$ – время долговечности при условии циклического нагружения по закону $\sigma(t)$ и при изменяющейся соответствующей температуре $T(t) = T_0 + \theta(t)$. Переменная составляющая температуры $\theta(t)$ определяется в результате расчета процессов тепловыделения и теплоотвода в установившемся режиме. Предполагается, что изменение температуры происходит в условиях достаточного теплоотвода и не приводит к катастрофическому саморазогреву образца. Вычисление интеграла достаточно сделать на участке одного элементарного цикла $t_{\text{эл}} = 1/f$,

где f – частота цикла. Значение $I(t_{эц})$, а также формула $t_{цикл} = N t_{эц}$ позволяют определить количество циклов до разрушения $N = 1/I(t_{эц})$.

Для каждого ФК (типа связи) формируются параметры закона долговечности. Зависимость U_0 от локальной плотности оговорена выше. Выбор γ предполагает проведение модельных расчетов, с учетом величин объемного расширения. Важным является расчет тепловых условий для каждого ФК. Повышение температуры рассчитывается в соответствии с диссипативными свойствами вязкого элемента ФК при текущей частоте воздействия, текущей отсчетной температуре и достигнутой объемной деформации. Учет теплоотвода в первом приближении производится на основе классической задачи теплопроводности, как если бы весь материал был выполнен из одного ФК.

Изменение механических свойств модели происходит вследствие изменения функции распределения локальной плотности $C(r)$ по следующим условиям $Nr = t_{цикл}(r)/t_{эц} = 1/Ir(t_{эц})$ – расчетное количество циклов до разрушения ФК, $C_{кор}(r) = C(r)Nr/Nm$, где Nm – максимальное из значений Nr . Новая спектральная функция $C_H(r)$ получается из $C_{кор}(r)$ в соответствии с условием нормирования (вычислением долей) [5].

После нескольких циклов нагружения связи начнут уменьшать свою долю, вплоть до исключения из начального спектра. Текущее значение $C_H(r)$ игнорируется после того, как число циклов нагружения ФК с номером r превысит Nr . Таким образом, меняются пропорции вкладов фазовых компонентов модели с разными локальными плотностями. Увеличение веса слева и справа от исключенной связи означает повышение роли плотных и рыхлых компонент.

Аналізу тепловыделения и поглощения, вызванному деформациями надо уделить особое внимание. Подобные явления моделируются на одном элементарном цикле. При объемном деформировании тепловыделение вызвано термоупругими эффектами (в данной работе пока внутреннее объемное трение не учитывается). Тепло активнее отводится при сжатии (теплопроводность растет с давлением) и отвод замедляется при расширении. В шаровой составляющей тепло выделяется на второй половине цикла (при сжатии) и поглощается на первой половине цикла (при расширении). При этом считается, что при симметричном цикле имеется полный баланс тепла (и поэтому данные процессы в литературе игнорируют). Данные эффекты требуют дополнительного исследования потому, что несимметрия процессов в полциклах может дать дополнительный вклад в механизм усталости.

Моделирование процессов длительной ползучести и циклического деформирования показывает их важное отличие в характере обратимой энергии и диссипированной. В процессе ползучести в течение времени воздействия последовательно осуществляются релаксационные переходы, соответствующие ряду времен релаксации, и также последовательно выделяется тепло при диссипации энергии. Естественно потери на переходах суммируются, но при этом энергия диссипации ограничена, а длительность процесса позволяет теплу выйти из образца. При циклическом деформировании процесс рассеяния энергии проявляется при частотах релаксационного спектра близких к набору частот цикла воздействия. Таким образом, не весь спектр реагирует на возмущение, но зато, если на данных частотах есть соответствующий релаксационный механизм, то он будет переводить в

каждом цикле часть работы в тепло. Поскольку циклов достаточно много, то диссипированная энергия при длительном гармоническом нагружении непрерывно увеличивается и существенно превышает соответствующие характеристики при ползучести. В кинетической теории прочности фактически сама тепловая энергия считается источником потери работоспособности материала.

Важным механизмом изменения свойств является изменение распределения локальных плотностей. Экспериментальными данными подтверждается, что при циклических воздействиях повышаются доли ФК с низкой и высокой плотностью. Общая суммарная плотность материала обычно уменьшается (но в некоторых случаях возрастает, что требует дополнительных исследований). Этот процесс определяется релаксационными законами и существенно активизируется теплом, выделяемым при циклическом деформировании. Уплотнение части материала определяется стремлением к реализации перестройки молекулярных структур к более плотной упаковке, а разрыхление другой части вызвано и процессом разрыва связей. При такой картине реакции надо ожидать большую неоднородность распределения напряжений, т.е. и большее повреждающее действие в дальнейшем.

Список литературы

- [1] Ван Кревелен Д.В. Свойства и химическое строение полимеров / Пер. с англ. Ф.Ф. Ходжеванова Под ред. А.Я. Малкина. М.: Химия, 1976. 414 с.
- [2] Аскадский А.А., Матвеев Ю.И. Химическое строение и физические свойства полимеров. М.: Химия, 1983. 248 с.
- [3] Ратнер С.Б., Ярцев В.П. Физическая механика пластмасс. Как прогнозируют работоспособность? М.: Химия, 1992. 320 с.
- [4] Кауш Г. Разрушение полимеров / Пер. с англ. В.И. Участкина Под ред. С.Б. Ратнера. М.: Мир, 1981. 440 с.
- [5] Степаненко Ю.П., Исаев К.В., Азаров А.Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Совр. Пробл. Мех. Сплош. Сред.: тр. II межд. конф. - Ростов-на-Дону: МП "Книга". 1996. Т. I. С. 120–125.

Azarov A.D. *The model of the polymer material with the varying mechanical properties.* The specific changes of the mechanical deformations properties of the polymer material under the long-term multicycloid actions are considered. The method of modeling is developed Using the structure from the phase components, being characterized by the local density. The fatigue process, leading to the changing of the phase components contributions into the dynamic characteristics, is modelled.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Азаров А.Д., Исаев К.В., Азаров И.Д.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И., ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

Решена задача идентификации линейных дифференциальных моделей (ЛДМ), применяемых для описания деформационных свойств вязкоупругих материалов. Сложность данной задачи состоит в том, что часть параметров – характерные времена ЛДМ, входят в соотношения нелинейно. Для ее решения предложен двухэтапный алгоритм идентификации. Сформированы рекомендации по применению алгоритма.

При описании механических свойств вязко-упругих материалов (связей между напряжениями и деформациями) эффективно использование линейной дифференциальной модели (ЛДМ). Одна из форм ЛДМ – уравнения с внутренними переменными. Эти соотношения представляются в виде системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha_0 u(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) &= -\tau_i^{-1}(\eta_i(t) - u(t))\end{aligned}\quad (1)$$

Форма (1) удобна для проведения численных расчетов. По заданному входу $u(t)$ легко рассчитывается выход $x(t)$. Вход и выход – это напряжения и деформации. Параметрами модели являются α_0 , α_i , τ_i . Переменные $\eta_i(t)$ называются внутренними, и в механических моделях они имеют смысл деформаций элементов с вязкостью.

При идентификации ЛДМ целесообразно применение другой эквивалентной (1) формы, так называемой неориентированной модели [1]. Если ввести регрессионные функции

$$\bar{z}_1(s) = \bar{u}(s), \quad \bar{z}_{2i}(s) = \frac{1}{1 + sT_i} \bar{u}(s), \quad \bar{z}_{2i+1}(s) = \frac{sT_i}{1 + sT_i} \bar{x}(s)\quad (2)$$

то в пространстве преобразований Лапласа она принимает вид

$$\bar{x}(s) = \sum_{i=1}^n c_i \bar{z}_i(s)\quad (3)$$

Здесь приведен случай нулевых начальных условий $\eta_i(0) = 0$, но это условие непринципально, начальные условия можно ввести в расчетный алгоритм [1].

Уравнение (2) эквивалентно (1) при достаточно произвольно заданных T_i . В неориентированной модели (2) параметры T_i в первом приближении задаются равномерно в диапазоне времен эксперимента, и таким образом, модель (2) содержит

определяющие константы - вектор $c(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Удобство формы (2) состоит в том, что в отличие от (1) определяющие константы входят в модель лишь со множителями, и, следовательно, могут быть найдены с помощью более простых линейных алгоритмов.

Соотношения (2) реализуют процедуры фильтрации входных и выходных сигналов. В обычном пространстве это интегральные преобразования по времени

$$\begin{aligned} z_1(t) &= u(t) \\ z_{2i}(t) &= \frac{1}{T_i} \int_0^t \exp\left(-\frac{(t-\tau)}{T_i}\right) u(\tau) d\tau \\ z_{2i+1}(t) &= x(t) - \frac{1}{T_i} \int_0^t \exp\left(-\frac{(t-\tau)}{T_i}\right) x\tau d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

Оценка вектора параметров ЛДМ \hat{c} осуществляется итерационно непосредственно в ходе накопления экспериментальных данных. Тестирующие процессы (воздействия) могут быть произвольными.

По наблюдаемым, т.е. измеренным экспериментальным значениям входного $\tilde{u}(t_j)$ и выходного процессов $\tilde{x}(t_j)$ в соответствии с (4) рассчитываются регрессионные функции $\tilde{z}(t_j)$ и формируется функционал

$$J(N) = \sum_{j=1}^N (\tilde{x}(t_j) - \tilde{z}^T(t_j) \cdot c)^2 \quad (5)$$

Минимум (5) определяется процедурой накопления и обработки данных по времени t , на каждом шаге $m = 1, 2, \dots, N$ которой реализуются следующие итерационные вычисления:

$$V_z = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{z}(t_j) \tilde{z}^T(t_j), \quad \nu_{xz} = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{z}(t_j) \tilde{x}(t_j), \quad \nu_x = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{x}^2(t_j) \quad (6)$$

или в векторной форме

$$y = (\tilde{x}(t_m) \quad \tilde{z}(t_m))^T, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $V_{11} = \nu_x$, $V_{12} = \nu_{xz}^T$, $V_{21} = \nu_{xz}$, $V_{22} = V_z$

$$V := V + yy^T \quad (8)$$

На каждом шаге делаются оценки параметров \hat{c} и их точностных характеристик

$$\hat{c} = V_z^{-1} \nu_{xz}, \quad D(\hat{c}) = \sigma^2 V_z^{-1}, \quad \sigma^2 = \frac{\nu_x - \nu_{xz}^T \hat{c}}{m - n} \quad (9)$$

где \hat{c} - оценка вектора параметров, $D(\hat{c})$ - дисперсионная матрица - мера точности параметров и их корреляции, σ^2 - шум аппроксимации, n - размерность ЛДМ.

При произвольных значениях функций входа и выхода для реализации преобразований (4) используется численный метод интегрирования, с помощью выделения весовой функции $e^{r\tau}$. Общая формула для вычисления базисных функций сводится к вычислению интеграла вида $I(t) = \int_0^t e^{r\tau} f(\tau) d\tau$. Осуществлено пошаговое накопление. На каждом шаге вычисляется $\Delta I(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{r\tau} f(\tau) d\tau$. Реализован модифицированный метод трапеций, в котором $f(\tau)$ аппроксимируется линейной функцией и далее интеграл вычисляется аналитически. Точность численного интегрирования обеспечивается современными средствами съема экспериментальных данных с достаточно большой частотой. Проблемы могут возникнуть лишь при идентификации высокочастотных экспериментов (здесь потребуются дополнительная корректировка алгоритма за счет анализа форм временных процессов).

На втором этапе параметры ЛДМ могут уточняться по полной совокупности данных с помощью линеаризованных соотношений. В основе алгоритма уточнения параметров ЛДМ лежит минимизация функционала при условиях

$$\alpha_i := \alpha_i + \delta\alpha_i, \quad \tau_i := \tau_i + \delta\tau_i$$

$$J(N, \delta\alpha_i, \delta\tau_i) = \sum_{j=1}^N (\tilde{x}(t_j) - x(t_j))^2$$

$$x(t) = \alpha_0 u(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_j z_{aj}(t)$$

$$z_{aj}(t) = \frac{1}{\tau_j} \int_0^t \exp\left(-\frac{(t-\tau)}{\tau_j}\right) u(\tau) d\tau$$

Здесь $\delta\alpha_i$ и $\delta\tau_i$ – поправки к параметрам, определяются из условия минимума функционала с помощью линеаризации вышеприведенных соотношений при условии малости поправок.

Необходимость уточнения может возникнуть только в случаях, когда объект имеет явно выраженный спектр дискретных времен релаксации/запаздывания. Для полимерных материалов это нехарактерно.

Любую линейную динамическую систему можно аппроксимировать ЛДМ, если модель адекватна объекту. Адекватность рассматривается вместе с понятием необходимой точности, определяемой назначением модели: для технических расчетов, для разработки прецизионных измерительных устройств или анализа физических явлений. При этом надо учитывать и достижимую точность экспериментальных данных.

Оценка точности экспериментальных данных (возможностей оборудования) целесообразна на эталонном образце. Если эталонного материала нет, обычно выбирают упругий образец с известными показателями механических свойств.

Если и такая возможность отсутствует, тогда используются характеристики шумов измерительных каналов (среднеквадратические отклонения, корреляционные коэффициенты).

Проверка эффективности алгоритма была проведена на имитационных данных – использовались зашумленные процессы: вход ступенчатое нагружение, выход – релаксация. Выполненные расчеты, показали, что точность идентификации растет с увеличением амплитудных значений перед экспонентами, и с разнесением характерных времен более чем на порядок.

В ходе расчетов сформированы следующие рекомендации: размерность ЛДМ надо выбирать в соответствии с количеством десятичных порядков в интервале времен экспериментальных данных. Но при этом увеличение количества параметров не обязательно приводит к лучшей аппроксимации. После идентификации ЛДМ надо провести анализ среднеквадратической погрешности аппроксимации. Если она значительно меньше СКО шумов экспериментальных данных, в этом случае надо провести расчет с ЛДМ меньшей размерности (взять более грубую модель).

Полимерные материалы, для аппроксимации которых предназначен данный алгоритм, имеют около четырех основных характерных времен релаксации/запаздывания и большое количество промежуточных времен, которые связаны с естественной неоднородностью структуры материала. На графике, для примера, показан характер аппроксимации классических данных - релаксационный модуль полиизобутилена [2]. Пятипараметрическая модель (размерность ЛДМ $n = 2$, $\alpha_0 = 5530$, $\alpha_1 = -2310$, $\tau_0 = 0,34$, $\tau_1 = 3,9$) хорошо представляет данные на интервале от 10^{-2} до 10 с. Увеличение размерности модели нецелесообразно.

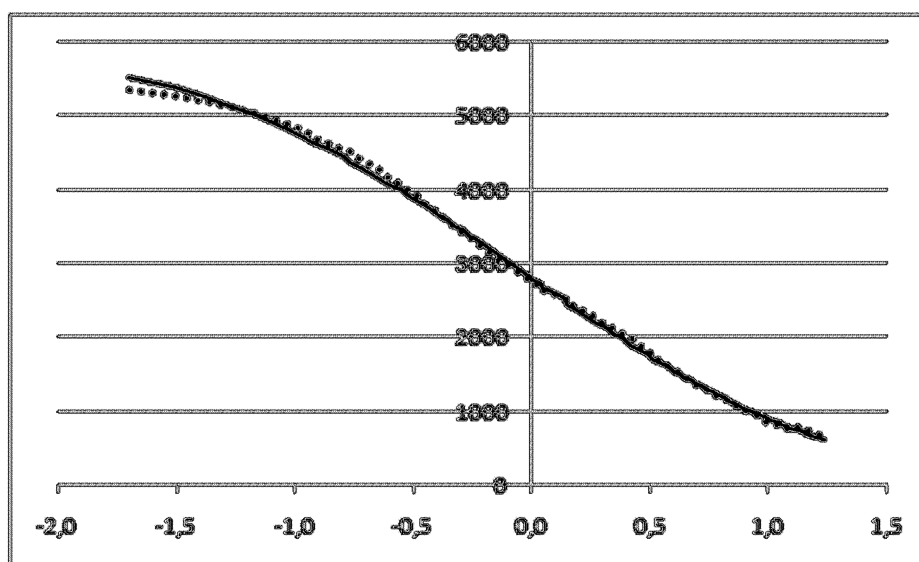


Рис. 1

На рис. 1 сплошная кривая – исходные экспериментальные данные (функция релаксации полиизобутилена), точки – результат аппроксимации.

Список литературы

- [1] *Исаев К.В.* Активная идентификация дифференциальных моделей вязко-упругого поведения материалов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 6. С. 82–88.
- [2] *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностран. Литературы, 1963. 535 с.

Azarov A.D., Isaev K.V., Azarov I.D. *Identification of the linear differential models of the visco-elastic materials.* The problem of identification of the linear differential models (LDM), used for the description of the properties of the visco-elastic materials, is solved. Difficulty of this problem is nonlinear parameters of time. Twostage algorithm of identification is proposed. The recommendations for application is given.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

Азарова П.А.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

В рамках принципа соответствия исследованы фундаментальные решения для вязкоупругой ортотропной плоскости. Исследованы полярные множества трансформант Фурье в плоском и антиплоском случаях. Построены интегральные представления фундаментальных решений. Осуществлено сравнение с упругим случаем.

Методы исследования физических полей в средах с дефектами (полостями, трещинами) в большинстве основываются на фундаментальных решениях, с помощью которых могут быть получены граничные интегральные уравнения. Фундаментальные решения для упругих изотропных сред достаточно хорошо изучены.

В данной работе рассмотрены фундаментальные решения для вязкоупругой ортотропной среды.

В рамках концепции комплексных модулей на основе принципа соответствия [1] задача о колебаниях вязкоупругой среды сведена к аналогичной задаче теории упругости, но с комплексными характеристиками.

Под фундаментальным решением понимается поле смещений $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $i, m = 1, 2, 3$ в точке x , вызванное действием сосредоточенной силы, приложенной в точке среды ξ (индекс m указывает на направление нагрузки). Фундаментальные решения удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$C_{ijkl}^*(i\omega)U_{k,lj}^{(m)}(x, \xi) + \rho\omega^2 U_i^{(m)}(x, \xi) + \delta_{im}\delta(x, \xi) = 0, \quad i, j, k, l, m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $C_{ijkl}^*(i\omega)$ – компоненты тензора комплексных модулей, ω – частота колебаний, ρ – плотность среды, а $\delta(x, \xi) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3)$.

В дальнейшем будем использовать двухиндексные обозначения для компонент тензора комплексных модулей.

Для ортотропной вязкоупругой плоскости в условиях плоской деформации фундаментальные решения $U_i^{(m)}(x, \xi)$, $i, m = 1, 3$ удовлетворяют системе (1), если в ней положить $i, m = 1, 3$.

Введем безразмерные характеристики: $\gamma_1^{**}(i\omega) = \frac{C_{11}^*(i\omega)}{C_{33}^0}$, $\gamma_3^{**}(i\omega) = \frac{C_{33}^*(i\omega)}{C_{33}^0}$, $\gamma_5^{**}(i\omega) = \frac{C_{55}^*(i\omega)}{C_{33}^0}$, $\gamma_7^{**}(i\omega) = \frac{C_{13}^*(i\omega)}{C_{33}^0}$, $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{C_{33}^0}$, где C_{33}^0 – мгновенный модуль вязкоупругой среды. Следует отметить, что k пропорционально ω , и тогда примем $\gamma_j^{**}(i\omega) = \gamma_j^*(ik)$, $j = 1, 3, 5, 7$.

С помощью преобразования Фурье по двум координатам x_1, x_3 получаем интегральные представления фундаментальных решений в плоском случае:

$$U_j^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{C_{33}^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_j^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3, k)}{p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)} e^{i(\alpha_1(\xi_1 - x_1) + \alpha_3(\xi_3 - x_3))} d\alpha_1 d\alpha_3, \quad (2)$$

где $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = (\gamma_1^* \alpha_1^2 + \gamma_5^* \alpha_3^2 - k^2)(\gamma_5^* \alpha_1^2 + \gamma_3^* \alpha_3^2 - k^2) - (\gamma_7^* + \gamma_5^*)^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2$,

$$p_1^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3, k) = \delta_{1m}(\gamma_5^* \alpha_1^2 + \gamma_3^* \alpha_3^2 - k^2) - \delta_{3m}(\gamma_7^* + \gamma_5^*)\alpha_1 \alpha_3,$$

$$p_3^{(m)}(\alpha_1, \alpha_3, k) = \delta_{3m}(\gamma_1^* \alpha_1^2 + \gamma_5^* \alpha_3^2 - k^2) - \delta_{1m}(\gamma_7^* + \gamma_5^*)\alpha_1 \alpha_3.$$

Нули полинома $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)$ образуют полярное множество. Его исследование будет полезным при анализе и вычислении интеграла (2). Выполнив замену $\alpha_i = k\beta_i$, получаем

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = k^4 p_0(\beta_1, \beta_3, 1).$$

Отметим, что в вязкоупругом случае, в отличие от упругого, полином $p_0(\beta_1, \beta_3, 1)$ зависит от k , так как от k зависят коэффициенты γ_j^* , $j = 1, 3, 5, 7$. Тогда обозначим

$$p_0(\beta_1, \beta_3, 1) = p_0^*(\beta_1, \beta_3, k).$$

Переходя к полярной системе координат $\beta_1 = \beta \cos \varphi$, $\beta_3 = \beta \sin \varphi$, представим

$$p_0^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi, k) = a(\varphi, k)(\beta^2 - \zeta_1^2(\varphi, k))(\beta^2 - \zeta_2^2(\varphi, k)),$$

где $\zeta_{1,2}^2(\varphi, k) = (b(\varphi, k) \pm \sqrt{d(\varphi, k)}) \cdot (2a(\varphi, k))^{-1}$,

$$a(\varphi, k) = \gamma_1^* \gamma_5^* \cos^4 \varphi + \gamma_5^* \gamma_3^* \sin^4 \varphi + (\gamma_1^* \gamma_3^* - (\gamma_7^*)^2 - 2\gamma_7^* \gamma_5^*) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$b(\varphi, k) = \gamma_5^* + \gamma_1^* \cos^2 \varphi + \gamma_3^* \sin^2 \varphi,$$

$$d(\varphi, k) = ((\gamma_1^* - \gamma_5^*) \cos^2 \varphi + (\gamma_5^* - \gamma_3^*) \sin^2 \varphi)^2 + 4(\gamma_7^* + \gamma_5^*)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Для упругой среды полярное множество представляют собой две замкнутые непересекающиеся кривые, которые обладают свойствами симметрии относительно обеих координатных осей, т.е. $\zeta_n(\varphi + \pi) = \zeta_n(\varphi) = \zeta_n(-\varphi)$, $n = 1, 2$ [2].

Для вязкоупругой среды полярное множество при каждом фиксированном k^* представляют собой две комплексные кривые $\beta(k^*) = \zeta_n(\varphi, k^*) = Re(\zeta_n(\varphi, k^*)) + iIm(\zeta_n(\varphi, k^*))$, $n = 1, 2$, для вещественной и мнимой частей которых также выполняется свойство симметрии относительно обеих координатных осей.

На рис. 1 представлены вещественные и мнимые части полярного множества вязкоупругой плоскости при $k^* = 0.2$. Для сравнения приведены полярные множества для упругих сред с упругими модулями, совпадающими с длительными и мгновенными модулями вязкоупругой среды.

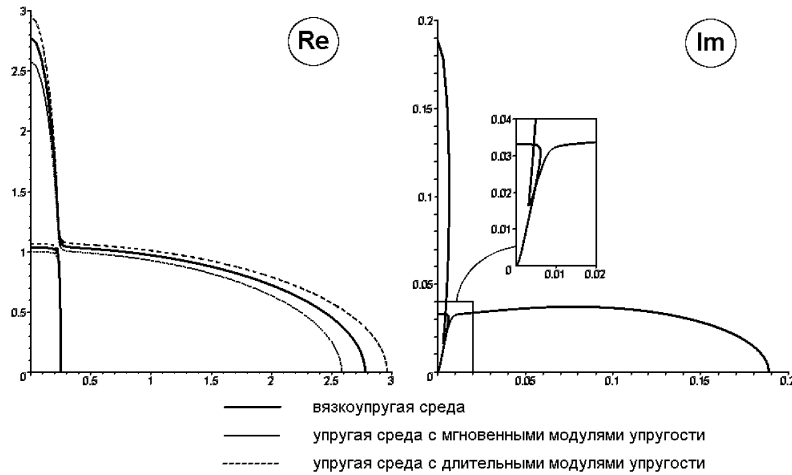


Рис. 1.

Переходя в (2) к полярным координатам β, φ , и вычисляя интеграл при помощи теории вычетов аналогично предложенному в [2] имеем

$$U_j^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{C_{33}^0} \int_0^\pi \sum_{n=1}^2 \frac{A_{njm}(\varphi, k)}{a(\varphi, k)} F(t_n(\varphi, k, r, \psi)) d\varphi, \quad (3)$$

где $A_{njm}(\varphi, k) = (-1)^{n-1} (\delta_{jm} - \zeta_n^2 G_{jm}) (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^{-1}$, $n = 1, 2$, $j, m = 1, 3$,

$$G_{11} = \gamma_5^* \cos^2 \varphi + \gamma_3^* \sin^2 \varphi,$$

$$G_{33} = \gamma_1^* \cos^2 \varphi + \gamma_5^* \sin^2 \varphi,$$

$$G_{13} = G_{31} = -(\gamma_5^* + \gamma_7^*) \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$F(z) = 0.5\pi i e^{i|z|} - (ci|z| \cos|z| + si|z| \sin|z|),$$

$$t_n(\varphi, k, r, \psi) = kr \zeta_n(\varphi, k) \cos(\varphi - \psi),$$

а параметры ψ и r введены следующим образом $\xi_1 - x_1 = r \cos \psi$, $\xi_3 - x_3 = r \sin \psi$.

Для ортотропной вязкоупругой плоскости в условиях антиплоской деформации фундаментальное решение $U_2^{(2)}(x, \xi)$ удовлетворяет (1), если положить $i = m = 2$.

Введены безразмерные параметры $\gamma_4^{**}(i\omega) = \frac{C_{44}(i\omega)}{C_{66}^0}$, $\gamma_6^{**}(i\omega) = \frac{C_{66}(i\omega)}{C_{66}^0}$, $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{C_{66}^0}$, причем $\gamma_j^{**}(i\omega) = \gamma_j^*(ik)$, $j = 4, 6$, а C_{66}^0 – как и в плоской задаче, мгновенный модуль вязкоупругой среды.

Применяя преобразование Фурье, получаем

$$U_2^{(2)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{C_{66}^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha_1(\xi_1 - x_1) + \alpha_3(\xi_3 - x_3))}}{p_0(\alpha_1, \alpha_3, k)} d\alpha_1 d\alpha_3, \quad (4)$$

где $p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = \gamma_6 \alpha_1^2 + \gamma_4 \alpha_3^2 - k^2$.

Рассуждая как и в плоской задаче, имеем

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, k) = k^2 p_0(\beta_1, \beta_3, 1).$$

Так как коэффициенты полинома γ_j^* , $j = 4, 6$ являются функциями от k , то обозначаем

$$p_0(\beta_1, \beta_3, 1) = p_0^*(\beta_1, \beta_3, k)$$

и представляем его в следующем виде

$$p_0^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi, k) = b(\varphi, k) (\beta^2 - \zeta_0^2(\varphi, k)),$$

где $\zeta_0^2(\varphi, k) = (b(\varphi, k))^{-1}$, $b(\varphi, k) = \gamma_6 \cos^2 \varphi + \gamma_4 \sin^2 \varphi$.

Полярное множество антиплоской задачи обладает теми же свойствами симметрии, что и в плоском случае, только представляет собой одну кривую – комплексную $\beta(k^*) = \zeta_0(\varphi, k^*) = \text{Re}(\zeta_0(\varphi, k^*)) + i \text{Im}(\zeta_0(\varphi, k^*))$ при каждом фиксированном k^* в случае вязкоупругой среды и вещественную (эллипс) в случае упругой.

На рис. 2 изображены графики полярного множества антиплоской задачи, аналогичные представленным на рис. 1.

Вычисляя интеграл (4), тем же методом, что и интеграл (2), получаем итергальное представление фундаментального решения в случае антиплоской задачи

$$U_2^{(2)}(x, \xi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{C_{66}^0} \int_0^\pi \frac{1}{b(\varphi, k)} F(t_0(\varphi, k, r, \psi)) d\varphi, \quad (5)$$

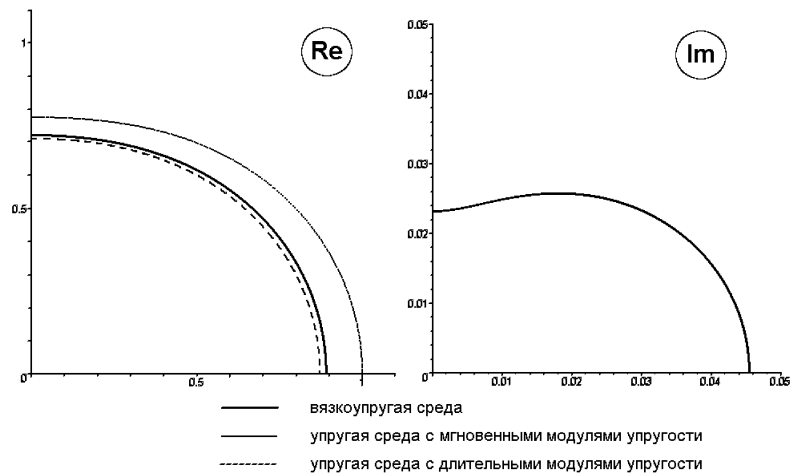


Рис. 2.

где функция F , ее аргумент $t_0(\varphi, k, r, \psi)$ и переменные ψ и r определены ранее.

Для численного анализа и построения полярных множеств, представленных на рис. 1 и рис. 2, был взят вязкоупругий ортотропный композит, состоящий из эпоксидной смолы с 60 процентами графитных продольных волокон [3].

Автор благодарит Ватульяна А.О. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338 с.
- [2] Ватульян А.О., Чебакова Е.М. Фундаментальные решения для ортотропной среды в случае установившихся колебаний. // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 5. С. 131-139.
- [3] Garnich M.R., Hansen A.C. A multicontinuum Approach to Structural Analysis of Linear Viscoelastic Composite Materials. // J. of Applied Mechanics. December 1997. Vol. 64. P. 795-803.

Azarova P.A. *The fundamental solutions for visco-elastic orthotropic plane.* The fundamental solutions for visco-elastic orthotropic plane according to the conformity principle are investigated. The polar sets of the Fourier's transforms in planar and antiplanar cases are investigated. The integral presentations of the fundamental solutions are derived. The comparison with the elastic problem is carried out.

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМ УПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ, ГРАДИЕНТ ИЗМЕНЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ КОТОРОГО МЕНЯЕТ ЗНАК

Айзикович С. М. Андреева Ю. Л.

ДГТУ, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о вдавливании штампа в полуплоскость с неоднородным упругим покрытием, градиент изменения упругих свойств которого меняет знак. Для сведения задачи к интегральным уравнениям используется метод интегральных преобразований Фурье. Задача решается аналитическими и асимптотическими методами. Излагается метод численного построения трансформант ядер интегральных уравнений и исследуются их свойства. Приводятся примеры трансформант ядер интегральных уравнений для случаев, когда градиент изменения упругих свойств в покрытии меняет знак 1, 4, 8, 16-раз. Для этих случаев получено асимптотическое решение задачи контактного взаимодействия для градиентного покрытия.

Постановка задачи. Пусть недеформируемый штамп взаимодействует с поверхностью Γ упругой неоднородной полуплоскостью Ω . С полуплоскостью связана декартова система координат (x, y) . Штамп вдавливается в Γ силой P и моментом M , при этом длина линии контакта между ними в плане Γ' равна $2a$. Силы трения на Γ' предполагаются отсутствующими. Вне штампа Γ не нагружена.

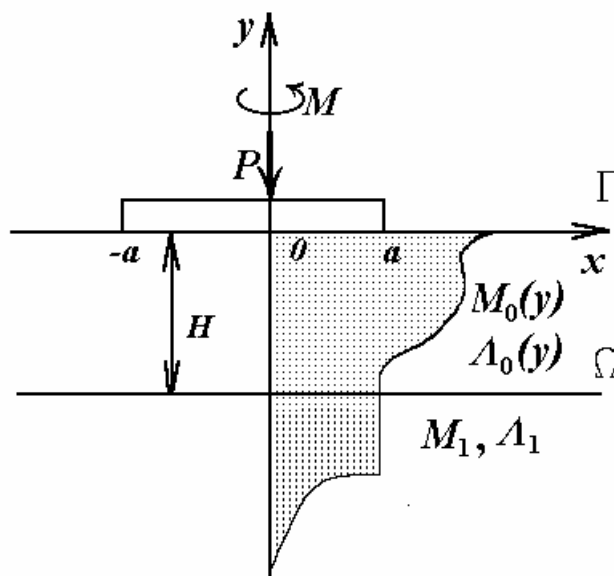


Рис. 1. Внедрение штампа в неоднородную полуплоскость

Коэффициенты Ламе Λ и M полуплоскости с глубиной изменяются по закону:

$$\begin{aligned} 1) \Lambda &= \Lambda_0(y), M = M_0(y), \quad -H \leq y \leq 0 \\ 2) \Lambda &= \Lambda_1 = \Lambda_0(-H), M = M_1 = M_0(-H), \quad -\infty < y < -H \end{aligned}$$

под давлением силы P и момента M штамп переместится в направлении оси y на величину $\alpha + x\beta$. Граничные условия задачи при сделанных предположениях имеют вид:

$$y = 0, \tau_{xy}^{(1)} = 0, \begin{cases} \sigma_y^{(1)} = 0, & |x| > a \\ v^{(1)} = -(\alpha + x\beta - \gamma(x)) = -f(x), & |x| \leq a \end{cases}$$

Здесь $\alpha + x\beta$ – перемещение штампа под действием силы P и момента M , $\gamma(x)$ – форма основания штампа. Предполагаем, что на границе изменения закона неоднородности имеют место условия сопряжения:

$$y = -H, \begin{cases} \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, & |x| > a \\ u^{(1)} = u^{(2)}, v^{(1)} = v^{(2)}, & |x| \leq a \end{cases}$$

u и v – смещения вдоль осей x и y соответственно. Индекс (1) соответствует области определения $-H \leq y \leq 0$, (2) соответствует $-\infty < y < -H$, при $(|x|; -y) \rightarrow \infty$ напряжения в полуплоскости исчезают. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_y^{(1)}|_{y=0} = -q(x), \quad |x| \leq a$$

а также связь между P и α . Здесь основной является задача определения функции распределения контактных давлений $q(x)$, поскольку после ее определения связь между усилиями P и M , действующими на штамп и величиной α находится из условия равновесия штампа:

$$P = \int_{-a}^a q(\xi) d\xi,$$

Метод решения изложен в [1].

Численные результаты: Предполагается, что градиент изменения модуля сдвига по толщине покрытия меняется по синусоидальному закону. Рассматриваются случаи, когда покрытие в целом более жесткое, чем подложка и наоборот – более мягкое, чем подложка. На рисунке 2 приведены графики рассмотренных синусоидальных законов изменения модуля сдвига по толщине покрытия для покрытия более жесткого, чем подложка, когда градиент изменения упругих свойств покрытия меняет знак 1, 4, 8, 16 раз.

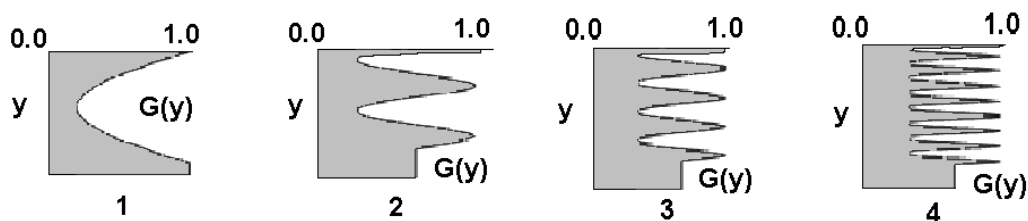


Рис. 2. Графики функций законов неоднородности

Численно получены трансформанты ядер парных интегральных уравнений для всех 4-х вышеуказанных на рисунке 2 случаев изменения упругих свойств в покрытии. Полученные трансформанты представлены на рисунке 3, где нумерация графиков соответствует представленным на рисунке 2 законам неоднородности.

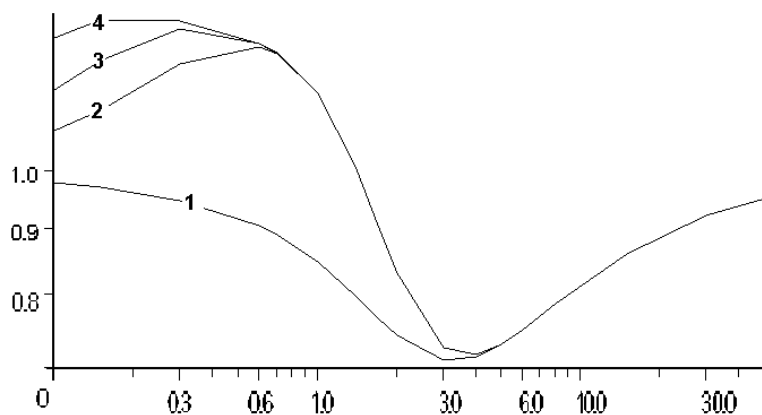


Рис. 3. Трансформанты ядер парного интегрального уравнения

Аналогично рассматривался случай, когда покрытие более мягкое, чем подложка. Исследовались случаи, когда градиент изменения упругих свойств меняет знак 1, 4, 8, 16-раз. Полученные трансформанты представлены на рисунке 5, где нумерация графиков соответствует представленным на рисунке 4 законам неоднородности.

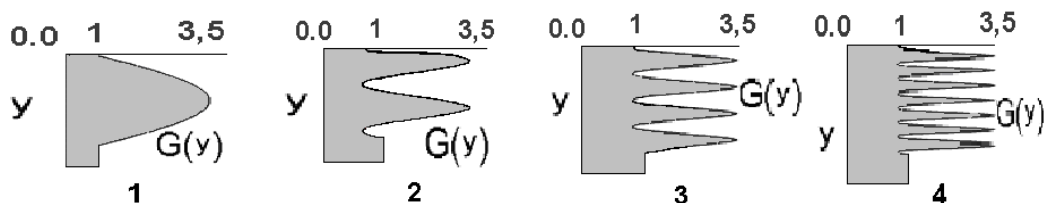


Рис. 4. Графики функций законов неоднородности

График трансформант ядер более мягкого закона неоднородности при изменении с глубиной градиента упругих свойств представлен на рисунке 5, где нумерация графиков соответствует представленным на рисунке 4 законам неоднородности.

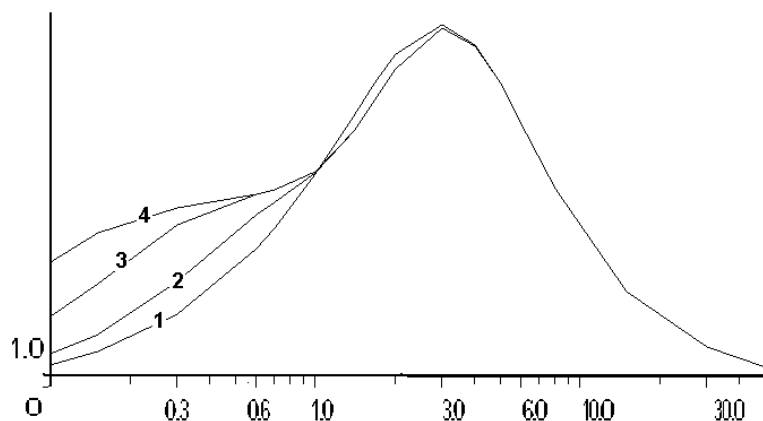


Рис. 5. Трансформанты ядер парного интегрального уравнения

Список литературы

- [1] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.:Физматлит, 2006. 240 с.

Aizikovich S.M., Andreeva J.L. *Approximate analytical solution of the indentation problem for a half-plane with alternating sign gradient in elastic properties coating.*

The problem of the penetration of an indenter into a half-plane with a functionally graded elastic coating is considered. It is assumed that the law of the elastic properties variation with coating depth is an arbitrary sufficiently smooth function depending on the distance from the surface of the coating. For reduction this problem to the integral equations method Fourier integral transformation is used. In the analysis, the previously obtained approximate analytical asymptotically exact solution of the corresponding contact problem is used [1]. It is investigated of the integral equations kernels transform for the example when alternating sign the variation gradient of elastic properties of coating take place 1,4,8 and 16 times.

ВНЕДРЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ШТАМПА В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЕ ПОКРЫТИЕ, МОДУЛЬ ЮНГА КОТОРОГО МЕНЯЕТСЯ НЕМОНОТОННО.

Айзикович С. М., Кренев Л. И., Трубчик И. С.
ДГТУ, Ростов-на-Дону

В работе рассматривается задача о внедрении в функционально - градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа. Предполагается, что штамп является телом вращения, подошва которого имеет параболическую форму, а контакт между штампом и неоднородным слоем гладкий. При решении контактной задачи используется двухсторонний асимптотический метод, разработанный Айзиковичем С.М. [1]. В численном эксперименте анализируется напряженно-деформированное состояние покрытия, модуль Юнга которого изменяется синусоидально, а число волн синуса варьируется от одной до трех.

1. Постановка задачи. Сферический индентор вдавливаются в поверхность неоднородного упругого полупространства силой P . С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, φ, z) .

Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом - R , сферы описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта сферический индентор аппроксимируется жестким параболическим индентором

$$z = \varphi(r) = \beta r^2 \quad (1)$$

Вне индентора поверхность полупространства не загружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z .

Считаем, что модуль Юнга $E(z)$ непрерывно и немонотонно изменяется по глубине в пределах неоднородного слоя, а коэффициент Пуассона $\nu(z)$ остается постоянным.

$$\begin{aligned} 1. E &= E_0(z), \quad \nu = \nu_0(-H), & -H \leq z \leq 0 \\ 2. E &= E(-H), \quad \nu = \nu_0(-H), & -\infty \leq z \leq -H \end{aligned} \quad (2)$$

При вышеуказанных предположениях, граничные условия имеют вид:

$$z = 0, \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a \\ w = \chi(r) = \chi - \varphi(r), & r \leq a \end{cases} \quad (3)$$

Здесь w - смещение вдоль оси z , $\tau_{zr}, \tau_{z\varphi}, \sigma_z$ - радиальные, тангенциальные и нормальные напряжения.

При $z = -H$ должно выполняться условие сопряжения по напряжениям и перемещениям.

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, w^{(1)} = w^{(2)}, u^{(1)} = u^{(2)}$$

Напряжения и деформации стремятся к нулю при $(r, -z) \rightarrow \infty$.

Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_z(r, 0) = -q(r), \quad 0 < r \leq a \quad (4)$$

размер зоны контакта a , а также связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа χ .

Так как края индентора не врезаются в поверхность полупространства, то должно выполняться соотношение

$$q(a) = 0$$

которое используется для определения полуширины зоны контакта и накладывает некоторые ограничения на функцию $q(r)$.

Заметим, также что в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства, для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $q(r) \geq 0$ для всех $r \leq a$.

Решение поставленной задачи. Посредством преобразования Ханкеля и метода модулирующих функций задача сводится к решению парного интегрального уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta(0)} \int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = f(r), & 0 \leq r \leq 1 \\ \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = 0, & r > 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad (6)$$

$$f(r) = \delta - \varphi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Здесь J_0 - функция Бесселя нулевого порядка, $\varphi(ar) = \beta a^2 r^2$, $\beta = (2R)^{-1}$, R - радиус сферы внедряемой в полупространство, $\lambda = H/a$ - характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda\alpha)$ - трансформанта ядра парного интегрального уравнения. В общем случае функция $L(\lambda\alpha)$ строится численно, используя метод моделирующих функций. При выполнении условий:

$$\min_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) \geq c > 0, \quad \max_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) \leq c < \infty, \quad (7)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(z) = const, \quad \Delta(z) = E(z)(1 - \nu^2(z))^{-1}$$

может быть показано [1], что трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$L(\alpha) = A + B|\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (8)$$

$$L(\alpha) = 1 + D|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty$$

$$A = \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(0)\Delta^{-1}(z), \quad (9)$$

Здесь A, B, D - постоянные.

Аппроксимируем трансформанту ядра выражением

$$L(\lambda\alpha) \approx L_N(\lambda\alpha), \quad L_N(\lambda\alpha) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a^2 + A_i^2 \lambda^{-2}}{a^2 + B_i^2 \lambda^{-2}} \quad (10)$$

Парное интегральное уравнение (5), в котором ядро $L(\lambda\alpha)$ заменено на $L_N(\lambda\alpha)$, имеет замкнутое решение :

$$q_N^{\text{II}}(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -2A^0 L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} - \sum_{i=1}^N C_i a_i \int_r^1 \frac{\text{sh}(a_i t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right\} \quad (11)$$

Коэффициенты C_i определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \text{sh } a_i + b_i \text{ch } a_i}{b_k^2 - a_i^2} + \quad (12)$$

$$L_N^{-1}(0) b_k^{-1} [B^0 + A^0 [1 + 2(b_k + 1)b_k^{-2} + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} + b_i^{-2})]] = 0$$

Постоянная B^0 определяется из условия $q(1) = 0$. Оно имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N C_i \text{ch}(a_i) + L_N^{-1}(0) \left[B^0 + A^0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} - b_i^{-2}) \right] \right] = 0 \quad (13)$$

Здесь $a_i = A_i \lambda^{-1}$, $b_i = B_i \lambda^{-1}$, $B^0 = \delta \Delta(0)$, $A^0 = 2\alpha \beta \Delta(0)$.

Связь между вдавливающей силой и осадкой штампа определяется из условия равновесия штампа:

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 q(r) r dr$$

Имеем:

$$P_N^{\text{II}} = 4a^2 \left[-\frac{4}{3} \alpha \beta L_N^{-1}(0) \Delta(0) + \sum_{i=1}^N C_i (-\text{ch } a_i + a_i^{-1} \text{sh } a_i) \right] \quad (14)$$

Результаты численного моделирования. В численном эксперименте анализируется влияние немонотонного изменения по глубине модуля Юнга на напряженно-деформированное состояние покрытия и подложки при внедрении сферического индентора. Предполагается, что модуль Юнга изменяется синусоидально, а число волн варьируется от одной до трех, при этом рассмотрены случаи более жесткого и менее жесткого покрытия. Значение модуля Юнга может изменяться в

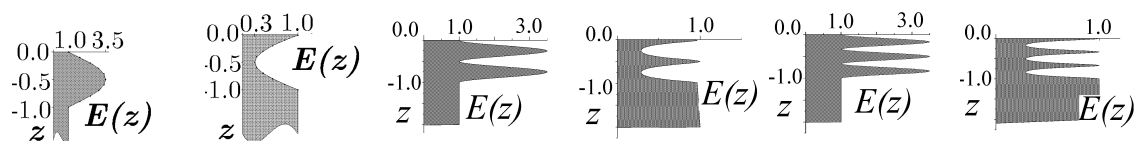


Рис. 1. Графики функций, описывающих изменение модуля Юнга по глубине

3.5 раза по сравнению с подложкой. На рисунке 1 представлены 6 описанных выше случаев изменения модуля Юнга по глубине в пределах неоднородного покрытия.

На рисунке 2 представлены трансформанты ядер парного интегрального уравнения для этих случаев изменения механических свойств по глубине. Первая цифра в легенде графика указывает на число волн, а вторая на отношение экстремального значения модуля Юнга в покрытии к его значению в подложке. Интересно отметить, что число волн не влияет на число вершин кривой, а приводит к сдвигу экстремума в область больших α .

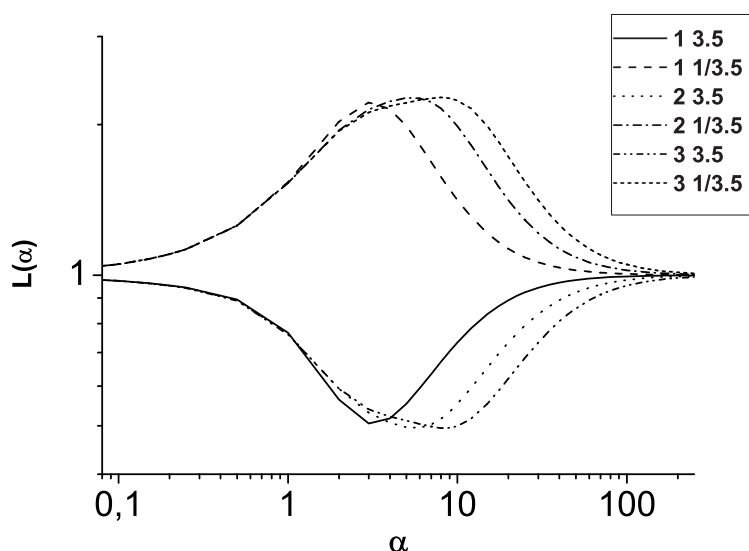


Рис. 2. Трансформанты ядер парного интегрального уравнения

Для материалов с покрытием, используя метод индентирования можно определить модуль упругости актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении параболического штампа вид функции жесткости следующий:

$$E_W(a) = S(a) = \frac{3 P}{4 a \delta} \frac{1}{1 - \nu^2} \quad (15)$$

где a – радиуса зоны контакта, δ – перемещение индентора. Для неоднородного материала функция жесткости или эффективный модуль является функцией безразмерного геометрического параметра $a/H = \lambda^{-1}$.

На рисунке 3 приведены значения функции жесткости для описанных выше сочетаний законов изменения упругих параметров. Поведение кривых жесткости на графике подобно поведению трансформант, но изменяется направление выпуклости кривой и с увеличением числа волн точка экстремума кривой стремится к началу координат. При значениях больше единицы, то есть при зонах контакта больших толщины функционально-градиентного слоя кривые практически неразличимы.

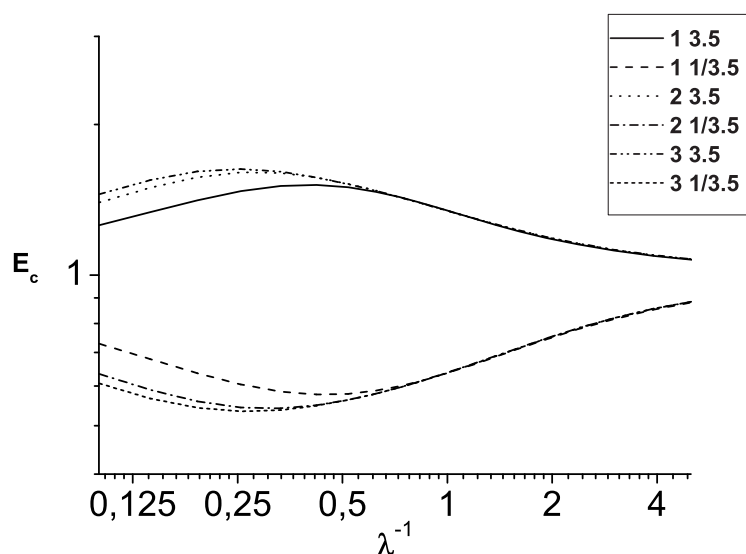


Рис. 3. Функции жесткости

Список литературы

- [1] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.:Физматлит, 2006. 240 с.

Aizikovich S.M., Krenov L.I., Trubchik I.S. *Penetration of a parabolic punch in functionally graded coating, which Young modulus is changed inmonotonically.*

Problem is considered in this work on indentation in functionally graded elastic half-space axially symmetric stamp. Expected that stamp is a paraboloid of revolution, but contact between the stamp and coating a smooth. When solving the contact problem is used two-way asymptotic method, designed Aizikovich S.M. [1]. In numerical simulations is analysed stress-strain distribution of coating, which Young modulus is sinusoidally varying, and number of sine waves varies from one to three.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТА СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ ТРЕУГОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ С НАДРЕЗОМ

Акопьян В. А.*, **Соловьев А. Н.***, **Кабельков А. Н.****,
Черпаков А. В.***

* *НИИ механики и прикладной математики им. И.И.Воровича ЮФУ,
г. Ростов-на-Дону*

** *Южно-российский государственный технический университет (НПИ),
г. Новочеркасск*

*** *Ростовский государственный строительный университет,
г. Ростов-на-Дону*

Изучены особенности поведения спектра собственных частот элемента строительной конструкции треугольной формы при наличии повреждения в виде надреза во внутреннем угле, в зависимости от размера дефекта. Проанализированы особенности этого спектра, связанные с формами колебаний и кинематикой движения в поврежденной зоне.

Разработка методов и инструментов неразрушающего контроля и технической диагностики строительных конструкций и зданий гражданского назначения является важной технической проблемой, решение которой позволяет предотвратить их внезапное разрушение. Актуальность этой проблемы подтверждается, например, разработкой в США крупной программы, которая называется Structure Health Monitoring и посвящена мониторингу ресурса конструкций. Как показывает анализ литературы, среди подходов решения обозначенной задачи, наиболее часто используются резонансные методы свободных (МСК) и вынужденных колебаний (МВК) и значительно реже метод акустической эмиссии. Задачи, возникающие при решении этой проблемы и состояние вопроса подробно изложены в работах [1,2] в которых, как и в некоторых других, диагностика повреждений базируется на основе поиска корреляционных связей параметров частотного спектра колебаний со степенью поврежденности элемента конструкции с использованием МСК и МВК. Другие методы диагностики, а также различные диагностические признаки поврежденности строительных конструкций гражданского назначения проанализированы в одном из последних обзоров [3]. К этому обзору можно добавить цикл работ Матвеева В.В., Бовсуновского А.П., Постнова В.А., посвященных решению задач о колебаниях стержневых моделей с трещинами, в которых были получены приближенные аналитические соотношения, описывающие связь глубины трещины с изменениями частот резонансов собственных колебаний. В этих работах приведены результаты как аналитических, так и конечно-элементных расчетов параметров собственных колебаний стержней с трещиной. Работ, посвященных исследованию колебаний более сложных, чем стержни, элементов конструкций с трещинами явно недостаточно.

Настоящая работа является продолжением исследований, результаты которых частично опубликованы в [4], и посвящена конечно-элементному моделированию

элементов строительных конструкций треугольной формы, ослабленных надрезами.

Цель исследований заключалась в поиске общих закономерностей частотных зависимостей элемента треугольной конфигурации с надрезом, полученных из конечно-элементного анализа 2D и 3D – моделей и связи этих особенностей с критической глубиной надреза, характеризующей момент предразрушающего состояния.

Конечно-элементные модели. Как и ранее [4] механическая модель представляет собой консольно-закрепленный элемент ферменной конструкции правильной треугольной формы (длина стороны 250 мм, размеры прямоугольного сечения 4×8 мм). Надрезы различной глубины, моделирующие развитие трещины, располагались во внутреннем угле [4].

На первом этапе был проведен расчет собственных частот и форм колебаний 2D – модели, и на втором – 3D модели. Результаты этих расчетов (для первых 12 мод колебаний) отражены на рис. 1 и 2 – соответственно, на которых по оси абсцисс отложены относительные значения глубины надреза γ , а по оси ординат – относительное изменение резонансной частоты ε , причем

$$\gamma = t/t_0, \quad \varepsilon = f_r(t)/f_r(t_0) - 1$$

где t – текущее значение глубины надреза, t_0 – исходное значение высоты поперечного сечения в зоне надреза, $f_r(t)$ – резонансная частота.

Анализ зависимостей, частот резонанса от глубины надреза построенных по результатам конечно-элементного расчета обеих исследованных моделей позволил выявить некоторые общие закономерности.

1. Значения резонансных частот большинства мод колебаний с увеличением глубины надреза уменьшаются, но в различной степени. Характер этих зависимостей вполне объясним, с физической точки зрения тем, что частота резонансов падает с уменьшением жесткости элемента конструкции. Вместе с тем резонансы некоторых мод колебаний мало меняется с увеличением глубины надреза, причем это имеет место для обеих 2D и 3D моделей.

2. Для обеих исследованных моделей можно выделить частоты которые являются чувствительными к глубине надреза во всем его диапазоне изменения.

3. Графики резонансных кривых $\varepsilon(\gamma)$ для различных мод колебаний имеют двойкий характер: часть из них монотонно уменьшается с ростом глубины надреза не меняя кривизны, а другие, выполаживаются (т.е. имеют точку перегиба), которая наблюдается при глубине надреза в пределах $0.5 < \gamma < 0.75$.

4. Изменение глубины надреза приводит к перестройке форм колебаний, как в пределах 2D модели, так и переходом от плоской формы в пространственную.

С целью выяснения причин возникновения отмеченных выше особенностей был проведен анализ форм колебаний, соответствующих разным модам и размеру надреза. Анализ этих форм позволил сделать следующие выводы:

– для частот, кривые (рис. 1, 2) которых, сохраняя выпуклость, значительно убывают, мода колебаний не претерпевает перестройки причем кинематика движений

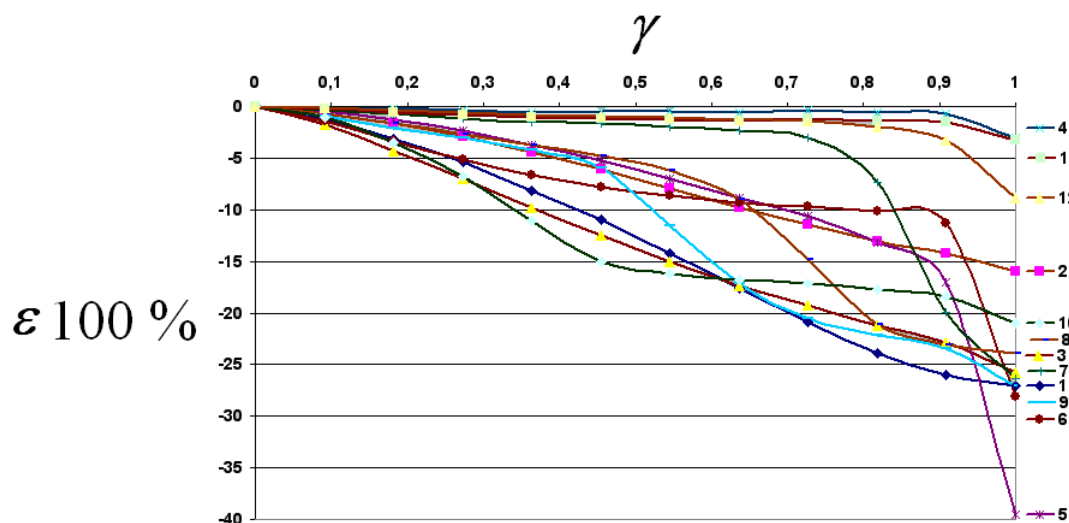


Рис. 1. Зависимость относительного изменения резонансной частоты колебаний от относительной глубины надреза по результатам модального анализа 2D модели для первых 12 мод колебаний.

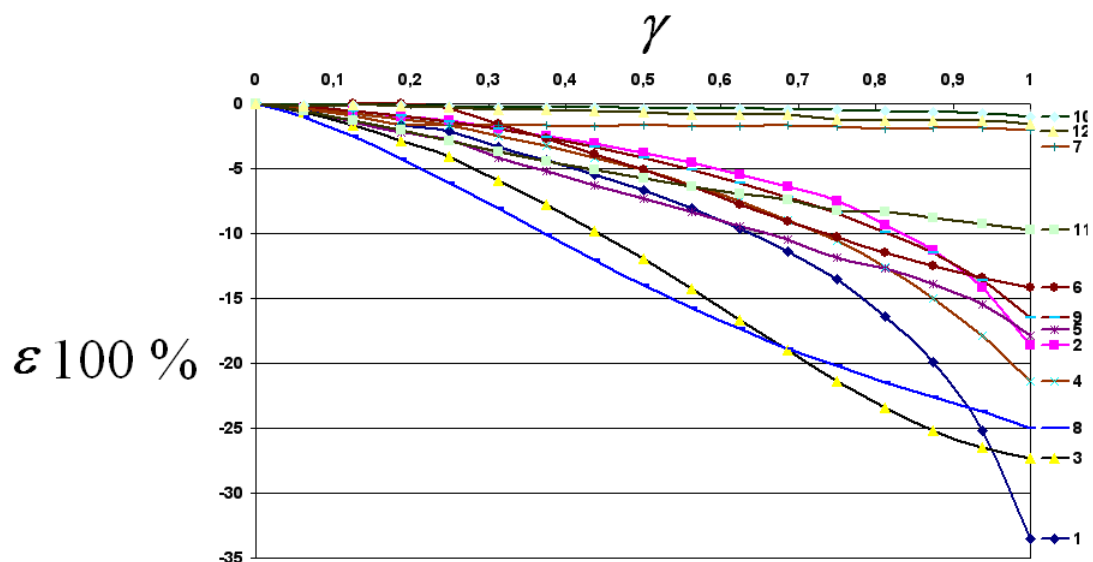


Рис. 2. Зависимость относительного изменения резонансной частоты колебаний от относительной глубины надреза по результатам модального анализа 3D модели для первых 12 мод колебаний.

такова, что надрез претерпевает значительное раскрытие и интенсивно движется незакрепленный стержень примыкающий к разрезу (рис. 3 - левая боковая сторона внизу закреплена, разрез в левом нижнем углу);

– медленно убывающие кривые и пологие участки на других кривых соответствуют формам колебаний, в которых, указанный выше стержень не имеет интенсивных движений, и надрез не раскрывается значительно (рис. 4);

– участки кривых на которых происходит переход от пологого участка к резкому снижению частоты и наоборот, соответствуют перестройкам форм колебаний особенно в окрестности разреза и указанного выше стержня (рис. 5). Наличие этих участков, где происходит резкое снижение определенных частот, может быть связано с характерными размерами надреза, расположенного в определенном месте и служить диагностическим признаком идентификации повреждения или предразрушения.

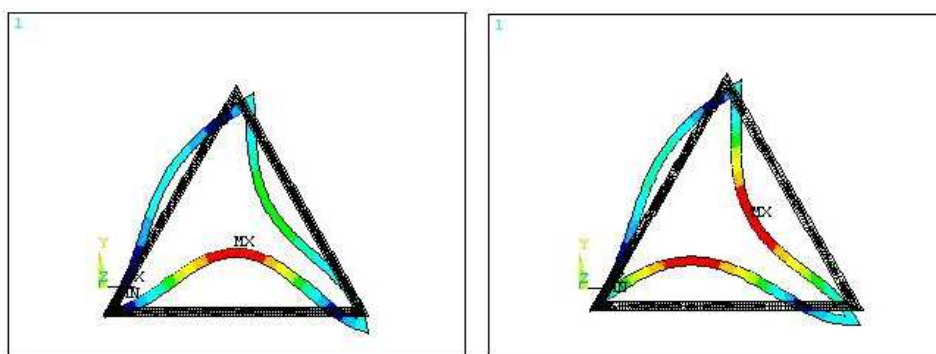


Рис. 3. Распределение модуля смещений на 3-ей моде на деформированной конструкции при отсутствии дефекта (слева), относительная глубина надреза равна 0,875 (справа).

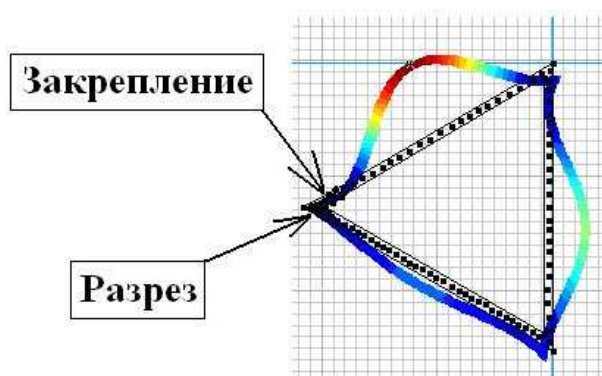


Рис. 4. Распределение модуля смещений на 4-ей моде на деформированной конструкции при относительной глубине надреза равна 0,875.

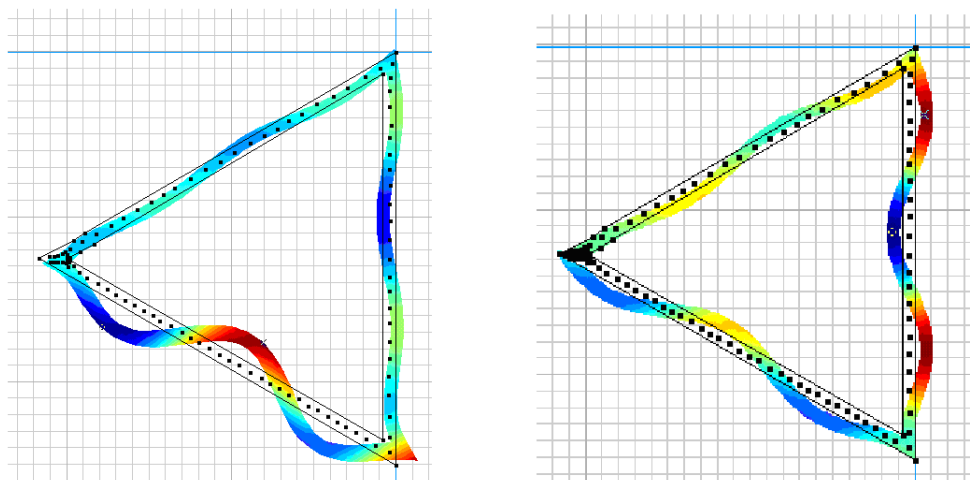


Рис. 5. Перестройка формы колебаний на 10-ой моде: отсутствии дефекта (слева), при относительной глубине надреза равной 0,875 (справа).

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 07-08-12193 и 08-08-90700-моб_ст.

Список литературы

- [1] *Lim Tae W, Kashangaki Thomas A.L.* Structural damage detection of space truss structures using best achievable eigenvectors // *AI FF Journ.* - 1994 V. 32, № 5. – P. 1049-1057.
- [2] *Jenkins L.S.* Cracked shaft detection on large vertical nuclear reactor coolant pump // *Proc. of the conf. on Instability in Rotating Machinery.* - 1985 – P. 253-266.
- [3] *A. Del Grosso, F. Lanato* A critical review of recent advances in monitoring data analyses and interpretation for civil structures // *Proc. Eur. Conf. on Structural Control (4ECSC).* S-Peterburg, 2008, V.1. P. 320-327.
- [4] *Акопян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Черпаков А.В.* Теоретико-экспериментальные исследования колебательных процессов в моделях элементов рамных конструкций с надрезом // *Тр. XI Междунар. конф “Соврем. пробл. механики сплошных сред”*, г. Ростов-н-Д., ООО ЦВВР, 2007, т.1. С.11-17.

Acopyan V.A., Soloviev A.N, Kabelkov A.N., Cherpakov A.V. *FEM modal analysis of the building construction element of the triangular configuration with the cutting.* Features of behaviour of the spectrum of fundamental frequencies of the building construction element of the triangular shape are investigated at presence of a fault as an cutting in an internal angle, depending on the size of an fault. The features of this spectrum connected to shapes of oscillation and kinematic of motions in the damage area are analysed.

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Алтухов Е. В., Фоменко М. В.
Донецкий национальный университет

В данной работе рассматриваются трехмерные задачи об установившихся колебаниях трехслойных изотропных пластин с жестко защемленными плоскими гранями. Полуобратным методом И.И. Воровича получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Исследованы дисперсионные уравнения, возникающие при построении потенциального и вихревого состояний.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях пластины, составленной из трех изотропных слоев симметричного строения относительно ее срединной плоскости.

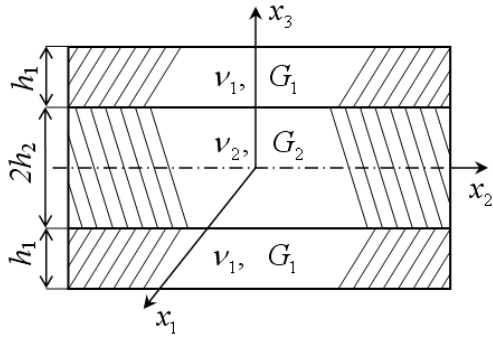


Рис. 1.

Отнесем пластину к координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ (рис. 1), где \tilde{x}_3 – расстояние от срединной плоскости. Тогда $|x_3| \leq (h_1 + h_2)$, причем h_1 – толщина внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. В дальнейшем величины, относящиеся к внешнему слою, будем обозначать индексом (1), к внутреннему – индексом (2). Упругие характеристики материалов слоев обозначим через \tilde{G}_m, ν_m ($m = 1, 2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя.

Введем следующие безразмерные величины:

$$x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R),$$

$$\lambda = h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h,$$

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_{i(m)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij(m)} = \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m = \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G_1 = G, \quad G_2 = 1.$$

Тогда задача об установившихся колебаниях рассматриваемой трехслойной пластины сводится к интегрированию уравнений движения

$$\begin{cases} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{1(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{1(m)} + \nu_{0(m)} \partial_1 \theta_m = 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{2(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{2(m)} + \nu_{0(m)} \partial_2 \theta_m = 0, \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\theta_m = \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{3(m)}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ \nu_{0(m)} = 1/(1 - 2\nu_m), \quad \Omega_m^2 = h^2 \omega^2 \rho_m / \tilde{G}_m = h^2 \omega^2 / c_{2(m)}^2, \quad c_{2(m)} = \sqrt{\tilde{G}_m / \rho_m},$$

ρ_m – плотность материала слоев, ω – круговая частота колебаний. В силу имеющейся симметрии относительно срединной плоскости пластины ($x_3 = 0$) граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_{i(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, \\ u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) \quad (i = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

С использованием метода И. И. Воровича [1] однородные решения краевой задачи (1), (2) будем искать в виде суммы вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}^\pm(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}^\pm(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; m = 1, 2).$$

Вихревое решение. Перемещения вихревого состояния имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1(m)B}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= p_{(m)}^\pm(x_3) \partial_2 B^\pm(x_1, x_2), \\ u_{2(m)B}^\pm &= -p_{(m)}^\pm(x_3) \partial_1 B^\pm(x_1, x_2), \quad u_{3(m)B}^\pm = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в краевую задачу (1), (2), получаем уравнения для определения функций $B^\pm(x_1, x_2)$

$$D^2 B^\pm(x_1, x_2) - (\delta^\pm/\lambda)^2 B^\pm(x_1, x_2) = 0$$

и следующую спектральную задачу для нахождения собственных функций $p_{(m)}^\pm(x_3)$ и параметра δ^\pm :

$$\begin{aligned} p_{(m)}''(x_3) + l_{(m)}^2 p_{(m)}(x_3) &= 0, \\ p_{(1)}(1) = 0, \quad p_{(1)}(\lambda_2) &= p_{(2)}(\lambda_2), \quad G p_{(1)}'(\lambda_2) = p_{(2)}'(\lambda_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $l_{(m)}^2 = \Omega_m^2 + \delta^2$. Здесь и далее штрих означает производную по x_3 .

Собственные функции спектральной задачи (4) получаются такими

$$\begin{aligned} p_{(1)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3) + \frac{1}{G} \frac{l_{(2)k}^+}{l_{(1)k}^+} \sin l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3), \\ p_{(2)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ x_3, \\ p_{(1)k}^-(x_3) &= \sin l_{(2)k}^- \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3) - \frac{1}{G} \frac{l_{(2)k}^-}{l_{(1)k}^-} \cos l_{(2)k}^- \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3), \\ p_{(2)k}^-(x_3) &= \sin l_{(2)k}^- x_3, \end{aligned}$$

а собственные значения δ_k^\pm находятся из дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} -l_{(2)}^+ \sin l_{(2)}^+ \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)}^+ \lambda_1 + G l_{(1)}^+ \cos l_{(2)}^+ \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)}^+ \lambda_1 &= 0, \\ l_{(2)}^- \cos l_{(2)}^- \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)}^- \lambda_1 + G l_{(1)}^- \sin l_{(2)}^- \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)}^- \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно для вихревого решения имеем

$$u_{1(m)B}^\pm = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}^\pm(x_3) \partial_2 B_k^\pm, \quad u_{2(m)B}^\pm = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}^\pm(x_3) \partial_1 B_k^\pm, \quad u_{3(m)B}^\pm = 0 \quad (6)$$

При $\omega = 0$ уравнения (5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (1 + 1/G) \cos \delta_k^+ + (1 - 1/G) \cos (2\lambda_2 - 1) \delta_k^+ &= 0, \\ (1 + 1/G) \sin \delta_k^- + (1 - 1/G) \sin (2\lambda_2 - 1) \delta_k^- &= 0, \end{aligned}$$

и совпадают с известными [2].

В случае $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G = 1$ ($\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \tilde{G}$), $\rho_1 = \rho_2$ уравнения (5) принимают вид [3]

$$\cos \sqrt{\Omega^2 + (\delta^+)^2} = 0, \quad \sin \sqrt{\Omega^2 + (\delta^-)^2} = 0, \quad \Omega^2 = h^2 \omega^2 \rho / \tilde{G}.$$

Потенциальное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{j(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}^\pm(x_3) \partial_j C^\pm(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ u_{3(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}^\pm(x_3) C^\pm(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Из соотношений (1), (2), (7) следует, что функции $C^\pm(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$D^2 C^\pm(x_1, x_2) - (\gamma^\pm / \lambda)^2 C^\pm(x_1, x_2) = 0,$$

а для функций $n_{(m)}^\pm(x_3)$, $q_{(m)}^\pm(x_3)$ получаем задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2 (1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0, \\ q_{(m)}'' + (\Omega_m^2 + \gamma^2) / (1 + \nu_{0(m)}) q_{(m)} + \lambda^{-1} \gamma^2 \nu_{0(m)} / (1 + \nu_{0(m)}) n_{(m)}' &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n_{(1)}(1) = 0, \quad q_{(1)}(1) = 0, \quad n_{(1)}(\lambda_2) = n_{(2)}(\lambda_2), \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\ G [q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2)] = q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2), \\ G [\lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2)] = \\ = \lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Общее решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_2^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_3^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + H_4^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \\ q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_2^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_3^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + Q_4^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \\ n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma_{1(2)}^+ x_3 + H_6^+ \cos \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\ q_2^+(x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma_{1(2)}^+ x_3 + Q_6^+ \sin \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\ n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma_{1(2)}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{2(2)}^- x_3, \\ q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma_{1(2)}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{2(2)}^- x_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $(\gamma_{1(m)}^\pm)^2 = \Omega_m^2 / (1 + \nu_{0(m)}) + (\gamma^\pm)^2$, $(\gamma_{2(m)}^\pm)^2 = \Omega_m^2 + (\gamma^\pm)^2$.

Произвольные постоянные Q_i^\pm , ($i = \overline{1, 6}$) выражаются через H_i^\pm :

$$Q_i^\pm = A_i^\pm H_i^\pm, \quad A_1^\pm = -\gamma_{1(1)}^\pm / \lambda, \quad \dots, \quad A_6^\pm = \mp (\gamma^\pm)^2 / (\gamma_{2(2)}^\pm \lambda).$$

Подставляя выражения (10) в граничные условия (9) получим однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно H_i^\pm . Из условия равенства нулю определителей этих систем имеем дисперсионные уравнения

$$F^\pm(\gamma, \Omega) = \det \{a_{ij}^\pm\} = 0. \quad (11)$$

Здесь $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ при $i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 4}$ или $i = \overline{1, 2}, j = \overline{5, 6}$,

$$a_{11}^\pm = \cos \gamma_{1(1)}^\pm, \dots, a_{66}^+ = 2(\gamma^+)^2 \cos \gamma_{2(2)}^+ \lambda_2, \quad a_{66}^- = 2(\gamma^-)^2 \sin \gamma_{2(2)}^- \lambda_2,$$

В результате потенциальное решение примет вид

$$\begin{aligned} u_{j(m)\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}^\pm(x_3) \partial_j C_p^\pm(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ u_{3(m)\Pi}^\pm &= \sum_{p=1}^{\infty} q_{(m)p}^\pm(x_3) C_p^\pm. \end{aligned} \quad (12)$$

Результаты численных исследований. Расчеты выполнены в долях приведенной частоты Ω равной

$$\Omega = h\omega \sqrt{\rho_{cp} / \tilde{G}_{cp}},$$

где $\rho_{cp} = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2$, $\tilde{G}_{cp} = \lambda_1 \tilde{G}_1 + \lambda_2 \tilde{G}_2$.

Тогда $\Omega_1^2 = \Omega^2 \frac{\rho_1}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2} (\lambda_1 + \lambda_2 / G)$, $\Omega_2^2 = \Omega^2 \frac{\rho_2}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2} (\lambda_1 G + \lambda_2)$.

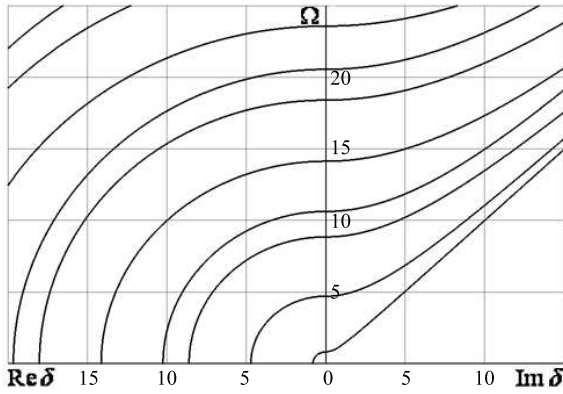


Рис. 2.

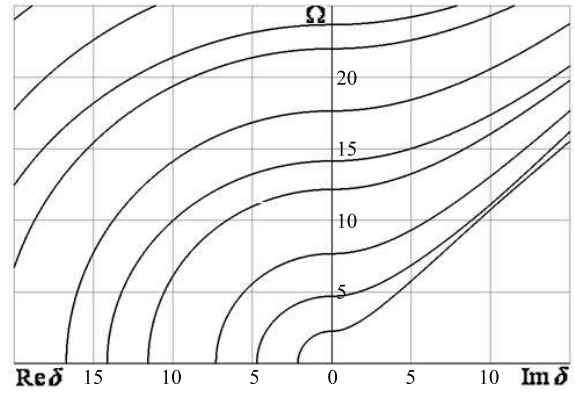


Рис. 3.

На рис. 2–3 приведены соответствующие уравнению (5) для задачи ”+” дисперсионные кривые – зависимости Ω от параметра δ , а на рис. 4–5 – соответствующие уравнению (11) для задачи ”+” спектральные кривые – зависимости Ω от параметра γ . Сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – комплексным корням. Рис. 2, 4 соответствуют пластине, внешний слой которой изготовлен из алюминия, а внутренний – из вольфрама, рис. 3, 5 – пластине из вольфрама (внешний слой) и алюминия. Физико-механические характеристики материалов слоев пластины:

Алюминий $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G} = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0,35$;

Вольфрам $\rho = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G} = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0,29$.

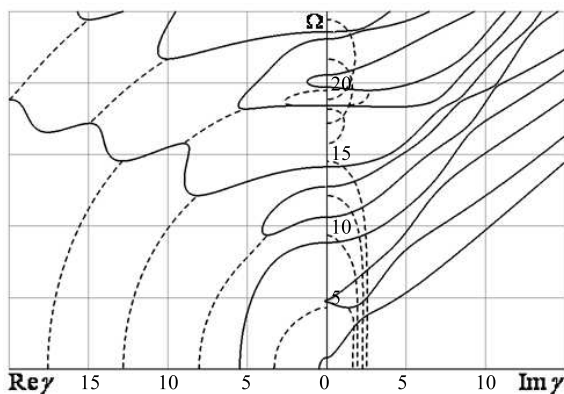


Рис. 4.

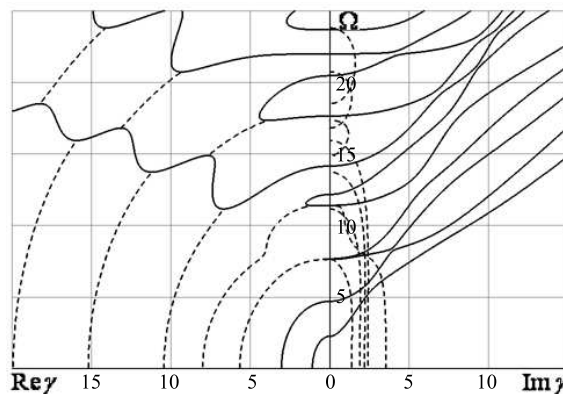


Рис. 5.

Геометрические размеры пластины: $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$

Анализ дисперсионных кривых показывает, что по сравнению с однородной пластиной [3] происходят количественные и качественные изменения в характере распространения волн. Например, в трехслойной пластине в области низких частот появляется более одной действительной моды, изменяются значения и количество критических частот, имеет место более сильное сближение мод.

Изменение физико-механических свойств слоев (рис. 4, 5) приводит к перестройке спектра объемных волн. В частности, появляются кратные мнимые собственные значения (рис. 4), которые отсутствуют на рис. 5.

Список литературы

- [1] Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 963-970.
- [2] Алтухов Е.В., Кулиш И.Е. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // Вестник Донецк. ун-та. Сер. А. 2001. № 1. С. 314-321.
- [3] Алтухов Е.В., Мысовский Ю.В., Панченко Ю.В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин // Теоретическая и прикладная механика. 1996. Вып. 26. С. 13-19.

Altukhov E.V, Fomenko M.V. *The steady oscillations of a three-layer isotropic plate.* The three-dimensional problems of the steady oscillations of a three-layer isotropic plate with rigidly pinched plane sides are considered in this paper. The homogeneous solutions of system of the equations of traffic in movings are got by a I.I. Vorovich's half-return method. The dispersive equations originating at construction of potential and whirlwind conditions are researched.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКИХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

Беркович В.Н.

*Филиал Московского государственного университета технологий
и управления в г. Ростове-на-Дону*

Исследуются условия возникновения поверхностных волн на свободной границе однородной и каналových волн на линии раздела кусочно-однородной клиновидных сред в условиях плоских установившихся колебаний. Указанные эффекты ранее были известны лишь из результатов геофизических наблюдений [1, 2]. Частичное исследование вопросов для сплошной (h) или составной (Ch) клиновидной среды дано в работах [3, 4] и др. В предлагаемой работе установлено существование критических углов раствора, соответствующих искомым режимам колебаний, и получены уравнения для определения фазовых скоростей поверхностных и каналových волн в составной клиновидной среде.

1. В настоящей работе исследование вопросов локализации волнового процесса сведено к изучению вопроса о существовании обобщенных однородных решений общих уравнений динамической теории упругости в клиновидной среде:

$$\mu\Delta^*\mathbf{u} - \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \bar{o}, \quad \Delta^*\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) \quad (1)$$

Для этого на основе общих представлений решения (1) в форме [5]:

$$\begin{aligned} 2\mu\mathbf{u} &= -\nabla F + 4(1-\nu)\Psi, \quad F(r, \theta, t) = \Psi_0(r, \theta, t) + r\Psi_r(r, \theta, t) \\ \Psi &= \{\Psi_r(r, \theta, t), \Psi_\theta(r, \theta, t)\}, \quad \nabla^2\Psi_0 - \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{s^2}\right)r\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2} \\ \begin{cases} \Psi_r = \Psi_1(r, \theta, t)\cos\theta + \Psi_2(r, \theta, t)\sin\theta \\ \Psi_\theta = -\Psi_1(r, \theta, t)\sin\theta + \Psi_2(r, \theta, t)\cos\theta \end{cases}, \quad \nabla^2\Psi_{1,2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Psi_{1,2}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

отыскиваются функционально-инвариантные решения Смирнова–Соболева:

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi_1(r, \varphi, t) &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}} \operatorname{Im} f \left(t - \frac{r \cos \theta}{c} - i \frac{r \sin \theta}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}} \right), \quad 0 < \varphi < \pi \\ \Psi_2(r, \varphi, t) &= \operatorname{Re} f \left(t - \frac{r \cos \theta}{c} - i \frac{r \sin \theta}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}} \right) \\ \Psi_0(r, \varphi, t) &= \operatorname{Re} f_0 \left(t - \frac{r \cos \theta}{c} - i \frac{r \sin \theta}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{p^2}} \right) - \\ &\quad - r[\Psi_1(r, \theta, t)\cos\theta + \Psi_2(r, \theta, t)\sin\theta] \end{aligned} \right. \quad (3)$$

В соотношениях (3) s, p — скорости поперечных и продольных волн соответственно, параметр c — имеет размерность фазовой скорости, ρ, μ, ν — плотность, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно, $f(z), f_0(z)$ — произвольные аналитические функции.

В случае установившихся колебаний с круговой частотой ω из рассмотрения однородных краевых задач (h), (Ch) для уравнений (1) в клиновидной среде со свободными границами использование представлений (3) приводит к следующим уравнениям для определения фазовых скоростей c_* поверхностных и c_{**} каналовых волн:

$$R_h(x) = [(1 + \gamma^2)x - 1](x - 0.5) - 2x\sqrt{x - \gamma^2}\sqrt{x - 1} = 0,$$

$$\gamma^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad x = s^2/c_*^2, \quad 1 < x < 2$$

$$Q_{Ch}(k) = \begin{vmatrix} P_1(k) & 1 & -\delta P_2(k) & -\delta \\ k^2 & S_1(k) & -\delta k^2 & -S_2(k) \\ 2k^2 P_1(k) & \gamma_1^2 k^2 + S_1^2(k) & -2k^2 P_2(k) & -\gamma_2^2 k^2 - S_2^2(k) \\ k^2 + 0.5K_1^2 & -S_1(k) & -k^2 - 0.5K_1^2 & S_2(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$P_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}, \quad S_{1,2} = \sqrt{k^2 - K_n^2}, \quad \gamma_n^2 = \frac{1 - 2\nu_n}{2(1 - \nu_n)}, \quad \delta = \mu_1/\mu_2, \quad n = 1, 2$$

$$k = \omega/c_{**}, \quad k_{1,2} = \omega/p_{1,2}, \quad K_{1,2} = \omega/s_{1,2}, \quad Q_{Ch}(k) = \omega^6 Q_{Ch}(s_1/c_{**}) = 0$$

2. Для изучения проблемы существования критических углов раствора клина, соответствующих появлению искомым режимов колебаний, введём следующее функциональное пространство:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{2,T}\{H^1(\Omega)\}}^2 = \int_T \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \quad T = (t_1, t_2) \quad (5)$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева. Установлены следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u}(r, \varphi, t)$ есть обобщенные решения плоских нестационарных краевых задач (h), (Ch) для уравнений динамической теории упругости в области Ω с однородными граничными условиями и согласованными с ними начальными условиями $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$, $\left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t=0} = \bar{0}$, а функция $\mathbf{u}(r, \varphi, t) = \mathbf{w}(r, \varphi) \exp(-i\omega t)$ — решение соответствующей краевых задач установившихся колебаний в той же области с условиями излучения Зоммерфельда, тогда

$$\|\mathbf{u}(r, \varphi, t) \exp(i\omega t) - \mathbf{w}(r, \varphi)\|_{H^1(\Omega)} < C \exp(-\varepsilon\omega t), \quad t \rightarrow \infty \quad (6)$$

Для доказательства теоремы применяются методы теории вариационных неравенств.

Теорема 2. Пусть дифференциальные операторы $A = \mu\Delta^*$, $B = \rho \frac{d^2}{dt^2}$ определены $\forall T$ в пространстве $L_{2,T}\{H^1(\Omega_\beta)\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\beta$, порождающим в этом пространстве норму (5), где Ω_β — сплошная упругая клиновидная

среда с углом раствора $\beta \in (0, \pi)$. Тогда для обобщенной краевой задачи:

$$\begin{cases} (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_\beta - \lambda(\beta)(B\mathbf{u}, \mathbf{v})_\beta = 0, & \forall \mathbf{v} \in C^\infty \\ ([\mathbf{u}]_L, \mathbf{v})_\beta = ([\boldsymbol{\sigma}]_L, \mathbf{v})_\beta = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})|_{\partial\Omega_\beta}, \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

всегда найдется $\beta^* \in (0, \pi)$, такое, что $\lambda(\beta^*) = 1$, для которого существует обобщенное однородное решение задачи (7).

Доказательство основано на результате Куранта-Фишера [6] о существовании возрастающего положительного спектра обобщенной краевой задачи (8) для конечной области Ω . Предварительно устанавливается существование хотя бы одной точки $0 < \lambda \leq 1$ в случае конечного кругового сектора $\Omega_{R,\beta}$ с углом раствора β . Из регулярности билинейных форм (7) по параметрам R, β следует регулярность точек спектра $\{\lambda\}$ по этим параметрам, и, в частности, существование значений $\beta_{1,2}$ таких, что $\lambda(\beta_1, R) < 1 < \lambda(\beta_2, R)$. Затем применяется теорема о промежуточном значении непрерывной функции $\forall R > 0$ и устанавливается существование предельного перехода к бесконечной клиновидной среде Ω_β при $R \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Системы функций $\left\{ \exp \left[-iwn \left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} \right) - n \frac{r\omega}{c} M \sin \varphi \right] \right\}$,
 $\left\{ \exp \left[-iwn \left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} \right) - n \frac{r\omega}{c} m \sin \varphi \right] \right\}$, $M = \sqrt{1 - \frac{c^2}{p^2}}$, $m = \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}}$
 ($n = 1, 2, \dots$) полны в пространстве $L_{2,T}\{H^1(\Omega)\}$, $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, 0 < \varphi \leq \beta\}$, $\forall T = [t_1, t_2]$.

Доказательство использует свойство полноты системы $\{z^k\}$ в единичном круге $K = \{z : |z| \leq 1\}$.

Теоремы 1, 2, 3, установленные для сплошной клиновидной среды (h), допускают обобщения для случая кусочно-однородной среды (Ch) и доказываются аналогичным образом.

Указанные выше теоремы позволяют реализовать подход, основанный на переходе от классической постановки соответствующей краевой задачи к обобщенной с применением вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Функционал Гамильтона–Остроградского выбирается в виде:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}) &= \int_{t_1}^{t_2} a(\mathbf{u}) dt - \int_{t_1}^{t_2} b(\mathbf{u}) dt, & (B(\mathbf{u}), \mathbf{u}) &= 1 \\ a(\mathbf{u}) &= \iint_{\Omega} W(\mathbf{u}) d\Omega, & b(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \rho \iint_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)^2 d\Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}(r, \varphi, t), & \forall t_2 > t_1 > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

где $W(\mathbf{u})$ — упругий потенциал клиновидной среды. При этом решение задачи об установившихся колебаниях рассматривается как предел решения соответствующей нестационарной задачи, согласно принципу предельной амплитуды [6], математическая корректность которого следует из теоремы 1, а сам предел понимается в смысле (6). Описанный подход позволяет изучить вопрос о существовании

обобщенных собственных колебаний, характеризующихся наличием поверхностных волн типа Релея на свободной границе однородной клиновидной среды (h) и каналовых волн типа Стоунли на границе раздела сред (Ch) в кусочно-однородном клине. Поскольку существование критических углов раствора вытекает из результатов теоремы 2, то, согласно теореме 3, решение, приближенно представляющее точку стационарности функционала (9), можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \sum_{n=1}^N B_n^{(N)} \mathbf{u}_n(z, \zeta) \\ z &= \exp \left[-iw \left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} \right) - \frac{r}{c} M \sin \varphi \right], \\ \zeta &= \exp \left[-iw \left(t - \frac{r \cos \varphi}{c} \right) - \frac{r}{c} m \sin \varphi \right], \\ M &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{p^2}}, \quad m = \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

При этом вектор-функция (9) уже удовлетворяет однородным уравнениям динамической теории упругости, и для отыскания искомой точки стационарности функционала (8) применяется метод Трефтца [7], приводящий к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных $B_n^{(N)}$:

$$\sum_{n=1}^N B_n^{(N)} \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{u}_m \, dl \, dt - \iint_{\Omega} \mathbf{u}_n \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2} d\Omega \right] = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

Из условий разрешимости однородной системы (10) вытекают уравнения для отыскания критических значений углов раствора клиновидной среды, допускающих искомые режимы установившихся колебаний при $t_{1,2} \gg 1$ с их локализацией в окрестности свободной поверхности и в окрестности линии раздела сред кусочно-однородной клиновидной среды.

3. Использование формул Бетти [8] позволяет на основе описанного выше подхода рассматривать смешанные задачи о возбуждении колебаний внешними источниками на границе однородной, а также кусочно-однородной клиновидных сред и получать интегральные представления полей смещений в зонах локализации волнового процесса с выделением в этих представлениях в явной форме продольных, поперечных, поверхностных и каналовых волн.

Список литературы

- [1] Сейсморазведка: справочник геофизика. В 2-х книгах. / Под ред. Номоконова В.П. М.: Недра. 1990. 336 с.
- [2] Шерифф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка. М. Мир. 1987. (Пер. с англ. Ефимовой Е.А. ред. проф. Калинина А.В. Электронная версия Антипова А.А.)

- [3] *Budaev B. V., Vogy D. B.* // Reyleigh wave scattering by a wedge. Part II. //Wave Motion. 1996. V. 24. No. 3. P. 307–314.
- [4] *Budaev B. V., Vogy D. B.* // Reyleigh wave scattering by two adhering wedges. //Proc. R. Soc. Lond. 1998. A 454. No. 1979. P. 2949–2996.
- [5] *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* // О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости. Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 71–74.
- [6] *Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др.* Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука. 1964. 368 с.
- [7] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
- [8] *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз. 1962. 472 с.

Berkovich V.N. *The effect of formation of the wave field in a sphenoid medium under plane steady vibrations.*

The paper is devoted to the investigation of wave field in an elastic wedge excited by plane steady harmonic vibrations. The problem is to study the existence of face waves in a wedge and interface ones in a biwedge. Equations to estimate its phase velocity and critical span of angle of sphenoid composants are obtained by virtue of special representation of common solution of dynamic elasticity and generalized statement of the corresponding boundary value problem.

ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНОМ УПРУГОМ СЛОЕ, НА ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ДЕЙСТВУЮТ РАЗЛИЧНЫЕ НАГРУЗКИ.

Болгова А.И.

*Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)*

Рассматривается трёхмерный упругий слой, на дневной поверхности которого расположена бесконечная пластина, лежащая без отрыва и трения. Изучается распространение волн и энергетических потоков в слое в зависимости от осцилирующей на поверхности пластины нагрузки.

В ряде работ, выполненных автором или в соавторстве, изучалось распространение волн и энергетических потоков в трехмерном упругом слое толщины H , на дневной поверхности слоя расположена бесконечная пластина толщины h , лежащая без отрыва и трения. На поверхности пластины осциллирует с частотой Ω нагрузка, заданная в конечной области. Впервые аналогичная задача для трехмерного изотропного слоя без пластины была изучена в работе [1] для сосредоточенной силы. Решение получено с помощью двойного преобразования Фурье по координатам x и y в соответствии с принципом предельного поглощения (ППП). Интегралы вычислены методом контурного интегрирования (МКИ). В работе [2] начато исследование задачи для нагрузки, равномерно распределенной в прямоугольнике $|x| < a$, $|y| < b$. Получена асимптотика решения и поток энергии в слое в области $|x| > a$, $|y| > b$, $0 \leq z \leq H$. Проведены численные исследования, показавшие, что более существенное влияние на распространение потока энергии в слое, укрепленном пластиной, оказывает увеличение плотности пластины по сравнению со слоем, чем изменение отношения их жесткостей. Доказано, что на распространение потока энергии и волн оказывает влияние область, в которой действует нагрузка. В [3] показано, что с увеличением толщины пластины увеличивается величина потока энергии в слое. Найдено асимптотическое решение в области

$$\Pi = \{x > a, |y| \leq b, 0 \leq z \leq H\}$$

и показано, что перемещения U_2 здесь убывают на бесконечности, как $1/x$, и поток энергии на бесконечность не распространяется. Работа [4] посвящена построению решения в области действия нагрузки, то есть при

$$|x| \leq a, |y| \leq b,$$

и определению закачиваемой в слой энергии. В работе [5] осуществлен асимптотический анализ поведения решения на бесконечности. Проведено численное сравнение закачиваемого потока энергии и потока энергии, уходящего на бесконечность,

которое показало их совпадение в пределах точности вычисления интегралов. В работе [6], используя МКИ, впервые изучается волновое движение в слое при действии неравномерной нагрузки, распределенной по линии. Рассмотрена нагрузка, заданная на отрезке

$$y \in [-b, b]$$

четной функцией:

$$f(x, y) = p\delta(x) \cos my.$$

Методика получения решения приводит к исследованию интегралов, подынтегральная функция которых не является аналитической и может содержать особенности, которые не смещаются с вещественной оси при использовании ППП. Следствием этого является необходимость специального выбора контура. В работе впервые дается теоретическое обоснование выбора контура, и при этом доказано, что окончательный вид решения может содержать интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши. Получены главные члены асимптотических выражений для перемещений при $|x| > 0$, $|y| > b$. Выведена расчетная формула для определения потока энергии в слое в секторе $x > 0$, $y > b$. Численный анализ показал существенное влияние параметра m на распространение потока энергии в слое, а также, что для фиксированной длины линии b с уменьшением толщины H величина потока энергии в слое существенно увеличивается. Асимптотическая оценка перемещений при больших значениях x в канале

$$x > 0, \quad |y| \leq b$$

показала, что компоненты перемещений убывают по-разному, причем получено совпадение асимптотики решения при $m > \ell_0$ и $m < \ell_0$ (ℓ_0 – корень дисперсионного уравнения задачи), а поток энергии в каналах не распространяется. В случае $m = n\pi/b$, $n = 0, 1, 2, \dots$ главный член асимптотики решения внутри канала

$$x > 0, \quad |y| \leq b, \quad 0 < z < H$$

определяется нулевым коэффициентом разложения нагрузки в ряд Фурье, а остальные коэффициенты при $n = 1, 2, \dots$ дают вклад в решение порядка $O(1/x)$. В работе [7] проведено численное сравнение перемещения в канале

$$\Pi_1 = \{x > 0, \quad |y| \leq b\}$$

с его асимптотической формулой в случае $m > \ell_0$ и $m < \ell_0$. Вычисляя погрешность для различных значений $y < b$ и x , получаем, что она не превышает одного процента, например уже при $x = 80H$, т.е. выявлено, что асимптотические формулы с достаточной степенью точности приближают перемещения. Построены графики потока энергии от первой ($m = \pi/b$) гармоники и от второй ($m = 2\pi/b$). В [8] предполагается, что нагрузка, действующая на пластину, задана в прямоугольнике $|x| < a$, $|y| < b$ четной функцией по y и постоянной вдоль оси x . В этом случае

$$F(\alpha, \gamma) = p \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \left(\frac{\sin(m - \gamma)b}{m - \gamma} + \frac{\sin(m + \gamma)b}{m + \gamma} \right)$$

- преобразование Фурье от нагрузки. В трехмерном слое получены асимптотические формулы поведения решения на бесконечности, позволившие вычислить поток энергии, переносимый от источника возмущений на бесконечность в области $x > a$, $y > b$; в каналах П и

$$\Pi_2 = \{|x| \leq a, y > b, 0 \leq z \leq \}$$

при $m > \ell_0$ МКИ, в случае $m < \ell_0$ в канале П, и определено, что в канале П асимптотика перемещений на бесконечности определяется нулевым коэффициентом разложения нагрузки в ряд Фурье, а остальные коэффициенты дают вклад в решение порядка $O(1/x)$, а поток энергии не распространяется. Кроме того, получены формулы для вычисления потока энергии от произвольной нагрузки, приложенной в произвольной области. Построены графики потока энергии первой и второй гармоник. Приведен график потока энергии для области, образованной пересечением двух окружностей: $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. В работах [1]–[8] проведены исследования, когда пластина описана простейшим уравнением без учета сдвига и момента инерции. Поэтому в [9] изучаются три известные модели для поперечных колебаний пластины: с учетом сдвига (пластина ПС), с учетом момента инерции (пластина ПИ) и с учетом этих двух факторов (пластина ПСИ). Численные исследования показали, что дисперсионные кривые для слоя, укрепленного пластиной, тем сильнее отличаются от дисперсионных кривых для одного изотропного слоя, чем более плотным является материал пластины по сравнению с материалом слоя, и чем больше толщина пластины. При исследовании трех различных моделей пластин выявлено, что все модели пластин дают одинаковый результат до $\Omega = \Omega_0$ для первой дисперсионной кривой, свыше Ω_0 дисперсионные кривые расходятся. Решение построено на примере нагрузки, распределенной равномерно по прямоугольнику $|x| < a$, $|y| < b$. Получена асимптотика решений и формулы для потока энергии в области $x > a$, $y > b$. С уменьшением безразмерной толщины пластины ξ графики потоков энергии для различных пластин по направлениям приближаются к потоку энергии для одного изотропного слоя, однако даже при $\xi = 0,01$ совпадения потоков по величине не происходит. Получено, что даже незначительное изменение Ω вызывает существенное изменение в распространении потоков энергии, поскольку с ростом Ω дисперсионные кривые для различных моделей пластин все более отклоняются друг от друга, соответственно отличаются значения ℓ_0 . Проведенное исследование показало, что наличие пластины на поверхности трехмерного упругого слоя влияет на распространение потока энергии в слое. Причем влияние рассмотренных моделей при различных параметрах задачи на поток энергии различно: учет только сдвига или инерции вращения приводит к существенным отличиям от потока для упругого слоя без пластины, причем не только по величине, но и по направлениям. В то же время потоки энергии в слое с пластиной ПСИ отличаются от потоков энергии в изотропном слое по величине, но по направлениям всегда совпадают. Получено решение в канале П, причем асимптотика перемещений U_1 и U_3 убывает на бесконечности как $1/\sqrt{x}$, а асимптотика перемещения U_2 убывает как $1/x$. Поток энергии в канале П на бесконечность не распространяется. Графики мнимых частей перемещений U_1 и U_3 показали, что перемещения для слоя с различными моделями пластин

в несколько раз отличаются друг от друга, причем наиболее близкими слою, не подкрепленному пластиной, являются перемещения для слоя с пластиной ПСИ. Получены формулы для потока энергии на бесконечности от произвольной нагрузки, распределенной в области D . Были построены графики потоков энергии для равномерной нагрузки $f(x, y) = p = P/S_D$, $P = 1$ (S_D – площадь области D), заданной в следующих областях: кардиоида ($\rho = 1 + \cos \varphi$), лемниската ($\rho = \sqrt{\sin 2\theta}$) и окружности ($\rho = \cos \varphi$, $\rho = 0,5$, $\rho = 1$). Потоки энергии для слоя с пластинами ПИ и ПС примерно равны между собой. Наименьшим является поток для одного изотропного слоя. Суммарный поток энергии для слоя и пластины ПСИ близок к потоку энергии для изотропного слоя. Таким образом, сравнение результатов, полученных для слоя и слоя с различными моделями пластин, показало, что наиболее близкой к одному слою является модель для слоя с пластиной ПСИ, поскольку по величине потоки энергии отличаются, но по направлениям всегда совпадают. Учитывая последнее, при расчетах, как мне кажется, нужно использовать модель слоя с пластиной ПСИ. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Александру Владимировичу Белоконю за помощь и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Белоконь А.В., Наседкин А.В. Модельная задача на распространение волн от движущихся пульсирующих нагрузок в упругом слое / Ростов н/Д, рукопись представлена РГУ. Деп. в ВИНТИ 29 апреля 1986. № 3359 – В56. 31 с.
- [2] Болгова А.И. Распространение волн и потока энергии в трехмерном изотропном слое, укрепленном пластиной: Численно-аналитические методы: сб. науч. тр. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – [Майкоп]: ООО “Качество”, 2004. - С. 3-9
- [3] Белоконь А.В., Болгова А.И. Особенности распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой: Изв. вузов. Сев.—Кавк. регион. Естеств. науки. – 2005. – N2. – С.31-35
- [4] Болгова А.И. Баланс энергии в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой: Численно-аналитические методы: Сб. науч. тр. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2005. - С. 3-10
- [5] Болгова А.И. Исследование потоков энергии в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой: Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., г. Новочеркасск, 27 янв. 2006г.: в 3 ч./Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2006. – Ч. 1. – 56 с.
- [6] Белоконь А.В., Белоконь О.А., Болгова А.И. Влияние неравномерной нагрузки на характер распространения волн в изотропном трехмерном слое с тонкой накладкой: Изв. вузов. Сев.—Кавк. регион. Естеств. науки. – 2006. – N4. – С.3-8
- [7] Белоконь О.А., Болгова А.И. Исследование волновых и энергетических характеристик в слое от действия неравномерной нагрузки: Численно-аналитические методы: Сб. науч. тр. / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т, – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2007. - С. 65-71

- [8] Белоконов А.В., Белоконов О.А., Болгова А.И. Волны в трехмерном слое, подкрепленном тонкой пластиной. Вестник Самарского гос. ун-та – Естественнонаучная серия. – 2007. - №6 (56) - С. 30-45
- [9] Болгова А.И. Влияние моделей пластины на распространение упругих волн в трехмерном слое // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. N2. С.13-23.

Bolgova A.I. *The waves in three-dimensional elastic layer with different loads on the daily surface..* The elastic three-dimensional layer with infinite plate on the daily surface, which lies without alienation and friction is examined. The wave and energy stream propagation is studied in dependence on oscillating on the plate surface load setting in ultimate region.

ВЛИЯНИЕ КРЕМНЕЗЕМИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ТЕХНОГЕННОГО СЫРЬЯ НА СВОЙСТВА ЯЧЕИСТОГО БЕТОНА

**Буравчук Н.И., Гурьянова О.В.,
Огороков Е.П., Павлова Л.Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.,
г. Ростов-на-Дону*

Исследовано влияние зол и горелых шахтных пород на физико-механические свойства ячеистых бетонов. Доказана эффективность использования таких добавок в технологии ячеистого бетона.

Ячеистые бетоны являются одним из наиболее эффективных материалов полносборного и монолитного возведения стен жилых и общественных зданий. При их использовании упрощается технология строительного производства, сокращаются материальные затраты. Применение ячеистых бетонов с конструктивной точки зрения не вызывает сомнений. Одной из задач в совершенствовании технологии ячеистого бетона является получение изделий достаточной прочности при заданной плотности и теплопроводности; расширение сырьевой базы для производства ячеистых бетонов. Это можно достичь за счет широкого использования отходов топливной и энергетической промышленности (зол, шлаков, шахтных пород), жидких и твердых отходов химической промышленности и других отраслей народного хозяйства.

При испытании различных кремнеземистых компонентов было установлено, что наилучшими показателями свойств обладают ячеистые бетоны на заполнителях из горелых пород и золошлаковых отходов. Несмотря на имеющиеся различия в составе и свойствах зол и горелых пород, в них есть много общего: они являются продуктом обжига углевмещающих пород и содержат минеральную и органическую часть. Минеральная часть представлена в основном видоизмененным в процессе обжига глинистым веществом, органическая часть – коксовыми и полукоксowymi модификациями угля.

Золошлаковые отходы и горелые породы способны проявлять физико-химическую и скрытую гидравлическую активность. Активность горелых шахтных пород и золошлаковых отходов обусловлена наличием в них нескольких активных компонентов. Наличие этих компонентов связано с нарушением кристаллической решетки глинистых минералов при обжиге пород и возникновением у продуктов обжига некоторого энергетического потенциала. Это новое состояние вещества и служит причиной способности горелых пород к гидратации и поглощению извести из раствора. Горелые породы и золошлаковые отходы проявляют различную способность в связывании гидроксида кальция при взаимодействии с цементом. Горелые породы – это продукт длительного обжига углевмещающих пород, который происходит в отвале при температурах, близких к 1000°С. Золошлаковые отходы – это

продукт сжигания угля в топках котлов при температурах выше 1000°С, вплоть до 1700°С.

Зола включает в себя продукты обжига глинистых минералов, которые занимают промежуточное положение между кристаллической и стекловидной фазами. В золе присутствуют основные группы веществ: кристаллические, стекловидные, аморфные и органические. Это глинистое вещество типа метакаолинита, аморфные кремнезем и глинозем, спекшееся и частично остеклованное вещество и стеклофаза алюмосиликатного состава. Наиболее активная составляющая зол и шлаков – остеклованное вещество и стеклофаза. Активность зол связана главным образом с наличием стеклофазы.

В отличие от зол горелые породы содержат в значительном количестве глинистые, железистые и кремнеземистые гидравлические компоненты. Горелые породы проявляют свойства активного глиниста, а золы – среднеактивной силикатно-железистой добавки. Поверхность частиц горелой породы менее закристаллизована и оплавлена. На локальных участках поверхности имеются активные центры, которые вносят определенный вклад в связывание гидроксида кальция. Такие частицы активно взаимодействуют с гидроксидом кальция, выделяющимся при гидролизе цемента, с образованием значительного количества цементирующих веществ. Экспериментально было отмечено более интенсивное участие горелой породы, чем золы, в процессе гидратации [1].

Золы и золошлаковые смеси в зависимости от химического и минералогического состава используются либо в качестве вяжущего, заменяющего частично или полностью цемент, либо в качестве кремнеземистого композита взамен кварцевого песка. Неограниченность запасов золошлаковых отходов и распространенность во всех регионах обеспечивают возможность практически повсеместного производства изделий из газозоло- и пенозолобетона.

Применение горелых пород в технологии ячеистых бетонов менее распространено. Однако за счет горелых шахтных пород можно существенно расширить сырьевую базу для дальнейшего развития производства изделий из ячеистого бетона. Эти отходы имеют некоторые особенности. В отличие от кварцевого песка они более реакционноспособны, в своем составе кроме кремнезема содержат оксиды других элементов и видоизмененные остатки несгоревшего топлива. Горелые породы можно классифицировать как активные природные сорбенты, по абсолютной величине адсорбции превосходящие песок, керамзит, аглопорит. Вследствие пористости частиц они имеют меньшую насыпную массу, чем песок. Наличие пористости частиц породы способствует повышенной влагоемкости и замедленной водоотдаче бетона, его пониженной трещиностойкости. Приведенные свойства горелых пород позволяют использовать их при безавтоклавном способе более эффективно, чем песок.

Эффективность применения заполнителей из золошлаковых отходов и горелых шахтных пород в наибольшей степени проявляется в условиях тепло-влажностной обработки. В этих условиях полностью используются потенциальные возможности активных оксидов, находящихся в метастабильном состоянии. Прочность термообработанных бетонных образцов может в 1,5–1,7 раза превышать прочность образцов, набирающих прочность в условиях естественного твердения.

Одним из препятствий к крупномасштабному применению отходов добычи и сжигания углей в производстве ячеистых бетонов являются ограничения по содержанию частиц несгоревшего топлива, снижающих, по мнению некоторых исследователей, долговечность строительных материалов и изделий. Между тем рядом работ показано, что углеродная часть в золошлаковых отходах и горелых породах представлена не исходным углем, а коксом его модификациями, не оказывающими отрицательного воздействия на свойства бетонов. Такие коксовые и полукоксовые частицы имеют высокоразвитую микропористость и неоднородный рельеф поверхности.

При испытании ячеистых бетонов, содержащих золу или горелую породу, на морозостойкость наблюдается повышение прочности при увеличении числа циклов испытаний даже в случае высокого содержания частиц несгоревшего топлива. Это объясняется не только тем, что вода, заполняющая микропоры материала не переходит в лед, но и продолжающимся в течение длительного времени после пропаривания бетона процессом взаимодействия продуктов гидратации вяжущего с активными компонентами золы и горелой породы.

Исследованиями Федынина Н.И. [2] показано, что в ячеистобетонной смеси в присутствии частиц несгоревшего топлива происходит ускорение и углубление реакции между алюминиевой пудрой и гидроксидом кальция, интенсифицируются другие физико-химические процессы: сокращается время вспучивания, увеличивается конечное приращение объема смеси, ускоряется нарастание пластической прочности. Все эти факторы положительно сказываются на технологии ячеистых бетонов. Выполненными автором исследованиями подтверждена возможность увеличения предельно допустимого содержания частиц несгоревшего топлива в каменноугольных золах в зависимости от вида бетона в 2–3 раза по сравнению с требованиями нормативной документации.

Высокая гидравлическая активность, значительное содержание кремнезема и глинозема и другие описанные выше преимущества пород перед традиционно используемыми в технологии ячеистых бетонов заполнителями определяют возможность эффективного использования изучаемых горелых пород в качестве глинисто-кремнеземистого компонента при производстве как безавтоклавных, так и автоклавных ячеистых бетонов. Дисперсность горелых пород можно регулировать в зависимости от назначения ячеистого бетона по плотности, от состава используемого пенообразователя и применяемой технологии.

Для подтверждения высказанных предположений о пригодности горелых шахтных пород для получения пенобетона были выполнены пробные экспериментальные работы. При подборе составов бетона ставилась задача получить заданную плотность и прочность на немолотых отсевах пород. В качестве пенообразователя использовался пенообразователь, выпускаемый Новочеркасским заводом синтетических продуктов. Мелкодисперсная, и устойчивая пена, обеспечивающая стабильные свойства бетона, должна иметь плотность 65–70 кг/м³.

Изготовление лабораторных образцов производилось по литевой технологии. Твердение бетонных образцов происходило при тепловлажностной обработке и в естественных условиях. Режим пропаривания при нормальном давлении: подъ-

ем температуры до 90–95°C — 3-4 ч, выдержка при температуре изотермического прогрева — 14–16 ч, снижение температуры до 40°C — 3–4 ч. Распалубку образцов, набирающих прочность в условиях естественного твердения, в зависимости от температуры окружающей среды, средней плотности бетона и его состава можно проводить через 24–36 ч. Температура окружающей среды в помещении, где изготавливается пенобетонная смесь и набирает прочность пенобетон, должна быть не ниже 20°C. Результаты испытаний приведены в таблицах 1 и 2.

Вид бетона	Марка бетона по средней плотности	ГАЗОБЕТОН				ПЕНОБЕТОН			
		$R_{сж}$, МПа	W , %	Усадка, мм/м	F , марка	$R_{сж}$, МПа	W , %	Усадка, мм/м	F , марка
Теплоизоляционный	400	0,87	45,3	1,85	—	1,25	43,7	1,47	—
	500	1,63	42,7	1,74	—	2,30	39,7	1,65	—
Конструкционно-теплоизоляционный	700	2,75	40,3	1,36	15	3,64	35,2	1,28	15
	800	3,74	39,2	1,33	15	4,08	29,9	1,30	15
	900	5,38	37,0	1,28	15	6,67	27,3	1,13	15
Конструкционный	1000	10,80	32,6	1,07	35	10,40	23,7	1,07	35
	1100	13,55	28,6	1,04	35	14,70	20,9	0,92	35

Таблица 1. Физико-механические свойства ячеистого бетона

Примечание: $R_{сж}$ — прочность бетона на сжатие; W — водопоглощение бетона; F — морозостойкость бетона.

В составах для приготовления теплоизоляционного пенобетона были использованы молотые горелые породы по величине удельной поверхности сравнимые с цементом, для конструкционно-теплоизоляционного отсева дробления фракции менее 0,25 мм, конструкционного — менее 1,0 мм. Соотношение между кремнеземистым компонентом и вяжущим взято 1:1. Интервал изменения водотвердого отношения ($В/Т$) составлял 0,28–0,62, расход цемента — 300–500 кг/м³, пенообразователя — 0,4–0,6 кг/м³.

Теплоизоляционный пенобетон имеет прочность на сжатие 1,15–1,45 МПа, теплоизоляционно-конструкционный — 2,76–3,54 МПа, конструкционный — 9,00–14,75 МПа, марка бетона по морозостойкости — не менее F15. Теплопроводность ячеистого бетона в зависимости от его плотности (D 500, D 600, D 700, D 1100) изменяется в пределах: 0,143–0,278 Вт/(м·°C).

Результаты предварительных испытаний экспериментальных составов пенобетона на горелых породах позволяют высказать предположение о возможности получения более долговечных и экономичных ячеистых бетонов, чем аналогичные бетоны на кремнеземистых заполнителях из традиционно применяемого сырья.

Вид бетона	Марка бетона по средней плотности	ГАЗОБЕТОН				ПЕНОБЕТОН			
		λ	μ	w_{co} при относит. влажн-ти воздуха		λ	μ	w_{co} при относит. влажн-ти воздуха	
				75	97			75	97
Тепло-изоляционный	400	0,087	0,197	9,9	16,6	0,089	0,191	9,3	16,0
	500	0,093	0,172	10,3	17,0	0,097	0,176	10,7	16,8
Конструкционно-теплоизоляционный	700	0,146	0,140	11,0	17,2	0,144	0,142	11,0	17,4
	800	0,173	0,117	12,4	20,8	0,178	0,115	12,6	20,3
	900	0,198	0,109	12,9	21,3	0,198	0,103	13,0	21,0
Конструкционный	1000	0,227	0,094	13,7	21,5	0,225	0,097	13,9	21,4
	1100	0,254	0,098	14,6	21,8	0,254	0,090	14,2	21,6

Таблица 2. Физико-технические свойства ячеистого бетона

Примечание: λ – коэффициент теплопроводности бетона в сухом состоянии, Вт/(м^{°С}); μ – паропроницаемость бетона, мг/(м ч Па); W_{co} – сорбционная влажность бетона, %

Список литературы

- [1] Будницкий В.М., Буравчук Н.И., Бражников В.Ф., Мелентьев С.А., Курочка П.Н. Минеральные добавки из горелых шахтных пород и зол для вяжущих и бетонов // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Техн. науки. 1998. № 4.
- [2] Федькин Н.И. Роль частиц несгоревшего топлива в формировании свойств ячеистого золобетона (ускоренные методы анализа) // Строительные материалы. 1996. № 9. 9.

Buravchuk N.I., Gurjanova O.V., Okorokov E.P., Pavlova L.N. *Effect materials from technogenic raw material on proports of a cellular concrete.* Influence of harms and burnt mine breeds on physicommechanical properties of cellular concrete is investigated. Efficiency of use of such additives in technology of cellular concrete is proved.

ПЕРЕХОДНЫЕ МАТРИЦЫ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ
БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ И
ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ ПОДВИЖНОЙ
РАСПРЕДЕЛЁННОЙ МАССЫ.

Воронцов Г.В., Кабельков А.Н.

*Южно-Российский государственный технический университет
(Новочеркасский политехнический институт)*

Рассматривается динамическое взаимодействие равномерно распределённой подвижной массы с упругой балкой, лежащей на винклеровом основании с коэффициентом «постели» k и сжимаемой продольной силой N . Предполагается, что массы перемещаются с постоянной скоростью V по отношению к балке, нагруженной распределёнными силами $Q(x, t)$ и моментами $\nu(z, t)$. Для решения задачи построены соответствующие переходные матрицы.

Интенсивность сил инерции балки и подвижной нагрузки определяются соответственно равенствами

$$q_{\mu} = -\mu \ddot{y}(z, t) \quad (1)$$

$$q_m = -m [\ddot{y}(z, t) + 2\dot{y}'(z, t)V + y''(z, t)V^2] \quad (2)$$

где: $y(z, t)$ - прогибы балки, μ , m - удельные массы соответственно балки и движущейся нагрузки; $\ddot{y}(z, t)$ - переносное ускорение, $2\dot{y}'(z, t)V$ - кориолисово ускорение и $y''(z, t)V^2$ - относительное ускорение элемента массы. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний балки с учётом (1) и (2) имеет вид

$$y^{IV} + \beta y'' + \alpha \dot{y}' + \gamma \ddot{y} + cy = f \quad (3)$$

где: y - безразмерный прогиб; β , α , γ , c - безразмерные параметры; f - безразмерная распределённая нагрузка. Если принять

$$\begin{aligned} f(\zeta, \tau) &= f(\zeta) \sin \tau, \\ y(\zeta, \tau) &= y(\zeta) \sin \tau \end{aligned} \quad (4)$$

и пренебречь кориолисовым ускорением, то из уравнения (3) получаем

$$y^{IV} + \beta y'' - \gamma y + cy = f. \quad (5)$$

В (4) ζ и τ безразмерные координата и время. Сводим уравнение (5) к системе четырёх дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{d\zeta} = \mathbf{Ax} + \mathbf{F}, \quad (6)$$

где: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma - c & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix}$. Вводя переходную матрицу $\mathbf{\Pi}(\zeta, \xi)$ однородного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

в итоге получаем решение уравнения (6)

$$\mathbf{x}(\zeta) = \mathbf{\Pi}(\zeta, \zeta_0) \mathbf{x}(\zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathbf{\Pi}(\zeta, \xi) \mathbf{F}(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Поскольку все элементы матрицы \mathbf{A} постоянны, матрицы $\mathbf{\Pi}$ зависит от разности $\zeta - \xi$. При этом

$$\mathbf{\Pi}(\zeta - \xi) = e^{\mathbf{A}(\zeta - \xi)} = \mathbf{E} + \mathbf{A}(\zeta - \xi) + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2(\zeta - \xi)^2 + \dots$$

Аналогично решается задача об изгибных колебаниях трубы, содержащей текущую жидкость.

Voroncov G.V., Kabelkov A.N. Dynamic interaction of in regular intervals distributed mobile weight with the elastic beam laying on vinkler's basis with factor is "beds" k and compressed longitudinal force N . It is supposed, that weights move with constant speed V in relation to the beam loaded by distributed forces $Q(x, t)$ and the moments $\nu(z, t)$. For the decision of a problem corresponding transitive matrixes are constructed.

ОБ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ БАЛКИ

Дударев В. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Построены уточненные уравнения изгибных колебаний стержня при неоднородном предварительном напряженном состоянии, осуществлено сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Приведены примеры расчета резонансных частот и их анализ, а также вывод связующего уравнения для решения обратной задачи.

1. Общая постановка задачи.

Одним из типов коэффициентных обратных задач являются задачи об определении структуры существенно неоднородного предварительного напряженного состояния, область приложения которых в последние годы постоянно расширяется. Отметим, что задача контроля предварительного напряженного состояния сооружений является одной из важнейших технических проблем и имеет приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля, диагностике и определении уровня предварительных напряжений в аварийных конструкциях. Исследование изменений амплитудно-частотных характеристик конструкций при наличии однородного предварительного напряженного состояния позволяет оценивать его уровень. Рассмотрим упругое тело, в котором имеется неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0 . Пусть колебания вызываются нагрузкой, приложенной на части S_σ , а часть S_u закреплена. Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют следующий вид [1], [2]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \quad (2)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i \quad (3)$$

Изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела V может быть положено в основу процедуры идентификации предварительных напряжений. Пусть на части границы S_σ измеряются компоненты поля смещений f_i в зависимости от частоты колебаний. Требуется определить компоненты предварительного напряженного состояния σ_{ij}^0 . Сформулированная задача относится к классу нелинейных обратных задач [3].

2. Формулировка уравнения движения и граничных условий для предварительно напряженного стержня.

Приведем в качестве одного из важных примеров поставленной проблемы задачу об установившихся поперечных колебаниях с частотой ω прямолинейного упругого изотропного стержня длины l под действием периодической во времени силы $Pe^{i\omega t}$ с предварительным одноосным напряженным состоянием.

Рассмотрим задачу (1)–(3) полагая, что из компонент тензора предварительных напряжений отлична от нуля лишь компонента $\sigma_{11}^0 \neq 0$. Обозначим через $u_3 = w(x_1)$ – компоненту вектора смещений вдоль оси x_3 , через $u_1 = -x_3 w'(x_1)$ – компоненту вектора смещений вдоль оси x_1 . Тогда $T_{11} = \sigma_{11} + u_{1,1} \sigma_{11}^0$, $T_{13} = \sigma_{13}$, $T_{31} = \sigma_{31} + u_{3,1} \sigma_{11}^0$, $T_{33} = \sigma_{33}$, где $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = -E x_3 w''$.

Для вывода уравнения движения и граничных условий поступим следующим образом: умножим общее уравнение движения (1) и граничное условие на нагруженной части (3) на вариации δu_i . Следуя вариационным способам и классической теории стержней, проинтегрируем полученные уравнения соответственно по области V и S_σ . С помощью этих уравнений получим уравнение движения [4] и уточненные граничные условия, соответствующие действию сосредоточенной поперечной силы на конце консольно закрепленного стержня:

$$(J(E + \sigma_{11}^0)w'')'' - (F\sigma_{11}^0 w')' - \rho F \omega^2 w = 0$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

$$(J(E + \sigma_{11}^0)w'')(l) = 0, \quad ((J(E + \sigma_{11}^0)w'')' - F\sigma_{11}^0 w')(l) = P.$$

3. Сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции: $\tau = \frac{\max \sigma_{11}^0}{E_0}$, $\kappa_1^2 = \frac{F_0 l^2}{J_0} \tau$, $\kappa_2^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4 \omega^2}{J_0 E_0}$, $P_0 = \frac{P l^2}{J_0 E_0}$, $J = J_0 f_1(\xi)$, $E = E_0 f_2(\xi)$, $F = F_0 f_3(\xi)$, $\rho = \rho_0 f_4(\xi)$, $g_1(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi)$, $g_2(\xi) = f_4(\xi) f_3(\xi)$, $\varphi(\xi) = \frac{\sigma_{11}^0}{\max \sigma_{11}^0}$, где $\xi = \frac{x}{l} \in [0; 1]$. Обращая интегральные операторы, построим решение поставленной задачи:

$$w(\xi) = \int_0^\xi (\xi - \zeta) \frac{y(\zeta)}{g_1(\zeta)(1 + \tau \varphi(\zeta)/f_2(\zeta))} d\zeta,$$

где

$$y(\zeta) = - \int_0^1 K(\zeta, s) y(s) ds + f(\zeta), \quad f(\zeta) = P_0(\zeta - 1),$$

$$K(\zeta, s) = \frac{1}{g_1(s)(1 + \tau \varphi(s)/f_2(s))} \int_{\max(\zeta, s)}^1 (\kappa_1^2 f_3(\eta) \varphi(\eta) + \kappa_2^4 (\zeta - \eta)(\eta - s) g_2(\eta)) d\eta$$

Расчет амплитудно-частотных характеристик для стержня осуществляется на основе дискретизации построенного интегрального уравнения и обращения конечномерного оператора. В частном случае постоянных характеристик стержня J , E , σ_{11}^0 , ρ , F можно получить уравнение поперечных колебаний стержня в виде:

$$J(E + \sigma_{11}^0)w^{IV} - F\sigma_{11}^0 w'' - \rho F \omega^2 w = 0$$

Осуществляя переход к безразмерной переменной $\xi = \frac{x}{l}$, получим следующую задачу:

$$(1 + \tau)w^{IV} - \kappa_1^2 w'' - \kappa_2^4 w = 0$$

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(1) = 0, (1 + \tau)w'''(1) - \kappa_1^2 w'(1) = P_0$$

Уравнение для отыскания собственных частот имеет вид:

$$(\beta^2 - \theta^2)\beta\theta \operatorname{sh} \beta \sin \theta + 2\beta^2\theta^2 + (\beta^4 + \theta^4) \operatorname{ch} \beta \cos \theta = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\kappa_1^4 + 4(1 + \tau)\kappa_2^4} + \kappa_1^2}{2(1 + \tau)}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{\sqrt{\kappa_1^4 + 4(1 + \tau)\kappa_2^4} - \kappa_1^2}{2(1 + \tau)}}$$

Ниже приведен график зависимости величин $\varepsilon_j(\tau) = \frac{\omega_j(\tau) - \omega_j(0)}{\omega_j(0)}$, где $\omega_j(\tau)$ – первые три собственных частоты определяемые из уравнения (4).

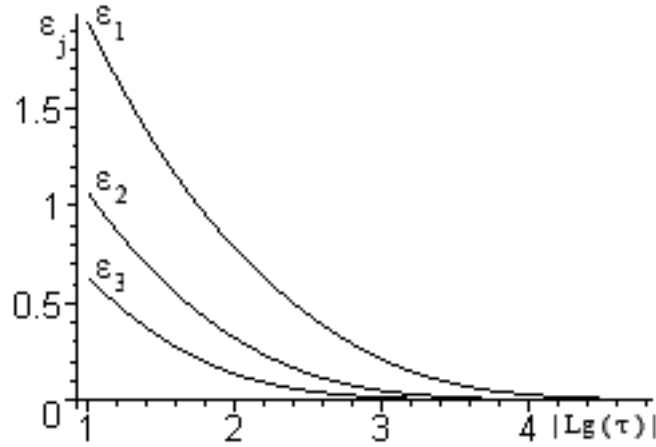


Рис. 1. График зависимости $\varepsilon_j(\tau)$

Отметим, что анализ влияния величины однородного предварительного напряжения показал, что это влияние заметно для $\tau \geq 10^{-4}$. Таким образом, процедуру реконструкции следует проводить для частот, не превосходящих первую резонансную частоту.

4. Решение обратной задачи.

Для получения аналитических соотношений, связывающих заданные и искомые функции, в обратных коэффициентных задачах, которые являются нелинейными, наиболее часто используется метод линеаризации. Пусть имеется два решения задачи (1)–(3), отвечающие различным предварительным напряженным состояниям. Основные характеристики задачи снабдим соответственно индексами 1 и 2: $u_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(01)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(02)}, \sigma_{ij}^{(2)}$. Используя обычную технику для уравнения (1), имеем [2]:

$$\int_{S_\sigma} p_i(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) ds - \int_V (\sigma_{mj}^{(01)} u_{i,m}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} - \sigma_{mj}^{(02)} u_{i,m}^{(2)} u_{i,j}^{(1)}) dV \quad (5)$$

На основе полученного соотношения (5) построим итерационный процесс и сформулируем последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром, для этого положим:

$$\sigma_{mj}^{(01)} = t_{mj}^{(n-1)}, \quad \sigma_{mj}^{(02)} = t_{mj}^{(n-1)} + t_{mj}^{(n)}, \quad u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}, \quad u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$$

Сохраняя в (5) линейные относительно возмущений слагаемые, получим

$$\int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) ds + \int_V (t_{mj}^{(n)} u_{i,m}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)}) dV \quad (6)$$

Это уравнение можно использовать для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию, которое также может быть выбрано простейшим образом, например однородным. В случае предварительного одноосного напряженного состояния отличной от нуля будет лишь одна компонента σ_{11}^0 , тогда уравнение (6) примет вид:

$$\int_0^l (t_{11}^{(n)} (J(w^{(n-1)})''^2 + F(w^{(n-1)})')^2) dx - P(f - w^{(n-1)}(l)) = 0, \quad \omega \in [\omega_1; \omega_2] \quad (7)$$

Уравнение (7) порождает операторное уравнение Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывным оператором, при обращении которого необходимо использовать регуляризирующую процедуру. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний является весьма важным. Как правило, этот отрезок необходимо выбирать в нерезонансном диапазоне [3].

Автор выражает благодарность научному руководителю Ватульяну А.О. за постановку задачи и идеи по ее решению.

Список литературы

- [1] *Гузъ А.Н.* Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений. // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 1 С. 3–17.
- [2] *Ватульян А.О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вестник Самарского госуниверситета. 2007. Вып. 54. № 4. С. 93–103.
- [3] *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [4] *Дударев В.В.* Поперечные колебания предварительно напряженного стержня. // Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика. Труды VI Школы семинара. 2008. С. 90–92.

Dudarev V.V. *On about improved model of bending vibrations of prestressed beam.* The equations of bending vibrations of rod are constructed at the heterogeneous prestressed state, reduction to Fredholm's integrated equation of second kind is realized. Examples of calculation of resonant frequencies and its analysis are given, and also the binding equation for inverse problem is given.

ГЛИССИРОВАНИЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Ефремов И. И., Колесникова Ю. Н.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Исследуются гидродинамические характеристики тонкого профиля, глсссирующего по поверхности жидкости конечной глубины. Полученная краевая задача распределения давления по профилю с помощью преобразования Фурье сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Для дискретизации которого применяется схема метода дискретных вихрей. Приводятся результаты расчета коэффициентов подъемной силы и момента.

Введение

Для повышения ходовых качеств катеров – глсссеров важное значение имеет задача определения подъемной силы днища глсссера. Несущая способность глсссера существенно зависит от скорости движения и глубины канала.

Исследованию задачи о движении тонкого профиля в бесконечно глубокой жидкости посвящены работы [1]-[4]. Задача глсссирования по поверхности слоя невесомой жидкости решена методами ТФКП Л.И. Седовым [5]. Движение профиля под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины исследовано А.Н. Тихоновым [6]. Задача о движении профиля была им решена методом интегральных уравнений.

1 Физическая и математическая постановка задачи

Рассматривается задача стационарного глсссирования тонкого твердого профиля бесконечного размаха по поверхности канала постоянной конечной глубины h . Профиль движется в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью V_∞ , вызывая образование волн на свободной поверхности. Отклонения свободной поверхности от невозмущенного уровня соответствуют значениям функции $\eta(x)$. Система координат XOY связана с движущимся профилем. Направление оси OX совпадает с направлением движения профиля. Ось OY ориентирована перпендикулярно оси OX , вертикально вверх. Начало координат берется в центре проекции профиля на ось OX . Поперечное сечение профиля задается аналитической функцией $f(x)$. Проекцией профиля на ось OX является отрезок $[-a; +a]$.

Приняты следующие предположения: жидкость идеальная, несжимаемая, весома, однородная с плотностью ρ , находится под действием силы тяжести; течение жидкости безвихревое, установившееся (относительно движущейся системы координат), обладает потенциалом скорости; тонкий профиль вызывает на свободной поверхности жидкости волны малой амплитуды; волны образуются только за профилем, далеко впереди профиля жидкость покоится.

Описанной постановке соответствует следующая краевая задача:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = V_{\infty} f'(x), \quad |x| \leq a, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0, \quad \forall x, \quad (3)$$

$$V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon \varphi + g\eta = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = V_{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad |x| > a, \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ коэффициент диссипативных сил, в окончательном решении $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение Лапласа (1) выполняется всюду в полосе $-h < y < 0$. На профиле и дне выполняются краевые условия непротекания (2) и (3). На свободной верхней границе (условия сносятся на ее невозмущенный уровень $y = 0$) требуется выполнение динамического условия для потенциала скорости (4) и кинематического условия (5).

Кроме того, возмущенное течение далеко впереди профиля (при $x \rightarrow +\infty$) должно отсутствовать, позади (при $x \rightarrow -\infty$) должно быть ограничено.

Условия (4) и (5) можно заменить объединенным условием

$$V_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = 0. \quad (6)$$

Обозначая потенциал скорости выше и ниже уровня $y = 0$ соответственно $\varphi_+(x)$ (при $y \rightarrow +0$) и $\varphi_-(x)$ (при $y \rightarrow -0$), определяется потенциал вихревого слоя с интенсивностью $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) \Big|_{y=0}, \quad |x| \leq a. \quad (7)$$

Тогда краевая задача (1) – (5) преобразуется к виду (1) – (3), (6), (7).

Решение задачи о потенциале скорости используется для расчета перепада давления вдоль профиля

$$p_- - p_+ = \rho V_{\infty} \gamma(x).$$

Интегрируя перепад давления по профилю, определяется подъемная сила профиля.

2 Решение краевой задачи

Предполагая, что условия существования интеграла Фурье выполнены, преобразование Фурье применяется к краевой задаче (1) – (3), (6), (7)

$$\Phi(\alpha, y) = F[\varphi](\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Общий вид решения преобразованного уравнения (1) имеет вид:

$$\Phi(\alpha, y) = Ach(\alpha y) + Bsh(\alpha y), \quad (8)$$

Подставляя (8) в систему краевых условий в образах Фурье и решая ее относительно A, B , определяется образ Фурье вертикальной составляющей скорости

$$V(\alpha) = F \left[\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} \right] (\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} e^{i\alpha x} dx = \Gamma(\alpha) \cdot K(\alpha) \quad (9)$$

где $K(\alpha) = \frac{1}{i} \frac{\alpha th(\alpha h)}{\alpha - \nu th(\alpha h)}$.

Ядро преобразования $K(\alpha)$ является сингулярным ядром типа Коши, так как $K(\alpha) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{1}{i} sgn(\alpha)$.

3 Вывод и решение интегрального уравнения

Применяя к (9) обратное преобразование Фурье, согласно теореме о свертке и с учетом финитности $\gamma(x)$ на компакте $[-a; +a]$ получено интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{+a} \gamma(s) k(x-s) ds = v_y(x) = V_\infty f'(x), \quad |x| \leq a, \quad (10)$$

где $k(x) = F^{-1}[K(\alpha)](x)$.

Для определения выражения ядра $k(x)$ использована процедура замыкания контура интегрирования и теория вычетов. Образ Фурье $K(\alpha)$ имеет два симметричных действительных полюса $-\alpha_0$ и α_0 (только при $\nu h > 1$), которые выходят на действительную ось при $\varepsilon \rightarrow 0$ с нижней полуплоскости, и бесконечное число симметричных чисто мнимых полюсов первого порядка $-\alpha_k$ и α_k , $k = 1, 2, \dots$ (при $\nu h \leq 1$ появляются два дополнительных симметричных мнимых полюса вблизи начала координат).

Тогда при $\nu h > 1$

$$k(x) = -(1 + sign x) \frac{1}{2} \frac{\alpha_0 sh(2\alpha_0 h)}{ch^2(\alpha_0 h) - \nu h} \cos(\alpha_0 x) + sign x \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin(2\alpha_n h) e^{-\alpha_n |x|}}{\cos^2(\alpha_n h) - \nu h},$$

при $\nu h \leq 1$

$$k(x) = sign x \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin(2\alpha_n h) e^{-\alpha_n |x|}}{\cos^2(\alpha_n h) - \nu h}.$$

4 Численные методы

Для дискретизации интегрального уравнения (10) применяется схема метода дискретных вихрей [7]. В численных расчетах принято $a = 1$. Интеграл заменяется квадратурной формулой:

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) k(x_i - s_j) = v_y(x_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (11)$$

где $x_i = -1 + (i - \frac{1}{4}) \frac{2}{N}$, $i = \overline{1, N}$, $s_j = -1 + (j - \frac{3}{4}) \frac{2}{N}$, $j = \overline{1, N}$.

Из системы (11) однозначно находятся γ_j .

5 Расчет гидродинамических характеристик

Используя найденные из системы (11) значения интенсивности вихрей $\gamma(s_j)$, $j = \overline{1, N}$, можно вычислить коэффициент нормальной (подъемной) силы c_y и коэффициент момента относительно середины профиля c_m .

$$c_y = \int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds; \quad c_m = \int_{-1}^{+1} s\gamma(s) ds.$$

Описанный метод реализован на языке программирования Fortran. На рис.1-2 приведены результаты расчетов коэффициентов $c_y(Fr)$ и $c_m(Fr)$, $Fr = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$, при $v_y = 1$, $N = 50$.

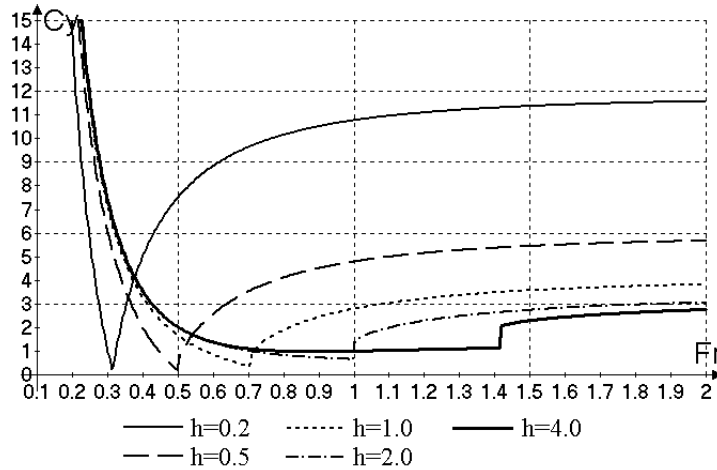


Рис. 1. Зависимость коэффициента c_y от чисел Фруда

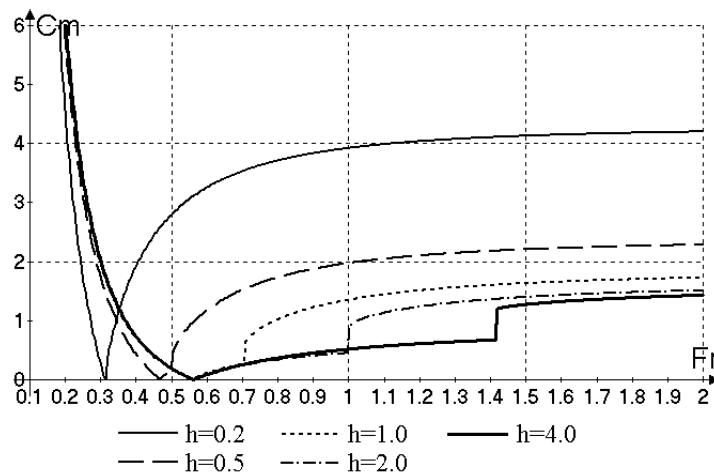


Рис. 2. Зависимость коэффициента c_m от чисел Фруда

Из полученных данных видно, что при переходе через критическое число Фруда ($\nu h = 1$) наблюдается скачок первого рода, абсолютная величина которого увеличивается с ростом h .

Список литературы

- [1] Келдыш М.В., Лаврентьев М.А. О движении крыла над поверхностью тяжелой жидкости // Труды конференции по теории волнового сопротивления. М.: ЦАГИ, 1937. С. 31–62.
- [2] Панченко А.Н. Гидродинамика подводного крыла. Киев: Наукова думка, 1965. 552 с.
- [3] Целищев В.А. Исследование влияния свободной поверхности тяжелой жидкости на стационарные гидродинамические характеристики тонкого профиля // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары: Чув. ун-т, 1990. С. 143–147.
- [4] Ефремов И.И., Иванисова О.В. Гидродинамические характеристики малопогруженного подводного крыла // Современные проблемы математического моделирования. Ростов-на-Дону: РГУ, 2005. С. 138–144.
- [5] Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
- [6] Тихонов А.Н. Плоская задача о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // Академия наук СССР. Известия отделения технических наук. 1940. № 4. С. 57–78.
- [7] Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 242 с.

Efremov I.I., Kolesnikova J.N. *Gliding the thin structure on the surface of the layer of the powerful liquid.* Hydrodynamical characteristics of a thin structure, gliding on a surface of a liquid of final depth are researched. The received boundary value problem of distribution of pressure in a structure by means of Fourier transformation is reduced to decision the singular integral equation. To which digitization the scheme of a method of discrete whirlwinds is applied. Results of calculation of factors of elevating force and the moment are resulted.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УПРУГИМИ РОЛИКАМИ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ

Журавлев Г.А.

*Южный федеральный университет, НИИ механики и прикладной математики
им. Воровича И.И.*

Предложен аналитико-экспериментальный метод определения закономерностей изменения параметров области контакта и напряженного состояния упругих роликов с пересекающимися осями.

Трудность получения чисто аналитического решения задачи определения напряженного состояния упругих роликов с пересекающимися осями, громоздкость и недостаточность (из-за необходимости контроля получаемых результатов другими методами) использования численных методов привели автора к поиску решения данной задачи аналитико-экспериментальным методом.

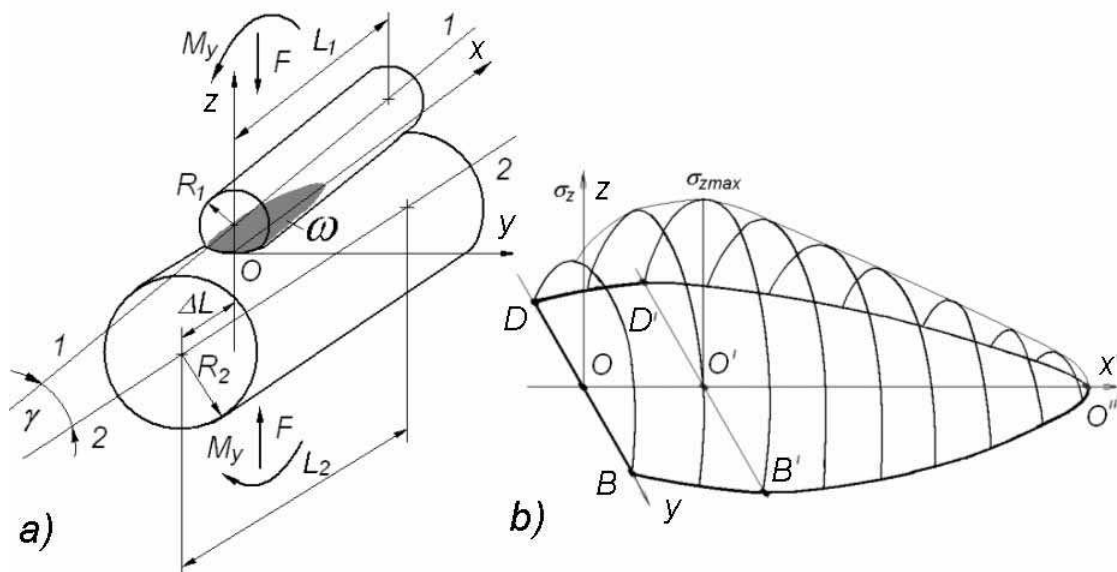


Рис. 1. Контакт упругих роликов с пересекающимися под углом γ осями: модель контакта (a) и схема эпюры контактного давления при $\Delta L = 0$ (b).

Здесь поставлена задача разработки аналитико-экспериментального метода приближенного определения напряженного состояния упругих роликов (круговых цилиндров конечной длины) с пересекающимися под малым углом γ осями (рис. 1). Принято, что материалы роликов имеют одинаковые значения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона μ , а их контакт является статическим, без трения и с начальным касанием в точке O . Задано: радиусы контактирующих роликов R_1 и R_2 , угол перекоса их осей γ , длины роликов L_1 и L_2 , сила их сжатия F , значения E и μ , показатель уровня несовместности торцов (в зоне точки O) ΔL .

Определение области контакта. Нашими исследованиями установлено, что форма области контакта ω (рис. 1а) в зоне точки O существенно зависит от величины ΔL , а основные параметры контура области ω подчиняются закономерностям, с высокой степенью достоверности выявляемым из эксперимента.

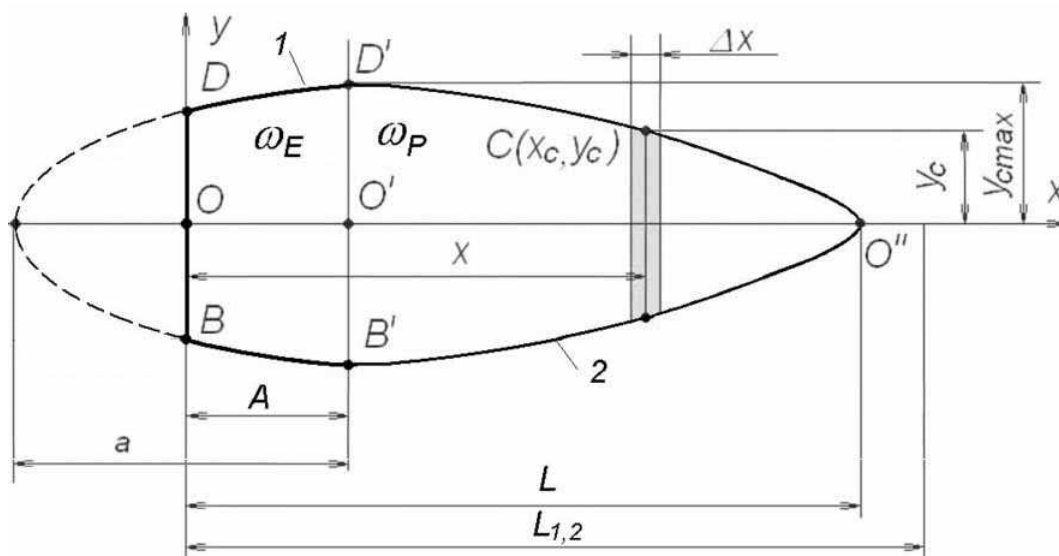


Рис. 2. Контур площадки (ограниченной сегментом параболы и усеченным эллипсом) краевого контакта (в форме лепестка) упругих стальных роликов с совмещенными торцами.

Так, например, экспериментально установлено, что площадка контакта стальных роликов (выполненных с обычным технологическим притуплением острых кромок) с совмещенными торцами ($\Delta L=0$) приобретает форму лепестка (рис. 2). Область контакта ω имеет сложный контур (состоящий из двух областей ω_E и ω_P - рис. 2), линия которого может быть описана прямолинейными отрезками $x = const$ и несколькими кривыми 2-го порядка. При $\Delta L = 0$ область контакта и ее части ограничены прямолинейными отрезками $x=0$; $x = A$ и $x = L$ (если $y_{c(x=L)} > 0$, где $y_{c(x=L)}$ - ордината точки контура при $x = L$), а также эллиптическими (для области ω_E) и параболическими (для области ω_P) кривыми 1 и 2, соответственно:

$$\frac{(x - A)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; 0 \leq x \leq A; \frac{x - A}{L - A} + \frac{y^2}{c^2} = 1; A \leq x \leq L; y_{c(x=L)} = 0, \quad (1)$$

где: a и b - размеры полуосей эллиптической части площадки контакта; c - параметр параболы; $b = c = y_{cmax}$; L - протяженность области контакта; A - расстояние от наиболее широкого сечения $B'D'$ (рис. 2) до точки O начального касания роликов.

Экспериментально выявлены закономерности изменения основных параметров L , A , a и b от γ , ρ и F при $\mu = 0,3$ и $E = 2,08 \cdot 10^5$ МПа. Например, размер L (при $y_{c(x=L)} = 0$) возрастает с уменьшением угла γ и с увеличением силы сжатия F , но снижается с увеличением приведенного радиуса кривизны ρ . Далее будет показано, что при известных параметрах L , A и a область контакта определена, а

полуширина $y_{cmax} = b$ ее наибольшего сечения $B'D'$ полностью определяет максимальные контактные напряжения σ_{zmax} :

$$b = \sqrt{\frac{8\eta_{\Sigma}\rho}{\pi}(L - A + 2 - \frac{2A^2}{a^2})}; \quad \sigma_{zmax} = \frac{1}{2} \frac{b}{\eta_{\Sigma}\rho}; \quad \eta_{\Sigma} = \eta_1 + \eta_2; \quad \eta_{1,2} = \frac{1 - \mu^2}{E} \quad (2)$$

где: ρ - приведенный радиус кривизны контактирующих тел.

Главный вектор F поверхностной нагрузки $\sigma(x, y)$ запишем при $y_{c(x=L)} = 0$ в виде

$$F = \int_{\omega} \sigma(x, y) dy dx = F_1 + F_2; \quad F_1 = \int_{\omega_E} \sigma_E(x, y) dy dx = 2 \int_0^A \int_0^{b\sqrt{1 - \frac{(x-A)^2}{a^2}}} \sigma_E(x, y) dy dx;$$

$$F_2 = \int_{\omega_P} \sigma_P(x, y) dy dx = 2 \int_0^L \int_0^{b\sqrt{1 - \frac{x-A}{L-A}}} \sigma_P(x, y) dy dx.$$

О законе трансверсального распределения контактного давления. Для контактирующих тел, моделируемых упругими круговыми цилиндрами без краевого контакта широко обоснован (теоретически и экспериментально) эллиптический закон распределения контактного давления в трансверсальных сечениях площадки контакта. Оценка закона распределения контактного давления при краевом контакте произведена нами аппроксимацией эллиптическими кривыми результатов (апробированных экспериментально) численного решения М. Хартнета задачи о контакте упругих роликов с различными углами перекося $\gamma = 0...2 \cdot 10^{-3}$ рад. Аппроксимация показала столь же хорошее, как и при $\gamma = 0$, соответствие распределения контактного давления (в трансверсальном направлении) эллиптическому закону при $\gamma = 10^{-3}...2 \cdot 10^{-3}$ рад.

Определение закона распределения контактного давления. Соблюдение эллиптического закона распределения контактного давления $\sigma(x, y)$:

$$\sigma(x, y) = \sigma(x, 0) \sqrt{1 - \frac{y^2}{y_c^2}}; \quad \sigma(x, 0) = \sqrt{\frac{q}{\pi\rho\eta_{\Sigma}}}; \quad y_c = 2\sqrt{\frac{q\rho\eta_{\Sigma}}{\pi}};$$

во всех трансверсальных сечениях площадки контакта роликов с пересекающимися осями приводит к возможности (показанной здесь на примере площадки контакта с формой лепестка) интегрального определения величин F_1 и F_2 :

$$F_1 = \int_0^A q_E(x) dx; \quad F_2 = \int_A^L q_P(x) dx; \quad q_{max} = \frac{\pi b^2}{4\rho\eta_{\Sigma}}$$

$$F_1 = \frac{\pi}{4\rho\eta_{\Sigma}} \int_0^A y_c^2(x) dx = \frac{\pi A b^2}{4\rho\eta_{\Sigma}} \left(1 - \frac{A^2}{3a^2}\right);$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4\rho\eta_{\Sigma}} \int_A^L y_c^2(x) dx = \frac{\pi b^2}{8\rho\eta_{\Sigma}} (L - A); \quad \sigma_o = \sqrt{\frac{q_{max}}{\pi\rho\eta_{\Sigma}}} = \frac{1}{2} \frac{b}{\rho\eta_{\Sigma}},$$

где: q и q_{max} - удельная нагрузка в сечениях y_c и y_{cmax} , соответственно.

Обе фигуры распределения закона контактного давления имеют общую вершину с аппликатой $\sigma_o = -\sigma_{zmax} = -\sigma_z(A, 0)$. На основании изложенного распределение контактного давления при $y_{c(x=L)} = 0$ принимаем частично по закону аппликат усеченного полуэллипсоида (часть фигуры на рис. 1b с основанием $DD'B'B$) и усеченного эллиптического полупараболоида (часть фигуры на рис. 1b с основанием $D'O''B'$):

$$\begin{aligned}\sigma_E &= \sigma_o \sqrt{1 - \frac{(x-A)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad 0 \leq x \leq A; \\ \sigma_P &= \sigma_o \sqrt{1 - \frac{x-A}{L-A} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad A \leq x \leq L;\end{aligned}\quad (3)$$

где: σ_o - максимальное контактное давление по площадке контакта ω .

Определение напряжений. Используя классические решения задач определения напряженно-деформированного состояния в упругом полупространстве от действия сосредоточенной силы (Буссинеск) и от действия поверхностных сил (Черрути), запишем потенциалы V и V_1 для нашего случая загрузки областей контакта (рис. 2) ω_E и ω_P полупространства $z > 0$:

$$V = V(x, y, z) = V_E(x, y, z) + V_P(x, y, z); \quad V_1 = V_1(x, y, z) = V_{1E}(x, y, z) + V_{1P}(x, y, z);$$

$$\begin{aligned}V_E(x, y, z) &= \int_{\omega_E} \frac{\sigma_E(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\eta d\xi = \\ &= 2 \int_0^A \int_0^{b\sqrt{1-\frac{(\xi-A)^2}{a^2}}} \frac{\sigma_E(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\eta d\xi; \\ V_{1E}(x, y, z) &= 2 \int_0^A \int_0^{b\sqrt{1-\frac{(\xi-A)^2}{a^2}}} \sigma_E(\xi, \eta) \ln[\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z] d\eta d\xi; \\ V_P(x, y, z) &= \int_{\omega_P} \frac{\sigma_P(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\eta d\xi = \\ &= 2 \int_A^L \int_0^{b\sqrt{1-\frac{\xi-A}{L-A}}} \frac{\sigma_P(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\eta d\xi; \\ V_{1P}(x, y, z) &= 2 \int_A^L \int_0^{b\sqrt{1-\frac{\xi-A}{L-A}}} \sigma_P(\xi, \eta) \ln[\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} + z] d\eta d\xi;\end{aligned}$$

где: η, ξ - координаты центра текущей элементарной площадки приложения элементарных сил $d\eta, d\xi$, действующих в области $\omega(x, y)$. Напряжения в произвольной точке (x, y, z) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_z(x, y, z) &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \tau_{xz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \quad \tau_{yz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}; \\ \sigma_x(x, y, z) &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\pi} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1-2\mu}{2\pi} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y, z) &= -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\pi} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1-2\mu}{2\pi} \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{1-2\mu}{2\pi} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (4)$$

Взаимосвязи факторов контакта. Экспериментально-теоретическим анализом (по предложенному методу) описан механизм проявления выявленных автором эффектов кривизны контакта (эффектов большего, относительно классического решения плоской контактной задачи Герца и традиционных представлений теории и практики контактных расчетов, влияния кривизны тел с близким к начально-линейному касанием на несущую способность их контакта). В частном случае $\gamma = 0$ параметры F и q_{max} инвариантны параметру ρ , что, согласно традиционным представлениям, считается универсальным для тел с близким к начально-линейному касанием ($\gamma \geq 0$). В действительности при $\gamma \neq 0$ инвариантным (относительно ρ) остается только параметр F , тогда как параметр q_{max} зависит от ρ . А это означает, что допускаемая сила сжатия F_p является функцией параметра ρ .

Заключение. Предложенный метод основан на аналитико-экспериментальном определении параметров области контакта и закона распределения контактного давления упругих роликов при их краевом контакте. По мере накопления информации о закономерностях изменения параметров области контакта этот приближенный метод будет становиться все более точным. Использование решения Буссинеска-Черутти в контактных расчетах тел с краевым контактом (существенно отличающихся от полупространства) оправдано тем, что максимальные эффективные напряжения на поверхности контакта (и, тем более, в его глубине) удалены от свободной грани и она не может оказать на них заметное влияние. Метод эффективен для оценки контакта роликов с различной продольной формой как при собственно экспериментальном определении области контакта, так и при уже известных закономерностях изменения ее основных параметров. Он являет собой достаточно простой инструмент для широкой расчетной практики в машиностроении, а также для выполнения экспериментальных исследований и обработки их результатов, для определения отдельных параметров сложных контактных узлов (например, угла γ в роликоподшипнике или в эвольвентной зубчатой передаче), которые при проектировании чаще всего остаются неизвестными.

Zhuravlev G.A. *On Determination of the Stress Condition of Bodies Modeled by Elastic Rollers with Crossing Axes*. The analyst-experimental method of the determination of the regularities for changes of contact parameters of the stress condition of bodies modeled by rollers crossing axes is proposed.

КОНВЕКЦИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ

Зеньковская С. М., Новосядлый В.А.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Исследуется влияние высокочастотных поступательных вибраций на возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей. Внешние границы предполагаются твердыми, на них заданы условия теплообмена общего вида.

Жидкости предполагаются слабо неизотермическими, что позволяет использовать обобщенное приближение Буссинеска в математической модели конвекции. Применен метод осреднения. В осредненных уравнениях произведен переход к приближению Буссинеска и найдено квазиравновесное решение, для которого условие замкнутости выполняется в целом - и для плавной, и для пульсационной скоростей. Подробно исследована его устойчивость в случае однородных жидкостей. Показано асимптотически, что вертикальная вибрация создает эффективное поверхностное натяжение и сглаживает поверхность раздела. Горизонтальные колебания оказывают дестабилизирующее влияние. Кроме того, рассмотрены также и неоднородные жидкости в случае недеформируемой в среднем поверхности раздела.

Введение. Задача о влиянии высокочастотной вибрации на возникновение конвекции в двухслойной системе была рассмотрена в [1]–[4], где выведены осредненные уравнения и краевые условия. В качестве исходной математической модели были взяты обобщенные уравнения Обербека–Буссинеска, введенные Д.В. Любимовым [5, 6]. Жидкости предполагались слабо неизотермическими, в осредненных уравнениях произведен переход к классической модели ОБ. В [1, 2] найдено квазиравновесное решение осредненной задачи, для которого при неvertикальных вибрациях условие замкнутости выполняется в среднем, а касательные скорости на равновесной поверхности раздела совпадают. Исследовано влияние направления и амплитуды скорости вибрации на возникновение конвекции. Показано, что горизонтальные колебания не влияют на начало конвекции, а при всех остальных направлениях в случае однородных жидкостей вибрация оказывает стабилизирующее влияние. Такой же эффект имеет место и для однослойной системы со свободной деформируемой границей [7]. В работах [3, 4] были продолжены исследования, начатые в [1, 2], и найдено квазиравновесное решение задачи, удовлетворяющее условию замкнутости выполняется в целом — и для плавной, и для пульсационной скоростей. В [3] исследован случай влияния высокочастотной вибрации на двухслойную систему изотермических жидкостей, в [4] — на систему слабо неизотермических жидкостей. Случай влияния вертикальных колебаний конечной частоты исследован в [8].

В данной работе показано, что в случае, когда квазиравновесное решение осредненной задачи удовлетворяет условию замкнутости в целом, то при всех направлениях, отличных от вертикального, картина меняется качественно со случаем, когда квазиравновесное решение удовлетворяет условию замкнутости лишь

в среднем. Горизонтальные колебания оказывают дестабилизирующее влияние. Изучен случай недеформируемой в среднем поверхности раздела.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев вязких несмешивающихся жидкостей толщинами H_1 и H_2 . На внешних твердых границах заданы условия теплообмена общего вида, так что в каждой жидкости существует поперечный градиент температуры. Поверхность раздела $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ предполагается деформируемой, и на ней действуют силы поверхностного натяжения с коэффициентом $\hat{\sigma} = \sigma_0 - \sigma_T \hat{T}^k$; $k = 1$ соответствует нижнему слою, $k = 2$ — верхнему. Начало отсчета температуры выбрано на плоской поверхности раздела. Жидкости предполагаются слабо неизотермическими, так что переменные плотности линейно зависят от температуры $\hat{\rho}_k = \hat{\rho}_{0k}(1 - \beta_k \hat{T}^k)$. Начало координат выбрано на плоской поверхности раздела, причем вертикальная ось x_3 направлена вдоль силы тяжести, $\vec{\gamma} = (0, 0, 1)$ — ее орт. Предполагается, что система как целое совершает колебания вдоль вектора $\vec{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ по закону $x_3 = \hat{b}/\hat{\omega} f(\hat{\omega} t)$, где f — 2π -периодическая функция с нулевым средним. Здесь $\hat{\omega}$ — частота колебаний, \hat{b} — амплитуда скорости. Безразмерные уравнения конвекции запишем в обобщенном приближении Обербека-Буссинеска (ООб)

$$\rho_k \left(\frac{\partial \vec{v}^k}{\partial t} + (\vec{v}^k \cdot \nabla) \vec{v}^k \right) = -\nabla p^k + \mu_k \Delta \vec{v}^k + \rho_k (Q_0 \vec{\gamma} - b \omega f''(\omega t) \vec{s}), \operatorname{div} \vec{v}^k = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T^k}{\partial t} + (\vec{v}^k \cdot \nabla) T^k = C_k \Delta T^k, \quad (2)$$

$$x_3 = \xi(x_1, x_2, t) : \vec{v}^1 = \vec{v}^2, \vec{v}^k \cdot \vec{\ell} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \vec{\ell} = (-\xi_{x_1}, -\xi_{x_2}, 1), \quad (3)$$

$$-(p^1 - p^2) n_i + (\tau_{ij}^1 - \tau_{ij}^2) n_j = -2K \sigma n_i - (\nabla_\Gamma \sigma)_i, \vec{n} = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}, \quad (4)$$

$$\sigma = C - M T^k, \tau_{ij}^k = \mu_k \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^k}{\partial x_i} \right), \nabla_\Gamma(\sigma)_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} n_k n_i, \quad (5)$$

$$2K = \nabla_2 \frac{\nabla_2 \xi}{\sqrt{1 - |\nabla_2 \xi|^2}}, \nabla_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (6)$$

$$T^1 = T^2, \varkappa_1 \frac{\partial T^1}{\partial \vec{n}} = \varkappa_2 \frac{\partial T^2}{\partial \vec{n}}, \quad (7)$$

$$x_3 = h_1, -h_2 : \vec{v}^k = 0, B_{1k} \frac{\partial T^k}{\partial x_3} + B_{0k} T^k = b_k \quad (8)$$

Безразмерные величины введены с использованием следующих масштабов: длины — \mathcal{L} , времени — \mathcal{T} , плотности — ρ , градиента температуры — A , коэффициентов теплопроводности — \varkappa . $\vec{v}^k = (v_1^k, v_2^k, v_3^k)$ — относительные скорости, p^k — давления, T^k — температуры, $\mu_k = \hat{\mu}_k \mathcal{T} / \rho \mathcal{L}^2$, $C_k = \chi_k \mathcal{T} / \mathcal{L}^2$, $\varepsilon_k = \beta_k A \mathcal{L}$, \varkappa_k — коэффициенты динамической вязкости, температуропроводности, теплового расширения и теплопроводности соответственно, $Q_0 = g_0 \mathcal{T}^2 / \mathcal{L}$, $C = \sigma_0 \mathcal{T}^2 / \rho \mathcal{L}^3$ — коэффициент поверхностного натяжения, $M = \sigma_T A \mathcal{T}^2 / \rho \mathcal{L}^2$ — число Марангони.

Кроме того, будем считать, что выполняется условие замкнутости:

$$\int_{-h_2}^{\xi} v_1^2 dx_3 + \int_{\xi}^{h_1} v_1^1 dx_3 = 0 \quad (9)$$

Осредненные уравнения. Квазиравновесное решение. Спектральная задача. Далее рассмотрим случай, когда частота ω велика, а амплитуда скорости вибрации b конечна. Применяя метод осреднения по схеме, изложенной в [1]–[4], [7], получаем осредненную задачу, которую здесь не приводим ввиду ее громоздкости. У этой задачи существует квазиравновесное решение с вертикальным градиентом температуры

$$\begin{aligned} \bar{v}^{0k} &= 0, \quad \xi^0 = 0, \quad T^{0k} = A_k x_3, \quad \vec{W}^{0k} = \left(\cos \varphi \frac{c_k - \varepsilon_k A_k x_3}{1 - \varepsilon_k A_k x_3}, 0, 0 \right), \\ \Phi^{0k} &= (1 - c_k) \cos \varphi x_1 + (x_3 - \varepsilon_k A_k x_3^2 / 2) \sin \varphi, \quad \varkappa_1 A_1 = \varkappa_2 A_2, \\ q^{0k} &= -\rho_{0k} \varepsilon_k A_k x_3^2 / 2 Q_0 + Re^2 / 2 \rho_{0k} \cos^2 \varphi c_k^2, \quad \rho_{01}(c_1 - 1) = \rho_{02}(c_2 - 1), \\ c_1 &= 1 - \frac{\rho_{02} \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1 A_2 (h_1 + h_2)}{\rho_{01} \varepsilon_1 A_1 \ln(1 + \varepsilon_2 A_2 h_2) - \rho_{02} \varepsilon_2 A_2 \ln(1 - \varepsilon_1 A_1 h_1)} \end{aligned} \quad (10)$$

которое удовлетворяет условию замкнутости (9)

Отметим, что данное решение соответствует уравнениям конвекции в ООБ. Решение, соответствующее уравнениям в классическом приближении Обербека–Буссинеска, приведено в [3, 4].

Линеаризуем осредненную задачу, полагая $\bar{v}^k = \bar{v}^{0k} + \bar{w}^k$, $\bar{\xi} = \xi^0 + \bar{\eta}$, $\bar{T}^k = T^{0k} + \bar{\theta}^k$, $\vec{W}^k = \vec{W}^{0k} + \vec{w}^k$, $\Phi^k = \Phi^{0k} + \bar{\Phi}^k$, $\bar{q}^k = q^{0k} + P^k$. Считая возмущения плоскими, введем функции тока, полагая $u_1^k = \frac{\partial \bar{\psi}^k}{\partial x_3}$, $u_3^k = -\frac{\partial \bar{\psi}^k}{\partial x_1}$, $w_1^k = \frac{\partial \bar{\zeta}^k}{\partial x_3}$, $w_3^k = -\frac{\partial \bar{\zeta}^k}{\partial x_1}$, исключим давления P^k и функции $\bar{\Phi}^k$ и представим возмущения в нормальной форме $(\bar{\psi}^k(x_1, x_3, t), \bar{\zeta}^k(x_1, x_3, t), \bar{\theta}^k(x_1, x_3, t), \bar{\eta}(x_1, t)) = e^{\lambda t + i\alpha x_1} (\psi^k(x_3), \zeta^k(x_3), i\alpha\theta^k(x_3), i\alpha\eta)$. В результате приходим к спектральной задаче

$$\begin{aligned} \lambda L \psi^k &= \nu_k L^2 \psi^k - \varepsilon_k \left[\alpha^2 \theta^k Q_0 - Re^2 A_k \left(\alpha^2 \sin \varphi \zeta^k - \right. \right. \\ &\left. \left. - i\alpha \cos \varphi \frac{c_k - 1}{1 - \varepsilon_k A_k x_3} D \zeta^k \right) \right] - \varepsilon_k^2 \alpha^2 Re^2 \cos^2 \varphi \frac{A_k (c_k - 1)^2}{(1 - \varepsilon_k A_k x_3)^3} \theta^k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L \zeta^k &= \varepsilon_k \left[-\alpha^2 \sin \varphi \theta^k + i\alpha \cos \varphi \frac{c_k - 1}{1 - \varepsilon_k A_k x_3} D \theta^k + \right. \\ &\left. + A_k (x_3 L \zeta^k + D \zeta^k) \right] + \varepsilon_k^2 i\alpha \cos \varphi \frac{c_k - 1}{(1 - \varepsilon_k A_k x_3)^2} A_k \theta^k, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda\theta^k - A_k\psi^k = C_k L\theta^k, \quad L = (D^2 - \alpha^2), \quad D = \partial/\partial x_3, \quad (13)$$

$$x_3 = 0: \quad \psi^1 = \psi^2, \quad D\psi^1 = D\psi^2, \quad \psi^k = -\lambda\eta, \quad (14)$$

$$\rho_{01}D\zeta^1 - \rho_{02}D\zeta^2 = -\alpha^2 \sin\varphi(\rho_{01} - \rho_{02})\eta + i\alpha\rho_{01}(c_1 - 1) \cos\varphi(\varepsilon_1\theta^1 - \varepsilon_2\theta^2), \quad \zeta^1 - \zeta^2 = -i\alpha \cos\varphi(c_1 - c_2)\eta, \quad (15)$$

$$\theta^1 + A_1\eta = \theta^2 + A_2\eta, \quad \varkappa_1 D\theta^1 = \varkappa_2 D\theta^2, \quad (16)$$

$$\mu_1 D^2\psi^1 - \mu_2 D^2\psi^2 + \alpha^2(\mu_1 - \mu_2)\psi^1 = -\alpha^2 M(\theta^k + A_k\eta), \quad (17)$$

$$3\alpha^2(\mu_1 - \mu_2)D\psi^1 + \lambda(\rho_{01} - \rho_{02})D\psi^1 - (\mu_1 D^3\psi^1 - \mu_2 D^3\psi^2) + \quad (18)$$

$$+\alpha^2(Q_0(\rho_{01} - \rho_{02}) + C\alpha^2)\eta + \text{Re}^2(\rho_{01} - \rho_{02})[\alpha^2 \sin\varphi\zeta^1 - i\alpha D\zeta^2 \cos\varphi(c_1 - 1) - \varepsilon_2\alpha^2 \cos^2\varphi \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}(c_1 - 1)^2\theta^2] = 0, \quad (19)$$

$$x_3 = h_1, -h_2: \quad \zeta^k = 0, \quad \psi^k = 0, \quad D\psi^k = 0, \quad (20)$$

$$B_{1k}D\theta^k + B_{0k}\theta^k = 0 \quad (21)$$

Результаты вычислений. На основе полученных формул были проведены вычисления для двухслойной системы с недеформируемой и деформируемой границами раздела при различных значениях параметров. Приведем результаты при невертикальных вибрациях. Для случая вертикальных колебаний они описаны в [1, 2] и для рассматриваемой модели не меняются.

Результаты вычислений для однородных жидкостей и системы силиконовое масло–флюоринерт [9] приведены на Рис. 1, слева, где изображены нейтральные кривые $M(\alpha)$ монотонной неустойчивости для различных значений угла вибрации φ . Из рисунка видно, что наличие горизонтальной компоненты вибрации приводит к уменьшению критического числа Марангони для всех волновых чисел, с наибольшим влиянием в области малых волновых чисел.

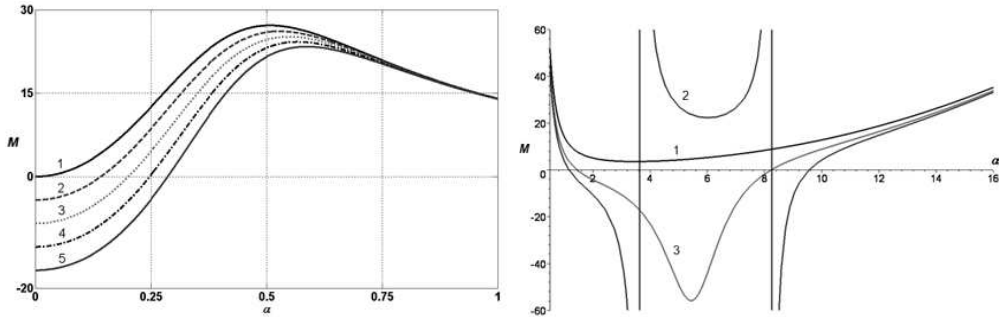


Рис. 1. Силиконовое масло 10 сСт — флюоринерт FC-70. Слева: однородные жидкости, $\text{Re}^2 = 10$. 1 — $\varphi = \pi/2$, 2 — $\varphi = \pi/3$, 3 — $\varphi = \pi/4$, 4 — $\varphi = \pi/6$, 5 — $\varphi = 0$. Справа: недеформируемая поверхность раздела. $g = 0$, $\text{Re}^2 = 5 \cdot 10^5$, $\varphi = 0$. Монотонная неустойчивость. 1 — однородная жидкость, 2 — классическое приближение ОБ, 3 — обобщенное приближение ОБ.

На Рис. 1, справа, представлены нейтральные кривые монотонной неустойчивости для уравнений конвекции в обобщенном и классическом приближениях ОБ. Поверхность раздела считается недеформируемой и имеют место только эффекты второго порядка при $\varepsilon_1 = 0.011$, $\varepsilon_2 = 0.01$, $\text{Re}^2 = 5 \cdot 10^5$, $\varphi = 0$. В обеих

моделях горизонтальные вибрации оказывают дестабилизирующее влияние, однако нейтральные кривые в области конечных волновых чисел, соответствующие классическим уравнениям ОБ, лежат ниже, чем для обобщенных уравнений ОБ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00587, 07-0100099-а).

Список литературы

- [1] Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Влияние высокочастотной вибрации произвольного направления на возникновение конвекции в двухслойной системе с деформируемой границей раздела // Деп. в ВИНТИ 29.06.2007 № 683-В 2007, 60 с.
- [2] Zenkovskaya S.M., Novosiadliy V.A. Influence of high-frequency vibration on the onset of convection in two-layer system // C.R.Mecanique 336 (2008). P. 269–274.
- [3] Новосядлый В.А. Возникновение волнового рельефа на поверхности раздела двухслойной системы несмешивающихся изотермических жидкостей в высокочастотном вибрационном поле // Деп. в ВИНТИ 20.08.2008 г. №715-В2008. 60 с.
- [4] Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Влияние высокочастотной поступательной вибрации на возникновение конвекции в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей // Деп. в ВИНТИ 20.08.2008 г. №716-В2008. 42 с.
- [5] Любимов Д.В. Нелинейные проблемы теории быстроосциллирующих конвективных течений. Специальность 01.02.05 — механика жидкости, газа, плазмы // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1994. 415 с.
- [6] Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in a fluid with a free surface // Microgravity Quart. №4. 1994. P. 117–122.
- [7] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // Прикл. матем. и мех. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 573–583.
- [8] Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Влияние вертикальных колебаний на двухслойную систему с деформируемой поверхностью раздела // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. №9. С. 1710-1720.
- [9] Zhou B., Liu Q., Tang Z. Raleigh-Marangoni-Benard instability in two-layer fluid system // Acta Mechanica Sinica. 2004. V. 20. No. 4. P. 366–373.

Novosiadliy V.A., Zenkovskaya S. M. *Two-layer fluid convection in high-frequency vibration field.* Current research is concentrated on investigation of influence of high-frequency progressive oscillations on the onset on thermocapillary convection in two-layer immiscible fluids system. Outer boundaries are assumed to be solid with heat exchange conditions in general form.

Fluids are assumed to be weakly isothermic, which allows the use of generalized Boussinesque approximation (this concept was introduced by Lyubimov D.V.) as

mathematical model of convection. Averaging method was applied. Transition to classical Boussinesque approximation was made in derived averaged equations. Quasiequilibrium solution, satisfying the full enclosure condition for both slow and pulsational velocity components, of acquired equations was obtained. The solution stability was extensively studied for the case of homogenous fluids. Vertical vibration was asymptotically shown to create effective surface tension and to smooth the interface. Horizontal vibration was shown to have destabilizing influence. Inhomogenous fluids with undeformable in average interface were studied as well.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОБОЛОЧЕК В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Устанавливается связь двумерной теории микрополярных оболочек с теорией трехмерной среды с моментными напряжениями. Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах выведены как следствие уравнений равновесия трехмерного континуума Коссера. Получены выражения тензоров усилий и моментов через осредненные по толщине значения силовых и моментных напряжений в теле оболочки. Найдена аппроксимация по толщинной координате полей скоростей и угловых скоростей трехмерного континуума Коссера, которая в качестве следствия принципа возможных мощностей дает уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах. Эта аппроксимация играет в теории микрополярных оболочек роль, аналогичную роли гипотез Кирхгофа-Лява в классической теории оболочек. Теория микрополярных оболочек может быть использована для описания механического поведения тонкопленочных наноструктур, нанотрубок, клеточных мембран, тонкостенных элементов конструкций из микронеоднородных и пористых материалов.

1. Уравнения равновесия трехмерной среды с моментными напряжениями (континуума Коссера) в координатах деформированного тела имеют вид [1 – 3]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} = 0, \quad \nabla = \mathbf{i}_k \partial / \partial X_k \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{q} = 0, \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ - тензор напряжений, $\boldsymbol{\mu}$ - тензор моментных напряжений, \mathbf{p} - векторная плотность распределенных по объему тела сил, \mathbf{q} - векторная плотность распределенных моментов, ∇ - набла-оператор, X_k ($k=1,2,3$) - декартовы координаты точек среды в текущей конфигурации, \mathbf{i}_k - координатные орты, $\boldsymbol{\tau}_\times$ означает векторный инвариант тензора $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}_\times = (\tau_{sk} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k)_\times = \tau_{sk} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k$

Выделим в теле произвольную область V_* , ограниченную поверхностью ∂V_* . Уравнения (1), (2) можно записать в эквивалентной форме как условия баланса всех сил и всех моментов, действующих на произвольную часть тела

$$\int_{\partial V_*} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dO + \int_{V_*} \mathbf{p} dV = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\partial V_*} (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{N}) dO + \int_{V_*} (\mathbf{q} + \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p}) dV = 0 \quad (4)$$

В (3), (4) \mathbf{N} - вектор единичной нормали к поверхности ∂V_* , $\boldsymbol{\rho} = X_k \mathbf{i}_k$ - радиус-вектор точки тела, dV - элемент объема, dO - элемент поверхности.

2. Оболочка представляет собой материальное тело, ограниченное в текущей конфигурации поверхностями Σ_- и Σ_+ , расположенными по разные стороны от

некоторой базовой поверхности Σ , и линейчатой поверхностью O_* образованной движением нормали к базовой поверхности по ее граничному контуру. Пусть поверхность Σ отнесена к гауссовым координатам y^α ($\alpha = 1, 2$). Радиус-вектор точки поверхности Σ обозначим $\mathbf{R}(y^\alpha)$, а векторы основного и взаимного базисов на Σ обозначим $\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{R}^\beta$. Справедливы формулы

$$\mathbf{R}_\alpha = \partial \mathbf{R} / \partial y^\alpha, \quad \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{R}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad \mathbf{R}^\beta \cdot \mathbf{N}_0 = 0$$

где \mathbf{N}_0 - единичная нормаль к Σ , δ_α^β - символ Кронекера.

Положение точки оболочки задается радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + Z\mathbf{N}_0, \quad -H_1(y^\alpha) \leq Z \leq H_2(y^\alpha), \quad H_1 + H_2 = H, \quad H_1 > 0, \quad H_2 > 0. \quad (5)$$

Здесь Z - расстояние от базовой поверхности, отсчитываемое по нормали к ней, H - переменная толщина оболочки. Можно показать справедливость следующих формул, выражающих геометрические характеристики оболочки через геометрические характеристики базовой поверхности

$$\begin{aligned} dV &= A(Z)d\Sigma dZ, \quad A(Z) = \det(\mathbf{G} - Z\mathbf{B}), \quad \nabla = (\mathbf{G} - Z\mathbf{B})^{-1} \cdot \text{Grad} + \mathbf{N}_0 \partial / \partial Z, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{E} - \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0 = G_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta, \quad G_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta, \\ \mathbf{B} &= -\text{Grad} \mathbf{N}_0 = B_{\alpha\beta} \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta, \quad \text{Grad} \equiv \mathbf{R}^\alpha \partial / \partial y^\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

$$d\Sigma_\pm = K_\pm d\Sigma, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} K_+ &= A(H_2) \sqrt{1 + (\text{Grad} H_2) \cdot (\mathbf{G} - H_2 \mathbf{B})^{-2} \cdot (\text{Grad} H_2)} \\ K_- &= A(-H_1) \sqrt{1 + (\text{Grad} H_1) \cdot (\mathbf{G} + H_1 \mathbf{B})^{-2} \cdot (\text{Grad} H_1)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_* dO_* = A(Z)(\mathbf{G} - Z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\nu} dS dZ \quad (8)$$

В (6)-(8) $G_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ - коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности Σ , \mathbf{E} - трехмерный единичный тензор, \mathbf{G} и \mathbf{B} - первый и второй фундаментальные тензоры базовой поверхности [4], Grad - оператор градиента на Σ , \mathbf{N}_* - нормаль к линейчатой поверхности O_* , $\boldsymbol{\nu}$ - нормаль к граничному контуру поверхности Σ , удовлетворяющая условию $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N}_0 = 0$, dS - элемент дуги на контуре.

Кроме нагрузок, действующих на боковой поверхности O_* , а также объемных сил и моментов \mathbf{p} и \mathbf{q} , оболочка нагружена силами и моментами, распределенными по поверхностям Σ_\pm с интенсивностями силовой нагрузки \mathbf{f}_\pm и моментной нагрузки \mathbf{l}_\pm . Это приводит к таким граничным условиям на Σ_\pm

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}_\pm, \quad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{l}_\pm \quad (9)$$

3. Применим к оболочке условия равновесия (3),(4), взяв в качестве области V_* участок оболочки, ограниченный поверхностями $Z = -H_1(y^1, y^2), Z = H_2(y^1, y^2)$

и линейчатой поверхностью O_* , пересекающейся с базовой поверхностью по произвольному замкнутому контуру Γ_* , который окружает на базовой поверхности область Σ_* . Используя (6)-(9), получим

$$\oint_{\Gamma_*} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T} dS + \int_{\Sigma_*} \mathbf{f} d\Sigma = 0 \quad (10)$$

$$\oint_{\Gamma_*} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{T} \times \mathbf{R}) dS + \int_{\Sigma_*} (\mathbf{l} + \mathbf{R} \times \mathbf{f}) d\Sigma = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{f} = \int_{-H_1}^{H_2} A(Z) \mathbf{p} dZ + K_- \mathbf{f}_- + K_+ \mathbf{f}_+ \quad (12)$$

$$\mathbf{l} = \int_{-H_1}^{H_2} A(Z) \mathbf{q} dZ + \mathbf{N}_0 \times \int_{-H_1}^{H_2} A(Z) \mathbf{p} Z dZ + K_- (\mathbf{l}_- - H_1 \mathbf{N}_0 \times \mathbf{f}_-) + K_+ (\mathbf{l}_+ + H_2 \mathbf{N}_0 \times \mathbf{f}_+) \quad (13)$$

Здесь естественным образом введены тензоры результирующих усилий \mathbf{T} и результирующих моментов \mathbf{M} оболочки как осредненные по ее толщине значения напряжений и моментных напряжений трехмерной микрополярной среды

$$\mathbf{T} = \int_{-H_1}^{H_2} A(Z) (\mathbf{G} - Z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} dZ \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-H_1}^{H_2} A(Z) (\mathbf{G} - Z\mathbf{B})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\mu} - Z\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{N}_0) dZ \quad (15)$$

Механический смысл выражений (12), (13) заключается в том, что внешние силы и моменты, действующие внутри каждого участка оболочки, опирающегося на элемент $d\Sigma$ базовой поверхности, заменяются статически эквивалентной системой сил и моментов, сосредоточенных на базовой поверхности с интенсивностями соответственно \mathbf{f} и \mathbf{l} на единицу площади.

Отметим, что согласно (15) результирующий момент в сечении оболочки плоскостями, проходящими через нормаль \mathbf{N}_0 , обусловлен двумя факторами: интегральным значением моментных напряжений и неравномерным распределением по толщине силовых напряжений.

Применяя теорему о дивергенции на поверхности и пользуясь произвольностью области Σ_* , из (10), (11) приходим к уравнениям равновесия оболочки в усилиях и моментах (Div - оператор дивергенции на поверхности Σ)

$$Div \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0, \quad Div \mathbf{T} \equiv \mathbf{R}^\alpha \cdot \partial \mathbf{T} / \partial y^\alpha \quad (16)$$

$$Div \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{l} = 0, \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) совпадают с выведенными ранее [5, 6] в рамках прямого подхода, (т.е. без привлечения понятий и представлений трехмерной сплошной среды) уравнениями статики поверхности Коссера. В [5] эти уравнения получены как следствие баланса сил и моментов, действующих на произвольный участок поверхности, в [6] они сформулированы при помощи принципа виртуальных работ.

Пусть σ - базовая поверхность оболочки в отсчетной конфигурации, т.е. в недеформированном состоянии, отнесенная к тем же координатам y^α . Радиус-вектор точки поверхности σ обозначим \mathbf{r} , а векторы основного и взаимного базисов на σ обозначим соответственно $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}^\beta$. Введя тензоры усилий и моментов типа Пиолы

$$\mathbf{D} = J(\text{Grad } \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{L} = J(\text{Grad } \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{M}$$

и используя доказанное ранее [4] равенство

$$\text{div}(J(\text{Grad } \mathbf{r})^T) = J(\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{N}_0, \quad J = \sqrt{\frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}}, \quad q_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

уравнения равновесия (16), (17) можно записать в геометрии недеформированной оболочки

$$\text{div } \mathbf{D} + J\mathbf{f} = 0, \quad \text{div } \mathbf{L} + [(\text{grad } \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}]_x + J\mathbf{l} = 0 \quad (18)$$

Здесь div и grad - операторы дивергенции и градиента на поверхности σ .

4. Если объемные моменты в теле отсутствуют ($\mathbf{q} = 0$), а среда является простым, т.е. неполярным материалом, то тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ равен нулю. В этом случае в силу (15) тензор моментов оболочки имеет представление

$$\mathbf{M} = -\boldsymbol{\lambda}' \times \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}' \cdot \mathbf{N}_0 = 0 \quad (19)$$

а вектор моментной нагрузки согласно (13) можно записать в виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{N}_0 \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{N}_0 = 0 \quad (20)$$

На основании (14) тензор усилий разлагается следующим образом

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\eta}' + \mathbf{V} \otimes \mathbf{N}_0, \quad \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}' \cdot \mathbf{N}_0 = 0, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}_0 = 0 \quad (21)$$

В (19)-(21) $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{V} - плоские векторы, $\boldsymbol{\eta}'$ и $\boldsymbol{\lambda}'$ - плоские тензоры, принадлежащие плоскости, касательной к поверхности Σ в данной точке.

С учетом (19)-(21) уравнение баланса сил (16) преобразуется к виду

$$\text{Div } \boldsymbol{\eta}' + \mathbf{N}_0 \text{Div } \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{f} = 0 \quad (22)$$

а уравнение баланса моментов (17) распадается на два:

$$(\text{Div } \boldsymbol{\lambda}') \cdot \mathbf{G} - \mathbf{V} + \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\eta}' + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}')^T = \boldsymbol{\eta}'^T + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}' \quad (24)$$

Введя в рассмотрение тензор $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}' + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}')^T$, который симметричен в силу (24), и исключая из (22),(23) вектор \mathbf{V} , получим

$$Div \boldsymbol{\eta} - \mathbf{B} \cdot Div (\boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\lambda}'^T) - \mathbf{R}^\alpha \cdot \boldsymbol{\lambda}'^T \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial y^\alpha) + \mathbf{N}_0 Div (\mathbf{G} \cdot Div \boldsymbol{\lambda}') + \mathbf{f} + Div (\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{N}_0) = 0 \quad (25)$$

Основываясь на тождестве Риччи и свойствах тензора Римана-Кристоффеля поверхности [7], доказывается, что в уравнение (25) входит только симметричная часть тензора $\boldsymbol{\lambda}'$. Следовательно, в случае неполярной среды уравнения равновесия оболочки (16), (17) приводятся к одному векторному уравнению относительно двух симметричных плоских тензоров $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$:

$$Div [\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + (Div \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{G} \otimes \mathbf{N}_0 + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{N}_0] + \mathbf{f} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\lambda}'^T) \quad (26)$$

Ранее [8] уравнения равновесия классической теории оболочек относительно симметричных тензоров усилий и моментов были получены в ортогональных координатах, связанных с линиями главных кривизн поверхности.

5. Движение среды Коссера характеризуется полем скоростей частиц \mathbf{v} и полем угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$, которое кинематически независимо от поля \mathbf{v} . Из уравнений (1), (2) следует равенство, выражающее принцип возможных мощностей [9] микрополярной среды

$$\int_V tr(\boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \boldsymbol{\kappa}) dV = \int_V (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \int_{\partial V} (\mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{l}' \cdot \boldsymbol{\omega}) dO \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\omega}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ - тензор скоростей деформации и тензор скоростей изгибных деформаций тела с моментными напряжениями [10], \mathbf{f}' и \mathbf{l}' - распределенные по поверхности тела силовая и моментная нагрузки. Обратно, из (27) и произвольности дифференцируемых векторных полей \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ вытекают уравнения равновесия (1), (2).

Если поле скоростей \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ не вполне произвольно, а представляет собой некоторое подмножество всех дифференцируемых векторных полей, то принцип возможных мощностей приводит к уравнениям, являющимся следствием точных трехмерных уравнений равновесия. Рассмотрим следующее подмножество возможных скоростей в микрополярной оболочке

$$\mathbf{v}(y^\alpha, Z) = \mathbf{v}_0(y^\alpha) + Z \boldsymbol{\omega}_0(y^\alpha) \times \mathbf{N}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(y^\alpha, Z) = \boldsymbol{\omega}_0(y^\alpha) \quad (28)$$

где $\mathbf{v}_0(y^\alpha)$, $\boldsymbol{\omega}_0(y^\alpha)$ - произвольные дифференцируемые на Σ функции, удовлетворяющие условиям $\mathbf{v}_0 = 0$, $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$ на граничном контуре Γ . Подставляя (28) в (27) и используя формулы (6), (12)-(15), получим равенство

$$\int_\Sigma tr [\mathbf{T}^T \cdot (\text{Grad } \mathbf{v}_0 + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{M}^T \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\omega}_0] d\Sigma = \int_\Sigma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) d\Sigma$$

из которого вытекают уравнения равновесия оболочки (16), (17). Таким образом, важная особенность аппроксимации поля линейных и угловых скоростей по толщине оболочки в форме (28) состоит в том, что она дает в качестве следствия принципа возможных мощностей уравнения равновесия в усилиях и моментах.

Аппроксимация поля скоростей неполярной среды в форме известных [11, 12] гипотез Кирхгофа-Лява, как показано ранее [4] приводит к уравнениям равновесия классической теории оболочек (26). Следовательно, аппроксимация (28) играет в теории микрополярных оболочек такую же роль, какую играют кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява в классической теории оболочек. Это позволяет применять аппроксимацию (28) для вывода прикладных двумерных моделей микрополярных оболочек из уравнений трехмерной среды с моментными напряжениями.

Список литературы

- [1] Пальмов В. А. // ПММ. 1964. Т. 28. В.3. с. 401-408.
- [2] Tourin R. A. // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1964. V. 17. №2. p. 85-112.
- [3] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocation and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997. 205 p.
- [4] Зубов Л. М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону.: Изд-во РГУ, 1982. 143 с.
- [5] Альтенбах Х. Жилин П. А. // Успехи механики (Advances in Mechanics). 1988. Т. 11. №4. с. 107-148.
- [6] Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 287 с.
- [7] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М.-Л.: Гостехиздат. Т. 1, 1947. 512 с.
- [8] Лурье А. И. // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 5. с. 558-560.
- [9] Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 400 с.
- [10] Еремеев В. А., Зубов Л. М. // Изв. РАН. МТТ. 1994. №3. с. 181-190.
- [11] Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
- [12] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Zubov L. M. *Equations of equilibrium of the micropolar shells for the resultant stress and couple* . Equations of equilibrium shells for the resultant stress and couple is deduced as implication of equilibrium equations three-dimensional continuum Cosserat.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННИХ НАГРУЗОК В СЛОЕ НА КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПОД ШТАМПОМ

Капустин М. С.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Исследована осесимметричная контактная задача о совместных колебаниях невесомого штампа на поверхности слоя, при отсутствии трения в области контакта и системы жестких включений (вертикально или горизонтально ориентированных) с заданными контактными напряжениями. Получены интегральные уравнения и их приближенные решения, проведены численные расчеты и анализ полученных результатов. Дана оценка влияния внутренних нагрузок в слое на контактные напряжения, возникающие под штампом.

Моделирование волновых процессов в сплошных средах, взаимодействующих с поверхностными и заглубленными объектами, приводит к динамическим смешанным задачам. Большой интерес у современных исследователей вызывают задачи о колебаниях упругих сред, вызванных вибрирующими источниками, расположенными как на границе, так и внутри среды. Это обусловлено, широким использованием указанных задач в различных областях механики, геофизики, вибросейсмо-разведки, фундаментостроения, акустоэлектроники, дефектоскопии.

Рассматриваются две осесимметричные задачи о колебаниях абсолютно жесткого невесомого круглого штампа на поверхности упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием. На штамп радиуса a действует гармоническая вертикальная нагрузка $\mathbf{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$, приложенная в центре. В области контакта $\{r \leq a, z = 0\}$ трение отсутствует. Функция распределения контактных напряжений $q_*(r)$ под штампом неизвестна. В слое толщины h , в первом случае на поверхности слоя по окружности радиуса r_0 , расположена система заглублённых вертикально ориентированных включений длины h_0 , во втором случае на глубине h_0 слоя расположена система горизонтально ориентированных включений длины r_0 . В обоих случаях система включений совершает (в общем случае) вертикальные и горизонтальные колебания. Распределенная по глубине в первом случае и длине во втором нагрузка (включения) моделируется компонентами локализованной объемной силы X_r, X_z , с помощью дельта-функции Дирака.

В результате решения задач, подробно описанного в работах [1, 2], получено аналитическое выражение для вычисления контактных напряжений под штампом

$$q_*(r) = q_1(r) + q_2(r),$$

где $q_1(r) = q(r, 0)$ получено методом фиктивного поглощения В.А. Бабешко и О.Д. Пряхиной [3, 4] из решения интегрального уравнения

$$\int_0^a k(r, \tau) q(\tau, \eta) \tau d\tau = J_0(\eta r), \quad 0 \leq \tau \leq a,$$

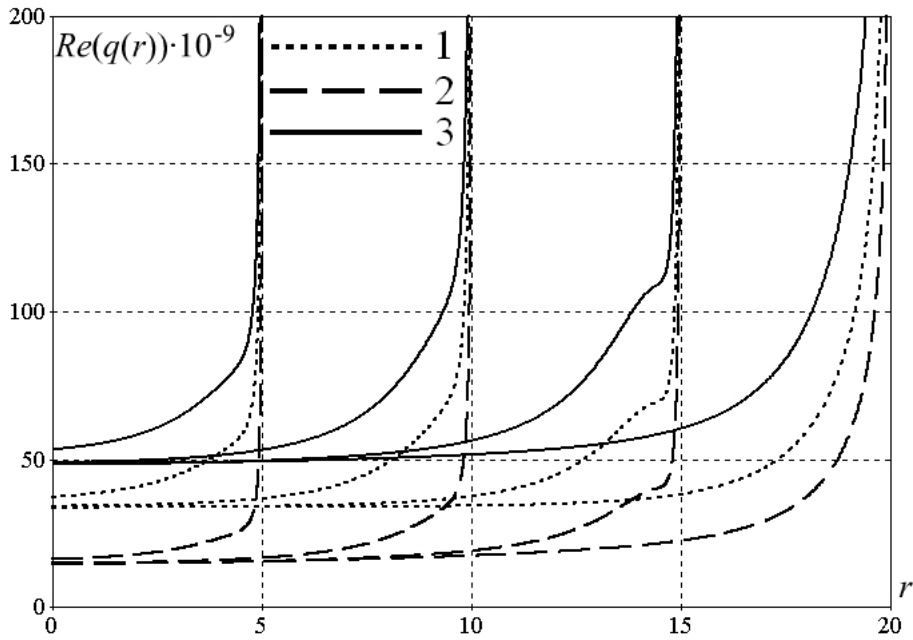


Рис. 1. $a = 5, 10, 15, 20$ м, $r_0 = 20$ м, $h_0 = 10$ м, **1** – $q_1(r)$; **2** – $q_2(r)$; **3** – $q_*(r)$

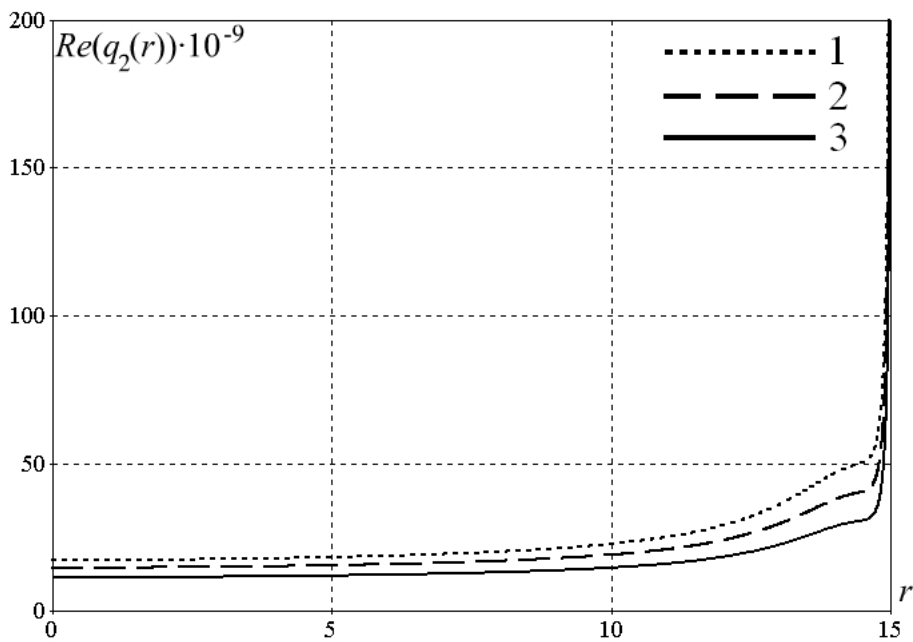


Рис. 2. $a = 15$ м, $r_0 = 20$ м, **1** – $h_0 = 2$ м; **2** – $h_0 = 10$ м; **3** – $h_0 = 18$ м

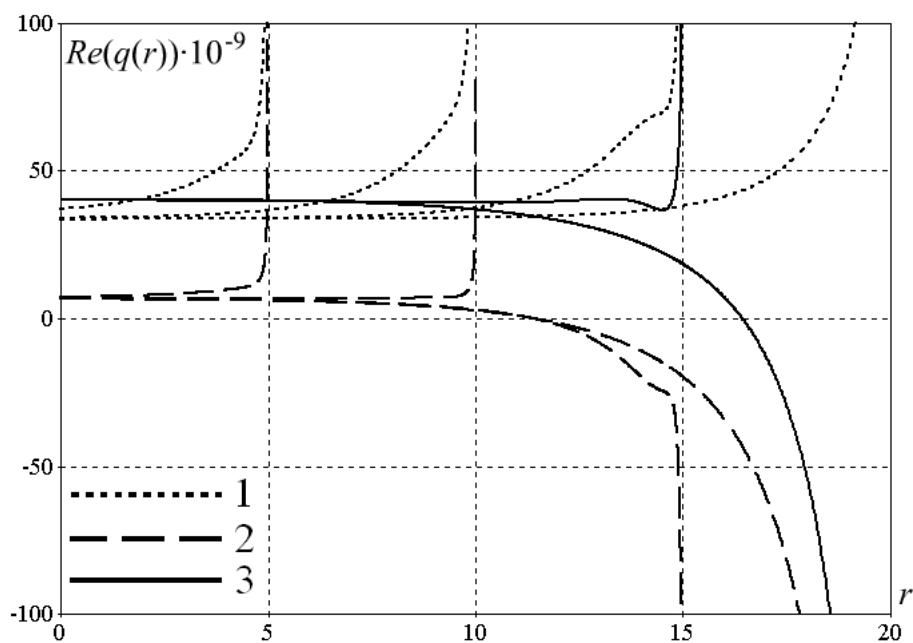


Рис. 3. $a = 5, 10, 15, 20$ м, $r_0 = 20$ м, $h_0 = 10$ м, **1** – $q_1(r)$; **2** – $q_2(r)$; **3** – $q_*(r)$

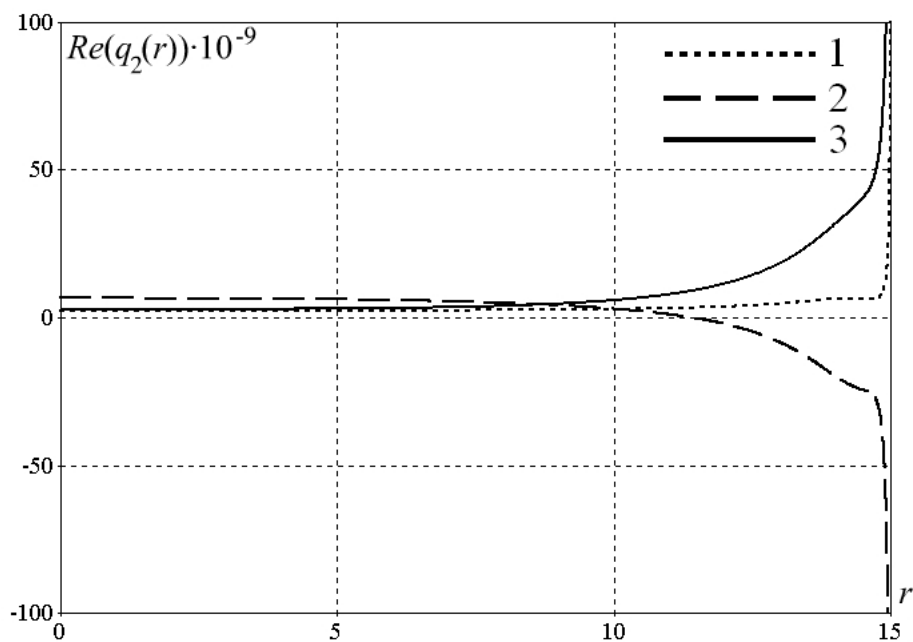


Рис. 4. $a = 15$ м, $r_0 = 20$ м, **1** – $h_0 = 2$ м; **2** – $h_0 = 10$ м; **3** – $h_0 = 18$ м

построенного для единичной правой части;
 в первом случае

$$q_2(r) = -\pi i \sum_{k=1}^m \left(\frac{\bar{Q}_2(\zeta_k)}{\bar{\Delta}'(\zeta_k)} q(r, 0) J_0(\zeta_k r) \zeta_k H_0^{(1)}(\zeta_k r_0) \right)$$

– контактные напряжения под штампом, создаваемые вертикально ориентированными включениями в случае их вертикальных колебаний ($X_z = f_z(z) \delta(r - r_0)$);
 во втором случае

$$q_2(r) = -\pi i \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{Q}_2(\zeta_k)}{\hat{\Delta}'(\zeta_k)} q(r, 0) J_0(\zeta_k r) \left(\int_0^{r_0} f_z(r) r H_0^{(1)}(\zeta_k r) dr \right) \zeta_k \right)$$

– контактные напряжения под штампом, создаваемые горизонтально ориентированными включениями в случае их вертикальных колебаний ($X_z = f_z(r) \delta(z + h_0)$).

Численные расчеты проводились для единичной нагрузки на включениях и следующими параметрами: $\rho = 1.4 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = 0.2 \cdot 10^3$ м/с², $c_2 = 0.12 \cdot 10^3$ м/с², $h = 20$ м, $\nu = 2.0$ Гц. Использовалась линейная функция распределения напряжений вдоль включений. Полученные результаты позволяют утверждать, что в первом случае, вертикально ориентированные включения, в зависимости от параметров, либо усиливают, либо ослабляют контактные напряжения под штампом (рис.1) и на низких частотах мало влияют на характер напряжений (рис.2). Изменение характера распределения контактных напряжений под штампом зависит от совокупности параметров: частоты колебаний и размеров источников.

Во втором случае, для горизонтально ориентированных включений, численный анализ показал, что характер распределения контактных напряжений под штампом зависит не только от частоты колебаний, но и от размеров источников (рис.3–4).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (08-08-00144, 06-08-00671), РФФИ_р_юг (06-01-96600, 06-01-96639), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

Список литературы

- [1] *Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Евдокимов А.А., Капустин М.С.* Анализ контактных напряжений в задаче о действии штампа на упругий слой с вертикально ориентированными включениями / Современные проблемы механики сплошной среды. Труды девятой Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2005. Т.2. С. 201–205.
- [2] *Капустин М.С.* Расчет контактных напряжений в задаче о действии штампа на упругий слой с горизонтально ориентированными включениями / Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах. Труды V Всероссийской научной конференции молодых ученых и студентов. Краснодар, 2008. Т.2. С. 115–116.

- [3] *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
- [4] *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

Капустин М.С. *Analysis of influence of internal loadings in the layer on the contact stresses, arising under the stamp.* Axis symmetrical contact problem about joint fluctuation of a weightless stamp on surfaces layer, with the absence of friction in the field of contact and system of rigid inclusions (vertically or horizontally focused) with the set contact, was explored. Integral equations and their approximate solutions were received, numerical calculations and analysis of this results were organized. Estimation of influence of internal loadings in a layer on the contact stresses, arising under a stamp is given.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ТРУБКАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Кизилова Н.Н.

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина

Дан краткий обзор теоретических и экспериментальных данных о распространении и отражении волн в трубках с переменным диаметром, толщиной и жесткостью стенки в приложении к артериальной и дыхательной системам. Приводятся и обсуждаются постановки соответствующих задач для плоских и осесимметричных волн. Изложены результаты исследования распространения цилиндрических волн по неоднородным вязкоупругим трубкам.

Трубки с переменными диаметром и свойствами стенки свойствами лежат в основе строения кровеносной и дыхательной систем человека и животных. При распространении по таким трубкам волн давления и скорости, которые генерируются сокращающимся сердцем, имеют место отражения волн на участках с неоднородными механическими свойствами стенки, в местах сужений, расширений и ветвлений трубок. Так, аорта и крупные артерии испытывают значительные (до 50%) сужения, что следует принимать во внимание при расчетах параметров пульсовых волн в артериях. Поскольку теория пульсовых волн в артериях базируется на модели о распространении малых возмущений в заполненных жидкостью однородных цилиндрических трубках кругового сечения [1], следует оценить меру погрешности этой модели в применении к анализу пульсовых волн в артериях, которые могут быть существенно неоднородны и суживаться. Кроме этого, анализ падающей и отраженной компонент пульсовой волны может быть успешно использован для обнаружения участков стеноза или закупорки артерий [2-5], поэтому представляет интерес выяснение вопроса, не может ли маскироваться или, наоборот, неоправданно усиливаться вклад пульсовой волны, отраженной на участке стеноза (аневризмы) или атеросклеротической бляшки, будучи наложенным на волну, отраженную вследствие естественного физиологического сужения артерии.

Одна из первых работ на эту тему была выполнена для случая, когда просвет, толщина или упругость стенки артерии изменяются достаточно медленно, так что характерная длина L^* изменений много больше длины волны λ , а эволюция волны давления вдоль трубки исследовалась методом ВКБ [6]. В рамках линейной одномерной теории пульсовых волн давление P и объемный расход Q жидкости определяются уравнениями [1]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -Yc \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{Y}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

где Y – волновая проводимость трубки, c – скорость волны. В случае, если $Y=Y(x)$ и $c=c(x)$ изменяются вдоль x достаточно медленно, так что можно ввести новую «медленную» продольную координату $x^0 = \varepsilon x$, $\varepsilon \ll 1$, то решение (1) может быть

получено в виде разложений по степеням малого параметра ε . Уравнение для нулевого приближения суть волновое уравнение, а уравнение для второго приближения содержит дополнительные слагаемые в правой части, которые определяют возможность возникновения резонансов.

Хотя результаты оценок, полученных на основе описанного подхода, соответствуют результатам измерений [1,7], условие $L^* \gg \lambda$ не выполняется в артериях, поскольку λ превосходит характерный размер тела [7]. В [8] была исследована модель суживающейся артерии в виде ступенчатой трубки с постепенно уменьшающимся просветом, основанная на линеаризованной одномерной модели движения крови по трубке переменного сечения:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A_0 u) = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad p(A, x) = p_0 + k(A - A_0)$$

где $A(t, x)$ – площадь сечения трубки, $A_0(x)$ – начальная невозмущенная площадь сечения, u – аксиальная скорость, $p(t, x)$ – давление жидкости в трубке, p_0 – давление в трубке в невозмущенном состоянии (расправляющее давление), $k(x) = \partial p / \partial A |_{p=p_0}$. Эта модель может быть обобщена на случай когда радиус трубки монотонно изменяется в аксиальном направлении ($R=R(x)$):

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \sqrt{\frac{Y(0)}{Y(x)}} P^0 e^{i\omega t} \left(e^{-\int_0^x \gamma(x) dx} + \Gamma e^{-\int_0^L \gamma(x) dx - \int_x^L \gamma(x) dx} \right), \\ Q(t, x) &= \sqrt{Y(0)Y(x)} P^0 e^{i\omega t} \left(e^{-\int_0^x \gamma(x) dx} - \Gamma e^{-\int_0^L \gamma(x) dx - \int_x^L \gamma(x) dx} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где $Y(x) = S(x) (\rho c(x))^{-1}$, Γ – коэффициент отражения волн, равный отношению амплитуд отраженной и падающей волн, $\gamma(x) = \lambda(x) + i\omega/c(x)$, $\lambda(x)$, $c(x)$ и ω – коэффициент затухания, скорость и частота волны.

Отличие суживающихся трубок от трубок постоянного сечения состоит в том, что схлопывающийся участок в первом случае располагается примерно посередине трубки, а во втором – ниже по течению, ближе к концу трубки [7]. Для трубок с постоянным внутренним диаметром и переменной жесткостью стенки было обнаружено новое семейство колебательных мод, которое в податливых трубках всегда расположено на схлопнувшемся участке с наименьшей площадью просвета. Расчеты для трубок с постепенно увеличивающейся толщиной стенки выполнялись в приложении к дыхательным путям [8,9]. Было показано, что эффект ограничения потока (flow limitation), характерный для схлопывающихся трубок, в трубках с переменной жесткостью не определяется однозначно величиной трансмурального давления p_{tm} , как в случае однородных трубок. При этом для течения газа были найдены три различных режима течения при одной и той же величине p_{tm} . В этом случае координата участка схлопывания становится новой динамической переменной, подлежащей определению [8]. Было показано, что в случае переменной геометрии и жесткости стенки трубки появляются новые режимы течений, колебаний стенки трубки и диапазонов генерируемых звуков [9]. Большой интерес представляет сравнение возможностей одномерных и двумерных моделей пульсо-

вых волн, которые могут использоваться для расчетов закономерностей распространения волн в моделях реальных артериальных и дыхательных систем, насчитывающих десятки тысяч трубок.

Исследуем распространение цилиндрических волн в неоднородных трубках на основе модели, учитывающей вязкость жидкости и вязкоупругость стенки трубки. Постановка задачи включает уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, заполняющей трубку, уравнений классической теории вязкоупругости для стенки трубки и обобщенного уравнения Кельвина-Фойхта для материала стенки:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} &= -\frac{1}{\rho_f}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}, \\ \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div}\hat{\sigma}, \quad \lambda_1 \frac{\delta \hat{\sigma}}{\delta t} + \hat{\sigma} &= 2G \left(\hat{e} + \lambda_2 \frac{\delta \hat{e}}{\delta t} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

где \vec{v} , p , ρ_f и ν – скорость, гидростатическое давление, плотность и кинематическая вязкость жидкости, \vec{u} – перемещение стенки, ρ_s и p_s – плотность материала и гидростатическое давление в стенке, G , $\lambda_{1,2}$ и \hat{e} – модуль сдвига, времена релаксации и релаксации и тензор деформаций для стенки. На границе раздела жидкость-стенка выполняются условия непрерывности скоростей перемещений, нормальных и тангенциальных компонент напряжений в стенке и в жидкости:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad v_r = 0, \quad |v_x| < \infty, \\ r = R_1 : \quad v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad -p + 2\mu_f \frac{\partial v_r}{\partial r} = \sigma_n, \quad \mu_f \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \sigma_\tau \end{aligned} \quad (4)$$

где n, τ – нормальное и касательное направление по отношению к невозмущенной стенке трубки.

На внешней поверхности трубки $r = R_2 = R_1 + h$ задавались условия закрепления стенки $\vec{u} = 0$ (для глубоких артерий), отсутствия напряжений $\vec{\sigma}_n = 0$ (поверхностные артерии) или наличия связи между напряжениями и перемещениями стенки:

$$\rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu_m \frac{\partial u}{\partial t} + E_m u = 0$$

где ρ_m , μ_m и E_m – плотность, вязкость и упругость окружающих трубку тканей. В сечении $x = 0$ задавалось разложение входной волны в ряд Фурье, а на конце трубки $x = L$ – условие отражения волны от нижележащей системы трубок с заданной комплексной волновой проводимостью Y_t .

Поставленная задача решалась двумя способами. В первом трубка считалась ступенчатой (Рис.1а), так что задача (3)-(4) рассматривалась для однородной трубки, а затем записывались условия отражения волн на каждой ступеньке, что давало возможность найти коэффициенты в выражениях для давления и скорости движения жидкости и перемещения стенки трубки. Во втором случае параметры трубки изменялись медленно ($G = G(x)$, $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(x)$, $h = h(x)$, $R_1 = R_1(x)$) и решение задачи (3)-(4) было найдено в виде разложений по малому параметру

u_r^0/R_1 , как это было сделано в [12] для однородной трубки постоянного сечения. При этом амплитуды гармоник выражались, как и в (2), через интегралы от коэффициента распространения волны, переменного вдоль трубки.

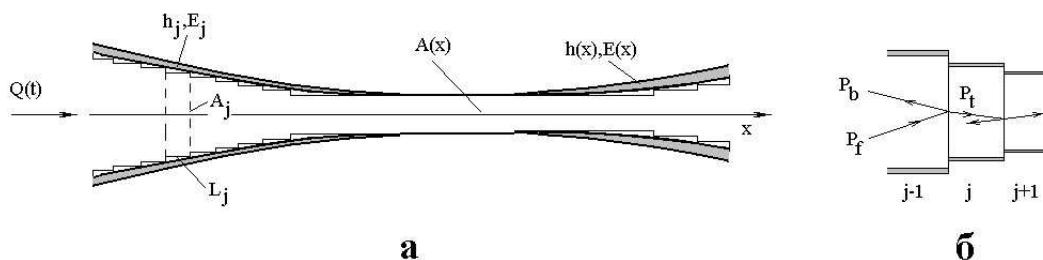


Рис. 1. Представление трубки с переменным сечением и свойствами стенки в виде ступенчатой трубки (а) и схема отражения волн на j -й ступеньке модели (б).

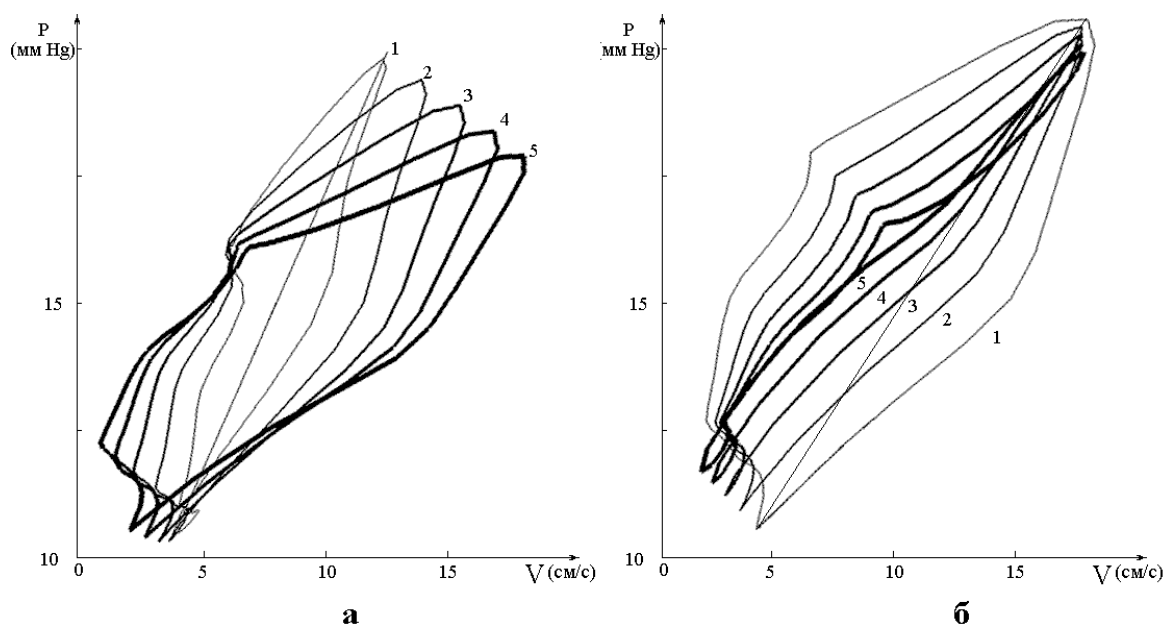


Рис. 2. Зависимости $P(V)$ для разных значений $E = 10^7; 5 \cdot 10^6; 10^6; 5 \cdot 10^5; 10^5$ (кривые 1-5); $h = 0.2d$ (а) и $h = 0.05d$ (б).

Для численных расчетов задавались величины R_j, h_j, E_j , соответствующие крупным и средним артериям и венам человека и ряда животных [7]. Результаты расчетов кривых $P(V)$ для случая $R_1 = R_0 + (R_L - R_0)x/L$ приведены на Рис.2. Следует отметить, что изменение площади, ограниченной кривой, и угла наклона ее продольной оси больше связаны со значениями $Re(Y_t), Im(Y_t)$, что соответствует результатам [4]. Сравнение численных расчетов, выполненных с учетом и без учета сужения и неоднородности материала стенки показало, что при вычислении поля скоростей и давлений в жидкости, перемещений стенки, волновой проводимости трубки в целом и коэффициента отражения волн результаты несколько отличаются, причем тем существеннее, чем более выражено сужение. Таким образом, при расчетах распространения и отражения пульсовых волн в аорте и ее

крупных ответвлениях следует принимать во внимание сужение и неоднородность стенки для получения результатов, сопоставимых с данными экспериментов.

Список литературы

- [1] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1980. 320 с.
- [2] *Кизилова Н.Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел // Известия РАН. Сер.МЖГ. 2003. № 5. С. 129–139.
- [3] *Кизилова Н.Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел с анастомозами // Мат.моделирование. 2003. т.15, № 6. С. 65–71.
- [4] *Кизилова Н.Н.* Исследование зависимостей давление-расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах // Акустич. вестник. 2004. т.7, № 1. С. 50–61.
- [5] *Кизилова Н.Н.* Новые направления и перспективы теории пульсовых волн в артериях //Современные проблемы биомеханики. М.: Изд-во Московского университета, 2006. Вып. 11. С. 44–63.
- [6] *Taylor M.G.* Wave travel in a non-uniform transmission line, in relation to pulses in arteries //Phys. Med. Biol. 1965. v.10. p. 539–550.
- [7] *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов М.: Мир, 1983. 400 с.
- [8] *Shoerenberg M.* Pulse wave propagation in elastic tubes having longitudinal changes in area and stiffness // Biophys.J. 1968. v.8. p. 991–1008.
- [9] *Bertram CD, Chen W.* Aqueous flow limitation in a tapered-stiffness collapsible tubes // J. Fluids Struct. 2000. vol.14. p. 1195–1214.
- [10] *Kamm RD, Patel NR, Elad D.* On the effect of flow-induced flutter on flow rate during a forced vital capacity maneuver // FASEB J. 1993. vol.7. p.11.
- [11] *Shim EB, Kamm RD.* Numerical simulation of steady flow in a compliant tube or channel with tapered wall thickness // J. Fluids Struct. 2002. vol.16. p. 1009–1027.
- [12] *Кизилова Н.Н.* Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала //Известия РАН. Сер.МЖГ. 2006. № 3. С. 125–139.

Kizilova N.N. *Wave propagation in nonuniform tubes with variable cross-sections* . A brief review of theoretical and experimental data on the wave propagation and reflection in tapered wall thickness and wall-stiffness distensible tubes in application to blood circulation and respiration systems is given. The corresponding problems for the plane and axisymmetric waves are formulated and discussed. Original results on the axisymmetric wave propagation in wall thickness and wall-stiffness viscoelastic tubes with variable cross-section are presented.

ПРОЯВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Костандов Ю.А., Локшина Л.Я.

*Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, Симферополь,
АР Крым, Украина*

Проведены численные исследования процесса разрушения при резании известнякового и силикатного материалов в зависимости от схемы и параметров резания. Выполнен сравнительный анализ усилия резания и распределения разрушенных элементов среды при резании материала как одиночными резцами, так и группой резцов. Установлены основные закономерности влияния взаимного расположения резцов и последовательности их воздействия на энергоемкость разрушения материалов при их резании. Показано, что эффективность работы группы резцов зависит от величины отношения значений продольного шага резания и глубины резания, что является проявлением динамического характера разрушения горных пород при их резании.

Использование высокопроизводительных и эффективных технологий разработки горных пород невозможно без создания энергосберегающих способов и приемов разрушения породного массива. Среди известных способов такого разрушения наиболее широкое распространение получил способ, основанный на принципе резания. Он обладает рядом существенных достоинств по простоте и стоимости машин, малой энергоемкости и экономичности добычи полезного ископаемого.

Во многих работах по исследованию процессов разрушения горных пород решаемые модельные задачи рассматривались в большинстве случаев в плоской постановке и, как правило, без учета динамических эффектов. Причина этого состоит в трудности аналитического и экспериментального решения данной проблемы ввиду сложности учета реальных процессов, которые происходят на фронте разрушения и характеризуются многими факторами, изменяющимися во времени и пространстве.

В настоящей работе проведены численные исследования процесса разрушения при резании известнякового и силикатного материалов в зависимости от схемы и параметров резания. Численный расчет НДС материала при резании проводился модифицированным методом конечных элементов [1, 2]. Для описания процесса разрушения использовались феноменологическая модель динамического разрушения твердого тела и двухуровневый критерий разрушения, учитывающий рост поврежденности материала при его нагружении [3].

Рассматривалась задача о резании на глубину h образца в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $6 \times 8 \times 20$ см. Нижняя грань образца была жестко закреплена. Резец шириной $b = 2$ см имел постоянный вектор скорости v , направленный вдоль длинной грани образца.

При проведении численных расчетов варьировались угол резания α (60° и 90°), скорость резания v (3 - 12 м/с), глубина резания h (0.5 - 3 см). Ввиду того, что длительность исследуемого процесса и требуемое временное разрешение различаются

на несколько порядков, рассматривалась начальная стадия процесса разрушения продолжительностью до 10^{-3} с.

Изучение процесса разрушения горной породы состояло в исследовании влияния параметров резания на НДС образца, усилие резания, развитие в объеме и времени разрушения материала образца вблизи кромки режущего инструмента. Для этого при резании с выровненной свободной поверхности и срезании имеющихся на ней целиков определялись действующее усилие на передней грани резца $P(t)$, количество разрушенных элементов среды в текущий момент времени $n(t)$ и за время взаимодействия с резцом $N_s(t)$, а также распределение разрушенных элементов среды в сечениях образца, параллельных и ортогональных направлению резания.

Оказалось, что усилие резания, определяемое как действующее усилие на передней грани резца $P(t)$, первоначально возрастает, а затем сохраняет определенный уровень значений, испытывая при этом значительные осцилляции. Из сопоставления зависимостей $P(t)$ и $n(t)$ следует, что уменьшения величины $P(t)$ происходят при разрушении элементов материала и могут быть объяснены сбросом накопленной им энергии упругой деформации.

Установлено увеличение величины $P(t)$ с уменьшением v при неизменном значении h , либо с ростом величины h при неизменном значении v , что полностью соответствует данным, полученным экспериментально и приведенных в [4].

Из полученных результатов, в частности, следует, что при резании материала со скоростью $v = 10$ м/с амплитудное значение усилия резания $P(t)$ увеличивается от 220 до 280 относительных единиц с ростом глубины резания h от 1.5 см до 3 см. Увеличивается при этом и скорость нарастания величины $P(t)$. Величина удельной энергоемкости разрушения при этом уменьшается в 1.5 раза.

Исследование распределения разрушенных элементов среды в сечениях (слоях), параллельных и ортогональных направлению резания, позволило изучить развитие разрушения среды вблизи кромки резца не только во времени, но и в объеме. Некоторые из результатов, полученных при проведении численных расчетов разрушения элементов среды в известняковом материале, приведены на рис. 1. На нем черными кружками показаны разрушенные элементы среды.

Из рис. 1а следует, что при срезании целиков в известняковом материале со скоростью $v = 10$ м/с, глубиной $h = 1.5$ см и углом резания $\alpha = 90^\circ$ разрушение элементов материала на начальном этапе происходит и вблизи режущей кромки резца, и вблизи свободной поверхности. Причем линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, составляет угол $\beta \approx 55^\circ$ с передней гранью образца.

С увеличением h до 3 см (рис. 1б) разрушение элементов материала на начальном этапе происходит вблизи режущей кромки резца по линии, составляющей угол $\beta \approx 35^\circ$ с передней гранью образца до глубины (расстояния до свободной поверхности) $H \approx 2.0$ см. Затем линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, резко изменяет угол β практически до нуля.

Из этого следует важный вывод относительно резания материалов группой резцов. Положим, что рассматриваемые случаи соответствуют срезанию целиков, образованных двумя резцами, опережающими задний на величину s . Максимальная эффективность резания соответствует условию взаимодействия (наложения)

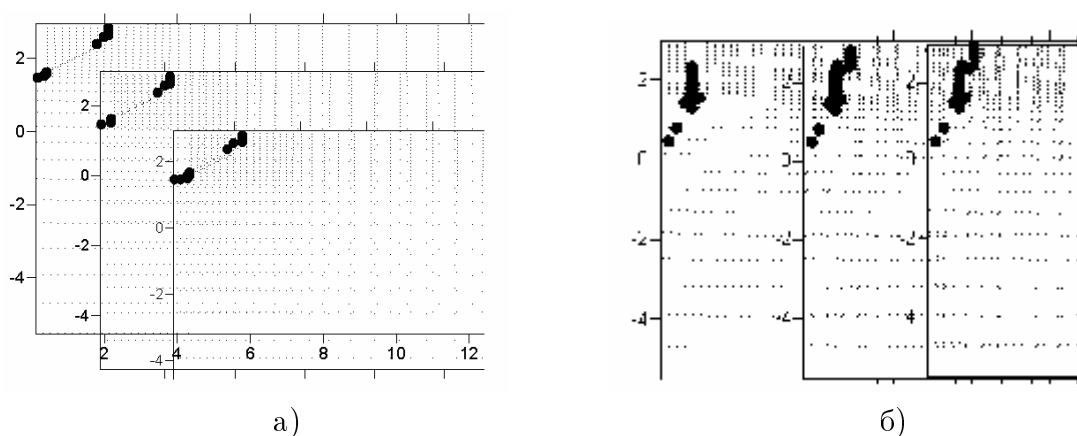


Рис. 1. Разрушение элементов среды при срезании челиков ($v = 10$ м/с, $b = 2$ см, $\alpha = 90^\circ$) в известняковом материале в моменты времени 200, 400, 600 мкс: а) $h = 1.5$ см; б) $h = 3.0$ см.

НДС, создаваемого задним резцом, и (на) НДС, создаваемого передними резцами. В свою очередь, это условие будет реализовано тогда, когда передние резцы опережают задний резец на величину, равную расстоянию от передней грани образца до места излома линии, вдоль которой происходит разрушение элементов среды. При условии равенства глубин резания передних и заднего резцов это означает приблизительное равенство величин опережения s и глубины резания h . Последнее определяется динамическим характером процесса разрушения и полностью соответствует выводу, сделанному в [4], о соотношении величин s и h , при котором обеспечивается наименьшее значение удельной энергоемкости разрушения.

Пример результатов проведения численных расчетов разрушения элементов среды в образце из силикатного материала приведен на рис. 2. Из этого рисунка следует, что при срезании челиков в силикатном материале со скоростью $v = 10$ м/с, глубиной $h = 1.5$ см и углом резания $\alpha = 90^\circ$ разрушенные элементы среды уже через 300 мкс полностью отделяют от образца его часть, прилегающую к резцу. При этом линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, составляет угол $\beta \approx 70^\circ$ с передней гранью образца на протяжении своей длины от места контакта с вершиной резца до глубины $H \approx 0.5$ см. Здесь она отклоняется в сторону свободной поверхности и изменяет угол β до нуля.

С увеличением глубины резания до 3 см разрушение элементов материала на начальном этапе происходит, как это видно из рис.2а, вблизи режущей кромки резца. Линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, составляет угол $\beta \approx 22^\circ$ с передней гранью образца на протяжении своей длины от места контакта с вершиной резца до глубины $H \approx 1.5$ см и расстояния до передней грани образца $L \approx 0.5$ см. Локальная область материала с этими координатами характеризуется концентрацией разрушенных элементов среды, повышающейся с продолжением нагружения. В этой локальной области линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, отклоняется от своего первоначально направления до угла $\beta \approx 65^\circ$. Этот угол наклона она сохраняет неизменным вплоть до выхода на свободную поверхность на расстоянии $S \approx 4.0$ см от передней

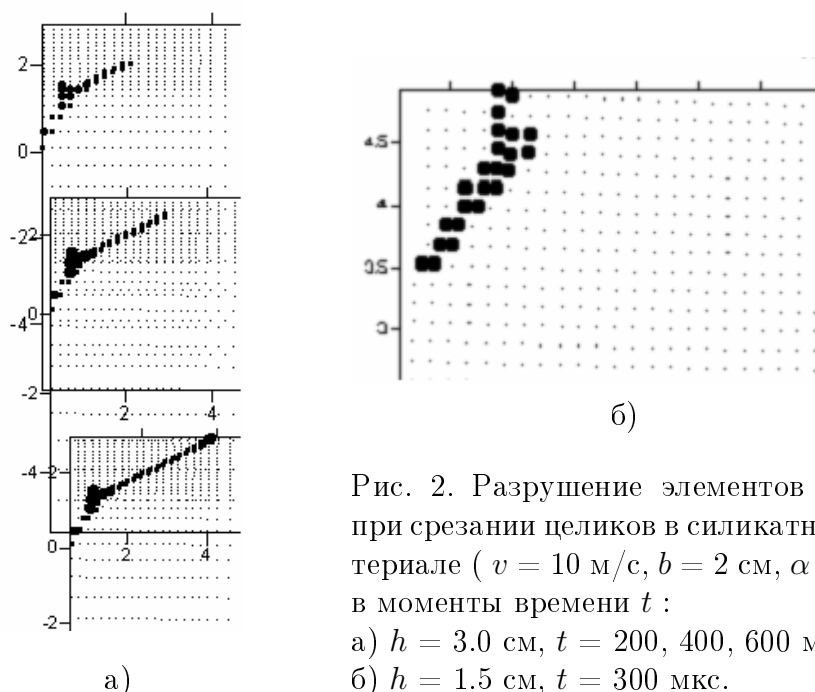


Рис. 2. Разрушение элементов среды при срезании целиков в силикатном материале ($v = 10$ м/с, $b = 2$ см, $\alpha = 90^\circ$) в моменты времени t :
 а) $h = 3.0$ см, $t = 200, 400, 600$ мкс;
 б) $h = 1.5$ см, $t = 300$ мкс.

границы образца.

Рассмотрим изложенные данные с точки зрения возможности повышения эффективности резания материалов группой резцов, как это было сделано ранее для случая резания известнякового материала.

Взаимодействие НДС, создаваемого задним резцом, с НДС, создаваемым передними резцами, возможно, как видно из рис. 2, при условии опережения передними резцами заднего резца на величину $s < S$. В рассматриваемом случае $h = 3.0$ см, $S \approx 4.0$ см. Поэтому $\gamma_m = s/h \approx 1.33$. Это значение γ не намного отличается от единицы и тем самым, как и в случае резания известнякового материала, соответствует выводу, сделанному в [4], о величине γ_m , при которой обеспечивается наименьшее значение удельной энергоемкости разрушения.

Заметим, что выполнение в рассматриваемом случае условия $\gamma_m \approx 1,33$ обеспечивает наименьшее значение удельной энергоемкости разрушения, но при этом передние резцы находятся на таком расстоянии от заднего резца, при котором линия, вдоль которой происходит разрушение элементов среды, уже выходит на свободную поверхность образца. Следовательно, в разрушенном материале будет значительна доля мелких фракций, что является нежелательным фактором. Поэтому для обеспечения максимальной эффективности резания материалов группой резцов следует и для этого случая принять $\gamma_m \approx 1$.

Таким образом, установлено, что эффективность работы группы резцов зависит от величины отношения значений опережения передними резцами заднего резца к глубине резания. Причина этого состоит в проявлении динамического характера разрушения горных пород при их резании, которое при указанном условии реализуется в максимальном взаимодействии НДС заднего резца с НДС передних резцов.

Несмотря на то, что была рассмотрена совершенно конкретная схема резания,

проведенные исследования позволили выявить основные закономерности влияния взаимного расположения резцов и последовательности их воздействия на энергоемкость разрушения горной породы. В свою очередь, это предоставляет возможность разработки рекомендаций по определению технологических параметров процесса инструментального резания горных пород, обеспечивающих его наименьшую удельную энергоемкость.

Список литературы

- [1] Локшина Л.Я., Шиповский И.Е. Применение модели упруго-пластического пористого тела к исследованию напряженно-деформированного состояния взаимодействующей системы «инструмент-горная порода» // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. Праць. Вип. 30. –Дніпропетровськ: ІГТМ НАН України, 2001. С. 71–76.
- [2] Шиповский И.Е. Программа расчета напряженно-деформированного состояния и разрушения материалов // Свидетельство №17852 от 07.09.2006 о регистрации авторского права на компьютерную программу. -Украина. -2006.
- [3] Костандов Ю.А., Шиповский И.Е. Двухуровневый критерий разрушения материалов // Надежность и долговечность машин и сооружений. Межд. сборник. Вып.29 - 2007. С. 169–175.
- [4] Костандов Ю.А., Медведев В.С. Энергоемкость разрушения материалов при тангенциальном резании // Материалы XVII Межд. науч. школы "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках". Алушта, Украина, 17-23 сентября 2007 г. -Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2007. С. 146–148.

Kostandov Yu.A., Lokshina L.Ya. *Development of dynamic character of fracture of mining rocks.* Numerical researches of fracture process at calcareous and silicate materials in dependence on the circuit and parameters of cutting are executed. The comparative analysis of cutting effort and distribution of the destroyed elements of environment at cutting as single cutters and group of cutters is carried out. The basic regularity of influence of a positional relationship of cutters and sequences of their affecting on power consumption of fracture of materials at their cutting are established. It is shown, that efficiency of effect of cutters group depends on magnitude of a ratio of values of a cutting longitudinal spacing and a cutting depth. It is development of dynamic character of fracture of mining rocks at their cutting.

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

Лавриненко В. В.

ООО «Техно-Арт», г. Ростов-на-Дону

В работе исследована задача о движении пластины-полосы из термоэлектродупругого материала, в которой в результате воздействия теплового нагружения на лицевых поверхностях наводится разность потенциалов, определяемая далее из дополнительного условия включения элемента в цепь. Построена упрощенная модель в пространстве изображений по Лапласу; исследованы свойства решений. В работе показано, что на начальном этапе структура потенциала определяется величиной, зависящей только от параметра, который характеризует теплоэлектрическую связанность задачи.

Введение. Математическую основу постановок краевых задач термоэлектродупругости [6] составляют уравнения термопьезоэлектричества, сформулированные Миндлиным [7] в начале 60-х годов прошлого столетия. Сложность постановки задач термоэлектродупругости в общем случае приводит к необходимости построения более простых моделей при решении конкретных начально-краевых задач. В задачах для тонкостенных элементов, имеющих важное приложение при расчете температурных пьезо- и пиродатчиков, дополнительно возникает малый параметр тонкостенности и для корректной формулировки упрощенных моделей необходимо использовать вариационную постановку [3], [4].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении пластины-полосы из термоэлектродупругого материала класса бпм и построим упрощенную модель в пространстве изображений по Лапласу.

Пластина находится в состоянии плоской деформации:

$$\hat{u}_2 = 0, \quad \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_2} = 0 \quad . \quad (1)$$

Сечение пластины плоскостью $x_2 = const$ есть прямоугольник $\Omega [-l, l] \times [-H, H]$, в результате приложенной к границам $x_3 = \pm H$ тепловой нагрузки наводится разность потенциалов:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{13}|_{x_3=\pm H} = \hat{\sigma}_{33}|_{x_3=\pm H} = 0; \hat{\varphi}|_{x_3=\pm H} = \pm \hat{\varphi}_0; \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm H} = \hat{q}^\pm; \\ \hat{\sigma}_{13}|_{x_1=\pm l} = \hat{\sigma}_{11}|_{x_1=\pm l} = 0; \hat{D}_1|_{x_1=\pm l} = 0; \hat{q}_1|_{x_1=\pm l} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой постановке \hat{q}^\pm – заданные функции от x_1 , $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{F}_i = 0$, $\hat{w} = 0$, $\hat{I} = 0$, а неизвестный потенциал $\hat{\varphi}_0$ определяется из дополнительного условия для тока при включении элемента в электрическую цепь:

$$\int_{-l}^l \hat{D}_3(x_1, H) dx_1 = 0. \quad (3)$$

Для получения упрощенной модели деформирования пластины используем определяющие соотношения для линейной термоэластостатической среды [6], σ_{33} считаем равным нулю. Учитывая малость параметра ε , примем гипотезы о строении физических полей, аналогичные гипотезам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(x_1, s) &= \hat{u}_{10}(x_1, s) - x_3 \hat{u}'_{30}(x_1, s), & \hat{u}_3(x_1, s) &= \hat{u}_{30}(x_1, s), \\ \hat{\varphi} &= \frac{x_3}{H} \hat{\varphi}_0(s), & \hat{\theta} &= \hat{T}_1(x_1, s) + \frac{x_3}{H} \hat{T}_2(x_1, s). \end{aligned} \quad (4)$$

Используем далее вариационный подход для нестационарных задач термоэластостатики аналогично [4]. Полученная в результате система естественным образом разделяется на две независимые задачи, которые условно можно назвать задачей «растяжения-сжатия» и задачей «изгиба» тонкостенного элемента. Обезразмерив систему уравнений в соответствии с концепцией, предложенной в [1], получим:

Задача 1: (растяжение-сжатие, неизвестные \hat{u}_{10} и \hat{T}_1)

$$\begin{aligned} \hat{u}''_{10} - \delta_2^2 \tilde{s}^2 \hat{u}_{10} - \delta_1 \gamma \hat{T}'_1 &= 0, & \delta_1 \gamma \tilde{s} \hat{u}'_{10} - \tilde{k}_{11} \hat{T}''_1 + \tilde{s} \hat{T}_1 &= \tilde{s} \delta_1 g \hat{\varphi}_0 - \frac{\hat{q}_1}{\varepsilon}, \\ \left(\hat{u}'_{10} - \delta_1 \gamma \hat{T}_1 \right) \Big|_{x=\pm 1} &= -e \hat{\varphi}_0, & \hat{T}'_1 \Big|_{x=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача 2: (изгиб, неизвестные \hat{u}_{30} и \hat{T}_2)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \hat{u}^{(4)}_{30} - \varepsilon^2 \delta_2^2 \tilde{s}^2 \hat{u}''_{30} + 3\delta_2^2 \tilde{s}^2 \hat{u}_{30} + \varepsilon \delta_1 \gamma \hat{T}''_2 &= 0, \\ -\varepsilon \delta_1 \gamma \tilde{s} \hat{u}''_{30} - \tilde{k}_{11} \hat{T}''_2 + \left(\tilde{s} + \frac{3}{\varepsilon^2} \right) \hat{T}_2 &= -\frac{3\hat{q}_2}{\varepsilon}, \\ \left(\varepsilon \hat{u}''_{30} + \delta_1 \gamma \hat{T}_2 \right) \Big|_{x=\pm 1} &= 0, & \hat{T}'_2 \Big|_{x=\pm 1} &= 0, & \left(\hat{u}'''_{30} - \delta_2^2 \tilde{s}^2 \hat{u}'_{30} \right) \Big|_{x=\pm 1} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

где $q_{1,2} = (q^+ \pm q^-)/2$.

Дополнительное условие (3) принимает вид:

$$\int_{-1}^1 \left(e \left(\hat{u}'_{10} - \varepsilon \hat{u}''_{30} \right) - \hat{\varphi}_0 + \delta_1 g (\hat{T}_1 + \hat{T}_2) \right) dx_1 = 0. \quad (7)$$

Отметим, что в результате обезразмеривания в краевую задачу входят два малых параметра – δ_1 , характеризующий связанность температуры с электрическим потенциалом и упругим смещением, и δ_2 , являющийся отношением характерных времен звуковых и тепловых возмущений. Малость двух безразмерных параметров может быть использована при анализе краевых задач (5), (6).

Рассмотрим далее задачу «растяжения-сжатия» (5), считая \hat{q}_1 далее четной по x , \hat{q}_2 – равной нулю; тогда $\hat{T}_2 = \tilde{u}_{30} = 0$. Дополнительное условие (7) упростится и примет вид:

$$\int_{-1}^1 \left(e \hat{u}'_{10} - \hat{\varphi}_0 + \delta_1 g \hat{T}_1 \right) dx_1 = 0. \quad (8)$$

Задача 1 представляет собой связанную задачу термоупругости с источником и для ее решения могут быть использованы известные методы [5]. Чтобы определить величину наведенной разности потенциалов в общем случае изменения \hat{q}_1 , может быть использован прием, аналогичный использованному в [4].

Рассмотрим частные случаи теплового нагружения $\hat{q}_1 = q(\tilde{s})Q$, где $Q = const$, для которых получим асимптотические формулы для $\hat{\varphi}_0$ при $\tilde{s} \rightarrow \infty$, что соответствует $\tau \rightarrow 0$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_{10} = \sum_{i=1}^2 A_i P_i \operatorname{sh}(\lambda_i x), \quad T_1 = \sum_{i=1}^2 B_i P_i \operatorname{ch}(\lambda_i x) + \delta_1 g \hat{\varphi}_0 - \frac{\hat{q}_1}{\tilde{s} \varepsilon},$$

где $A_i = \delta_1 \gamma \lambda_i$, $B_i = \lambda_i^2 - \delta_2^2 \tilde{s}^2$, а P_i определяются из граничных условий:

$$P_1 = \left((\delta_1^2 g \gamma - e) \hat{\varphi}_0 - \frac{\delta_1 \gamma \hat{q}_1}{\tilde{s} \varepsilon} \right) \mu(\lambda_2) \operatorname{sh}(\lambda_2) \Delta^{-1},$$

$$P_2 = - \left((\delta_1^2 g \gamma - e) \hat{\varphi}_0 - \frac{\delta_1 \gamma \hat{q}_1}{\tilde{s} \varepsilon} \right) \mu(\lambda_1) \operatorname{sh}(\lambda_1) \Delta^{-1},$$

где $\mu(\lambda_i) = (\lambda_i^2 - \delta_2^2 \tilde{s}^2) \lambda_i$, $\Delta = \delta_1 \gamma \delta_2^2 \tilde{s}^2 (\mu(\lambda_2) \operatorname{sh}(\lambda_2) \operatorname{ch}(\lambda_1) - \mu(\lambda_1) \operatorname{sh}(\lambda_1) \operatorname{ch}(\lambda_2))$, а λ_i удовлетворяют следующему характеристическому уравнению: $A \lambda^4 + B \lambda^2 + C = 0$, где $A = \tilde{k}_{11}$, $B = -\tilde{s}(\tilde{k}_{11} \delta_2^2 \tilde{s} + 1 + \delta_1^2 \gamma^2)$, $C = -\delta_2^2 \tilde{s}^3$ и выбираются согласно формуле

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}}.$$

Наведенная разность потенциалов определится из дополнительного условия (8) следующим образом:

$$\hat{\varphi}_0 = \frac{\delta_1 \hat{q}_1}{\tilde{s} \varepsilon} \frac{g \Delta + \gamma P}{(\delta_1^2 g^2 - 1) \Delta + (\delta_1^2 \gamma g - e) P} = \frac{\hat{q}_1}{\varepsilon} W(\tilde{s}), \quad (9)$$

где $P = ((e A_1 + \delta_1 g B_1) \mu(\lambda_2) - (e A_2 + \delta_1 g B_2) \mu(\lambda_1)) \operatorname{sh}(\lambda_1) \operatorname{sh}(\lambda_2)$.

Построим асимптотические разложения передаточной функции $W(s)$ для больших и малых \tilde{s} .

1. При $\tilde{s} \rightarrow \infty$, что соответствует $\tau \rightarrow 0$, имеем:

$$W(\tilde{s}) = \frac{\delta_1}{\tilde{s}} \left(W_1 + \frac{W_2}{\sqrt{\tilde{s}}} \right) + O(\tilde{s}^{-2}), \quad (10)$$

где $W_1 = \frac{g}{\delta_1^2 g^2 - 1}$, $W_2 = \frac{2g b_1 (\gamma - g e)}{(\delta_1^2 g^2 - 1)^2 a_2 \gamma}$, $a_1 = \delta_2$, $b_1 = \frac{\delta_1^2 \gamma^2}{2 \tilde{k}_{11} \delta_2}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_{11}}}$, $b_2 = -\frac{\delta_1^2 \gamma^2}{2 \tilde{k}_{11}^{3/2} \delta_2^2}$.

Из структуры асимптотики передаточной функции следует, что на начальном этапе структура потенциала определяется величиной $\delta_1 W$, зависящей только от параметра $\delta_1 g$, который характеризует теплоэлектрическую связанность задачи. С ростом времени вклад в потенциал дает термоупругий и пьезоэлектрический эффекты, характеризуемые величиной W_2 .

2. При $\tilde{s} \rightarrow 0$, что соответствует $\tau \rightarrow \infty$, получим:

$$W^0(\tilde{s}) = \frac{\delta_1}{\tilde{s}} (W_1^0 + W_2^0 \tilde{s}) + O(\tilde{s}), \quad (11)$$

где

$$W_1^0 = \frac{g(1 + \delta_1^2 \gamma^2) - \gamma e}{(\delta_1^2 g^2 - 1)((1 + \delta_1^2 \gamma^2)) + \delta_1^2 \gamma g - e},$$

$$a_1^0 = \sqrt{\frac{1 + \delta_1^2 \gamma^2}{\tilde{k}_{11}}}, \quad b_1^0 = \sqrt{\frac{1 + \delta_1^2 \gamma^2}{\tilde{k}_{11}}} \frac{\delta_2^2 \delta_1^2 \gamma^2 \tilde{k}_{11}}{(1 + \delta_1^2 \gamma^2)^2}.$$

Таким образом, в соответствии с предельной теоремой $\varphi_0(\infty) = \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \tilde{s}W(\tilde{s}) = \delta_1 W_1^0$.

В [1] были предложены варианты упрощенных постановок задачи. Структура коэффициентов в асимптотических разложениях передаточной функции такова, что интересной для дальнейшего исследования и сравнения результатов является квазистатическая постановка, получающаяся при пренебрежении в (5) инерционными слагаемыми, т.е. при $\delta_2 = 0$:

$$\hat{u}''_{10} - \delta_1 \gamma \hat{T}'_1 = 0, \quad \delta_1 \gamma \tilde{s} \hat{u}'_{10} - \tilde{k}_{11} \hat{T}''_1 + \tilde{s} \hat{T}'_1 = \tilde{s} \delta_1 g \hat{\varphi}_0 - \frac{\hat{q}_1}{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\left(\hat{u}'_{10} - \delta_1 \gamma \hat{T}'_1 \right) \Big|_{x=\pm 1} = -e \hat{\varphi}_0, \quad \hat{T}'_1 \Big|_{x=\pm 1} = 0.$$

В этом случае построение решения значительно упрощается. В результате ряда преобразований получим следующее выражение для потенциала:

$$\hat{\varphi}_0 = \frac{\delta_1 \hat{q}_1}{\tilde{s} \varepsilon} \frac{g + e\gamma}{-(1 + \delta_1^2 \gamma^2)(1 + e^2) + \delta_1^2 (g + e\gamma)^2} = \frac{\hat{q}_1}{\varepsilon} W^*(\tilde{s}).$$

Таким образом, передаточная функция в квазистатической постановке имеет следующую структуру:

$$W^*(\tilde{s}) = \frac{\delta_1}{\tilde{s}} W_1^*, \quad W_1^* = \frac{g + e\gamma}{-(1 + \delta_1^2 \gamma^2)(1 + e^2) + \delta_1^2 (g + e\gamma)^2} \quad (13)$$

Сравним главные члены разложений $W(\tilde{s})$ и $W^*(\tilde{s})$ при $\tilde{s} \rightarrow \infty$, $W^0(\tilde{s})$ и $W^*(\tilde{s})$ при $\tilde{s} \rightarrow 0$. При $\tilde{s} \rightarrow \infty$

$$\lim_{\tilde{s} \rightarrow \infty} [W - W^*] \cdot \tilde{s} = \frac{(e - \delta_1^2 g \gamma)(\gamma - g e)}{(1 - \delta_1^2 g^2)(1 + e^2 + \delta_1^2 (\gamma^2 - g^2 - 2g\gamma e))} = m_1$$

При $\tilde{s} \rightarrow 0$

$$\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} [W^0 - W^*] \cdot \tilde{s} = m_2,$$

где

$$m_2 = \frac{\delta_1 g \gamma (1 + \delta_1^2 \gamma^2)(\gamma - g e)}{((1 + \delta_1^2 \gamma^2)(\delta_1^2 g^2 - 1) + e(\delta_1^2 \gamma g - e))(1 + e^2 + \delta_1^2 (\gamma^2 - g^2 - 2g\gamma e))}.$$

Для титаната бария $m_1 \simeq 0,41$, $m_2 \simeq 2,1 \cdot 10^{-4}$ по абсолютной величине. Если малый параметр δ_1 положить равным нулю, то $m_2 = 0$, $m_1 = \frac{e(\gamma - ge)}{1 + e^2}$.

Таким образом, при $\tilde{s} \rightarrow 0$ функции $W^0(\tilde{s})$ и $W^*(\tilde{s})$ практически совпадают, что означает, что для определения наведенного потенциала при больших временах можно использовать квазистатическую постановку. Характер поведения передаточных функций $W(\tilde{s})$ и $W^*(\tilde{s})$ при $\tilde{s} \rightarrow \infty$ одинаков, они убывают как s^{-1} , однако константы при главных членах разложения различаются и для получения достоверного решения при малых временах рекомендуется использовать динамическую постановку. Сложный вид передаточной функции при этом не позволяет найти аналитически обратное преобразование Лапласа и требует численного обращения.

Полученные выводы по форме совпадают с приведенными в работе [2] и позволяют сделать вывод, что при практических расчетах наведенного потенциала для больших t может быть использована квазистатическая модель.

Автор благодарит А. О. Ватульяна за внимание к работе и признателен за полезные советы и замечания А. О. Ватульяну, Б. Н. Семенову и А. С. Скалиуху.

Список литературы

- [1] Ватульян А. О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэластостатике // Изв. вузов. Северо-Кавказский Регион. 1999. № 3. С. 28-31.
- [2] Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэластостатическому слою. // Вестник Донского государственного технического университета. Ростов н/Д. Вестник ДГТУ. 2001. Т. 1. N1(7). С. 82-88.
- [3] Ватульян А. О., Ковалева В. В. Вариационный принцип термоэластостатики и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента // Прикладная механика и техническая физика. 2002. № 1. Т. 43. С. 196—201.
- [4] Ковалева В. В. Нестационарная задача термоэластостатики для пластины // Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика. Труды III школы-семинара, Ростов-на-Дону, 15-19 ноября 2004, г. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР», 2004. С. 92-95
- [5] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир. 1970. 256 с.
- [6] Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир. 1986. 160 с.
- [7] Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Problems of continuum mechanics/ Ed. J. Radok. Philadelphia: SIAM. 1961. P. 282-290.

Lavrinenko V. V. *On a Non-stationary Problem of Coupled Thermoelastostatics for a Thin-walled Member.* A problem of the motion of the thermoelastostatic strip plate is considered. As a result of a heat load on the face a potential difference is induced. It is measured through an additional condition of switching-in of a member. A simplified model is built in a Laplace image space. The properties of solutions are studied. It is shown that the potential difference is determined on the initial stage by a value depending only on a parameter that characterizes thermoelectric connectivity of the problem.

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА БИНАРНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

Ляпин А. А.* , Чебаков М. И. , Колосова Е. М.****

** Ростовский военный институт ракетных войск*

*** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена контактная задача теории упругости в двумерной постановке о взаимодействии упругого вала с кусочно-неоднородным цилиндрическим слоем со вставками, моделирующая работу бинарного самосмазывающегося подшипника скольжения. Для решения применяется метод конечно-элементного анализа, реализованный в программном комплексе ANSYS, для которого разработана соответствующая программа на языке APDL ANSYS. Проведен расчет контактных напряжений, величины зоны контакта при различных материальных параметрах вставок.

Большую роль в надежной работе подшипников скольжения играет смазка, которая обеспечивает низкое трение, разделение подвижных частей, защиту от вредного воздействия окружающей среды и теплоотвод. Бинарный цилиндрический подшипник скольжения является самосмазывающимся благодаря тому, что в корпусе этого подшипника имеются цилиндрические протекторные вставки из полимерного материала и в процессе эксплуатации они образуют антифрикционный слой на поверхностях вала и подшипника. Данная работа посвящена анализу прочности и жесткости конструкции бинарного цилиндрического подшипника в рабочей контактной зоне.

Основание подшипника отнесено к полярной системе координат $O_1 r \varphi$. Вставки в основании размещены по угловой координате φ таким образом, что при $r = R_1$ угол φ изменяется в пределах $\varphi_0 - \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \varphi_1$, при $r = R_2$ - в пределах $\varphi_0 - \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \varphi_2$, где $\varphi_0 = -\pi/2 + \alpha(n-1)$ для первого случая расположения вставок и $\varphi_0 = -\pi/2 - \theta + \alpha(n-1)$ - для второго случая (здесь $\varphi = -\pi/2$ определяет направление r вертикально вниз). Боковые границы вставок прямолинейны и параллельны. Введены константы $\varphi_1 = \alpha/4$, $\varphi_2 = \arcsin(R_1/R_2 \sin \varphi_1)$, $\alpha = 2\pi/N$, $\theta = \alpha/2$, где $n = 1..N$ - порядковый номер вставки, N - количество вставок в каждом случае.

Вставки и слой жестко соединены между собой, граница $r = R_2$ неподвижна, а в границу $r = R_1$ вдавливается упругий вал в форме круга радиуса $R_0 = R_1 - h$ с центром O_2 , смещенном относительно центра цилиндрического основания вниз на величину $h \geq 0$. Сила вдавливания P приложена в точке с координатами $(R_0 - h, \pi/2)$, которая смещает вал только вдоль вертикальной оси. Предполагается, что трение между валом и кусочно-неоднородным слоем отсутствует. Схема задачи для двух случаев расположения девяти вставок представлена на рис. 1 (вставки заштрихованы).

В качестве инструментария при конечно-элементном анализе использовался пакет ANSYS и его командный язык программирования APDL. Построение

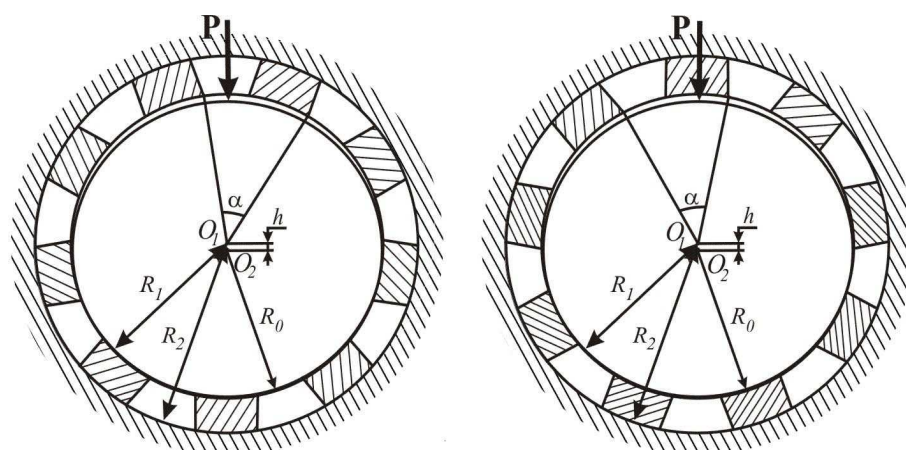


Рис. 1. Схема задачи в двух случаях расположения вставок

двумерной твердотельной модели осуществлялось по технологии моделирования "снизу-вверх" с использованием следующей последовательности действий: задание опорных точек в полярных системах координат, связанных со слоем и валом; построение дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки; определение областей по опорным точкам; связывание с различными областями заданных физико-механических свойств материалов. Введены следующие обозначения материальных констант слоя - коэффициент Пуассона ν , модуль Юнга E ; вставок - ν_v , E_v и вала - ν_s , E_s .

Используя полученную твердотельную модель, осуществлялось автоматическое построение конечно-элементной модели. При этом плоские конечные элементы наследовали физико-механические свойства соответствующих геометрических областей. В областях, занимаемых упругими материалами вала и кусочно-неоднородного слоя, использовались плоские восьмиузловые структурные конечные элементы PLANE82 с опцией плоского деформирования. На границе предполагаемого контакта слоя автоматически формировались контактные конечные элементы CONTA175, а на границе предполагаемого контакта вала - контактные элементы TARGE169 [1]. Для повышения точности результатов в соответствии с методологией решения контактных задач по методу конечных элементов строятся канонические разбиения в предполагаемой зоне контакта слоя и вала. На валу выделяются два сектора искусственного слоя толщины h_k с каноническим разбиением, характеризуемым параметрами n_{td} - количество элементов по угловой координате, n_{tv} - по радиальной координате. Создаются канонические разбиения семи сегментов для слоя со вставками с параметрами n_{bd} - количество элементов по угловой координате в каждом сегменте и n_{bv} - по радиальной координате. Оставшиеся области слоя, вставок и вала разбиты свободным образом четырехугольными конечными элементами. Твердотельная и конечно-элементная модели задачи в первом случае расположения вставок изображены на рис. 2.

На рис. 3 приведены результаты конечно-элементных вычислений контактных напряжений $q(\varphi) = -\sigma_{rr}(R_1, \varphi)$ при различных материальных параметрах вставок в первом случае их расположения в зависимости от угловой координаты φ (на

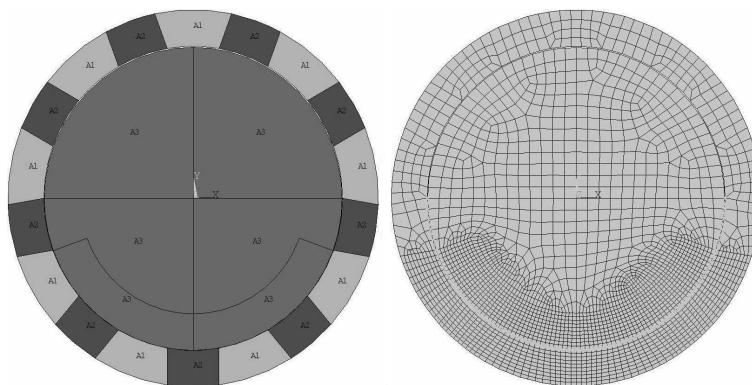


Рис. 2. Твёрдотельная и конечно-элементная модели задачи

графике $\varphi = 0$ определяет направление r вертикально вниз). При расчетах приложенная сила $P = 1.7$ кН, радиусы $R_1 = 0.025$ м, $R_2 = 0.031$ м, $R_0 = 0.02491$ м. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга слоя и вала полагались равными соответственно $\nu = 0.3$ и $E = 10^{11}$ Па, $\nu_s = 0.3$ и $E_s = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па. Материальные константы вставок варьировались таким образом, что коэффициент Пуассона ν_v оставался без изменения и равнялся 0.4, а модуль Юнга $E_v = E/n$, где $n = 1, 2, 5, 10$ ($n = 1$ соответствует однородному слою). На рис. 4 приведены аналогичные результаты для второго случая расположения вставок. Из построенных зависимостей видно, что на границах смены материала лежащих в зоне контакта наблюдается локальная концентрация напряжений $q(\varphi)$, а величина этой зоны $|\varphi| \leq \vartheta$ для кусочно-неоднородного слоя больше, чем для однородного и растёт с уменьшением модуля Юнга вставок.

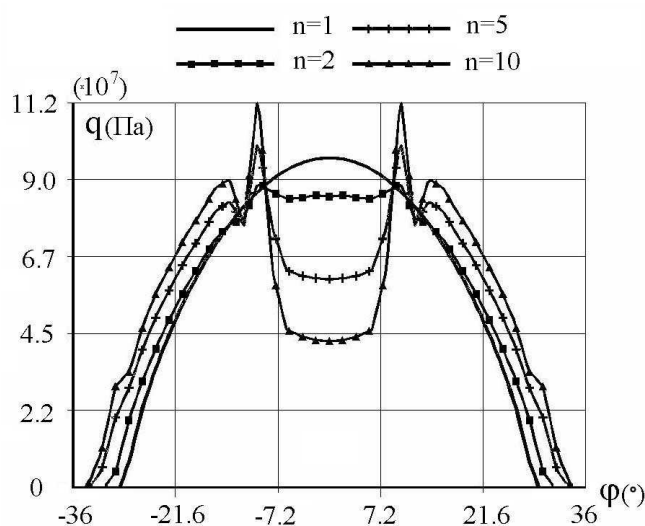


Рис. 3. Графики контактных напряжений при различных материальных постоянных вставок в первом случае расположения

В частном случае, когда слой однородный и величина зоны контакта соизмерима с толщиной слоя, результаты конечно-элементных расчетов контактных

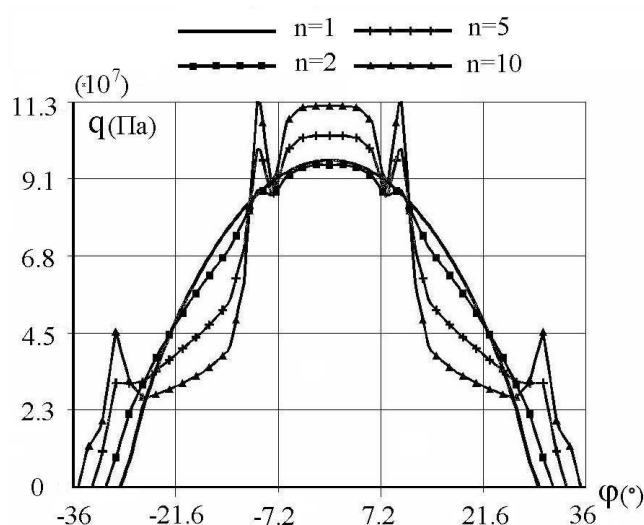


Рис. 4. Графики контактных напряжений при различных материальных постоянных вставок во втором случае расположения

напряжений незначительно отличаются от аналогичных результатов, полученных на основе формул теории Герца [2], а также от результатов из работы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проекты № 06-08-01257, 08-08-00873).

Список литературы

- [1] Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
- [2] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А. Бургера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.
- [3] Колосова Е.М., Наседкин А.В., Чебаков М.И. Расчет контактного взаимодействия в цилиндрическом подшипнике в двумерных и трехмерных постановках // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды X Международной конференции, Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: изд-во ЦВВР, 2007. С. 190–196.

Laypin A.A., Chebakov M.I., Kolosova E.M. *On the computation theory of the binary cylindrical bearing.* The contact problem of elasticity theory in two-dimensional formulation on the interaction elastic shaft with piecewise-heterogeneous cylindrical layer by insertions, simulated the work of binary self-lubricated slider bearing, is considered. The method of finite element analysis, realized using the program system ANSYS, for which the appropriate program are developed by the language APDL ANSYS, is employed for solution. Computation of contact stresses, magnitude of contact zone under various material parameters of insertions is conducted.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛОНЖЕРОНЕ

Майстенко А. В.

Ростовский военный институт ракетных войск, Ростов-на-Дону

Объектом исследования является лонжерон летательного аппарата. Методом конечно-элементного моделирования проведен сравнительный анализ внутренних усилий в зоне характерных вырезов в лонжеронах с нормальной и измененной формой поперечного сечения. Установлена степень влияния изменения профиля поверхности лонжерона на перераспределение напряжений в его комлевой части. Определены места концентрации напряжений, являющиеся причинами появления трещин и разрушения образцов.

Задача решалась в следующей постановке. Имеется комлевый образец заданной геометрии поперечного сечения (рис. 1). При его изготовлении произошло

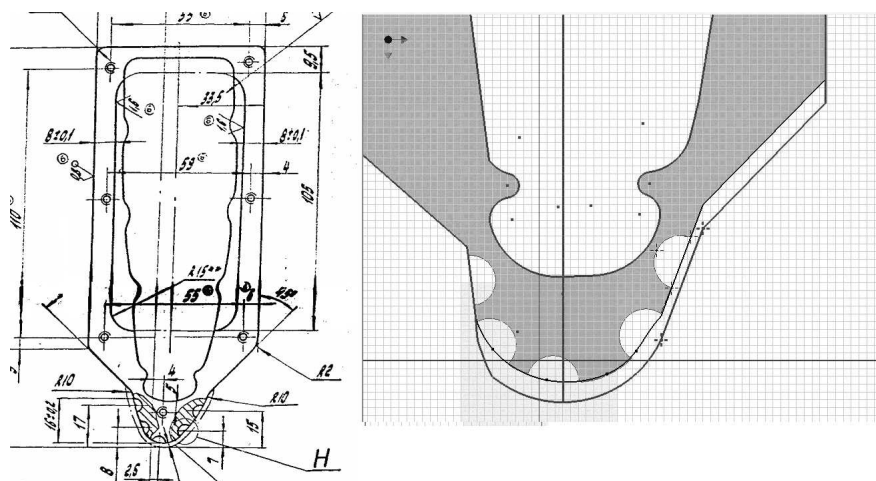


Рис. 1. Геометрия поперечного сечения

отклонение размеров от значений, заданных чертежом. Это привело к тому, что толщина лонжерона в районе канавок уменьшилась до опасно малой величины (см. рис. 1). Здесь должно возникнуть перераспределение напряжений, которое может привести к нештатному поведению изделия в процессе эксплуатации. Как именно произойдет перераспределение и насколько сильна будет концентрация напряжений в этой зоне?

Геометрия образца задана чертежом. Лонжерон выполнен из изотропного материала, работающего упруго. Силовые продольные и поперечные нагрузки прикладываются в плоскости вращения (наиболее опасный режим). Их величина и места приложения определены программой испытаний. Образец имеет закрепления: подвижный шарнир со стороны среднего сечения и заделку со стороны комля.

Реализация решения осуществлялась методом конечных элементов /1-4/. Создавалась математическая модель комлевого участка лопасти, учитывающая интересные особенности (вырезы). На рис. 2 показан трехмерный вид геометрической модели лонжерона.

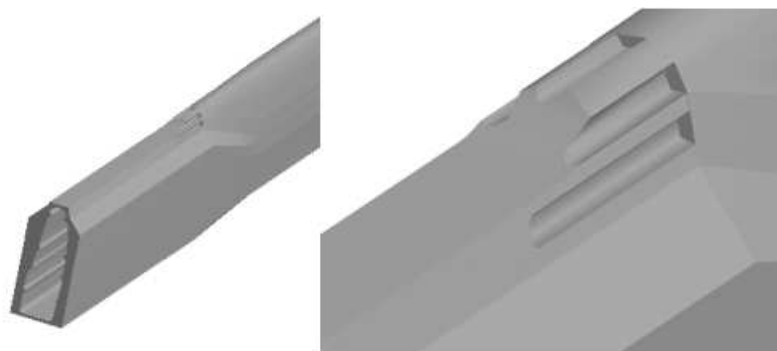


Рис. 2. Геометрическая модель лонжерона

Расчетная объемная область разбивалась на тетрагональные конечные элементы (рис. 3).

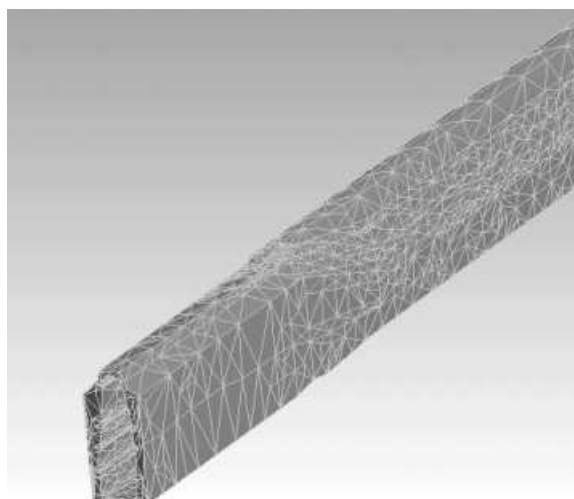


Рис. 3. Конечно-элементная модель лонжерона

Задавались свойства материала, производилось закрепление концов модели, прикладывались нагрузки, определялось напряженно-деформированное состояние.

Для количественной оценки точности реализации модели она проходила тестирование. В качестве тестового был выбран случай нагружения лонжерона для его тарировки по программе динамических испытаний. Образец нагружался поперечной силой до заданного прогиба. Значения продольных поверхностных напряжений, полученные с помощью конечно-элементной модели и измеренных тензодатчиками в установленных точках, сравнивались между собой (табл. 1). Сравнение результатов позволило сделать вывод о приемлемой точности моделирования напряженного состояния (в пределах 9 проц.)

Результаты расчета напряжений по созданной конечно-элементной модели для двух образцов (исходного и измененного) представлены на рис. 4. Видно, что распределение сферических напряжений в исходном образце происходит относительно-

Номера контрольных точек	Расчетные значения продольных напряжений в МПа	Измеренные значения продольных напряжений в МПа	Абсолютная разница значений напряжений в МПа	Относительная погрешность расчета напряжений разработанной программой в %
1	17,0	22,0	5,0	22,73
2	18,3	21,6	3,3	15,28
3	20,6	19,5	1,1	5,64
4	20,1	19,6	0,5	2,55
5	20,6	20,8	0,2	0,96
6	20,1	20,7	0,6	2,90
Среднее значение			1,78	8,34

Таблица 3. Сравнение расчетных и измеренных значений продольных напряжений для случая прогиба 3 мм в контрольной точке

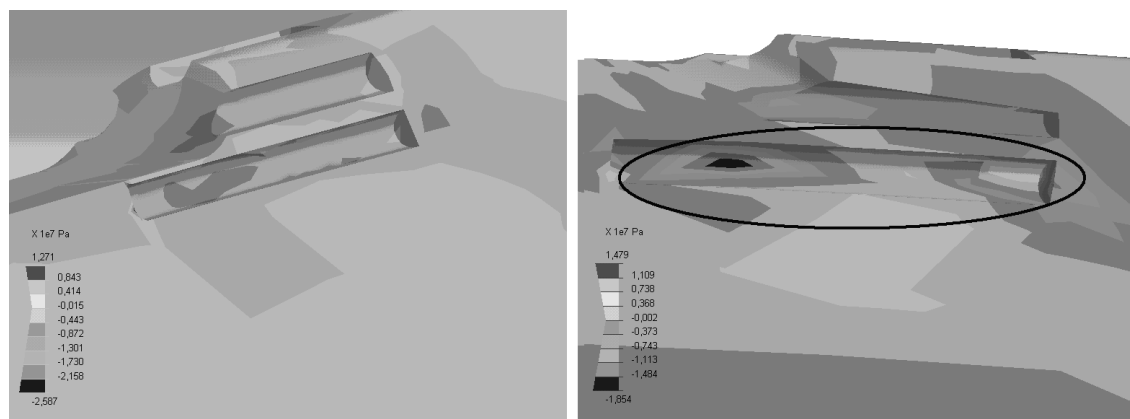


Рис. 4. Сферические напряжения на поверхности лонжерона

но равномерно, хотя и имеется небольшое повышение напряжения в вырезах.

В образце же с измененной геометрией в бороздке наблюдается появление концентрации напряжений. Образовавшиеся напряжения превышают средние для этой области - в два раза. Аналогичная картина наблюдается и для других видов напряжений. Так, на рис. 5 показано сравнение максимальной интенсивности напряжений в нижней бороздке когла изделия. За счет изменения геометрии сечения они увеличились в 1,5 раза.

Таким образом, моделирование позволило сделать следующие выводы.

1. При уменьшении толщины стенки лонжерона средние напряжения меняются незначительно, но образование концентрации напряжений в отдельных точках может создавать потенциальные источники трещин.

2. При смещении профиля вглубь лонжерона на 3 мм интенсивность напряжений в нижней, наиболее прослабленной бороздке может повыситься на 50 проц.

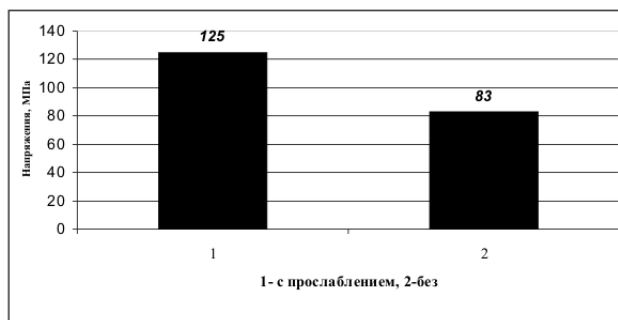


Рис. 5. Максимальные интенсивности напряжений в бороздке

3. Рассматриваемое смещение профиля внешней поверхности лонжерона приводит к образованию напряжений в желобках комлевой части лонжерона, превышающих средние для этой области напряжения в два раза.

Список литературы

- [1] *Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л.* . Метод конечных элементов и САПР: Пер. с франц.- М.: Мир, 1989.-190с.
- [2] *Майстренко А.В.* Концентрация напряжений в элементах конструкции летательного аппарата. // "Современные проблемы механики сплошной среды". Труды XI Международной конференции, Россия, Ростов-на-Дону, 2008. т.2., стр. 123-127.
- [3] *Майстренко А.В.* Остаточные деформации элементов конструкции летательных аппаратов после действия сосредоточенных сил. // "Современные проблемы механики сплошной среды". Труды VII Международной конференции, Россия, Ростов-на-Дону, 2001. т.1., стр. 157-159.
- [4] *Майстренко А.В.* Математические модели пластической правки силовых элементов конструкций. // "Строительство-2003". Материалы международной научно-практической конференции, Россия, Ростов-на-Дону, 2003., стр. 126-127.

Maystrenko A. V. *The finite-element analysis of the formation conditions of the stress concentration in the longeron.* Object of research is the longeron of a vehicle. The comparative analysis of internal efforts in a zone of characteristic cuts in longerons with the normal and changed form of cross-section by means of a finite-element modeling method is carried out. Degree of profile change influence of a longeron surface on stress redistribution in it parts is established. Places of concentration of the stress, occurrences of cracks being the reasons and destructions of longerons are defined.

АЛГОРИТМ П.Ф. ПАПКОВИЧА В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Мелешко В. В.* , Токовый Ю. В.**

* *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*

** *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Пидстригача НАНУ, Львов*

Рассматривается алгоритм отыскания однородных решений двумерной бигармонической задачи для прямоугольника, предложенный П.Ф. Папковичем в 1940 году, с точки зрения его применения к плоским задачам теории упругости и термоупругости. В ходе реализации алгоритма коэффициенты однородных решений отыскиваются при помощи итерационной процедуры без привлечения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, что может оказаться преимущественным для практических вычислений. Мы рассматриваем применения алгоритма для нескольких типичных видов граничных условий и сравниваем результаты с данными, полученными при помощи других аналитических методов, в частности, метода суперпозиции и метода однородных решений с применением иных способов определения комплексных коэффициентов.

С точки зрения эффективности и широты применения, методы однородных решений и суперпозиции занимают несомненно лидирующие позиции среди различных аналитических методов решения задач теории упругости и термоупругости для тел конечных размеров. В частности, эти методы довольно эффективно используются при решении такого класса задач, а также двумерных задач теории пластин или бигармонической задачи для прямоугольника [1]. В работе [2] была установлена связь между этими двумя методами, которая заключается в определении комплексных коэффициентов однородных решений через искомые величины метода суперпозиции. Установленное в работах [2, 3] асимптотическое поведение коэффициентов бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, к решению которых приходим при использовании метода суперпозиции, дало возможность существенно упростить поиск решения задач и предложить схему улучшенной редукции. Таким образом упрощается поиск комплексных коэффициентов однородных решений, который является основной проблемой метода вследствие неортогональности систем собственных функций и нерешенности вопроса об их полноте [1].

В первой половине прошлого столетия, П.Ф. Папкович [4, 5] предложил довольно интересный алгоритм для нахождения комплексных коэффициентов однородных решений. Алгоритм строится на конструктивной реализации последовательного процесса, который, как было сказано в русском варианте статьи [5], однако упущено в её немецком переводе [6], *"... не требует... решения каких-либо сложных систем алгебраических уравнений: каждая из них¹ определяется из своего собственного алгебраического уравнения"*. Более того [7], *"Те перспективы, которые сулит из² табулирование, должны считаться окупающими ту*

¹ определяющих величин последовательных приближений (авт.)

² предложенных П.Ф. Папковичем собственных функций (авт.)

затрату труда, которую надо выполнить для составления таблиц этих функций. Было бы полезно поэтому произвести эту работу, там более, что будучи выполнена раз навсегда, она позволит относительно просто рассчитывать самые разнообразные пластины, у которых взаимно противоположные кромки заделаны". Не смотря на эти весьма привлекательные характеристики, алгоритм не получил должного внимания на протяжении нескольких десятилетий.

В работе [8] мы рассмотрели применение алгоритма для практических расчётов бигармонической функции и напряжений в полуполосе, нагруженной на торце нормальными косинусоидальными нагрузками. В настоящей работе мы излагаем результаты применения алгоритма для различных видов граничных условий с целью исследования его эффективности. Также приводим сравнение результатов с полученными при помощи других аналитических методов, в частности, метода суперпозиции, и других вариантов метода однородных решений.

Плоская задача термоупругости в прямоугольной области $0 \leq x < l$, $|y| \leq 1$ сводится к решению бигармонического уравнения для функции напряжений F^* :

$$\nabla^2 \nabla^2 F^* + C \nabla^2 T = 0, \quad (1)$$

которое следует решать при наличии краевых условий

$$\begin{aligned} F^* &= f_0(y), \quad \frac{\partial F^*}{\partial x} = g_0(y), \quad x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1, \\ F^* &= f_l(y), \quad \frac{\partial F^*}{\partial x} = g_l(y), \quad x = l, \quad -1 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

на сторонах $x = 0, l$ и, не ограничивая общности, однородных краевых условиях на сторонах $y = \pm 1$:

$$F^* = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial y} = 0, \quad y = \pm 1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Здесь ∇^2 – двухмерный оператор Лапласа; T – заданное температурное поле; C обозначает соответственно αE для случая плоского напряженного состояния или $\alpha E / (1 - \nu)$ для случая плоской деформации; ν , α – соответственно коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения.

Общее решение уравнения (1) строится в виде

$$F^* = F + F_T,$$

где F_T – частное решение уравнения Пуассона

$$\nabla^2 F_T + CT = 0$$

с однородными краевыми условиями, а F – функция напряжений Эйри, которую следует искать на основе однородного уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3). Определением F_T [9] задача сводится к изотермической.

Для краткости изложения рассмотрим случай, когда можно пренебречь взаимовлиянием нагруженных сторон прямоугольника, положив $l \rightarrow \infty$, $f_l = g_l = 0$

(случай нагруженной на торце $x = 0$ полушполсы). Следуя схеме решения задачи, предложенной П.Ф. Папковичем [4, 5], функцию Эйри следует искать в виде

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Y_k(y) a_k e^{-\lambda_k x} + \bar{Y}_k(y) \bar{a}_k e^{-\bar{\lambda}_k x} \right\}, \quad (4)$$

где черточкой сверху обозначено комплексное сопряжение; λ_k – собственные значения, найденные из уравнений $\sin 2\lambda = -2\lambda$ для четных значений индекса k и $\sin 2\lambda = 2\lambda$ – для нечетных; $Y_k(y)$ – собственные функции, получаемые в виде:

$$Y_k = \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k} - y \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}, \quad (k = 0, 2, 4, \dots), \quad \bar{Y}_k = \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k}, \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Выражение (4) удовлетворяет уравнению (1), а также условиям (2)₂, (3). Поэтому главным вопросом построения решения является определение коэффициентов a_k из краевых условий на торце (2)₁. П.Ф. Папкович предложил использовать для этой цели, установленное свойство обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^1 [Y_k'' Y_n'' - \lambda_k^2 \lambda_n^2 Y_k Y_n] dy = 0, \quad k \neq n, \quad \int_{-1}^1 [Y_k'' \bar{Y}_n'' - \lambda_k^2 \bar{\lambda}_n^2 Y_k \bar{Y}_n] dy = 0, \quad \forall k, n. \quad (5)$$

Используя соотношения (5), а также довольно изящную схему решения [4, 5], построение коэффициентов сводится к конструктивному процессу последовательных приближений, которые позволяют решению (4) с нужной точностью удовлетворять условиям (2) и, согласно приведенным выше утверждениям П.Ф. Папковича, не привлекают решения бесконечных систем уравнений [8]. Более того, схема определения ключевых величин такова, что для улучшения точности решения не требуется переопределять предыдущие значения, а всего лишь добавить соответствующие составляющие в общее выражение. Такая схема решения безусловно выглядит очень привлекательной с точки зрения практических вычислений. Однако, не следует забывать и об эффективности применения алгоритма для различных видов заданных на торце внешних нагрузок.

Для проверки эффективности алгоритма П.Ф. Папковича мы производили расчеты функции Эйри, а также соответствующих напряжений, в полушполсе при нормальных самоуравновешенных нагрузках на торце $x = 0$, заданных в виде:

- А) гладкой непрерывной функции: $\sigma_x = 1/3 - y^2$;
- В) негладкой непрерывной функции: $\sigma_x = 1/2 - |y|$;
- С) разрывной функции: $\sigma_x = 1$, если $|y| \leq 1/2$, и $\sigma_x = -1$, если $1/2 < |y| \leq 1$.

Для сравнения использовались результаты методов суперпозиции [2] и метода однородных решений с использованием алгоритма определения комплексных коэффициентов, предложенного в [2], а также методом наименьших квадратов.

В случае гладкой и непрерывной нагрузки (А) все методы показали приблизительно одинаковую эффективность (Рис. 1).

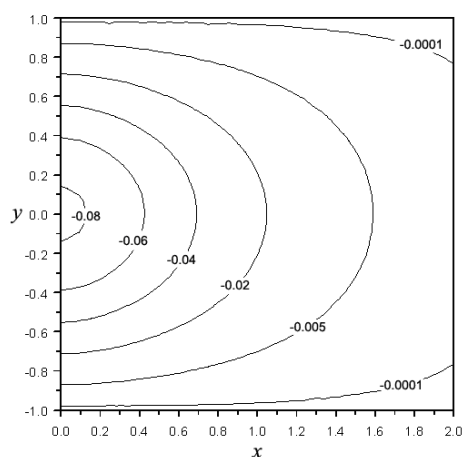


Рис. 1. Распределение бигармонической функции возле торца полуполосы в случае непрерывной гладкой нагрузки (А)

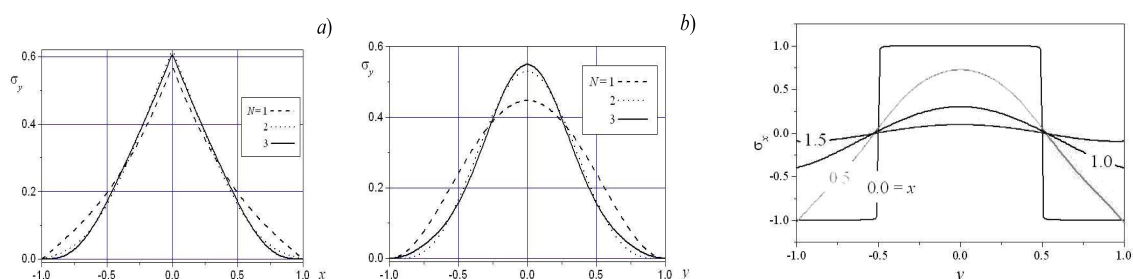


Рис. 2. Сходимость метода суперпозиции (а) и алгоритма П.Ф. Папковича (b) в случае негладкого нагружения

Рис. 3. Распределение напряжений σ_x в случае разрывной нагрузки

Для случая приложения негладкой нагрузки (В), хорошая эффективность наблюдается при использовании метода суперпозиции, в то время как алгоритм Папковича сходится значительно хуже (Рис. 2).

В случае разрывной нагрузки (С) метод суперпозиции эффективно применим для определения бигармонической функции и компонент тензора напряжений во всей области, включая нагруженную границу (Рис. 3). Результаты же применения алгоритма П.Ф. Папковича, как и других вариантов метода однородных решений, довольно хорошо совпадают с результатами метода суперпозиции внутри области, в то время как на торце они не удовлетворяют граничным условиям вследствие расходимости соответствующих рядов однородных решений.

Таким образом, предложенный П.Ф. Папковичем [4, 5] алгоритм определения коэффициентов однородных решений в прямоугольной области является быстро сходящимся и удобным в применении для определенных видов краевых условий. В то же время, использование данного подхода сопряжено с пока нерешенными вопросами сходимости рядов по однородным решениям и полноты систем собственных функций.

Список литературы

- [1] *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // *Appl. Mech. Rev.* 2003. **56**, № 1. С. 33–85.
- [2] *Gomilko A.M., Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* Methods of homogeneous solutions and superposition in static boundary-value problems for an elastic half strip // *Int. Appl. Mech.* 1986. **22**, № 8. С. 770–778.
- [3] *Мелешко В.В.* Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах // *Прикл. механика* 2005. **41**, № 9. С. 101–117.
- [4] *Папкович П.Ф.* Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит // *Прикл. мат. мех.* 1941. **5**, № 3. С. 359–374.
- [5] *Папкович П.Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // *Докл. АН СССР.* 1940. **27**. С. 335–339.
- [6] *Papkovitsch P.F.* Über eine Form der Lösung des byharmonischen Problems für das Rechteck // *C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS.* 1940. **27**. С. 334–338.
- [7] *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Ч. 2. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. Л.: Судпромгиз, 1941. 960 с.
- [8] *Мелешко В.В., Токовый Ю.В.* Об алгоритме П.Ф. Папковича в методе однородных решений для двухмерной бигармонической задачи в прямоугольной области // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* 2006, **49**, № 4. С. 69–83.
- [9] *Маслов Г.Н.* Задача теории упругости о термоупругом равновесии // *Известия научно-исследовательского института гидротехники.* 1938, **23**. С. 130–219.

Meleshko V.V., Tokovyy Yu.V. *On algorithm suggested by P.F. Papkovich for treatment of the plane thermoelasticity problems in a rectangle.* This study deals with comparison of efficiency in application of the dominant analytical methods for solving the plane thermoelasticity problem in a rectangle with spotlight fixed on the method of homogeneous solutions. Particularly, the algorithm suggested by Papkovich for the solution of this problem is discussed in detail. The algorithm consists in realization of the iterative scheme, and each the iteration does not involve any infinite set of algebraic equations and can be easily done. This offers considerable scope for determination of unknown complex coefficients of the homogeneous solutions. The advantages and disadvantages of the algorithm are testified by typical examples and compared with the results of alternative methods.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В СЛОИСТЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Мирошниченко И.П.

Ростовский военный институт ракетных войск имени Главного маршала артиллерии М.И. НЕДЕЛИНА

Предложен научно-методический аппарат для анализа волновых процессов в цилиндрических и эллиптических слоистых конструкциях, выполненных из анизотропных композиционных материалов, учитывающий особенности всех типов упругих волн, распространяющихся в трансверсально-изотропных материалах, особенности волновых процессов в слоистых структурах, особенности влияния кривизны поверхности рассматриваемых конструкций и физико-механических характеристик конструкционных материалов слоев.

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем на этапах экспериментальной отработки и эксплуатации перспективных конструкций является проблема диагностики технического состояния цилиндрических и эллиптических слоистых конструкций, выполненных из анизотропных композиционных материалов.

Разработан научно-методический аппарат для анализа волновых процессов в цилиндрических и эллиптических слоистых конструкциях, выполненных из трансверсально-изотропных композиционных материалов, учитывающий особенности всех типов упругих волн, распространяющихся в трансверсально-изотропных материалах, особенности волновых процессов в слоистых структурах, особенности влияния кривизны поверхности рассматриваемых конструкций и физико-механических характеристик конструкционных материалов слоев.

В основу отмеченного научно-методического аппарата положен метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах [1], позволяющий описать поля перемещений, напряжений и деформаций в трансверсально-изотропных материалах при помощи трех скалярных потенциальных функций, соответствующих квазипродольным, квазипоперечным и поперечным волнам, при этом уравнения движения разделяются на три независимых уравнения Гельмгольца.

Разработано оригинальное программное обеспечение, реализующее отмеченный научно-методический аппарат для основных классов возникающих практических задач.

Проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния в типовых цилиндрических и эллиптических конструкциях при заданном пространственно-временном распределении источников локального импульсного воздействия, моделирующего процесс диагностики технического состояния рассматриваемых конструкций. Некоторые из результатов данного исследования частично представлены в [2-4] применительно к цилиндрическим слоистым

конструкциям из трансверсально-изотропных композиционных материалов в частных случаях нестационарных двумерных задач.

Анализ результатов исследования выявил характерные особенности волновых процессов в рассматриваемых конструкциях, которые необходимо учитывать при решении практических исследовательских и производственных задач.

Полученные результаты целесообразно использовать при анализе результатов диагностики технического состояния цилиндрических и эллиптических слоистых конструкций, выполненных из анизотропных композиционных материалов в приборостроении, машиностроении, судостроении, авиастроении, ракетно-космической технике и т.д.

Список литературы

- [1] Сизов В.П. О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах // Известия АН СССР. 1988. № 5. С. 55–58.
- [2] Мирошниченко И.П., Сизов В.П. Определение напряженно-деформированного состояния в слоистой цилиндрической конструкции при многократном локальном воздействии динамических нагрузок // Известия РАН. 2000. № 1. С. 97–104.
- [3] Мирошниченко И.П., Сизов В.П. Исследование напряженно-деформированного состояния в слоистой цилиндрической конструкции при локальном динамическом нагружении // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1999. № 2. С. 19–22.
- [4] Мирошниченко И.П., Сизов В.П. Исследование влияния кривизны поверхности на амплитудные значения радиальных напряжений в цилиндрической конструкции при динамической нагрузке // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1999. № 3. С. 40–42.

Miroshnichenko I.P. *Study of the stressed-strained state in the elliptic layered constructions made of anisotropic materials.* A scientifically-methodological apparatus has been proposed for the analysis of the wave processed in the cylindrical and elliptic layered structures made of anisotropic composite materials that takes account of the properties of all the types of the elastic waves propagating in the transversal-isotropic materials, the features of the wave processed in the layered structures, the peculiarities of the effect of the surface curvature of the structures considered and physical-mechanical characteristics of the structural materials of the layers.

О ВНЕДРЕНИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРАКТИКУ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЕРСПЕКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ

Мирошниченко И. П., Серкин А. Г., Сизов В. П.

Ростовский военный институт ракетных войск)

Представлены результаты теоретико-экспериментального обоснования новых интерференционных методов и средств измерения длин и перемещений и результаты внедрения их в практику исследования перспективных материалов и изделий.

Планомерное развитие нанотехнологий требует соответствующего приборного обеспечения как для фундаментальных исследований, так и для сборочных, диагностических и контрольно-измерительных операций, следовательно развитие нанометрии должно осуществляться опережающими темпами. Измерения перемещений на нанометровом уровне играют важную роль в разработке и создании нано- и микросистемной техники различного назначения. Использование лазерных интерферометров позволяет сравнить измеряемую величину с естественной константой – длиной волны стабилизированного по частоте лазера, что открывает широкие перспективы для развития нанометрии.

Распространенным способом повышения точности измерения длин и перемещений является наращивание возможностей определения дробных долей интерференционной полосы, но анализ основных составляющих погрешности интерференционных измерительных систем [1] показал, что принципиально ограничивает точность современных интерферометров наличие угловой составляющей перемещения, и действие комплекса внешних дестабилизирующих факторов. Уменьшение указанных составляющих погрешности и является целью разработки представленных измерительных технологий, при этом перспективными направлениями развития научно- методического аппарата лазерной интерферометрии определены: 1. Функциональное объединение в одном устройстве измерителя линейной и угловой составляющей перемещения. 2. Разработка новых методов, обеспечивающих бесконтактные измерения и однозначную связь параметров интерференционного поля с измеряемых перемещением в широком диапазоне величин, скоростей и ускорений. 3. Разработка методики комплексной коррекции результатов измерений для контроля внешних дестабилизирующих факторов и введения поправки.

Для контроля угловой составляющей перемещения разработан новый метод, основанный на применении элементов дифракционной оптики в качестве светоделителей, что обеспечивает формирование интерференционных картин в нулевом и боковых максимумах первого порядка. Интерферометр обобщенно может быть представлен (см. рис. 1) в виде оптически связанных, и последовательно размещенных источника излучения 1, оптической системы 2, светоделителя 3, отражателя 4 (с которым связан объект измерения) и фотоприемного устройства 5. Суть разработанного метода заключается в контроле интенсивности в соответствующих фрагментах интерференционных картин, что позволяет устранить неодно-

значность, вызванную наличием угловой составляющей перемещения. Результаты обоснования данного метода представлены в [2].

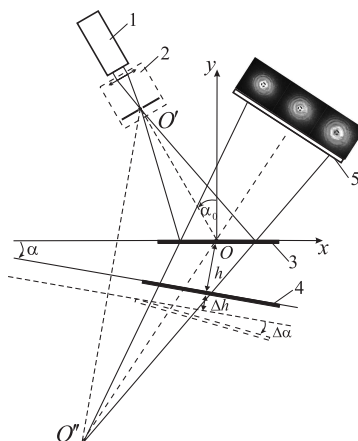


Рис. 1. Обобщенная схема интерферометра

Второе направление реализовано в новом интерференционном методе, который получил название метода подсвечивания поверхности объекта измерения [3]. Суть предлагаемого метода заключается в том, что излучением лазера 1 (см. рис. 2) подсвечивается поверхность объекта измерений 3, которая является точечным источником отраженного излучения, облучающего интерферометр, состоящий из светоделителя 4 и отражателя 5, жестко зафиксированных друг относительно друга. Источник излучения 1, интерферометр, и фотоприемное устройство 6 неподвижны. Достоинствами данного метода является реализация измерений без какого-либо воздействия на объект контроля и возможность регулирования чувствительности и диапазонов измерения интерферометра в достаточно широких пределах. Результаты теоретического и экспериментального обоснования данного метода представлены в [3, 4].

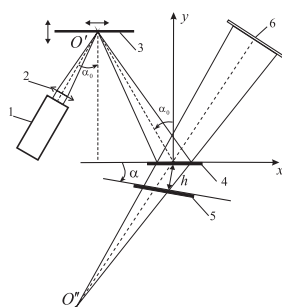


Рис. 2. Схема интерферометра, реализующего "метод подсвечивания"

Известно, что погрешности, вызванные действием внешних дестабилизирующих факторов имеют комплексную природу, поэтому их учет возможен только введением поправок. Обобщенно, для достижения этой цели можно выделить два подхода: факторную и комплексную коррекции. Суть факторной коррекции заключается в контроле действия отдельных влияющих факторов, а затем по известным или экспериментальным зависимостям определяют влияние каждого фактора

и вычисляют поправку. При относительной простоте такого способа ему свойствен принципиальный недостаток, обусловленный сложностью учета всех влияющих факторов, в результате чего измерительная система оказывается перегруженной большим количеством дополнительных датчиков. Перспективной является комплексная коррекция, заключающаяся в определении суммарного действия на результат измерения всех факторов [1], что требует определения параметров, и разработки методики коррекции.

В качестве параметра выбрана интегральная оценка интенсивность интерференционного поля. Известное положение, что данная величина не зависит от измеряемого перемещения лежит в основе разработанной и экспериментально обоснованной методики комплексной коррекции показаний интерферометра. Значение данного параметра целесообразно регистрировать для контроля изменений интенсивности, вызванных амплитудными или фазовыми искажениям в оптических элементах схемы или среде распространения излучения, а также для контроля внешних дестабилизирующих факторов, влияющих на режим работы источника и приемника излучения [5].

Суть разработанной методики поясняют экспериментально полученные зависимости интенсивности от перемещения при регистрации интегрально по всей поверхности интерферограммы и по ее фрагменту, представленные на рис. 3 и 4 соответственно. На рис. 4 сплошной линией показан результат коррекции действия внешних факторов разработанным методом.

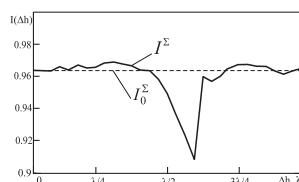


Рис. 3. Зависимость интенсивности от перемещения при регистрации интегрально по всей поверхности интерферограммы

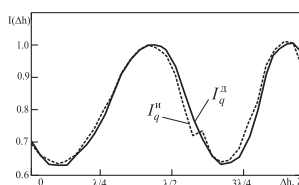


Рис. 4. Зависимости интенсивности от перемещения при регистрации по фрагменту интерферограммы

Применение разработанной методики обеспечивает повышение качества измерений малых перемещений лазерными интерферометрами, которое обеспечивается за счет комплексного контроля влияния внешних дестабилизирующих факторов и коррекции результатов измерений. Под качеством измерений, согласно [6] понимают совокупность свойств, обуславливающих получение результатов с требуемыми точностными характеристиками, в необходимом виде и в установленные сроки.

Представленные оптические измерительные технологии защищены патентами Российской Федерации на изобретения. Позволяют существенно повысить точность и информативность измерений, обладают существенным технико-экономическим эффектом по сравнению с известными отечественными и зарубежными аналогами. Внедрены и успешно реализованы при проведении экспериментальных исследований процессов дефектообразования в ленточных высокотемпературных сверхпроводниках, конструкционных материалах и изделиях при контроле качества их изготовления и т.д.

Функциональная схема разработанной экспериментально-измерительной установки для исследований процессов дефектообразования в ленточных высокотемпературных сверхпроводниках и перспективных конструкционных материалах представлена на рис. 5.

Несущая конструкция установки представляет собой общее 1 и дополнительное 2 неподвижные основания жестко связанные с помощью четырех стоек 3. На общем основании 1 размещены малогабаритная испытательная машина 4, упругий элемент 5 с четырьмя тензометрическими датчиками 6, на котором жестко закреплена специальная балка 7, с установленными пьезоэлементом 8, отражателем 9 и двумя шарикоподшипниковыми опорами 10, предназначенными для размещения исследуемого образца 11. Нагружение образца 11 осуществляется индентором-датчиком 12, который перемещается в вертикальном направлении по направляющему, представляющим собой цилиндр 13 и втулку 14 с взаимно притертыми поверхностями. Индентор-датчик 12, перемещается под действием рычага 15, приводимого в движение малогабаритной испытательной машиной 4, а при снятии нагружения возвращается в исходное положение пружины 16. Величина перемещения индентора-датчика 12 определяется сигналом с тензометрического датчика 17.

На дополнительном основании 2 закреплен светоделитель 18, положение которого регулируется при юстировке измерителя, а затем фиксируется с помощью специальных подпружиненных опор 19. На стойках установлены источник излучения 20, собирающая линза 21, в фокусе которой расположена диафрагма пространственного фильтра 22 и фотоприемник 23.

Механическое нагружение исследуемого образца 11 осуществляется по трех точечной схеме нагружения с помощью нестандартной малогабаритной испытательной машины 4. Образец 11 свободно лежит на двух шарикоподшипниковых опорах 10. Нагружение осуществляется индентором-датчиком 12. Регуляторами устройства управления и коммутации можно изменять скорость и направление нагружения. Измерение величины усилия производится с помощью четырех тензометрических датчиков 6, а величины прогиба – с помощью тензометрических датчиков 17. Кроме того, измерение перемещения производится с помощью интерференционно-голографической системы. Параметры АЭ - сигналов принимаются с помощью датчика-индентора 9, обрабатываются акустико-эмиссионным блоком устройства управления и коммутации затем посредством устройства сопряжения преобразуется в АЦП с последующей обработкой в ПЭВМ.

Отличительной особенностью разработанного оборудования установки является применение интерференционного измерителя перемещения. В реализации дан-

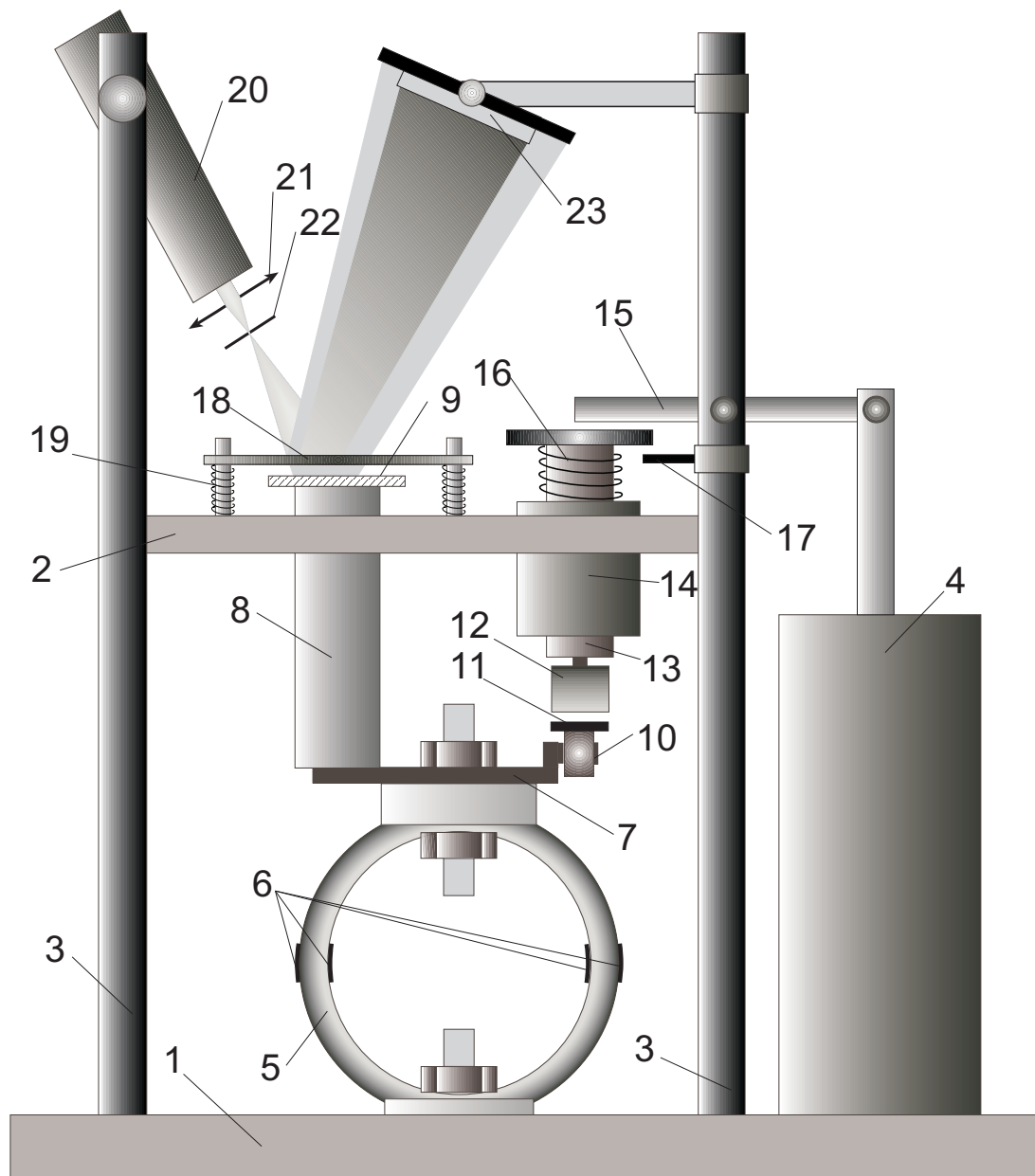


Рис. 5. Функциональная схема экспериментально-измерительной установки

ного измерителя заложены несколько технических решений, которые позволяют выделить его среди типовых лазерных интерферометров. Простота схемной реализации и малое количество оптических элементов позволяют снизить потери интенсивности и искажения волнового фронта интерферирующих пучков, а оригинальная конструкция позволяет пространственно разнести приемник и источник излучения и упрощает регистрацию информации. Повышение качества и достоверности интерференционных измерений достигается применением комплексной коррекции показаний с помощью интегральной регистрации интенсивности оптического поля интерференционной картины [5]. Используя данную методику можно осуществлять и комплексный контроль проявления влияющих факторов или изменения условий проведения испытаний в целом.

Проект частично поддержан грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 07-01-00012 и Южного федерального университета.

Список литературы

- [1] *Мирошниченко И.П., Серкин А.Г.* Особенности использования интерференционных измерителей малых перемещений при решении задач диагностики технического состояния конструкций // Дефектоскопия. 2007. № 4. С. 31-39.
- [2] *Мирошниченко И.П., Серкин А.Г., Сизов В.П.* Численное исследование метода измерения малых линейных и угловых перемещений лазерными интерферометрами // Измерительная техника. 2007. № 1. С. 9-13.
- [3] *Алехин В.Е., Мирошниченко И.П., Сизов В.П.* Методы измерения смещений поверхности объектов контроля лазерными интерферометрами // Дефектоскопия. 2007. № 2. С. 53-61.
- [4] *Алехин В.Е., Мирошниченко И.П., Сизов В.П.* Экспериментальное исследование особенностей метода подсвечивания поверхности объекта контроля для измерения смещений лазерными интерферометрами // Дефектоскопия. 2007. № 9. С. 37-43.
- [5] *Серкин А.Г.* О применении интегральной оценки интенсивности оптического поля при измерениях перемещений интерференционно- голографическими методами // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2005. № 4. С. 9-13.
- [6] *Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегера В.В.* Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. М.: Логос, 2003. 536 с.

Miroshnichenko I.P., Serkin A.G., Sizov V.P. *On introduction of interference measuring technologies into the investigation practice of the promising materials and products* . The have been given the results of the theoretically-experimental justification of new interference methods and means for length and displacement measurement and the results of their introduction into the investigation practice of promising materials and products.

Нелинейная асимптотическая устойчивость стационарных режимов протекания идеальной жидкости сквозь плоский канал

Моргулис А.Б.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, и Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ.

Когда несжимаемая жидкость втекает в область и вытекает из неё, потоки энергии и завихренности через границу области течения, не равны, вообще говоря, нулю. В таком случае даже идеальная несжимаемая жидкость представляет собой неконсервативную систему с «диссипацией» и «накачкой» энергии. Конкуренция этих процессов создаёт возможности таких неконсервативных явлений, как асимптотическая устойчивость равновесий, возникновение автоколебаний и др. В данном докладе представлено достаточное условие нелинейной асимптотической устойчивости стационарного режима течения. Отметим, что это условие сформулировано явно в терминах граничных данных задачи: нормальной компоненты скорости жидкости (она задаётся на всей границе канала), и завихренности течения, которая задаётся на входе потока в канал.

Вводные замечания.

Рассмотрим течение идеальной однородной несжимаемой жидкости по конечному каналу или трубе. В таком случае граница области течения неизбежно включает вход и выход течения, сквозь которые жидкость втекает в область или вытекает из неё. При этом жидкость вносит в область и уносит из неё энергию и завихренность. Таким образом, несмотря на отсутствие вязкости, идеальная жидкость превращается в неконсервативную систему с диссипацией и накачкой энергии, а их баланс регулируется граничными условиями на входе и выходе течения. В некоторых случаях диссипация доминирует, в частности, система допускает функционалы Ляпунова, не являющиеся интегралами движения. Широкие классы плоских течений такого рода указаны в [3]. Влияние граничных условий на устойчивость закрученных течений обсуждалось в [2].

Хотя существование функционалов Ляпунова в определённом смысле запрещает неустойчивость, вопрос о полном затухании возмущений (т.е. об *асимптотической устойчивости*) требует дополнительного исследования. При этом приходится иметь дело с диссипацией, которая обусловлена не вязким трением, а способностью потока выносить возмущения из канала. Естественно думать, что эта способность проявляется наиболее полно в том случае, если состав материальных частиц потока постоянно обновляется, т.е. *любая материальная частица проводит в области течения лишь конечное время*. Течения, обладающие этим свойством назовём *сквозными*. В частности, сквозным является любое стационарное течение без точек остановки, например, равномерный поток в прямоугольном канале. Нетрудно видеть, что течение остаётся сквозным при малом (в C -метрике) возмущении поля скорости. В настоящем сообщении дано достаточное условие нелинейной асимптотической устойчивости сквозных стационарных течений в конечных каналах произвольной формы.

Постановка задачи. Обозначения.

Ограничимся рассмотрением течений в плоских односвязных кусочно-гладких областях, границы которых состоят из 4-х гладких дуг. Смежные дуги соединяются в угловых точках z_k ($k = 1, \dots, 4$). Такие области будем называть криволинейными четырёхугольниками. Пусть D криволинейный четырёхугольник и $S = \partial D$. Уравнение движения жидкости и граничные условия к нему запишем в виде

$$\omega_t + \mathbf{v}\nabla\omega = 0; \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$\mathbf{v}\mathbf{n}|_S = \gamma; \omega|_{S^+} = \omega^+, S^+ = \{z \in S : \gamma(z) < 0\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(z, t)$ — поле скорости жидкости, \mathbf{n} внешняя нормаль к S , ω^+ и γ суть заданные функции (не зависящие от времени), и, конечно, интеграл γ по границе области течения равен нулю. Вместе с γ определено разбиение $S = S^+ \cup S^- \cup S^0 \cup \{z_k\}_{k=1}^4$, где $S^- = \{z \in S : \gamma(z) > 0\}$, $S^0 = \{z \in S : \gamma(z) = 0\}$. Ясно, что S^+ есть вход течения, S^- — выход, а S_0 — непроницаемая часть границы.

Примем следующие условия регулярности: (R1) S^+ есть гладкая дуга с концами z_1, z_2 , и S^- есть гладкая дуга с концами z_3, z_4 , так что S^+ и S^- не имеют общих концевых точек; (R2) величины внутренних углов между смежными дугами с вершинами в точках $\{z_k\}_{k=1}^4$ лежат в интервале $(0, \pi)$; (R3) $\inf_{S^+ \cup S^-} |\gamma| > 0$.

Таким образом, вход и выход потока расположены на двух противоположных сторонах криволинейного четырёхугольника D , а оставшаяся пара сторон представляет твёрдые стенки.

Граничные условия (2) впервые исследовал В.И. Юдович [6]. Он установил глобальную разрешимость соответствующей начально-краевой задачи протекания и единственность её решения. В настоящее время исследованы альтернативные граничные условия, см., например, [4], [7]. Обзор истории вопроса имеется в [3].

Рассмотрим стационарное течение сквозь канал D и его возмущения. Предполагается, что как возмущенное, так и невозмущенное течения удовлетворяют граничным условиям (2) с одними и теми же граничными данными. В частности, расход жидкости одинаков в обоих течениях. Обозначим его через Q . Скорость, вихрь и функцию тока стационарного течения обозначим через $\mathbf{V} = \mathbf{V}(z)$, $\Omega = \Omega(z)$ and $\Psi = \Psi(z)$, соответственно.

Функционалы Ляпунова

Если на входе задан постоянный вихрь $\omega^+ \equiv \text{const}$, то функционал Ляпунова есть энтрофия:

$$\frac{d}{dt} \int_D (\omega - \omega^+)^2 dz = - \int_{S^-} (\omega - \omega^+)^2 \gamma dS.$$

(заметим, что $\gamma > 0$ всюду на S^-). В общем случае для построения функционалов Ляпунова используется конструкция В.И. Арнольда [5], ранее применявшаяся лишь для течений в областях с непроницаемыми границами или для пространственно периодических течений. Напомним её.

Стационарное уравнение вихря плоского течения влечёт локальное функциональное соотношение $\mathcal{F}(\Psi, \Omega) = 0$ с произвольной функцией \mathcal{F} . Предположим, что Ψ есть однозначная функция от Ω , так что $\Psi = F(\Omega)$ *всюду* в области течения,

причём F определена и дифференцируема на \mathbb{R} , а в остальном произвольна. Заметим, что F естественно определена лишь на множестве значений завихренности Ω , так что имеется известный произвол в выборе её продолжения на \mathbb{R} . Используя его, добьемся ограниченности F' на \mathbb{R} . Пусть r and s действительные числа, положим

$$\Phi_r(s) = F_0(r + s) - F_0(r) - F'_0(r)s, \quad F'_0 = F. \quad (3)$$

Полезно отметить, что $\sup_s |\Phi_r(s)| \leq (s^2/2) \sup_r |F'(r)|$.

Рассмотрим возмущенное течение. Определим функционал (действующий на возмущения) равенством

$$W(\xi(\cdot, t)) = \int_D \mathbf{u}^2 dz/2 - \int_D \Phi_\Omega(\xi) dz, \quad (4)$$

где $\xi = \omega - \Omega$ — возмущение завихренности, и $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ — возмущение скорости (выраженное через ξ). В случае полностью непроницаемой границы W есть интеграл движения. В нашем случае производная \dot{W} в силу системы (1-2) имеет вид

$$\dot{W}(\xi) = \int_{S^-} \gamma \Phi_\Omega(\xi) ds, \quad (5)$$

Поскольку $\gamma|_{S^-} > 0$ по определению, знак \dot{W} совпадает со знаком Φ_Ω , а он совпадает со знаком $F''_0 = F'$ (см. (3)). Например, $W > 0$ и $\dot{W} \leq 0$ для всех ненулевых возмущений, если $F' < 0$ на всей оси \mathbb{R} . Если же $F' > 0$, то $\dot{W} \geq 0$, так что функционал W должен быть отрицательно определен. Для этого достаточно, чтобы $\inf_{\mathbb{R}} F'$ превосходила наименьшее собственное значение 1-й краевой задачи для оператора $-\Delta$ в D .

Приятная черта граничных условий (2) состоит в том, что они позволяют *определить* зависимость между Ψ и Ω . Именно, на любой линии тока, пересекающей вход имеет место равенство $\Omega = f(\Psi)$, где $f(h) = \omega^+(s^+(h))$; $0 < h < Q$, и $s^+ = s^+(h)$ есть обратная функция для ограничения Ψ на S^+ . Так как Ψ строго монотонна на входе, функция s^+ определена корректно. Таким образом, $\Omega = f(\Psi)$ вне застойных зон, а в случае сквозного течения — всюду в D .

Теорема об асимптотической устойчивости.

Обратимся к формулировке основной теоремы. Чтобы не загромождать изложение, мы опустим требования, предъявляемые к гладкости граничных данных, и обсудим дифференциальных свойств решений. Заметим лишь, что здесь нет никаких неожиданностей: при гладких данных решения будут гладкими вне сколь угодно малых окрестностей угловых точек границы. Введём

$$I(t) = \|\omega(\cdot, t) - \Omega\|_2^2; \quad I_0 = I(0); \quad A(t) = \|\omega(\cdot, t) - \Omega\|_\infty; \quad A_0 = A(0).$$

где $\|\cdot\|_p$ обозначает стандартную норму $L_p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$. Таким образом, A есть амплитуда, а I — энтрофия возмущения.

Теорема 1. *Рассмотрим задачу (1-2) в криволинейном прямоугольнике D . Предположим, что выполняются условия (R1)-(R3). Предположим ещё, что функция γ представима в виде $\gamma = Q\bar{\gamma}(z) + \tilde{\gamma}$, причём $\sup_{S^+} \bar{\gamma} < 0$, $\inf_{S^-} \bar{\gamma} > 0$, $\bar{\gamma} \equiv 0$*

на S_0 . Пусть ω^+ строго монотонная функция или константа. Найдётся число $Q^* = Q^*(D, \omega^+) > 0$, такое, что для любого $Q > Q^*$ выполняются следующие утверждения: **(а)** задача (1-2) имеет стационарное решение \mathbf{V} , которому соответствует сквозное течение.; **(б)** система (1-2) допускает положительный убывающий функционал Ляпунова $|W|$ и оценку $I(t) \leq C_1 I_0$, где C зависит лишь от основного течения и может быть взята общей для всех $Q > Q_*$; **(в)** Найдутся числа $\varrho_0 = \varrho_0(A_0, \mathbf{V}) > 0$, $t^* = t^*(A_0, \mathbf{V}, D) < \infty$ и $q = q(A_0, \mathbf{V}, D) < 1$ такие, что

$$I(t) \leq C_1 q^{2\lfloor t/t^* \rfloor} I_0 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

при условии $I_0 \leq \varrho_0$. Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа; числа ϱ_0 , q , t^* , C_1 зависят лишь от основного потока и от амплитуды начального возмущения, и могут быть взяты общими для всех $Q > Q_*$. Если же $\omega^+ \equiv \text{const}$, то $q = 0$, так что $I(t) = 0$ и $\mathbf{v}(\cdot, t) \equiv \mathbf{V}$ при любом $t > t^*$.

Замечание 1. Убывание функционала $|W|$ вдоль возмущенных движений влечёт устойчивость по Ляпунову в метрике энтропии, а затухание возмущений описывается неравенством (6). Первая из этих оценок глобальна, а вторая локальна: имеется ограничение малости для начальных возмущений. Специфика этого ограничения состоит в том, что требуется малость энтропии, но её пороговая величина зависит от амплитуды начального возмущения. Например, рассмотрим начальное возмущение с завихренность вида $\eta(h^{-1}(z - z_0))$, где $\eta = \eta(\zeta)$ — гладкая функция, отличная от нуля лишь в единичном круге с центром в точке $\zeta = 0$, h — заданное число, и $z_0 \in D$. Пусть $h \rightarrow 0$. Тогда $I_0 \rightarrow 0$, а A_0 остаётся постоянной. Таким образом, ограничение малости выполняется при всех достаточно малых h . *Замечание 2.* Локальный характер асимптотической устойчивости соответствует существу дела. Известны примеры, сосуществования сквозного стационарных течения и одного или нескольких течений с застойными зонами при одних и тех же граничных условиях. Например, сквозной потенциальный поток может сосуществовать с вихревым течением, завихренность которого сосредоточена в застойной зоне, не имеющей общих точек ни со входом, ни с выходом течения. Существование такого «застойного» течения доказано в статье [8]. Ее результаты развивались в работе [9]. Недавние численные эксперименты [1] показали, что стационарные вихревые структуры с одной и более застойными зонами сосуществуют как с потенциальными, так и с вихревыми сквозными течениями.

Пример 1. Рассмотрим сдвиговые течения сквозь прямоугольный канал $D = \{z = (x, y) : 0 < x < l; 0 < y < 1\}$. Пусть профили течений имеет вид $U(y) = Q + \tilde{U}(y)$, где \tilde{U} определяет течение с нулевым расходом. Если $Q > \max(0, -\min_y \tilde{U}(y))$, то данное течение является сквозным, его вход совпадает с той стороны прямоугольника D , на которой $x = 0$, а выход совпадает с противоположной стороной. Поле $\mathbf{V} = (U, 0)$ будет стационарным решением задачи (1-2), если положить $\gamma(0, y) = -U(y)$, $\gamma(l, y) = U(y)$, $\gamma(x, 0) = \gamma(x, 1) = 0$, и $\omega^+(y) = -U'(y)$. Предположим, что $\inf\{|\tilde{U}''(y)|, y \in [0, 1]\} > 0$. По теореме 1, профиль $U(y) = Q + \tilde{U}(y)$ асимптотически устойчив при любой фиксированной функции \tilde{U} для всех достаточно больших Q .

Данная работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00895-а) и выполнена в рамках

европейской лаборатории «Регулярная и хаотическая гидродинамика».

Список литературы

- [1] Говорухин В.Н., Моргулис А.Б., Юдович В.И. Расчёт двумерных режимов протекания идеальной жидкости несжимаемой жидкости сквозь прямолинейный канал. Доклады академии наук. 2007. Т. 412. № 4. С. 480-484.
- [2] Gallaire, F. and Chomaz, J.-M. 2004 The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown, *Physics of Fluids* **16**, iss. 2, pp. 274-286.
- [3] Morgulis A. and Yudovich V. 2002 Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary. *Chaos* **12**, iss. 2, 356-371.
- [4] Антонцев С.Н., Кажихов А.В, Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
- [5] Арнольд, В.И. Об одной априорной оценке гидродинамической теории устойчивости. Известия ВУЗов. Математика. 1966. Т. 5. С.3-5.
- [6] Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область Матем. сб., 1964. Т. 64(106):4. С. 562-588.
- [7] Antontsev, S.N. and Chemetov, N.V. Euler equations with non-homogeneous Navier slip boundary conditions. 2008 *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**, Iss. 1, 92-105
- [8] Гольдштик, М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
- [9] Elcart, A. and Miller, K. 2001 A monotone iteration for concentrated vortices. *Nonlinear Analysis*, **44**, 777-789.

Morgulis A.B. *Non-linear asymptotic stability for the steady flows of inviscid fluid through plane channels.* Annotation. The paper addresses the dynamics of inviscid incompressible fluid confined within bounded domain with the inflow and outflow of fluid through the certain parts of the boundary. This system is non-conservative essentially since the fluxes of energy and vorticity through the flow boundary are not equal to zero. Therefore, the dynamics of such flows should demonstrate the generic non-conservative phenomena such as the asymptotic stability of the equilibria, the onset of the instability or the excitation of the self-oscillations *e.t.c.*. These phenomena are studied extensively for the flows of the viscous fluids but not for the inviscid ones. In this paper, we prove a sufficient condition for the non-linear asymptotic stability of the inviscid steady flows.

РЕДУЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ГЛУБОКОМ ПРОТЯЖЕННОМ РУСЛОВОМ ПОТОКЕ

Надолин К.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается перенос пассивной неконсервативной примеси в слабо искривленном открытом стационарном русловом потоке. Считается, что ложе потока задано достаточно гладкой функцией, а сам поток — протяженный и глубокий, т.е. длина рассматриваемого участка много больше его ширины и глубины, которые, в свою очередь, имеют близкие размеры. Используя разработанную ранее методику получения редуцированных математических моделей для русловых течений, удастся при постоянной вязкости свести решение сложной трехмерной задачи к решению последовательности стандартных двумерных задач на сечении.

1. Модельные уравнения. Уравнения редуцированной математической модели распространения пассивной неконсервативной примеси в глубоком протяженном стационарном потоке с плоской свободной границей имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d_{yz} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{zy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{zz} \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c, \\ c|_{t=0} &= c^o, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \pi^o, \\ \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{z=h} &= 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -GI, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -F_x, \quad u|_{z=h(x,y)} = 0. \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -F_y, \quad w|_{z=0} = 0, \quad v = w|_{z=h(x,y)} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь c — концентрация примеси; u, v, w — компоненты вектора скорости в продольном, поперечном и вертикальном направлениях соответственно; $d_{yy}, d_{yz} = d_{zy}$ и d_{zz} — коэффициенты турбулентной диффузии; λ — параметр распада вещества; c^o и π^o — начальное распределение вещества и его приток через входное сечение, соответственно; $h(x, y)$ — функция, задающая форму русла; ν — параметр турбулентной

вязкости (в случае постоянной вязкости он равен 1); GI – параметр, характеризующий уклон русла; F_x и F_y – параметры, характеризующие внешнее воздействие на поверхность потока (связанное, например, с наличием ветра).

Прямоугольные декартовы координаты x , y и z введены так, что плоскость xy лежит на поверхности потока, а ось z направлена в сторону дна. Ось x направлена по уклону потока, а ось y – от левого берега к правому перпендикулярно оси x . Начало координат находится во входном сечении рассматриваемого участка русла на одинаковом расстоянии от берегов (рис. 1)

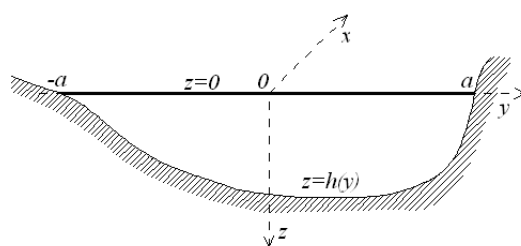


Рис. 1. Сечение потока

Начально-краевая задача (1) образует концентрационную подсистему, а краевая задача (2), (3) – гидродинамическую подсистему математической модели перемешивания примеси в глубоком протяженном потоке.

В свою очередь, система (2), (3) состоит из двух подсистем: независимой краевой задачи (2) для определения продольной скорости $u(x, y, z)$ и краевой задачи (3) для определения поперечной $v(x, y, z)$ и вертикальной $w(x, y, z)$ скоростей, где функция $u(x, y, z)$ уже считается известной.

Для продольной скорости $u(x, y, z)$ имеем стандартную смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона (2), которая решается независимо, причем координата x входит в краевое условие как параметр.

Для поперечной и вертикальной скорости $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ имеем неоднородную краевую задачу (3), где правые части уравнений содержат $u(x, y, z)$ и могут считаться известными. Координата x также входит в краевое условие и в правую часть (3) как параметр.

Таким образом, гидродинамическая подсистема (2), (3) формально являясь трехмерной, фактически представляет собой две двумерные граничные задачи, которые должны решаться последовательно на сечениях, расположенных вдоль потока. Подобное расщепление может оказаться весьма удобным при использовании для расчетов многопроцессорных вычислительных систем.

Заметим, что для вычисления такой важной гидравлической характеристики потока, как расход, достаточно найти лишь продольную скорость $u(x, y, z)$ в заданном сечении.

2. Гидродинамическая подсистема. Случай постоянной вязкости. И гидродинамическая подсистема (2), (3), и концентрационная подсистема (1) должны решаться численно, во всяком случае, для потоков с произвольной формой сечения русла и переменными коэффициентами турбулентной вязкости и диффузии. Однако в случае постоянной вязкости (т.е. при $\nu = 1$) возможны дальнейшие

упрощения гидродинамической подсистемы и сведение ее к решению последовательности стандартных краевых задач.

Продольная компонента скорости $u(y, z)$ определяется из смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -GI, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = -F_x, \quad u \Big|_{z=h(y)} = 0. \quad (4)$$

Здесь и далее Δ – двумерный оператор Лапласа по переменным y и z .

Решение смешанной задачи (4) удобно представить в виде

$$u(y, z) = U(y, z) + F_x(h(y) - z), \quad (5)$$

где $U(y, z)$ – решение вспомогательной стандартной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U = -g(y), \quad g(y) = GI + F_x h''(y), \quad U \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Область, для которой решается задача (6), получена симметричным продолжением сечения потока в полуплоскость $z < 0$, а ее граница Γ определяется уравнением $h^2(y) - z^2 = 0$.

Для вертикальной и поперечной компонент скорости $v(y, z)$ и $w(y, z)$ из (3) при постоянной вязкости имеем краевую задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -F_y, & w \Big|_{z=0} &= 0, & v \Big|_{z=h(y)} &= w \Big|_{z=h(y)} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое уравнение (7) перепишем в виде

$$\Delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда, выражая поперечную и вертикальную компоненты вектора скорости через потенциал $\phi(y, z)$ и функцию тока $\psi(y, z)$ по формулам [2]

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9)$$

приходим, после подстановки (9) в первое уравнение (7) с учетом (8), к краевой задаче для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 \psi = 0, \quad \Delta \psi \Big|_{z=0} = -F_y,$$

которое заменой $\Omega = -\Delta \psi$ приводится к краевой задаче для уравнения Лапласа

$$\Delta \Omega = 0, \quad \Omega \Big|_{z=0} = F_y. \quad (10)$$

Заметим, что функция Ω представляет собой вихрь вектора (v, w) [2]

$$\Omega = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}.$$

В качестве решения задачи (10) определим гармоническую в полуплоскости $z \geq 0$ функцию, равную нулю везде на оси y , кроме отрезка $-a \leq y \leq a$, где она имеет значение F_y . Смысл параметра a поясняет рис. 1. В этом случае интеграл Пуассона имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \Omega(y, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega|_{z=0} z}{(\tau - y)^2 + z^2} d\tau = \frac{F_x}{\pi} \int_{-a}^a \frac{z}{(\tau - y)^2 + z^2} d\tau = \\ &= \frac{F_x}{\pi} \left(\arctan \frac{a + y}{z} + \arctan \frac{a - y}{z} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя представление (11), запишем выражение для функции тока, как решения уравнения Пуассона $\Delta\psi = -\Omega$

$$\psi(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d\gamma + \frac{1}{2\pi} \int_D \Omega \ln \frac{1}{r} d\omega. \quad (12)$$

Далее, после подстановки представления (9) в уравнение неразрывности (второе уравнение в задаче (7)), получим краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta\phi = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_{z=h} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \Big|_{z=h}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Big|_{z=h}. \quad (14)$$

Формулы (14) задают нормальную производную функции $\phi(y, z)$ на границе области сечения. Действительно, если граница плоской области задана уравнением $\eta(y, z) = 0$, то нормальная производная функции $\phi(y, z)$ на этой границе вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\eta=0} = (\nabla\phi, \mathbf{n}) = \frac{1}{\|\nabla\eta\|} (\nabla\phi, \nabla\eta). \quad (15)$$

В случае, когда $\eta(y, z) = h(y) - z$ (см. рис. 1), формула (15) принимает вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{z=h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \Big|_{z=h}$$

а на плоской свободной границе $z = 0$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{z=0} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \Big|_{z=0}$$

Таким образом, решение задачи (13), (14) может быть записано как интеграл вида

$$\phi(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{\partial u}{\partial x} \ln \frac{1}{r} d\omega \quad (16)$$

Из условия разрешимости задачи (13), (14) следует дополнительное условие, которому должна удовлетворять функция тока (12) и ее нормальная производная на границе области сечения потока

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{z=h} dy - \psi(a, 0) + \psi(-a, 0) = \int_{-a}^a \int_0^{h(y)} \frac{\partial u}{\partial x} dz dy \quad (17)$$

Итак, решение гидродинамической подсистемы, когда вязкость потока можно считать постоянной, состоит из следующих шагов:

- находим решение вспомогательной стандартной задачи Дирихле для уравнения Пуассона (6), и получаем продольную скорость (5);
- с учетом (11) находим функцию тока (12), удовлетворяющую условию (17);
- находим потенциал (16), используя краевые условия (14);
- находим поперечную и вертикальную скорость по формулам (9).

Для простых сечений (прямоугольник, полукруг) указанный алгоритм решения можно реализовать аналитически.

Работа выполнена по проекту РНП.2.2.1.1.3719 аналитической ведомственной целевой программы Министерства образования и науки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)"

Список литературы

- [1] *Надолин К.А.* Моделирование массопереноса в русловых потоках // В кн. Моделирование и вычислительный эксперимент в задачах механики сплошных сред. Т. 1. Ростов-на-Дону: Из-во ЦВВР, 2006. С. 18–46.
- [2] *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
- [3] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Nadolin K.A. *The reduced mathematical model for the mass transport in deep lengthy bed-stream.*

The mass transport of the passive nonconservative admixture in the low-curved open steady bed-stream is considered. The channel bed is assumed to be known and quite smooth and the stream is assumed to be lengthy and deep, so the channel's length is much bigger than its width and depth, but channel's width and depth have the same order. On the base of the previously elaborated technique of the derivation the reduced bed-stream mathematical models, the complicated 3D problem in the case of constant viscosity is lucky comes to the chain of ordinary 2D problems, which are poses on the cross-sections of the stream.

РАСЧЕТ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ФОКУСИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ИЗ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ ПО УТОЧНЕННОЙ МЕТОДИКЕ

Наседкин А.В., Домашенкина Т.В., Рыбьянец А.Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Дан анализ фокусирующего сферического пьезоизлучателя из пористой пьезокерамики, нагруженного на акустическую среду. С использованием метода конечных элементов (МКЭ) определены рабочие резонансные частоты толщинных колебаний, проведено уточнение предварительно рассчитанных эффективных модулей по обобщенной модели Ковина-Нунзиато и экспериментальным данным, вычислены амплитудно-частотные характеристики свободного и нагруженного пьезоизлучателя.

В качестве объекта моделирования рассмотрим сферический пьезоизлучатель с цилиндрическим отверстием посередине. Меридиональное сечение пьезоизлучателя показано на рис. 1. Пьезоизлучатель выполнен из пористой пьезокерамики, поляризованной вдоль направлений, перпендикулярных торцевым поверхностям. При работе на толщинных модах колебаний пьезоизлучатель генерирует волны в окружающую акустическую среду, которые фокусируются в фокальной точке O_f — центре сферических торцевых поверхностей излучателя. Данное устройство предназначено для медицинских применений при создании достаточно сильных ультразвуковых полей в фокальной зоне. Использование пористой пьезокерамики позволяет снизить акустический импеданс пьезопреобразователя для лучшего согласования с акустическим импедансом мягких тканей человека.

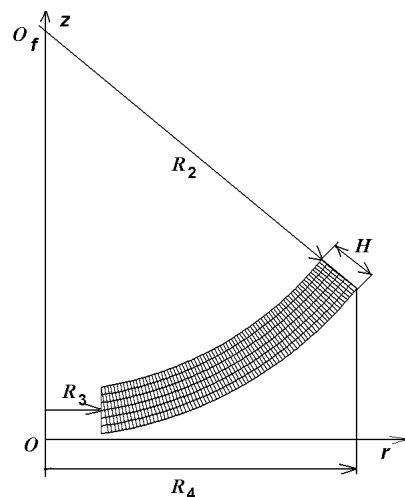


Рис. 1. Сферический пьезоизлучатель с отверстием

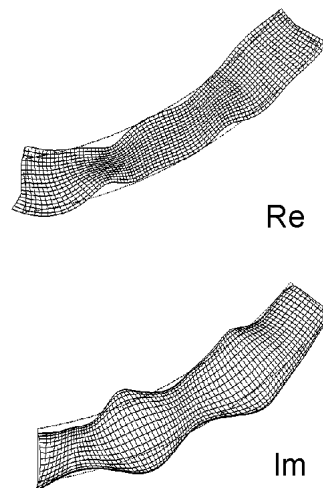


Рис. 2. Формы колебаний на резонансной частоте

Геометрические размеры излучателя примем следующими: $R_1 = 61$ (мм) — внешний радиус; $R_2 = 54$ (мм) — внутренний радиус; $H = R_1 - R_2 = 7$ (мм) —

толщина; $R_3 = 8.5$ (мм) — радиус отверстия; $R_4 = 47.5$ (мм) наибольший диаметр сферического сегмента относительно оси z . Торцевые поверхности $r_f = R_1$ и $r_f = R_2$ излучателя покрыты бесконечно тонкими электродами, используемыми при поляризации материала пьезокерамики и при дальнейшей работе устройства. Таким образом, пьезокерамика поляризована по радиусу r_f . В этом случае структура матриц физических констант в двухиндексных обозначениях Фойхта относится к сферической системе координат, связанной с фокальным центром O_f .

В качестве материала пьезоизлучателя выберем пьезокерамику ПКР-8 с пористостью 20 %. Механические, диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные пьезокерамики ПКР-8 возьмем следующими: $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ (кг/м³); $c_{11}^E = 11.4 \cdot 10^{10}$; $c_{12}^E = 5.9 \cdot 10^{10}$; $c_{13}^E = 5.3 \cdot 10^{10}$; $c_{33}^E = 10.1 \cdot 10^{10}$; $c_{44}^E = 2.5 \cdot 10^{10}$ (Н/м²); $e_{31} = -7.9$; $e_{33} = 12.5$; $e_{15} = 11.6$ (Кл/м²); $\epsilon_{11}^S = 730\epsilon_0$; $\epsilon_{33}^S = 630\epsilon_0$; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ (Ф/м). Исходя из этих данных, для пьезокерамики ПКР-8 с пористостью 20 %, согласно подходам [1, 2] можно вычислить эффективные модули: $\rho^{pth} = 6.24 \cdot 10^3$ (кг/м³); $c_{11}^{E,pth} = 7.5 \cdot 10^{10}$; $c_{12}^{E,pth} = 3.41 \cdot 10^{10}$; $c_{13}^{E,pth} = 2.94 \cdot 10^{10}$; $c_{33}^{E,pth} = 6.49 \cdot 10^{10}$; $c_{44}^{E,pth} = 2.12 \cdot 10^{10}$ (Н/м²); $e_{31}^{pth} = -4.01$; $e_{33}^{pth} = 11.7$; $e_{15}^{pth} = 8.51$ (Кл/м²); $\epsilon_{11}^{S,pth} = 583\epsilon_0$; $\epsilon_{33}^{S,pth} = 537\epsilon_0$; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ (Ф/м).

Для пористой пьезокерамики, аналогично сплошной керамике [3], можно поставить эксперименты для определения эффективных модулей. По методике [3] константы пьезокерамики определяются по экспериментальным измерениям характеристик колебаний на основных модах канонических образцов и по аналитическим формулам, полученным из простых одномерных моделей колебаний на резонансных модах. Таким образом, эти методы являются фактически экспериментально-теоретическими. По данным методикам были определены следующие характеристики пористой пьезокерамики ПКР-8: пьезомодули d_{33}^{pexp} , d_{31}^{pexp} и скорость толщинных волн v_t^{pexp} . (Здесь использованы стандартные обозначения для пьезоэлектрических констант d_{ij} , v_t и др.). Подобные константы можно пересчитать и из значений модулей $c_{\alpha\gamma}^{E,pth}$, $e_{i\alpha}^{pth}$, $\epsilon_{ij}^{S,pth}$. Полученные таким образом величины обозначим через d_{33}^{pth} , d_{31}^{pth} и v_t^{pth} . Как оказалось [2], для пьезокерамики ПКР-8 теоретические и экспериментальные значения пьезомодуля d_{33} практически совпали, но теоретические значения (верхние обозначения "pth") пьезомодуля d_{31} и скорости v_t оказались завышенными по сравнению с экспериментальными (верхние обозначения "pexp"). Заметим, что подобные расхождения эффективных модулей для пористой пьезокерамики отмечались ранее [1, 2], и для уточнения теоретических значений предлагалось использовать дополнительные гипотезы о поляризованности материала в окрестности пор.

Здесь для уточнения "теоретических" модулей пористой пьезокерамики, используем модель Ковина-Нунзиато для учета изменения пористости. Обобщая модель Ковина-Нунзиато упругой среды с пустотами [4] на случай пьезоэлектрических сред [5] и добавляя члены, связанные с потерями, определяющие соотношения в двухиндексных обозначениях представим в форме

$$T_\alpha = c_{\alpha\beta}^E(S_\beta + \beta_d \dot{S}_\beta) - e_{i\alpha} E_i + B_\alpha \psi, \quad (1)$$

$$D_i = e_{i\beta} S_\beta + \epsilon_{ik}^S E_k - g_i \psi - G_{ik} \psi_{,k}, \quad (2)$$

$$h_i = A_{ik} \psi_{,k} + G_{ik} E_k, \quad g = -B_\beta S_\beta - g_k E_k - \xi \psi, \quad (3)$$

где T_α, S_α – компоненты псевдовекторов напряжений и деформаций размерности 6; D_i – компоненты вектора электрической индукции; h_i – компоненты вектора "самоуравновешенных напряжений" (вектора потока пористости); g – плотность внутренних самоуравновешенных распределенных сил; $c_{\alpha\beta}^E$ – компоненты матрицы упругих модулей размера 6×6 , измеренных при постоянном электрическом поле; $e_{i\beta}$ – компоненты матрицы пьезомодулей размера 3×6 ; ϵ_{ik}^S – компоненты тензора тензор диэлектрических проницаемостей второго ранга, измеренных при постоянной деформации; $A_{ik}, B_\beta, g_i, G_{ik}, \xi$ – материальные константы пьезоэлектрической среды, характеризующие изменение пористости; β_d – коэффициент демпфирования.

Дифференциальные уравнения для пьезоэлектрической среды с пустотами состоят их полевых уравнений (уравнение движения с учетом демпфирования, уравнение квазиэлектростатики и уравнение, описывающее изменение пористости материала), которые для медленных по сравнению со скоростью упругих волн процессов и в пренебрежении инерционными членами для изменения пористости можно записать в виде:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i + \alpha_d \rho \dot{u}_i; \quad D_{i,i} = 0, \quad (4)$$

$$h_{i,i} + g + \rho l = 0, \quad (5)$$

где ρ – плотность материала; f_i – компоненты вектора плотности массовых сил; α_d – дополнительный коэффициент демпфирования; l – плотность внешних самоуравновешенных сил.

Предлагаемая методика включает следующие этапы:

- определение характеристик пористого пьезокомпозиционного материала по методу эффективных модулей из конечно-элементных решений пяти специальных статических задач электроупругости для представительного объема структуры 3-3 связности [1, 2];
- сравнение основных характеристик, определяемых по полученным значениям эффективных модулей, с соответствующими величинами, полученными из экспериментов и прикладных расчетных формул;
- подбор значений материальных свойств, отвечающих за свойства изменения пористости, минимизирующие расхождения выбранных характерных параметров пористой пьезокерамики, полученные по методам эффективных модулей и в результате обработки экспериментальных данных.

Примем следующие значения для модулей пьезокерамики, связанных с пористостью: $B_1 = \beta b_1, B_2 = \beta b_2, b_1 = b_2, B_3 = \beta b_3, B_4 = B_5 = B_6 = 0, g_3 = \beta g, A_{ii} = G_{ii} = 0$. При такой структуре констант, используя (5), можно исключить функцию изменения пористости из уравнений состояния (1)–(3), и получить уточненные модули пьезокерамики $\tilde{c}_{kl}^E = c_{kl}^E - N c_{11}^E b_k b_l, \tilde{e}_{3k} = e_{3k} + N c_{11}^E g, k=1, 3, l=1, 2, 3, \tilde{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^S + N c_{11}^E g^2$, где $N = \beta^2 / (\xi c_{11}^E)$ – константа связности. Уточняемые по данным формулам теоретические значения модулей пористой пьезокерамики будем помечать верхними буквами pCN . Примем $N = 1$, и будем искать значения b_1, b_3, g , минимизирующие целевую функцию Y :

$$Y^2 = \frac{(d_{33}^{pCN} - d_{33}^{pth})^2}{d_{33}^2} + \frac{(d_{31}^{pCN} - d_{31}^{pth})^2}{d_{31}^2} + \frac{(v_t^{pCN} - v_t^{pth})^2}{v_t^2}.$$

Для рассматриваемого случая пьезокерамики с пористостью 20 % были получены следующие "оптимальные" значения констант пористости: $b_1 = 0.53$, $b_3 = 0.6$, $g = -3 \cdot 10^{-11}$ (в системе СИ). Данные значения вместе с вычисленными ранее теоретическими значениями пористой пьезокерамики ПКР-8 с пористостью 20 % использовались в дальнейших конечно-элементных расчетах.

Для численного анализа пьезоизлучателя построим конечно-элементную секту из четырехугольных конечных элементов с билинейной аппроксимацией полей. Пример такой сетки при разбиении грани $r_f = R_2$ на $n_{R2} = 80$ конечных элементов и при разбиении грани H на $n_H = 16$ элементов показан на рис. 1. Конечные элементы, имеющие в средних точках единые нормали по радиальному направлению r_f имеют одинаковые элементные системы координат, обеспечивающие в результате и одинаковые радиальные поляризации.

В результате решений конечно-элементных задач на собственные значения были найдены частоты первых толщинных мод электрических резонансов $f_{hr1}^t = 182$ (кГц) и антирезонансов $f_{ha1}^t = 223$ (кГц), где $f = \omega/(2\pi)$. Отметим, что данные резонансные частоты совпали с частотами, найденными по экспериментально полученному графику функции электрического импеданса $Z = Z(f)$ пьезоизлучателя в режиме установившихся колебаний. Найденные по МКЭ вещественные и мнимые формы колебаний пьезоизлучателя на первой частоте толщинного электрического резонанса показаны на рис. 2. Как обычно для толщинных мод, формы колебаний имеют волнообразования вдоль излучающих радиальных поверхностей, что однако не препятствует успешной фокусировке волн в фокальной зоне.

Для проверки эффективности рассматриваемого устройства решим также конечно-элементные задачи для режима установившихся колебаний. Построенный в итоге численных вычислений график зависимости электрического импеданса Z от частоты при подаче разности потенциалов на электродах $V = V_0 \exp[j\omega t]$; $V_0 = 20$ (В) и при добротности $Q = 15$ показан на рис. 4. При вычислениях констант демпфирования α_d , β_d находились по добротности Q на интервале (f_{bd}, f_{ed}) , $f_{bd} = 150$ (кГц), $f_{ed} = 270$ (кГц). Именно, предполагая, что добротность Q имеет одинаковые значения на концах отрезка (f_{bd}, f_{ed}) , находим коэффициенты демпфирования α_d и β_d по формулам, стандартным для чисто упругого тела: $\alpha_d = 2\pi f_{bd} f_{ed} / [(f_{bd} + f_{ed})Q]$, $\beta_d = [2\pi(f_{bd} + f_{ed})Q]^{-1}$.

Как видно из графика на рис. 3, амплитуда электрического импеданса имеет максимум и минимум на частотах резонансов и антирезонансов, соответственно, найденных ранее из решений задач на собственные значения. На рис. 3 пунктирной линией показан также график электрического импеданса пьезоизлучателя, нагруженного на рабочую акустическую среду. В качестве акустической среды было взято парафиновое масло со следующими физическими константами: плотность $\rho_a = 0.835 \cdot 10^3$ (кг/м³), скорость звука $c_a = 1.42 \cdot 10^3$ (м/с). При расчетах пьезоизлучатель окружался акустической средой, включающей фокальную зону. Акустические области разбивались на конечные элементы с акустическими свойствами. Решение связанной гармонической задачи пьезоэлектричества для тел с пустотами, граничащими с акустической средой, проводилось по МКЭ с сопряжением уравнений пьезоэлектричества и акустики. Как видно из рис. 3, учет акустической нагрузки сдвигает влево резонансные частоты и увеличивает демпфиру-

ющие свойства системы. Здесь при учете акустической нагрузки первая частота толщинного электрического резонанса f_{hr1}^t уменьшается с 182 до 174 (кГц).

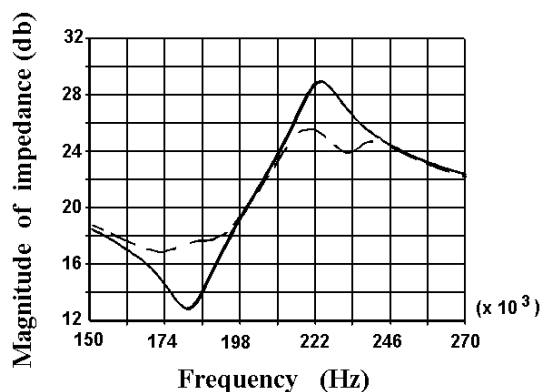


Рис. 3. АЧХ электрического импеданса

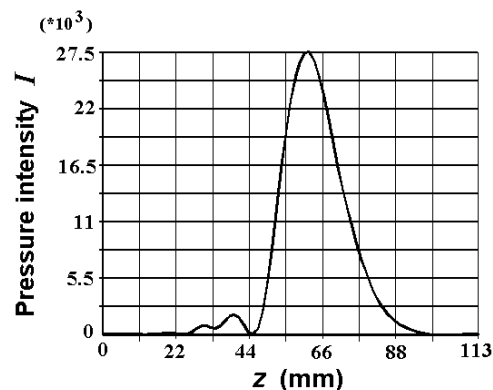


Рис. 4. Интенсивность акустического давления

Характеристики фокального пятна иллюстрирует рис. 4, где показан график зависимости интенсивности акустического давления I от расстояния z вдоль оси симметрии $0z$ (Рис. 1). Здесь интенсивность акустического давления I определялась по результатам конечно-элементных вычислений акустического давления p и акустической скорости v по формуле: $I = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re} p \text{Re} v dt$; $T = 2\pi/\omega = 1/f$.

Из рис. 4 видно, что максимум интенсивности акустического давления I достигается в фокусе $z = R_1 = 61$ (мм), и интенсивность акустического давления сильно нарастает при приближении к фокальной зоне, что свидетельствует об эффективности рассматриваемого устройства.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00828).

Список литературы

- [1] *Getman I., Lopatin S.* Theoretical and experimental investigation of the porous PZT ceramics // *Ferroelectrics*. 1996. V. 186. P. 301–304.
- [2] *Nasedkin A., Rybjanets A., Kushkuley L., Eshel Y., Tasker R.* Different approaches to finite element modelling of effective moduli of porous piezoceramics with 3-3 (3-0) connectivity // *Proc. 2005 IEEE Ultrason. Symp., Rotterdam, Sept. 18-21, 2005*. 2005. P. 1648–1651.
- [3] *IEEE Standart on Piezoelectricity // IEEE SU-31*. 1988. V. 2. P. 8–55.
- [4] *Cowin S.C., Nunziato J.W.* Linear elastic materials with voids // *J. Elasticity*. 1983. V. 13. P. 125–147.
- [5] *Ciarletta M., Scarpetta E.* Some results on thermoelasticity for porous piezoelectric materials // *Mech. Res. Commun*. 1996. V. 23. P. 1–10.

Nasedkin A.V., Domachenkina T.V., Rybjanets A.N. *Analysis of ultrasonic focusing emitter from porous piezoceramic by more precise technique.* The focusing spherical ultrasonic piezoelectric emitter fulfilled from porous piezoceramics is considered. With the use of Cowin-Nunziato model the effective modules of the porous piezoceramic material are defined more precisely and that allow to obtain in good optimal agreement with the experimental data. The modal and harmonic analyses for free and loaded on acoustic media piezoelectric transducer are realized.

РАСЧЕТ КОНВЕКЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Немцев А.Д.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

На основе уравнений фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости и метода смещенных сеток разработана программа Diff для исследования конвективных движений. Программа позволяет проводить расчеты конвективных режимов и продолжать их по параметрам задачи, исследовать переходы от стационарных к нестационарным движениям, анализировать спектр устойчивости стационарных режимов. Представлены результаты расчета конвекции для двухкомпонентной жидкости, насыщающей пористый параллелепипед с двумя противоположными теплоизолированными боковыми гранями и линейным распределением температуры по высоте для других граней.

Постановка задачи

Уравнения конвекции многокомпонентной жидкости с учетом массовых сил, источников тепла и примесей на основе модели Дарси выведены В.И. Юдовичем в [1]. В случае двумерной задачи фильтрационной конвекции эта система уравнений может обладать косимметрией [2] и иметь однопараметрическое семейство стационарных решений [3]. При отсутствии массовых сил и внутренних источников тепла уравнения фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости записываются в следующем виде

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \vec{v} + \sum_{r=1}^S \lambda_r \theta^r \vec{k}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\beta_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^r = \kappa_r \Delta \theta^r + \vec{v} \cdot \vec{k}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}(x, y, z, t)$ – векторное поле скорости, $p(x, y, z, t)$ – давление, $\theta^1(x, y, z, t)$ – температура, отсчитываемая от среднего значения, S – число примесей, $\theta^r(x, y, z, t)$, $r = 2, \dots, S$ – отклонения массовых концентраций от средних значений, (x, y, z) – точка области D , занятой жидкостью, t – время, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ – орт, противоположный направлению силы тяжести. Безразмерные параметры ε , λ_r , κ_r представляют собой коэффициент пористости, параметр Рэлея и коэффициент диффузии соответственно.

Задача рассматривается в параллелепипеде $D = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$. В качестве краевых условий для скорости принимается условие непротекания, для температуры на двух противоположных боковых гранях $\partial_1 D = \{y = 0\} \cup \{y = L_y\}$ ставится условие отсутствия теплового и концентрационных потоков. На остальных гранях $\partial_2 D = \partial D \setminus \partial_1 D$ поддерживается равновесное распределение температуры и концентраций примесей

$$\vec{n} \cdot \vec{v}|_{\partial D} = 0, \quad \frac{\partial \theta^r}{\partial y} \Big|_{\partial_1 D} = 0, \quad \theta^r|_{\partial_2 D} = 0, \quad r = 1, \dots, S. \quad (3)$$

Начальные условия задаются для векторного поля скорости \vec{v} , температуры и компонент примесей θ^r

$$\vec{v}(x, y, z, 0) = \vec{v}_0(x, y, z), \quad \theta^r(x, y, z, 0) = \varphi_0^r(x, y, z), \quad r = 1, \dots, S. \quad (4)$$

Дискретизация

Дискретизация краевой задачи (1)–(3) осуществляется методом смещенных сеток [4], для чего по пространственным координатам вводятся основные и вспомогательные сетки

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = 0, \dots, N_x + 1, \quad h_x = L_x/(N_x + 1), \quad x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2, \\ y_j &= -h_y/2 + jh_y, \quad j = 0, \dots, N_y + 1, \quad h_y = L_y/N_y, \quad y_{j+1/2} = (y_j + y_{j+1})/2, \\ z_k &= kh_z, \quad k = 0, \dots, N_z + 1, \quad h_z = L_z/(N_z + 1), \quad z_{k+1/2} = (z_k + z_{k+1})/2. \end{aligned}$$

Здесь N_x , N_y и N_z – количество внутренних узлов основной сетки.

В узлах (x_i, y_j, z_k) определяется значение температуры θ^1 и концентрации примесей: $\theta_{i,j,k}^r$. На вспомогательных сетках, смещенных относительно точек $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$ на полшага по соответствующей координате, вычисляются компоненты вектора скорости v^1 , v^2 и v^3 . Давление рассчитывается в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$.

Такая дискретизация позволяет автоматически удовлетворить краевым условиям для температуры и скорости на границе $\partial_2 D$. С помощью законтурных узлов для температуры и скорости v^2 реализованы краевые условия второго рода на границе $\partial_1 D$.

Разностные аналоги дифференциальных операторов первого порядка и операторы усреднения по координатам введены на двухточечных шаблонах:

$$\begin{aligned} d_1 \theta_{i+1/2,j,k} &= \frac{\theta_{i+1,j,k} - \theta_{i,j,k}}{h_x}, & d_2 \theta_{i,j+1/2,k} &= \frac{\theta_{i,j+1,k} - \theta_{i,j,k}}{h_y}, \\ d_3 \theta_{i,j,k+1/2} &= \frac{\theta_{i,j,k+1} - \theta_{i,j,k}}{h_z}, & \delta_1 \theta_{i+1/2,j,k} &= \frac{\theta_{i+1,j,k} + \theta_{i,j,k}}{2}, \\ \delta_2 \theta_{i,j+1/2,k} &= \frac{(\theta_{i,j+1,k} + \theta_{i,j,k})}{2}, & \delta_3 \theta_{i,j,k+1/2} &= \frac{\theta_{i,j,k+1} + \theta_{i,j,k}}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Конвективные члены аппроксимируются следующим образом [4]:

$$J(\theta, v)_{i,j,k} = \left[\frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 d_s \delta_s \left(\theta \prod_{r=1}^3 \delta_r v^s \right) + \frac{2}{3} \sum_{s=1}^3 d_s \prod_{r=1}^3 \delta_r (\delta_0 \theta \delta_s v^s) \right]_{i,j,k} \quad (6)$$

Для расчета стационарных движений используется метод искусственной сжимаемости: в системе (1) вместо уравнения неразрывности рассматривается уравнение

$$\partial_t p + \zeta^{-1} \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (7)$$

Аппроксимация уравнений (1), (7), (2) записывается с помощью разностных операторов (5)–(6):

$$\begin{aligned}
 & \left[\dot{v}^1 - \varepsilon^{-1}(-d_1 p - v^1) \right]_{i,j+1/2,k+1/2} = 0, \\
 & \left[\dot{v}^2 - \varepsilon^{-1}(-d_2 p - v^2) \right]_{i+1/2,j,k+1/2} = 0, \\
 & \left[\dot{v}^3 - \varepsilon^{-1}(-d_3 p - v^3 + \sum_{r=1}^S \lambda_r \delta_1 \delta_2 \theta^r) \right]_{i+1/2,j+1/2,k} = 0, \\
 & \left[\dot{p} + \zeta^{-1}(d_1 v^1 + d_2 v^2 + d_3 v^3) \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = 0, \\
 & \left[\beta^r \dot{\theta}^r - \kappa_r \Delta_h \theta^r - \delta_1 \delta_2 v^3 + J(\theta^r, v) \right]_{i,j,k} = 0, \quad r = 1, \dots, S.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) проводилось при помощи метода Рунге-Кутты.

Результаты расчетов

На основе описанного метода была разработана программа Diff в среде Delphi для расчета фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости в параллелепипеде. В программе реализовано вычисление спектра стационарных режимов при помощи вызова функций OLE-сервера MATLAB. Интерфейс программы позволяет выводить результаты расчета в нескольких окнах, дающих трехмерное изображение поля скорости и распределения температуры и примеси в различных сечениях области. Для вывода изображений используется открытая графическая библиотека OpenGL, что обеспечивает быструю визуализацию расчета.

Для получения сосуществующих стационарных режимов предусмотрены различные способы задания начальных условий. В частности, отклонения от средних значений температуры и концентраций задаются по формуле: $\theta^r(i, j, k) = A^r \sin(i\pi x/L_x) \sin(j\pi y/L_y) \sin(k\pi z/L_z)$, $r = 1..S$, $i, j, k = 1, 2, \dots$, где A^r – амплитуда отклонения. Для проведения эксперимента по трехмерной устойчивости (неустойчивости) плоских движений реализован пользовательский интерфейс для использования данных программы расчета плоской задачи Дарси (Цибулин В.Г., Курдюмов А.Н.).

Для параллелепипеда $D = 2 \times L_y \times 1$, заполненного жидкостью с примесью $S = 2$, $\lambda_1 = 120$, $\lambda_2 = -10$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.2$ был осуществлен поиск стационарных конвективных режимов. В результате серии расчетов установлено, что при малой глубине области ($L_y < L_y^*$) получается семейство плоских ($v^2 = 0$) стационарных режимов. Аналогично случаю фильтрационной конвекции однокомпонентной жидкости [5], в спектре всех режимов присутствует практически нулевое собственное значение (10^{-8}). Из Рис. 1 видно для этих режимов сечения области D , параллельные плоскости xOz , имеют одинаковое распределение температуры и концентраций примеси.

При увеличении глубины области ($L_y > L_y^*$) происходит потеря устойчивости механического равновесия с образованием изолированных стационарных режимов. В спектре этих режимов нет нулевых собственных значений, а сами режимы

характеризуются сложной трехмерной структурой. Изолинии температуры и концентраций примеси для двух изолированных режимов представлены на Рис. 2.

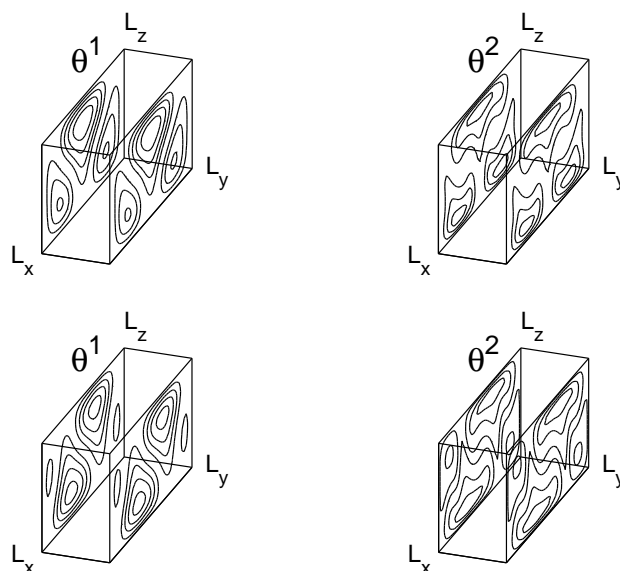


Рис. 1. Изолинии температуры и концентрации примеси для двух плоских стационарных режимов

В силу имеющихся в задаче симметрий, существуют также конвективные режимы, которые могут быть получены из других начальных данных. В расчетах также были обнаружены метастабильные конвективные режимы с большим числом валов, которые в результате длительного установления переходят в структуры, изображенные на Рис. 2 или симметричные им.

Автор статьи выражает благодарность Цибулину В.Г. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Юдович В.И. Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Северо-кавказс. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математ. моделир. 2001. С. 174–178.
- [2] Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки, Т. 49. 1991. № 5. С. 142–148.
- [3] Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
- [4] B. Karasözen, A.D. Nemtsev, V.G. Tsybulin Staggered grids discretization in three-dimensional Darcy convection // Computer Physics Communications. 2008. V 178. P. 885–893.

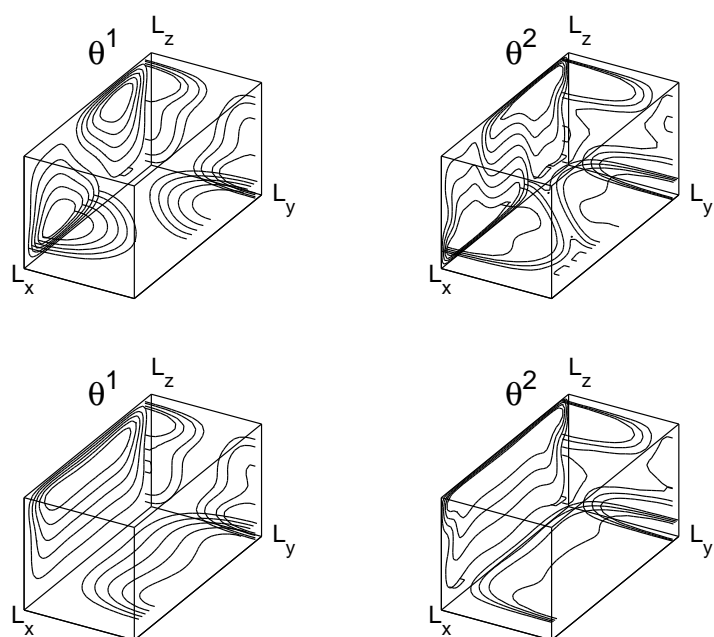


Рис. 2. Изолинии температуры и концентрации примеси для двух трехмерных стационарных режимов

- [5] Немцев А.Д., Цибулин В.Г. Численное исследование первого перехода в трехмерной задаче фильтрационной конвекции // МЖГ. 2007. № 4. С. 144–150.

Nemtsev A.D. *Numerical study of multicomponent fluid convection in a porous medium.* The program Diff was developed on basis of multicomponent fluid filtrational convection equations derived by Yudovich V.I. and staggered grids discretization method. Computation of convective regimes in parallelepiped with two opposing heat-insulated sides and linear by the height temperature distribution for other sides are presented. Existence of an family of flat steady states was detected in case of rather small value of parallelepiped depth. A number of three-dimensional steady states was discovered when the depth of parallelepiped is rather large.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Нестеров С. А.

ИП Мочалова Н.Б., г. Таганрог

На основе обобщенного соотношения взаимности для теплопроводности неоднородных тел получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода при решении коэффициентной обратной задачи. Предложен итерационный алгоритм для реконструкции коэффициента теплопроводности и плотности стержня.

Определение коэффициентов дифференциальных операторов уравнения теплопроводности для неоднородных тел является важной задачей в связи с проблемами идентификации теплофизических характеристик неоднородных тел. Коэффициентные обратные задачи теплопроводности и теории упругости для неоднородных тел являются нелинейными. При решении такого типа задач большие трудности возникают при построении операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции. Чтобы обойти эту сложность, в работе [1] для восстановления упругих модулей был предложен новый подход, основанный на построении обобщенного соотношения взаимности для упругих тел и построении итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейное уравнение Фредгольма первого рода. В данной работе соответствующее соотношение взаимности выводится для случая теплопроводности неоднородных тел и на его основе строится итерационный процесс.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в ограниченной области V с границей $S = S_T \cup S_q$. При этом будем различать два состояния: первое состояние с коэффициентами теплопроводности $k_{ij}^{(1)}(M)$, температурой $T^{(1)}(M, t)$, произведением плотности на теплоемкость $c\rho^{(1)}(M)$, второе-соответственно $k_{ij}^{(2)}(M)$, $T^{(2)}(M, t)$, $c\rho^{(2)}(M)$. В области V для каждого состояния выполнены уравнения теплопроводности

$$\left(k_{ij}^{(1)}(M) T_{,j}^{(1)}(M, t) \right)_{,i} = c\rho^{(1)}(M) \dot{T}^{(1)}(M, t), \quad (1)$$

$$\left(k_{ij}^{(2)}(M) T_{,j}^{(2)}(M, t) \right)_{,i} = c\rho^{(2)}(M) \dot{T}^{(2)}(M, t). \quad (2)$$

Граничные условия одинаковы для обоих состояний

$$T^{(m)}|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}^{(m)} T_{,j}^{(m)} n_i|_{S_q} = q, \quad m = 1, 2.$$

Для получения соотношения взаимности в изображениях выполним такие действия: применим к уравнениям (1)-(2) и граничным условиям преобразование Лапласа, полагая, что начальная температура для обоих состояний равна нулю. Далее, умножим полученное первое уравнение в трансформантах на $\tilde{T}^{(2)}$, а второе -

на $\tilde{T}^{(1)}$, вычтем одно из другого и проинтегрируем по области V , применяя теорему Остроградского-Гаусса.

$$\int_V \left(k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)} \right) \tilde{T}_{,i}^{(1)} \tilde{T}_{,j}^{(2)} dV + \int_{S_q} \left(\tilde{T}^{(2)} - \tilde{T}^{(1)} \right) \tilde{q} dS + \int_V \left(c\rho^{(2)} - c\rho^{(1)} \right) p \tilde{T}^{(1)} \tilde{T}^{(2)} = 0. \quad (3)$$

Для обращения преобразования Лапласа воспользуемся теоремой о свертке и теоремой дифференцирования оригинала и преобразуем уравнение (3). Тогда получим уравнение взаимности для нестационарных процессов теплопроводности:

$$\int_V \left(k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)} \right) T_{,i}^{(1)} * T_{,j}^{(2)} dV + \int_{S_q} \left(T^{(2)} - T^{(1)} \right) * q dS + \int_V \left(c\rho^{(2)} - c\rho^{(1)} \right) \dot{T}^{(1)} * T^{(2)} = 0. \quad (4)$$

Поставим задачу об определении коэффициентов в уравнении теплопроводности по дополнительной информации $T|_{S_q} = f$. Задача может быть решена на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной задачи. Полагая $T^{(1)} = T^{(n-1)}$, $T^{(2)} = T^{(n-1)} + T^{(n)}$, $k_{ij}^{(1)} = k_{ij}^{(n-1)}$, $k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(n-1)} + k_{ij}^{(n)}$, $c\rho^{(1)} = c\rho^{(n-1)}$, $c\rho^{(2)} = c\rho^{(n-1)} + c\rho^{(n)}$ и, сохраняя в соотношении взаимности (4) линейные слагаемые, с учетом дополнительной информации получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_V k_{ij}^{(n)} T_{,i}^{(n-1)} * T_{,j}^{(n-1)} dV + \int_{S_q} \left(f - T^{(n-1)} \right) * q dS + \int_V c\rho^{(n)} \dot{T}^{(n-1)} * T^{(n-1)} = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) является интегральным уравнением относительно компонент $k_{ij}^{(n)}(M)$ и $c\rho^{(n)}(M)$ и позволяет находить приближения коэффициентов переноса, если предварительно решена прямая задача о распространении тепла внутри области V и на ее границе S с теплофизическими характеристиками $c\rho^{(n-1)}$ и $k_{ij}^{(n-1)}$. Однако одного уравнения вида (5) недостаточно для восстановления всех коэффициентов. Поэтому необходимо получить дополнительные уравнения при изменении вида или области нагружения. При решении интегральных уравнений надо применять какой-либо метод регуляризации, например, метод А.Н. Тихонова.

В качестве примера рассмотрим случай неоднородного изотропного стержня конечной длины l , на одном конце которого поддерживается нулевая температура, а на другом действует постоянный тепловой поток q_0 . Начальная температура — нулевая. Обратная задача формулируется в пространстве трансформант. Для этого применим к уравнению (5) преобразование Лапласа. Входной информацией для обратной задачи служит измеренная температура на торце стержня, которую необходимо знать в любой момент времени. При этом, для нахождения поправок, получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода в изображениях

по Лапласу, которое совпадает с уравнением, полученным в работе [2] методом линеаризации в окрестности некоторого известного состояния:

$$\int_0^l k(x)^{(n)} \left(\frac{d\tilde{T}_{n-1}}{dx} \right)^2 dx + p \int_0^l c\rho(x)^{(n)} \tilde{T}_{n-1}^2 dx = -\frac{q_0}{p} \left(\tilde{T}_T - \tilde{T}_{n-1} \right) \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным параметрам, обозначая: $z = x/l$, $\bar{k}(z) = k(zl)/k_0$, $\bar{c}\rho(z) = c\rho(zl)/c\rho_0$, $p = k_0 p_0 / (c\rho_0 l^2)$, $\tilde{W}(z, p) = k_0^2 \tilde{T} / (q_0 c\rho_0 l^3)$. Здесь k_0 , $c\rho_0$ – некоторые характерные коэффициент теплопроводности, произведение плотности на теплоемкость соответственно. В этом случае интегральное уравнение (6) преобразуется к виду:

$$\int_0^1 \bar{k}(z)^{(n)} \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + p_0 \int_0^1 \bar{c}\rho(z)^{(n)} \tilde{W}_{n-1}^2 dz = -\frac{1}{p_0} \left(\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1} \right) \quad (7)$$

Была проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности и произведения плотности на теплоемкость. Нулевое приближение искалось в классе положительных линейных функций. При этом, каждая из функций восстанавливалась, когда был известен закон изменения другой из них и торцевая температура в любой момент времени. Пусть нам известен безразмерный коэффициент теплопроводности $\bar{k}(z)$. В этом случае, для нахождения поправки $\bar{c}\rho^{(n)}(z)$ получаем из уравнения (7)

$$\int_0^1 \bar{c}\rho(z)^{(n)} \tilde{W}_{n-1}^2 dz = -\frac{1}{p_0^2} \left(\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1} \right)$$

Для нахождения поправки $\bar{k}^{(n)}(z)$ при известном $\bar{c}\rho(z)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_0^1 \bar{k}(z)^{(n)} \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz = -\frac{1}{p_0} \left(\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1} \right)$$

После нахождения $\bar{k}^{(n)}(z)$ строится новое приближение $\bar{k}^{(n+1)}(z) = \bar{k}^{(n-1)}(z) + \bar{k}^{(n)}(z)$ и осуществляется итерационная схема уточнения закона изменения коэффициента теплопроводности. Критерием выхода из итерационного процесса является условие стабилизации функционала невязки между точной и вычисленной торцевой температурой. В качестве метода регуляризации интегральных уравнений Фредгольма первого рода использовался метод Тихонова с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке. Отметим, что функцию $\tilde{W}_{n-1}(z, p_0)$ можно найти из решения уравнения Фредгольма второго рода [3]:

$$\tilde{W}_{n-1}(z, p_0) = \int_0^1 A_{n-1}(z, \xi, p_0) \tilde{W}_{n-1}(\xi, p_0) d\xi + f_{n-1}(z, p_0)$$

Здесь $A_{n-1}(z, \xi, p_0) = -p_0 \bar{c}\rho(\xi) \int_0^{\min[z, \xi]} d\eta / \bar{k}_{n-1}(\eta)$, $f_{n-1}(z, p_0) = -1/p_0 \int_0^z d\xi / \bar{k}_{n-1}(\xi)$.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода используют метод коллокаций, заменяя интегралы их приближенными значениями по квадратурной формуле трапеций. Температуру на торце стержня находят, решая интегральное уравнение Фредгольма и используя численное обращение преобразование Лапласа на основе теории вычетов.

Было выяснено, что кусочно-однородные функции восстанавливаются гораздо хуже гладких. Восстановление произведения плотности на теплоемкость происходит с большей погрешностью, чем коэффициента теплопроводности. Вычислительные эксперименты показали, что наибольшая погрешность возникает на торцах стержня. Априорное знание восстанавливаемых коэффициентов на торцах значительно снижало погрешность реконструкции. В реальных экспериментах входные данные определяются с некоторой погрешностью. Чтобы проверить устойчивость метода к возмущениям входных данных были проведены вычислительные эксперименты при наличии аддитивных шумов начиная с 2%. Было выяснено, что реконструкция коэффициента теплопроводности дает удовлетворительные результаты даже при 4% шуме для монотонных и 2% шуме для немонотонных функций. При этом погрешность восстановления не превышает 11%.

Автор благодарит Ватульяна А.О. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Физматлит. 2007. 223 с.
- [2] Нестеров С.А. О реконструкции коэффициента теплопроводности неоднородного стержня. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону. 2008. С. 75–76.
- [3] Нестеров С.А. Об одном методе решения нестационарной задачи теплопроводности для неоднородного стержня. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону. 2007. С. 63–64.

Nesterov S. A. *Coefficient inverse heat conduction problems for inhomogeneous bodies.* On the basis of generalized reciprocity relation for heat conduction of inhomogeneous bodies Fredholm integral equation of the first of kind are built. The iteration algorithm of reconstruction coefficient of heat conduction and density is proposed.

ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ СТЕНОК БАССЕЙНА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ ОТРЫВНОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО ДИСКА

Норкин М. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована существенно пространственная смешанная задача об отрывном ударе круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Особенность данной задачи заключается в том, что область контакта тела с жидкостью, равно как и зона отрыва, заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости после удара. Вследствие этого поставленная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Рассматривается задача о вертикальном ударе круглого абсолютно твердого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Предполагается, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности диска (удар с отрывом). Согласно [1, 2], потенциал скоростей Φ , приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестной априори областью контакта:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \bar{V}_n, \quad \Phi \leq 0, \quad r \in S_{11}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \geq \bar{V}_n, \quad \Phi = 0, \quad r \in S_{12}, \quad (3)$$

$$\Phi = 0, \quad r \in S_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \quad (5)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$\bar{V}_n = v_0 - \omega x,$$

$$\int_D (\nabla\Phi)^2 dD < \infty. \quad (7)$$

Здесь v_0 и ω — поступательная и угловая скорости, приобретенные диском в результате удара; D — область, занятая жидкостью; $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$ — поверхность диска; причем S_{11} — часть границы на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а S_{12} — зона отрыва; S_2 — свободная поверхность жидкости; S_3 — неподвижная твердая граница бассейна; a — радиус диска. Декартовы координаты x , y , z введены таким образом, что оси x и y расположены в плоскости свободной поверхности жидкости, ось z направлена вертикально вниз вглубь жидкости; начало координат находится в центре диска. Не уменьшая общности рассуждений

будем считать, что вращение диска происходит вокруг оси y ($\omega > 0$). Условие (6) добавляется только в случае неограниченной жидкости.

Условие (7), постулирующее конечность кинетической энергии течения жидкости после удара, вполне замыкает математическую постановку задачи. Теорема существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в статье [2].

Для полного решения задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса круглого диска при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом $P = (0, 0, P_z)$ и точкой его приложения $R_0 = (x_0, 0, 0)$ с одной стороны и поступательной и угловой скоростями v_0 и ω , приобретенными диском в результате удара, с другой. В пренебрежении массой и моментом инерции диска названные уравнения приводят к следующим соотношениям:

$$I = -P_z, \quad M = x_0 P_z, \quad I = \rho \iint_{S_1} \Phi ds, \quad M = -\rho \iint_{S_1} x \Phi ds, \quad (8)$$

где I и M — импульс и момент импульса, действовавшие со стороны жидкости на плавающий диск в результате удара, ρ — плотность жидкости.

Рассматриваемая задача осложнена тем, что линия отрыва, отделяющая на поверхности диска область безотрывного удара от зоны отрыва, заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Отметим, что в случае неограниченной жидкости, условие отрыва частиц жидкости от поверхности диска (равно как и условие безотрывности удара), находится точно на основании решения соответствующей линейной задачи о безотрывном ударе круглого диска. Согласно [3] это условие имеет вид:

$$\frac{3v_0}{2\omega a} < 1.$$

Последнее неравенство равносильно тому, что точка приложения внешнего ударного импульса лежит вне круга радиуса $a/5$ с центром в центре диска. В противном случае удар будет безотрывным.

Заметим также, что стенки бассейна различной формы оказывают неоднозначное влияние на условие безотрывности удара круглого диска. Для одних границ круг, ограничивающий область безотрывного вертикального удара, увеличивается, а для других, наоборот, уменьшается по сравнению со случаем неограниченной жидкости [7, 8].

Для решения поставленной задачи применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, предложенный в работе [4]. Применение этого метода к плоским задачам гидродинамического удара дано в статье [9]. Далее, следуя [9], сведем исходную задачу к нелинейному интегральному уравнению:

$$Tv = 0, \quad Tv = \mu v^- - K(v^+) - K(V_n), \quad (9)$$

Здесь K — основной оператор линейной смешанной краевой задачи

$$\Delta W = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_{S_1} = f(x, y), \quad (W)_{S_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{S_3} = 0, \quad (W)_{\infty} = 0 \quad (10)$$

ставящий в соответствие нормальной производной функции W на S_1 — решение задачи (10) на S_1 : $K(f) = W$.

Нелинейные операторы v^- и v^+ определяются равенствами:

$$v^- = v^-(M) = \inf\{v(M), 0\}, \quad v^+ = v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}$$

Параметр μ может принимать произвольные положительные значения.

Связь между решениями исходной задачи и нелинейного уравнения (9) имеет вид:

$$u = v^{*+}, \quad S_{12} = \{(x, y) \in S_1: v^*(x, y) \geq 0\}, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial n} - V_n \quad (11)$$

Таким образом, для решения задачи (1)–(8) достаточно найти решение v^* нелинейного уравнения (9). При этом неизвестная априори зона отрыва S_{12} определяется как множество всех точек $(x, y) \in S_1$, для которых выполняется неравенство: $v^*(x, y) \geq 0$. После решения уравнения (9), потенциал скоростей Φ на границе S_1 находится по формуле:

$$\Phi = K(v^{*+} + V_n).$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении, что область, занятая жидкостью обладает осью вращения z . Считаем, что неподвижная твердая граница бассейна S_3 получена в результате гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом h некоторой фиксированной поверхности S_3^0 .

Для нахождения оператора $K = K_h$ применяется специальный асимптотический метод, основанный на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния. Асимптотика оператора K_h при больших значениях h строится в полной аналогии с асимптотикой решения линейной задачи [5]–[7] и имеет вид:

$$K_h(f) = K_\infty(f) - \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} \left[\frac{c_1(f)\xi_1}{2\pi} h^{-3} + \frac{c_2(f)\xi_2}{\pi} h^{-5} r \cos \varphi + \frac{3c_3(f)\xi_3}{8\pi} h^{-5} + \right. \\ \left. + \frac{c_1(f)\xi_4}{18\pi} (2r^2 + a^2) h^{-5} + \frac{c_1(f)\xi_1^2 a^3}{3\pi^2} h^{-6} + O(h^{-7}) \right], \quad h \rightarrow \infty,$$

где $K_\infty(f)$ — оператор K в случае неограниченной жидкости; $c_1(f)$, $c_2(f)$, $c_3(f)$ — функционалы, определяемые равенствами ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$c_1(f) = - \iint_{S_1} K_\infty(f) ds, \quad c_2(f) = - \iint_{S_1} x K_\infty(f) ds, \quad c_3(f) = - \iint_{S_1} r^2 K_\infty(f) ds.$$

Для интегрального оператора $K_\infty(f)$ справедливо представление (r, φ, z — цилиндрические координаты):

$$K_\infty(f)(r, \varphi) = W(r, \varphi, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^a s f_0(s, \theta) K(r, \varphi; s, \theta) ds d\theta, \\ K(r, \varphi; s, \theta) = \int_p^a \frac{r^2 s^2 - t^4}{\sqrt{(t^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} K_1(t, r, s, \varphi, \theta) dt,$$

$$K_1(t, r, s, \varphi, \theta) = [t^4 - 2t^2rs \cos(\varphi - \theta) + r^2s^2]^{-1} + [t^4 - 2t^2rs \cos(\varphi + \theta) + r^2s^2]^{-1}.$$

Здесь $p = r$, если $s < r$ и $p = s$, если $s > r$. Выражение для ядра при $s = r$, $\varphi \neq \theta$ получается предельным переходом при $s \rightarrow r$.

Для определения коэффициентов $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, зависящих исключительно от формы границы бассейна, необходимо решить краевые задачи в фиксированной области G^0 , ограниченной плоскостью $z = 0$ и поверхностью S_3^0 :

$$\Delta u_k = 0, \quad u_k \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial n} \Big|_{S_3^0} = Q_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$Q_1 = \frac{\partial z}{\partial n R^3}, \quad Q_2 = \frac{\partial xz}{\partial n R^5}, \quad Q_3 = \frac{\partial (3r^2 - 2z^2)z}{\partial n R^7}.$$

После этого величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ определяются по формулам:

$$\xi_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \xi_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial x \partial z}, \quad \xi_3 = -\frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \xi_4 = -\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3},$$

где производные вычисляются в точке $M_0(0, 0, 0)$.

В частном случае, когда область, занятая жидкостью представляет собой слой жидкости конечной толщины H , коэффициенты ξ_k находятся в явном виде:

$$\xi_1 = \frac{3\zeta(3)}{8h_0^3}, \quad \xi_2 = \frac{15\zeta(5)}{64h_0^5}, \quad \xi_3 = -\frac{15\zeta(5)}{32h_0^5}, \quad \xi_4 = -\frac{45\zeta(5)}{64h_0^5},$$

где $\zeta(s)$ — дзета функция Римана; h_0 — глубина фиксированного слоя, связанная с H соотношением $H = hh_0$.

После нахождения оператора $K = K_h$ решение нелинейного граничного интегрального уравнения (9) находится при помощи модифицированного метода Ньютона–Канторовича, который при специальном выборе начального приближения ($v_0(x, y) \equiv -c$, $c > 0$) приводит к явному итерационному процессу:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{\mu} T v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В таблице приведены численные значения безразмерных величин I, M, x_0 ($I \rightarrow \rho\omega a^4 I, M \rightarrow \rho\omega a^5 M, x_0 \rightarrow ax_0$), соответствующих случаю $a/H = 5/6, \alpha = v_0/(\omega a)$.

α	-0.8	-2/3	-1/3	0	1/3	0.5	0.6	0.66
I	-0.001	-0.0056	-0.057	-0.209	-0.500	-0.697	-0.829	-0.910
M	-0.001	-0.0045	-0.036	-0.098	-0.158	-0.174	-0.178	-0.178
x_0	-0.954	-0.803	-0.628	-0.466	-0.317	-0.250	-0.214	-0.196

Список литературы

- [1] Седов Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. 26 с.
- [2] Юдович В. И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владик. матем. журнал. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.

- [3] *Ворович И. И., Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 21. С. 525–532.
- [4] *Галанов Б. А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
- [5] *Норкин М. В.* Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 74–81.
- [6] *Норкин М. В.* Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 77–81.
- [7] *Норкин М. В.* Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 114–122.
- [8] *Норкин М. В.* Смешанные задачи гидродинамического удара. — Ростов-на-Дону, Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. 136 с.
- [9] *Норкин М. В.* Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 120–132.

Norkin M. V. *The effect of the walls of an arbitrary tank in the problem of separation impact on a floating disk.* The problem of separation impact on a disk floating on the surface of an ideal incompressible fluid in a bounded vessel is considered. In this problem the zone of contact between the body and the fluid is not known in advance and must be determined together with the fluid flow. As a result, the problem formulated is nonlinear and belongs to the class of free-boundary problems.

ОТРАЖЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ВОЛН ОТ ТОРЦА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Панфилов И. А., Устинов Ю. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются гармонические колебания полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, вызванные однородной квазипродольной или квазикрутильной волнами. Исследуется характер отраженных от торца оболочки волн. Расчеты проводились для двух оболочек: для биологической ткани (восходящая аорта собаки) и для цилиндра с винтовой намоткой из стальных нитей с полимерным наполнителем.

1. Основные соотношения для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, отвечающие гипотезам Кирхгофа–Лява.

В [1]–[4] на основе гипотез Кирхгофа–Лява получены основные соотношения для анализа осесимметричного напряженно–деформированного состояния (НДС) цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией (ЦОВА). Там же в рамках безмоментной теории проведен анализ особенностей волновых процессов в неограниченной цилиндрической оболочке, порождаемых винтовой анизотропией. В [5] в рамках моментной теории проведен анализ особенностей волновых процессов в цилиндрической оболочке конечной длины, порождаемых винтовой анизотропией.

Для постановки задачи здесь приведем кратко основные соотношения теории упругости для ЦОВА.

Пусть a — радиус срединной поверхности оболочки; h — ее толщина; L — длина вдоль образующей (для оболочки конечной длины). С центром некоторого поперечного сечения оболочки свяжем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, при этом Ox_3 — ось оболочки.

Введем винтовую систему координат r, φ, z , связанную с декартовыми соотношениями

$$x_1 = r \cos(\varphi + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\varphi + \tau z), \quad x_3 = z, \quad (1)$$

где $-h/2 + a \leq r \leq a + h/2$; $\tau = tg(\alpha)/a$ — характеристика винтовой анизотропии.

Согласно кинематическим гипотезам классической теории координаты вектора смещений берутся в виде

$$u_r = u_r^0(\varphi, z), \quad u_\varphi = u_\varphi^0(\varphi, z) + \alpha\theta_\varphi, \quad u_z = u_z^0(\varphi, z) + \alpha\theta_z, \quad (2)$$

$$\theta_\varphi = -(\partial_\varphi u_r^0 - u_\varphi^0)/a, \quad \theta_z = -Du_z^0, \quad (3)$$

$$D = \partial_z - \tau\partial_\varphi, \quad \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

где выражения (3) для углов поворота являются следствием гипотезы о том, что углы между нормалью к срединной поверхности после деформации остаются прямыми.

где u_r^0, u_θ^0, u_z^0 — смещения точек срединной поверхности (в дальнейшем индекс 0 опускается), $-h/2 \leq \alpha \leq h/2$.

Если в качестве основных характеристик напряженного состояния ввести усилия и моменты

$$T_i = hg_{ij}e_j^0, \quad M_i = h^3g_{ij}e_j^1/12, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где g_{ji} —компоненты матрицы жесткости (приведены в [1]-[5]), а e_j^0 и e_j^1 —компоненты тензора деформаций, то на основании вариационного принципа Гамильтона, считая независимыми вариациями $\delta u_r^0, \delta u_\varphi^0, \delta u_z^0$, получаем следующие динамические уравнения, отвечающие гипотезам Кирхгофа–Лява,

$$\begin{aligned} DT_2 + \frac{1}{a}\partial_\varphi T_3 - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + q_z &= 0, \\ \frac{1}{a}\partial_\varphi T_1 + DT_3 + \frac{1}{a}Q_1 - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + q_\varphi &= 0, \\ \partial_\varphi Q_1/a + DQ_2 - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + q_r &= 0. \\ Q_1 = DM_1 + \frac{1}{a}\partial_\varphi M_3, \quad Q_2 = DM_3 + \frac{1}{a}\partial_\varphi M_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки.

2. Распространение гармонических осесимметричных волн в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией на базе уравнений, полученных на основе гипотез Кирхгофа–Лява.

Осесимметричность в этом случае означает, что компоненты вектора смещений срединной поверхности зависят только от продольной координаты z .

Решение отыскиваем в виде

$$u_\varphi = X_1 \sin(kz)e^{i\omega t}, \quad u_z = X_2 \sin(kz)e^{i\omega t}, \quad u_r = X_3 \cos(kz)e^{i\omega t}. \quad (5)$$

На основе приведенных выше соотношений получаем однородную алгебраическую систему

$$\mathbf{A}\vec{X} = 0, \quad (6)$$

где $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$, $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3$). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к дисперсионному уравнению

$$\det(A) = D(\gamma, \Omega) = 0. \quad (7)$$

Функция $D(\gamma, \Omega)$ является полиномом восьмого порядка относительно безразмерного волнового числа $\gamma = ak$, коэффициенты которого зависят от безразмерной частоты $\Omega = a\omega/c$, ($c^2 = E_2/\rho$), всех модулей упругости, коэффициентов Пуассона и безразмерных геометрических параметров $\varepsilon = h/a$, x . Корни уравнения расположены симметрично в комплексной плоскости $\gamma = \alpha + i\beta$. При низкочастотных колебаниях ($\Omega \ll 1$) спектр волновых чисел состоит из двух пар вещественных волновых чисел $\gamma_1^\pm = \pm\alpha_1$, $\gamma_2^\pm = \pm\alpha_2$ и четырех комплексных γ_s , $s = 5, \dots, 8$.

Вещественным волновым числам отвечают квазипродольные и квазикрутильные однородные волны (характер этих волн в рамках безмоментной теории подробно исследован в [4], комплексным волновым числам отвечают четыре неоднородных волны, которые локализуются около торцов оболочки (в случае оболочки конечной длины) [5]. Каждой паре симметрично расположенных корней отвечает один и тот же СВ $\vec{X}_m = (X_{m1}, X_{m2}, X_{m3})$, ($m = 1, \dots, 4$).

2.1. Отражение однородных волн от торца полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией.

Рассматриваются гармонические осесимметричные колебания полубесконечной цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, вызванные набегающими из бесконечности однородными квазипродольными или квазикрутильными волнами. Набегающая из бесконечности волна имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{\varphi}^{-} &= X_1 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}, \\ u_z^{-} &= X_2 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}, \\ u_r^{-} &= X_3 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где \hat{k} - волновое число, соответствующее квазикрутильной или квазипродольной волне, X_j -алгебраические дополнения первой строки j -го элемента матрицы A , C -произвольная константа. Отраженные волны будем отыскивать в виде:

$$\begin{aligned} u_{\varphi}^{+} &= \sum_{s=1}^4 X_{1s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)}, \\ u_z^{+} &= \sum_{s=1}^4 X_{2s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)}, \\ u_r^{+} &= \sum_{s=1}^4 X_{3s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь k_1, k_2 -вещественные волновые числа, а k_3, k_4 -комплексные волновые числа, такие что, $k_1 > 0, k_2 > 0, Im(k_3) > 0, Im(k_4) > 0$.

Решением будет являться сумма подающей и отраженных волн:

$$\begin{aligned} u_{\varphi} &= \sum_{s=1}^4 X_{1s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)} + X_1 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}, \\ u_z &= \sum_{s=1}^4 X_{2s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)} + X_2 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}, \\ u_r &= \sum_{s=1}^4 X_{3s} \cdot C_s e^{i(k_s z - \omega t)} + X_3 \cdot C e^{-i(\hat{k}z + \omega t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим граничные условия свободного края. Для этого сечения имеем:

$$z = 0: \quad T_{zz} = 0, \quad T_{z\varphi} = 0, \quad M_{zz} = 0, \quad Q_1 = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получаем алгебраическую систему для определения четырех констант C_s .

Чтобы различать характер поведения отраженных волн, исследовалось поведение нормированных амплитудных коэффициентов

$$k_\varphi = \frac{X_{1s}}{X}, \quad k_z = \frac{X_{2s}}{X}, \quad X = \sqrt{(X_{1s}^2 + X_{2s}^2 + X_{3s}^2)}.$$

от различных параметров. Для расчетов были выбраны две оболочки с фиксированными параметрами: $E_2 = 4.905 \cdot 10^5$ кН/м², $E_3 = 0.833 \cdot E_2$, $\nu_{32} = 0.45$, $\nu_{23} = 0.54$, $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м, $a = 7.3 \cdot 10^{-3}$ м, $G_{23} = E_2/6$, что соответствует биологическому материалу (восходящей аорте собаки), и $E_2 = 1.208 \cdot 10^8$ кН/м², $E_3 = 5.3 \cdot 10^6$ кН/м², $\nu_{32} = 0.23$, $\nu_{23} = 0.30$, $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м, $a = 7.3 \cdot 10^{-3}$ м, $G_{23} = 1.189 \cdot 10^6$ кН/м², что соответствует цилиндру с винтовой намоткой из стальных нитей с полимерным наполнителем.

В первом случае в качестве падающей волны бралась квазипродольная волна. Ее нормированные амплитудные коэффициенты для двух оболочек изображены на рис. 1 для $\omega = 4\pi$: здесь 1 – k_φ , 4 – k_z для биологического материала, 2 – k_φ , 3 – k_z для цилиндра с винтовой намоткой из стальных нитей с полимерным наполнителем.

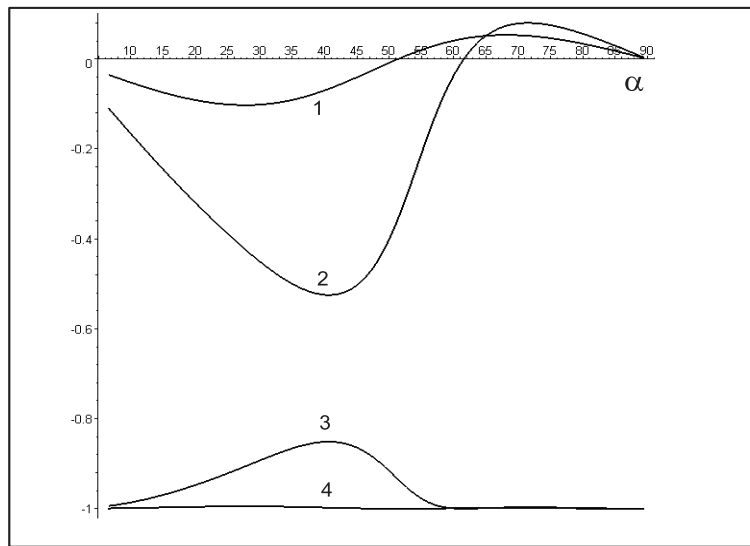


Табл. 1. Нормированные амплитудные коэффициенты.

В табл. 2 приведены значения для коэффициентов C_1 и C_2 для различных значений угла закрутки α . Видно, что коэффициент C_2 , отвечающий квазикрутильной волне, на много порядков меньше коэффициента C_1 , отвечающего квазипродольной волне. Для падающей квазикрутильной волны картина аналогичная: коэффициент C_2 на много порядков превышает коэффициент C_1 .

Также проводились исследования при фиксированном угле $\alpha = \pi/6$ от частоты (в низкочастотных областях). Влияние частоты оказалось не существенной.

	1-й материал		2-й материал	
	C1	C2	C1	C2
$\alpha = 14^\circ$	0.9999999368	$-0.6317743140 \cdot 10^{-7}$	0.9999999368	$-0.2203004848 \cdot 10^{-10}$
$\alpha = 31^\circ$	0.9999999368	$-0.6772140536 \cdot 10^{-7}$	0.9999999997	$-0.3222304566 \cdot 10^{-9}$
$\alpha = 47^\circ$	0.9999998349	$0.1651096417 \cdot 10^{-6}$	0.9999999728	$0.2717078403 \cdot 10^{-7}$
$\alpha = 73^\circ$	0.9999986093	$-0.1390703201 \cdot 10^{-5}$	0.9999999267	$0.7332123261 \cdot 10^{-7}$

Табл. 2. Таблица коэффициентов.

Таким образом, можно сделать **вывод**, что квазипродольная волна в осесимметричном случае отражается в квазипродольную волну, а квазикрутильная, соответственно, в квазикрутильную.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (07-01-00254-а).

Список литературы

- [1] Устинов Ю.А. // Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // ПММ. 2003. Т.67. Вып. 1. С. 89–98.
- [2] Устинов Ю.А. // Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М., "Наука". 2003. С. 128.
- [3] Устинов Ю.А. // Некоторые задачи для упругих тел с винтовой анизотропией. // Успехи механики. 2005. Т. 2. № 4 С. 37–65.
- [4] Богаченко С.Е., Устинов Ю.А. // Некоторые особенности волновых процессов в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. № 1. С. 18–21.
- [5] Панфилов И. А., Устинов Ю.А. // Собственные частоты и формы цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией. // Труды XI международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд. ООО "ЦВВР". 2007. Т. 2. С. 166–171.

Panfilov I. A., Ustinov U. A. *Reflexion of homogeneous waves from an end face of a semi-infinite cylindrical cover with screw anisotropy*. Harmonious fluctuations of a semi-infinite cylindrical cover with the screw anisotropy, caused homogeneous quasilongitudinal or quasitorsional waves are considered. Character reflected from an end face of a cover of waves is investigated. Calculations were spent for two covers: for биологической fabrics (an ascending aorta of a dog) and for the cylinder with screw winding from steel threads with a polymeric filler.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ И ЖИДКОСТЬЮ В ПЛОСКОМ КРЕСТООБРАЗНОМ КАНАЛЕ

Самадова Ю. К., Ширяева Е. В.

*Южный федеральный университет, факультет математики, механики
и компьютерных наук, Ростов-на-Дону*

Методом конечных элементов численно исследована модель переноса примесей электрическим полем в случае, когда в крестообразном плоском канале имеется стационарное течение жидкости (свободный жидкостный электрофорез). При расчетах использовались специальные адаптационные сетки и различные варианты численной реализации метода конечных элементов — дискретный метод Галеркина, неявные методы Рунге-Кутты (SDIRK), метод характеристик, проекционный алгоритм, метод штрафов. Результаты расчетов позволяют сформулировать условия разделения смеси на отдельные компоненты при помощи электрического поля.

Введение. В последнее время в связи с развитием технологии разделения смесей в плоских микроканалах, известной как Lab-On-Chip, возрос интерес к задачам о разделении (перемешивании) многокомпонентных смесей электрическим полем. Как правило, процесс разделения осуществляется в крестообразном канале, на входы которого подается разделяемая смесь. Перенос смеси по каналу осуществляется различными способами — течением жидкости, за счет граничных электрокинетических эффектов (электроосмос), а также, в случае заряженных компонент смеси, непосредственно электрическим полем (электрофорез) и т. д. В результате комбинированного воздействия указанных способов смесь, разделенная на отдельные компоненты, поступает на некоторые выходы из каналов. Разнообразие физических эффектов, которые приходится учитывать (диффузия, электромиграция, электроосмос, зависимость проводимости от концентрации) делает задачу трудной для аналитического исследования и необходимо создавать эффективные численные алгоритмы. Сравнение различных численных реализаций метода конечных элементов позволяет указать эффективные алгоритмы расчетов, разработать рекомендации по проведению процесса разделения и, тем самым, улучшить ряд технологий Lab-On-Chip.

Основные уравнения. Уравнения в безразмерных переменных, описывающие процесс переноса примесей электрическим полем в плоском микроканале (типичный вид микроканала показан на рис. 1), после проведения процедуры осреднения по толщине микроканала имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} - \mu_{\text{eo}}(\mathbf{v} - \zeta\nabla\varphi), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (1)$$

$$\frac{dc_k}{dt} + \text{div } \mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = -\varepsilon|\mu_k|\nabla c_k + \mu_k c_k \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_0 \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k \right), \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, w)$ — скорость, p — давление, \mathbf{E} , φ — напряженность и потенциал электрического поля, c_k — концентрация k -ой примеси, \mathbf{i}_k — плотность потока k -ой примеси, \mathbf{j} — плотность электрического тока, σ — проводимость смеси, σ_0 — проводимость смеси в отсутствии примесей, α_k — коэффициент влияния k -ой примеси на проводимость смеси, μ — кинематическая вязкость жидкости, μ_k — электрофоретическая подвижность k -ой примеси, ε — характерный коэффициент диффузии ($\varepsilon|\mu_k|$ — коэффициент диффузии k -ой примеси), ζ — ζ -потенциал, μ_{eo} — коэффициент «плоского» электроосмоса.

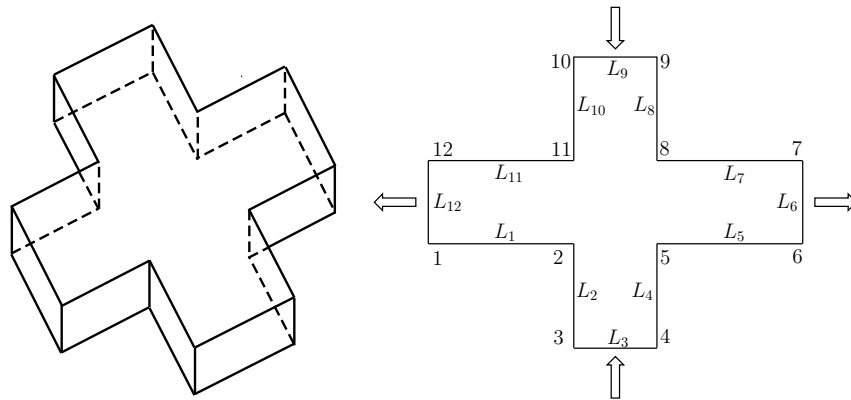


Рис. 1. Схема крестообразного канала

Зависимость $\sigma(c_k)$ означает, что движение примеси осуществляется в среде, свойства которой изменяются в процессе переноса. Параметры α_k могут быть как положительными, так и отрицательными. В случае $\alpha_k > 0$ проводимость k -той примеси больше, чем проводимость «чистой» среды, а в случае $\alpha_k < 0$ проводимость k -той примеси меньше проводимости «чистой» среды.

Член $\mu_{eo}(\mathbf{v} - \zeta \nabla \varphi)$ в уравнениях (1) возникает в результате процедуры осреднения по толщине микроканала и учитывает электрокинетические эффекты (электроосмос) на «верхней» и «нижней» стенках канала. Для рассматриваемой в дальнейшем области параметров средние напряжения Рейнольдса и дисперсия Тейлора-Ариса, возникающие при осреднении, пренебрежимо малы и в уравнениях (1), (2) опущены. Заметим, что электрокинетические эффекты имеются и на боковых стенках канала — их учет осуществляется при задании краевых условий.

Исходные уравнения решаются для плоской области, показанной на рис. 1. Границы L_i , $i = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11$ считаются твердыми изолированными и непроницаемыми для жидкости и концентраций. На указанных границах задаются следующие краевые условия

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = \zeta \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \varphi, \quad \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{n} = -\varepsilon |\mu_k| \mathbf{n} \cdot \nabla c_k = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и касательный векторы к границам.

На границах L_i , $i = 3, 6, 9, 12$, являющихся «входными» ($i = 3, 9$) и «выходными» ($i = 6, 12$) для микроканала, могут быть заданы различные краевые условия,

в том числе и условия (4) в случае, когда одна из границ $i = 3, 6, 9, 12$ исключается из набора «входных» или «выходных». На границах L_i задан постоянный потенциал $\varphi = \varphi_i$ и касательная компонента скорости отсутствует: $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$. На входных участках канала задается профиль нормальной компоненты скорости

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_{\text{in}}(x, y), \quad (5)$$

где v_{in} — заданная функция.

Кроме этого, на выходных участках канала для скорости и концентрации задаются условия

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \quad \frac{dc_k}{dt} = 0, \quad (6)$$

которые соответствуют сохранению скорости и концентрации в «жидкой частице». Эти условия фактически означают, что на выходном участке формируется профиль скорости и концентраций, такой же, как в непосредственной близости от границы.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad c_k|_{t=0} = c_k^0(x, y). \quad (7)$$

Отметим, что для вывода уравнений (1) частично использована техника осреднения по толщине, предложенная в [1].

Схемы аппроксимации. Для решения задачи (1)–(6) при дискретизации по времени использовался либо явный метод, либо неявный метод Рунге–Кутты. При аппроксимации материальной производной, например, dc/dt в некоторых случаях использован метод характеристик

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_m} = \frac{c_k^{m+1} - c_k^m(\mathbf{X}^m)}{\tau}, \quad c_k^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x})) = c_k^m(\mathbf{x}) - \tau \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) \cdot \nabla c_k^m(\mathbf{x}).$$

Для определения давления p использовался проекционный алгоритм и его модификации, известные как калибровка. Кроме этого, в некоторых случаях использовался метод искусственной сжимаемости (или метод штрафов), при котором уравнение $\text{div } \mathbf{v} = 0$ заменяется на $\text{div } \mathbf{v} + \delta p_t = 0$, $\delta \rightarrow 0$. Из всех перечисленных методов приведем лишь схему для неявного метода Рунге–Кутты SDIRK23 (или TRX2), который для эволюционного уравнения $q_t = F(t, q)$, где F — некоторый оператор, имеет вид

$$q^* = q^m + \alpha \tau F(t, q^m) + \alpha \tau F(t + \beta \tau, q^*),$$

$$q^{m+1} = q^* + \alpha \tau F(t^*, q^*) + \alpha \tau F(t^* + \beta \tau, q^{m+1}), \quad \alpha = 1/4, \quad \beta = 1/2, \quad t^* = t + \beta \tau. \quad (8)$$

Для уравнения (1) оператор $F(t, q) = F(q)$ имеет вид:

$$|F(q) = F(\mathbf{a}, \mathbf{v}, p, \varphi) = -\nabla p - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} - \mu_{\text{eo}}(\mathbf{v} - \zeta \nabla \varphi)$$

и для реализации (8) использовалась полунеявная схема

$$F(q^m) = F(\mathbf{v}^m, \mathbf{v}^m, \tilde{p}, \varphi^m), \quad F(q^*) = F(\mathbf{v}^m, \mathbf{v}^*, \tilde{p}, \varphi^m), \quad F(q^{m+1}) = F(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^{m+1}, \tilde{p}, \varphi^m).$$

Численные результаты. После дискретизации по времени исходная задача записывалась в слабой формулировке и решалась методом конечных элементов при помощи пакета FreeFem++ [2] с использованием адаптивных сеток.

Вычислительный эксперимент показал, что наименьшую вычислительную погрешность обеспечивает применение неявного метода Рунге–Кутты в сочетании с проекционным алгоритмом. Использование обычной явной или полужавной схемы приводит к росту погрешности для больших времен. Совершенно неудовлетворительно использование метода характеристик для определения концентраций, т.е. решения уравнений (2), хотя его можно использовать при решении (1). Это неудивительно, так как метод характеристик не является консервативным и не позволяет сохранять массу примеси.

Процесс разделения двухкомпонентной смеси иллюстрируется рис. 2, на котором показаны результаты расчетов для следующих значений параметров: $\mu_{e0} = 500\mu$, $\zeta = 0,6$, $\alpha_1 = 0,49$, $\alpha_2 = -0,49$, $m = 1,25$, $\mu_1 = 0,51$, $\mu_2 = 1,31$, $\varepsilon = 0,0125$ в моменты времени $t = 0.102$ и $t = 0.232$ (размер области 1.5×1.5). Примеси, расположенные вблизи границы L_9 , под действием электрического поля перемещаются в центр микроканала и после переключения разности потенциалов в момент времени $t = 0.18$ начинают перемещаться в сторону границы L_6 , разделяясь в процессе движения. До момента времени $t = 0.18$ значения потенциала на неизолированных границах задавались следующими: $\varphi_{12} = -1$, $\varphi_6 = -1$, $\varphi_3 = -1$, $\varphi_9 = 1$ и, начиная с момента времени $t = 0.18$ значения потенциала были изменены на $\varphi_{12} = 1$, $\varphi_6 = -1$, $\varphi_3 = -1$, $\varphi_9 = -1$.

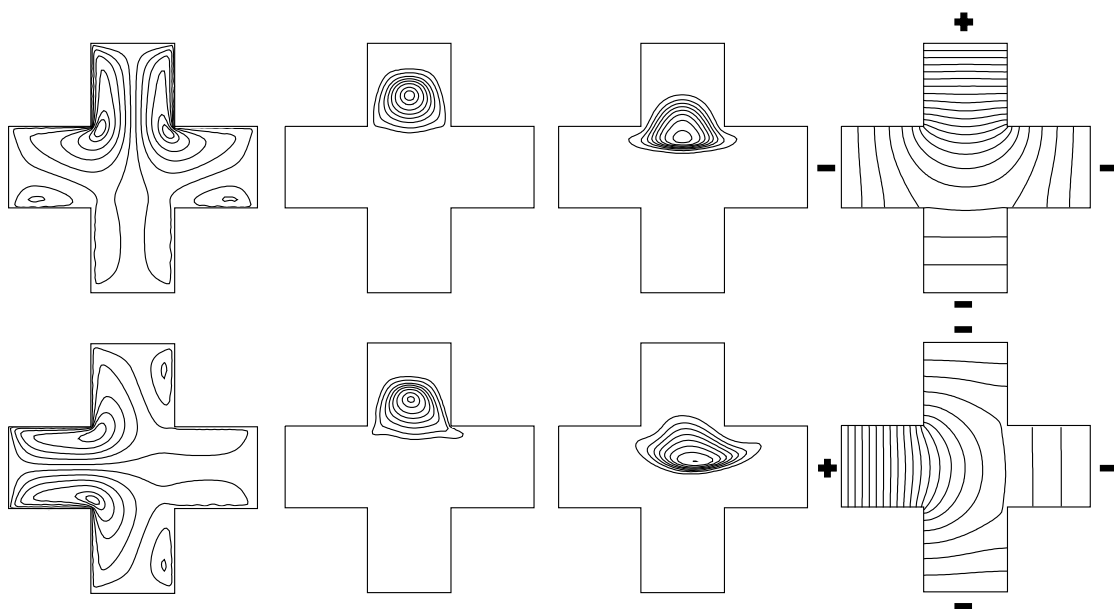


Рис. 2. Изолинии функции тока, концентраций c_1 , c_2 и потенциала φ в моменты времени $t = 0.102$ и $t = 0.232$

На распределение примесей оказывают влияние (довольно слабое) электрокинетические эффекты, в результате которых возникает течение жидкости (см. рис. 2), достаточно регулярное внутри области и носящее вихревой характер

в окрестности некоторых угловых точек. Наиболее сильное влияние обусловлено электромиграционными эффектами, возникающими в результате зависимости проводимости от концентрации и приводящими к сгущению линий уровня концентрации на заднем фронте движения для c_1 ($\alpha_1 > 0$) и на переднем фронте для c_2 ($\alpha_2 < 0$).

На рис. 3 представлены результаты для случая, когда на входах L_3, L_9 (см. рис. 1) задается поток жидкости (течение Пуазейля) с максимумом скорости $w = 4$, а на выходах L_6, L_{12} разность потенциалов. Расчеты проводились при следующих значениях параметров (размер области 4×4): $\mu = 0,0025$, $\varepsilon = 0,0035$, $\mu_1 = -0,41$, $\mu_2 = 0,41$, $\varphi_{12} = 10$, $\varphi_6 = -10$, $\alpha_1 = -0,45$, $\alpha_2 = -0,45$, $\mu_{eo} = 0$.

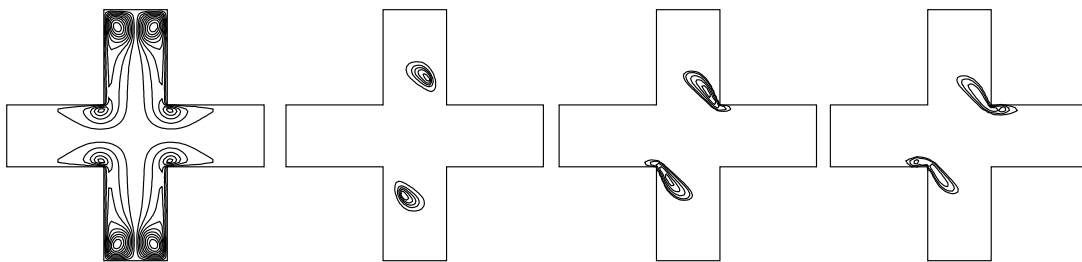


Рис. 3. Изолинии функции тока в момент времени $t = 0,5$ и проводимости смеси σ в моменты времени $t = 0,5$, $t = 0,8$ и $t = 0,9$

Примеси, расположенные вблизи входов, потоком жидкости переносятся в центр канала и под действием электрического поля двигаются к соответствующим выходам (в зависимости от знаков подвижностей примесей).

Работа выполнена, благодаря поддержке грантов РФФИ 07-01-00389, 07-01-92213-НЦНИЛ, INTAS 04-80-7297 и CRDF RUM1-2842-RO-06.

Список литературы

- [1] *Oddy M. H., Santiago J. G.* Multiple-species model for electrokinetic instability // *Phys. Fluids*. 2005. 17. P. 064108.1–064108.17.
- [2] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

Samadova Yu. K., Shiryaeva E. V. *The model of impurities transport under action of an electric field and fluid flow for planar cross microchannel.* For planar cross microchannel the model of impurities transport under action of an electric field and fluid flow is investigated by finite elements method. For numerical experiments the special triangulations are used (DG-method, SDIRK method, method of characteristics, projection method and penalty method). The results of computation are presented.

О МЕТОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ВИБРОАКУСТИКЕ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ.

Сафроненко В.Г., Трифонов В.В.* , Шутько В.М.**

* *НИИМ и ПМ Южного Федерального Университета, Ростов-на-Дону*

** *Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены некоторые задачи математического моделирования в виброакустике композитных на полимерной основе оболочек. Представлены результаты численных расчетов колебаний и звукоизлучения цилиндрической композитной оболочки в акустической среде.

Основные этапы математического моделирования процессов распространения вибраций в тонкостенных композитных конструкциях, взаимодействующих с акустической средой можно сформулировать следующим образом:

- постановка на основе уточненных теорий оболочек краевых задач о стационарных колебаниях композитных оболочек в вакууме и при взаимодействии с акустической средой
- разработка подходов, позволяющих рационально учитывать реакцию, окружающей акустической среды действующую на конструкцию
- развитие численных и численно-аналитических методов, алгоритмов расчета и создание соответствующего программного обеспечения
- построение метода расчета акустических полей, генерируемых конструкцией, уровней их интенсивности и диаграмм направленности
- выбор определяющих уравнений термовязкоупругости полимерного связующего, отвечающих специфике задач
- исследование закономерностей формирования вибродинамических и акустических полей в зависимости от структурных параметров, частоты, температуры, предварительного нагружения и других факторов
- анализ демпфирующих свойств системы «оболочка–акустическая среда», определение условий снижения уровней виброактивности.

В дальнейшем примем за основу теорию оболочек типа Тимошенко [1]:

$$\begin{aligned}T'_{11} + \psi(T_{11} - T_{22}) + S^\bullet + k_1 Q_{11} + \omega^2(bu + c\phi_1) + p_1 &= 0; \\S' + 2\psi S + T_{22}^\bullet + k_2 Q_{22} + \omega^2(bv + c\phi_2) + p_2 &= 0; \\Q'_{11} + \psi Q_{11} + Q_{22}^\bullet - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + \omega^2 bw + p_3 &= 0;\end{aligned}\tag{1}$$

$$M'_{11} + \psi(M_{11} - M_{22}) + H^\bullet - Q_{11} + \omega^2(cu + d\phi_1) = 0;$$

$$H' + 2\psi H + M_{22}^\bullet - Q_{22} + \omega^2(cv + d\phi_2) = 0;$$

где $u, \phi_1, v, \phi_2, w, E_{11}, E_{22}, E_{12}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H$ - комплексные амплитуды соответствующих величин, ω - круговая частота.

Пусть в случае волокнистого композита E_f, ν_f, G_f, V_f - модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига и объемное содержание высокомодульного волокна. E_m, ν_m, G_m , - соответствующие комплексные аналоги полимерного связующего, определяемые через компоненты комплексной податливости полимера при сдвиге I', I'' являющимися функциями круговой частоты $\omega = 2\pi f$ [2].

$$I'(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r, \nu, T)} \left[1 - H(r) \frac{\omega^2}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} \right] dr;$$

$$I''(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r, \nu, T)} \frac{\varphi(r, \nu, T)\omega}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} dr. \quad (2)$$

Эффективные физико-механические характеристики полимерного композитного материала определяются по свойствам составляющих его изотропных компонент [3]:

Продольный модуль:

$$E_1^k = E_f V_f + E_m V_m;$$

Поперечный модуль:

$$E_2^k = \frac{eE_1^k}{(V_f + eV_m)(V_m + eV_f) - (e\nu_f - \nu_m)^2 V_f V_m};$$

Модуль сдвига:

$$G_{12}^k = \frac{g(1 + V_f) + V_m}{gV_m + 1 + V_f} G_f;$$

Модуль изгиба:

$$G_{23}^k = \frac{gG_m}{gV_m + V_f};$$

Коэффициент Пуассона:

$$\nu_1^k = \nu_f V_f + \nu_m V_m;$$

где

$$e = \frac{E_f}{E_m}, g = \frac{G_f}{G_m}.$$

Для численного исследования будем использовать подход, связанный с представлением искомых функций в виде разложений в ряды Фурье с последующим применением метода ортогональной прогонки. Для оценки диссипативных свойств оболочки введем в рассмотрение коэффициент поглощения энергии, определяемый как:

$$k = \frac{1}{2\pi} \frac{\widehat{D}}{\widehat{\Pi}} \quad (3)$$

где \widehat{D} - энергия, поглощаемая в теле оболочки за период колебаний, \widehat{P} - среднее значение за период колебаний полной механической энергии.

Для определения дальнего поля излучения применяется метод моделирования локального импеданса, когда априорно задается связь динамического давления и скорости или амплитуд смещения на поверхности контакта. При этом используются точные решения модельных задач [4]. Поле акустического давления в окружающей оболочку среде определяется с помощью интеграла Гельмгольца:

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[P(\vec{r}_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{\partial P(\vec{r}_1)}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS$$

где \vec{r} , \vec{r}_1 - соответственно радиусы-векторы точек в среде и на поверхности оболочки.

В прикладном отношении наибольший интерес представляет исследование дальнего акустического поля, для определения которого может быть использован подход, связанный с разложением подынтегральной функции в ряд по степеням $\frac{1}{r}$.

Разработанные модели и методы позволяют оценивать сходимость решений, проводить расчет амплитудно-частотных характеристик, выполнять общий и модовый анализ получаемых зависимостей.

Результаты численного эксперимента.

В дальнейшем рассмотрим вынужденные колебания цилиндрической оболочки из волокнисто-слоистого композита для варианта ортогонального армирования вдоль координатных линий α_1 и α_2 . Граничные условия на торцах оболочки соответствуют жесткому заземлению: $u = 0$; $v = 0$; $w = 0$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 0$. Оболочка подвержена гармоническому нагружению, приложенному к центральной части по цилиндрической панели с единичной интенсивностью. Геометрические параметры оболочки: $L/R = 3.5$, относительная толщина пакета $h/R = 0.01$, количество слоев $m = 25$. Механические характеристики волокна соответствуют материалу Урал-15 со следующими характеристиками: $E_f = 186$ ГПа; $\nu_f = 0.3$; $\rho_f = 1730$ кг/м³; Объемное содержание волокна в композите $V_f = 0.8$. В дальнейшем рассмотрено два типа вибродемпфирующего полимерного материала, с различными температурно-частотными зависимостями. На рис. 1 представлены частотные зависимости динамического модуля и тангенса угла потерь в частотном диапазоне [0, 8000 Гц] при $T = 295$ К соответственно для материала 1 и 2.

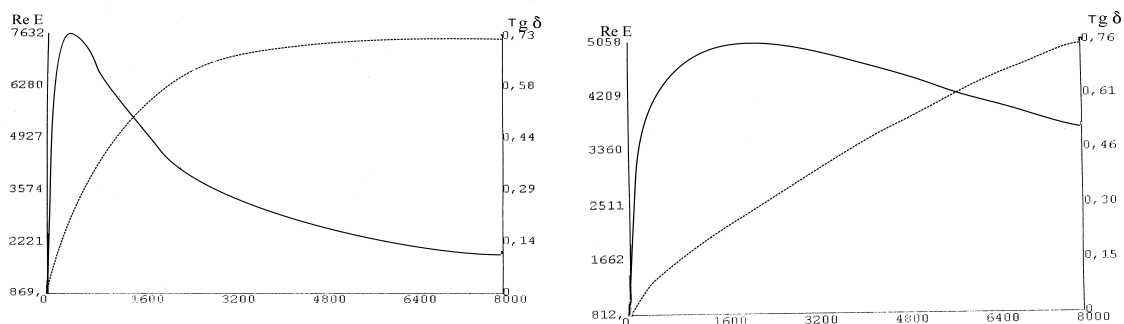


Рис. 1.

Материал 1 характеризуется высокими потерями механической энергии в низкочастотной области [0, 1000 Гц] с последующим снижением их уровня с повышением частоты. Материал 2 обладает более стабильными высокими потерями в средне- и высокочастотном диапазоне. Дальнейшие расчеты выполнены в цикле по безразмерному параметру частоты Ω с фиксацией форм колебаний, диаграмм распределения акустического давления по углам φ и θ сферической системы координат и максимальных уровней акустического давления $|P|$ на расстоянии $r = 50R$. По максимальным уровням $|P|$ построены амплитудно-частотные характеристики поля как по сумме окружных мод, так и для каждой моды в отдельности. В расчетах были удержаны моды $n = 0 - 4$, последующие моды в рассматриваемом частотном диапазоне себя не проявляют. Для пересчета уровней $|P|$ в децибелы $L_{|P|}$ проведено нормирование по отношению к пороговому уровню слышимости $p_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. На рис. 2 представлены модальные и суммарная амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) максимальных уровней $L_{|P|}$ и коэффициента поглощения энергии, рассчитанных в случае использования полимерного материала 1. На рис. 3 - аналогичные зависимости, рассчитанные для материала 2.

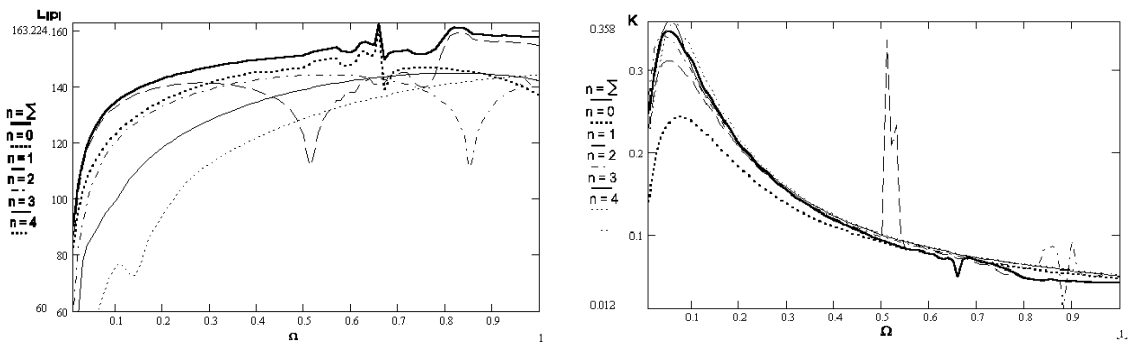


Рис. 2.

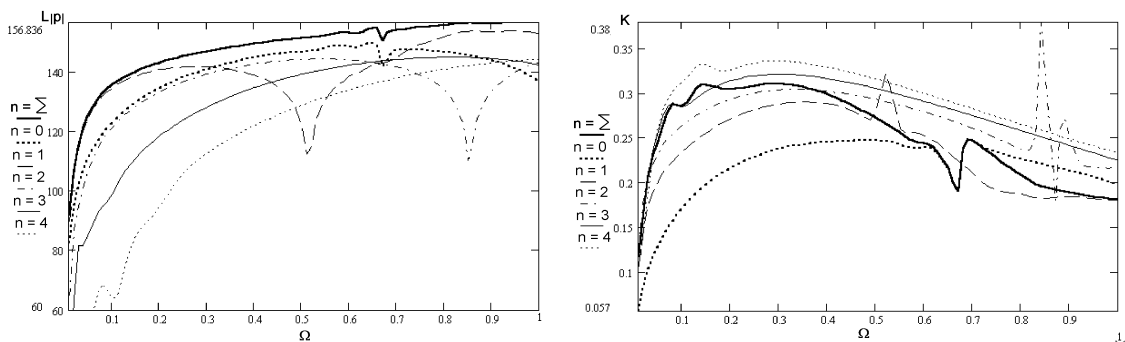


Рис. 3.

Проведенные расчеты указывают на существенное снижение максимальных уровней звукоизлучения в резонансной области, включающей средний и высокочастотный диапазон в случае использования материала 2. Здесь уровень звукового давления определяется модами $n = 0, 2$, в меньшей степени $n = 1$. Демпфирование в низкочастотном диапазоне за счет высоких потерь в связующем (материал 1)

оказывается неэффективным, что связано с тем, что уровень звукового давления целиком определяется балочной формой $n = 1$, демпфирование которой, по видимому, возможно лишь конструктивными мерами. Сравнение частотных зависимостей коэффициентов поглощения энергии, представленных на рис. 2 и 3 указывает на более высокий уровень диссипации энергии в резонансной области в случае использования материала 2. Сопоставление модальной структуры поля звукового давления и коэффициента поглощения энергии указывает на то, что максимальные значения давления на отдельных модах соответствуют минимумам коэффициента поглощения, соответственно снижение уровня звукоизлучения на отдельных модах коррелирует с локальными максимумами коэффициента поглощения энергии на тех же модах. Поскольку жесткостные свойства композитной оболочки, а следовательно и спектр квазирезонансных частот определяются, в основном, механическими свойствами армирующих волокон, их объемным содержанием и структурными параметрами, проводимый модальный анализ позволяет дать практические рекомендации по подбору вибродемпфирующего полимерного связующего, эффективно работающего в заданном частотном диапазоне.

Список литературы

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. - Москва: Машиностроение, 1988. - С.79-90.
- [2] Степаненко Ю.П., Исаева К.В., Азаров А.Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Международной конференции г.Ростов-на-Дону, 19-20 сентября 1996г. - Ростов-на-Дону: МП "Книга 1997. - Т.1. - С.118-123.
- [3] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. - Москва: Мир, 1982. - 334 с.
- [4] Юдин А.С., Яценко М.Н. Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жесткости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. - 1995. - Вып.2. - С.97-105.

Safronenko V.G., Trifonov V.V., Shutko V.M. *Method of mathematical modeling in vibroacoustics of polymer composite shells of rotation*. A problem of mathematical modeling in vibroacoustics of polymer composite shells is considered. Results of numerical calculations of vibrations and noise in cylindrical composite shells are provided.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Серкин А. Г.

Ростовский военный институт ракетных войск

Проанализированы доминирующие факторы, влияющие на точность измерений геометрических и механических величин в условиях производства, предложены перспективные направления повышения точности измерений.

В настоящее время на производстве широко применяются измерительные головки с зубчатыми, рычажно-зубчатыми, пружинными и пружинно-оптическими механизмами, а так же резистивные, индуктивные, емкостные и пневматические датчики и измерительные преобразователи. Указанные средства измерений (СИ) используются в станковых и накладных измерительных приборах, а также в различных контрольных приспособлениях для измерения линейных и угловых размеров, которые в машиностроительных производствах составляют до 95 измерений [1]. Цена деления измерительных головок лежит в пределах от 0,1 до 10 мкм [2], и проблема повышения точности измерения данными приборами является актуальной и своевременной.

Основными составляющими погрешности измерения геометрических величин являются [3]: - погрешности от температурных деформаций; - погрешности от измерительного усилия; - погрешности от субъективности оператора; - погрешности, вносимые установочными мерами; - погрешности базирования и другие.

Анализ многолетней практики проведения высокоточных измерений геометрических величин показывает, что доминирующее влияние оказывают погрешности от измерительного усилия и температурных деформаций, а именно погрешности, вызванные колебаниями температуры окружающей среды. Эффективным способом устранения данных погрешностей является уменьшение факторов, порождающих эти погрешности до минимальных значений. Например, выравнивание температур объекта, СИ и окружающей среды до такого уровня, чтобы остающийся перепад вызвал температурные деформации, которыми можно пренебречь, однако это не всегда допустимо, что актуализирует проблему исследования влияния температурных погрешностей на точность.

Если рассматривать погрешности измерения от температурных деформаций как приращение размеров звеньев измерительной цепи, приведенное к линии измерения [4], то для анализа удобно исследуемую измерительную систему представить сочетанием цилиндрической стойки и измерительного стержня или гильзы имеющих существенно отличающиеся диаметры на длине активного участка (рис. 1). Такая измерительная схема справедлива не только для измерительной головки на стойке, но и для оптиметров, контактных интерферометров и других СИ, конструкция которых представляет собой размерную цепь, замыкающим звеном

которой является контролируемый параметр, что приводит к возникновению погрешности от изменения температуры окружающей среды по причине различных температурных деформаций звеньев этой цепи.

Поскольку температурная деформация стационарного прибора определяется не только длиной, но и диаметром объектов, то соотношение температурных деформаций измерительного стержня и стойки на длине активного участка характеризует влияние температуры на погрешность измерения.

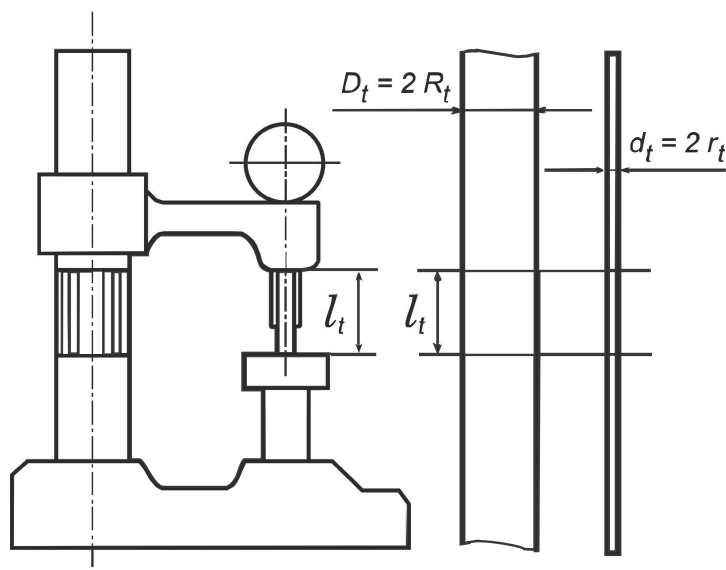


Рис. 1. Обобщенная схема измерительной системы

Проблема теоретического исследования погрешностей от температурных деформаций состоит в том, что точный аналитический расчет возможен только для однородных объектов, простейшей геометрической формы и при строго определенных внешних условиях. Поэтому при расчете температурных деформаций реальных объектов в реальных условиях приходится прибегать к допущениям, заменяя реальный объект в целом или его части элементами простейшей формы, а вместо реально существующего сложного температурного поля принимать поле однородное в пространстве и изменяющееся во времени по определенным закономерностям, а именно в виде прямоугольного импульса.

Необходимость прибегать к таким допущениям снижает достоверность получаемых решений и сильно ограничивает круг объектов, к которым может быть применен этот метод. Существенным недостатком аналитических методов расчета является необходимость использования табличных коэффициентов, которые во многих случаях не соответствуют реальным условиям, а часто не могут быть найдены, так как вовсе отсутствуют в справочной литературе.

Таким образом, результаты аналитического расчета, могут быть использованы лишь для оценки порядка величины температурной погрешности, но не для введения поправки в результат измерения.

Примеры результатов расчетов, выполненных при использовании известных формул, полученных в [3, 4] представлены на рис. 2, на котором изображены зави-

симости, характеризующие изменение величины температурной погрешности во времени для разных соотношений диаметров стержней (в метрах), вычисленные на длине активного участка равной 0,08 м, а на рис. 3 представлены результаты исследования влияния длины активного участка стержней на величину температурной погрешности при заданных радиусах стержней стойки и измерительной головки в заданном режиме термостатирования.

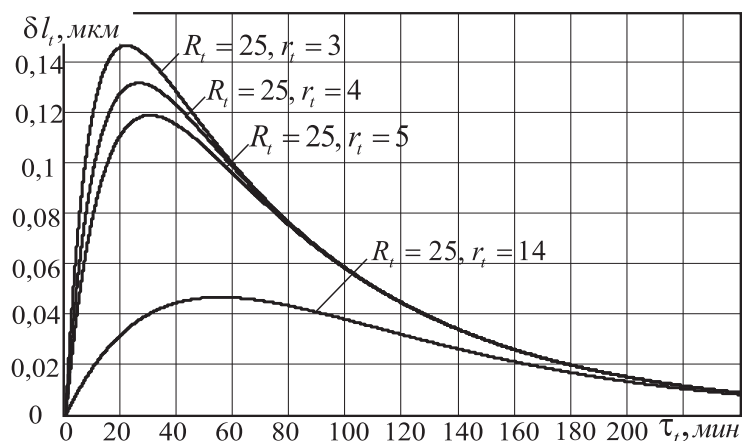


Рис. 2. Величина температурной погрешности для разных соотношений диаметров стержней

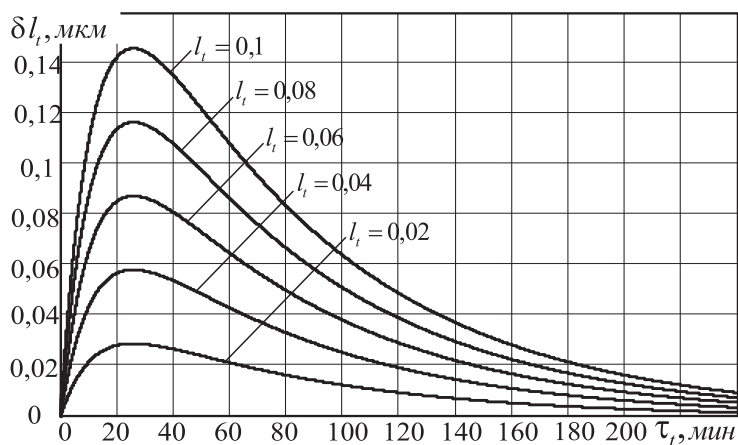


Рис. 3. Величина температурной погрешности при разных длинах активного участка стержней

Из анализа результатов расчетов следует: 1. Время, за которое погрешность достигает максимальной величины, зависит только от соотношения диаметров измерительных стержней и не зависит от перепада температур и длины активного участка стержней. 2. Температурная погрешность пропорциональна длине активного участка стержней поэтому следует стремиться к его сокращению. 3. Даже при достаточно строгом режиме термостатирования погрешности от изменения температуры окружающей среды могут достигать значений, которыми

нельзя пренебрегать при выполнении измерений высокоточными СИ геометрических величин. 5. В отдельную группу должны быть выделены стационарные СИ, которым присуща высокая чувствительность к изменению температуры окружающей среды и тепловым излучениям различных источников тепла, в том числе и оператора, работающего с прибором. Такие приборы должны находиться в термостатированном помещении и располагаться за специальными экранами или под теплоизолирующими колпаками для дополнительного ограждения от возможных тепловых излучений. К указанной группе приборов относятся пружинные головки с ценой деления 1 мкм и менее, контактные интерферометры, оптиметры и ультраоптиметры, индуктивные и емкостные приборы с отсчетным стрелочным или цифровым устройством.

Многочисленные попытки аналитического расчета величины погрешности от измерительного усилия не дают удовлетворительного результата [4], поскольку сложно учесть при расчетах всевозможные люфты, имеющиеся в узлах и крепежных соединениях и их развитие в процессе эксплуатации.

Таким образом, при измерении геометрических величин стационарными приборами, погрешности от действия совокупности рассмотренных факторов могут достигать величин, соизмеримых с пределом допускаемой основной погрешности применяемых СИ. Существующие аналитические методы не позволяют выполнить расчет погрешности с точностью, необходимой для введения поправки в результат измерения, их применение допустимо лишь для оценки порядка величины погрешности.

Из анализа результатов расчета, выполненных для конкретных типов СИ при различных режимах термостатирования и длинах активного участка стержней, следует, что для эффективного исключения указанных погрешностей из результата измерения необходимо обеспечить их непрерывный контроль с целью введения поправки в результат измерения.

Для решения этой задачи необходимы специализированные бесконтактные СИ, обеспечивающие высокоточный контроль перемещений в динамическом режиме, широкие возможности встраивания в узлы и блоки применяемых измерительных систем СИ, а так же получение и обработку измерительной информации в автоматическом режиме.

Широкие перспективы для создания таких средств открывает использование лазерных интерферометров [5]. Однако само по себе применение интерферометров не исключает необходимость выполнения достаточно жестких требований [6], соблюдение которых необходимо при выполнении прецизионных измерений. Поэтому актуальной является задача разработки лазерных интерферометров перемещений, обеспечивающих требуемую точность в особых условиях применения, характеризующих явления и процессы непосредственно в местах разработки, изготовления, испытания и применения продукции.

Проект частично поддержан грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 07-01-00012 и Южного федерального университета.

Список литературы

- [1] Коляда Ю.Б., Королев Ю.С., Крушняк Н.Т. и др. Цифровые измерительные головки // Измерительная техника. 2007. № 1. С. 20–23.
- [2] ГОСТ 28798-90. Головки измерительные. Общие технические условия.
- [3] Марков Н.Н. Погрешность и выбор средств при линейных измерениях. М.: Машиностроение, 1967. 426 с.
- [4] Марков Н.Н., Сацердотов П.А. Погрешности от температурных деформаций при линейных измерениях. М.: Машиностроение, 1976. 460 с.
- [5] Мирошниченко И.П., Серкин А.Г. Особенности использования интерференционных измерителей малых перемещений при решении задач диагностики технического состояния конструкций // Дефектоскопия. 2007. № 4. С. 31–39.
- [6] ГОСТ 8.050-73. Нормальные условия выполнения линейных и угловых измерений.

Serkin A.G. *Providing the accuracy of the stationary measurements means of the geometric and mechanical magnitudes.* Dominant factors influencing on the measurement accuracy of the geometric and mechanical magnitudes under the conditions of production have been analyzed and promising trends of raising the measurement accuracy have been proposed.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОВРЕЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Соловьев А. Н. *, Спожакин А. С. **, Напрасников В. В. ***,
Шевцов С. Н. ****

* Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

** Донской государственный технический университет,
г. Ростов-на-Дону

*** Белорусский национальный технический университет, г. Минск

**** Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

Предлагается методы реконструкции двух типов дефектов в слоистых композитах: расслоений (интерфейсные трещины) и разрывов слоев (поперечные трещины). Обратные геометрические задачи реконструкции трещин сводятся к решению последовательности систем граничных интегральных уравнений (ГИУ), полученных на основе принципа взаимности работ при установившихся колебаниях исследуемых образцов. Решение ГИУ проводится на основе сочетания метода конечных элементов (МКЭ), метода граничных элементов (МГЭ) и метода регуляризации А.Н. Тихонова. Дополнительной информацией для решения обратных задач служит поле смещений, измеренное на части внешней границы тела, свободной от механических напряжений. Рассмотрены численные примеры идентификации расслоений и разрывов в рамках плоской задачи теории упругости.

1. Введение

Задача идентификации поврежденного состояния несущих элементов конструкций является актуальной проблемой, новые решения которой позволят создать высоко-технологическое оборудование неразрушающего контроля. В вертолетостроении такими несущими элементами являются, например, композитные лонжероны лопастей несущего винта, которые могут быть моделированы на основе слоистого полимеркомпозитного материала. Технологическими и эксплуатационными дефектами таких материалов являются расслоения и разрывы слоев. Моделируя эти дефекты трещинами с невзаимодействующими берегами задачи их идентификации могут быть сведены к обратным геометрическим задачам теории упругости для тел совершающих, например, гармонические колебания. При решении обратных задач теории упругости важное значение имеет дополнительная информация, измерение которой может быть осуществлено на практике. Одним из реальных видов измерений является измерение волнового поля смещений или ускорений на свободном участке границы. Именно в такой постановке, на основе подхода разработанного в [1], в настоящей работе предложены методы реконструкции дефектов в слоистых композитах.

2. Постановка обратной задачи.

В декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ ($\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$) рассматривается конечное составное упругое тело, занимающее область $V = \bigcup_{k=1}^K V_k$ (рис. 1 слева) и ограниченную поверхностью S . Подобласти V_k представляют собой слои, S_{int} - внутренние интерфейсные поверхности раздела подобластей. На

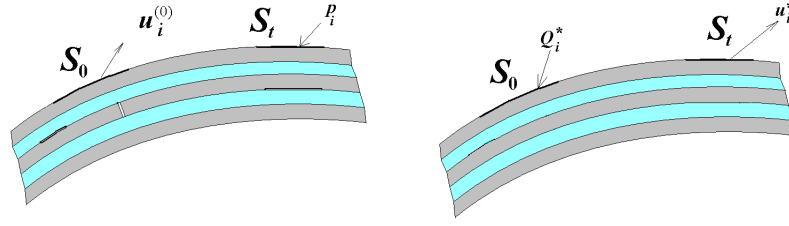


Рис. 1. Образец с дефектами (справа) и без дефектов (слева).

поверхности S задано разбиение $S = S_u \cup S_t \cup S_{fr}$ (части которого, не пересекаются), часть S_u - закреплена, на S_t задан вектор напряжений, S_{fr} - свободна от напряжений. На поверхности S_{fr} выделяется, часть S_0 - свободна от напряжений и доступна для измерения вектора смещений ($S_0 \subset S_{fr}$). Имеется система непесекающихся трещин $\Gamma = \bigcup_{q=1}^M \Gamma_q$, ($\Gamma_q = \Gamma_q^{(+)} \cup \Gamma_q^{(-)}$), которые расположены на внутренних поверхностях S_{int} (расслоения) рис. 1. Краевая задача, в которой кроме определения характеристик НДС, требуется определить геометрию системы трещин Γ , формулируется следующим образом. Она состоит из уравнений линейной теории упругости в случае установившихся колебаний [2]

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} = -\rho\omega^2 u_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad \underline{x} \in V_k \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijml}^{(k)} u_{m,l}^{(k)} \quad (2)$$

граничных условий прямой задачи

$$u_i^{(k)}|_{S_u} = 0, \quad t_i^{(k)}|_{S_t} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j|_{S_t} = p_i, \quad t_i^{(k)}|_{S_{fr}} = 0 \quad (3)$$

условий непрерывности на $S_{int} \setminus \Gamma$

$$u_i^{(k)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} = u_i^{(k+1)}|_{S_{int} \setminus \Gamma}, \quad t_i^{(k)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} = t_i^{(k+1)}|_{S_{int} \setminus \Gamma} \quad (4)$$

условий на берегах трещин

$$t_i^{(k)}|_{\Gamma_q^\pm} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

и дополнительных условий, отвечающих измерению вектора смещений на S_0

$$u_i^{(k)}|_{S_0} = u_i^0 \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $c_{ijml}^{(k)}$ - компоненты тензоров напряжений и упругих постоянных, $u_i^{(k)}$ - компоненты вектора смещений, $\rho^{(k)}$, ω - плотность и круговая частота колебаний, n_j - компоненты единичных векторов внешней нормали к соответствующим поверхностям.

Замечание 1. На практике обычно задается не распределение вектора перемещений всюду на S_0 , а значения перемещений в некотором наборе точек, соответствующих местам установки датчиков, причем аналог (6) имеет вид:

$$u_i^{(k)}(\underline{x}_m) = u_{im}^0, \quad \underline{x}_m \in S_0, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

3. Вспомогательные задачи.

Задача I Рассмотрим краевую задачу - I для тела V^1 без дефектов, тогда на внутренней поверхности S_{int} граничные условия будут соответствовать непрерывности векторов смещений и напряжений.

Эта задача состоит из дифференциальных уравнений движения (1),(2) относительно $u_i^{(k)*}$, $\underline{x} \in V_k$ и граничных условий

$$u_i^{(k)*}|_{S_u} = 0, \quad t_i^{(k)*}|_{S_t} = \sigma_{ij}^{(k)*} n_j|_{S_t} = 0 \quad (8)$$

$$t_i^{(k)*}|_{S_0} = \sigma_{ij}^{(k)*} n_j|_{S_0} = Q_i^*(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x}, \underline{\xi} \in S_0 \quad (9)$$

и условий непрерывности на S_{int}

$$u_i^{(k)*}|_{S_{int}} = u_i^{(k+1)*}|_{S_{int}}, \quad t_i^{(k)*}|_{S_{int}} = t_i^{(k+1)*}|_{S_{int}} \quad (10)$$

Задача II Далее рассмотрим краевую задачу - II для тела $V^2 = \bigcup_{k=1}^{K_1} V_k$, $K_1 < K$ при действии тех же нагрузок на S_0 , причем поверхность $S_{int}^{K_1}$ для последнего слоя свободна от напряжений (рассмотрим вначале случай, когда внутри тела V^2 дефектов нет).

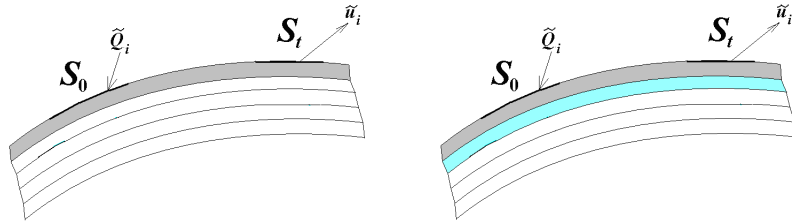


Рис. 2. Последовательность вспомогательных задач ($K_1 = 1$ - слева, $K_1 = 2$ - справа).

Эта задача описывается дифференциальными уравнениями (1),(2) относительно \tilde{u}_i , $\underline{x} \in V^2$, граничными условиями вида

$$\tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \quad \tilde{t}_i|_{S_t} = \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_t} = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{t}_i|_{S_0} = \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_0} = \tilde{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x}, \underline{\xi} \in S_0 \quad (12)$$

а также условиями отсутствия нагрузок на $S_{int}^{K_1}$

$$\tilde{t}_i|_{S_{int}^{K_1}} = 0 \quad (13)$$

Задача III Далее рассмотрим краевую задачу - II для тела $V^3 = \bigcup_{k=1}^{K_1-1} V_k \cup \hat{V}_{K_1}$, $K_1 < K$ при действии тех же нагрузок на S_0 , причем на поверхности $S_{int}^{K_1}$ (рис. 3 слева), которая целиком лежит в K_1 -ом слое, могут быть заданы три типа условия: 1 – поверхность закреплена, 2 – поверхность гладкого контакта (закреплена

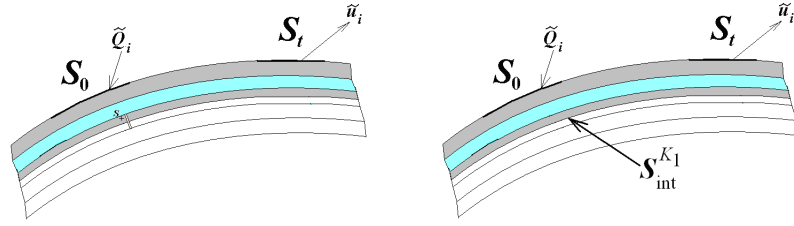


Рис. 3. Вспомогательная задача ($K_1 = 3$ - справа).

по нормали и равны нулю касательные перемещения) или 3 – закреплена в касательной плоскости и равны нулю нормальные напряжения (рассмотрим вначале случай, когда внутри тела V^3 дефектов нет).

Эта задача описывается дифференциальными уравнениями (1),(2) относительно \hat{u}_i , $\underline{x} \in V^3$, граничными условиями вида

$$\hat{u}_i|_{S_u} = 0, \quad \hat{t}_i|_{S_t} = \hat{\sigma}_{ij}n_j|_{S_t} = 0, \quad (14)$$

$$\hat{t}_i|_{S_0} = \hat{\sigma}_{ij}n_j|_{S_0} = \hat{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x}, \underline{\xi} \in S_0 \quad (15)$$

а также одним из трех типов условий на $S_{int}^{K_1}$, например, для первого случая

$$\hat{u}_i|_{S_{int}^{K_1}} = 0 \quad (16)$$

Замечание 2. Зависимость функций $Q_i^*(\underline{x}, \underline{\xi})$, $\tilde{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi})$ и $\hat{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi})$ от $\underline{\xi}$ означает, что может быть рассмотрено некоторое однопараметрическое семейство, например

$$Q_i^*(\underline{x}, \underline{\xi}) = P_i^*\delta(\underline{x} - \underline{\xi}), \quad \tilde{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) = \tilde{P}_i\delta(\underline{x} - \underline{\xi}), \quad \hat{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) = \hat{P}_i\delta(\underline{x} - \underline{\xi}) \quad (17)$$

Замечание 3. Методология построения ГИУ с помощью задач II и III не изменится, если тела V^2 и V^3 будут содержать известные дефекты (возможно, найденные на предыдущем шаге).

4. Вывод ГИУ с помощью решения задачи I.

Рассмотрим случай наличия расслоений и отсутствия разрывов, предположим, что найдено решение классической задачи I и обозначим

$$u^{(k)*}|_{S_t} = \phi^*(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x} \in S_t, \quad \underline{\xi} \in S_0,$$

Введем в рассмотрение оператор

$$G(\underline{u}^0, \underline{p}, \underline{\phi}^*, \underline{Q}^*) = \int_{S_0} u_i^0(\underline{x})Q_i^*(\underline{x}, \underline{\xi})dS_x - \int_{S_t} \phi_i^*(\underline{x}, \underline{\xi})p_i(\underline{x})dS_x = G_1(\underline{\xi}) \quad (18)$$

Применим к телам V и V^1 теорему взаимности работ [2] и с учетом условий непрерывности (4) на $S_{int} \setminus \Gamma$ и (10) на S_{int} , получим, что

$$\int_{\Gamma} t_i^{(k)*}(\underline{x}, \underline{\xi}) \chi_i(\underline{x}) dS_x = G_1(\underline{\xi}) \quad (19)$$

где $\chi_i(\underline{x})$ - скачки компонент вектора перемещений на трещинах, при этом на $S_{int} \setminus \Gamma$ этот скачки равны нулю. Обозначим

$$X_i(\underline{x}) = \begin{cases} \chi_i & \text{при } \underline{x} \in \Gamma \\ 0 & \text{при } \underline{x} \in S \setminus \Gamma \end{cases}$$

Тогда соотношение (19) представляет собой систему интегральных уравнений (при интегрировании по известной поверхности S_{int}) относительно функций $X_i(\underline{x})$, $\underline{x} \in S_{int}$

$$\int_{S_{int}} t_i^{(k)*}(\underline{x}, \underline{\xi}) X_i(\underline{x}) dS_x = G_1(\underline{\xi}), \quad \underline{\xi} \in S_0 \quad (20)$$

Уравнение (20) при различном выборе частот и фиктивных нагрузок может служить для реконструкции трещин, которые являются носителями для функций $X_i(\underline{x})$.

5. Вывод ГИУ с помощью решения задачи II.

Так же как и в задаче I рассмотрим случай наличия расслоений и отсутствия разрывов, пусть вспомогательная задача II решена, обозначим

$$\tilde{u}^{(k)}|_{S_t} = \tilde{\phi}(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x} \in S_t, \quad \underline{\xi} \in S_0$$

Введем в рассмотрение оператор

$$F(\underline{u}^0, \underline{p}, \tilde{\phi}, \tilde{Q}) = \int_{S_0} u_i^0(\underline{x}) \tilde{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) dS_x - \int_{S_t} \tilde{\phi}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) p_i(\underline{x}) dS_x = F_1(\underline{\xi}) \quad (21)$$

Рассмотрим тело, занимающее подобласть V^2 , и применим к нему теорему взаимности работ [2]. Тогда получим, что

$$\int_{S_{int}^{K_1} \setminus \Gamma} \tilde{u}_i^{(k)}(\underline{x}, \underline{\xi}) t_i^{(K_1)}(\underline{x}) dS_x = F_1(\underline{\xi}) \quad (22)$$

Учитывая, что сомножители подынтегрального выражения в (19) определены всюду на $S_{int}^{K_1}$ и в силу (5)

$$t_i^{(K_1)}|_{\Gamma} = 0 \quad (23)$$

то соотношение (19) может быть представлено, как система ГИУ по известной границе S

$$\int_{S_{int}^{K_1}} \tilde{u}_i^{(k)}(\underline{x}, \underline{\xi}) t_i^{(K_1)}(\underline{x}) dS_x = F_1(\underline{\xi}) \quad \underline{\xi} \in S_0 \quad (24)$$

При численной реализации решения системы ГИУ (24) в отличие от системы (20) основой идентификации трещин служат два свойства решения: соотношения (23) и сингулярное поведение компонент вектора напряжений на краях трещин.

6. Вывод ГИУ с помощью решения задачи III.

Теперь рассмотрим случай отсутствия расслоений и наличие разрывов, пусть вспомогательная задача III решена, обозначим

$$\hat{u}^{(k)}|_{S_t} = \hat{\phi}(\underline{x}, \underline{\xi}), \quad \underline{x} \in S_t, \quad \underline{\xi} \in S_0$$

Введем в рассмотрение оператор

$$T(\underline{u}^0, \underline{p}, \underline{\hat{\phi}}, \underline{\hat{Q}}) = \int_{S_0} u_i^0(\underline{x}) \hat{Q}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) dS_x - \int_{S_t} \hat{\phi}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) p_i(\underline{x}) dS_x = T_1(\underline{\xi}) \quad (25)$$

Рассмотрим тело, занимающее подобласть V^3 , и применим к нему теорему взаимности работ [2]. Тогда получим, что

$$\int_{S_{int}^{K_1}} \hat{t}_i^{(k)}(\underline{x}, \underline{\xi}) u_i(\underline{x}) dS_x + \int_{S_+} \hat{t}_i^{(k)}(\underline{x}, \underline{\xi}) \chi_i(\underline{x}) dS_x = T_1(\underline{\xi}) \quad (26)$$

где $\chi_i(\underline{x})$ - скачки компонент вектора перемещений на поперечных трещинах (разрывах слоев).

Однако практическая реализация ГИУ (26) невозможно в силу неизвестной границы S_+ , поэтому проведем поверхность $S_{int}^{K_1}$ в непосредственной близости к интерфейсной границе разделяющей слои $K_1 - 1$ и K_1 , тогда в силу малости S_+ вторым слагаемым в левой части уравнения (26) на первом этапе можно будет пренебречь, и рассмотреть уравнение

$$\int_{S_{int}^{K_1}} \hat{t}_i(\underline{x}, \underline{\xi}) u_i^{(1)}(\underline{x}) dS_x = T_1(\underline{\xi}) \quad (27)$$

Заметим, что при наличии разрывов и удачно выбранной частоте колебаний функции $u_i^{(1)}$ - являются кусочно-непрерывными, точки разрывов совпадают с пересечением поверхностей, поэтому на втором этапе становится возможным использование уравнения (26), с возможными вариациями положения границы S_+ относительно ее положения найденного на первом этапе.

7. Численные примеры реконструкции трещин.

В первом примере идентифицируется интерфейсная трещина в свободной биморфной (Fe, Cu) пластине (0.3x0.04 м). На рис. 4 представлены первые три собственных формы колебаний, причем на рис. 4 (слева) изображено распределение вертикального смещения на первой собственной частоте (1.82 кГц), на рис. 4 (в центре) – горизонтального смещения на второй частоте (2.57 кГц) и на на рис. 4 (справа) – вертикальное смещение на третьей собственной частоте (5.97 кГц). Из этого рисунка следует, что частота в окрестности первой изгибной формы не подходит для эффективной реконструкции, при использовании второй собственной частоты главную роль играет горизонтальное смещение берегов трещины, а на третьей собственной частоты раскрытие трещины происходит по вертикали.

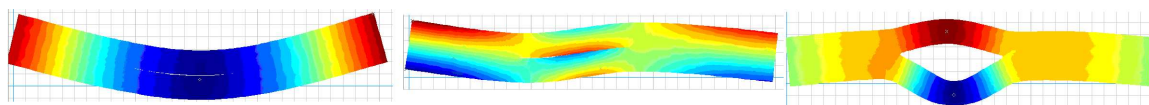


Рис. 4. Формы колебаний образца с продольной трещиной

Для реконструкции трещины использовалось уравнение (20) при его дискретизации неизвестных функций - скачков перемещений берегов трещины с помощью 10 кусочно-постоянных элементов. Так на рис. 5 представлены найденные скачки горизонтального смещения (слева) в окрестности второй собственной частоты (16000 рад/с) и вертикального смещения (справа) в окрестности третьей собственной частоты.

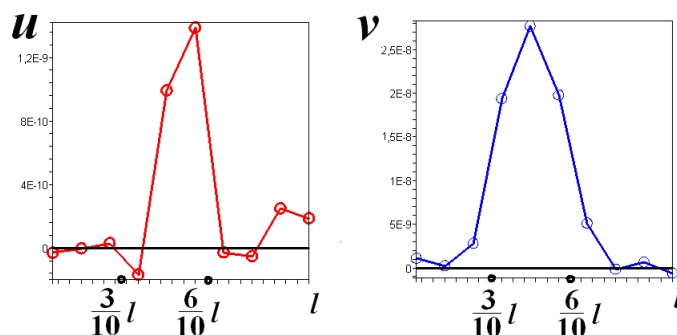


Рис. 5.

Второй пример иллюстрирует применение ГИУ III в задаче для трехслойного композита при наличии двух разрывов в среднем слое. Так на рис. 6 представлены распределение горизонтальных смещений на собственных частотах 7.11 кГц (рис. 6 слева) и 20.59 кГц (рис. 6 справа), которые характеризуются интенсивным раскрытием трещин.

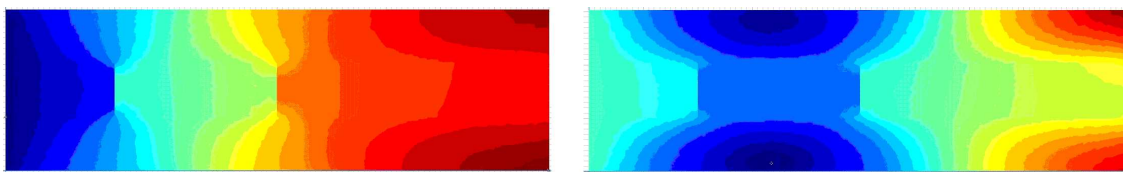


Рис. 6.

На рис. 7 представлены графики горизонтального смещения (сплошные кривые) на средней линии внутреннего слоя при гармонических колебаниях вблизи резонансной частоты 20.59 кГц. Разрывный характер горизонтального смещения связан с наличием трещин.

В результате решения уравнения (27) методом граничных элементов с использованием кусочно-постоянной аппроксимации, которая в этом случае наиболее предпочтительна (в силу разрывности) решения было восстановлено горизонтальное смещение представленное на рис. 7 (слева) – кривая со светлыми кружочками.

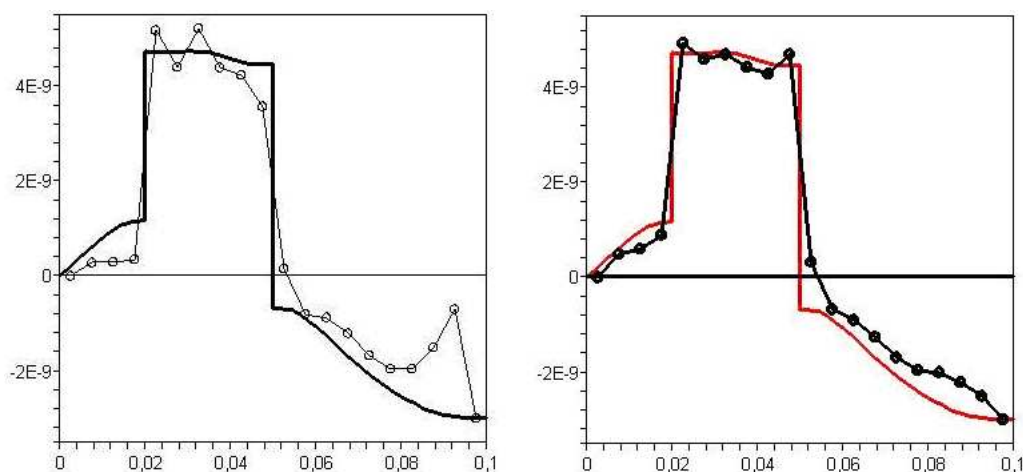


Рис. 7.

Искомое решение сплошная кривая. Как следует из этого рисунка, несмотря на приближенный характер уравнения (27), положения трещин идентифицированы с достаточной степенью точности. Дальнейшее уточнение результата на основе решения ГИУ. (26) представлено на рис. 7 справа.

Проведенные численные эксперименты показали, что точность определения координат концов трещин в значительной мере зависит от расположения участка "измерения".

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 07-08-12193, 07-08-13589.

Список литературы

- [1] Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Некоторые полуживные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естествен. науки. 2003, № 3. С. 20-24.
- [2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

Soloviev A.N, Spogakin A.S., Naprasnikov V.V., Shevtsov S.N. *Damage reconstruction in stratified composites.* It is offered methods of reconstruction of two types of faults in stratified composites: stratifications (the interface flaws) and ruptures of stratum (transversal flaws). Inverse geometrical problems of reconstruction of flaws are reduced to a solution of sequence of systems of the BIE obtained on the basis of reciprocity theorem of operations at established oscillations of expert samples. Solution BIE will be carried out on the basis of a combination of FEM, a method of BEM and a method of a regularization of A.N.Tihonov. As the additional information for a solution of inverse problems the field of displacement measured on a part of exterior boundary of a skew field, free from mechanical stress. Numerical examples of identification of stratifications and ruptures surveyed within the framework of a flat problem of theory of elasticity.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОЛОСТИ И ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Солуянов Н. О.

Южный федеральный университет, *sol.nik@mail.ru*

В работе рассмотрены обратные задачи об установившихся изгибных колебаниях упругой пластины с дефектом в виде полости или включения. В линеаризованной постановке на основе процедуры регуляризации на компактных множествах решение соответствующих интегральных уравнений сведено к решению функциональных уравнений относительно нескольких параметров дефекта. Приведены численные результаты и их анализ.

Постановка обратной коэффициентной задачи.

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω упругой прямоугольной пластины с размерами $a \times b$ и толщиной h , в которой имеется дефект в виде полости или включения малого характерного размера. Будем считать, что пластина оперта по краям $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, а к краю $y = b$ приложена периодическая во времени нагрузка с амплитудой $p(x)$.

Рассмотрим отдельно два типа дефектов: 1) полость, 2) включение. Наличие полости будем моделировать зависимостью толщины пластины от координат $h = h(x, y)$, а наличие включения - зависимостью модуля Юнга от координат $E = E(x, y)$. В обоих случаях цилиндрическая жесткость пластины $D(x, y)$ является переменной величиной. Обратная задача состоит в том, чтобы по заданной функции смещения свободного края $y = b$ в некотором диапазоне изменения частоты

$$w(x, b, \omega) = f(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (1)$$

определить функцию $h(x, y)$ или $E(x, y)$.

Соответствующая краевая задача представима в форме [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta (D\Delta w) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 h w = 0, \\ w(0, y) = 0, \quad \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] (0, y) = 0; \\ w(a, y) = 0, \quad \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] (a, y) = 0; \\ w(x, 0) = 0, \quad \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] (x, 0) = 0; \\ \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] (x, b) = 0, \\ \left[-\frac{\partial}{\partial y} (D\Delta w) + (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} \right] (x, b) = p(x), \end{array} \right. \quad (2)$$

где ρ - плотность. В случае полости положим $D(x, y) = D_0 (1 - \eta_h^3(x, y))$, в случае включения - $D(x, y) = D_0 (1 - \eta_E(x, y))$, где D_0 - цилиндрическая жесткость однородной пластины, $\eta_h(x, y)$, $\eta_E(x, y)$ - некоторые финитные функции.

При дополнительном условии вида (1), осуществляя линейризацию, сведем проблему к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода [2], справедливым в частотном диапазоне $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ соответственно для полости и включения

$$\lambda^4 \int_0^a \int_0^b \eta_h(x, y) \cdot w_0^2(x, y, \omega) dx dy = g(\omega), \quad (3)$$

$$\int_0^a \int_0^a \eta_E(x, y) \cdot \left[(\Delta w_0)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy = g(\omega), \quad (4)$$

где $\lambda^4 = \rho \frac{\omega^2 h}{D_0}$, $g(\omega) = \int_0^a p(x) \cdot [f(x, \omega) - w_0(x, b, \omega)] dx$, $w_0(x, y, \omega)$ - решение прямой задачи для однородной пластины. Отметим, что построение решений интегральных уравнений (3), (4) является некорректной задачей и требует процедуры регуляризации [3]. На практике наиболее существенной информацией о дефекте является его местоположение и характерный размер, а не конкретный вид его поверхности [4]. Это позволяет сузить класс отыскиваемых функций до некоторого компакта и применить метод регуляризации на компактных множествах [3]. В настоящей работе предлагается восстанавливать дефект в классе прямых призм. В выделенном классе функции $\eta_h(x, y)$ и $\eta_E(x, y)$ принимают вид

$$\eta_h(x, y) = \bar{h} \cdot H(r_x^2 - (x - c_x)^2) \cdot H(r_y^2 - (y - c_y)^2), \quad (5)$$

$$\eta_E(x, y) = \bar{E} \cdot H(r_x^2 - (x - c_x)^2) \cdot H(r_y^2 - (y - c_y)^2), \quad (6)$$

где c_x, c_y - координаты центра дефекта, r_x, r_y - размеры дефекта в направлениях координатных осей, \bar{h} - отношение высоты дефекта к высоте однородной пластины h_0 , \bar{E} - отношение модуля Юнга дефекта к модулю Юнга однородной пластины E_0 , H - функция Хевисайда.

Выбирая нагрузку в виде $p(x) = p_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, построим решение прямой задачи для однородной пластины в следующей форме [1]

$$w_0(x, y, \omega) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot [A_1 sh(s_{11}y) + C_1 sh(s_{21}y)], \quad (7)$$

где

$$s_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}, \quad s_{21} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2},$$

причем коэффициенты A_1, C_1 определяются из системы

$$\begin{cases} A_1 sh(s_{11}b) \left(s_{11}^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) + C_1 sh(s_{21}b) \left(s_{21}^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) = 0, \\ A_1 s_{11} \left(s_{11}^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right) ch(s_{11}b) + C_1 s_{21} \left(s_{21}^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right) ch(s_{21}b) = -p_1. \end{cases}$$

Подставив выражения (5), (6) и (7) в уравнения (3), (4), и, выполнив интегрирование по области дефекта, приходим к функциональным уравнениям относительно пяти неизвестных c_x , c_y , r_x , r_y и либо \bar{h} либо \bar{E} соответственно для полости и включения

$$\bar{h} \cdot \lambda^4 R_1(c_y, r_y) \left[r_x - \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi r_x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi c_x}{a}\right) \right] = g(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (8)$$

$$\bar{E} \cdot \left[R_2(c_y, r_y) \cdot r_x + R_3(c_y, r_y) \cdot \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi r_x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi c_x}{a}\right) \right] = g(\omega), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 = & -(A_1^2 + C_1^2) \cdot r_y + \frac{A_1^2}{2s_{11}} sh(2s_{11}r_y) ch(2s_{11}c_y) + \frac{C_1^2}{2s_{21}} sh(2s_{21}r_y) ch(2s_{21}c_y) + \\ & + \frac{2A_1C_1}{s_{11}+s_{21}} sh((s_{11}+s_{21})r_y) ch((s_{11}+s_{21})c_y) - \\ & - \frac{2A_1C_1}{s_{11}-s_{21}} sh((s_{11}-s_{21})r_y) ch((s_{11}-s_{21})c_y), \\ R_{2,3} = & (K_1^c + K_2^c \mp K_1^s \mp K_2^s) \cdot r_y + \frac{1}{2s_{11}} (K_1^c \pm K_1^s) sh(2s_{11}r_y) ch(2s_{11}c_y) + \\ & + \frac{1}{2s_{21}} (K_2^c \pm K_2^s) sh(2s_{21}r_y) ch(2s_{21}c_y) + \\ & + \frac{1}{s_{11}+s_{21}} (K_{12}^c \pm K_{12}^s) sh((s_{11}+s_{21})r_y) ch((s_{11}+s_{21})c_y) + \\ & + \frac{1}{s_{11}-s_{21}} (K_{12}^c \mp K_{12}^s) sh((s_{11}-s_{21})r_y) ch((s_{11}-s_{21})c_y), \end{aligned}$$

$$K_1^s = A_1^2 \left[\left(s_{11}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + 2(1-\nu) s_{11}^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_{12}^s = 2A_1C_1 \left[\left(s_{11}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \left(s_{21}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) + (1-\nu) (s_{11}^2 + s_{21}^2) \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_2^s = C_1^2 \left[\left(s_{21}^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 + 2(1-\nu) s_{21}^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right],$$

$$K_1^c = -2(1-\nu) A_1^2 s_{11}^2 \frac{\pi^2}{a^2}, \quad K_{12}^c = -4(1-\nu) A_1 C_1 s_{11} s_{21} \frac{\pi^2}{a^2}, \quad K_2^c = -2(1-\nu) C_1^2 s_{21}^2 \frac{\pi^2}{a^2},$$

Решение функциональных уравнений (8), (9) проводилось численно. Прогиб свободного края $f(x, \omega)$ вычислялся на основе конечно-элементных методов. Результаты численных экспериментов показали, что 1) местоположение дефекта определяется гораздо точнее остальных параметров дефекта; 2) в пограничной зоне, примыкающей к границам пластины, дефект восстанавливается гораздо хуже, чем за ее пределами. Для различных вариаций значений параметров дефекта относительная погрешность восстановления его местоположения не превышает 1%. В пограничной зоне максимальная относительная погрешность восстановления параметров дефекта достигает 5%.

Все полученные результаты говорят об эффективности предложенного подхода.

Список литературы

- [1] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
- [2] Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.
- [3] Тихонов А. Н. Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 274 с.
- [4] Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размеров полости в упругом стержне. // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.

Soluyanov N. O. *Reconstruction of cavity or inclusion in elastic plate.* Inverse problems of an elastic plate containing a defect in the form of a cavity or inclusion are considered. In linear statement, on base of procedure of regularization on compact sets the solving of the corresponding integral equations is reduced to the solving of the functional equations concerning several parametres of defect. Numerical results and their analysis are presented.

О ВОЛНОВОМ ПОЛЕ, ГЕНЕРИРУЕМОМ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕТЕРОГЕННОГО СЛОЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИ

Суворова Т.В., Столяров Ю.В.

Ростовский государственный университет путей сообщения

Рассматриваются колебания гетерогенного частично или полностью насыщенного жидкостью слоя, лежащего на недеформируемом основании. Рассмотрены случаи жесткого закрепления нижней грани, контакта с основанием без трения. Построены формулы, описывающие поля перемещений. На основе численного анализа показано, что волноводные свойства гетерогенного слоя существенно зависят от условий на его нижней грани

Исследование закономерностей формирования волновых полей в пористых двухкомпонентных средах, состоящих из упругого скелета и смеси жидкости и газа, представляют большой интерес ввиду многочисленных приложений в геофизике, геологии, нефтедобычи, биомеханической инженерии, строительстве, теории мониторинга. Динамические характеристики гетерогенных сред в значительной степени определяются граничными условиями краевых задач, моделирующих изучаемый процесс. В настоящей работе рассматриваются плоские задачи о колебаниях пористо-упругого гетерогенного слоя в условиях полной и частичной обводненности. К верхней границе слоя приложена в конечной области осциллирующая нагрузка. Гетерогенная полоса колеблется на недеформируемом основании. Нижняя грань может быть жестко закреплена (задача А), лежать без трения на основании (задача В).

Пусть гетерогенный слой занимает область $-\infty < x < \infty$, и $0 \leq y \leq h$. К верхней грани слоя в конечной области приложена осциллирующая нагрузка $\bar{P}(x)e^{-i\omega t}$, $-a \leq x \leq a$, $y = h$, вне области приложения поверхность слоя свободна от напряжений.

Перемещения двухфазной гетерогенной среды определяются уравнениями Био [1].

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right) = Grad \sigma_{ij}^s; \quad (1)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right) = Grad \sigma^f; \quad i = 1, 2$$

где $\bar{u}(x, y, t)$, $\bar{w}(x, y, t)$ – векторы перемещений твердой и жидкой фаз гетерогенной среды.

Связь между тензором полных напряжений и деформаций твердой и жидкой фаз выражается в виде:

$$\sigma_{ij}^s = A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}, \quad \sigma^f = Q e + R \varepsilon, \quad (2)$$
$$e = div \bar{u}, \quad \varepsilon = div \bar{w}, \quad e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

σ_{ij}^s, σ^f – напряжения, действующие соответственно на упругий скелет и на жидкость в порах, A, N, Q, R, ρ_{ij}, b – механические характеристики гетерогенной среды, зависящие от скоростей распространения волн в жестком скелете и в жидкости, от плотности сред, от пористости, межфазного взаимодействия δ_{ij} – символ Кронекера.

Коэффициенты A, Q, R могут быть определены экспериментально [1], [2], через пористость среды m , модуль сдвига пористого скелета N , объемный модуль сжимаемости пористой среды K_b , объемный модуль сжимаемости упругой среды, образующей скелет K_s , объемный модуль сжимаемости жидкой фазы, насыщающей скелет K_{fg} . В случае полного насыщения упругого скелета жидкостью $K_{fg} = K_f$, где K_f – объемный модуль сжимаемости жидкости. В случае частичного насыщения пористой среды жидкая фаза представляет собой смесь жидкости и газа, характеризующая коэффициентом $s, s = \frac{V_f}{V_{fg}}$. Здесь V_f – объем жидкости, V_{fg} – объем смеси жидкости и газа. При этом объемный модуль сжимаемости жидкой среды изменяется, выражения для приведены в [4], [5].

На верхней границе полосы при $y = h$ в конечной области задана равномерная нагрузка по типу «непроницаемый поршень», при этом

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^s + \sigma^f &= -P_2(x)e^{-i\omega t}, \quad u_2 = w_2, \quad |x| \leq a, \\ \sigma_{22} &= 0, \quad \sigma_{12}^s = 0, \quad |x| > a. \end{aligned} \tag{3}$$

Граничные условия для нижней грани в случае задачи А имеют вид:

$$\bar{u}(x, y, t), w_2(x, y, t) = 0, \quad y = 0. \tag{4}$$

В случае задачи В решалась симметричная задача с граничными условиями (3) на обеих гранях в условиях непроницаемости границ. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [3].

Применим к определяющим уравнениям в (1), (2) преобразование Фурье, и отделим временной множитель. После удовлетворения граничных условий, получаем выражение для перемещений в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) &= \int_{-a}^a \mathbf{k}(x - \xi) \bar{P}(\xi) d\xi \\ \mathbf{k}(x - \xi) &= \int_{\Gamma} e^{i\alpha x} \mathbf{K}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Контур интегрирования Γ в (5) выбирается в соответствии с условиями излучения волн на бесконечность [3].

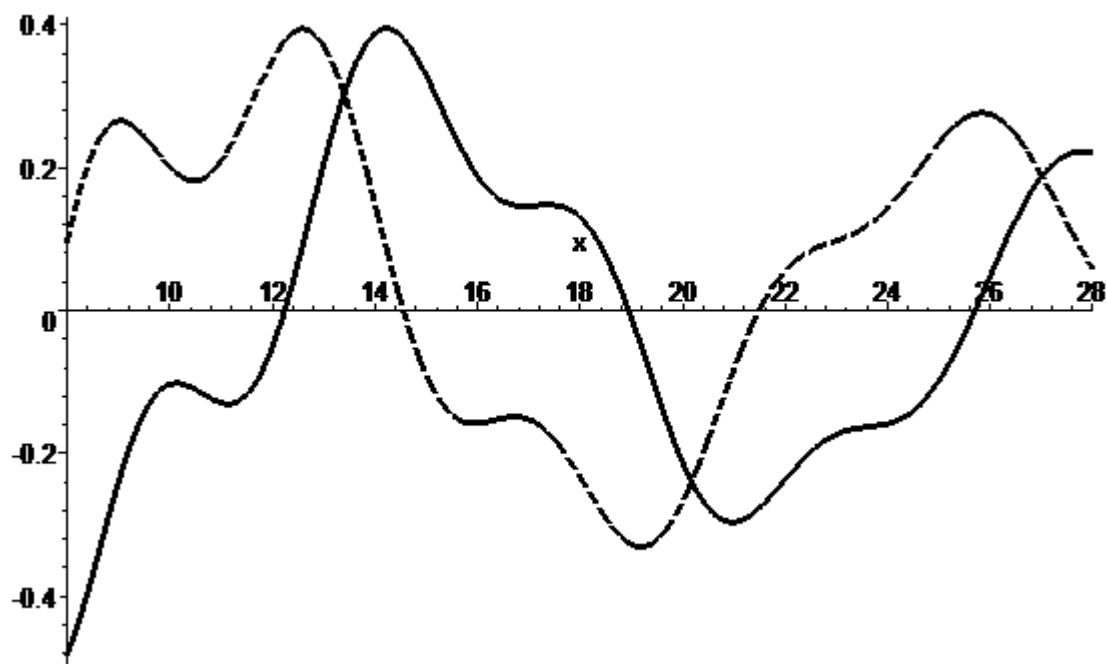


Рис. 1. Вертикальные перемещения в гетерогенной полосе (задача А)

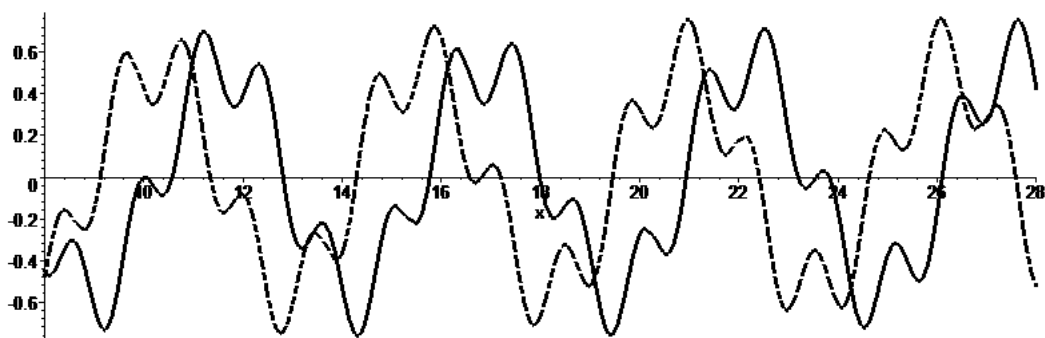


Рис. 2. Вертикальные перемещения в гетерогенной полосе (задача В)

Подынтегральные функции соотношений (5) являются быстро осциллирующими, убывают на бесконечности степенным образом, имеют вблизи вещественной оси счетное количество полюсов, которые определяются дисперсионными уравнениями подынтегральных функций в (5).

С ростом газонасыщенности гетерогенной полосы скорости распространения волн убывают по степенному закону. Варьирование коэффициента вязкости жидкости, насыщающей поры, изменяет силу межфазного взаимодействия, что приводит к движению дисперсионных множеств в ограниченной области комплексной плоскости.

Волноводные свойства гетерогенного слоя существенно зависят от условий на его нижней грани. В качестве иллюстрации на графиках приведены зависимости волновых полей на поверхности слоя в случае задачи А – рис. 1, и в случае

задачи В – рис. 2. На горизонтальной оси отложено безразмерное расстояние от источника колебаний. Сплошные и штриховые линии соответствуют действительной и мнимой составляющей вертикальных перемещений. Результаты представлены для характеристик, соответствующих обводненному жидкостью песчанику со степенью газонасыщенности $s = 0.07$, $\omega = 1000$ Гц.

Для каждой частоты для различных способов закрепления нижней грани слоя распространяется в общем случае разное количество мод. Для данной частоты в полосе генерируется две волны для каждой задачи. Амплитуда поверхностных возмущений в задаче В более, чем в полтора раза превышает амплитуду перемещений задачи А. Кроме этого, степень диссипации энергии, порядок убывания перемещений в полосе с закрепленной нижней гранью намного выше, чем в слое, лежащем без трения на жестком основании.

Список литературы

- [1] Био М. А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. В. 6, № 82, С. 103 – 134.
- [2] Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
- [3] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
- [4] Суворова Т. В., Беляк О. А. О колебаниях многослойного гетерогенного полупространства под действием осциллирующей нагрузки Труды РГУПС. 2006. В. 3. С. 127 – 134.
- [5] Суворова Т. В., Столяров Ю.В. Колебания пористого слоя в условиях полного и частичного водонасыщения. Труды XI межд. конф "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону. 2007. В. 2. С. 180 – 183.

Suvorova T. V., Stoliarov U.V. *Saturated and unsaturated heterogeneous layer oscillations, laying on not deformable foundation, are considered. Cases of rigid fastening of the bottom side and contact to the basis without friction are considered, The formulas describing wave guide fields are constructed. On the basis of the numerical analysis it is shown, that wave properties of a heterogeneous layer essentially depend on conditions on its bottom side.*

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

Трофимова А. В., Цибулин В. Г.

Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции несжимаемой жидкости в кольце. Разработан численный метод расчета конвективных движений на основе уравнений в естественных переменных (скорости, давление, температура) и метода смещенных сеток. В численном эксперименте изучены переходы от стационарных режимов к нестационарным и найдены области изменения параметров, при которых реализуется азимутальное вращение жидкости.

Исследование конвекции в пористых средах представляет большой интерес из-за многочисленных научных и технических приложений [1]. Изучение режимов в пористых цилиндрах обнаружило существование одно- и многовихревых режимов, сложные сценарии конвективных переходов [2]. Анализ колебательных и нестационарных течений требует развития численных методов, сохраняющих свойства исходных дифференциальных уравнений.

В данной работе описан численный метод расчета конвективных движений на основе уравнений в естественных переменных, записанных в полярных координатах. Метод решения задачи основан на схеме смещенных сеток [3]. Представлены результаты исследования конвективных переходов в пористой кольцевой области, подогреваемой снизу.

Уравнения конвекции в кольцевой области

Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции, формулируемая в виде уравнений Дарси в естественных переменных [1]. В полярных координатах система уравнений в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Phi(\theta, u, v) = \Delta \theta, \quad \Phi(\theta, u, v) = u \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - u + \lambda f_r, \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - v + \lambda f_\varphi, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\theta(r, \varphi, t)$ — температура; $u(r, \varphi, t)$, $v(r, \varphi, t)$ — радиальная и азимутальная скорости; $p(r, \varphi, t)$ — давление, отсчитываемое от гидростатического; λ — фильтрационное число Рэлея; $f_r = (\theta - \theta_0) \cos \varphi$, $f_\varphi = -(\theta - \theta_0) \sin \varphi$ — радиальная и азимутальная составляющие силы всплытия; предполагается, что инерционные члены в уравнениях движения малы.

При $\varphi = 0$ ($\varphi = 2\pi$) ставятся условия периодичности для скорости и температуры. На границе области $\mathcal{D} = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$, где r_1 и r_2 — радиусы внутренней и внешней окружностей кольца, для скорости принимается условие непротекания:

$$u|_{r_1} = 0, \quad u|_{r_2} = 0. \quad (4)$$

Рассматривается случай линейного по высоте распределения температуры на границе:

$$\theta^*|_{(r_k, \varphi)} = \theta_1 + \frac{r_2 + r_k \cos \varphi}{2r_2} (\theta_2 - \theta_1), \quad k = 1, 2 \quad (5)$$

Начальное условие задается только для температуры:

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(r, \varphi). \quad (6)$$

Задача (1)–(6) может быть записана относительно температуры и функции тока, которая вводится по следующим формулам: $u = \partial_\varphi \psi / r$, $v = -\partial_r \psi$. В результате получается система двух уравнений:

$$\theta_t + J(\theta, \psi) = \Delta \theta, \quad J(\theta, \psi) = \frac{1}{r} \partial_r (\theta \partial_\varphi \psi) - \frac{1}{r} \partial_\varphi (\theta \partial_r \psi), \quad (7)$$

$$\Delta \psi = \lambda G, \quad G = \frac{1}{r} (\partial_\varphi f_r - r \partial_r f_\varphi - f_\varphi), \quad (8)$$

с начальным условием (6), краевыми условиями для температуры (5) и нулевыми значениями функции тока на границе:

$$\psi|_{r_1} = 0, \quad \psi|_{r_2} = 0. \quad (9)$$

Метод численного решения

Для численного решения задач (1)–(6) и (7)–(9), (5), (6) используется метод конечных разностей. Вводится равномерная сетка $r_i = r_1 + ih_r$, $i = 0 \dots N + 1$, $h_r = (r_2 - r_1)/(N + 1)$, $\varphi_j = jh_\varphi - h_\varphi/2$, $j = 1 \dots M$, $h_\varphi = 2\pi/M$, в узлах которой определяются температура $\theta_{i,j}$ и функция тока $\psi_{i,j}$. В узлах смещенных сеток, образованных введением вспомогательных точек $r_{i-1/2} = -h_r/2 + r_1 + ih_r$ ($i = 1 \dots N + 1$), $\varphi_{j-1/2} = (j - 1)h_\varphi$ ($j = 1 \dots M$) вычисляются давление и скорости: $p_{i-1/2, j-1/2}$, $u_{i,j-1/2}$, $v_{i-1/2, j}$.

На двухточечных шаблонах вводятся разностные операторы первых производных и операторы вычисления среднего для целых и полуцелых индексов i и j :

$$\begin{aligned} (\delta_1 f)_{i+1/2, j} &= \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{h_r}, & (\delta_2 f)_{i, j+1/2} &= \frac{f_{i, j+1} - f_{i, j}}{h_\varphi}, \\ (\delta_0^1 f)_{i+1/2, j} &= \frac{f_{i+1, j} + f_{i, j}}{2}, & (\delta_0^2 f)_{i, j+1/2} &= \frac{f_{i, j+1} + f_{i, j}}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

С использованием (10) задаются операторы на четырехточечном шаблоне, разностные операторы первых производных на трехточечных шаблонах и дискретный аналог лапласиана:

$$\begin{aligned} (d_1 f)_{i, j} &= (\delta_0^2 \delta_1 f)_{i, j}, & (d_2 f)_{i, j} &= (\delta_0^1 \delta_2 f)_{i, j}, & (d_0 f)_{i, j} &= (\delta_0^1 \delta_0^2 f)_{i, j}, \\ (D_1 f)_{i, j} &= (\delta_0^1 \delta_1 f)_{i, j}, & (D_2 f)_{i, j} &= (\delta_0^2 \delta_2 f)_{i, j}, & \Delta_h f_{i, j} &= \left[\frac{1}{r} \delta_1 (r \delta_1 f) + \frac{1}{r^2} \delta_2 \delta_2 f \right]_{i, j}. \end{aligned}$$

Во внутренних узлах сетки $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots M$ записываются дискретные аналоги уравнений (1)–(3):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i,j} + \Phi_{i,j} &= \Delta_h \theta_{i,j}, & 0 &= [\delta_1(ru) + \delta_2 v]_{i+1/2, j+1/2}, \\ 0 &= [-\delta_1 p - u + \lambda f_r]_{i, j+1/2}, & 0 &= [-\frac{1}{r} \delta_2 p - v + \lambda f_\varphi]_{i+1/2, j} \end{aligned} \quad (11)$$

Аппроксимации конвективных членов строится аналогично схеме Аракавы:

$$\Phi_{i,j} = \left(\frac{\delta_1 (rd_0 u \delta_0^1 \theta) + \delta_2 (d_0 v \delta_0^2 \theta)}{3r} + 2 \frac{d_1 (r \delta_0^1 u d_0 \theta) + d_2 (\delta_0^2 v d_0 \theta)}{3r} \right)_{i,j} \quad (12)$$

Дискретные аналоги краевых условий имеют вид:

$$\theta_{0,j} = \theta^*(r_1, \varphi_j), \quad \theta_{N+1,j} = \theta^*(r_2, \varphi_j), \quad u_{0,j+1/2} = 0, \quad u_{N+1,j+1/2} = 0$$

Условие периодичности реализуется при помощи дополнительных узлов: $\theta_{i,0} = \theta_{i,M}$, $\theta_{i,M+1} = \theta_{i,1}$.

Разностная задача относительно функции тока и температуры дается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{i,j} + J_{i,j} &= \Delta_h \theta_{i,j}, & \Delta_h \psi_{i,j} &= \lambda G_{i,j}, & i &= 1 \dots N, & j &= 1 \dots M. \\ \theta_{0,j} &= \theta^*(r_1, \varphi_j), & \theta_{N+1,j} &= \theta^*(r_2, \varphi_j), & \psi_{0,j} &= 0, & u_{N+1,j} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аппроксимация конвективных членов для уравнения (13) следует из (12):

$$J_{i,j} = \left(\frac{D_1(\theta D_2 \psi) - D_2(\theta D_1 \psi)}{3r} + 2 \frac{d_1(d_0 \theta d_2 \psi) - d_2(d_0 \theta d_1 \psi)}{3r} \right)_{i,j}$$

В результате дискретизации система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана следующим образом:

$$\dot{\Theta} = A\Theta + Z - F(\Theta, U, V), \quad 0 = B_3 U + B_4 V, \quad (14)$$

$$0 = -B_1 P - C_1 U + \lambda F_r, \quad 0 = -B_2 P - C_2 V + \lambda F_\varphi. \quad (15)$$

Здесь для узловых значений температуры, давления и скорости вводятся векторы: $\Theta = (\theta_1^1, \theta_1^2, \dots, \theta_N^M)$, $P = (p_{1/2}^{1/2}, p_{1/2}^{3/2}, \dots, p_{N+1/2}^{M+1/2})$, $U = (u_1^{1/2}, u_1^{3/2}, \dots, u_N^{M+1/2})$ и $V = (v_{1/2}^1, v_{1/2}^2, \dots, v_{N+1/2}^M)$. Ленточная матрица A представляет аппроксимацию оператора Лапласа, матрицы B_i ($i = 1 \div 4$) отвечают операторам дифференцирования первого порядка, а матрицы C_1 и C_2 — операторам вычисления среднего, вектор Z определяется по известным значениям температуры на границе. Член $F(\Theta, U, V)$ обозначает аппроксимацию конвективного слагаемого.

Система уравнений (14)–(15) может быть приведена к уравнению относительно температуры Θ . Для этого из уравнений (15) выражаются векторы U , V и после подстановки их во второе уравнение (14) давление P определяется через Θ , затем найденные векторы U , V подставляются в первое уравнение (14) и получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения системы используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности.

Результаты расчетов

На основе разработанной схемы в MATLAB проведено исследование конвективных режимов в кольце $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ при линейном профиле температуры на границе $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$. Изучено развитие конвективных движений при изменении фильтрационного числа Рэлея λ . Численный эксперимент показал, что результаты вычислений на сетках 18×30 и 36×60 практически совпадают, поэтому для основных расчетов использовалась более экономичная сетка из 18×30 внутренних узлов.

Для оценки теплового потока через границы кольца в процессе расчета вычислялись числа Нуссельта:

$$Nu_k = \frac{r_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_r \theta(r_k, \varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2.$$

Для системы (1)–(6) обнаружена последовательность переходов от механического равновесия к стационарным режимам, которые, в свою очередь, переходят в нестационарные. Механическое равновесие устойчиво в диапазоне $\lambda \in (0, 75)$.



Рис. 1. Стационарный конвективный режим. Распределение температуры (слева) и линии функции тока (справа); $\lambda = 325$

При $\lambda \in [75, 359]$ формируются конвективные движения с азимутальным вращением и устанавливается стационарный режим с несимметричным относительно центрального вертикального сечения тепловым полем. На Рис. 1 представлены распределение температуры и линии функции тока стационарного режима при $\lambda = 325$.

Нестационарная конвекция наблюдается при $\lambda \geq 360$. На Рис. 2 даны графики изменения чисел Нуссельта, показывающие периодичность полученного режима. Аналогично стационарному режиму при $\lambda = 365$ возникают четыре конвективных вала, и цикл колебаний состоит в том, что реализуется азимутальное вращение жидкости против часовой стрелки, переходящее в движение жидкости по часовой стрелки. На Рис. 3 представлены распределения температуры для трех моментов времени, иллюстрирующие пульсирующий характер полученного режима.

Полученные результаты для системы (1)–(6) в основном подтверждаются расчетами для системы (7)–(9), (5), (6).

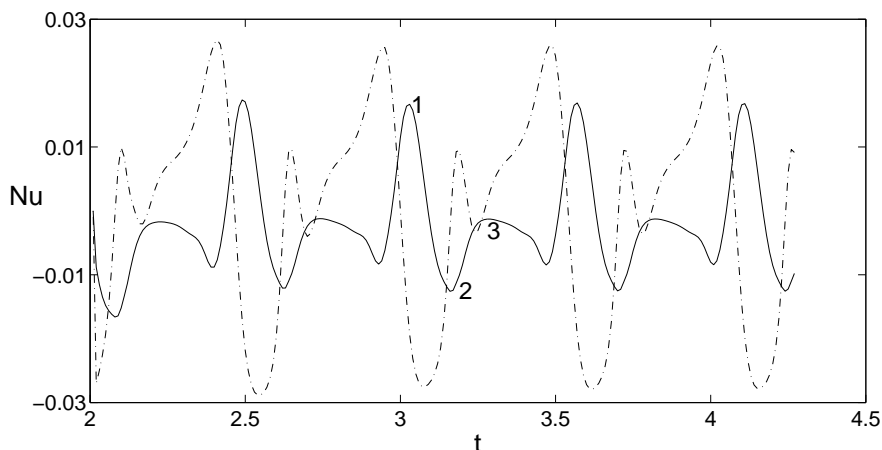


Рис. 2. Периодический режим. Зависимость $Nu(t)$ при $r = r_1$ (сплошная) и $r = r_2$ (штрихпунктир) границах кольца; $\lambda = 365$. На Рис. 3 для $t = t_k$, $k = 1, 2, 3$ (цифры) даны распределения температуры

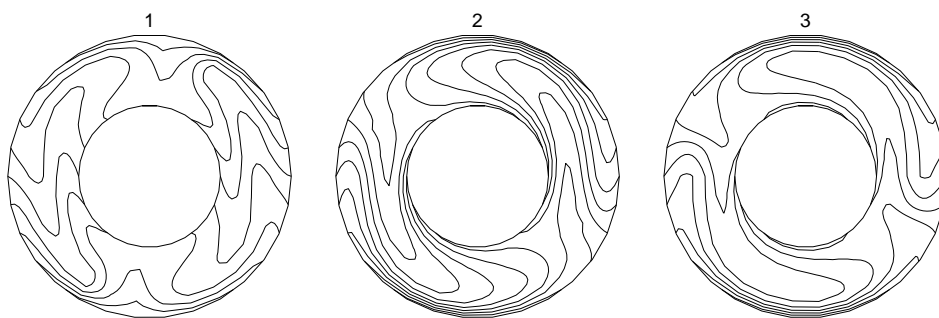


Рис. 3. Периодический режим. Распределение температуры при $t = t_k$, см. Рис. 2

Список литературы

- [1] *Nield D.A., Bejan A.* Convection in Porous Media. Springer-Verlag. New York. 1999. 546 p.
- [2] *Бессонов О.А., Брайловская В.А.* Пространственная модель тепловой конвекции в зазоре между горизонтальными коаксиальными цилиндрами с анизотропным пористым заполнением // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 145–155.
- [3] *Karasözen B., Tsybulin V.G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Comp. Phys. Comm., 2005. V. 167 P. 203–213.

Trophimova A.V., Tsybulin V.G. *Non-stationary convection in porous annulus.* The planar problem of the convection of incompressible fluid in a porous medium between concentric cylinders is considered. Method of staggered grids is developed for the computation of convective flows based on the equations in primitive variables (velocity, pressure, temperature). Convection in the porous annulus heating below is studied numerically and transitions from stationary to non-stationary regimes are found out.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГРАДИЕНТНОГО КЛИНА В СЛУЧАЕ МНОГОКРАТНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ ЗАКОНОВ НЕОДНОРОДНОСТИ

Трубчик И.С.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И., ЮФУ

Рассматриваются особенности решения контактной задачи для неоднородного по угловой координате клина в случае, когда производная функции, описывающей закон неоднородности, изменяет знак один или более раз по углу раствора клина. При решении задачи используется подход, описанный ранее [1], [2]. Исследуется точность аппроксимации функции трансформанты ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача для сильно осциллирующих законов неоднородности. На примере иллюстрируется влияние градиентности среды на ее напряженно-деформируемое состояние.

Особенность неоднородных материалов – наличие дополнительных источников концентрации напряжений. В однородных телах концентрация напряжений возникает в местах резких изменений геометрии тела и нагрузки. В неоднородных материалах возникает дополнительная концентрация напряжений в местах резкого изменения физико-механических характеристик материала (модуля упругости, коэффициента Пуассона и др.), т.е. по поверхностям сопряжения однородных элементов. Особый интерес представляют задачи, постановка которых сочетает в себе и те и другие источники концентрации напряжений, поскольку их решение позволит на основе аналитической модели и численного эксперимента предложить функционально-градиентные характеристики неоднородных материалов, снижающие концентрацию напряжений как внутри самого материала, так и на границе сопряжений контактирующих объектов. В данной работе на примере контактной задачи о сдвиге градиентного клина, приводятся особенности ее решения в случае многократно изменяющегося по угловой координате модуля сдвига. Данный подход применяется автором также и при рассмотрении особенностей деформирования сред с другими геометрическими концентраторами напряжений (трещины, полоса, жесткие включения и накладки в совокупности с градиентными средами).

Постановка задачи. Пусть недеформируемый полосовой штамп взаимодействует с упругой клиновидной областью с углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$). Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Считаем, что грань клина $\varphi = 0$ жестко закреплена, а на грани $\varphi = \alpha$ расположен полосовой штамп ширины $a \leq r \leq b$. На единицу длины штампа воздействует сдвигающее усилие P , вследствие чего штамп переместится в направлении оси z на величину ε , вызвав в клине деформацию чистого сдвига.

Предполагается, что силы трения между штампом и поверхностью клина отсутствуют, и вне штампа поверхность клина $\varphi = \alpha$ не нагружена (рис. 1). Модуль сдвига клина изменяется по закону

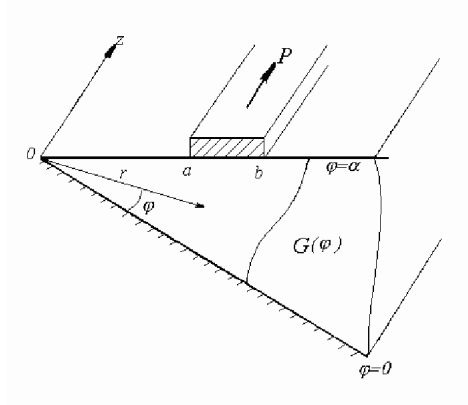


Рис. 1.

$$G = G(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad (1)$$

где $G(\varphi)$ – произвольная гладкая функция, $G(\varphi) > 0$ всюду в области ее определения.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид

$$w(r, 0) = 0, \quad \tau_{\varphi z}(r, \alpha) = 0, \quad 0 < r < a, \quad r > b, \quad (2)$$

$$w(r, \alpha) = \varepsilon, \quad a \leq r \leq b. \quad (3)$$

Здесь $w(r, \varphi)$ – перемещение по оси z , $\tau_{\varphi z}$, $\tau_{\varphi r}$ – касательные напряжения. Необходимо определить распределение касательных напряжений под штампом

$$\tau_{\varphi z}(r, \alpha) = \tau(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (4)$$

а также связь между сдвиговым усилием P и перемещением штампа γ .

Сведение задачи к решению к интегрального уравнения. Перемещения $w(r, \varphi)$ и сдвиговые напряжения представим в форме интегралов Меллина

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W(s, \varphi) r^{-s} ds \quad (5)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\tau}(s+1) r^{-(s+1)} ds, \quad \bar{\tau}(s+1) = Q(s) = \int_0^{\infty} \tau(\rho) \rho^s d\rho. \quad (6)$$

Уравнения пространственной задачи теории упругости в цилиндрической системе координат [3] относительно $W(s, \varphi)$ можно представить в виде

$$W'' + \eta(\varphi)W' + s^2W = 0, \quad \eta(\varphi) = \frac{G'(\varphi)}{G(\varphi)}. \quad (7)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по φ .

Граничное условие (2) примет вид

$$W(s, 0) = 0. \tag{8}$$

Из условия (4), с учетом (5 –7), получим

$$W'(s, \alpha) = \frac{Q(s)}{G(\alpha)}. \tag{9}$$

Введем вспомогательную функцию $W^*(s, \varphi) = W(s, \varphi) \frac{G(\varphi)}{Q(s)}$, для того, чтобы упростить граничные условия в ходе численного построения трансформанты $L^*(s) = W^*(s, \alpha)$ интегрального уравнения [4]

$$\int_a^b \tau(\rho)k(t)d\rho = 2\pi iG(\alpha)\varepsilon, \quad a \leq r \leq b, \tag{10}$$

$$k(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^*(s)e^{st}ds, \quad t = \ln \frac{\rho}{r}.$$

Для решения задачи необходимо построить функцию $L^*(s)$. Пределы интегрирования в зависимостях (6) и (10) определяются аналогично [5].

Уравнение (10) преобразуется к виду

$$\int_a^b \tau(\rho)k_1(t)d\rho = \pi G(\alpha)\varepsilon, \quad a \leq r \leq b, \tag{11}$$

$$k_1(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L_1(s, \alpha)}{s} \cos st ds, \quad L_1(s, \alpha) = L^*(is, \alpha).$$

Для завершения постановки задачи к интегральному уравнению (11) следует добавить условие равновесия штампа

$$P = \int_a^b \tau(r)dr,$$

которое (при $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$) позволяет определить связь между сдвигающим усилием P и перемещением штампа ε . При корректной постановке должно выполняться условие $\tau(r) \geq 0$ при $a \leq r \leq b$.

Для однородного клина задача также сводится к ИУ вида (11) [4], где функция $L_1(s, \alpha)$ имеет вид $L_1(s, \alpha) = \text{th } s\alpha$.

Изложим метод построения функции $L^*(s)$ в общем случае градиентной неоднородности.

Построение трансформанты ядра ИУ.

Рассмотрим вспомогательную задачу со следующими граничными условиями

$$w(r, 0) = 0, \quad \tau_{\varphi z}(r, \alpha) = \begin{cases} \tau(r), & a \leq r \leq b, \\ 0, & 0 < r < a, \quad r > b. \end{cases} \tag{12}$$

При $\varphi = 0$ выполнено условие (2). Далее, в соответствии с методом, изложенным в [2], уравнение (7) перепишем в матричном виде

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\varphi} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s^2 & -\eta(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{z}}^T = (z_1, z_2) = (W^*(s, \varphi), W'^*(s, \varphi)). \quad (13)$$

Краевые условия

$$z_1(s, 0) = 0, \quad z_2(s, \alpha) = 1. \quad (14)$$

Решение системы (13) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{z}}(s, \varphi) = a_1 t_1^1(s, \varphi) \tilde{\Psi}_1(s, \varphi) + a_2 t_2^2(s, \varphi) \tilde{\Psi}_2(s, \varphi) \quad (15)$$

где $\tilde{\Psi}_1(s, \varphi) = (\sin s\varphi, s \cos s\varphi)$, $\tilde{\Psi}_2(s, \varphi) = (\cos s\varphi, -s \sin s\varphi)$ – собственные векторы матрицы \mathbf{A} при $\eta(\varphi) = 0$, т.е. их вид обусловлен видом решения системы для однородного клина. Подставляя решение (15) в систему (13), сведем исходную задачу к решению задач Коши для векторов $\tilde{\mathbf{t}}_i(s, \varphi)$ при фиксированных значениях s

$$\frac{d\tilde{\mathbf{t}}_i}{d\varphi} = \mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{t}}_i, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -s \operatorname{ctg} s\varphi & s \operatorname{ctg} s\varphi \\ -s \operatorname{tg} s\varphi & -\eta(\varphi) + s \operatorname{tg} s\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -s \operatorname{tg} s\varphi & -s \operatorname{tg} s\varphi \\ -s \operatorname{ctg} s\varphi & -\eta(\varphi) - s \operatorname{tg} s\varphi \end{pmatrix}$$

с начальными условиями:

$$\tilde{\mathbf{t}}_1(s, 0) = (1, 1), \quad \tilde{\mathbf{t}}_2(s, 0) = (1, 1).$$

Определив $\tilde{\mathbf{t}}_i(s, \alpha)$ $i = 1, 2$, получим

$$L_1(s, \alpha) = L^*(is) = \frac{t_1^1(is, \alpha)}{t_1^2(is, \alpha)} \operatorname{th}(s\alpha). \quad (16)$$

Решение задачи для градиентного клина. Таким образом, задача сведена к решению парного ИУ, принадлежащего классу парных ИУ, подробно исследованных в работе [1], решение которого для функций $L(s, \alpha)$ вида (16) найдено в аналитическом виде и является асимптотически точным при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^0$, где λ^* и λ^0 – некоторые фиксированные значения λ .

Рассмотрим случай, когда

$$G(\varphi) = G_0 f_k(\varphi) \quad \text{или} \quad G(\varphi) = G_0 f_k^{-1}(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha,$$

$$f_k(\varphi) = 2,25 - 1,25 \cos(2\pi k\varphi/\alpha).$$

Анализ приведенных напряжений под штампом $q(r)/q_0(r)$, характеризующих распределение сдвиговых напряжений под штампом с плоской подошвой для неоднородного клина с законами неоднородности $k = 0,5, 1$. показал, что для клина перемена знака градиента существенна, так как увеличивает значения напряжений под штампом по сравнению с монотонным законом неоднородности. Также можно видеть, что отношение модуля сдвига на контактной поверхности и на нижней

грани клина определяющим при приближении к границе зоны контакта является влияние величины приповерхностного слоя.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-08-01595а, 07-08-00730-а, 08-08-90033-Бел-а.

Автор благодарит Айзиковича С.М. за постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
- [2] Трубчик И.С. Метод сведения смешанных задач для полубесконечных областей к решению парных интегральных уравнений// Труды IX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. 11-15 октября 2005г. Ростов-на-Дону: Новая книга, 2005. Т.2. С. 219–222.
- [3] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 824 с.
- [4] Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
- [5] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 404 с.

Trubchik I.S. *Peculiarity of the contact problem solution for the gradient wedge in the case of multiple changing with angular coordinate inhomogeneity laws.* A procedure for reduction of the contact problem for a radiance inhomogeneous wedge to a couple integral equation is described. The peculiarity of the contact problem solution for the gradient wedge in the case the derivation of the function describing inhomogeneity law changing its sign once or more times on wedge angle is considered. For the problem solution the method described earlier in [1] is used. The accuracy of the kernel transforms functions is investigated for the concerned problem for the case of multiple oscillating inhomogeneity laws. It is illustrated the influence of media gradient on its stress strain state.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИИ И СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОК В ОБЛАСТИ БИФУРКАЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Филиппова Е.Н., Кизилова Н.Н.

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

Исследуется влияние угла ветвления, длин и диаметров трех трубок, образующих бифуркацию, на течение вязкой жидкости. Обычно углом ветвления пренебрегают и рассматривают три трубки с заданными проводимостями по отношению к стационарному и волновому течениям как комбинацию параллельного и последовательного их соединений. Дан краткий обзор теоретических и практических результатов по теме. Приведены результаты численных расчетов распределений давлений и расходов в бифуркациях с разной геометрией методом конечных элементов (МКЭ).

Кровеносная и дыхательная системы млекопитающих и человека, проводящие системы высших растений, а также многие другие системы транспорта жидкостей и газов в природе и технике состоят из жестких или податливых трубок, соединенных в единое транспортное русло. Основой строения таких систем является бифуркация трубок. При этом в месте соединения трубок происходит разделение потока, и часть энергии потока расходуется на его перестройку. Учет потерь энергии в месте бифуркации возможен, в силу сложной геометрии, только путем численных расчетов. При исследовании систем, насчитывающих сотни и тысячи трубок, обычно предполагается, что потери энергии на самом участке ветвления малы по сравнению с вязкой диссипацией в трубках. Аналогичное предположение используется при анализе нестационарных течений и распространении волн. Линейная теория волн в заполненных жидкостью деформирующихся трубках была разработана Дж.Лайтхиллом в приложении к теории пульсовых волн в артериях в предположении "компактности ветвлений" в артериальном русле [1]. Термин был предложен Лайтхиллом и означает, что для компактного ветвления влиянием геометрии на параметры проходящих и отраженных волн можно пренебречь.

Оценка погрешности, вносимой предположением о компактности ветвления, необходима, когда речь идет о расчетах для сложных систем, насчитывающих тысячи ветвлений. Кроме того, известно, что строение кровеносной и дыхательной систем, систем транспорта жидкости у разных животных и проводящих систем растений подчиняется некоторым закономерностям. В частности, углы ветвления связаны с диаметрами сосудов в бифуркации [2,3]. Для стационарного течения эта связь соответствует решению оптимизационной задачи по минимизации затрат энергии на перемещение жидкости по системе трубок без учета потерь энергии на участке ветвления [2]. При этом важно выявить особенности течения крови, которые имеют место в случае оптимальных углов ветвления. Поскольку области сосудистых бифуркаций являются преимущественными местами формирования атеросклеротических бляшек, расчеты напряжений на стенке вблизи бифуркаций позволяют понять физические факторы развития атеросклероза и разработать

методы профилактики и лечения. Современные компьютерные технологии позволяют распознавать на ангиограммах отдельные сосуды, участки их соединения и по ним восстанавливать трехмерные модели сосудистых бифуркаций и проводить МКЭ-расчеты параметров кровотока [5,6].

При входе ламинарного потока жидкости в искривленный участок трубки за счет центробежных сил возникают вторичные циркуляции жидкости в плоскости поперечного сечения трубки. При этом появляются пара противоположно направленных вихрей, что приводит к дополнительному перемешиванию жидкости в поперечном сечении. В целом сопротивление изогнутой трубки потоку меньше, а напряжение сдвига на внутренней стенке больше, чем в прямой трубке [7]. При переносе лекарственного вещества вместе с потоком вдыхаемого воздуха в виде аэрозоли (ингаляция) вторичные течения могут приводить к перемешиванию, коагуляции капель аэрозоли и их осаждению на стенках дыхательных путей. Поскольку воздух в дыхательных путях движется в разных направлениях при вдохе и выдохе, а при операциях шунтирования на сосудах устанавливаются дополнительные трубки для транспорта крови, то представляет интерес исследование течений как в расходящихся, так и в сходящихся бифуркациях. Распространение и отражение волн в сходящихся трубках также исследуется в пренебрежении влиянием геометрии участка ветвления, в том числе и при расчетах клинически значимых случаев [4]. Эксперименты с движением воздуха в системах стеклянных трубок, моделирующих дыхательные пути, показали, что при вдохе (движение по расходящимся трубкам) течение турбулизует чаще, чем при выдохе (движение по сходящимся трубкам) [8], что связано со стабилизирующим влиянием сужений поперечного сечения и вторичными течениями. При этом максимальные вторичные течения зарегистрированы непосредственно в месте бифуркации. При моделировании ветвлений дыхательных путей перемещения их стенок можно пренебречь [9], в то время как для кровеносных сосудов радиальные перемещения стенок не превышают 10% от радиуса сосуда, а продольные перемещения пренебрежимо малы. Расчеты на модели симметричной бифуркации, состоящей из материнской трубки кругового сечения и двух дочерних трубок полукругового сечения в диапазоне $Re = 200 - 1200$ и $\theta = \pi/8 - \pi/3$ показали, что увеличение угла ветвления вначале ведет к увеличению скорости течения на внутренних стенках дочерних трубок вблизи бифуркации, а затем, по мере увеличения угла, ко все более четкому разграничению зон возвратных течений у внешних стенок, появлению и росту интенсивности продольных вихрей [10]. В этих зонах относительно медленной рециркуляции крови высока вероятность образования атеросклеротических бляшек.

Обычно при расчетах стационарной и волновой проводимостей бифуркации трубок их общая проводимость рассчитывается как проводимость последовательного соединения материнской трубки с параллельным соединением двух дочерних (Рис. 1), пренебрегая вкладом области соединения трубок. При этом из условий сохранения потока в месте бифуркации можно выразить величины $P_{0,3}$, $Q_{1,2}$ через значения Q_0 и $P_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} Q_0 - \frac{P_1 - P_2}{Z_1 + Z_2}, & Q_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} Q_0 + \frac{P_1 - P_2}{Z_1 + Z_2}, \\
P_0 &= \left(\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_0 \right) Q_0 + \frac{P_1 Z_2 + P_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}, & P_3 &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} Q_0 + \frac{P_1 Z_2 + P_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}
\end{aligned} \tag{1}$$

где для стационарного течения жидкости $Z_j = 8\mu L_j / (\pi R_j^4)$ – гидравлические сопротивления трубок, $j = 0, 1, 2$, μ – вязкость жидкости, L_j, R_j – длины и диаметры трубок. Для случая распространения волн давления $Z_j = \rho \cdot c_j / (\pi R_j^2)$ – волновые сопротивления, ρ – плотность жидкости, c_j – скорость распространения волны.

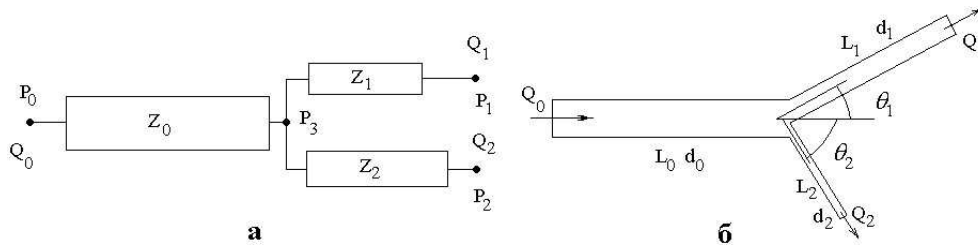


Рис. 1. Схема бифуркации трубок без учета (а) и с учетом (б) геометрии ветвления.

Основная система уравнений задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_f} \Delta \vec{v} \\
\vec{v}|_{\Gamma} &= 0, & \int_S v_n dS &= Q_0, & \Gamma &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3
\end{aligned} \tag{2}$$

где \vec{v} , p , ρ_f и μ – скорость, гидростатическое давление, плотность и вязкость жидкости, Γ_{1-3} – боковая поверхность трубок 1–3, S – входное сечение.

Для случая податливой стенки уравнения (2) должны быть дополнены уравнениями импульсов и реологическим соотношением для стенки (например, см. статью Кизиловой Н.Н. в настоящем сборнике).

Решение задачи (2) проводилось для плоского случая МКЭ с использованием пакета FreeFEM. Тестирование метода проводилось на основе задачи для жесткой (задача Пуазейля) и упругой (задача Уомерсли) трубок. Рассматривались следующие параметры модели: $\rho = 1050$ кг/м³, $m\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $v_0|_{r=0} = 0.2$ м/с, $d_0 = 0.02$ м, $L_0 = 0.2$ м. Некоторые результаты расчетов приведены на Рис.2 а,б. Анализ полученных данных показал, что по мере увеличения хотя бы одного из углов θ_1, θ_2 увеличивается вероятность возникновения и протяженность области отрыва потока и образования зон рециркуляции жидкости. Аналогичные результаты были получены ранее для симметричных бифуркаций [10].

Поскольку целью работы являлись оценки погрешности модели, не учитывающей геометрии ветвления (Рис.1а), то были проведены расчеты погрешности расчетов сопротивлений $\varepsilon_j = |Z_j^{num} - Z_j^{Pois}| / Z_j^{Pois}$, где Z_j^{num} – значения сопротивлений j-й трубки, которые вычислялись по значениям давлений на концах трубки

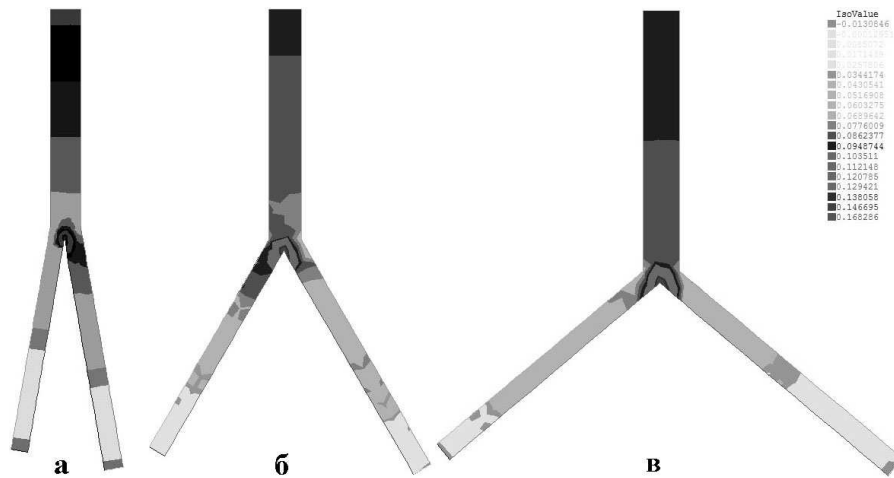


Рис. 2. Распределение давлений в бифуркации трубок при углах ветвления $\theta_1 = \theta_2 = \pi/18$ (а), $\theta_1 = \theta_2 = \pi/6$ (б) и $\theta_1 = \theta_2 = \pi/3$ (в).

и расхода жидкости в трубке, полученным в ходе численного решения задачи (2), а Z_j^{Pois} – значения сопротивлений, рассчитанные по формуле Пуазейля по заданным значениям длины и диаметра трубки. Кроме этого, проводилось сравнения значений давлений и расходов, вычисленных по (1) и рассчитанных МКЭ по модели (2). Результаты расчетов ε_{1-3} для случаев $Re = 100; 400$ приведены на рис.3.

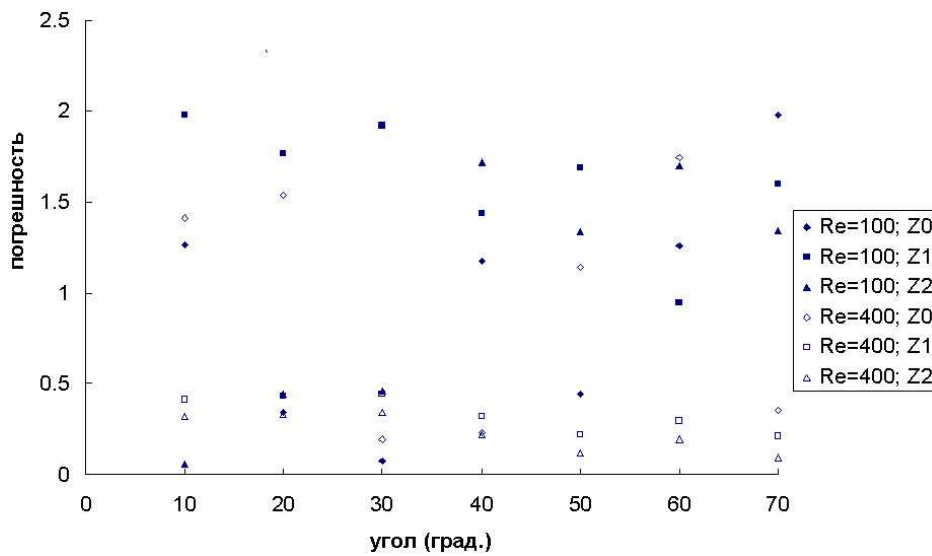


Рис. 3. Погрешность расчетов сопротивлений трубок при разных значениях чисел Рейнольдса.

Таким образом, численные расчеты показали, что погрешность пренебрежения сопротивлением, создаваемым областью разветвления трубок, не превышает 2.1%, так что для одиночной бифуркации потери энергии на перестройку потока пренебрежимо малы по сравнению с вязкой диссипацией. При этом явной зависимости погрешности от угла ветвления нет, однако при увеличении числа Рейнольдса погрешность несколько снижается. Были также проведены аналогичные расчеты для

сходящихся трубок, для 2-3 последовательных сходящихся и расходящихся бифуркаций, и исследованы особенности течения в системе при приближении значений θ_1, θ_2 к оптимальным, которые однозначно выражаются через значения $d_{0,1,2}$. Показано, что для дерева, состоящего из оптимальных трубок, погрешность перехода от модели (Рис. 1б) к модели (Рис. 1а) минимальна.

Список литературы

- [1] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1975. 320 с.
- [2] *Розен Р.* Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1967. 140 с.
- [3] *Kizilova N.N.* Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics // Lecture Notes in Computer Sci. 2004. Vol.3044. P. 476–485.
- [4] *Alderson H., Zamir M.* Smaller, stiffer coronary bypass can moderate or reverse the adverse effects of wave reflections // J.Biomech. 2001. v.34. P. 1455–1462.
- [5] *Corney S., Johnston P.R., Kilpatrick D.* Construction of realistic branched, three-dimensional arteries suitable for computational modelling of flow // Med. Biol. Eng. Comput. 2004. vol. 42. P. 660–668.
- [6] *Botnar R.H., Rappitsch G., Scheidegger M.B. et al* Hemodynamics in the carotid artery bifurcation: a comparison between numerical simulations and in vitro MRI measurements // J.Biomech. 2000. v.33. P. 137–144.
- [7] *Wang C.Y., Bassingthwaighe J.B.* Blood flow in small curved tubes // Transact. ASME. 2003. v.125. P. 910–929.
- [8] *Zhao Y., Lieber B.B.* Steady expiratory flow in a model symmetric bifurcation // J. Biomech. Eng. 1994. vol.116. P. 318–323
- [9] *Olson D.E.* Fluid mechanics relevant to respiration: flow within curved or elliptical tubes and bifurcating systems. PhD Thesis, Imperial College, London. 1971. 126 p.
- [10] *Tadjfar M.* Branch angle and flow into a symmetric bifurcation // Transact. ASME. 2004. v.126. P. 516–518.

Philippova E.N., Kizilova N.N. *Investigation of influence of geometry and properties of viscoelastic tubes in a bifurcation on the flow of a viscous fluid.* Influence of the branching angle, diameters and lengths of three tubes forming a bifurcation on the flow of a viscous fluid in them is studied. Usually the influence of the branching area is neglected and three tubes with given conductivities for a steady and wave flow are considered in parallel and series connections. A brief review of theoretical and experimental results is presented. The numerical calculations of the flow and pressure distributions in the bifurcations with different geometry has been carried out by finite element method.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ

Чебаков М. И., Колосова Е. М.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

В статье приведены результаты конечно-элементного расчета контактного взаимодействия двух упругих круговых цилиндров конечной длины с пересекающимися осями.

Вопросы, аналогичные изложенным ниже, в той или иной мере рассматривались ранее в работах [1, 2] и др.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о сжатии двух упругих круговых цилиндров конечной длины с пересекающимися осями (рис. 1). Пусть начало прямоугольной системы координат x, y, z находится в точке O первоначального касания, ось x совпадает с биссектрисой угла перекоса осей цилиндров, а перпендикулярная ей ось z находится в плоскости, проходящей через оси цилиндров. Цилиндры имеют соответственно радиусы r и R , а длина их равна b . Предполагаем, что торцы цилиндров и их цилиндрические поверхности вне зоны контакта свободны от напряжений, а в зоне контакта отсутствует трение. Цилиндры прижимаются силами F_n , перпендикулярными оси Ox и лежащими в плоскости Ozx , и удерживаются моментами M таким образом, что оси цилиндров сохраняют свое направление в процессе деформации.

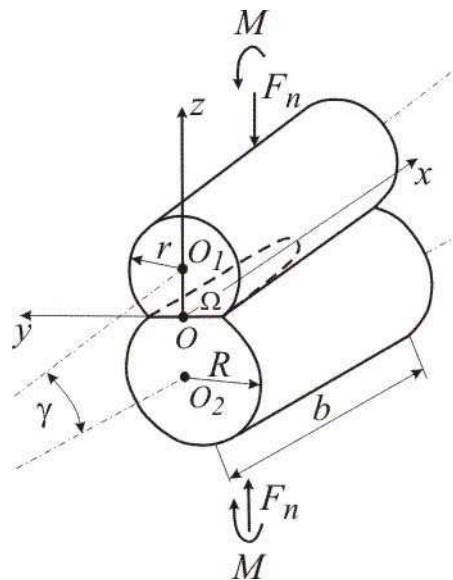


Рис. 1. Схема сжатия силой F_n двух упругих круговых цилиндров

Как видно из постановки, напряженно-деформированное состояние рассматриваемой системы будет симметрично относительно плоскости Ozx , поэтому при

конечно-элементном моделировании для уменьшения числа элементов естественно рассматривать взаимодействие двух полуцилиндров при $y \leq 0$, поставив при $y = 0$ условия симметрии (отсутствие нормальных перемещений и касательных напряжений). В соответствии с принципом Сен-Венана для дальнейшего уменьшения числа элементов ограничимся взаимодействием двух четвертей рассматриваемых цилиндров, как это показано на рис. 2а.

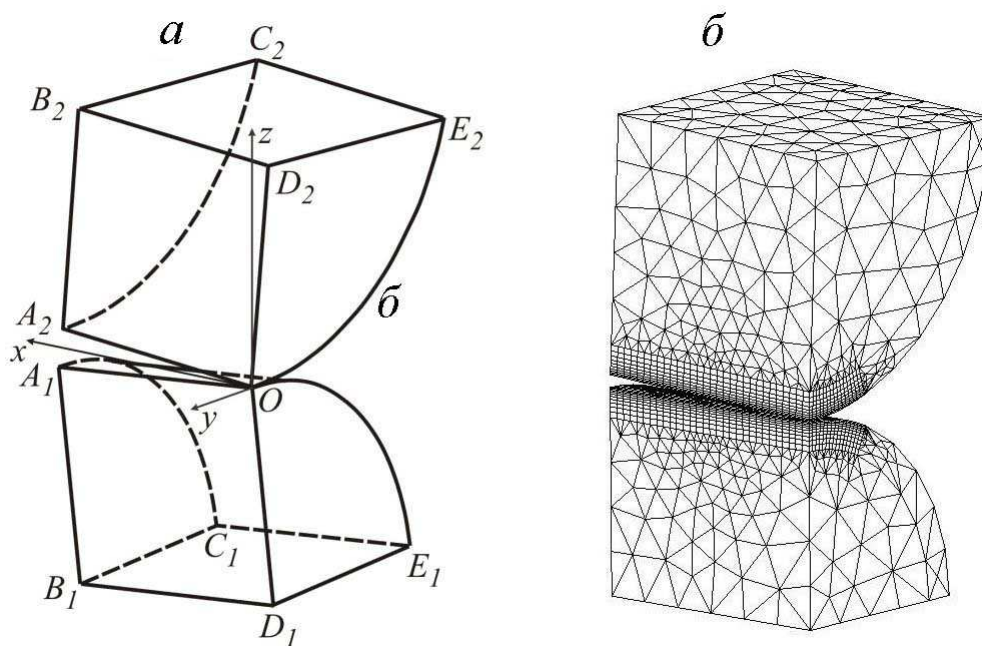


Рис. 2. Твердотельная модель а) и конечно-элементная модель б) взаимодействующих цилиндров

При конечно-элементном моделировании граничных условий и нагружения в программном пакете ANSYS было задано жесткое закрепление плоской грани $B_1C_1E_1D_1$, при этом плоская грань $B_2C_2E_2D_2$ после приложения нагрузки перемещается поступательно, на гранях $A_1OD_1B_1$ и $A_2OD_2B_2$ заданы условия симметрии, а на линии B_2C_2 задано отсутствие горизонтального перемещения. Сила $F_n/2$ приложена к грани $B_2C_2E_2D_2$ в направлении, противоположном направлению оси z . При построении конечно элементной модели взаимодействующих цилиндров в окрестности области контакта использовалось каноническое разбиение на элементы (рис. 2б).

В зависимости от задаваемой точности расчетов и возможностей используемой вычислительной техники параметры зоны канонического разбиения и количество элементов в этой зоне варьировались. Их выбор осуществлялся путем сравнения результатов конечно-элементных расчетов при различных значениях числа конечных элементов и, дополнительно, путем сравнения максимальных контактных напряжений при отсутствии перекосов осей цилиндров с результатами, получаемыми на основе формул плоской задачи Герца [3]. На этом основании можно утверждать, что в приведенных ниже результатах расчетов достигалась приемлемая погрешность по контактным напряжениям, которая не превышала 5%.

3. Результаты расчетов. С целью оценки влияния приведенного радиуса $\rho = rR/(r + R)$ кривизны на параметры контакта расчет проводился для двух значений приведенного радиуса кривизны $\rho_1 = 7.72$ мм (вариант 1, радиусы моделирующих цилиндров $r = 13.85$ мм, $R = 17.45$ мм) и $\rho_2 = 10.60$ мм (вариант 2, радиусы моделирующих цилиндров $r = 19.02$ мм, $R = 23.95$ мм). (В дальнейшем параметрам, соответствующим варианту 1, будем присваивать индекс 1, а варианты 2 – индекс 2). Перекос осей цилиндров определяли углом γ , которому задавали значения 0.001 рад. и 0.0005 рад. Модули упругости цилиндров – $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициенты Пуассона – $\nu = 0.3$.

Диапазон усилий F_{n1} для расчетов варианта 1 назначали: 3000; 5000 (Н). Для расчетов варианта 2 диапазон усилий назначали с учетом соотношения $F_{n2} = \kappa_\rho F_{n1} = 1.373 F_{n1}$, т.е. соответственно 4118; 6860 (Н), где κ_ρ есть отношение радиусов кривизны соответственно второй и первой модификаций рассмотренной передачи.

На рис. 3 показаны типичные компьютерные графики распределения нормальных и эффективных напряжений по длине цилиндра для обоих вариантов. Видно, что максимальные напряжения возникают не на торце, а в непосредственной близости от него, что является следствием повышенной податливости торцов.

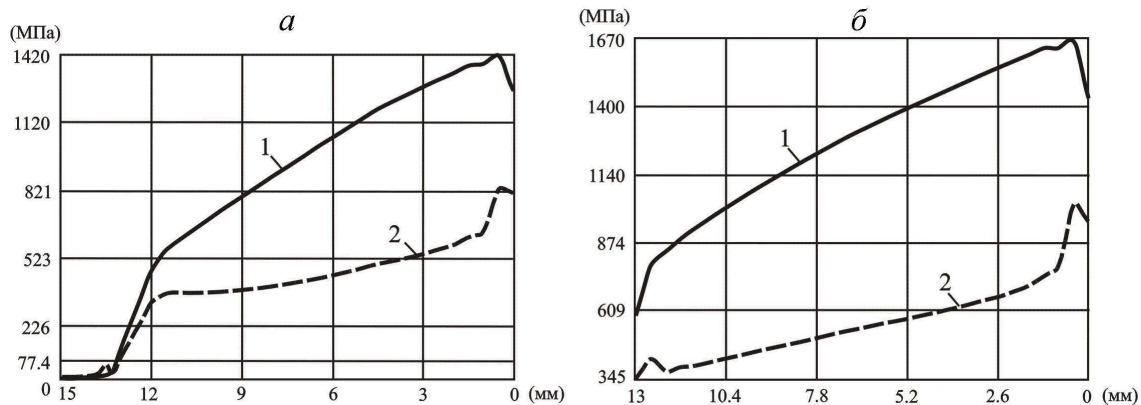


Рис. 3. График распределения нормальных (1) и эффективных (2) напряжений по длине цилиндра для случая $a < b$ (рис. а) и случая $a = b$ (рис. б).

Отметим, что для контроля изложенной здесь схемы расчетов проводились сравнения с результатами расчетов, полученных по формуле плоской задачи Герца в случае отсутствия перекосов осей. Например, при $\gamma = 0$, $b = 13$ мм, $\rho = 10.6$ мм и $F_n = 2059$ Н было получено $\sigma_{max} = 709$ МПа, при $\rho = 7.72$ мм, $F_n = 3000$ Н – $\sigma_{Hmax} = 1004$ МПа, а при $\rho = 7.72$ мм, $F_n = 5000$ Н – $\sigma_{Hmax} = 1322$ МПа. Формула Герца дает соответственно $\sigma_{H0} = 723$ МПа, $\sigma_{H0} = 1023$ МПа и $\sigma_{H0} = 1319$ МПа. Кроме того, расчеты показали, что при увеличении силы F_n в n раз максимальные контактные напряжения увеличиваются, приблизительно, в \sqrt{n} раз (с погрешностью не выше 3-5%), формула (1) при этом дает увеличение точно в \sqrt{n} раз. Изложенное свидетельствует о хорошей точности получаемых результатов.

В табл.1 представлены результаты расчета по программе ANSYS максимальных контактных (σ_{max}) и эффективных (σ_{emax}) напряжений на оси x для случая $a < b$.

<i>No</i>	γ , рад	<i>a</i> , мм	ρ , мм	<i>F_n</i> , Н	σ_{max} , МПа	σ_{emax} , МПа
1	0.001	13.2	7.72	3000	1420	844
2		15.8	10.6	4118	1321	735
3		17.0	7.72	5000	1614	922
4		21.0	10.6	6860	1525	839
5	0.0005	19.2	7.72	3000	1164	625
6		23.4	10.6	4118	1098	583
7		25.0	7.72	5000	1343	726
8		29.7	10.6	6860	1297	716

Таблица 4. Сравнение контактных напряжений при одновременном увеличении приведенного радиуса кривизны и нагрузки (Длина зоны контакта *a* меньше длины цилиндров *b*)

При сопоставлении соответственных результатов для вариантов 1 и 2 (№№ строк: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8) видно, что разница в значениях напряжений весьма мала, находясь практически в пределах точности счета. Это свидетельствует о том, что взаимосвязь между F_n и ρ , как и в задаче Герца, близка к прямой пропорциональности.

Отметим, что расчет по формулам работы [1] дает значительно меньшие напряжения и большие величины длины пятна контакта по сравнению с результатами, представленными в таблице 1. Например, для варианта 4 по формулам работы [1] получаем $\sigma_{max} = 1246$ МПа, $a = 29.2$ мм.

<i>No</i>	γ , рад	<i>b</i> , мм	ρ , мм	<i>F_n</i> , Н	σ_{max} , МПа	σ_{emax} , МПа
1	0.001	13	7.72	3000	1430	831
2			10.6	4118	1354	825
3			7.72	5000	1670	1000
4			10.6	6860	1602	1009
5	0.0005	18	7.72	3000	1168	655
6			10.6	4118	1105	644
7			7.72	5000	1377	794
8			10.6	6860	1322	800

Таблица 5. Сравнение максимальных контактных напряжений при одновременном увеличении приведенного радиуса кривизны и нагрузки (Длина зоны контакта *a* совпадает с длиной цилиндров *b*)

Результаты расчетов для случая $a = b$ приведены в табл. 2. Сопоставляя соответственные двум вариантам нагружения расчеты максимальных контактных и эффективных напряжений (№№ строк 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8), приходим к заключению, что и в этом случае, как в рассмотренном выше, сохраняется почти прямая пропорциональность между действующей нагрузкой и приведенным радиусом кривизны.

Как показали расчеты, для обоих случаев выявленные и отмеченные выше взаимосвязи между параметрами контакта (кривизны - усилия - напряжения и т.д.) сохранялись для любых значений угла перекося, вплоть до $\gamma = 0.005$ рад и

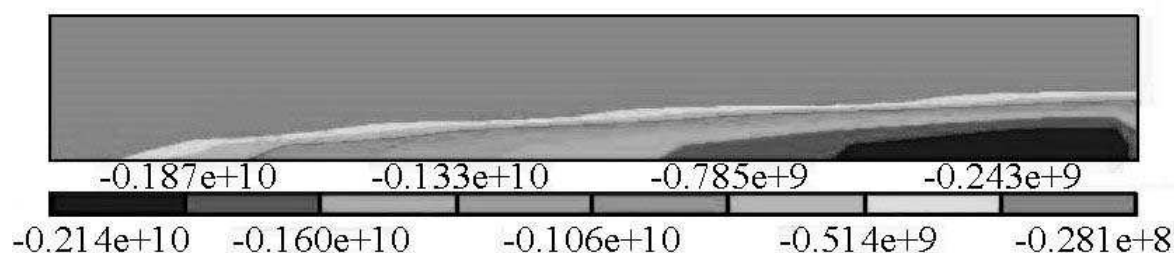


Рис. 4. Распределение контактных напряжений при $y < 0$

других величин силы F_n .

На рис. 4 дано распределение контактных напряжений при $y < 0$ для случая $F_n = 3000$ Н, $b = 5.5$ мм, $r = 13.85$ мм, $R = 17.45$ мм, $\gamma = 0.005$ рад, по которому можно судить о форме области контакта.

4. Вывод. При сжатии двух упругих круговых цилиндров с пересекающимися осями при пропорциональном изменении сжимающего усилия F_n и приведенного радиуса кривизны ρ цилиндрических поверхностей значения максимальных контактных напряжений изменяются незначительно. Эти изменения соизмеримы с погрешностью расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 08-08-00873).

Список литературы

- [1] Гришин С.А. Контактное взаимодействие упругих цилиндров при перекосах осей // Респ. сб. "Теоретическая и прикладная механика". Вып.19. Харьков: Изд-во ХГУ "Вища школа". 1988. С. 32-39.
- [2] Журавлев Г.А. Оценка применимости решения Герца в задачах о контакте зубчатых колес // Техника машиностроения. 2001. №2. С. 82-90.
- [3] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.2. Под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановко М.: Машиностроение. 1968. С.464.

Chebakov M.I., Kolosova E.M. *The contact problem for two finite size cylinders with unparallel axes.* The results of contact interaction finite element computation of two elastic circular finite length cylinders with crossing axes are reduced.

О СТРУКТУРЕ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ В ВЫСОКОМОДУЛЬНОМ ТРАНСТРОПНОМ СЛОЕ

Шалдырван В.А., Ержаков Г.В.

Донецкий национальный университет

Строятся однородные решения типа Лурье-Воровича для упругого слоя, изготовленного из высокомодульных трансропных материалов. Основная цель данного сообщения установить ряд особенностей, присущих решениям трехмерных задач для пластин и коротких цилиндров, изготовленных из указанных материалов. Эти особенности вытекают из анализа спектральных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (с коэффициентами, зависящими от технических постоянных высокомодульных материалов), возникающих при построении решений типа погранслоя.

Доклад посвящен разработке методов решения трехмерных статических задач теории упругости для высокомодульных пластин и коротких цилиндров. Изучение задач линейной теории упругости трансропных (трансверсально изотропных) материалов было положено исследованиями С.Г. Лехницкого [1], который ввел функции напряжений для решения осесимметричных краевых задач. Независимо от него Н. Elliott (Эллиотт) [2] рассмотрел аналогичные задачи с помощью введения двух потенциальных функций. Обобщение результатов на неосесимметричную деформацию было осуществлено А. Lodge (Лодж) [3]. Пользуясь этими результатами ряд авторов рассмотрели задачи для бесконечной среды или полубесконечной, у которой граничная плоскость перпендикулярна оси симметрии трансропного материала. В статье С.Г. Лехницкого [4] было построено бигармоническое решение задач растяжения-сжатия и изгиба трансропных пластин. В качестве иллюстрации строились решения для тонких пластин и была указана принципиальная возможность других частных решений. Существуют и другие формы обобщенных решений, в частности, Н. Ding (Динг)[5], М. Wang (Ванг) [6], W.T. Chen (Чен) [7] и др. Однако реализация этих решений в конкретных краевых задачах осуществлена не была. Вопрос о полноте полученных решений обсуждался R.A. Eubannks and E. Sternberg (Юбенком и Стербергом) [8] и др.. Количественные оценки НДС вблизи отверстий в нетонких трансропных плитах, ослабленных отверстием, впервые были получены М.А. Шленевым [9] с помощью асимптотического метода Воровича. А.С. Космодамианским и В.А. Шалдырваном [10] была предложена методика построения элементарных решений для трансропного слоя со свободными торцами, основанная на методе Лурье-Воровича. В монографии [11] эта методика была использована для исследования большого количества задач теории упругости и термоупругости для толстых трансропных однородных и кусочно-однородных плит. В заключение отметим, что в недавно изданной обширной монографии Н. Ding, W. Chen and, L. Zhang [12], посвященной теории упругости трансропных тел, количественные исследования весьма ограничены, а задачи концентрации напряжений вообще отсутствуют.

Основная цель данного сообщения – установить особенности решений трехмерных задач для высокомодульных трансропных пластин и коротких цилиндров.

Последние появляются при решении спектральных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при решении методом Лурье-Воровича краевых задач для указанных тел.

§1 Постановка задачи. Пусть $V = \{x_1, x_2 \in S, |x_3| \leq H\}$ область занятая упругим телом (транстропной пластиной), где S – срединная плоскость пластины, $2H$ – ее толщина, $\Gamma = \partial S \times I$, S_{\pm} – плоские грани пластины (торцы), R – радиус ∂S , который будем рассматривать как характерный линейный размер. В случае, когда в качестве S рассматривается вся плоскость Ox_1x_2 , тело будем называть слоем. Структура материала такова, что все направления в плоскостях, параллельных срединной, эквивалентны в смысле упругих свойств. При этом он характеризуется упругими параметрами $\nu, \nu_z, \nu_2 = \nu_z \frac{E}{E_z}, s_0^2 = \frac{G}{G_z}$ (ν_z, E_z, G_z – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскостям изотропии). Компоненты вектора смещений $u_k(x_i)$, тензоров деформации $\varepsilon_{jk}(x_i)$ и напряжений $\sigma_{jk}(x_i)$ связаны между собой геометрическими соотношениями, уравнениями равновесия в напряжениях и обобщенным законом Гука [1]. Из этих зависимостей следуют уравнения равновесия в перемещениях (типа уравнений Ламе в изотропии). К этим уравнениям необходимо сформулировать граничные условия. Будем считать торцы свободными от внешних усилий, а боковая поверхность подвергается действию самоуравновешенной системы сил, вызывающих малую деформацию, симметричную относительно срединной плоскости. В этом случае имеем

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, x_3 = \pm H, \quad (1)$$

$$\sigma_{\rho\rho} |_{\Gamma} = P_1(\theta, x_3), \sigma_{\rho\theta} |_{\Gamma} = P_2(\theta, x_3), \sigma_{\rho\zeta} |_{\Gamma} = P_3(\theta, x_3). \quad (2)$$

В основе построения решения сформулированной краевой задачи лежит идея о представлении произвольного векторного поля $u^0 = (u_1, u_2)$ в виде вихревой и потенциальной части [13]. Или, другими словами, плоским вариантом теоремы Гельмгольца: при каждом фиксированном x_3 поле перемещений представимо в виде суперпозиции решений «вихревой и потенциальной задач».

§2 Построение решения вихревой задачи. В безразмерных переменных $\xi = \frac{x_1}{R}, \eta = \frac{x_2}{R}, \zeta = \frac{x_3}{H}, h = \frac{H}{R}, u_k = \frac{u_k}{R}$ поле смещений будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta, \zeta) &= p(\zeta) \partial_2 \Phi(\xi, \eta), & u_2(\xi, \eta, \zeta) &= -p(\zeta) \partial_1 \Phi(\xi, \eta), \\ u_3 &\equiv 0, & (h^2 D^2 - \delta^2) \Phi(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h = H/R$ – безразмерная толщина, δ – спектральный параметр. Удовлетворяя уравнениям равновесия в перемещениях и условиям (1), приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$p''(\zeta) + \delta^2 s_0^2 p(\zeta) = 0, p'(\pm 1) = 0. \quad (4)$$

Собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи (4) имеют вид

$$\delta_k = \frac{k\pi}{s_0}, k = 1, 2, \dots, p_k(\zeta) = b_k \cos \delta_k s_0 \zeta. \quad (5)$$

Собственное значение $\delta_0 = 0$ здесь исключено и будет рассмотрено позже. Таким образом, решением вихревой задачи будут функции

$$\begin{aligned} u_{1b}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_k b_k \cos \delta_k s_0 \zeta \partial_2 \Phi(\xi, \eta), & k = 1, \infty \\ u_{2b}(\xi, \eta, \zeta) &= - \sum_k b_k \cos \delta_k s_0 \zeta \partial_1 \Phi(\xi, \eta), & u_3 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

§3 Построение потенциального решения. Поле перемещений ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta, \zeta) &= n(\zeta) \partial_1 \Psi(\xi, \eta), & u_2(\xi, \eta, \zeta) &= n(\zeta) \partial_2 \Psi(\xi, \eta), \\ u_3 &= q(\zeta) \Psi(\xi, \eta), & (h^2 D^2 - \kappa) \Psi(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поступая аналогично с предыдущим, приходим к спектральной задаче для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} n''(\zeta) + c_1 \kappa n(\zeta) + c_2 q'(\zeta) &= 0, \\ q''(\zeta) + c_3 \kappa q(\zeta) + c_4 \kappa n'(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n'(\pm 1) + h q(\pm 1) &= 0, \\ q'(\pm 1) + c_5 \kappa n(\pm 1) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

В записи введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} c_1 &= (1 + \mu_1) s_0^2, & c_2 &= h \mu_3 s_0^2, & c_3 &= \frac{1}{\mu_2 s_0^2}, \\ c_4 &= \frac{\mu_3}{h \mu_2} (1 + \mu_1) s_0^2, & c_5 &= \frac{\nu_2}{h(1 - \nu)}, \end{aligned}$$

остальные совпадают в приведенными в [10, 11].

Решение системы (8) с учетом четности функций $n(\zeta)$ и $q(\zeta)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} n(\zeta) &= H_1 \cosh(s_1 \sqrt{-\kappa} \zeta) + H_2 \cosh(s_2 \sqrt{-\kappa} \zeta), \\ q(\zeta) &= Q_1 \sinh(s_1 \sqrt{-\kappa} \zeta) + Q_2 \sinh(s_2 \sqrt{-\kappa} \zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_{1,2} = \sqrt{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 \pm b_2}}, \quad b_1 = \frac{s_0^2 - \nu_2}{1 - \nu}, \quad b_2 = \frac{\nu_2}{\nu_z} \frac{1 - \nu_2 \nu_z}{1 - \nu^2} \quad (11)$$

Для высокомолекулярных материалов справедливы условия

$$b_1 > 0, \quad b_1^2 - b_2 > 0, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Требую, чтобы второе уравнение в системе (8) удовлетворялось тождественно, устанавливаем зависимость между константами H_m и Q_m :

$$Q_m = -A_m H_m, \quad A_m = \frac{\sqrt{-\kappa}}{h} \frac{\mu_3 s_0^2 s_m}{1 - \mu_2 s_0^2 s_m^2}$$

Теперь из граничных условий (9) следует система уравнений для определения H_m , Q_m и κ :

$$\begin{aligned} \cosh(\sqrt{-\kappa}s_1) \left[\frac{\nu_2}{h(1-\nu)}\kappa - \sqrt{-\kappa}s_1A_1 \right] H_1 + \\ + \cosh(\sqrt{-\kappa}s_2) \left[\frac{\nu_2}{h(1-\nu)}\kappa - \sqrt{-\kappa}s_2A_2 \right] H_2 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sinh(\sqrt{-\kappa}s_1) \left[\frac{\sqrt{-\kappa}s_1}{h}\kappa - A_1 \right] H_1 + \sinh(\sqrt{-\kappa}s_2) \left[\frac{\sqrt{-\kappa}s_2}{h}\kappa - A_2 \right] H_2 = 0,$$

определитель которой должен быть равен нулю. Раскрывая его, получаем трансцендентное уравнение для определения κ :

$$(s_1 + s_2) \sinh(s_1 - s_2)\sqrt{-\kappa} + (s_1 - s_2) \sinh(s_1 + s_2)\sqrt{-\kappa} = 0 \quad (13)$$

Обозначим $s_1 + s_2 = \Omega$, $\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} = \omega$ и рассмотрим случай $\kappa = \gamma^2$, тогда уравнение (12) примет вид

$$\omega \sin(\Omega\gamma) + \sin(\Omega\omega\gamma). \quad (14)$$

В этом случае спектральная задача (8)-(9) имеет дискретный спектр γ_p , который расположен симметрично относительно действительной и мнимой осей. При этом точкам спектра γ_p и $-\gamma_p$ соответствует одна функция $\Psi_p(\xi, \eta)$, которая определяется из уравнения $(h^2D^2 - \gamma_p^2)\Psi_p = 0$. Это уравнение не имеет чисто мнимых корней, а асимптотические значения комплексных γ_p и действительных α_p - даются формулами:

$$\gamma_p = -\frac{1}{\Omega(1-\omega)}(2p+1+i\ln(\omega)), \quad \alpha_p = \frac{\pi p}{\omega\Omega}, \quad p = \overline{1, \infty}. \quad (15)$$

Корень $\alpha_0 = 0$ является трехкратным и будет рассмотрен ниже вместе с нулевым значением $\delta_0 = 0$ вихревой задачи.

В таблице приведены комплексные и действительные корни уравнения (14) для боропластика и органопластика:

p	$\Omega = 1.96$ $\Re(\gamma_p)$	$\omega = 0.87$ $\Im(\gamma_p)$	$\Omega = 1.77$ α_p	$\omega = 0.77$ $\Re(\gamma_p)$	$\Im(\gamma_p)$	α_p
1	12.190105	0.63988372	1.7271465	8.1930984	0.79047893	2.1078064
2	36.608620	0.45595618	3.4552132	24.575751	0.74869856	4.2320737
3	61.451703	0.53393485	5.1855629	40.944057	0.65103276	12.351284
4	85.849083	0.65334257	6.9209955	57.253574	0.41941873	14.471746
5	110.23106	0.61590155	8.6694876	73.159335	0.53345490	16.578847

§4 Построение бигармонического решения. Вернемся к нулевым значениям $\delta_0 = 0$ и $\alpha_0 = 0$. Для них строится Жорданова цепочка и мы приходим к бигармоническому решению. Перемещения в этом случае ищутся в виде:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta, \zeta) &= \partial (\Phi_0 + \zeta^2\Phi_2 + \Phi_0^*), \\ u_2(\xi, \eta, \zeta) &= \partial (\Phi_0 + \zeta^2\Phi_2 - \Phi_0^*), \quad u_3 = \zeta\Phi_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где функции Φ_i определяются из уравнений

$$D^2D^2\Phi_0 = 0, \quad \Phi_2 = -\frac{h^2\nu_2}{2(1+\nu)}D^2\Phi_0, \quad \Phi_1 = \frac{h\nu_2}{1+\nu}D^2\Phi_0. \quad (17)$$

Список литературы

- [1] *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.:Гостехиздат. 1950. 416 с.
- [2] *Elliott H.A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Proc. Camb. Phil. Soc. 1948. № 44. P. 522—533.
- [3] *Lodge A.S.* The transformation of isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Q. J. Mech. Appl. Math. 1955. № 8. P. 211—225.
- [4] *Лехницкий С.Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 4. С. 687—696.
- [5] *Ding H.J., Xu B.H.* General solutions of axisymmetric problems in transversely isotropic bodies // Appl. Math. Mech. 1988. № 9. P. 135—142.
- [6] *Wang M.Z., Wang W.* Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity // Int. J. Solids Structures. 1995. V. 32, № 3/4. P. 501—513.
- [7] *Чен У.Т.* Некоторые задачи для трансверсально-изотропных упругих материалов // Тр. Амер. об-ва инж.-механиков. Прикл. механика. Сер. Е. 1966. Т. 33, № 2. С. 98—107.
- [8] *Eubanks R.A., Sternberg E.* On the axisymmetric problem of elasticity theory for medium with transversely isotropy // J. Rat. Mech. Anal. 1954. № 3. P. 89—101.
- [9] *Шленев М. А.* Асимптотический метод решения задачи об изгибе толстой трансверсально-изотропной плиты // В кн.: Толстые плиты и оболочки. Ростов н/Д. 1974. С. 119—138.
- [10] *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. — Киев: Наук. думка, 1980. 240 с.
- [11] *Шалдырван В.А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин // Прикл. механика. 2007. Т. 44, вып. 2. С. 42—69.
- [12] *Ding H.J., Chen W.Q., Zhang L.* Elasticity of Transversely Isotropic Materials. Dodrecht: Springer, 2006. 454 p.
- [13] *Устинов Ю.А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. Ростов н/Д.: ЦВВР, 2006. 256 с.

Shaldyrvan V.A., Erzhakov G.V. *About structure marginal effect in high module transversely isotropic layer*. The uniform decisions of the type Lurie-Vorovich are built for springy layer, made from high module transversely isotropic material. The Main purpose given messages to install the row of the particularities, inherent decisions of the three-dimensional problems for plates and short cylinders, made from specified materials. These particularities result from analysis of the spectral problems for systems of the common differential equations (with factor, hanging from technical constant of high module transversely isotropic materials), appearing at building of the decisions of the type of boundary layer.

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ ТРУБЫ ПРИ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Шейдаков Д.Н.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости упругой цилиндрической трубы из высокопористого материала в условиях деформации сжатия (растяжения) при внутреннем и внешнем давлении. Путем численного решения линеаризованных уравнений равновесия найдены спектры критических значений параметров деформации и соответствующие им моды выпучивания, а также построены области устойчивости в пространстве этих параметров. На основе полученных результатов сформулированы некоторые общие выводы о характере влияния микроструктуры материала на бифуркацию равновесия пористой цилиндрической трубы при комбинированном нагружении.

1. В современных технологиях достаточно широко используются различные пористые материалы, такие как металлические и полимерные пены, керамики, а также материалы, образованные сотовыми конструкциями. В силу влияния микроструктуры поведение таких материалов не может быть адекватно описано в рамках классической модели сплошной среды. Для построения математической модели пористого упругого тела целесообразным оказывается использование модели микрополярной сплошной среды, или континуума Коссера [1] – [5], т.е. среды с моментными напряжениями и вращательными степенями свободы.

Радиус–вектор \mathbf{R} , задающий положение частицы микрополярной среды в деформированном состоянии, и собственно ортогональный тензор микроповорота \mathbf{H} , характеризующий поворот частицы, в случае деформации осевого растяжения–сжатия при внутреннем и внешнем гидростатическом давлении определяются следующими соотношениями [5, 6]

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z \quad (1)$$

$$R = f(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z \quad (2)$$

$$r_1 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l$$

Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z – эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых цилиндрических координат, α – коэффициент растяжения по оси цилиндра, $f(r)$ – некоторая функция, характеризующая радиальную деформацию трубы и определяемая из уравнений равновесия и граничных условий, r_1, r_0, l – внутренний и внешний радиус и длина недеформированной трубы.

В этом случае тензор изгибной деформации \mathbf{L} равен нулю [4]

$$\mathbf{L} \times \mathbf{E} = -\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = 0$$

а выражение меры деформации \mathbf{Y} имеет вид

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T = f'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{f(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \quad (3)$$

где $\mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}$ — градиент деформации, $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации, \mathbf{E} — единичный тензор. Штрихом обозначена производная по r .

Будем полагать, что упругие свойства трубы описываются моделью физически линейного микрополярного материала [1, 4], удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2} (\mu + \kappa) \text{tr} \left((\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T \right) + \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}^2$$

$$\mu + \kappa > 0, \quad \lambda + 2\mu + \kappa > 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0$$

Тогда, в случае деформации (1), (2) тензор моментных напряжений типа Пиолы \mathbf{G} равен нулю

$$\mathbf{G} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} = 0$$

а тензор напряжений типа Пиолы \mathbf{D} равен

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} = D_1 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + D_2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + D_3 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z$$

$$D_1 = \lambda s + \chi (f'(r) - 1), \quad D_2 = \lambda s + \chi \left(\frac{f(r)}{r} - 1 \right) \quad (5)$$

$$D_3 = \lambda s + \chi (\alpha - 1)$$

$$s = f'(r) + \frac{f(r)}{r} + \alpha - 3, \quad \chi = 2\mu + \kappa$$

Уравнения равновесия микрополярной среды имеют вид [2]–[5]:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0 \quad (6)$$

где символ \times означает векторный инвариант тензора второго ранга. К внешней боковой поверхности трубы приложено гидростатическое давление p_0 , а к внутренней — давление p_1 , рассчитанные на единицу площади деформированной конфигурации. Используя формулу преобразования элементарной площадки при переходе от отсчетной конфигурации к текущей [6], запишем граничные условия на боковых поверхностях трубы:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}|_{r=r_1} = -\frac{\alpha p_1 f(r_1)}{r_1} \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}|_{r=r_0} = -\frac{\alpha p_0 f(r_0)}{r_0} \mathbf{e}_R \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}|_{r=r_0} = 0$$

Из уравнений (6) и граничных условий (7) находим неизвестную функцию $f(r)$:

$$f(r) = c_1 r - \frac{c_2}{r}$$

$$c_1 = \frac{(\lambda [3 - \alpha] + \chi) [(\alpha p_1 - \chi) r_0^2 - (\alpha p_0 - \chi) r_1^2]}{(2\lambda + \chi + \alpha p_1) (\chi - \alpha p_0) r_1^2 + (2\lambda + \chi + \alpha p_0) (\alpha p_1 - \chi) r_0^2} \quad (8)$$

$$c_2 = \frac{\alpha (\lambda [3 - \alpha] + \chi) (p_1 - p_0) r_0^2 r_1^2}{(2\lambda + \chi + \alpha p_1) (\chi - \alpha p_0) r_1^2 + (2\lambda + \chi + \alpha p_0) (\alpha p_1 - \chi) r_0^2}$$

2. Рассмотрим малое возмущение начального деформированного состояния, описанного выше. Линейные части приращений различных величин, характеризующих возмущенное состояние равновесия, будем обозначать точкой. Справедливы следующие формулы [4]:

$$\mathbf{C}^\bullet = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}, \quad \mathbf{H}^\bullet = -\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{Y}^\bullet = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \mathbf{H}^\text{T} \quad (9)$$

$$\mathbf{L}^\bullet = \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^\text{T}, \quad \mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \omega_Z \mathbf{e}_Z$$

Здесь \mathbf{v} — вектор добавочного перемещения, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор добавочного микроповорота.

Линеаризованные уравнения равновесия микрополярной среды [4] имеют вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{G}^\bullet + \left[\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}^\text{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^\text{T} \cdot \mathbf{D}^\bullet \right]_\times = 0 \quad (10)$$

где \mathbf{D}^\bullet и \mathbf{G}^\bullet — линеаризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы.

Краевые условия на боковой поверхности трубы получаются в результате линеаризации граничных условий (7)

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{r=r_1} = -p_1 J \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-\text{T}} \cdot (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^\text{T})$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{r=r_0} = -p_0 J \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-\text{T}} \cdot (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^\text{T}) \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^\bullet|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^\bullet|_{r=r_0} = 0; \quad J = \det \mathbf{C}$$

Здесь $\nabla = \mathbf{C}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в начальном деформированном состоянии.

Будем полагать, что на торцах трубы отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_R|_{z=0,l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{z=0,l} = v_Z|_{z=0,l} = 0$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{e}_Z|_{z=0,l} = \omega_R|_{z=0,l} = \omega_\Phi|_{z=0,l} = 0 \quad (12)$$

Выражения (10) представляют собой систему шести уравнений в частных производных относительно компонент векторов возмущений $v_R, v_\Phi, v_Z, \omega_R, \omega_\Phi, \omega_Z$. Ре-

шение вида

$$\begin{aligned}
 v_R &= V_R(r) \cos n\varphi \cos \beta z, & v_\Phi &= V_\Phi(r) \sin n\varphi \cos \beta z \\
 v_Z &= V_Z(r) \cos n\varphi \sin \beta z, & \omega_R &= \Omega_R(r) \sin n\varphi \sin \beta z \\
 \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(r) \cos n\varphi \sin \beta z, & \omega_Z &= \Omega_Z(r) \sin n\varphi \cos \beta z \\
 \beta &= \pi m/l, & m &= 1, 2, \dots, & n &= 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

приводит к отделению переменных φ , z в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (12).

3. Путем приближенного решения линеаризованной однородной краевой задачи (10) — (13) о бифуркации равновесия цилиндрической трубы из микрополярного материала при осевом сжатии (растяжении), а также внутреннем и внешнем давлении, в пространстве параметров нагружения построены критические кривые, соответствующие различным модам неустойчивости. В результате анализа этих кривых найдены области устойчивости для труб различных размеров.

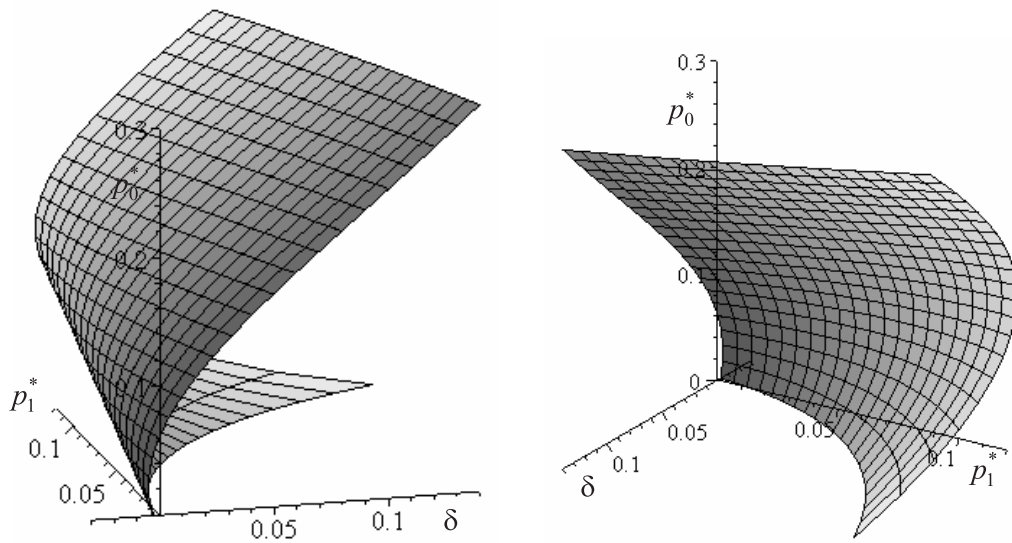


Рис. 1. Граница области устойчивости для пенополиуритана.

На Рис. 1 в пространстве параметров δ , p_1^* и p_0^* ($\delta = \alpha - 1$ — удельное осевое растяжение, $p_1^* = p_1/\mu$, $p_0^* = p_0/\mu$ — безразмерное внутреннее и внешнее давление) приведена граница области устойчивости для пенополиуритана [7]

$$\lambda = 79.73 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu = 99.67 \cdot 10^6 \text{ Па}, \quad \kappa = 86.67 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\gamma_1 = -26.65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, \quad \gamma_2 = 45.3 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, \quad \gamma_3 = 34.65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2$$

Относительная длина трубы равна $l^* = l/l_b = 600$, где $l_b = \sqrt{\gamma_2/2\chi}$ — характеристическая длина при изгибе [7]. Толщина стенки составляет 5% от диаметра.

В ходе анализа влияния гидростатического давления на устойчивость сжатой (растянутой) упругой трубы установлено, что внутреннее давление всегда приводит к дестабилизации деформации, в то время как небольшое внешнее давление оказывает стабилизирующее воздействие. Следует отметить, что при увеличении внешнего давления оно также начинает давать дестабилизирующий эффект.

При исследовании влияния геометрических размеров на бифуркацию равновесия трубы из микрополярного материала обнаружен размерный эффект. Именно, если рассматривать трубы имеющие разные длины, но одинаковые пропорции, то при длинах $l^* < 1000$ наблюдается явная зависимость величины критической деформации от длины трубы (она возрастает при уменьшении размеров трубы). Описанный эффект является следствием влияния микроструктуры и не имеет места при потере устойчивости упругих тел из обычных материалов. Нужно отметить, что наличие размерного эффекта для рассматриваемых в работе материалов подтверждено экспериментально [7].

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (МК-4984.2008.1).

Список литературы

- [1] *Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformables. Paris. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils., 1909.
- [2] *Пальмов В.А.* Основные уравнения несимметричной теории упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
- [3] *Erofeyev V.I.* Microstructured solids. Mathematical models and wave processes analysis. Nizhny Novgorod: Intelservice Publishing Company, 1996.
- [4] *Еремеев В.А., Zubov Л.М.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // МГТТ. 1994. № 3. С. 181-190.
- [5] *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin; Heidelberg; NY, 1997.
- [6] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [7] *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure. ed. H. Muhlhaus, J. Wiley. N.Y., 1995. p. 1-22.

Sheydakov D.N. *Buckling of elastic porous tube under three-parameter loading.* The present paper is dedicated to the investigation of the hydrostatic pressure influence on the loss of stability for a compressed (stretched) elastic cylindrical tube made of micropolar medium.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ФОРМОИЗМЕНЕНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Юдин А.С.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Дан обзор некоторых актуальных работ, связанных с решением задач моделирования больших пластических деформаций оболочек.

Актуальность вопросов формовки связана с множеством существующих технологий получения изделий из заготовок относительно простой геометрии. Математическое моделирование больших пластических формоизменений оболочек относится к сложной проблеме нелинейной механики. Существенная нелинейность связана с необходимостью одновременного учета как геометрических, так и физических нелинейных факторов.

Решение задач формовки прямыми численными методами весьма затруднительно как по времени, так и по устойчивости счета. Хотя в случае сложной геометрии без прямых численных методов типа МКЭ не обойтись. Публикаций с применением МКЭ-пакетов достаточно много. Но обсуждений возникающих проблем и эффективности их преодоления применения, например, по времени расчетов, мало.

Значительную роль в идентификации определяющих уравнений играют эксперименты. Имеются работы, в которых отмечается хорошее согласование расчетов и проводимых испытаний. В работах [1, 2] отмечается, что во многих процессах деформации металлов механические характеристики вследствие высоких нагрузок становятся анизотропными. Для многих инженерных приложений и расчетов требуется учитывать наведенную при деформации анизотропию механических свойств. Одной из теорий, учитывающей подобную анизотропию, является теория изотропной трансляции центра поверхности текучести. В работе [1] приводится описание этой теории, указываются ее достоинства по сравнению с другими теориями анизотропной пластичности. Описывается экспериментальная методика определения материальных параметров. Приводится сравнение с экспериментальными данными, показавшее хорошее соответствие.

Для ряда широко используемых материалов необходимы константы и соотношения, характеризующие анизотропное упрочнение. В [3] предоставлена такая информация, которая может быть использована при анализе процессов листовой и объемной штамповки.

При обработке металлов одним из воздействий является нагрев. В монографии [4] приведены характеристики металлов при повышенных температурах; даны методики определения параметров уравнении состояния в условиях горячего формоизменения. Для исследования процессов горячего формоизменения металлов применены уравнения состояния реономных тел, в которые входит структурный параметр повреждаемости. Предложены варианты МКЭ в форме метода

перемещений и смешанного метода, а также эффективные аналитические методы решения технологических задач теории ползучести.

В работе [5] предложен и экспериментально подтвержден модифицированный вариант определяющих соотношений теории пластичности для начально-анизотропных сред. Представленный вариант деформационной теории пластичности анизотропных сред позволяет рассчитывать предельную деформацию материала в технологических процессах обработки материалов давлением.

В [6] локализация пластической деформации рассмотрена как процесс эволюции активной нелинейной среды, сопровождающийся генерацией особого вида периодических процессов - автоволн локализованной пластической деформации. Получены основные дифференциальные уравнения для кинетики изменения автокаталитического (деформация) и демпфирующего (напряжение) факторов, управляющих формированием автоволн в активной нелинейной среде и основные количественные характеристики таких автоволновых процессов. Экспериментально исследованы процессы рождения, перестройки и разрушения автоволн в ходе пластической деформации.

В работе [7] приведены результаты экспериментальной проверки модели анизотропии предельной пластичности, описывающей разрушение листовых материалов с различной степенью анизотропии. Разработана методика определения постоянных материала, входящих в модель анизотропии предельной пластичности для листовых материалов с изотропным сопротивлением пластической деформации.

В диссертационной работе [8] развиваются математические элементы теории определяющих соотношений пластичности при конечных деформациях. Разрабатывается и реализуется метод, позволяющий обобщать определяющие соотношения, имеющие место при малых деформациях, на случай конечных деформаций, основанный на использовании тензорных мер конечных деформаций и напряжений различных типов.

В [9] предложена общая схема, позволяющая искать решение обратных задач идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов. Основной особенностью данной схемы является разработка упрощенных математических моделей технологических процессов обработки давлением с целью использования их при определении постоянных материала по результатам тестовых экспериментов, которые проводятся непосредственно на технологическом оборудовании. Данная схема реализована на примере сверхпластической формовки цилиндрических и сферических оболочек из листовых заготовок титанового сплава.

Согласование теории и физического эксперимента актуально для совершенствования технологии изготовления и прогнозирования критических давлений потери устойчивости (давлений срабатывания) оболочек типа предохранительных мембран (ПМ). Они относятся к элементам устройств систем безопасности, защищающих технологическое оборудование и емкости от разрушения избыточным давлением.

Задача создания ПМ высокой точности срабатывания была решена путем создания установки по изготовлению мембран и разработки аппаратуры для прогнозирования давлений срабатывания (ДС) неразрушающими методами, которые

применяются в настоящее время. Для прогноза ДС наиболее удобен метод анализа кривых "давление-перемещение" для аппаратной экстраполяции критических нагрузок. При этом используются методы компьютерного управления и математической обработки информации программно-аппаратным комплексом [10].

На необходимость учета ряда отклонений от сферической идеальности купола, получаемого пластической вытяжкой равномерным давлением из круглой защемленной пластинки, указано в работе [11]. Учитывается: наличие узкой краевой зоны отрицательной гауссовой кривизны, отклонение основной поверхности купола от сферической и переменность толщины. На основе подхода [11] в работах [12, 13] проведены вычислительные эксперименты. Они показали тенденцию сближения рассчитанных бифуркационных и экспериментальных критических нагрузок хлопающих мембран, теряющих устойчивость по несимметричным формам.

Для достижения высоких качеств ПМ качеств в последнее время используются концепция и технология артификации [14-16]. С позиций чувствительности оболочек к начальным случайным технологическим несовершенствам этот подход можно трактовать как искусственно вносимые "несовершенства которые перекрывают влияние случайных, стабилизируют критическую нагрузку и форму потери устойчивости.

В работах [17-22] сделано продвижение по пути сближения теории и эксперимента. Удалось построить аналитические решения задачи формовки артифицированных оболочек и теоретически обосновать концепцию артификации. Представлена математическая модель деформирования физически нелинейных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота. Построены определяющие соотношения типа Дэвиса-Надаи, учитывающие наведенную деформациями неоднородность свойств материала по толщине. Даны аналитические решения задач пластической формовки сферических и эллипсоидальных куполов из пластины. Выполнено сравнение теории и эксперимента, показавшее их хорошее согласование.

В разработанных подходах сочетаются математические модели механики, методы решения краевых задач на основе применения информационных технологий интегрированных математических пакетов, создание испытательных устройств с автоматизированными системами управления, проведение испытаний. Потенциал построенных решений позволяет применить их к задачам идентификации пластических свойств листовых материалов, важных в задачах формовки. Методы позволяют также проводить испытания на малоразмерных образцах бесконтактным способом (без тензодатчиков) по диаграммам типа "давление-перемещение в точке" или, как ожидается, только по замеру некоторой высоты купола и давления, ему соответствующему.

Список литературы

- [1] *Schmoeckel Dieter, Luo San.* Darstellung der induzierten anisotropen plastischen Eigenschaften gewalzter Bleche mittels der ICT-Theorie // *Blech Rohre Profile.* 1992. V. 39, № 4. С. 324–330.
- [2] *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [3] *Aral Y., Kobayashi H., Tamura M.* Elastic-plastic thermal stress analysis for optimum material design of functionally gradient material // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* 1993. V. 59, № 559. С. 849–855.
- [4] *Романов К. И.* Механика горячего формоизменения металлов. М.: Машиностроение, 1993. 240 с.
- [5] *Косарчук В.В., Мельников С.А.* Деформационная теория пластичности анизотропных материалов и ее экспериментальное обоснование // Тр. 18 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН Украины, Киев, 18–21 мая, 1993. Ч. 1. / Ин-т мех. АН Украины. Киев, 1993. С. 53–57. Деп. в ГНТБ Украины 16.08.93, 1764-Ук93.
- [6] *Зуев Л.Б.* Пластическое течение твердых тел как автоволновой процесс в нелинейной среде // *Нелинейный динамический анализ: 2-й м/нар. конгресс.* Москва, 3–8 июня, 2002. М.: Изд-во МАИ. 2002. С. 149.
- [7] *Томилов М.Ф., Толстов С.А., Томилов Ф.Х.* Анизотропия предельной пластичности листовых материалов // Системн. пробл. качества, матем. моделиров., информационных, электронных и лазерных технологий: М-лы м/нар. конф. и Росс. науч. шк. Москва-Воронеж-Сочи, 2002. Ч. 7. Разд. 1. Секц. 13. М.: Радио и связь. 2002. С. 22–25.
- [8] *Финошкина А.С.* Модели пластичности при конечных деформациях: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. МГУ, Москва, 2003. 15 с.
- [9] *Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В.* Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела.* 2003. № 2. С. 111–123.
- [10] *Беликов Н.В., Занимонец Ю.М., Юдин А.С.* Методы математического моделирования в задачах управляемой пластической формовки и неразрушающего контроля куполообразных оболочек с заданной высокоточной нагрузкой потери устойчивости // XXXIII шк.-семинар "Матем. моделир. в пробл. рац. природопольз.". Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2005. С. 133–136.
- [11] *Юдин А.С.* Моделирование начальных несовершенств сферических куполов // *Соврем. пробл. мех. сплош. среды.* Ростов н/Д, 1995. С. 210–219.
- [12] *Юдин А.С., Какурин А.М., Пьянков Б.Г.* Критические нагрузки куполообразных оболочек при математическом и физическом моделировании // *Соврем. пробл. мех. сплош. среды.* Тр. IV Междунар. науч. конф. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ. 1998. Т. 2. С. 222–225.

- [13] Юдин А.С., Шепелева В.Г. Критические давления упругого выпучивания несовершенных сферических оболочек // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. II Междунар. конф. - Ростов-на-Дону: МП "Книга". 1996. Т. 3. С. 156–160.
- [14] Пьянков Б.Г., Какурин А.М., Юдин А.С. Артифицированные куполообразные оболочки, теряющие устойчивость // Современ. пробл. мех. спл. среды. Тр. IV Междунар. науч. конф. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1998. Т. 2. С. 129–133.
- [15] Пьянков Б.Г., Какурин А.М., Юдин А.С. Экспериментальные и теоретические основы артификации предохранительных мембран // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1999. № 2. С. 22–24.
- [16] Юдин А.С., Юдин С.А. Моделирование пластической формовки артифицированной хлопающей мембраны // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. X Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР". 2006. Т. 1. С. 290–294.
- [17] Юдин С.А., Юдин А.С. Аналитика пластической формовки сферического купола из круглой пластинки // Матем. модели и алгор. для имитац. физич. процессов. М-лы Междунар. науч.-технич. конф. Т1. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2006. С. 212-215.
- [18] Юдин С.А. Пластическое формоизменение оболочек вращения // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Т. 12. Ростов-на-Дону: "ТерраПринт 2006. С. 38–40.
- [19] Юдин А.С., Юдин С.А. Моделирование пластической формовки артифицированной хлопающей мембраны // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. X Междунар. конф. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 2006. Т. 1. С. 290–294.
- [20] Юдин А.С., Юдин С.А. Пластическая вытяжка купола из круглой пластинки: теория и эксперимент // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. XI Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР". 2007. Т. 1. С. 255–259.
- [21] Юдин С.А., Юдин А.С. Устойчивость сфероидальных оболочек переменной толщины // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. X Междунар. конф. Т. 1. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 2006. С. 295–299.
- [22] Юдин А.С., Юдин С.А. Условия сферичности купола при пластической формовке из круглой пластинки // Модели и алгоритмы для имитац. физ.-хим. процессов. М-лы Междунар. конф. 8–12 сент. 2008г. Таганрог, Россия. - Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008. С. 86–94.

Yudin A.S. *Mathematical modelling of large plastic deformations of shells of revolution.*

The review of some actual works connected with the decision of modelling problems of large plastic deformations of shells is given.

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

**Якименко Н. С.* , Мелешко В. В.* , Улитко А. Ф.* ,
Гринченко В. Т.****

* *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*

** *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

Исследуются колебания изотропных упругих цилиндров в окрестности частоты за-
пирапия второй нормальной моды цилиндрического волновода. Применяется метод су-
перпозиции, использующий возможность построения частных решений уравнений дви-
жения в цилиндрических координатах для удовлетворения граничных условий на боко-
вой поверхности и на торцах цилиндра. Анализируется влияние коэффициента Пуассона
на кривизну ветви вблизи частоты запирапия и связь с появлением “террасоподобных”
структур на частотных спектрах. Приводятся примеры форм перемещений на границе.

Исследование особенностей спектра собственных частот и форм колебаний
упругих цилиндров конечной длины представляет актуальную научную и при-
кладную задачу. Материал цилиндра высоты $2H$ и диаметром $2a$ характеризуется
упругими постоянными: модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Если в
области низких частот моды колебаний конечного стержня и тонкого диска давно
изучены исчерпывающим образом, то высокочастотный спектр колебаний и сегодня
представляет значительный интерес. В работе [1] подробно исследованы частот-
ные спектры упругих дисков в районе частот первого толщинного резонанса (или
в диапазоне между частотами запирапия второй и третьей распространяющихся
нормальных мод бесконечного слоя, описываемых уравнением Рэлея-Лэмба).
Представляет интерес рассмотрение особенностей частотных спектров связанных
задач для длинных цилиндров в области частоты первого радиального или сдвиго-
вого резонанса бесконечного цилиндра, задаваемых уравнением Похгаммера-Кри.
В этом направлении можно выделить лишь статьи [1, 3], в которых, в частно-
сти, были детально исследованы свойства краевой моды цилиндра и объяснена
природа “дублетов” и “триплетов”, экспериментально наблюдаемых в частотных
спектрах .

В данной работе подробно исследуется явление уплотнения высокочастотного
спектра на картинах зависимости безразмерных собственных частот $\Omega = \omega a/c_2$
(c_2 - скорость сдвиговых волн в упругой среде) от отношения размеров $h = H/a$
при нескольких типичных значениях коэффициента Пуассона ν . Это явление про-
является в виде возникновения “террасоподобных” спектров вблизи частоты за-
пирапия второй распространяющейся моды. Для простоты рассмотрим подробно
только *симметричный* относительно срединной плоскости тип движения цилин-
дра. Однако аналогичный “террасоподобный” спектр с теми же граничными значе-
ниями частот, которые определяются частотами запирапия действительных веток
дисперсионного спектра наблюдается и для антисимметричного типа движения.

Аналитическое решение граничной задачи строится методом суперпозиции [2, 3, 4, 5]. Точное решение уравнений движения Ламе для компонент вектора перемещений выбирается в виде суммы двух рядов по полным системам тригонометрических функций и функций Бесселя по продольной и радиальной координатам, соответственно. Произвольные коэффициенты в этих рядах определяются при выполнении всех граничных условий, что в силу неортогональности функций приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Бесконечная система решается методом улучшенной редукции, используя асимптотический закон поведения неизвестных. Равенство нулю определителя такой системы (просто или более корректно усеченного) дает уравнение для определения бесконечного набора безразмерных собственных частот Ω в зависимости от h . Такой подход является весьма простым при численной реализации и требует малых затрат машинного времени.

Высокочастотной областью спектра собственных частот конечного цилиндра мы будем называть область частот между критической частотой и частотой записания второй и третьей распространяющихся осесимметричных нормальных мод в соответствующем бесконечном цилиндре со свободной поверхностью. Такое распространение на заданной частоте Ω описывается значениями постоянной распространения ξ - действительными корнями уравнения Похгаммера-Кри

$$(\Omega^2 - 2\xi^2)^2 J_0(\alpha)J_1(\beta) + 4\xi^2\alpha\beta J_0(\beta)J_1(\alpha) - 2\Omega^2\alpha J_1(\alpha)J_1(\beta) = 0,$$

с введенными обозначениями

$$\alpha^2 = \Omega^2/k^2 - \xi^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \xi^2, \quad k = \sqrt{2\frac{1-\nu}{1-2\nu}}.$$

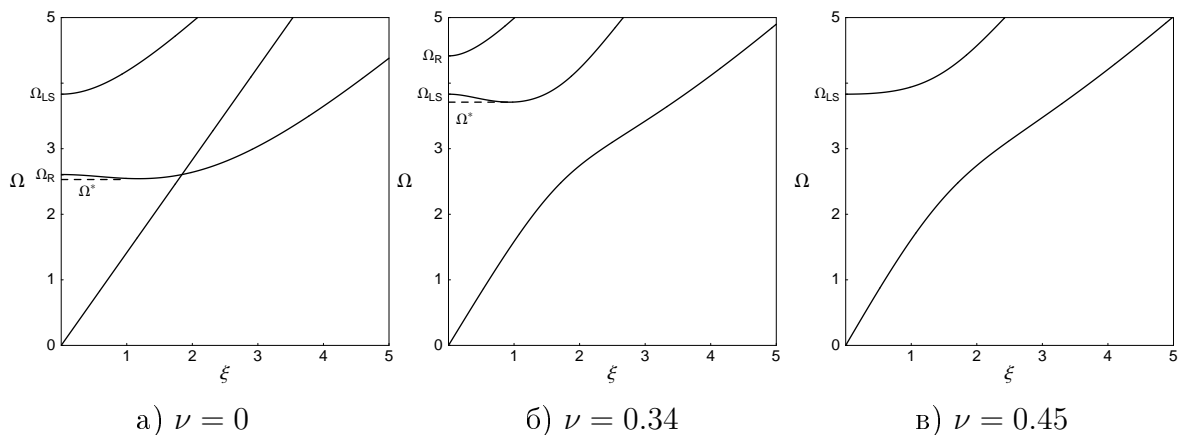


Рис. 1. Дисперсионный спектр осесимметричных нормальных волн в цилиндре. Первые три вещественные ветви.

Дисперсионные кривые для продольных мод бесконечного цилиндра приведены на рис. 1 для трех типичных значений коэффициента Пуассона ν . На этих рисунках Ω_{LS} и Ω_R обозначают, соответственно, частоты записания продольно-сдвиговых и радиальных нормальных мод, Ω^* - критическое (минимальное) значение частоты, при котором в цилиндре еще существуют две распространяющиеся нормальные моды.

Аналитические выражения для кривизны второй действительной ветви на частотах запираия $\xi = 0$, которые определяют наличие или отсутствие частоты Ω^* в дисперсионном спектре находятся согласно формулам [6]:

1. Для продольно-сдвиговых частот запираия Ω_{LS} – корней уравнения $J_1(\Omega) = 0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \frac{\lambda_1^2}{\Omega} \left[1 - \frac{8J_1(\Omega/k)}{k\Omega J_0(\Omega/k) - 2J_1(\Omega/k)} \right];$$

2. Для радиальных частот запираия Ω_R – корней уравнения $\Omega J_0(\Omega/k) - 2/k J_1(\Omega/k) = 0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} = \frac{\lambda_1 k^3}{\Omega} \left[1 + \frac{4((k^2 - 4)J_1(\Omega) + 2\Omega J_0(\Omega))}{(k^2\Omega^2 - 4(k^2 - 1))J_1(\Omega)} \right].$$

(λ_1 – первый корень уравнения $J_1(\lambda) = 0$).

Частоты Ω_{LS} не зависят от ν , в то время как для частот Ω_R имеется существенная зависимость от коэффициента Пуассона. При $\nu = \nu_c = 0.283412$ происходит перемена типа движения на второй частоте запираия с радиального (зависящего от ν) на продольно-сдвиговый – на частоте $\Omega = \lambda_1$. Несмотря на перемену типа движения на второй частоте запираия частотный минимум Ω^* имеет место вплоть до $\nu < \nu_* = 0.416937$.

С этим связана интересная перестройка структуры частотного спектра для конечного цилиндра: при $\nu > \nu_*$ исчезает “террасоподобная” структура высокочастотного спектра конечного цилиндра.

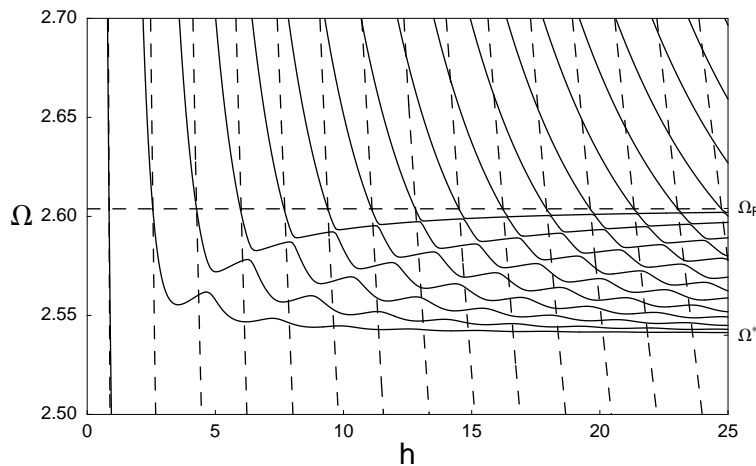
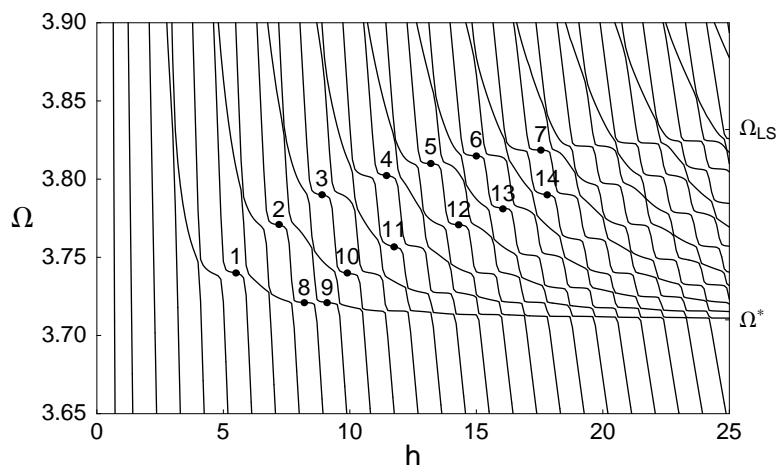


Рис. 2. Частотный спектр для $\nu = 0$

На рисунке 2 приведены частотный спектр для $\nu = 0$. В этом случае частично устраняется связь между различными типами движения, следствием чего являются точки двухкратного и трехкратного пересечения кривых. На этом рисунке штриховой линией обозначены типы движения, соответствующие чисто продольным (гиперболы) и чисто радиальным (горизонтальная прямая) движениям цилиндра. Третье семейство, обозначенное сплошной линией, не может быть выведено из элементарных решений и связано со способностью упругих тел сопротивляться сдвигу.

Рис. 3. Частотный спектр для $\nu = 0.34$

На рис. 3 приведен частотный спектр для коэффициента Пуассона $\nu = 0.34$. Точками 1–7 и 8–14 на спектре обозначены первые две ветки соответствующие В-модам, которые характеризуются возрастанием частоты с увеличением длины цилиндра.

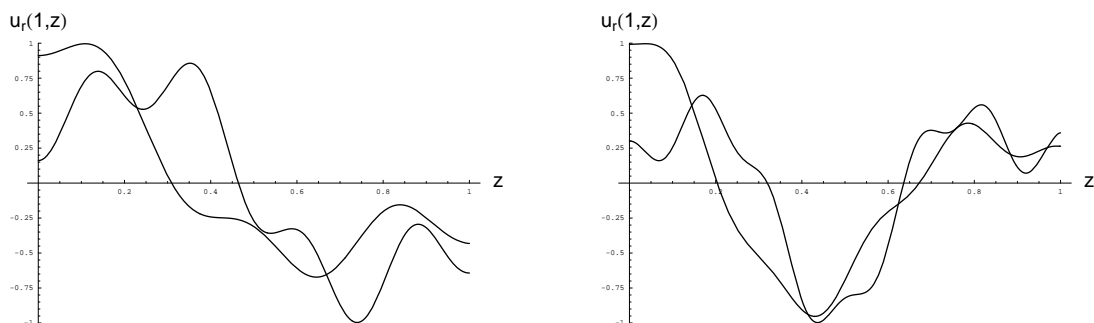
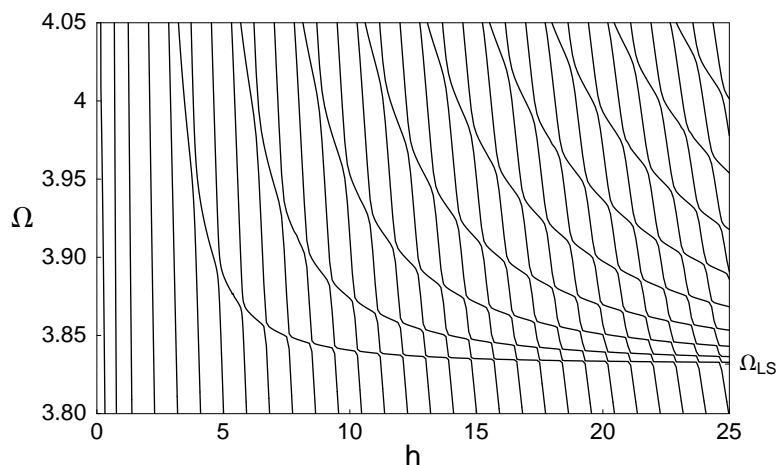


Рис. 4. Формы колебаний для В-мод в точках 1, 2 и 8, 10

В качестве примера формы колебаний приведены радиальные перемещения u_r вдоль боковой поверхности цилиндра, построенные в точках 1, 2 и 8, 10, которые соответствуют первой и второй В-модам. Несмотря на неидентичность форм (вызванную связью с другими типами движения) четко прослеживается увеличение на единицу количества узлов в распределении перемещений при увеличении порядка ветви.

При значении коэффициента Пуассона $\nu > \nu_* = 0.416937$ исчезает минимум на второй дисперсионной ветви. Частотный спектр в этом случае имеет значительно более простой вид (рис. 5). В то же время становится невозможным выделение типов движения, подобных В-модам, частоты которых увеличиваются с возрастанием линейных размеров цилиндра.

Рис. 5. Частотный спектр для $\nu = 0.45$

Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса // Прикладная механика. 1979. Т. 15, № 6. С. 3–19.
- [2] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акустический журнал. 1978. Т. 24. С. 861–866.
- [3] Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Анализ частотного спектра и форм колебаний длинных цилиндров // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 3–7.
- [4] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
- [5] Ebenezer D.D., Ravichandran K., Padmanabhan C. Forced vibrations of solid elastic cylinders // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 282. P 991–1007.
- [6] Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics. 1962. Vol. 29. P. 729–734.

Yakimenko N.S., Meleshko V.V., Ulitko A.F., Grinchenko V.T. *High-frequency vibrations of finite elastic cylinders.* In this paper vibrations of isotropic elastic cylinders near second cut-off frequency of cylindrical waveguide is studied. The method of superposition that used the possibility of constructing from the particular solutions of the equations of motion in cylindrical coordinates expressions that can be used to satisfy the boundary conditions both at the ends and on the lateral surface of the cylinder is used. Dependence on Poisson's ratio for the curvature of branch near cut-off frequency is analyzed with connection to "terrace"-like structures in frequency spectra appearing. Examples of eigen modes are given.