Содержание

СЕГМЕНТИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ПРИМЕРЕ КАРДИОГРАММ

Акименко М. О.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследованы кардиограммы здорового человека и больного с аритмией. Для сегментирования ряда использованы алгоритм, основанный на t-критерии Стьюдента, и итерационный алгоритм. На основании полученных сегментов проведен временной, частотный анализ, детренд анализ флуктуаций. Представлено сравнение результатов статистического анализа ЭКГ записей здорового и больного человека.

Введение

Нестационарность временных рядов, встречающихся в различных областях, становится существенным препятствием для их анализа. Одним из методов решения этой сложной задачи являются методы сегментирования, позволяющие выделить участки временного ряда с постоянными характеристиками. Подобные затруднения встречаются при идентификации характеристик биологических сигналов, таких так кардиограмма, электроэнцефалограмма, электрогастограмма, реограмма и др. Однако выбор алгоритма для анализа биологического сигнала является непростой задачей. Это обусловлено разнообразием признаков и характеристик биологических сигналов по сравнению с физическими сигналами. В данной работе рассматривается ряд методов сегментирования и анализа нестационарных временных рядов на примере кардиограмм здорового человека и больного с аритмией. Все программы и расчеты были реализованы в среде **Maple**.

Сегментирование ЭКГ записи (идентификация RR-комплексов)

1. Метод сегментирования, основанный на t-критерии Стьюдента

В каждой точке временного ряда вычисляется статистика t :

$$t = \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{S_D} \right|, \tag{1}$$

где

$$S_D = \left(\frac{(N_1 - 1)s_1^2 + (N_2 - 1)s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Здесь μ_1 и μ_2 — средние арифметические для выборок слева и справа от точки, s_1 и s_2 — стандартные отклонения, N_1 и N_2 — размеры выборок.

Вычисляется статистическая значимость $P(t_{\max})$, которая численно аппроксимируется как

$$P(t_{\max}) \approx (1 - I_{\frac{\nu}{(\nu + t_{\max}^2)}}(\delta\nu, \delta))^{\gamma}, \tag{3}$$

где $\gamma = 4.19 lnN - 11.54$ и $\delta = 0.4$, N — размер временного ряда, $\nu = N - 2$, $I_x(a, b)$ — неполная бета-функция, вычисляемая по формуле:

$$I_x(a, b) = \int\limits_0^x t^{a-1}(1 - t)^{b-1} dt. \tag{4}$$

Если величина статистической значимости больше порогового значения 0.95, то временной ряд разделяется на 2 сегмента и процедура повторяется для каждого из них до тех пор, пока статистическое значение не станет меньше порогового, либо размер полученных сегментов не станет меньше минимального размера l_0 [2]. В данной работе принято $l_0 = 0.3\,\text{с}$ — минимально возможный размер интервала, соответствующий частоте сердечных сокращений, равной 200 ударам в минуту.

Средняя величина погрешности работы метода составляет 4.72%, время работы программы — около 2 с.

2. Итерационный алгоритм идентификации R-R интервалов

Этап предварительного обучения.

Определяются максимум, минимум и среднее значение сигнала на интервале, заведомо большем одного периода кардиограммы. Экстремальное значение максимума модуля отклонения от среднего значения отождествляется с R-зубцом. Определяется знаковая асимметрия кардиограммы (знак R-зубца).

Этап оценки периода.

Определяются первые две экстремальные точки сигнала, амплитуда которых близка к ранее полученному значению экстремали. При поиске второй точки накладываются априорные ограничения на минимальное и максимальное расстояния между точками экстремалей по времени ($RR_{\min}$ соответствует частоте сердечного ритма, равной 200 ударам в минуту; $RR_{\max}$ соответствует частоте сердечного ритма, равной 40 ударам в минуту). Проводится первая оценка периода кардиограммы по расстоянию между двумя соседними экстремалями (R-зубцами).

Этап адаптации.

Полученные экстремальные значения амплитуд и периода используются для уточнения прогноза на следующий период.

Таким образом, в регулярном режиме циклически выполняются этапы анализа текущего и прогноза следующего периодов кардиограммы с адаптацией к ее небольшим вариациям. В момент запуска алгоритма и при сбоях выполняется обучающий этап [1].

Средняя погрешность работы метода составляет 0.13%, время работы программы — около 1 с. В сравнении с методом, основанным на t-критерии Стьюдента, данный алгоритм не требует больших вычислительных затрат.

Временной анализ

Временной анализ нестационарного временного ряда, как правило, проводится графическими методами. К ним относятся анализ ритмограммы и гистограммы.

Ритмограмма представляет собой вариационный ряд межсистолических интервалов, изображенный в виде отрезков прямой. Ритмограмма позволяет оценить среднюю продолжительность R-R интервалов. За 1.5 минуты количество R-R интервалов для здорового человека составляет 124, для больного с аритмией — 144. Средняя продолжительность R-R интервала для здорового человека — 0.78 с, для больного с аритмией — 0.66 с.

Гистограмма — графическое изображение сгруппированных значений продолжительности сердечных циклов. Для здорового человека характерна гистограмма, близкая по виду к кривой Гаусса (см. рис. 1.а). При нарушении ритма наблюдается асимметричная гистограмма (см. рис. 1.б).

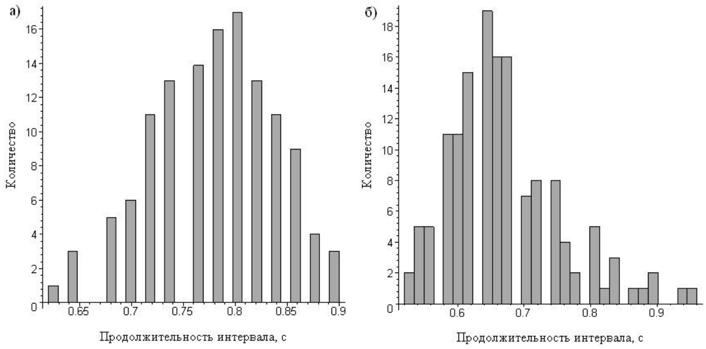


Рис. 1. Гистограмма здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

Характеристика	Здоровый ч-к	Аритмия	Норма
Средняя продолжит. интервала	0.78 с	0.67 с	0.75 — 1 с
Мода	0.8 с	0.65 с	0.75 — 1 с
Среднеквадратическое отклонение	0.06 с	0.09 с	0.04 — 0.08 с
Межинтервальные различия	0.04 с	0.07 с	0.02 — 0.05 с
Размах вариации	0.28 с	0.44 с	0.15 — 0.3 с
Коэффициент вариации	0.08	0.13	0.03 — 0.12
Частота появления быстрых изменений ритма	0.21	0.33	0.13 ± 0.08

Таблица 1. Статистические характеристики ряда R-R интервалов.

Из ритмограммы и гистограммы определяются стандартные статистические характеристики для ряда R-R интервалов. Данные характеристики в сравнении с показателями в норме представлены в таблице 1.

Частотный анализ

Для частотного анализа генерируется новый временной ряд на основании длительностей R-R интервалов, полученных на этапе сегментирования. Данный ряд подвергается Фурье-анализу, итогом которого является спектр мощности его частотных составляющих.

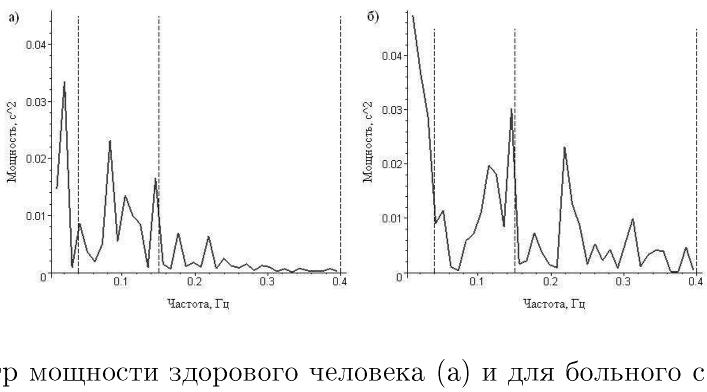


Рис. 2. Спектр мощности здорового человека (а) и для больного с аритмией (б).

Спектральный анализ вариабельности сердечного ритма у больного с аритмией отражает увеличение мощности колебаний в очень низкочастотной области (до 0.04 Гц) практически в 2 раза на фоне общего снижения частоты сердечных сокращений (см. рис. 2).

Анализ графиков Пуанкаре

График Пуанкаре представляет собой набор точек, каждая из которых является парой R-R интервалов с лагом m (RR_i, RR_{i+m}).

Основными характеристиками являются S_1 и S_2, которые определяют малую и большую полуоси эллипса, ограничивающего облако точек. Данные характеристики вычисляются по формулам (5)–(6):

$$S_1^2 = \gamma_{RR}(0) - \gamma_{RR}(m), \tag{5}$$

$$S_2^2 = \gamma_{RR}(0) + \gamma_{RR}(m) - 2\,\overline{RR}^2, \tag{6}$$

где $\gamma_{RR}(m)$ — функция автокорреляции последовательности R-R интервалов с лагом m.

В случае нормальной кардиограммы значение S_1 для графика Пуанкаре с лагом 1 равно 0.1, $S_2 = 0.19$, для больного с аритмией $S_1 = 0.17$, $S_2 = 0.29$ [3].

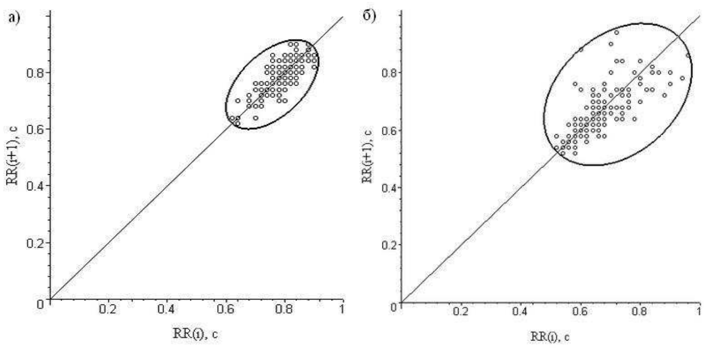


Рис. 3. График Пуанкаре здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

Детренд анализ флуктуаций

В случае ЭКГ записи на каждом интервале рассматриваются отклонения от изолинии — горизонтальной линии ЭКГ записи, рисующейся во время диастолы сердца — и определяется продолжительность отклонений τ в ту или иную сторону от изолинии. К последовательности продолжительностей флуктуаций применяется детренд анализ, который состоит из нескольких этапов.

Сперва строится новый временной ряд из y_k, определяемых формулой:

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} (\tau(i) - \overline{\tau}), \tag{7}$$

где $\overline{\tau}$ — среднее значение всей последовательности.

Полученный ряд разделяется на сегменты размера n. На каждом сегменте точки временного ряда аппроксимируются прямой y_k^n, определяющей тренд. Затем точки прямой вычитаются из временного ряда, тем самым исключая тренд:

$$\widetilde{y}_k = y_k - y_k^n. \tag{8}$$

Далее вычисляется среднеквадратическое отклонение F_n как

$$F_n = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\widetilde{y}_k^2}. \tag{9}$$

Этот процесс повторяется при различных значениях n для выявления зависимости $F = F(n) \approx n^{\alpha}$ [4, 5].

Результаты, полученные при анализе кардиограмм здорового человека и больного с аритмией, показывают, что во втором случае среднеквадратические отклонения F_n значительно меньше при любом размере сегмента n, а среднее значение параметра α для здорового человека составляет $\overline{\alpha} = 0.18$, для больного с аритмией $\overline{\alpha} = 0.13$.

Вывод

Приведенные в данной работе алгоритмы сегментирования позволяют идентифицировать не только кардиографические комплексы, но и определять разладки во временных рядах различного происхождения. Используемые методы анализа временного ряда позволяют определять различные отклонения от нормы по характеру ЭКГ записи.

Автор выражает благодарность профессору Карпинскому Д. Н. за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Калюжный Н. А., Сливинский А. П., Кубов В. И.* Алгоритм обработки электрокардиограмм для микроконтроллерных устройств с ограниченной емкостью памяти // Наукові праці. Техногенна безпека. 2007. Том 85. Выпуск 72. С. 84–92.

[2] *Fukuda K., Stanley H. E., Amaral L. A.* Heuristic segmentation of a nonstationary time series // arXiv: cond-mat. 2003. V.5. Pp. 1–18.

[3] *Goshvarpour A. et al.* Analysis of lagged Poincare plots in heart rate signals during meditation // Digital Signal Processing. 2011. V.21. Pp. 208–214.

[4] *Reyes-Ramirez SnI., Guzman-Vargas L.* Scaling properties of excursions in heartbeat dynamics // European Journal of Physics. 2010. V.89. Pp. 431–437.

[5] *Perfetto J., Ruiz A., Attellis C.* Detrended fluctuation analysis and R-R interval variability: a new linear segmentation algorithm // Computers in Cardiology. 2009. V.33. Pp. 629–632.

Akimenko M. O. *Segmentation and analysis of nonstationary time series by the example of cardiograms.* The cardiograms of healthy man and patient with arrhythmia are investigated. The Student's t-test and iteration algorithm are used for segmentation of time series. The time analysis, frequency analysis and detrended fluctuation analysis are carried out based on received segments. The results of the comparison of the statistic analysis of cardiograms of healthy man and patient with arrhythmia are presented in this article.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЬЕЗОГЕНЕРАТОРОВ КАНТИЛЕВЕРНОГО ТИПА: КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Акопьян В. А.*, Паринов И. А.*, Рожков Е. В.*, Шевцов С. Н.**

**НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

***Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

В результате конечно-элементного и экспериментального анализа электрофизических параметров пьезогенератора кантилеверного типа рассчитаны оптимальные характеристики пьезогенератора, позволяющие получить его максимальную выходную мощность с высоким КПД.

1. Введение. Поиск оптимальных параметров чувствительного элемента пьезогенератора (ПГ), обеспечивающих максимальную выходную мощность, является актуальной задачей, отдельные аспекты которой представлены в настоящем докладе.

В настоящем исследовании представлены результаты конечно-элементного (КЭ) и экспериментального анализа оптимальных электрофизических и частотных характеристик ПГ кантилеверного типа, обеспечивающих его максимальную выходную мощность при высоком кпд. В качестве объекта исследования рассмотрен ПГ, состоящий из двух пьезоэлементов пластинчатого типа на основе пьезокерамики состава ЦТС-19 размерами $10 \times 10 \times 0{,}5\,\text{мм}^3$. Пьезоэлементы поляризованы по толщине и наклеены на поверхности подложки (кантилевера) — тонкой пластины из стеклотекстолита $1 \times 235 \times 11\,\text{мм}^3$. Принципиальная схема нагружающего модуля исследуемого ПГ приведена на рис. 1.

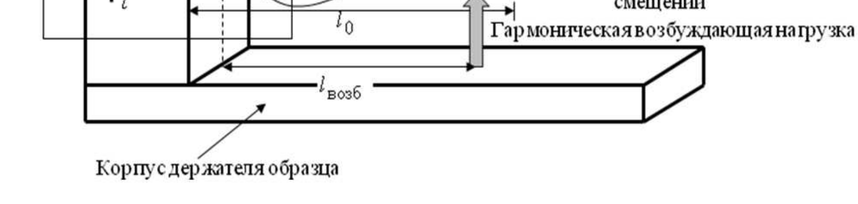


Рис. 1. Принципиальная схема нагружающего модуля исследуемого ПГ.

2. Конечно-элементное моделирование. Для определения зависимости выходной электрической мощности исследуемой модели ПГ от его различных параметров было выполнено компьютерное моделирование в системе Comsol

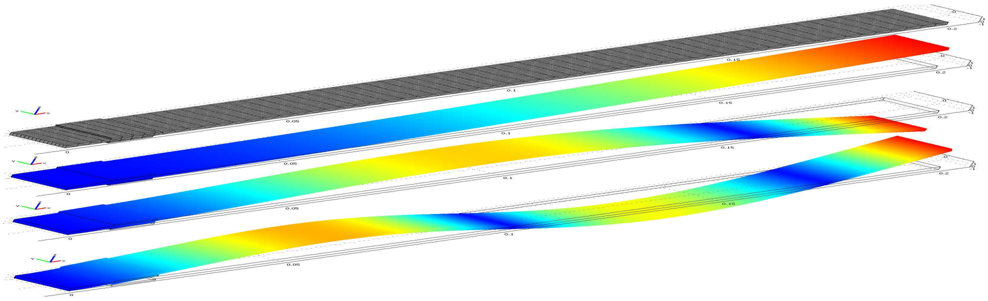


Рис. 2. Конечно-элементная модель ПГ и первые три моды изгибных колебаний балочки в плоскости наименьшей жесткости.

Multiphysics. Размерные и физико-механические параметры КЭ-модели в основном соответствовали физической модели.

Выполненный модальный анализ системы позволил определить собственные частоты первых трех мод изгибных колебаний консольной балочки в плоскости наименьшей жесткости (рис. 2).

Далее рассматривались нестационарные колебания конструкции в окрестности этих трех собственных частот, которые после окончания переходного процесса становились гармоническими. Во всех численных экспериментах возбуждающая нагрузка была приложена к нижней плоскости балочки. Колебания возбуждались осцилирующей нагрузкой с постепенно нарастающей амплитудой, причем постоянная времени закона нарастания амплитуды нагрузки принималась равной трем периодам возбуждаемых колебаний, в дальнейшем нагрузка становилась гармонической. Электрические потенциалы V_1, V_2, генерируемые верхней и нижней пьезопластинами, вычислялись на каждом шаге интегрирования, при этом электроды пьезоэлементов были включены в электрическую цепь с импедансом активной нагрузки R. Вычислялись также значения электрической энергии

$$W = \sum_{i=1,2} V_i I_i,$$

отдаваемой в эту чисто активную нагрузку (I_i — электрический ток на i-том электроде).

Исследование зависимости электрического напряжения и мощности, отдаваемой в нагрузку, производилось при тех же значениях электрического сопротивления нагрузки, что и в натурных экспериментах.

Полная электрическая мощность при идеальной активной нагрузке, с учетом того, что основная деформация пьезопластин связана с их растяжением в направлении поперечном к поляризации и электрическому полю определяется в виде:

$$W_{el} = \frac{(e_{31}\omega\delta b)^2}{2[1 + (R\omega C_{pz})^2]} R$$

где e_{31} — пьезоэлектрическая постоянная; δ — амплитуда динамического смещения конца пьезопластины; b — ширина пьезопластины, ω — круговая частота, C_{pz} — емкость.

Как показывают результаты расчета оптимального импеданса нагрузки для первых трех собственных частот изгибных колебаний кантилевера (рис. 3), с ростом собственной частоты колебаний наблюдается значительное уменьшение оптимального импеданса.

Рис. 3. Зависимость оптимального импеданса нагрузки (соответствующего максимальной мощности, отдаваемой пьезоэлементом в нагрузку) от собственной частоты первых четырех мод изгибных колебаний кантилевера.

Результаты КЭ-моделирования амплитуды электрического потенциала на нагрузке для первых трех мод изгибных колебаний балочки представлены на рис. 4.

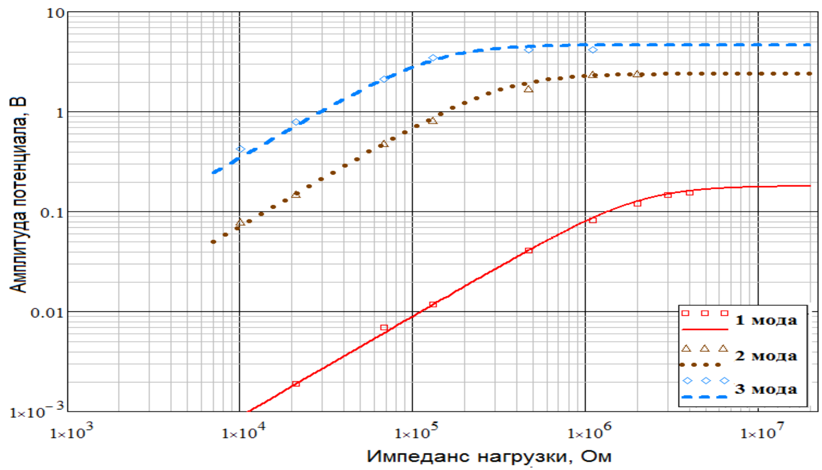


Рис. 4. Зависимость амплитуды электрического потенциала на нагрузке от ее импеданса для первых трех мод изгибных колебаний модельной балочки.

3. Натурное моделирование. Натурный эксперимент по моделированию процесса генерирования ПГ электрического заряда при различных частотах возбуждения механической нагрузки и поперечных смещений кантилеверной балочки выполнен на оригинальной экспериментальной установке (электрическая схема измерений представлена на рис. 5).

4. Методика и сравнительные результаты натурного эксперимента. В испытуемом образце ПГ последовательно возбуждались поперечные изгибные

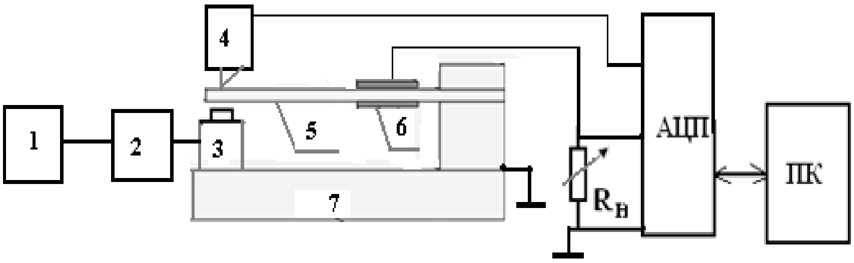


Рис. 5. Электрическая схема измерения и регистрации выходного напряжения: 1 — генератор сигналов, 2 — усилитель, 3 — электромагнитный возбудитель колебаний, 4 — оптический датчик РФ-603, 5 — подложка, 6 — пьезоэлементы, 7 — жесткое основание, АЦП — аналого-цифровой преобразователь, ПК — персональный компьютер, $R_{\text{Н}}$ — сопротивление нагрузки.

колебания в диапазоне частот до 144 Гц, регистрировались спектры амплитудно-частотных характеристик и определялись частоты резонансов различных мод колебаний. На трех выявленных самых низких резонансах были проведены измерения поперечных смещений подложки (балочки). Одновременно с этим регистрировались значения выходного напряжения с электродов пьезоэлементов ПГ (см. рис. 6) при двух различных значениях сопротивления электрической нагрузки ($R_{\text{Н}1} = 1{,}0$ мОм и $R_{\text{Н}2} = 1{,}13$ мОм). Было установлено, что максимальное выходное напряжение достигается на 3-й моде колебаний. Дальнейшие измерения проводились на резонансной частоте этой моды в точках балочки, отстоящих от защемления на расстояниях $L_{\text{изм}1} = 35$ мм и $L_{\text{изм}2} = 60$ мм.

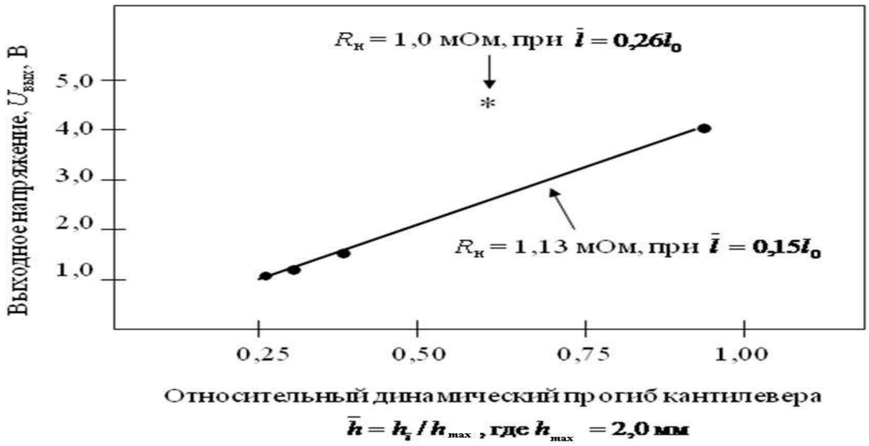


Рис. 6. Зависимость выходного напряжения ПГ (подложка $l_0 = 235$ мм, $b = 11$ мм, $t = 0.5$ мм) от динамического прогиба кантилевера на расстоянии $\bar{l}_1 = 0{,}15$ и $\bar{l}_2 = 0{,}26$ от защемления.

Из анализа данных (см. рис. 6) следует, что с ростом прогиба свободного конца балочки, выходное напряжение ПГ увеличивается (при колебаниях на 3-моде), причем его максимальная величина 4,2 В достигается при электрическом сопротивлении нагрузки 1,0 мОм. Из численного расчета (рис. 4) видно, что графики зависимостей амплитуды потенциала от импеданса нагрузки на всех трех исследованных частотах имеют нелинейный характер: при малых значениях нагрузки амплитуда растет, а при $R_{\text{Н}} > 3 \cdot 10^5$ Ом (для 3-й моды) ее рост прекращается и кривая зависимости становится пологой. Для 1-й и 2-й мод колебаний это происходит при больших значениях $R_{\text{Н}}$.

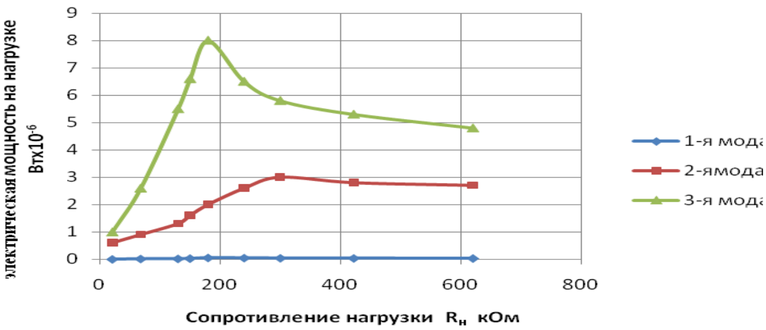


Рис. 7. Зависимость электрической мощности ПГ от сопротивления нагрузки $R_{\text{Н}}$ при $\delta = 2$ мм, (возбуждение электромагнитом на расстоянии 70 мм от заделки, съем напряжения с одной пьезопластины).

Максимальные значения амплитуды потенциала в КЭ-расчете (рис. 4) и в натурном эксперименте (рис. 6) мало отличаются друг от друга. Экспериментально были также выполнены измерения выходной мощности для трех различных мод колебаний ПГ (см. рис. 7), которые качественно подтвердили численные результаты. Из рис. 4 следует, что максимальный электрический потенциал ПГ, равный 4,5 В, достигается при нагрузке (импедансе) $R_{\text{Н}}$= 300–400 кОм на 3-й моде колебаний. При увеличении нагрузки до 1 мОм потенциал меняется слабо. В эксперименте было зарегистрировано выходное напряжение, равное 4,2 В при $R_{\text{Н}} = 1{,}0$ мОм (см. рис. 6). Расхождение численных и экспериментальных значений выходного напряжения ПГ составило 6,7 %. Причина расхождения заключается в том, что расчет был проведен для максимального смещения балочки, равного $h_{\max} = 2$ мм, а эксперимент для $h_{\max} = 1{,}8$ мм. Кроме того, расчет и эксперимент были проведены при разных значениях электрической нагрузки. С учетом этого результаты натурного эксперимента в целом согласуются с данными КЭ-расчета. Количественное несовпадение выходной мощности ПГ, полученной в КЭ-расчете (10^{-4} Вт), с ее экспериментальным значением (10^{-5} Вт) связано с различием пьезоэлектрических характеристик материалов, использованных в расчете, и пьезокерамики чувствительных элементов в натурном эксперименте.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 10-08-00093, 10-08-00136, 10-08-13300-РТ_оми, 12-08-01137-а, 12-01294-а).

Akopyan V. A., Parinov I. A., Rozhkov E. V., Shevtsov S. N. *Cantilever type piezoelectric generator study: FEM and test.* As a result of FEM and test analysis of electric physical parameters of the cantilever type piezoelectric generator (PG), the PG optimal parameters have been calculated allowing one to obtain maximal output power with high useful action factor.

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ В СИСТЕМАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Алексеев А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена изучению хаотических режимов движения в динамических системах с цилиндрической симметрией. В качестве примера такой системы была выбрана задача Куэтта–Тейлора. Система изучается в окрестности точки пересечения нейтральных кривых колебательной потери устойчивости в нерезонансном случае. Амплитудная система, соответствующая точкам такого типа, получена с помощью теории бифуркаций коразмерности-2 [1, 2] в системах с цилиндрической симметрией, была выписана в [3]. Равновесия моторной подсистемы, которым отвечают стационарные, периодические и квазипериодические режимы исходной системы уравнений Навье–Стокса, исследованы в [3]. Данная работа посвящена исследованию сложных режимов движения амплитудной системы. Установлено, что при определенных значениях параметров от равновесий общего положения может ответвляться предельный цикл, который претерпевает серию бифуркаций, приводящую к возникновению странного аттрактора.

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными цилиндрами радиусов r_1, r_2, вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно (задача Куэтта–Тейлора). Безразмерные уравнения движения (уравнения Навье–Стокса) записываются в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + Av = -\nabla p - R_1 L(v,v), \\ \nabla v = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $v = (v_r, v_\theta, v_z)$ — скорость течения, p — давление, r, θ, z — цилиндрические координаты, ось z направлена вдоль оси цилиндров, $R_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2/\nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости, $d = \eta - 1$ — безразмерный зазор между цилиндрами, $\eta = r_2/r_1$ — отношение радиусов цилиндров. Линейный оператор A и нелинейный оператор L определяются следующими дифференциальными выражениями:

$$\begin{aligned} (Av)_r &= -\Delta v_r + \frac{v_r}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \\ (Av)_\theta &= -\Delta v_\theta + \frac{\theta_r}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \\ (Av)_z &= -\Delta v_z, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ (L(v,u))_r &= v_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{v_\theta u_\theta}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L(v,u))_\theta &= v_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{v_\theta u_r}{r},\\
(L(v,u))_z &= v_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
\nabla &= (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial z}).
\end{aligned}$$

На твердых границах задано условие прилипания:

$$v_r=v_z=0, v_\theta=1/(\eta-1), r=1/(\eta-1),$$
$$v_r=v_z=0, v_\theta=\Omega\eta/(\eta-1), r=\eta/(\eta-1),$$

где $\Omega=\Omega_2/\Omega_1$ — отношение угловых скоростей вращения цилиндров.

Система (1) обладает группой симметрии $G=SO(2)\times O(2)$ — она инвариантна относительно вращений L_θ^δ, трансляций L_z^h и инверсии J, действующих на поле скоростей по правилам:

$$\begin{aligned}
(L_\theta^\delta v)(t,r,\theta,z) &= v(t,r,\theta+\delta,z),\\
(L_z^h v)(t,r,\theta,z) &= v(t,r,\theta,z+h),\\
(Jv)(t,r,\theta,z) &= (v_r(t,r,\theta,-z),v_\theta(t,r,\theta,-z),-v_z(t,r,\theta,-z))
\end{aligned}$$

для любых вещественных δ и h.

При всех значениях параметров система имеет точное решение с вектором скорости $v_0(r)=(0,v_{0\theta}(r),0)$ — течение Куэтта. Здесь:

$$v_{0\theta}=ar+b/r, a=\frac{R_2-R_1}{R_1(\eta^2-1)}, b=-\frac{R_2-R_1\eta^2}{R_1(\eta^2-1)d^2},$$

где $R_1=\Omega_1r_1^2d^2/\nu, R_2=\Omega_2r_2^2d^2/\nu$ — числа Рейнольдса.

Рассматривается случай потери устойчивости течением Куэтта, при котором в спектре устойчивости находятся две пары чисто мнимых собственных значений. Это соответствует пересечению двух нейтральных кривых колебательной потери устойчивости. В указанном случае линеаризованная на течении Куэтта задача устойчивости имеет четыре независимые нейтральные моды:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= e^{-i(\omega_m t+m\theta+k\alpha z)}\phi_{00}(r),\\
\Phi_{01} &= e^{-i(\omega_m t+m\theta-k\alpha z)}\phi_{01}(r),\\
\Phi_{10} &= e^{-i(\omega_n t+n\theta+l\alpha z)}\phi_{10}(r),\\
\Phi_{11} &= e^{-i(\omega_n t+n\theta-l\alpha z)}\phi_{11}(r),
\end{aligned} \tag{2}$$

взаимодействие которых в малой окрестности точки пересечения может приводить к появлению разнообразных режимов движения.

В окрестности точки пересечения с помощью теоремы о центральном многообразии [1, 2] можно построить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд нейтральных мод (2). В рассматриваемом случае (отсутствие резонансных соотношений между азимутальными и осевыми квантовыми числами и между фазовыми частотами) амплитудная система содержит только члены, отвечающие обязательным резонансам, и имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi_{00}} &= \xi_{00}(\sigma + A|\xi_{00}|^2 + B|\xi_{01}|^2 + C|\xi_{10}|^2 + D|\xi_{11}|^2),\\
\dot{\xi_{01}} &= \xi_{01}(\sigma + B|\xi_{00}|^2 + A|\xi_{01}|^2 + D|\xi_{10}|^2 + C|\xi_{11}|^2),\\
\dot{\xi_{10}} &= \xi_{10}(\mu + P|\xi_{00}|^2 + S|\xi_{01}|^2 + U|\xi_{10}|^2 + V|\xi_{11}|^2),\\
\dot{\xi_{11}} &= \xi_{11}(\mu + S|\xi_{00}|^2 + P|\xi_{01}|^2 + V|\xi_{10}|^2 + U|\xi_{11}|^2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Комплексные коэффициенты σ, μ, A, B, C, D, P, S, U, V системы (3) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач.

Устойчивость семейств равновесий системы (3) удобно исследовать, используя моторную подсистему (систему для инвариантов групп симметрии, которыми в данном случае являются модули комплексных амплитуд), которая запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho_{00}} &= \rho_{00}(\sigma_r + A_r|\rho_{00}|^2 + B_r|\rho_{01}|^2 + C_r|\rho_{10}|^2 + D_r|\rho_{11}|^2),\\
\dot{\rho_{01}} &= \rho_{01}(\sigma_r + B_r|\rho_{00}|^2 + A_r|\rho_{01}|^2 + D_r|\rho_{10}|^2 + C_r|\rho_{11}|^2),\\
\dot{\rho_{10}} &= \rho_{10}(\mu_r + P_r|\rho_{00}|^2 + S_r|\rho_{01}|^2 + U_r|\rho_{10}|^2 + V_r|\rho_{11}|^2),\\
\dot{\rho_{11}} &= \rho_{11}(\mu_r + S_r|\rho_{00}|^2 + P_r|\rho_{01}|^2 + V_r|\rho_{10}|^2 + U_r|\rho_{11}|^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Системы (3), (4) выписаны в работе [3], там же приведены формулы для расчета коэффициентов и рассмотрены равновесия системы (4), которым отвечают стационарные, периодические и квазипериодические режимы исходной системы уравнений Навье–Стокса.

Согласно результатам этой работы, у системы (4) имеется однопараметрическое семейство равновесий общего положения при выполнении условия

$$(A_r - B_r)(U_r - V_r) - (C_r - D_r)(P_r - S_r) = 0.$$

Заметим, что система вида (3) возникает в целом ряде задач с цилиндрической симметрией, в частности, задаче Куэтта–Тейлора с вторичными эффектами, такими как влияние температуры, магнитного поля, проницаемости цилиндров и т. д. Все эти эффекты оказывают влияние на значения коэффициентов системы, но не на ее вид. Следовательно, система (3) заслуживает рассмотрения при произвольных значениях коэффициентов.

Проследим эволюцию одного равновесия $(\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}, \rho_{11})$, где

$$\begin{aligned}
\rho_{00}^2 + \rho_{01}^2 &= 2\frac{-\sigma_r(U_r + V_r) + \mu_r(C_r + D_r)}{(A_r + B_r)(U_r + V_r) - (C_r + D_r)(P_r + S_r)},\\
\rho_{10}^2 + \rho_{11}^2 &= 2\frac{\sigma_r(P_r + S_r) - \mu_r(A_r + B_r)}{(A_r + B_r)(U_r + V_r) - (C_r + D_r)(P_r + S_r)},\\
\rho_{00}^2 - \rho_{01}^2 &= -\frac{C_r - D_r}{A_r - B_r},\\
\rho_{10}^2 - \rho_{11}^2 &= 1,
\end{aligned}$$

для системы со следующими значениями коэффициентов:

$$A_r = -0.625, B_r = 1.1, C_r = 1.3, D_r = -1.0,$$
$$P_r = -1.0, S_r = -0.4, U_r = 0.2, V_r = -0.6, \sigma_r = -10.0.$$

При $\mu_r = 22.646$ равновесие теряет устойчивость с рождением предельного цикла. При $\mu_r = 22.872$ предельный цикл претерпевает бифуркацию удвоения периода. При дальнейшем увеличении параметра μ_r цикл претерпевает серию последовательных бифуркаций удвоения периода, которая приводит к возникновению странного аттрактора при $\mu_r = 22.94$, существующего в диапазоне $22.94 \leqslant \mu_r \leqslant 23.181$.

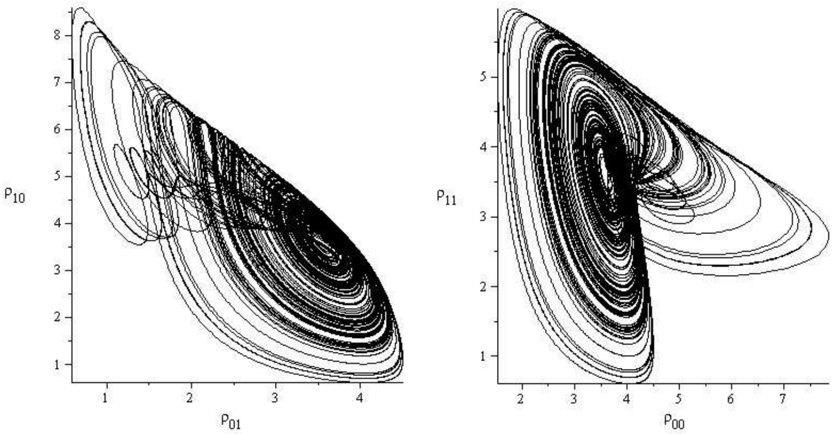


Рис. 1. Странный аттрактор в системе (4).

Проекции аттрактора на координатные плоскости при $\mu_r = 23.176$ изображены на рис. 1. Для данного аттрактора вычислялись показатели Ляпунова по стандартному алгоритму. Критерием хаотичности поведения траекторий считалась положительность старшего показателя Ляпунова, в то время как сумма показателей оставалась отрицательной (условие диссипативности системы).

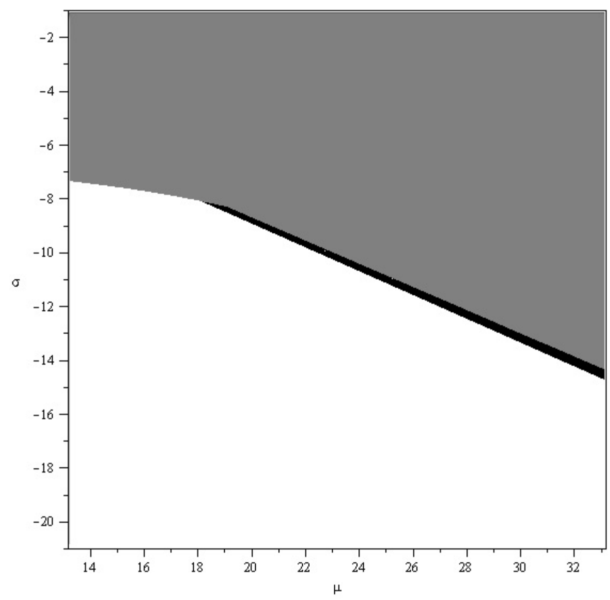


Рис. 2. Область существования странного аттрактора в плоскости (μ_r, σ_r).

На рис. 2 черным цветом показана область существования аттрактора в плоскости параметров (μ_r, σ_r). Видно, что она разделяет области регулярного движения (белый цвет) и выхода траекторий на бесконечность (серый цвет), что является довольно типичной ситуацией.

Также для системы (4) проводился поиск странных аттракторов с использованием процедуры, описанной в [4], т. е. для каждого коэффициента выбирался некоторый диапазон изменения, и затем производилось интегрирование системы методом Рунге–Кутта с вычислением показателей Ляпунова. При этом странных аттракторов, отличных от описанного выше (с точностью до алгебраической эквивалентности), на момент написания статьи обнаружено не было.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту И. В. Моршневой и доценту С. Н. Овчинниковой за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007–2013 гг. (госконтракт 16.516.11.6106) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдович В. И.* Переходы и возникновения хаоса в течениях жидкости // Аннотации докладов 6-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.

[2] *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. New York: Springer-Verlag, 1994. 233 p.

[3] *Юдович В. И., Овчинникова С. Н.* Пересечение бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. I. Нерезонансный случай. Деп. в ВИНИТИ 5.04.05, № 458-B2005, 33 с.

[4] *Sprott J. C.* Some simple chaotic flows // Physical Review E. 1994. V. 50. Pp. R647–R650.

Alexeev A. A. *Strange attractors in dynamical systems with cylindrical symmetry.* The paper is devoted to investigations of complex flow regimes near codimension-2 bifurcation points, corresponding to intersections of oscillating instabilities in the Couette–Taylor problem. These flow regimes correspond to non-equilibrium solutions of amplitude system, constructed by V. I. Yudovich, G. Iooss and P. Chossat, namely periodic, quasiperiodis and chaotic. One strange attractor in the amplitude system has been found, its characteristics are given.

БЕСПРОВОДНЫЙ ПАССИВНЫЙ ДАТЧИК НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Багдасарян А. С.[*], Багдасарян С. А.[****], Богданов М. И.[***], Днепровский В. Г.[**], Карапетьян Г. Я.[**], Петин Г. П.[***]

[*] *Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва*
[**] *НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*
[***] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
[****] *ООО «Научно-производственное предприятие "Технологии радиочастотной идентификации и связи"», Москва*

Рассмотрен пассивный беспроводный датчик на поверхностных акустических волнах (ПАВ) для измерения полной диэлектрической проницаемости жидкости на основе изменения коэффициента отражения ПАВ от отражательного встречно-штыревого преобразователя (ВШП), нагруженного на специальную измерительную емкость. Разработана схема опрашивающего устройства, состоящего из приемника и передатчика.

В последнее время заметно возрос интерес к применению технологии поверхностных акустических волн для мониторинга физических величин, ввиду возможности приема сигнала без использования механических и электрических соединений. Это позволяет осуществлять съем полезной информации в режиме «online» оператором или пользователем, который может находиться на некотором расстоянии от контролируемого объекта, а также предоставляет возможность вести обработку данных большого количества объектов с использованием вычислительных и программных средств. Немаловажным является и тот факт, что такие датчики могут выполняться в пассивном варианте, т. е. передавать информацию за счет отраженного сигнала [1, 2].

В настоящей работе рассмотрен пассивный беспроводный датчик на ПАВ для измерения полной диэлектрической проницаемости жидкости на основе изменения коэффициента отражения от отражательного ВШП, нагруженного на специальный измерительный конденсатор, имеющий зазор, который может заполняться измеряемой жидкостью. При этом меняется емкость конденсатора и, как следствие, коэффициент отражения ПАВ от отражательного ВШП, что приводит к изменению амплитуды отраженного от датчика опрашивающего импульса.

Датчик представляет собой двухканальную линию задержки на ПАВ. Первый канал этой линии содержит приемо-передающий ВШП, соединенный с антенной, отражательный однонаправленный ВШП и управляющий ВШП, нагруженный на внешний импеданс, значение которого зависит от измеряемой физической величины, а второй канал содержит только приемо-передающий ВШП и отражательный ВШП. Приемо-передающие ВШП обоих каналов соединены параллельно.

Так как условия распространения ПАВ в каналах различны, то они приходят на приемо-передающие ВШП с разными фазами. Поскольку приемо-передающие

ВШП различных каналов соединены параллельно, амплитуда отраженного от датчика опросного импульса будет зависеть от фазы пришедших на них ПАВ. Следовательно, она будет зависеть и от значений импеданса, подсоединенного к управляющему ВШП. Следует отметить, что в наших экспериментах максимальное изменение скорости ПАВ под управляющими ВШП достигало 1%. На рис. 1 показана реализация одной из конструкций предлагаемого датчика для измерения параметров жидкости. Тогда коэффициент прохождения K_p ПАВ под ВШП и коэффициент отражения K_r ПАВ от ВШП соответственно равны:

$$K_p = \frac{-wC_T - B_a + jY_H}{-wC_T - B_a + j(Y_H + G_a)}\,, \tag{1}$$

$$K_r = \frac{jG_a}{-wC_T - B_a + j(Y_H + G_a)},$$

где G_a и B_a — активная и реактивная составляющие проводимости излучения, C_T — емкость ВШП, f — частота сигнала, $w = 2\pi f$.

Из выражений (1) видно, что коэффициент прохождения и отражения зависят от внешней нагрузки Y_H, подключаемой к ВШП, причем максимальное влияние внешняя нагрузка оказывает тогда, когда выполняется условие

$$-wC_T - B_a + j[jIm(Y_H)] \approx 0. \tag{2}$$

где Y_H — мнимая составляющая проводимости нагрузки. Для выполнения условия (2) необходимо, чтобы мнимая составляющая имела бы индуктивный характер.

Для уменьшения отражения ПАВ от ВШП можно использовать вложенные друг в друга секционированные ВШП, как это сделано в однонаправленных ВШП группового типа со сдвижкой фазы 90° [3]. В этом случае ПАВ отраженные от каждой секции будут находиться в противофазе, поскольку центры секционированных ВШП сдвинуты на четверть длины ПАВ на рабочей частоте, что приведет к значительному уменьшению отражения ПАВ от такого составного ВШП.

Как следует из (1), коэффициенты отражения и прохождения практически не будут зависеть от нагрузки вдали от полосы пропускания ВШП, поскольку G_a там будет близка к нулю и коэффициент отражения будет почти нулевым, а коэффициент прохождения будет близок 1 при любых внешних нагрузках.

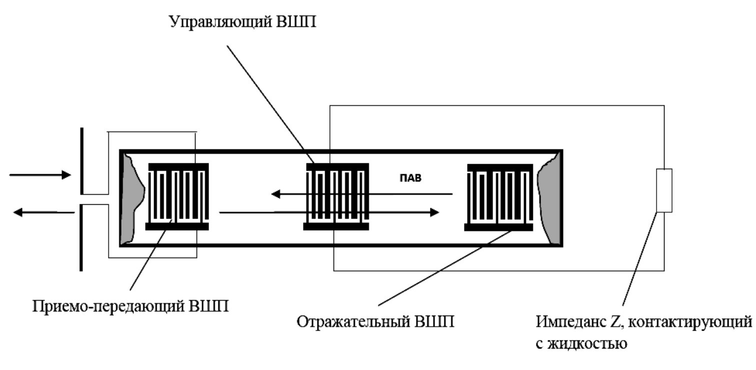


Рис. 1. Датчик физической величины для измерения параметров жидкости.

Можно также использовать однонаправленный ВШП с внутренними отражателями [4]. При этом фаза отражения от внутренних отражателей не зависит от внешней нагрузки, в то время как фаза отражения от активных электродов зависит от нее, что приводит к изменению сдвига фазы между ПАВ, отраженными от внутренних отражателей и активных электродов, в зависимости от внешней нагрузки (рис. 2). Т. е. здесь будет происходить управление фазой ПАВ, но только для отраженных ПАВ.

На рис. 3а показана зависимость коэффициента отражения от величины активной нагрузки. Видно, что на этой зависимости имеется минимум отражения, что объясняется согласованием импеданса ВШП с 50-омной нагрузкой, т. е. большая часть энергии ПАВ выделяется на нагрузочном сопротивлении.

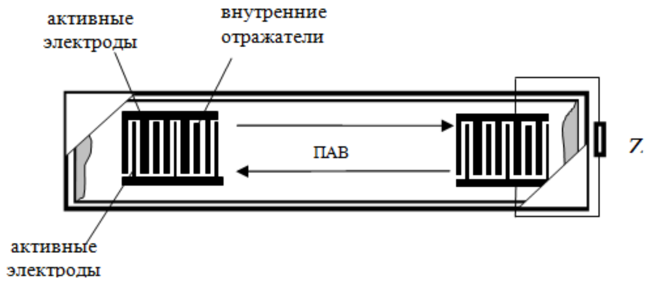


Рис. 2. Датчик на ПАВ с однонаправленными ВШП.

Из этой зависимости видно, что величина коэффициента отражения для короткозамкнутого и разомкнутого однонаправленного ВШП стремится к 1, о чем и говорилось выше. Коэффициенты отражений определялись по частотной зависимости импеданса ВШП из-за отражений ПАВ с последующим Фурье-преобразованием [5].

Если импеданс $Z = jwL + 1/jwC$, внешняя индуктивность и емкость подобраны таким образом, чтобы резонанс наступил на частоте, попадающую в полосу пропускания ВШП При $L = 0{,}76$ мкГн величина емкости C будет находиться в пределах 2–4 пФ. На рис. 3b показана зависимость коэффициента отражения от изменения емкости в составе LC-цепи, подключенной к ВШП. Как видно из этого рисунка, зависимость коэффициента отражения от емкости получается более сильная, чем от сопротивления, что объясняется наличием сдвига фаз между ПАВ, отраженных от внутренних отражателей и от активных электродов. Этот сдвиг приближается к 180° при емкости, равной 3,1 пФ, т. е. отраженные ПАВ от отражателей и активных электродов будут частично компенсировать друг друга. Такая резкая зависимость коэффициента отражения от емкости может использоваться для определения диэлектрической проницаемости жидкости.

На рис. 3с показана зависимость коэффициента отражения от глубины погружения измерительного конденсатора в дистиллированную воду и изопропиловый спирт. Как видно из этого рисунка при полном погружении конденсатора в воду или в изопропиловый спирт соответствующие коэффициенты отражения получаются разными, что объясняется разными диэлектрическими проницаемостями воды и изопропилового спирта. Наличие максимума на зависимости коэффициента отражения для воды объясняется, по-видимому, тем, что вода на высоких

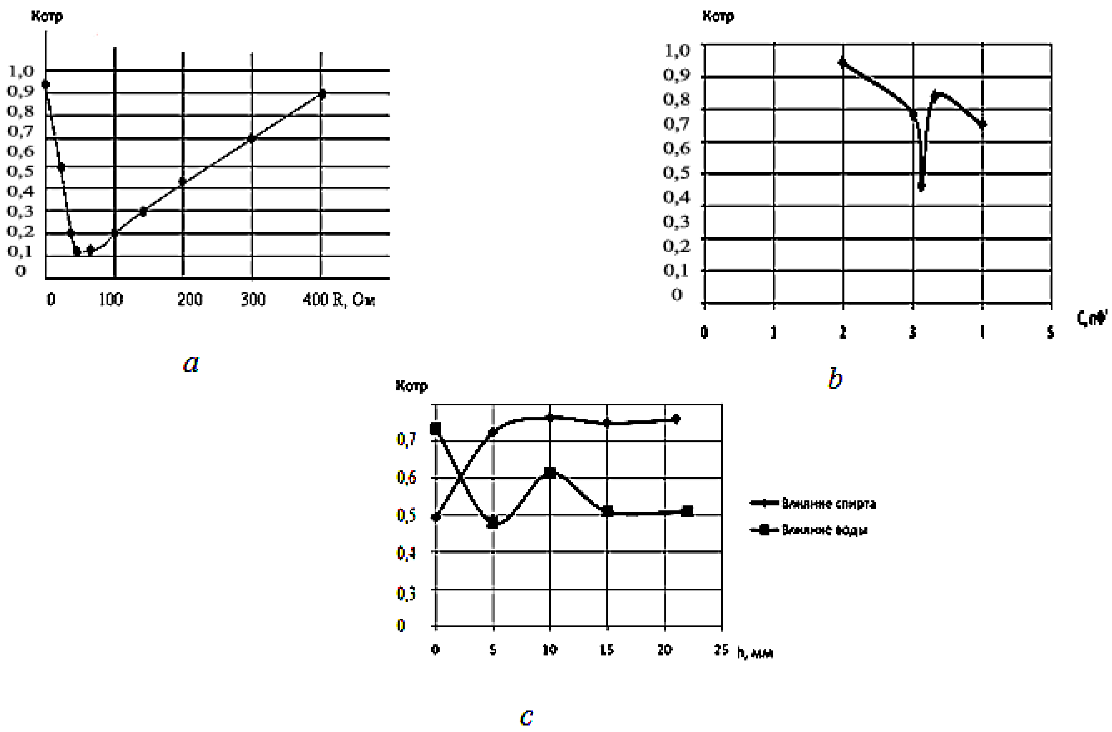


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от однонаправленного ВШП от величины подключаемой нагрузки: a — активная нагрузка; b — емкостная нагрузка; c — измерительный конденсатор.

частотах имеет значительные диэлектрические потери. Как показано [6] в воде диэлектрическая проницаемость на этих частотах имеет комплексный характер и мнимая составляющая диэлектрической проницаемости всего в 2 раза отличается от действительной составляющей, в то время как для изопропилового спирта это соотношение в десятки раз меньше.

На рис. 4 и 5 представлены блок-схемы цифрового передатчика и гетеродинного приемника опрашивающего устройства, разработанные на рабочую частоту 433,9 МГц.

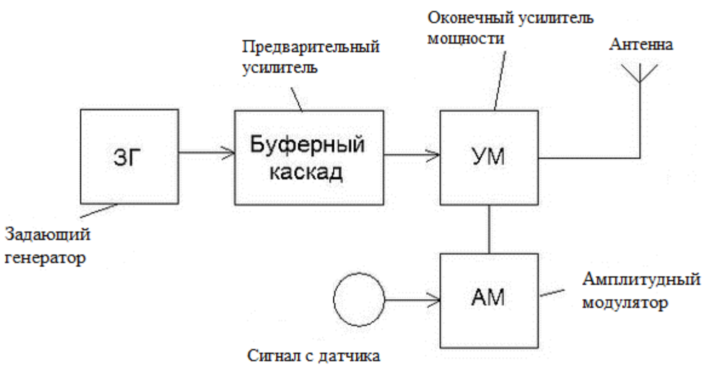


Рис. 4. Блок-схема цифрового передатчика.

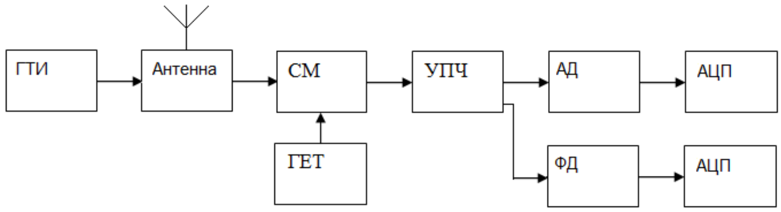


Рис. 5. Блок-схема гетеродинного приемника: ГТИ — генератор тактовых импульсов, СМ — смеситель, ГЕТ — гетеродин, УПЧ — усилитель промежуточной частоты, АД — амплитудный детектор, ФД — фазовый детектор, АЦП — аналого-цифровой преобразователь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-08-00700-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ville Viikari, Heikki Seppa and Dong-Wook Kim.* Intermodulation Read-Out Principlefor Passive Wireless Sensors // IEEE TRANSACTIONS on MICROWAVE THEORY and TECHNIQUES, vol. 59, 2011. № 4. Pp. 1025–1031.

[2] *Днепровский В. Г., Карапетьян Г. Я.* Датчики на поверхностных акустических волнах для контроля физических параметров жидких сред // Материалы XIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009. С. 72–75.

[3] *K. Yamanouchi, F. M. Nyffeler and K. Shibayama.* Ultrasonics Symp., 1975, Pp. 317–321.

[4] *Карапетьян Г. Я., Багдасарян С. А., Багдасарян Н. А.* Однонаправленный преобразователь поверхностных акустических волн // Патент РФ на изобретение 2195069., приоритет 08.04.2002 г., БИ№35, 2002.

[5] *Карапетьян Г. Я., Днепровский В. Г.* Труды XI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 2007 г., С. 153–156.

[6] *Скворцов Б. В., Силов Е. А.* Известия Самарского научного центра Российской академии наук // Материалы XIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» Т. 11, № 5, 2009, С. 64–71.

Bagdasaryan A. S., Bagdasarian S. A., Bogdanov M. I., Dneprovski V. G., Karapetyan G. J., Petin G. P. *Wireless passive sensor for surface acoustic waves for the measurement of physical parameters*. The passive wireless sensor based on surface acoustic waves (SAW) to measure the full permittivity of liquid on the basis of reflection coefficient of the reflective SAW interdigital transducer (IDT), loaded on a special measuring capacitance, is considered. The scheme of the interrogation device consisting of a receiver and transmitter is developed.

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ И ПРИЛОЖЕНИЕ К НАНОТРУБКЕ

Батищев В. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изучается течение вязкой жидкости в нанотрубке, диаметр которой более тридцати нанометров. Построены асимптотические разложения решения системы Навье–Стокса по степеням малого числа Рейнольдса. Скольжение жидкости в тонком слое получено в [1]. В случае длинной трубки найдено решение задачи в общем виде через скорость скольжения $U_z(z_1)$, где z_1 медленная осевая переменная. Главный член асимптотики для осевой компоненты скорости получен в явном виде

$$\mathrm{v_z} = U_0 + (1 - 2U_0)\left(1 - r^2\right) + \left(U_S(z_1) - U_0\right)\left(2r^2 - 1\right).$$

Здесь $U_0 = const$ — средняя скорость скольжения, второе слагаемое — скорость течения Пуазейля, а третье слагаемое — компонента скорости с нулевым расходом и нулевой средней скоростью, описывает дефекты стенки. Получено условие на твердой стенке, связывающее скорость и касательное напряжение, которое не совпадает с известным условием скольжения Навье. Рассмотрен случай постоянной скорости скольжения $U_S = U_0$. Показано, что с ростом скорости скольжения сопротивление трения на стенке уменьшается, а большое давление в трубке падает и становится конечным при $U_0 \to 1/2$. При $U_0 \to 1/2$ возникает «полное» скольжение с нулевым сопротивлением и постоянным конечным давлением. Рассмотрен случай трубки конечной длины. Осевая компонента скорости представлена в таком же виде, как и в случае длинной трубки, однако третье слагаемое получено в виде ряда Фурье, коэффициенты которого рассчитаны численно, путем решения краевых задач для дифференциальных уравнений. При постоянной скорости скольжения эффекты такие же, как и в трубке большой длины. Условие на твердой стенке, связывающее скорость и касательное напряжение, в общем случае нелинейно, однако в частных случаях совпадает с условием скольжения Навье.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Tompson P. A., Troian S. M.* A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces // Nature. 1997. V.39. Pp. 360–362.

Batischev V. A. *Fluid flow with slip and it application to nanotube.* In this paper, the stream of viscous fluid in cylindrical tube with slip condition on the boundary of tube is investigated. We obtained that he pressure and coefficient of friction can be decrease with the increase the velocity of slip.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАВНОВЕСИЯ БАЛКИ ИЗ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЕЕ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ И РАСТЯЖЕНИИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

Бахарева Е. А., Стружанов В. В.
Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

В констукциях, выполненных из разупрочняющихся материалов, возможно несколько положений равновесия как устойчивых, так и неустойчивых. В данной работе рассматривается балка произвольного поперечного сечения, симметричного относительно вертикальной оси, подвергнутая изгибу и продольному растяжению. Свойства материала описываются полной диаграммой деформирования. Расчет параметров всех равновесий балки проводится методом Ньютона–Канторовича для решения операторного уравнения равновесия. Предложена численная схема выбора начального приближения. Продемонстрировано построение сепаратрисы системы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим достаточно длинную балку высотой $2h$. Введем относительно балки декартову систему координат следующим образом: вдоль балки расположена продольная ось Ox (средняя линия), вертикальная ось Oy направлена вниз, и Oz перпендикулярна плоскости Oxy. Поперечное сечение балки, лежащее в плоскости Oyz, ограничивает контур $\Gamma(y)$, симметричный относительно вертикальной оси Oy. Нагружение осуществляем изотермически, прикладывая одновременно к торцам балки изгибающий момент M и растягивающее продольное усилие Q (рис. 1).

Для данной механической системы единственной ненулевой компонентой тензора напряжений является продольное напряжение $\sigma_x = \sigma(y)$, а продольные деформации линейно распределены по высоте балки $\varepsilon_x = \varepsilon(y)$ [1].

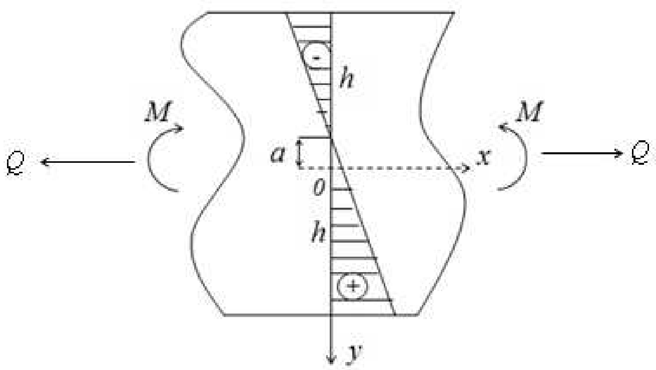


Рис. 1. Схема нагружения. Распределение продольных деформаций.

Из–за геометрической несимметрии балки ее нейтральная ось, где нулевые напряжения и деформации, не совпадает со средней линией Ox. Обозначим символом

a расстояние между нейтральной осью и средней линией. Тогда полные деформации определяет линейная функция $\varepsilon(y) = \kappa(y + a)$.

Так как рассматриваемая модель одномерная, то свойства материала определяет полная диаграмма деформирования $\sigma(\varepsilon)$, обладающая восходящей и падающей ветвями. Предполагаем, что свойства материала при растяжении и при сжатии одинаковы. В этом случае диаграмма симметрична относительно начала координат. Непрерывная функция касательного модуля (модуль тангенциальной жесткости) $E^p = d\sigma/d\varepsilon$ характеризует наклон диаграммы и определяет состояние материала: на восходящем участке ($E^p > 0$) материал находится в состоянии упрочнения, на ниспадающем ($E^p < 0$) — в состоянии разупрочнения. Во втором случае имеет место собственная неустойчивость материала.

В задаче о чистом изгибе и растяжении уравнения равновесия и условия совместности удовлетворяются тождественно. Интегральные условия имеют вид [2]:

$$2\int_{-h}^{h} \Gamma(y)\sigma(y)dy = Q, \qquad 2\int_{-h}^{h} \Gamma(y)\sigma(y)y dy = M. \tag{1}$$

Равенства (1) также играют роль статических уравнений равновесия и должны удовлетворяться в каждом поперечном сечении балки.

Соотношения (1) можно рассматривать в виде операторного уравнения

$$\Phi(a, \kappa; Q, M) = 0, \tag{2}$$

связывающего параметры управления (Q, M) и параметры состояния (a, κ) системы. Отображение Φ, вообще говоря, есть нелинейный векторный оператор. Поэтому (2) можно представить в виде системы уравнений

$$\Phi_1(a, \kappa) = Q, \qquad \Phi_2(a, \kappa) = M. \tag{3}$$

Φ ставит в соответствие элементу из двумерного евклидова пространства состояний $E_S^2 = \{(a, \kappa) : 0 \leqslant a \leqslant a_Z, 0 \leqslant \kappa \leqslant \kappa_Z\} \subseteq \mathbf{R}^2$ элемент из евклидова пространства управлений $E_C^2 = \{(Q, M) : Q \geqslant 0, M \geqslant 0\} \subseteq \mathbf{R}^2$. Здесь расстояние a_Z от нейтральной оси до средней линии и кривизна κ_Z отвечают деформации ε_Z разрушения крайних наиболее растянутых волокон балки.

2. Свойства отображения Φ. В связи с введением в рассмотрение падающего участка диаграммы деформирования отображения Φ_1 и Φ_2 не является взаимно–однозначными на всем пространстве E_S^2. Поэтому имеет место локальный гомеоморфизм, который приводит к сужению области определения $\widetilde{E}_C^2 \subset E_C^2$ операторов Φ_1^{-1} и Φ_2^{-1}.

Отображение Φ гомеоморфно только на той области пространства состояний, где якобиан матрицы, совпадающий с сильной производной Фреше,

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial a} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\kappa} \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial a} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\kappa} \end{pmatrix} \tag{4}$$

не обращается в нуль.

Точки, где якобиан равен нулю, в пространстве состояний образуют линии Γ_1 и Γ_2 (рис. 2), разделяющие плоскость $\Omega = \{(a, \kappa) : 0 \leqslant a \leqslant a_Z, 0 \leqslant \kappa \leqslant \kappa_Z\}$ на области, в которых матрица (4) либо положительно определенная (область I'), либо отрицательно определенная (область III'), либо не является знакоопределенной (область II'). На Ω уравнение (2) при фиксированных значениях M и Q задает некоторую поверхность, которая имеет участки, где поверхность выпуклая, вогнутая и набор седловых точек.

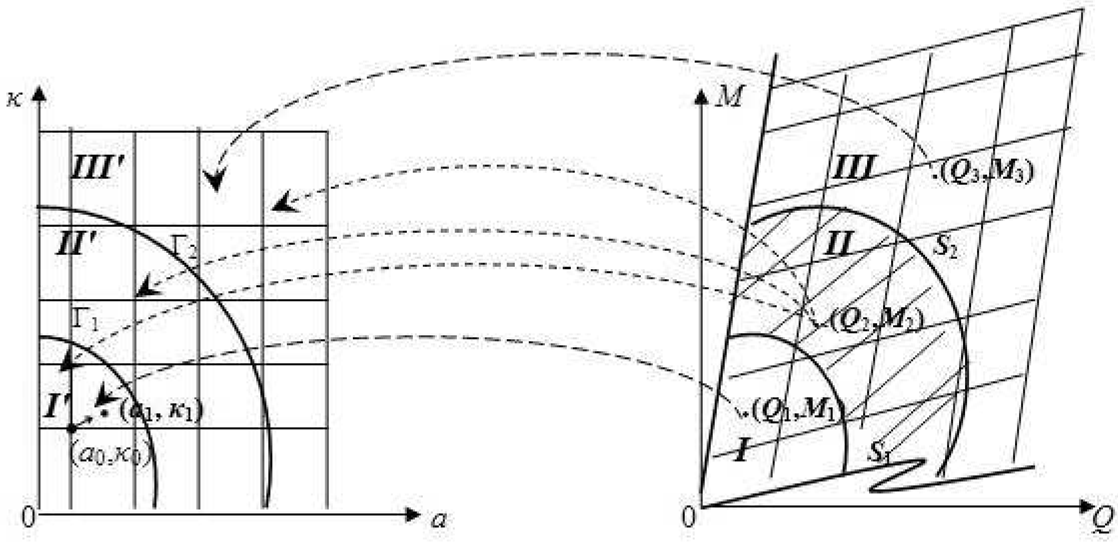


Рис. 2. Схема итерационного процесса.

Отображая множества точек Γ_1 и Γ_2 на пространство управляющих параметров $\widetilde{E}^2_C$ с помощью уравнений (3), получаем сепаратрису механической системы S_1 и S_2 на (рис. 2). Сепаратриса разделяет пространство на области, в которых система имеет либо одно положение равновесия — области I и III, либо три положения равновесия — область II. Причем область I' переходит в область I и далее соответственно. Таким образом, для точек из областей I' и III' пространства существует только один прообраз в пространстве E^2_S, отвечающие единственному решению уравнения (2). А для точек из области II' по три прообраза (уравнение (2) имеет три решения).

3. Метод Ньютона–Канторовича. Для решения уравнения (2), задающего зависимость параметров управления (Q, M) от параметров состояния (a, κ), применим итерационный метод Ньютона–Канторовича, в котором используется последовательная линеаризация нелинейных уравнений [3]. В данной задаче схема Ньютона–Канторовича реализуется следующим образом. Допустим, что для заданных $M > 0$ и $Q > 0$ приближение $x_n = (a_n, \kappa_n) \in E^2_S$ найдено. Тогда для отыскания последующего приближения x_{n+1} уравнение (2) заменим линеаризованным в точке x_n векторным уравнением

$$\Phi(x_n; Y) + \Phi'(x_n; Y)(x - x_n) = 0,$$

где $Y = (Q, M) \in \widetilde{E}^2_C$. Если существует линейный обратный оператор $[\Phi'(x_n; Y)]^{-1}$, то есть матрица (4) не вырождена, то приходим к следующему выражению для x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi'(x_n; Y)]^{-1}\Phi(x_n; Y). \tag{5}$$

Для реализации процедуры (5) необходимо выбирать такие начальные приближения x_0, начиная с которых метод Ньютона–Канторовича сходится. Рациональный выбор начального приближения возможен, если известна, так называемая, область притяжения корня — такая окрестность корня x^*, при любом выборе начального приближения x_0 из которой, последовательность (5) сходится к решению x^*.

Для определения начального приближения и соответствующей области притяжения для заданной нагрузки Y проводится следующая численная процедура. Сначала области I', II' и III' в пространстве E_S^2 разбиваются мелкой прямоугольной сеткой. Далее узлы сетки отображаются с помощью уравнений (3) в пространство $\widetilde{E}_C^2$ управлений. Проводя через полученные точки прямые линии параллельно друг другу, получаем сетку (уже не прямоугольную), разбивающую области I, II и III. Причем в области II происходит наложение точек (здесь поверхность (2) относительно M и Q имеет сборку [4]).

Пусть выбрали нагрузку $Y_1 = (Q_1, M_1) \in I$. Любая точка из I имеет только один прообраз в I'. Поэтому перебирая узлы сетки, лежащие в области I', находим тот узел, образ которого наиболее близок к точке Y_1. Координаты этого узла принимаем за начальное приближение $x_0 = (a_0, \kappa_0)$. Затем для x_0 применяем процедуру (5) до тех пор, пока для невязки не выполнится следующее условие $\|x_{n+1} - x_n\| < \delta$, где $\delta > 0$ — некоторая малая величина, x_{n+1} и x_n последовательные приближения. Здесь норму для определенности примем евклидову. В результате находим x^* — решение уравнения (2). На типичной диаграмме $\kappa \sim a$ (рис. 3), получаемой в результате расчетов положений всех равновесий балки с заданным поперечным сечением, это решение лежит на первом восходящем участке OK. Областью притяжения в данном случае будет окрестность точки x^*, содержащая начальное приближение. Схематично данная процедура представлена на (рис. 2).

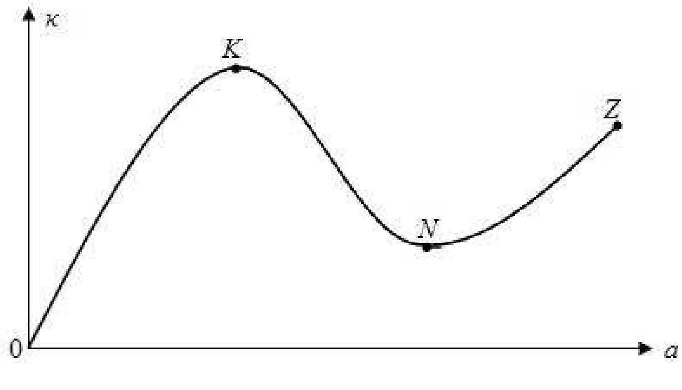


Рис. 3. Типичная диаграмма $\kappa \sim a$.

Пусть теперь нагрузка $Y_2 = (Q_2, M_2) \in II$. Точка Y_2 в пространстве E_S^2 имеет три прообраза, лежащих во всех трех областях. Поочередно отображаем все узлы сетки на плоскости Ω в пространство E_S^2 и выбираем по одной точке из каждой области I', II' и III' такие, что их образы наиболее близки к Y_2. Полученные три начальных приближения используются для нахождения корней (2) с помощью итерационной процедуры (5). В результате имеем три равновесных состояния: первое из них отвечает точке на восходящей ветви OK диаграммы $a \sim \kappa$ (рис. 3), второе — на падающем участке KN и, наконец, третье принадлежит второму восходящему участку NZ.

Если параметры управления $Y_3 = (Q_3, M_3) \in III$, то решение полностью повторяет первую рассмотренную ситуацию, только примененную к областям III и III'. Решение здесь соответствует точке на участке NZ эпюры $\kappa \sim a$.

Рассмотрим отдельно случаи, когда приложенная нагрузка отвечает точке на сепаратрисе S_1 или S_2 и метод Ньютона–Канторовича вырождается, так как в таких точках якобиан матрицы (4) нулевой. Для нахождения соответствуюших параметров состояния используется следующая процедура. Кривые Γ_1 и Γ_2 делятся на равные сегменты. Пусть для определенности нагрузка $Y^* = (Q^*, M^*) \in S_1$. Тогда узлы одномерной сетки, покрывающей Γ_1, отображаются с помощью уравнений (3) в пространство E_C^2 и выбирается узел $x^* = (a^*, \kappa^*) \in \Gamma_1$, образ которого лежит наиболее близко к точке Y^*. Далее рассматривается только участок между ближайшими узлами, окружающими x^*. На этом промежутке можно применять метод деления отрезка пополам (метод дихотомии) [5] для нахождения корней нелинейных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-96018).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

[2] *Бахарева Е. А.* Итерационный метод расчета параметров равновесия при чистом изгибе симметричного относительно продольной оси сечения из материала с падающей диаграммой // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Ч. 4. 2011. № 4. С. 1394–1395.

[3] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

[4] *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.

[5] *Березин И. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 630 с.

Bakhareva E. A., Struzhanov V. V. *The equilibrium parameters calculation of a beam made of a weakening material under pure bending and tension by Newton–Kantorovich method.* A few equilibrium positions is possible in constructions from weakening material. This article is concerned with the beam of symmetric cross–section relative to the longitudinal axis. The beam is exposed to pure bending and axial tension. The material properties are described by a complete deformation curve. The calculation of all equilibrium parameters of the beam is carried out by Newton–Kantorovich method for equilibrium operator equations. An initial estimate choice numerical plan is proposed. The building of separatrix of the mechanical system is illustrated.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ПОВЕРНУТОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Белоконь А. В.[*], Болгова А. И.[**]
[*]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
[**]*Южно-Российский государственный технический университет (НПИ), Новочеркасск*

Рассмотрена задача о вдавливании полосового жесткого штампа в границу упругого анизотропного полупространства в системе координат, повернутой относительно главных кристаллографических осей. Вначале рассматривается случай, когда на границу действуют нормальные и касательные напряжения, не зависящие от координаты, совпадающей с осью полосы. Полученное решение используется для построения интегрального уравнения, из которого определяется контактное давление. Определена зависимость контактных давлений от угла, на который повернут полосовой штамп, и произведено сравнение с задачей, когда угол поворота равен нулю. Последняя задача является плоской и зависит от двух компонент перемещения, в то время как задача в повернутой относительно главных кристаллографических осей системе координат содержит все три отличные от нуля компоненты перемещений.

Пусть анизотропная среда занимает область $\Pi = \{|x_1| < \infty, |x_2| < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$, и в главных кристаллографических осях матрица упругих коэффициентов представима в виде (1.а). Осуществим теперь поворот системы координат $\{x\}$ на угол θ вокруг оси x_3, тогда в новой системе координат $\{y\}$ матрица упругих постоянных принимает вид (1.б)

$$\underset{(\text{а})}{\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{Vmatrix}} \qquad \underset{(\text{б})}{\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} \end{Vmatrix}} \tag{1}$$

причем связь между коэффициентами матриц упругих постоянных в новой и старой системах координат дается формулами:

$$a_{11} = c_{11}\cos^4\theta + 2c_{12}\cos^2\theta\,\sin^2\theta + 4c_{66}\cos^2\theta\,\sin^2\theta + c_{22}\sin^4\theta,$$
$$a_{16} = \frac{1}{2}c_{66}\sin 4\theta + \frac{1}{4}c_{12}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\left(c_{11}\cos^2\theta - c_{22}\sin^2\theta\right)\sin 2\theta = a_{61},$$
$$a_{44} = c_{55}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta, \quad a_{45} = (c_{44} - c_{55})\sin\theta\cos\theta = a_{54} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, напряжения через деформации в новой системе координат $\{y\}$ определяются обобщенным законом Гука:

$$\sigma^1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3 + 2a_{16}\varepsilon_6, \quad \sigma^4 = 2a_{44}\varepsilon_4 + 2a_{54}\varepsilon_5, \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Введем безразмерные величины:

$$x = \frac{y_1}{a}, \quad y = \frac{y_2}{a}, \quad z = \frac{y_3}{a}, \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{55}}, \quad s^k = \frac{\sigma^k}{a_{55}}, \quad a_k = \frac{u_k}{a}, \tag{3}$$

где a — некоторый параметр, характеризующий область действия нагрузки.

Найдем решения уравнения равновесия в полупространстве, подчиненные граничным условиям вида

$$s^3(x,y,0) = \begin{cases} \frac{t(x)}{a_{55}}, |x| \leqslant 1, |y| < \infty, \\ 0, |x| > 1, |y| < \infty, \end{cases} \quad s^5(x,y,0) = \begin{cases} \frac{\tau(x)}{a_{55}}, |x| \leqslant 1, |y| < \infty, \\ 0, |x| > 1, |y| < \infty, \end{cases} \tag{4}$$
$$s^4(x,y,0) = 0,\ |x| < \infty,\ |y| < \infty.$$

Будем отыскивать решение, не зависящее от координаты y. Подставляя в уравнения равновесия выражения (2) и, учитывая (3), применим к полученной системе уравнений преобразование Фурье по координате x. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой будем искать в виде

$$a_k^* = A_k e^{\ell|\gamma|z}, \quad z \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\ell > 0, \quad a_k^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_k(x,z)\, e^{i\gamma x} dx\,.$$

В этом случае для A_k получим однородную систему алгебраических уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Из равенства нулю этого определителя найдем ℓ_k, подчиненные условиям $\operatorname{Re}\ell_k > 0$, и получим выражения для A_{1k} и A_{2k} через A_{3k}. Таким образом, преобразованные по Фурье перемещения имеют вид:

$$a_1^* = \frac{i|\gamma|}{\gamma}\sum_{k=1}^{3}\frac{L_{1k}}{\Delta_1(\ell_k)}A_{3k}e^{\ell_k|\gamma|z}, \quad a_2^* = \frac{i|\gamma|}{\gamma}\sum_{k=1}^{3}\frac{L_{2k}}{\Delta_1(\ell_k)}A_{3k}e^{\ell_k|\gamma|z}, \quad a_3^* = \sum_{k=1}^{3}A_{3k}e^{\ell_k|\gamma|z}, \tag{5}$$

где L_{ik}, $\Delta_1(\ell_k)$ — известные функции.

Воспользовавшись теперь формулами (2) и граничными условиями (4), подставляя компоненты a_k^* из (5), придем к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_{3k}, решая которую, найдем

$$A_{3k} = \frac{\Delta_1(\ell_k)\,G_k}{G}\frac{T(\gamma)}{|\gamma|\,a_{55}} + \frac{\Delta_1(\ell_k)\,H_k}{G}\frac{S(\gamma)}{i\gamma a_{55}},$$

где $T(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} t(x)\, e^{i\gamma x}dx,\ S(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} \tau(x)\, e^{i\gamma x}dx\,.$

Используя предыдущее, вычислим a_3^* при $z = 0$ и, взяв обратное преобразование Фурье, легко найдем после несложных преобразований

$$\frac{du_3}{dx} = \frac{F(\theta)}{\pi a_{55}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{t(\xi)}{\xi - x}d\xi - \frac{F_2(\theta)}{2\,a_{55}}\tau(x)\,, \tag{6}$$

где $F(\theta)$ и $F_2(\theta)$ — известные функции.

Таким образом, перемещение u_3 при $x_3 = 0$ под действием касательной и нормальной нагрузок определено, причем таким же образом строится решение, когда область действия нагрузки — отрезок $[-b; a]$.

Воспользовавшись теперь соотношением типа (6) и полагая

$$u_3\,(x, 0) = -\left(\delta + \varepsilon x - f(x)\right),$$

где δ — глубина внедрения штампа, ε — угол поворота штампа, $f(x)$ — форма штампа, получим интегральное уравнение

$$\int\limits_{-b}^{a} \frac{t(\xi)}{\xi - x} d\xi - \frac{\pi F_2(\theta)}{2F(\theta)} \tau(x) = \frac{-\pi a_{55}}{F(\theta)} \left(\varepsilon - f'(x)\right), \quad -b \leqslant x \leqslant a. \tag{7}$$

Перейдем теперь к изучению контактной задачи.

1) Рассмотрим случай наклонного плоского штампа, лежащего без трения ($\tau(x) = 0$, $f'(x) = 0$). Будем предполагать, что штамп внедряется под действием силы P_0 и момента $M = P_0 e$. В этом случае уравнение (7) принимает вид:

$$\int\limits_{-b}^{a} \frac{t(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\pi\gamma(\theta)\varepsilon, \quad \gamma(\theta) = \frac{a_{55}}{F(\theta)}, \quad -b \leqslant x \leqslant a.$$

Далее, считая длину штампа равной $2a$, будем предполагать, что под действием силы и момента штамп поворачивается и занимает область $-b \leqslant x \leqslant a$. Решение уравнения, неограниченное в точках $-b$ и a, имеет вид [1]:

$$t(x) = \frac{-P_0 - \pi\varepsilon\gamma(\theta)\left(x + 0.5(b - a)\right)}{\pi\sqrt{(b + x)(a - x)}}.$$

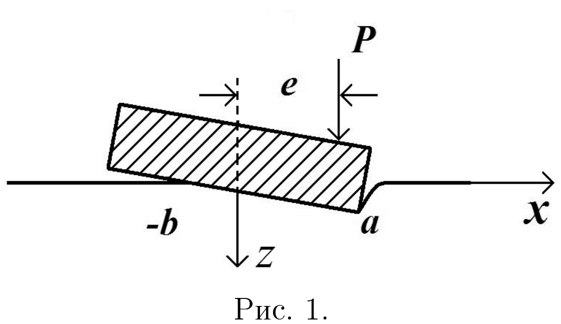


Рис. 1.

Теперь из условия для момента $M = P_0 e$ найдем e и ε [1] и, потребовав ограниченности решения в точке «$-b$», окончательно получим

$$b(\theta) = 3a - 4e, \quad t(x) = \frac{-P_0\sqrt{b + x}}{\pi(a - e)\sqrt{a - x}}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что точка отрыва «$-b$», так же как и контактное давление, не зависят от угла θ, а зависят только от эксцентриситета e. Наконец отметим, что независимость точки отрыва «$-b(\theta)$» и контактного давления $t(x)$

от угла поворота θ не приводит к независимости угла поворота штампа ε от θ. Также отметим, что если $e > 0,75a$, то штамп вообще не будет контактировать с полупространством, в случае $e < 0,5a$, отрыва штампа от полупространства не произойдет.

2) Рассмотрим теперь задачу о вдавливании параболического гладкого штампа ($\varepsilon = 0$, $\tau(x) = 0$, $f'(x) = x/R$). В этом случае контактное давление имеет вид [1]

$$t(x) = \frac{-\gamma(\theta)}{R}\sqrt{a^2(\theta) - x^2}, \quad |x| \leqslant a, \quad a^2 = \frac{2P_0R}{\pi\gamma(\theta)}. \qquad (8)$$

И из формул (8) видно, что и область контакта, и контактное давление зависят от θ. На рис. 2 приведено контактное давление при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/4$ (пунктирная линия) и на рис. 3 показано изменение $a(\theta)$.

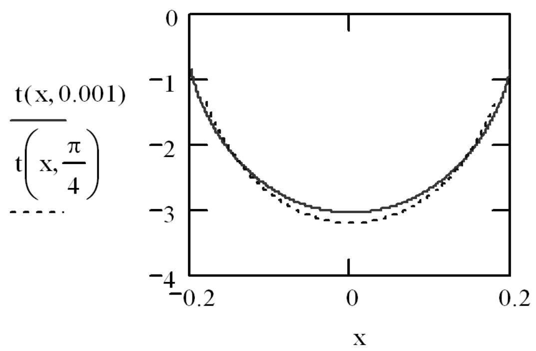


Рис. 2.

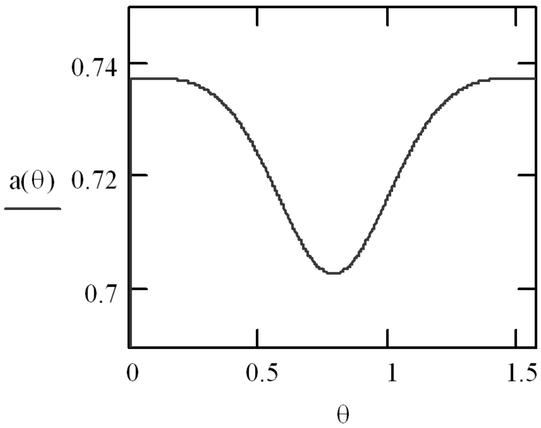


Рис. 3.

3) Далее рассмотрим задачу о вдавливании наклонного штампа, контактирующего с полупространством с трением. Будем считать, что трение подчиняется закону Кулона, тогда интегральное уравнение (7) принимает вид

$$\int_{-b}^{a} \frac{t(\xi)}{\xi - x}d\xi - \pi\gamma_1(\theta)kt(x) = -\pi\gamma(\theta)\varepsilon, \quad -b \leqslant x \leqslant a, \quad \gamma_1(\theta) = \frac{F_2(\theta)}{2F(\theta)}. \qquad (9)$$

Будем считать, что по-прежнему длина штампа равна $2a$, а под действием силы P_0 и момента M штамп занимает некоторое положение, причем контакт штампа и полупространства осуществляется лишь на участке $[-b, a]$. Неограниченное решение уравнения (9) имеет вид (§110, §114 [2])

$$t(x) = \left[-4\pi\varepsilon\gamma(\theta)\cos\pi\alpha\left(x + \frac{b-a}{2} + \alpha(a+b)\right) + C_0\cos\pi\alpha\right] / \left(\pi X(x)\right), \qquad (10)$$

где $X(x) = (b+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}(a-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}$, $\alpha = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(k\gamma_1(\theta))$.

Из (10) и условия $\int_{-b}^{a} t(x)dx = -P_0$ находим $C_0 = -P_0$. Разыскивая теперь ограниченное решение в точке «$-b$», найдем

$$\varepsilon = \frac{P_0}{2\pi\gamma(\theta)(a+b)}, \quad t(x) = -\frac{2P_0}{(a+b)(1-2\alpha)}\frac{(b+x)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(a-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}}.$$

Теперь найдем момент M по формуле

$$M = -\int_{-b}^{a} xt(x)dx = -\frac{P_0\,[3a - b - 2\alpha(a+b)]}{4}. \qquad (11)$$

И из формулы (11) определим

$$b = -\frac{(3-2\alpha)\,a}{1+2\alpha} - \frac{4M}{P_0\,(1+2\alpha)},$$

причем $b > 0$, чтобы не было опрокидывания штампа.

На рис. 4 приведена зависимость α от θ и построен график угла поворота штампа $\varepsilon(\theta)$ (рис. 5, $M = 0.9$).

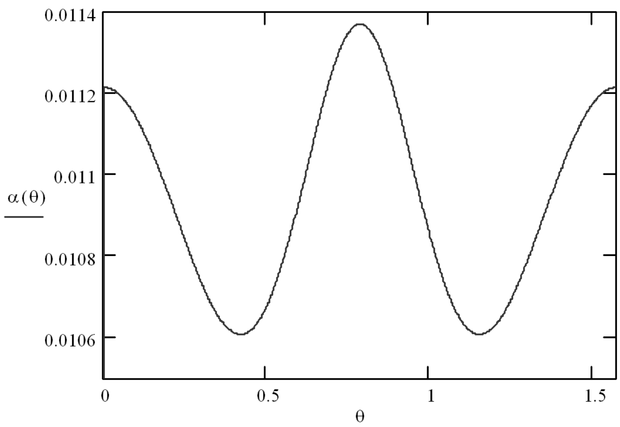


Рис. 4.

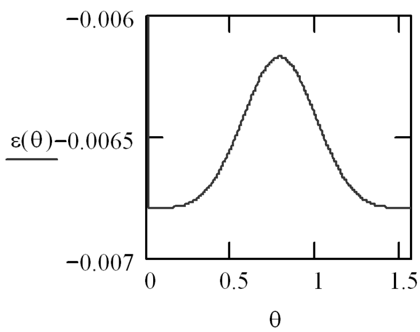


Рис. 5.

Следует отметить, что фактически все параметры данной задачи зависят от угла поворота θ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров В. М., Чебаков М. И.* Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-н/Д: Изд-во «ЦВВР», 2005. 108 с.

[2] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Belokon A V., Bolgova A. I. *Contact problem for the anisotropic half-space turned relative to the principal axes.* The problem of the stripe hard stamp pressing in the boundary of elastic anisotropic half-space in a coordinate system turned relative to the principal axes was considered. The dependence of the contact pressure on the angle of the stripe stamp turn was determined. The comparison with the problem when the rotation angle is equal to zero was made.

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭМИССИЯ В ДИАГНОСТИКЕ ПРЕДРАЗРУШАЮЩЕГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Буйло С. И.
НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Развит метод количественного восстановления параметров потока структурных преобразований и накопления повреждений по регистрируемым сигналам сопутствующей акустической эмиссии (АЭ). Исследованы зависимости потока актов АЭ широкого класса материалов на разных стадиях деформации включая и момент разрушения. Разработанные методы и алгоритмы обеспечивают существенное увеличение точности и достоверности диагностики предразрушающего состояния в различных материалах и изделиях из них по данным АЭ испытаний.

Острая необходимость в разработке новых методов диагностики предразрушающего состояния материалов вызывается тем, что в настоящее время все более актуальными становятся задачи оценки и прогнозирования остаточного ресурса изделий и объектов ответственного назначения в машиностроении, судостроении, трубопроводном транспорте, авиационной и ракетно-космической технике. В последние годы в физике прочности и механике разрушения для определения структурных изменений в материалах все более актуальным и перспективным становится развитие и применение методов акустико-эмиссионного анализа для контроля и диагностики.

Метод АЭ дает возможность исследовать кинетику процессов на самых ранних стадиях микродеформации, дислокационного зарождения и накопления микронесплошностей. Это, в принципе, позволяет диагностировать и прогнозировать по сопутствующей АЭ сам момент зарождения трещины. Кроме того, для каждой уже зародившейся трещины существует некоторый критический размер, зависящий от свойств материала. До этого размера трещина подрастает очень медленно (десятки лет) посредством огромного количества небольших дискретных скачков. И каждый такой скачок сопровождается актом АЭ. После достижения трещиной критического размера происходит катастрофическое разрушение, т. к. ее дальнейший рост идет уже со скоростью, близкой к половине скорости звука в материале конструкции. Принимая с помощью особой высокочувствительной аппаратуры и измеряя в самом простейшем случае интенсивность $\dot{N}_a = \Delta N_a/\Delta t$ (количество в единицу времени), а так же общее количество актов АЭ, N_a, удается по данным АЭ экспериментально оценить скорость роста, длину трещины и прогнозировать близость разрушения. К сожалению, поток регистрируемых сигналов эмиссии искажается в процессе их распространения и приема и сильно отличается от потока актов источника АЭ внутри тела, вследствие чего приходится решать *обратную задачу восстановления* потока повреждений по зарегистрированным сигналам АЭ.

Для наиболее часто встречающегося степенного вида плотности функции распределения амплитуд АЭ и на основе модели пуассоновского потока повреждений, нами получены простые соотношения для *восстановления* $\dot{N}_a$ (интенсивности потока актов повреждений внутри тела) по интенсивности *селектированных по особому способу* (непродлевающееся мертвое время) импульсов АЭ $\dot{N}_r$ [1, 2]:

$$\dot{N}_a = \dot{N}_r \Big/ [1 - \dot{N}_r \tau L(m, D)] \; ; \tag{1}$$

$$L(m, D) = (m-1)^{-1} - (D^{m-1} - 1)^{-1} \ln D \; ;$$

$$\dot{N}_a = \dot{N}_r \Big/ [1 - \dot{N}_r \tau L(m, D)] \; ; \tag{2}$$

где τ — постоянная времени послезвучания сигнала АЭ в образце и приемном датчике; u_t — уровень порога дискриминации; $L(m, D)$ — некоторый параметр; m — показатель степени плотности амплитудного распределения; $D = u_{0\,\max}/u_t$ — динамический диапазон сигналов АЭ; $u_{0\,\max}$ — максимальная амплитуда сигналов АЭ; Σt_0 — суммарная длительность импульсов АЭ (общее мертвое время) на выходе регистрирующего тракта за интервал измерения интенсивности T; K — параметр, описывающий степень искажения и перекрытия (3).

Метод селектирования и восстановление $\dot{N}_a$ по формулам (1) и (2) дают хорошие результаты, однако аппаратурная реализация такого селектора получается достаточно сложной и громоздкой. Для преодоления этого недостатка, нами также получены принципиально новые соотношения для *восстановления* $\dot{N}_a$ по интенсивности потока огибающих *продетектированных* вспышек (активности АЭ) $\dot{N}_d$ [1, 2]:

$$\dot{N}_a = \dot{N}_d \exp K; \quad K = \dot{N}_a \overline{t_0} = \Sigma t_0 / (T - \Sigma t_0) \; . \tag{3}$$

Этот метод не требует специального селектирования и *может быть использован на большинстве уже существующих АЭ комплексах.* Зависимость амплитуды АЭ излучения от скорости деформации часто приводит к *неоднозначности* результатов диагностики, так как при разных скоростях деформации теряется разный процент излученных импульсов АЭ. Для решения этой проблемы на основе модели степенного вида плотности амплитудного распределения АЭ предложен метод и получены соотношения для восстановления полного количества N_a^* актов микроповреждения, в том числе и *с амплитудами* излучения *ниже порога дискриминации*, а так же при изменении динамического диапазона D принимаемых сигналов.

$$N_a^* = N_a (D_1^{1-m} - 1) \big/ (D_2^{1-m} - 1). \tag{4}$$

Установлено, что восстановленное согласно (4) общее количество актов АЭ до разрушения N_a^* имеет разброс всего в пределах 10 % при изменении на порядок скорости деформации или частоты нагружения. Регистрируемое же в этих условиях количество актов АЭ N_a обычно меняется более 2-х раз.

Решение обратной задачи восстановления параметров исходного потока повреждений дало возможность получить истинный вид зависимостей параметров АЭ вдоль кривой нагружения и предложить метод идентификации стадий процессов изменения структуры и накопления повреждений по положению различных обнаруженных нами особых точек (локальных экстремумов, точек перелома) восстановленного потока актов АЭ.

Установлено, что в самом общем случае интенсивность восстановленного (излученного внутри материала) потока актов АЭ сплавов на основе железа и других металлов на разных стадиях деформации ε имеет вид, показанный на рис. 1, и сопровождается локальным максимумом в зоне текучести (ε_y), значительно меньшим локальным максимумом в области упрочнения (ε_s), нижним переломом в точке начала рассеянного накопления микронесплошностей (ε_*) и верхним переломом в точке перехода от рассеянного к локализованному дефектообразованию ε^* (момент зарождения макротрещины).

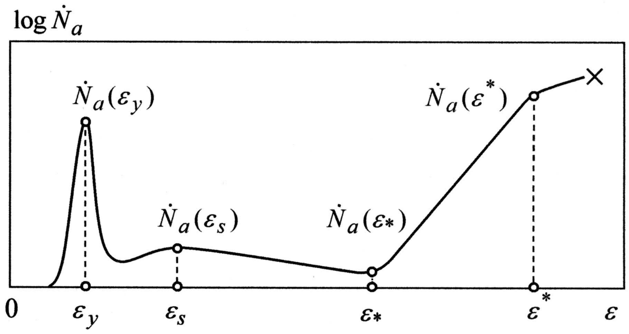


Рис. 1. Идентификация стадий деформации и разрушения по особым точкам восстановленной интенсивности потока актов АЭ; крестик — момент разрушения.

Таким образом, открывается возможность, зарегистрировав эти особые точки, осуществлять по АЭ не только экспериментальное выявление предразрушающего состояния, но и решать более тонкие задачи, а именно, проводить *идентификацию стадий деформации и разрушения.*

Нами исследованы экспериментальные зависимости восстановленного потока актов АЭ широкого класса материалов на разных стадиях деформации включая и момент разрушения. Например, на рис. 2 приведены параметры потока актов АЭ в процессе зарождения и роста трещины в условиях, близких к плоской деформации. Зарождение и рост макротрещины фиксировались на поверхности образца с помощью измерительного микроскопа. Обнаружено, что первый максимум регистрируемой интенсивности потока актов АЭ появляется до образования видимой в измерительный микроскоп трещины и, скорее всего, связан с интенсивной пластической деформацией у надреза в момент зарождения макротрещины. Образование макротрещины и её рост сопровождается повторным значительным возрастанием регистрируемой интенсивности импульсов АЭ.

Предложенные нами подходы, методы и полученные алгоритмы являются достаточно универсальными, вследствие чего могут быть полезны при решении задач повышения точности и достоверности результатов в процессе использования эффекта АЭ в исследованиях динамики различных структурных изменений в твердых телах. Это могут быть фазовые переходы, мартенситные превращения и другие явления. Например, в соавторстве с сотрудниками НИИ Физики ЮФУ и Академии государственной противопожарной службы МЧС РФ (г. Москва) нами предложен *метод совмещенной* термогравиметрической и акустико-эмиссионной диагностики *стадий предразрушающего состояния* в процессе термодеструкции

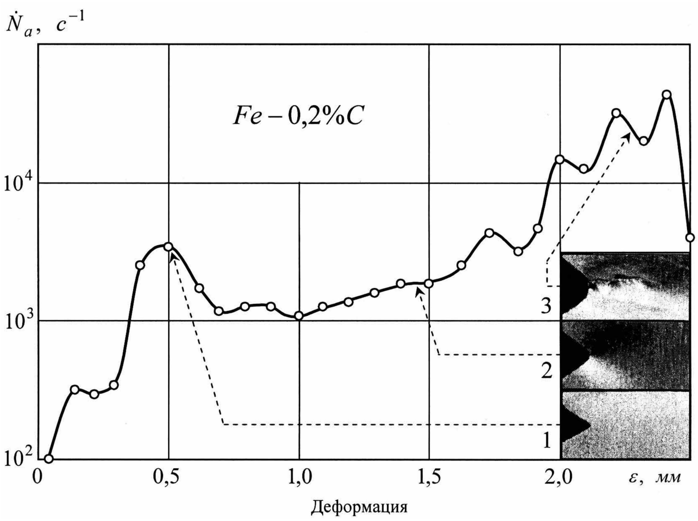


Рис. 2. Интенсивность потока актов микроповреждений (по данным АЭ) в процессе зарождения и роста трещины. Материал — сталь 20.

веществ и материалов [3, 4]. На рис. 3 показаны наши результаты экспериментальной диагностики стадий термодеструкции полимера, используемого при производстве мощных светодиодов.

Видно, что метод АЭ обеспечивает *более раннее выявление и идентификацию фазовых переходов* (точки плавления D и сублимации S в процессе нагревания, чем их обнаружение существующими методами дифференциальной (DTG) и термогравиметрии (TG). Методом АЭ удается также идентифицировать обычно имеющую максимальный локальный максимум интенсивности АЭ точку воспламенения F, положение которой трудно зафиксировать другими методами анализа (стандартными методами TG и DTG она не обнаруживается). На метод получены два Патента РФ.

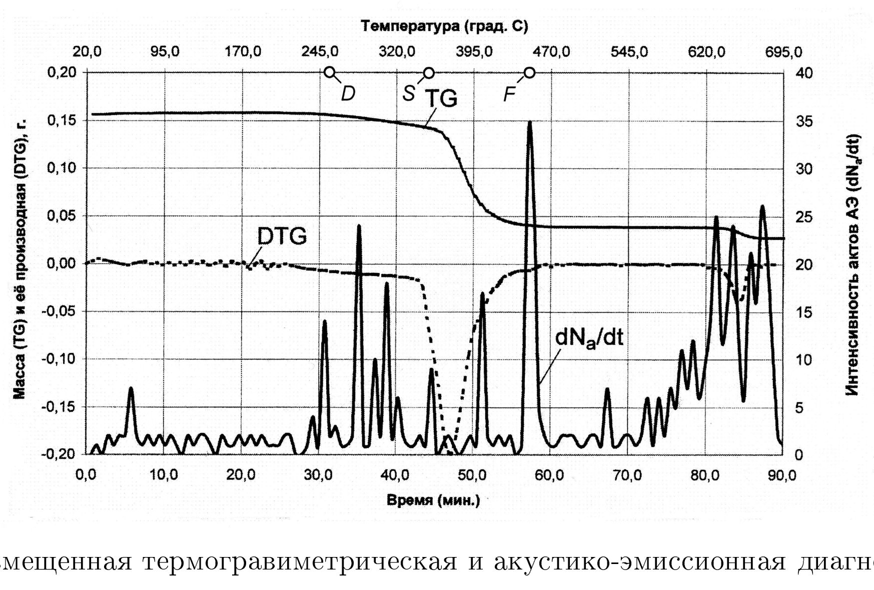


Рис. 3. Совмещенная термогравиметрическая и акустико-эмиссионная диагностика стадий термодеструкции полимера.

И, что особенно интересно, наши последние эксперименты подтверждают, что эффект АЭ действительно имеет междисциплинарный характер, проявляется даже в жидких средах и имеет хорошие перспективы в качестве экспресс-метода оценки кинетики химических реакций в реальном времени [5].

Разработанные методы и алгоритмы обеспечивают существенное (до двух и более раз) увеличение точности и достоверности диагностики предразрушающего состояния в различных материалах и изделиях из них по данным АЭ испытаний. Их применение дает новую ценную информацию, которую затруднительно, а чаще всего вообще невозможно (особенно в динамике) получить экспериментально какими-либо другими методами исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проекты № 09-08-00283-а и № 10-08-13300-РТ-оми).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Буйло С. И.* Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики. Ростов-н/Д: ЮФУ, 2008. 192 с.

[2] *Буйло С. И.* Метод идентификации стадий деформации и разрушения по положению особых точек восстановленного потока актов АЭ // Дефектоскопия. 2008. № 8. С. 3–14. [Rus. J. NDT. 2008. Vol. 44. No. 8. Pp. 517–526].

[3] *Буйло С. И., Белозеров В. В., Прус Ю. В.* Совмещенная термогравиметрическая и акустико-эмиссионная диагностика стадий термодеструкции веществ и материалов // Дефектоскопия. 2008. № 3. С. 71–74. [Rus. J. NDT. 2008. Vol. 44. No. 3. Pp. 212–214].

[4] *Буйло С. И., Белозеров В. В., Зинченко С. П., Иванов И. Г.* Возбуждение акустической эмиссии лазерным излучением для исследования структурных изменений в композитах и полимерах // Дефектоскопия. 2008. No 9. С. 38–45. [Rus. J. NDT. 2008. Vol. 44. No. 9. Pp. 615–620].

[5] *Буйло С. И., Кузнецов Д. М.* Акустико-эмиссионный контроль и диагностика кинетики физико-химических процессов в жидких средах // Дефектоскопия. 2010. No 9. С. 79–83. [Rus. J. NDT. 2010. Vol. 46, No. 9. Pp. 686–691].

Builo S. I. *Acoustic Emission in the Diagnosis of Predestructive State of Solids.* Developed method of quantitative recovery of parameters of a stream of structural transformation and accumulation of damage for registered signals accompanying acoustic emission (AE). Investigated the dependence of the stream of events of AE of a wide class of materials at different stages of deformation and including the moment of the destruction. The developed methods and algorithms provide a significant increase in the accuracy and reliability of diagnostics predestructive state in different materials and products from them according to the AE testing.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТРЕЖНЯ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Бурцева О. А., Кабельков В. А.

Южно-российский государственный технический университет (НПИ), Новочеркасск

Получены нелинейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, описывающие движение упругого стержня в ветровом потоке. Исследована устойчивость основного (нулевого) состояния и определены критические значения параметров. Получены амплитудно-частотные характеристики колебательных режимов, ответвляющихся от основного режима.

Введение. Расчет сооружений, проектируемых для высотного строительства, должен выполняться с учетом нагрузки от ветровых воздействий. В результате взаимодействия высотного сооружения (рис. 1), моделируемого стержнем, с обтекающим его потоком воздуха, возникают аэродинамические силы (лобовая, касательная, подъемная) и момент, пропорциональный скорости набегающего потока.

Рассматривается задача взаимодействия стержня круглого сечения с потоком, скорость V_0 которого составляет угол α с осью Ox_1.

Основные уравнения. Уравнения изгибных колебаний стержня имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^4} + \beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left((1-\varepsilon)\frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + C_n \eta \left(1+\cos^2\alpha\right)\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + C_n \eta \sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + \\
+ C_k \eta \sin\alpha \cos\alpha \sin(\omega_0 \tau)\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + C_k \eta\left(1+\sin^2\alpha\right)\sin(\omega_0\tau)\frac{\partial u_3}{\partial \tau} = \\
= \frac{C_n \eta}{\beta_0}\cos\alpha - \frac{C_k \eta}{\beta_0}\sin\alpha \sin(\omega_0\tau) + N_1; \\
\frac{\partial^4 u_3}{\partial \varepsilon^4} + \beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left((1-\varepsilon)\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + C_n \eta \left(1+\sin^2\alpha\right)\frac{\partial u_3}{\partial \tau} + C_n \eta \sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \\
+ C_k \eta \sin\alpha \cos\alpha \sin(\omega_0 \tau)\frac{\partial u_3}{\partial \tau} + C_k \eta\left(1+\cos^2\alpha\right)\sin(\omega_0\tau)\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \\
= \frac{C_n \eta}{\beta_0}\sin\alpha + \frac{C_k \eta}{\beta_0}\cos\alpha \sin(\omega_0\tau) + N_2.
\end{gathered} \tag{1}$$

В формулах (1) введены обозначения:

$$s = \varepsilon l; \quad u_1 = u_1/l; \quad u_3 = u_3/l; \quad \beta = \frac{\rho g l^2}{EJ}; \quad p_0 = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EJ}};$$

$$\tau = p_0 t; \quad \omega_0 = \omega/p_0; \quad \beta_0 = \frac{p_0 l}{V_0}; \quad \eta = \frac{\gamma d V_0 l^4}{2EJ},$$

где ε — безразмерная длина стержня, ρ — удельная плотность стержня; EJ — изгибная жесткость; l — длина стержня; d — диаметр стержня; g — гравитационная постоянная; γ — удельная плотность воздуха; p_0 — частота собственных колебаний стержня; C_n и C_k — безразмерные постоянные, определяемые опытным путем; N_1 и N_2 — слагаемые, содержащие нелинейные члены.

Полагая $u_j(\varepsilon,\tau)=\dfrac{1}{2}f_j(\tau)(1-\cos\pi\varepsilon)$, $j=1,3$ и используя метод Бубнова–Галеркина, однородные уравнения в частных производных (1) сводим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую далее преобразуем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\nu},\tau\right)\mathbf{x}+\mathbf{N}\left(\boldsymbol{\nu},\mathbf{x},\tau\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}\in R^4$ — вектор состояний; $\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\nu},\tau\right)$ — периодическая матрица 4×4, зависящая от вектора параметров $\boldsymbol{\nu}=\left[C_n,C_k,\beta_1,\eta,\alpha\right]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{N}\left(\boldsymbol{\nu},\mathbf{x},t\right)$ — нелинейная относительно x вектор-функция и $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ — периодическая относительно t.

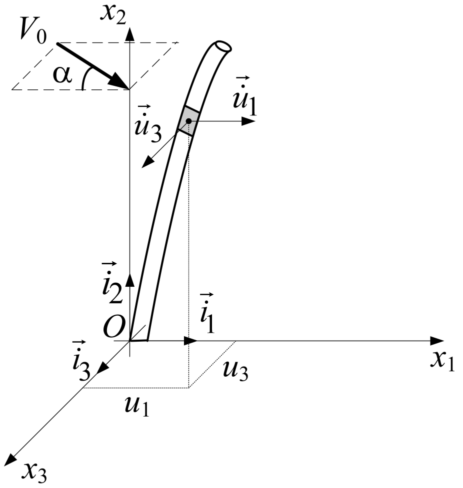


Рис. 1. Расчетная схема высотного сооружения.

Определение границ устойчивости и нахождение критических параметров упругого стрежня. На основе линейной системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1e^{i\omega_0\tau}+\bar{\mathbf{A}}_1e^{-i\omega_0\tau}\right)\mathbf{x} \tag{3}$$

решается задача выявления условий возбуждения параметрических колебаний. Здесь обозначено:

$$\mathbf{x}=\left[f_1,\ f_3,\dot{f}_1,\ \dot{f}_3\right];$$

$$\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\beta_1&0&-C_n\alpha_1(1+\cos^2\alpha)&-C_n\alpha_1\sin\alpha\cos\alpha\\0&-\beta_1&-C_n\alpha_1\sin\alpha\cos\alpha&-C_n\alpha_1(1+\sin^2\alpha)\end{bmatrix},\quad \beta_1=-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi^4}{2}+\frac{\beta\pi^2}{4}\right);$$

$$\mathbf{A}_1=0.5iC_k\alpha_1\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\sin\alpha\cos\alpha&1+\sin^2\alpha\\0&0&1+\cos^2\alpha&\sin\alpha\cos\alpha\end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{A}}_1=-0.5iC_k\alpha_1\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\sin\alpha\cos\alpha&1+\sin^2\alpha\\0&0&1+\cos^2\alpha&\sin\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (3) разыскивается в виде

$$\mathbf{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{x}_ke^{\frac{1}{2}i\omega_0k\tau}+\bar{\mathbf{x}}_ke^{-\frac{1}{2}i\omega_0k\tau}\right). \tag{4}$$

В результате подстановки (4) в (3) и приравнивания членов при одинаковых гармониках для последовательностей $k=0,2,4,...$ и $k=1,3,5,...$ получаются системы алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix}...&...&...&...&...\\...&\mathbf{A}_0+i\omega_0\mathbf{E}&\bar{\mathbf{A}}_1&0&...\\...&\mathbf{A}_1&\mathbf{A}_0&\bar{\mathbf{A}}_1&...\\...&0&\mathbf{A}_1&\mathbf{A}_0-i\omega_0\mathbf{E}&...\\...&...&...&...&...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}...\\\bar{\mathbf{x}}_2\\2\mathbf{x}_0\\\mathbf{x}_2\\...\end{bmatrix}=0;\quad \begin{bmatrix}...&...&...&...\\...&\mathbf{A}_0+\frac{i\omega_0}{2}\mathbf{E}&\bar{\mathbf{A}}_1&...\\...&\mathbf{A}_1&\mathbf{A}_0-\frac{i\omega_0}{2}\mathbf{E}&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}...\\\bar{\mathbf{x}}_1\\\mathbf{x}_1\\...\end{bmatrix}=0.$$

Приравнивая нулю определители этих уравнений, получаем выражения для нахождения критических параметров $\boldsymbol{\nu}$ и частоты колебаний ω_0.

В результате численных экспериментов построены области неустойчивости, зависящие от параметров C_n, C_k, β_1, β, η, α. Характерные граничные кривые, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, приведены в работах [2].

Система рекуррентных уравнений метода Ляпунова–Шмидта. Параметрические колебания, ответвляющиеся от состояний $\mathbf{x} = 0$ в окрестностях критических значений параметров, исследуем на основе метода Ляпунова–Шмидта [3].

Переходя к безразмерному времени $t = \omega_0 \tau$, преобразуем дифференциальные уравнения (2) к виду

$$\omega_0 \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\nu}, t)\ \mathbf{x}(t) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x}, t), \tag{5}$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}\left(1+\mu^2\right), \quad \mathbf{A}(\boldsymbol{\nu}, t) = \mathbf{A}_0(\boldsymbol{\nu}, 0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\nu})\, e^{ikt} + \bar{\mathbf{A}}_k(\boldsymbol{\nu})\, e^{-ikt}\Big). \tag{6}$$

Решение уравнения (5) разыскиваем в виде

$$\omega_0 = \omega_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_{0j}\, \mu^j, \quad \mathbf{x}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_j\, \mu^j, \tag{7}$$

где $\omega_{00} = \operatorname{Im}\left(\lambda^{(\text{гр})}\right)$ — мнимая часть собственного числа матрицы системы уравнений (5), действительная часть которого обращается в ноль на границе раздела областей устойчивого и неустойчивого движения; ω_{0j} и $\mathbf{x}_j$ — неизвестные коэффициенты и вектор-функции.

Проведем преобразования, целью которых является получение коэффициентов при степенях малого параметра μ. Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях μ, получаем систему рекуррентных уравнений вида

$$\begin{gathered}\omega_0 \dot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\nu})\, \mathbf{x}_j + \\ + \mathbf{F}_j\left(\boldsymbol{\nu}_{\text{кр}};\ \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{j-1}(t)\ ;\ \dot{\mathbf{x}}_1(t), ..., \dot{\mathbf{x}}_{j-1}(t)\ ;\ \omega_{0,1}, ..., \omega_{0,j}\right),\ j = 1, 2, ...,\end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathbf{F}_j$ — вектор-функции, порожденные видом нелинейного вектора $\mathbf{N}$.

Правая часть каждого следующего уравнения зависит от решения предыдущих уравнений. Первое уравнение однородно и соответствует задаче определения критических параметров системы. При решении последующих уравнений используются условия существования 2π-периодических решений неоднородных уравнений [4].

Решение j-го уравнения будем отыскивать в виде

$$\mathbf{x}_j = a_j\left(\mathbf{C}\, e^{i\,t} + \bar{\mathbf{C}}\, e^{-i\,t}\right) + \mathbf{x}_j^{(\text{н})},$$

где $\mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}$ — пара комплексно-сопряженных собственных векторов, получаемых при решении задачи о собственных значениях для первого уравнения; $\mathbf{x}_j^{(\text{н})}$ — частное решение соответствующего уравнения.

При $j = 0$ получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\omega_0 \dot{\mathbf{x}}_0 (t) = \mathbf{A} (\boldsymbol{\nu}) \, \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}_0 (\boldsymbol{\nu}, \ \omega_{00}) \, . \tag{9}$$

Решив задачу о собственных значениях и получив решение первого уравнения

$$\mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{C} \, e^{i\,t} + \bar{\mathbf{C}} \, e^{-i\,t} \right) + \mathbf{x}_0^{(\text{н})},$$

подставим его в правую часть следующего приближения ($j = 1$):

$$\omega_0 \dot{\mathbf{x}}_1 (t) = \mathbf{A} (\boldsymbol{\nu}) \, \mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_1 (\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x}_0 (t) \, , \dot{\mathbf{x}}_0 (t) \, , \omega_{00}, \omega_{01}, a_1) \, ;$$

$$\mathbf{x}_1 = a_1 \left(\mathbf{C} \, e^{i\,t} + \bar{\mathbf{C}} \, e^{-i\,t} \right) + \mathbf{x}_1^{(\text{н})}.$$

Выполнив условие существования 2π-периодического решения второго уравнения $\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{Z}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}_1 \, dt = 0$, где $\mathbf{Z}$ — решение системы уравнений сопряженной (9) ($\dot{\mathbf{Z}} (t) = -\mathbf{A}^{\text{т}} (\boldsymbol{\nu}, t) \ \mathbf{Z} (t)$), приходим к условию

$$\omega_{01} = \frac{\omega_{00}^2}{\eta_0} \xi, \tag{10}$$

где ξ — комплексное число.

Опираясь на (10), переходим к решению второго уравнения и составляем вектор

$$F_2 (\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x}_0 (t) \, , \mathbf{x}_1 (t) \, , \dot{\mathbf{x}}_0 (t) \, , \dot{\mathbf{x}}_1 (t) \, , \omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{02}, \eta_2, a_1, a_2) \, ;$$

$$\mathbf{x}_2 = a_2 \left(\mathbf{C} \cdot e^{i \cdot t} + \bar{\mathbf{C}} \cdot e^{-i \cdot t} \right) + \mathbf{x}_2^{(\text{н})}.$$

Величины η_2, ω_{02} находим из условия существования 2π-периодического решения для третьего уравнения $\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{Z}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}_2 \, dt = 0$.

Дальнейшее интегрирование дает комплексное уравнение вида

$$\eta_2^2 \cdot \xi_1 + \eta_2 \cdot \xi_2 + \omega_{02} \cdot \xi_3 + \xi_4 = 0, \tag{11}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_4$ — постоянные комплексные числа.

Решение уравнения (11) позволяет получить значение амплитуды η_2 и поправки к частоте ω_{02} для конкретной точки границы раздела областей устойчивого и неустойчивого движения. Повторив эту процедуру для других граничных значений варьируемых параметров, получаем амплитудную и частотную характеристику ответвляющегося от основного состояния колебательного режима. Построение АЧХ производим для каждой из допустимых границ.

На рис. 2 представлены характерные граничные кривые, разделяющие области устойчивости и неустойчивости верхнего сечения стержня в зависимости от скорости ветрового потока (параметр η). Приняты следующие значения констант: $C_n = 0.005$, $C_k = 0.03$, $\alpha = \pi/4$, $\beta_0 = 0.5$.

На рис. 3 представлены результаты исследования устойчивости периодических режимов, ответвляющихся от состояний равновесия в виде графика зависимости

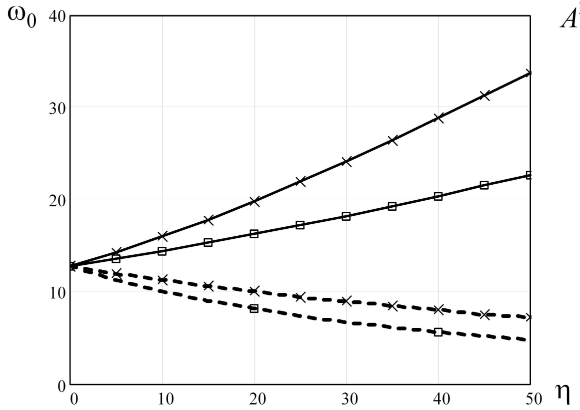


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости.

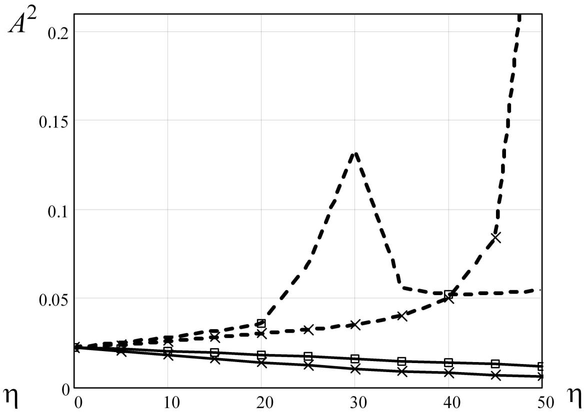


Рис. 3. Амплитуды колебаний на каждой граничной кривой.

квадрата безразмерной амплитуды от параметра η. Пунктирные линии соответствуют автоколебаниям «в окрестности» нижних границ областей устойчивости, сплошные линии — верхних границ. Из графиков рис. 3 установлено, что: а) могут возникать как устойчивые, так и неустойчивые автоколебательные режимы, причем равновесные (стационарные) режимы становятся неустойчивыми; б) существует значение скорости ветрового потока V_0, выше которой равновесные состояния неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Светлицкий В. А.* Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика, Ч. 2. Динамика. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.

[2] *Кабельков В. А., Бурцева О. А.* Области устойчивости высотных сооружений при ветровой нагрузке // Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах Российской Федерации: доклады Межрегиональной конференции памяти А. Н. Кабелькова, г. Новочеркасск, 20–23 апреля 2011 г. / Юж.-рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: ЮРГТУ, 2011. С. 73–79.

[3] *Кабельков А. Н.* Некоторые задачи неустойчивости вязкоупругих систем: Дис. канд. ф.-м. наук: 01.02.04. Тула, 1984. 207 с.

[4] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Burtzeva O. A., Kabelkov V. A. *Parametrical oscillations of elastic pole in air flow.* Non-linear differential equations with periodical coefficients are derived. The equations characterize oscillations of elastic bar in the wind flow. Stability of basic state is studied and critical values of parameters are determined. Amplitude-frequency characteristics of oscillation modes that bifurcate from the main regime are obtained.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АРМАТУРНЫХ СТАЛЕЙ

Бурцева О. А.[*], Нефедов В. В.[*], Косенко Е. Е.[**], Косенко В. В.[**], Черпаков А. В.[***]

[*]*Южно-российский государственный технический университет (НПИ), Новочеркасск*

[**]*Ростовский государственный строительный университет*

[***]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Решена задача определения минимальных значений и рассеивания механических характеристик арматурных сталей с позиций теории вероятностей. На основе экспериментальных исследований доказано, что механические свойства строительных сталей распределяются по трехпараметрическому закону Вейбулла. На основе этого закона дана методика определения минимальных значений механических характеристик для прочностных расчетов.

Для прочностных расчетов арматурных сталей, применяемых при производстве преднапряженных железобетонных конструкций, важно оперировать минимальными значениями механических характеристик. При определении этих значений следует учитывать, что механические характеристики являются случайными величинами, имеющими определенное рассеивание в силу многочисленных причин (дефекты кристаллической решетки зерен в виде вакансий, дислокаций и микротрещин, а также небольших отклонений хода многостадийного процесса производства стали).

Для оценки случайных величин механических характеристик в настоящей работе был определен закон распределения этих величин, затем определены минимальные значения механических характеристик, после чего проведена оценка их рассеивания.

На основе большого объема экспериментальных исследований [1, 2] доказано, что в подавляющем большинстве случаев для стального проката предпочтительным оказывается трехпараметрический закон Вейбулла, в меньшем — нормальный закон. Для проведения эксперимента использовались арматурные стали классов А500С и Ат800 диаметром 12 и 14 мм.

Для получения значений пределов текучести и прочности, относительного удлинения, а также различных уровней упрочнения [3], проводились стандартные испытания на разрывной машине ИР-200, а ударная вязкость определялась на маятниковом копре PSWO-30.

Также для определения механических характеристик использовался метод ударного вдавливания, для чего образцы из арматурной стали, имеющие периодический профиль, предварительно шлифовались с постоянным охлаждением, после чего производился замер.

Для определения соответствия эмпирических данных теоретическим законам применяли критерий Мизеса. В качестве предполагаемых теоретических распределений принимались трехпараметрический закон распределения Вейбулла и нормальный закон распределения.

Объем каждой выборки образцов принимался одинаковой величины, равной 100. Кроме того, уровень значимости для проверки нуль-гипотезы принимался равным 0,1. В этом случае соответствие эмпирического распределения теоретическому имеет место при величине ω^2 меньшее предельной величины ω^2, равной 1,94 [4].

Оценки параметров этих распределений производились методом максимального правдоподобия, предложенным Р. Фишером. [5]

Вычисленные значения критерия ω^2 представлены в табл. 1 для трехпараметрического распределения Вейбулла (В) и нормального закона (Н).

Подчеркнутые значения говорят о предпочтительности результата. Таблица обобщает данные по пяти механическим характеристикам для двух классов стали.

Класс стали	Механические характеристики									
	HB		$\delta, \%$		$\sigma_{\text{Т}}$, МПа		$\sigma_{\text{В}}$, МПа		KCU	
	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н
А500С Ø 14	$\underline{1{,}21}$	$\underline{1{,}21}$	$\underline{1{,}19}$	$\underline{1{,}19}$	$\underline{1{,}2}$	$\underline{1{,}2}$	$\underline{1{,}2}$	$\underline{1{,}2}$	1,32	$\underline{0{,}93}$
Ат800 Ø 12	0,76	$\underline{0{,}69}$	0,77	$\underline{0{,}73}$	0,76	$\underline{0{,}69}$	0,76	$\underline{0{,}7}$	$\underline{0{,}75}$	1,02
Ат800 Ø 14	$\underline{0{,}5}$	1,43	$\underline{0{,}52}$	0,56	$\underline{0{,}51}$	1,07	$\underline{0{,}5}$	1,26	$\underline{0{,}63}$	0,76

Таблица 1. Значения параметров критерия ω^2.

Анализируя данные таблицы, можно сделать вывод о том, что в рассматриваемых условиях большую сходимость теоретического распределения с экспериментальным показал трехпараметрический закон распределения Вейбулла в отличие от нормального закона.

Для определения минимальных значений механических характеристик арматуры с применением нормального закона распределения использовалась методика, описанная в [6].

Определение точных значений доверительных интервалов требует знания вида закона распределения. Для этого рассматривается случайная величина X, закон распределения которой содержит неизвестный параметр «a». Оценка параметра «a», обозначим ее как α, имеет закон распределения, который зависит от закона распределения величины X и от числа значений выборки n.

Для определения доверительного интервала математического ожидания используем формулу

$$I_\beta = \left(\bar{m} - t_\beta^{\text{н}} \sqrt{\frac{\bar{\text{Д}}}{n}}; \quad \bar{m} + t_\beta^{\text{н}} \sqrt{\frac{\bar{\text{Д}}}{n}} \right),$$

где $\bar{m}$ — оценка математического ожидания m величины X; $\bar{\text{Д}}$ — оценка дисперсии Д; $t_\beta^{\text{н}}$ — коэффициент Стьюдента, его значение принимается в зависимости от доверительной вероятности и количества степеней свободы определяется по таблице. (В данном случае при $\beta = 0{,}99$ коэффициент Стьюдента равен 2,64).

Логичным будет использование большего значения доверительной границы $Д_в$ доверительного интервала для определения минимальных значений механических характеристик для дисперсии [7, 8]. Используем формулу:

$$Д_в = \frac{\bar{Д}(n-1)}{\chi^2}.$$

В таком случае доверительный интервал для математического ожидания определяется так:

$$I_\beta = \left(\bar{m} - t_\beta^{\text{Н}}\sqrt{\frac{\bar{Д}_в}{n}}; \quad \bar{m} + t_\beta^{\text{Н}}\sqrt{\frac{\bar{Д}_в}{n}}\right).$$

Минимальное значение механической характеристики определяется по формуле:

$$X_{min} = m_{min} - U_y\sqrt{Д_в}\ ,$$

где m_{min} — минимальное значение математического ожидания, определенное с учетом доверительного интервала, U_y — квантиль нормального распределения, определяемый в зависимости от доверительной вероятности U, принятой 0,99 ($U_y = 2.326$).

При использовании трехпараметрического закона распределения Вейбулла определение минимальных значений механических характеристик сводится к определению доверительного интервала для параметра сдвига μ, который находится по формуле:

$$\mathrm{I}_\beta = \left(\mu - t_\beta^B\sqrt{\frac{Д(\mu)}{\mathrm{n}}}\ ; \quad \mu + t_\beta^B\sqrt{\frac{Д(\mu)}{\mathrm{n}}}\right),$$

где β — доверительная вероятность, t_β^B — число средних квадратических отклонений нормального закона.

Величина t_β^B определяется по таблице в зависимости от принятого значения β. Минимальное значение механической характеристики в этом случае определяется по формуле:

$$X_{min} = \mu - t_\beta^B\sqrt{\frac{Д(\mu)}{\mathrm{n}}}.$$

Минимальное значение каждого механического свойства, как доказано Дабаем [8], можно определить, исходя из априорно известных значений масштаба β и формы k.

Минимальные значения механических характеристик поверхностного слоя исследуемых классов арматурных сталей, полученные в результате их обработки на соответствие трехпараметрическому закону распределения Вейбулла и нормальному закону, указаны в табл. 2.

Механические характеристики, численно оценивающие технологические и эксплуатационные свойства металлопроката, чувствительны к химическому составу

Класс стали	Механические характеристики									
	HB		$\delta, \%$		$\sigma_{\text{Т}}$, МПа		$\sigma_{\text{В}}$, МПа		KCU	
	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н	В	Н
А500С Ø14	204,82	197,37	16,1	15,6	599,51	575,45	832,59	805,12	3,28	2,98
Ат800 Ø 12	245,2	247,93	12,2	12,5	735,2	745,86	989,1	1001,5	10,12	11,27
Ат800 Ø 14	200,56	144,93	9,55	7,27	558,97	436,7	782,72	649,98	2,8	6,34

Таблица 2. Минимальные значения параметров трехпараметрического закона распределения Вейбулла и нормального закона распределения.

и структуре стали. Кроме того, они являются случайными величинами, отражая статистический характер дефектов кристаллической решетки, отдельных зерен, дефектов границ между ними, поэтому определение механических характеристик с учетом их рассеивания является обязательным.

Для определения рассеивания механических характеристик исследуемых классов арматуры необходимо найти их максимальные значения в соответствии с доверительным интервалом, как описано выше, по формуле:

$$X_{max} = m_{max} + U_y \sqrt{\text{Д}_{\text{в}}} \, .$$

Результаты расчета максимальных значений механических характеристик арматурных сталей представлены в табл. 3.

Результаты расчета рассеивания механических характеристик представлены в табл. 4.

Класс стали	Механические характеристики				
	HB	$\delta, \%$	$\sigma_{\text{Т}}$, МПа	$\sigma_{\text{В}}$, МПа	KCU
А500С Ø14	239,89	19,9	719,75	971,7	7,31
Ат800 Ø12	293,19	15,06	884,04	1158,6	16,08
Ат800 Ø14	409,83	18,65	1224,3	1544,3	13,98

Таблица 3. Максимальные значения механических характеристик арматурных сталей.

Класс стали	Механические характеристики				
	HB	$\delta, \%$	$\sigma_{\text{Т}}$, МПа	$\sigma_{\text{В}}$, МПа	KCU
А500С Ø 14	1,22	1,27	1,25	1,21	2,45
Ат800 Ø 12	1,18	1,19	1,19	1,16	1,43
Ат800 Ø 14	2,83	2,57	2,8	2,38	2,2

Таблица 4. Рассеивание значений механических характеристик арматурных сталей.

Анализ таблицы позволяет сделать вывод, что каждая механическая характеристика имеет рассеивание. Это говорит о случайном характере полученных значений, что доказывает целесообразность использования вероятностных методов расчета.

Результаты проведенных расчетов показали, что в рассмотренных условиях для оценки свойств арматурных сталей наиболее предпочтительным является трехпараметрический закон распределения Вейбулла, показавший большую сходимость теоретических и экспериментальных значений и наименьшие значения механических характеристик в сравнении с нормальным законом распределения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №11-08-90728 моб_ст, 11-08-90726 моб_ст).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Беленький Д. М., Кубарев А. Е., Элькин А. И. и др.* Контроль и сертификация механических свойств металлопроката. М.: Заводская лаборатория, 1992. № 2. С. 47–49.

[2] *Беленький Д. М., Бескопыльный А. Н.* Сертификация качества материалов металлопроката. М.: Заводская лаборатория, 1993. № 9. С. 37–40.

[3] *Беленький Д. М., Вернези Н. Л., Косенко Е. Е.* О прочностных возможностях арматурных сталей // Бетон и железобетон. 2004. № 3. С. 17–21.

[4] *Мартынов Г. В.* Критерий омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 136 с.

[5] *Гмурман В. С.* Теория вероятностей и математической статистики. М.: Высшая школа, 1977. 479 с.

[6] *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

[7] *Беленький Д. М., Косенко Е. Е., Оганезов Л. Р.* Минимальные значения и рассеивание механических характеристик строительных сталей // Известия вузов. Строительство. 2003. № 6. С. 102–105.

[8] *Косенко Е. Е.* Исследование прочностных возможностей арматурных сталей / Рост. гос. строит. ун-т. Ростов-на-Дону. 2003. 23 с.: ил. — Библиогр. назв. 8. Рус. Деп. в ВИНИТИ. № 1550. В2003 8.08.03.

[9] *Dubey D.* On some statistical inferences for Weibull laws // Newal Rec. Soqist Quart. 1966. 13. № 3.

Burceva A. O., Nefedov V. V., Kosenko E. E., Kosenko V. V., Cherpakov A. V. *Statistical estimation of mechanical characteristics of reinforcing steels.* The problem of definition of the minimum values and dispersion of mechanical characteristics reinforcing steels from probability theory positions is solved. On the basis of experimental researches it is proved that mechanical properties of building steels are distributed under the three-parametrical law of Vejbull. On the basis of this law the technique of definition of the minimum values of mechanical characteristics for strength calculations is given.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА, РАБОТАЮЩЕГО НА ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ГАЗОВОЙ СМАЗКЕ

Ванеев К. А., Лагунова Е. О.
Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

Анализ существующих теоретических и экспериментальных исследований показывает, что основные допущения, принятые О. Рейнольдсом при разработке теории жидкостной смазки, остаются справедливыми и для большинства случаев, когда смазочным веществом является газ [1, 2]. Нелинейность основных дифференциальных уравнений, сложность форм смазочного слоя и граничных условий создают значительные трудности при исследовании и решении задач с использованием теории жидкостной смазки. Еще более значительные трудности возникают при исследовании работы газодинамических подшипников, где смазочным веществом является электропроводящий газ.

Ниже приводится метод, позволяющий найти автомодельное решение задачи гидродинамического расчета радиального подшипника, работающего на электропроводящей газовой смазке с учетом магнитного поля.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение электропроводящей газовой смазки в зазоре радиального подшипника при наличии магнитного поля (рис. 1). Предполагаем, что подшипник неподвижен, а шип вращается с постоянной угловой скоростью ω.

При решении задачи будем использовать уравнения «тонкого слоя» для вязкой несжимаемой жидкости при наличии магнитного поля.

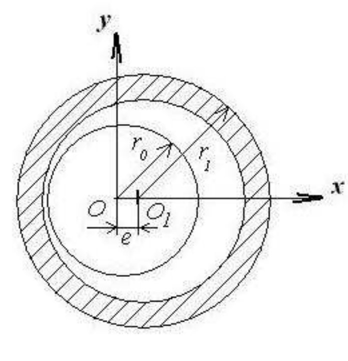


Рис. 1. Схематическое изображение подшипника.

2. Основные уравнения и граничные условия. Запишем для нашей задачи уравнение движения газовой смазки, уравнение неразрывности и уравнение состояния

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}}=0,\ \ \mu\frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial^2 \bar{r}^2}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta}-\sigma\bar{B}\left(\bar{E}-\bar{v}_\theta\bar{B}\right),\ \ \bar{P}=\bar{\rho}RT,\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{\rho}\bar{v}_r\right)+\frac{\bar{\rho}\bar{v}_r}{\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\bar{\rho}\bar{v}_\theta\right),\ \ (1)$$

где $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\theta$ — компонетны вектора скорости; $\bar{P}$ — гидродинамическое давление в смазочном слое; $\bar{E} = \{0, 0, E\}$ — вектор напряженности электрического поля; $\bar{B} = \{B, 0, 0\}$ — вектор магнитной индукции; σ — электропроводимость газа; $\bar{\rho}$ — плотность; R — удельная газовая постоянная; μ — динамический коэффициент вязкости; r, θ — полярные координаты.

Функции $\bar{E}(\bar{r}, \theta)$ $\bar{B}(\bar{r}, \theta)$ считаем заданными, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$B = \frac{\varphi(\theta)}{\bar{r}}, \quad E = \text{const}, \tag{3}$$

где $\varphi(\theta)$ — заданная функция угловой координаты.

Рассмотрим решение задачи при отсутствии электрического поля, $\bar{E} = 0$.

В полярной системе координат с полюсом в центре шипа уравнения контура и подшипника приближенно можно записать в виде

$$\bar{r} = r_0, \quad \bar{r} = r_1 + e\cos\theta, \tag{4}$$

где r_0 — радиус шипа; r_1 — радиус подшипника; e — эксцентриситет.

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях при $\bar{r} = r_1 + e\cos\theta$ и при $\bar{r} = r_0$ соответственно

$$\bar{v}_{\bar{r}} = 0, \quad \bar{v}_\theta = 0; \quad \bar{v}_{\bar{r}} = 0, \quad \bar{v}_\theta = \omega r_0; \quad \bar{p}(0) = \bar{p}(2\pi). \tag{5}$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\bar{v}_{\bar{r}} = \omega\delta u, \quad \bar{v}_\theta = \omega r_0 v, \quad \bar{r} = r_0 + \delta r, \quad \delta = r_1 - r_0, \quad p(0) = p(2\pi), \tag{6}$$

$$\bar{P} = p_a p, \quad \bar{\rho} = \rho^* \rho, \quad \rho = p, \bar{\varphi} = \varphi^* \varphi, \quad \bar{B} = B^* B.$$

Подставляя (6) в (1), с учетом (3) и (5) будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{\Lambda}\frac{dp}{d\theta} + Nv\varphi^2, \quad \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) = 0, \tag{7}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad r = 1 + \eta\cos\theta; \quad u = 0, \quad v = 1, \quad r = 0; \quad \eta = \frac{e}{\delta},$$

где $\Lambda = \dfrac{\mu\omega r_0}{p_a\delta^2}$ — параметр сжимаемости газа; $N = \dfrac{\sigma\delta^2\varphi^{*2}B^{*2}}{\mu r_0^2}$ — число Гартмана.

Точное автомодельное решение задачи (1)–(7) будем искать в виде

$$\rho u = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + U(r, \theta), \quad \rho v = \frac{\partial\psi}{\partial r} + V(r, \theta), \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{1 + \eta\cos\theta}, \quad h(\theta) = 1 + \eta\cos\theta. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим следующие уравнения

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} - N\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - N\varphi^2 V = \frac{\rho}{\Lambda}\frac{dp}{d\theta}, \quad -\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0. \tag{9}$$

Для решения системы уравнений (9) введем

$$U=\widetilde{u}\left(\xi\right)\eta\sin\theta,\quad V=\widetilde{v}\left(\xi\right),\quad \xi=\frac{r}{h(\theta)},\ \psi=\psi\left(\xi\right). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{p}{\Lambda}\frac{dp}{d\theta}=\frac{\widetilde{C_1}}{h^2}+\frac{\widetilde{C_2}}{h^3},\quad \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\xi}\xi=0,\quad \frac{d^3\widetilde{\psi}}{d\xi}-N\varphi_0^2\frac{d\widetilde{\psi}}{d\xi}=\widetilde{C_2},\ \frac{d^2\widetilde{v}}{d\xi^2}-N\varphi_0^2\widetilde{v}=\widetilde{C_1}. \tag{11}$$

Граничные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) будут следующими

$$\widetilde{\psi}'(0)=0,\quad \widetilde{\psi}'(1)=0,\quad \widetilde{u}(0)=0, \tag{12}$$

$$\widetilde{u}(1)=0,\quad \widetilde{v}(0)=-p,\quad \widetilde{v}(1)=0,\quad \int_0^1\widetilde{u}(\xi)d\xi=0,\quad p(0)=p(2\pi).$$

Решение задач

$$\widetilde{\psi}'=C_1e^{k_1\xi}+C_2e^{k_2\xi}-\frac{\widetilde{C_2}}{N\varphi_0^2}, \tag{13}$$

где

$$k_1=\sqrt{N}\varphi_0,\ k_2=-\sqrt{N}\varphi_0,\ C_2=\frac{\widetilde{C_2}\left(e^{\sqrt{N}\varphi_0}-1\right)}{N\varphi_0^2e^{\sqrt{N}\varphi_0}-e^{-\sqrt{N}\varphi_0}},\ C_1=-\frac{\widetilde{C_2}\left(e^{-\sqrt{N}\varphi_0}-1\right)}{N\varphi_0^2e^{\sqrt{N}\varphi_0}-e^{-\sqrt{N}\varphi_0}}.$$

$$\widetilde{v}=C_3e^{\sqrt{N}\varphi_0\xi}+C_4e^{-\sqrt{N}\varphi_0\xi}-\frac{\widetilde{C_1}}{N\varphi_0^2}, \tag{14}$$

$$C_3=-\frac{-e^{\sqrt{N}\varphi_0}N\varphi_0^2+e^{-\sqrt{N}\varphi_0}\widetilde{C_1}-\widetilde{C_1}}{N\varphi_0^2\left(e^{\sqrt{N}\varphi_0}-e^{-\sqrt{N}\varphi_0}\right)},\quad C_4=\frac{-e^{\sqrt{N}\varphi_0}N\varphi_0^2p+e^{\sqrt{N}\varphi_0}\widetilde{C_1}-\widetilde{C_1}}{N\varphi_0^2\left(e^{\sqrt{N}\varphi_0}-e^{-\sqrt{N}\varphi_0}\right)}.$$

Из условия $\displaystyle\int_0^1\widetilde{v}d\xi=0$ найдем $\widetilde{C_1}$

$$\widetilde{C_1}=A_1p, \tag{15}$$

где $A_1=\dfrac{e^{\sqrt{N}\varphi_0}N^2\varphi_0^2-N^2\varphi_0^2}{2e^{\sqrt{N}\varphi_0}N-e^{\sqrt{N}\varphi_0}N^{\frac{3}{2}}\varphi_0-2N-N^{\frac{3}{2}}\varphi_0}$.

Для нахождения безразмерного гидродинамического давления приходим к следующему уравнению

$$\frac{p}{\Lambda}\frac{dp}{d\theta}=\frac{\widetilde{C_1}}{h^2}+\frac{\widetilde{C_2}}{h^3}. \tag{16}$$

Интегрируя уравнение (16) от 0 до θ, будем иметь

$$p=\sqrt{1+2\Lambda\int_0^{\theta}\left(\frac{\widetilde{C_1}}{h^2}+\frac{\widetilde{C_2}}{h^3}\right)d\theta}. \tag{17}$$

Из условия $p(0) = p(2\pi)$ с точностью до $O(\eta^2)$ найдем $\widetilde{C_2}$

$$\widetilde{C_2} = -\frac{\int_0^{2\pi} A_1\,(1 - 2\eta\cos\theta)d\theta}{\int_0^{2\pi}\,(1 - 3\eta\cos\theta)d\theta} = -A_1. \tag{18}$$

С учетом (17) с точностью до $O(\eta^2)$ выражение (15) примет вид

$$\widetilde{C_1} = A_1\left[1 + 2\Lambda\,(2 - 5\eta\cos\theta)\right], \tag{19}$$

а выражение p примет вид

$$p = 1 + \Lambda A_1\left(2\theta - 5\eta\sin\theta - 2A_1\Lambda\cos\theta + \frac{5}{2}A_1\Lambda\eta\cos^2\theta\right). \tag{20}$$

Проекции главного вектора воздействия смазок на шип $W = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ определяется формулами

$$F_x = -r_0\int_0^{2\pi}\overline{P_1}\sin\theta d\theta, \quad F_y = -r_0\int_0^{2\pi}\overline{P_1}\cos\theta d\theta \tag{21}$$

Заметим, что в силу периодичности давления $\overline{P_1}$ и четности $\cos\theta$ второй интеграл в (21) равен нулю. Первый интеграл проще вычислить по частям

$$F_x = -r_0\int_0^{2\pi}\frac{d\overline{P_1}}{d\theta}\cos\theta d\theta \tag{22}$$

Подставляя (20),с учетом (6), в (22), найдем выражение для несущей способности подшипника

$$W = F_x = 5r_0p_aA_1\Lambda\eta\pi.$$

Найдем силу трения по формуле

$$L = \mu\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial\overline{v_\theta}}{\partial r}\right|_{\xi=0}d\theta = \frac{\mu\omega r_0}{\delta}\int_0^{2\pi}\widetilde{v}'\,(0)d\theta\,.$$

Найдем расход смазки по формуле

$$Q = hu^*\int_1^0\psi'\,(\xi)d\xi\,.$$

Результаты численного анализа аналитических выражений для основных рабочих характеристик радиального подшипника показывают: с увеличением числа Гартмана имеет место незначительное увеличение несущей способности (рис. 2). С увеличением параметра сжимаемости газа имеет место значительное увеличение несущей способности. Данный метод может быть использован в расчете газодинамических уплотнителей.

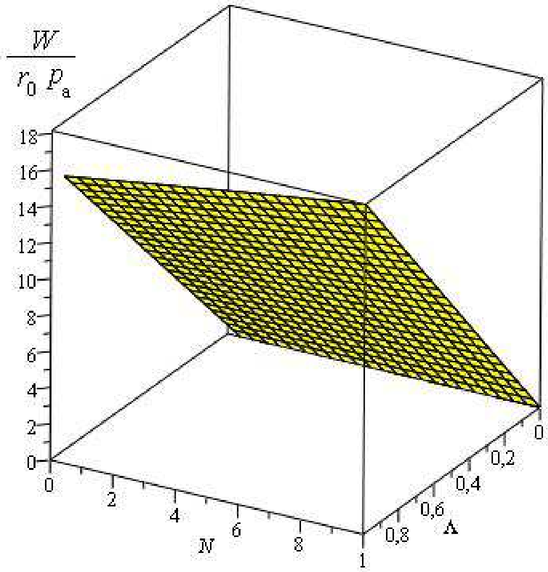


Рис. 2. Зависимость безразмерной несущей способности $\dfrac{W}{r_0 p_a}$ от числа Гартмана и параметра сжимаемости газа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Снопов А. И.* Теоретические основы работы газодинамических опор. Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. С. 3–4.

[2] *Константинеску В. Н.* Газовая смазка. М.: Машностроение, 1968. С. 36–38.

Vaneev K. A., Lagunova E. O. *A method of hydrodynamic calculation of radial bearing working on electroconductive gas lubrication.* On the base of the state equation and movement equations for viscous incompressible liquid at the presence of magnetic field the exact self-model solution for electroconductive gas lubricated radial bearing is obtained by method of hydrodynamic calculation. Influence of the rate of gas compressibility and Hartmann number on the basic working characteristics of radial bearing is studied.

О ВНЕДРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В МЯГКИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ

Волков С. С., Айзикович С. М.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Приводится эффективный метод построения решения задачи о внедрении сферического индентора в мягкий функционально-градиентный упругий слой на жестком основании. Описанный метод позволяет строить решение задачи для всего диапазона значений геометрического параметра. Рассмотрен ряд характерных законов изменения модуля Юнга по глубине.

Введение и постановка задачи. Решение классической задачи Герца для однородного полупространства хорошо известно, см. например [1]. В [2] постановка задачи Герца обобщается и рассматривается случай, когда сферический индентор вдавливается в слой, лежащий на недеформируемом основании или на однородном полупространстве, имеющем упругие свойства, отличные от упругих свойств слоя. Задача сводится к решению интегрального уравнения. Приближенное решение было ранее построено двумя методами: методом работы [3], который эффективен для очень тонких слоев, лежащих на жестком основании, когда толщина H слоя меньше радиуса контакта a ($\lambda = H/a < 0{,}5$) и методом работы [4], который применим в случае, когда толщина слоя такова, что $\lambda > 1{,}7$. Оба этих метода были использованы с некоторыми изменениями в случае, когда одно из контактирующих тел представляет собой слой, лежащий на упругом полупространстве.

В данной работе рассматривается контактная задача о внедрении сферического индентора в функционально-градиентный слой на упругом основании в предположении, что слой существенно мягче подложки.

Пусть сферический индентор вдавливается в поверхность Γ неоднородного упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве Ω, силой P. С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, φ, z). Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта сферический индентор аппроксимируется жестким параболическим индентором

$$z = \psi(r) = \beta r^2. \tag{1}$$

Аппроксимация обоснована для малого радиуса контакта $a < 0{,}1R$ для однородных тел [5]. Это условие выполняется практически для всех случаев упругого сферического внедрения. Вне индентора поверхность полупространства не загружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z. Коэффициенты Ламе изменяются с глубиной по следующему закону:

1) $\Lambda = \Lambda_1(z),\ M = M_1(z),\ -H \leqslant z < 0$;
2) $\Lambda = \Lambda_0,\ M = M_0(z),\ -\infty < z < -H$.

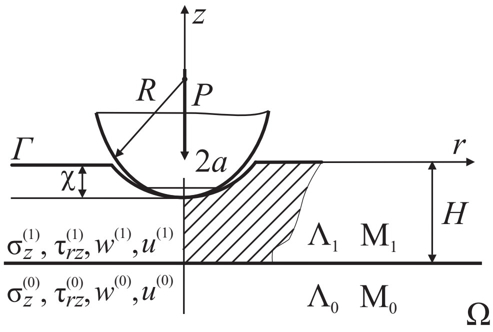


Рис. 1.

При сделанных предположениях граничные условия будут иметь вид:

$$z=0,\ \tau_{zr}=\tau_{z\varphi},\ \begin{cases}\sigma_z=0, & r>0,\\ w=-\delta(r)=-(\chi-\psi(r)), & r\leqslant a.\end{cases}$$

и (2)

$$\begin{cases}\tau_{zr}^{(1)}=\tau_{zr}^{(2)},\sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)},\\ w^{(1)}=w^{(2)},u^{(1)}=u^{(2)}.\end{cases}$$

При $(r;-z)\to\infty$ напряжения в полупространстве исчезают. Требуется определить перемещение штампа и распределение контактных нормальных напряжений под штампом:

$$\sigma_z^{(1)}\mid_{z=0}=-q(r),\ r\leqslant a. \tag{3}$$

Построение решения задачи. Применением интегральных преобразований Ханкеля задача сводится к решению следующего интегрального уравнения [6]:

$$\int\limits_0^1\tau(\rho)\rho d\rho\int\limits_0^\infty L(u)J_0(ur\lambda^{-1})J_0(u\rho\lambda^{-1})du\ =\ \lambda\Theta_0(0)f(r),\quad r\leqslant 1. \tag{4}$$

Трансформанта $L(u)$ строится численно методом работы [7].

В [6] описан метод аппроксимации трансформанты ядра уравнения выражениями вида

$$L(u)=L_\Pi^N(u)+L_\Sigma^M(u),\quad\text{где}$$

$$L_\Pi^N(u)=\prod_{i=1}^N\frac{u^2+A_i^2}{u^2+B_i^2},\ L_\Sigma^M(u)=\sum_{k=1}^M\frac{c_k|u|}{u^2+D_k^2}\ . \tag{5}$$

Здесь $A_i,\ B_i,\ D_k\in C;\ C_k\in R$ — некоторые константы.

Для трансформанты ядра $L(u)\in L_\Pi^N$ в работе [6], получено аналитическое выражение для приближенного определения контактных напряжений и вдавливающей силы следующего вида:

$$\tau(r)=\frac{2a_{\Theta(0)}}{\pi R}\left[2L_N^{-1}(0)\sqrt{1-r^2}+\sum_{i=1}^N C_iA_i\lambda^{-1}\int\limits_r^1\frac{\operatorname{sh}(A_it)}{\sqrt{t^2-r^2}}dt\right],\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \tag{6}$$

$$P = \frac{4a^3_{\Theta(0)}}{\pi R}\left[\frac{2}{3}L_N^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{N} C_i(\mathrm{ch}(A_i\lambda) - A_i^{-1}\lambda\,\mathrm{ch}(A_i\lambda))\right]. \qquad (7)$$

Неизвестные C_i определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений [6].

Численные примеры. Рассмотрим внедрение параболического индентора в однородный слой, лежащий на жестком упругом основании. Параметр η, характеризующий относительную жесткость, принимает значения 2, 5, 10, 100, 1000 ($\eta = E_0(E_1(h))^{-1}$), коэффициент Пуассона, не нарушая общности, полагаем равным 0,3.

$$\Delta_L(u) =\mid (L_{\Pi}^N(u) - L(u))/L(u) \mid \cdot 100\%. \qquad (8)$$

Формула (8) введена для оценки погрешности аппроксимации трансформанты ядра выражениями вида $L_{\Pi}^N(u)$.

В таблице 1 приведены значения величины $\tau^* = 2R\tau(0)/\Theta_0(0)a$ характеризующей распределение контактных напряжений при $r = 0$.

$\max\Delta_L(u)$	1,4%	2,8%	3,3%	3%	3,2%	
N	8	8	10	10	20	—
η	2	5	10	100	1000	
$\lambda = 0{,}25$	4,098	6,375	7,991	10,075	10,326	10,342
$\lambda = 1$	2,866	3,144	3,252	3,342	3,389	3,305
$\lambda = 4$	2,562	2,555	2,560	2,556	2,542	2,568

Таблица 1. Контактные напряжения.

В таблице 2 приведены значения величины $P^* = 2RP/\Theta_0(0)a^3$, определяющей связь между вдавливающей силой и размером зоны контакта.

$\lambda = 0{,}25$	7,938	11,557	13,973	17,048	17,447	17,66
$\lambda = 1$	5,895	6,365	6,553	6,709	6,771	6,82
$\lambda = 4$	5,363	5,355	5,365	5,360	5,336	5,38

Таблица 2.

В таблицах 1 и 2 значения крайнего правого столбца взяты из монографии [8] и характеризуют τ^* и P^* для случая вдавливания параболического штампа в слой, лежащий на недеформируемом основании.

Из анализа таблицы 1 видно, что максимальная разница между контактными напряжениями при $\eta = 1000$ и значениями для недеформируемого основания не превышает 3% при $\lambda = 1$. Заметим, что из таблиц 1 и 2 видно, что значения τ^* и P^* принимают близкие значения при $\eta = 100$ и $\eta = 1000$. Обратим внимание также на то, что упругие свойства основания перестают оказывать сильное влияние на распределение контактных напряжений для значений параметра $\lambda > 1$ (если сравнивать значения напряжений при η равном 2 и 1000, то максимальная разница не превышает 15% для $\lambda = 1$).

Ниже приводятся примеры, когда упругие свойства слоя изменяются непрерывно с глубиной и учтен скачок упругих свойств на границе покрытие-подложка. Численные примеры реализованы в случае, когда $\eta = 100$. Слой является функционально-градиентным. Законы, по которым меняется модуль Юнга неоднородного покрытия, следующие:

1) $\varphi_1(z) = \varphi_0 + (\varphi_0 - 1)\, z/h$,

2) $\varphi_2(z) = 1/\varphi_0 - (\varphi_0 - 1)\, z/h$.

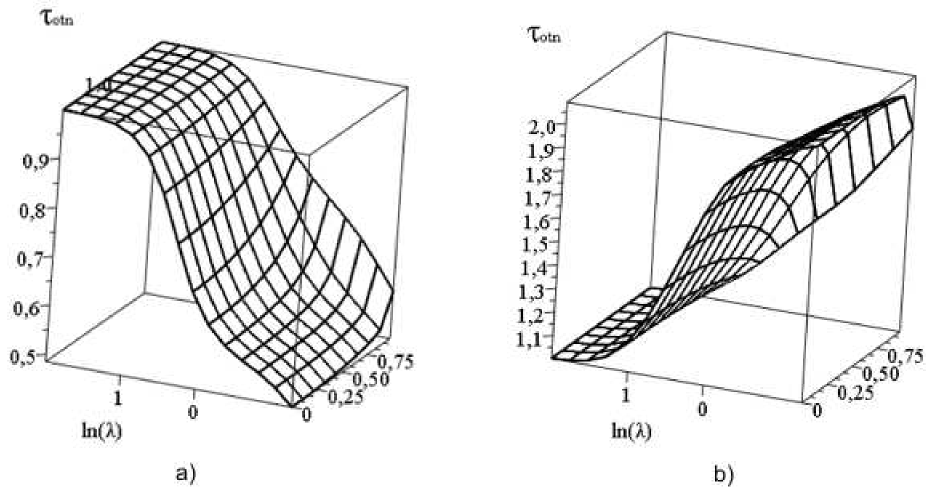


Рис. 2.

На рис. 2 построены контактные напряжения

$$\tau_{отн}(r,\lambda) = \tau_{неодн}(r,\lambda)\Theta_0^{одн}(0)(\tau_{одн}(r,\lambda)\Theta_0^{неодн}(0))^{-1},$$

$\tau_{одн}(r,\lambda)$ — контактные напряжения для однородного слоя, построенного в случае, когда $\eta = 100$, для законов 1–2 соответственно, при $\varphi_0 = 3{,}5$. На рисунках $2(a,b)$ изображены графики $\tau_{отн}(r,\lambda)$, построенных по формуле (6). На всех изображенных графиках контактных напряжений $r \in [0 \ldots 0{,}98]$, $\lambda \in [0{,}01 \ldots 100]$. Здесь и далее по λ берется логарифмическая шкала, т. е. на шкале изображены степени числа 10 (число 0 на шкале соответствует 1, 2 — 100).

Из графиков на рис. 2 a) и 2 b) видно, что для линейного убывающего закона неоднородности величина $\tau_{отн}(r,\lambda)$ убывает по мере уменьшения характерного геометрического параметра λ, а для линейного возрастающего закона величина $\tau_{отн}(r,\lambda)$ возрастает по мере уменьшения характерного геометрического параметра λ.

Выводы. Метод, предлагаемый в данной работе, позволяет строить эффективное решение задачи о внедрении штампа в мягкий функционально-градиентный упругий слой на жестком основании для всего диапазона изменений значений характерного геометрического параметра задачи и учитывать влияние упругих свойств жесткой подложки на распределение контактных напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (09-08-011410a, 10-08-90025-Bel-a. 11-08-91168-ГФЕН_a), АВЦП 2.1.2/10063, ГК №11.519.11.3015, 11.519.11.3028.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Джонсон К. Л.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.

[2] *El-Sherbiney M. G. D., Halling J.* The Hertzian Contact of Surfaces Covered with Metallic Films // Wear. 1976. Vol. 40, № 3. Pp. 325–337.

[3] *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований // В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск. 1978. Вып. 1. 64 с, вып. 2. 68 с.

[4] *Ворович И. И., Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 445–455.

[5] *Suresh S., Giannakopoulos A. E.* A new method for estimating residual stresses by instrumented sharp indentation // Acta mater. 1998. Vol. 46, № 16. Pp. 5755–5767.

[6] *Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С. и др.* Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 192 с.

[7] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и матем. физики. 1987. Т. 27, № 1. С. 93–101.

[8] *Александров В. М., Пожарский А. Д.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.

Volkov S. S., Aizikovich S. M. *The penetration a spherical indenter in soft functionally graded elastic layer*. An effective method is proposed for penetration problem solution constructing for a spherical indenter and soft functionally graded elastic layer on a rigid foundation. The method described allows one to construct the solution for the full values range of geometrical parameter of the problem. A number of the Young's modulus characteristic variations in depth is investigated.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

Денина О. В.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассмотрена обратная задача реконструкции сферической полости малого относительного размера в упругом изотропном цилиндре при анализе его продольных колебаний. При использовании методов теории возмущений получены асимптотические формулы для определения параметров полости по информации о поправках к резонансным частотам. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Задачи идентификации дефектов в упругих телах являются чрезвычайно важными и относятся к классу обратных задач теории упругости. Полости являются широко распространенным типом дефектов, которые возникают, как правило, на стадиях изготовления и эксплуатации конструктивных элементов. Дефекты такой природы являются концентраторами напряжений и часто в значительной степени снижают несущую способность конструкций. Исследование колебаний тел с локализованными неоднородностями позволяет выявить влияние неоднородностей такого типа на динамическую концентрацию напряжений, прогнозировать разрушение конструкций на ранних стадиях. Отметим, что на практике наиболее важной является информация не о конкретном виде поверхности дефекта и его локальной геометрии, а о его типе (полость или трещина) и его характерных размерах, поскольку именно эта информация является главной и определяющей с точки зрения механики разрушения. О типе дефекта и его размерах можно судить по информации об изменении первых резонансных частот в предположении о малости дефекта по сравнению с характерными геометрическими размерами тела. При этом возможно получение поправок для первых резонансных частот в аналитической форме методами теории возмущений [1]. В монографии [2] приведена общая схема получения поправок для упругого анизотропного тела, ослабленного внутренней полостью. В работе [3] подход, описанный в [2], был применен для определения поправок в резонансных частотах в задаче об установившихся продольных колебаниях с частотой ω упругого изотропного консольно закрепленного стержня длины l с полостью малого размера под действием силы на конце. В работе [3] была использована модель неоднородного стержня, для которой наличие полости характеризовалось зависимостью площади поперечного сечения от продольной координаты в виде: $F(x) = F_0(1-\varepsilon\eta(x))$, где $\varepsilon = r_0^2/R^2$ — малый параметр (r_0 — радиус полости, R — радиус поперечного сечения стержня), F_0 — площадь сечения сплошного стержня, $\eta(x)$ — положительная функция с компактным носителем, моделирующая наличие полости:

$$\eta(x) = \begin{cases} > 0, & x \in \ [a,b] \\ = 0, & x \notin \ [a,b] \end{cases} , \quad [a,b] \subset \ [0,l] \, .$$

Собственные формы колебаний и собственные частоты разыскивались в виде:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2) \ , \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\omega_1 + o(\varepsilon^2) \ .$$

Для стержня, ослабленного сферической полостью с центром в точке c_0 радиуса r_0, была получена следующая формула для вычисления поправок к собственным частотам:

$$\omega_{1n} = -\frac{8}{3}\omega_{0n}^2 \frac{r_0}{l} \cos\left(2\omega_{0n}\frac{c_0}{l}\right) . \tag{1}$$

Здесь ω_{0n} — собственные частоты продольных колебаний стержня без полости.

На основании (1) была получена формула для нахождения центра полости при использовании информации о поправках к первой и второй частотам:

$$c_0 = \pi^{-1} l \arccos\left(\pm\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} + 27}\right) , \tag{2}$$

причем выбирается знак «+», если $\omega_{11} < 0$, и знак «−», если $\omega_{11} > 0$. После нахождения c_0, r_0 находится из соотношения (1).

Описанный подход был использован для нахождения параметров осесимметричной сферической полости радиуса $r_0 = 0.2R = 0.02\,\text{м}$ в стержне,длина оси которого $l = 1\,\text{м}$, радиус окружности $R = 0.1\,\text{м}$.

В таблице 1 приведены значения первого и второго безразмерных волновых чисел $\kappa = \omega l\sqrt{\rho/E}$, полученных путем прямого расчета собственных значений интегрального оператора Фредгольма второго рода [3], для сплошного стержня и для стержня, ослабленного полостью.

	Без полости	$c_0 = 0.1$	$c_0 = 0.2$	$c_0 = 0.3$	$c_0 = 0.8$	$c_0 = 0.9$
κ_1	1.57077	1.56913	1.56937	1.56974	1.57212	1.57236
κ_2	4.71180	4.70874	4.71329	4.71656	4.71014	4.71472

Таблица 1. Безразмерные волновые числа для стержневой модели.

В таблице 2 приведены результаты восстановления центра и радиуса сферической полости по поправкам к волновым числам. Отметим, что погрешность восстановления центра полости не превышает 1.2%, погрешность восстановления радиуса полости не превышает 0.9%.

	$c_0 = 0.1$	$c_0 = 0.2$	$c_0 = 0.3$	$c_0 = 0.8$	$c_0 = 0.9$
c_0^*	0.0996	0.1976	0.0294	0.7977	0.8990
r_0^*	0.0202	0.0202	0.0201	0.0200	0.0200

Таблица 2. Результаты восстановления центра и радиуса полости для одномерной стержневой модели.

Далее в настоящем исследовании был проведен эксперимент по нахождению параметров осесимметричной сферической полости, радиуса $r_0 = 0.2R = 0.02\,\text{м}$ в упругом изотропном консольно закрепленном цилиндре, длина оси которого $l = 1\,\text{м}$, радиус окружности $R = 0.1\,\text{м}$.

Рассматриваемая задача решалась с использованием конечно-элементного пакета Ansys 11.0. Была написана программа на макроязыке APDL для Ansys для вычисления собственных частот в цилиндре в зависимости от положения центра полости. При этом при моделировании был использован объемный конечный элемент SOLID 95.

В настоящей работе расчеты проводились для цилиндра, изготовленного из алюминия.

На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика свободного торца сплошного цилиндра. Отметим, что «пики» соответствуют первой и второй резонансным частотам.

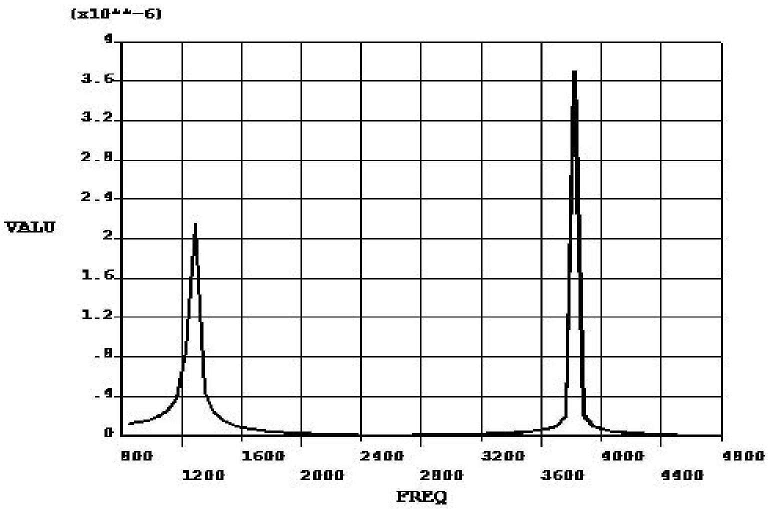


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика свободного торца сплошного цилиндра.

Собственные частоты, вычисленные с помощью ANSYS были обезразмерены. В табл. 3 приведены значения первого и второго безразмерных волновых чисел для сплошного цилиндра и для цилиндра, ослабленного полостью.

	Без полости	$c_0 = 0.1$	$c_0 = 0.2$	$c_0 = 0.3$	$c_0 = 0.8$	$c_0 = 0.9$
κ_1	1.57827	1.57469	1.57457	1.57593	1.57951	1.57988
κ_2	4.71410	4.70571	4.71336	4.71866	4.70879	4.71595

Таблица 3. Волновые числа для трехмерной модели цилиндра.

На основании формул (1)–(2) при использовании информации о поправках к волновым числам, представленным в табл. 3, проведен вычислительный эксперимент реконструкции параметров сферической полости в цилиндре.

В табл. 4 приведены результаты восстановления центра полости c_0^* и радиуса r_0^*. Отметим, что в этом случае погрешность восстановления параметров полости по сравнению с одномерной стержневой моделью возрастает (максимальная погрешность восстановления центра полости составляет 24%, максимальная погрешность восстановления радиуса полости составляет 26%). Наиболее точно параметры полости восстанавливаются, когда центр полости находится близко к свободному торцу цилиндра. В случае, когда центр полости находится близко к центру оси цилиндра, формулы (1)–(2) оказываются неприменимыми для идентификации параметров полости.

	$c_0 = 0.1$	$c_0 = 0.2$	$c_0 = 0.3$	$c_0 = 0.8$	$c_0 = 0.9$
c_0^*	0.0756	0.161	0.2218	0.7159	0.8715
r_0^*	0.0259	0.0272	0.0244	0.0211	0.0202

Таблица 4. Результаты восстановления центра и радиуса полости для трехмерной модели цилиндра ($R = 0.1L$).

При уменьшении соотношения радиуса цилиндра к его длине точность реконструкции параметров полости возрастает.

В табл. 5 приведены результаты восстановления центра c_0^* и радиуса r_0^* осесимметричной полости для цилиндра (длина оси которого $l = 1$ м, радиус окружности $R = 0.05$ м). Исходный радиус полости — $r_0 = 0.2R = 0.01$ м.

	$c_0 = 0.1$	$c_0 = 0.2$	$c_0 = 0.3$	$c_0 = 0.8$	$c_0 = 0.9$
c_0^*	0.090	0.164	0.221	0.723	0.878
r_0^*	0.0128	0.0126	0.0124	0.010	0.0098

Таблица 5. Результаты восстановления центра и радиуса полости для трехмерной модели цилиндра ($R = 0.05L$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований №10-01-00194-а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

[2] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

[3] *Бочарова О. В., Ватульян А. О., Жарков Р. С.* Реконструкция полости в упругом стержне // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2006. № 2. С. 28–32.

Denina O. V. *Detection of local inhomogeneities in elastic cylinder*. An inverse problem, concerning the reconstruction of small relative size spherical cavity in elastic isotropic cylinder via analysis of rod's longitudinal vibrations is considered. Asymptotic formulae to detect cavity parameters via information about resonance frequency amendments using perturbation theory methods are derived. The results of numerical experiments are presented.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Еремеев В. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках трехмерной нелинейной теории упругости рассмотрена задача о потере устойчивости упругой полосы. Полоса состоит из трех слоев. Внутренний слой (ядро) предварительно растянут или сжат. Проанализирвана зависимость критической деформации от начальных деформаций.

1. Введение. Теория устойчивости упругих систем является одной из старейших проблем механики деформируемого твердого тела. Многочисленные исследования устойчивости упругих систем в основном проводятся в рамках одномерных и двумерных теорий стержней, балок, пластин и оболочек, см., например, [1]. Вместе с тем в ряде случаев, анализ устойчивости с использованием этих теорий невозможен или существенно затруднен. В этих случаях необходимо привлекать методы пространственной нелинейной теории упругости [2]. К числу таких случаев можно отнести потерю устойчивости при наличии внутренних начальных (предварительных) напряжений.

В данной работе в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена задача об устойчивости трехслойной пластинки, во внутреннем слое которой действуют начальные напряжения. Интерес к учету начальных напряжений в многослойных пластинках связан, например, с существованием технологических остаточных напряжений, которые возникают при изготовлении таких конструкций. В последнее время теория многослойных тонкостенных элементов конструкций нашла также приложения в наномеханике. Например, изготавливаемые нанопленки, как правило, состоят из нескольких слоев, в которых также существуют начальные напряжения, вызванные несоответствием кристаллических решеток или условиями получения.

В качестве уравнения состояния здесь использована модель несжимаемого неогукова материала (модель Трелоара) [2]. Предполагается, что внутренний слой подвернут растяжению или сжатию, так что в нем существуют начальные деформации и напряжения. Далее трехслойная пластинка подвергается аффинной деформации. Устойчивость пластинки изучается статическим методом Эйлера, состоящим в определении параметров деформации, при которых линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения, см. [2]. Составлены линеаризованные уравнения равновесия для каждого слоя. Решения этих уравнений построены методом разделения переменных. Получено уравнение для определения критических деформаций и вычислена зависимость критических значений от начальных деформаций.

2. Основные соотношения. В статических и динамических задачах как линейной, так нелинейной теории упругости за отсчетную конфигурацию, от которой отсчитывается деформация, обычно принимают естественное, ненапряженное состояние тела. Однако бывают ситуации, когда отсчетную конфигурацию невозможно выбрать так, чтобы она была ненапряженной для всего тела. Такой случай имеет место, когда тело содержит предварительно напряженные включения, которые создают несовместные (разрывные) деформации. Предварительно напряженные включения возникают, например, при соединении элементов конструкций с натягом, в конструкциях с остаточными напряжениями, обусловленными пластическими деформациями, неравномерным нагревом, фазовыми переходами, напылением поверхностного слоя и другими факторами. В указанных случаях за отсчетную конфигурацию следует принимать такую, которая является естественной для одних частей тела и напряженной для других частей.

Уравнения нелинейной теории упругости относительно отсчетной конфигурации записываются следующим образом (массовые силы отсутствуют) [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}), \tag{1}$$

где ∇ — оператор градиента в отчетной конфигурации, $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{C}$ — градиент деформации.

Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$ зависят от отсчетной конфигурации. Пусть мы имеем две отсчетные конфигурации κ и κ', $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — соответствующие им градиенты деформации, отвечающие одной текущей конфигурации χ: $\mathbf{C}: \ \kappa \to \chi$, $\mathbf{C}': \ \kappa' \to \chi$. Справедлива следующая формула преобразования градиента деформации при изменении отсчетной конфигурации: $\mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}'$, $\mathbf{P}: \ \kappa \to \kappa'$, где $\mathbf{P}$ — градиент деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой.

Запишем выражения для тензоров Пиолы в разных отсчетных конфигурациях

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}' = (\det \mathbf{C}')\mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{T}$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши. Отсюда выводим связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$

$$\mathbf{D}' = (\det \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}.$$

В случае несжимаемого материала определители градиента деформации в разных отсчетных конфигурациях и градиента деформации перехода равны единице: $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}' = \det \mathbf{P} = 1$.

Модель несжимаемого неогуковского материала относительно ненапряжений отсчетной конфигурации задаётся следующим выражением удельной потенциальной энергии деформации W и тензора напряжений Пиолы

$$W = \frac{\mu}{2}\left[\operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T) - 3\right], \quad \mathbf{D} = \mu \mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T},$$

где μ — параметр материала, играющий роль модуля сдвига, p — давление в несжимаем теле, не выражаемое через деформацию.

Тензор напряжений Пиолы для неогуковского материала относительно преднапряженной отсчетной конфигурации, согласно полученным выше соотношениям, имеет вид $\mathbf{D}' = \mu \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}' - p'\mathbf{C}'^{-T}$.

Для однородной деформации трехслойной плиты с преднапряженным средним слоем имеем $\mathbf{P} = \alpha \boldsymbol{i}_1 \boldsymbol{i}_1 + \beta \boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_2 + \alpha^{-1}\beta^{-1} \boldsymbol{i}_3 \boldsymbol{i}_3$. Для крайних слоев отсчетная конфигурация ненапряженная, для среднего — предварительно напряженная, с градиентом деформации $\mathbf{P}$. Так как после склеивания слои деформируются совместно, имеем

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' = \lambda_1 \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + (\lambda_1\lambda_2)^{-1}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3.$$

Для формулировки задачи устойчивости равновесия применяется метод линеаризации нелинейных уравнений [2]. Этот метод состоит в том, что на состоянии однородной деформации плиты, которое называется невозмущенным, накладывается малая деформация. Линеаризованные уравнения равновесия выводятся путем разложения решения в ряд по степеням малого параметра η. Полагаем $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \eta\boldsymbol{w}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \eta\dot{\mathbf{D}} + \dots$

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d}{d\eta}\mathbf{D}(\mathbf{C} + \eta\nabla\boldsymbol{w})\Big|_{\eta=0}.$$

Здесь знак «0» внизу относится к невозмущенному состоянию, $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор точек тела в деформированном состоянии, $\boldsymbol{w}$ — вектор малых добавочных перемещений. Подставляя эти разложения в нелинейные уравнения равновесия и граничные условия, удерживая члены только первого порядка относительно параметра η, получим линейную однородную краевую задачу для векторной функции $\boldsymbol{w}(x_1, x_2, x_3)$.

Для неогуковского материала линеаризованные уравнения состояния имеют вид[3]

$$\dot{\mathbf{D}} = \mu\nabla\boldsymbol{w} - \dot{p}\mathbf{C}^{-T} + p\mathbf{C}^{-T}\cdot\nabla\boldsymbol{w}\cdot\mathbf{C}^{-T}. \tag{2}$$

Аналогично находится $\dot{\mathbf{D}}'$:

$$\dot{\mathbf{D}}' = \mu\mathbf{A}\cdot\nabla\boldsymbol{w} - \dot{p}\mathbf{C}^{-T} + p'\mathbf{C}^{-T}\cdot\nabla\boldsymbol{w}\cdot\mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{A} = \alpha^2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \beta^2\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + (\alpha\beta)^{-2}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3. \tag{3}$$

Для несжимаемого материала в число разрешающих уравнений входит условие несжимаемости, линеаризованная версия которого имеет вид

$$\mathrm{tr}(\mathbf{C}^{-1}\cdot\nabla\boldsymbol{w}) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим полученные уравнения в случае трехслойной плиты с начальными напряжениями. Пусть плита имеет толщину $2h$,внутренний слой имеет толщину h_1, и $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$. Средний слой растянут в α раз вдоль оси x_1, в β раз вдоль оси x_2, затем скрепляется с одинаковыми верхним и нижним слоями. После этого и плита деформируется однородным образом как одно целое, под действием сил, приложенных к боковой поверхности. Пусть λ_1, λ_2 — коэффициенты растяжения плиты в направлениях x_1 и x_2 соответственно, μ — модуль сдвига крайних слоев, μ' — модуль сдвига среднего слоя, p и p' — давления. Постоянные величины p и p' находятся из условия равенства нулю вертикальных составляющих напряжений среднего и верхнего слоев в невозмущенном состоянии и даются формулами $p = \mu\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}$, $p' = \mu'\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}$.

Таким образом, линеаризованная задача для трехслойной плиты состоит из уравнений равновесия (1), в которых используются линеаризованные уравнения состояния (2) для внешних слоев и (3) для внутреннего слоя, линеаризованное условие несжимаемости (4), дополненных соответствующими граничными условиями, которые здесь не приводятся.

Неизвестными функциями трех переменных x_1, x_2, x_3 в каждом слое являются следующие: w_k, $\dot{p}$ (k=1, 2, 3).

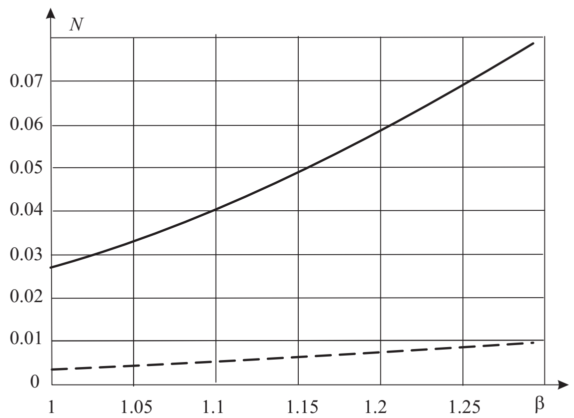
Для каждого слоя решение разыскивается в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3)\cos\frac{nx_1}{a}\sin\frac{mx_2}{b}, \quad w_2 = W_2(x_3)\sin\frac{nx_1}{a}\cos\frac{mx_2}{b}, \\ w_3 &= W_3(x_3)\sin\frac{nx_1}{a}\sin\frac{mx_2}{b}, \quad \dot{p} = P(x_3)\sin\frac{nx_1}{a}\sin\frac{mx_2}{b}, \end{aligned} \tag{5}$$

$m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. В результате получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно множителей, зависящих от x_3. Ее решение весьма громоздко и здесь не приводится. Подстановка найденного решения в краевые условия приводит к уравнению, связывающему критические деформации вида $D(\lambda_1, \lambda_2; \alpha, \beta, h, h_1, \mu, \mu', m, n) = 0$.

3. Результаты расчетов. Далее ограничимся случаем плоской деформации, то есть случаем $\alpha = 1$, $\lambda_1 = 1$, $W_1 = 0$, $n = 1$. Величину λ_2 обозначим для простоты через λ.

В качестве тестового примера вначале рассмотрена однослойная плита. Показано, что наблюдается очень хорошее совпадение при малых толщинах с результатами теории пластин [1]. При увеличении толщины пластинки наблюдаются более существенные расхождения критических усилий, полученных на основе трехмерной и двумерной теорий.



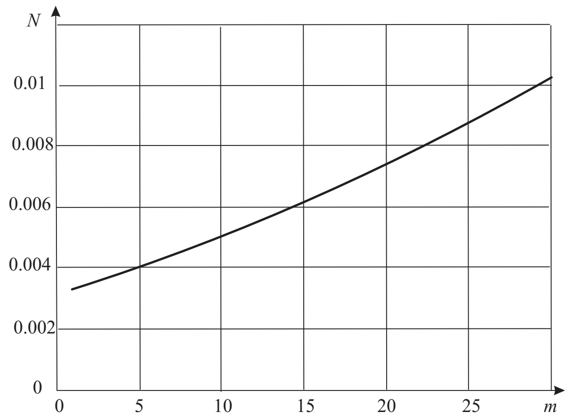


Рис. 1. Слева приведена зависимость критического усилия от начального удлинения, упругие модули слоев равны между собой: $\mu = \mu'$ и когда упругие модули отличаются в 10 раз: $\mu = 10\mu'$ (пунктирная линия). Справа дана зависимость критического усилия N от номера моды выпучивания m, $\beta = 1.1$, упругие модули отличаются в 10 раз: $\mu = 10\mu'$.

Рассмотрим теперь влияние начальных напряжений на потерю устойчивости для трехслойной плиты. На рис. 1 показаны безразмерные критические усилия $N = 1/2\mu \int_{-h}^{h} D_{22} dx_3$ для разных значений начального удлинения β. Видно, что начальное растяжение приводит к увеличению критического усилия. Это увеличение тем больше, чем больше модуль упругости внутреннего слоя. Также показаны значения критического усилия как функция номера моды выпучивания. Здесь для удобства функция дискретного аргумента m показана непрерывной линией. Использованы значения: $h = 0.1$; $h_1 = 0.01$.

На рис. 2 представлена зависимость критической деформации $\varepsilon^* = \lambda^* - 1$ от начальной деформации $\beta - 1$. Видно, что существуют значения β, при которых по-

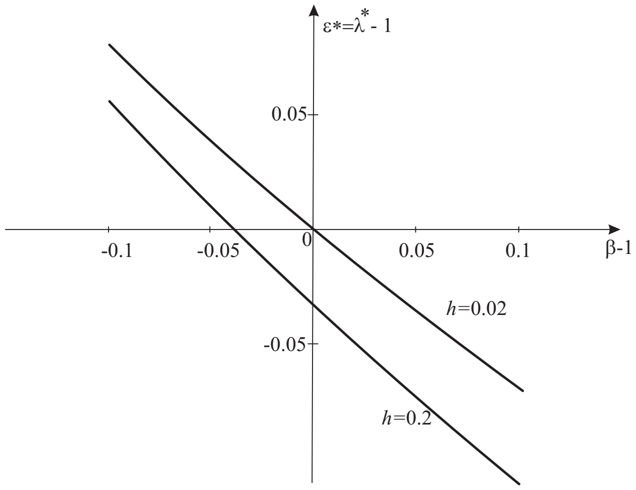


Рис. 2. Критические деформации в зависимости от начальных деформаций при разных толщинах плиты.

теря устойчивости происходит при $\lambda = 1$, то есть при отсутствии дополнительных деформаций.

Полученные результаты показывают существенное влияние начальных напряжений на потерю устойчивости. В частности, потеря устойчивости возможно только благодаря действию начальных напряжений без приложения внешних нагрузок.

Автор благодарит Л. М. Зубова за помощь в подготовке статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (09-01-00459) и в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

[2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1990. 512 с.

[3] *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632–642.

Eremeev V. V. *On the stability of three-layered non-linear elastic strip with initial stresses*. Within the framework of three-dimensional non-linear elasticity the instability of an elastic strip is investigated. The strip consists of three layers. The middle layer (core) is initially stretched. Hence the reference placements for the layers are different. The influence of the initial strains on the critical loads is analyzed.

АСПИРАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Жбанова О. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В статье рассматривается построение модели аспирации оболочки. При решении задачи используется нелинейная теория безмоментных оболочек. В предположении об осесимметричности деформации задача статики сводится к краевой задаче для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дополнительной сложностью задачи является наличие заранее неизвестных областей контакта оболочки с твёрдым телом (микропипеткой). Решение краевой задачи осуществляется методом пристрелки по нескольким параметрам. Для сферической оболочки, изготовленной из материала Бартенева–Хазановича, построены формы оболочки при различных степенях аспирации. Получен график зависимости давления в пипетки и глубины всасывания оболочки.

Оболочка клетки является важным органом, обеспечивающим её функционирование. К функциям клеточной мембраны относятся транспорт веществ, сохранение целостности клетки и её защита. Поэтому изучение механических свойств клеточной мембраны является важным для понимания всей клетки в целом. Математические модели клеточных мембран основываются на экспериментальных данных, по которым можно считать, что сопротивление мембран на изгиб пренебрежимо мало, материал мембран с большой степенью точности можно считать высокоэластичным и несжимаемым [1]. В силу этого, для построения её математической модели представляется целесообразным использовать нелинейную теорию безмоментных упругих оболочек. Одним из методов исследования биологических мембран является метод микропипеточной аспирации (рис. 1). Теоретическое исследование данного метода недостаточно и основывается в основном на упрощенных моделях [2, 3].

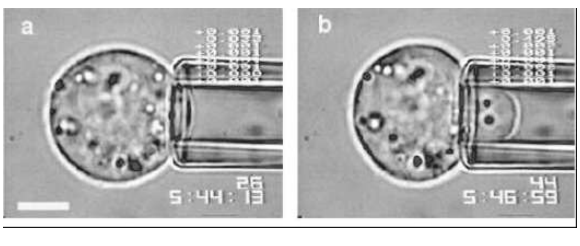


Рис. 1. Микропипеточная аспирация хондроцитов: до (a) и после (b) частичной аспирации клетки в микропипетку для определения модуля Юнга. Масштабная полоска — 5 μm. Прикладываемая нагрузка равна 500 Па [4].

В данной статье рассматривается модель микропипеточной аспирации клетки. Клеточную мембрану моделируем тонкой безмоментной нелинейно–упругой оболочкой, действие внутриклеточного вещества на мембрану принимаем как равномерно распределённое нормальное давление. Целью работы является исследование напряженно–деформированного состояния мембраны и построение зависимости между величиной давления в пипетке при аспирации и деформацией клетки.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h, которая в отсчетной конфигурации является сферой с радиусом r_0. Будем считать, что при аспирации оболочка имеет осесимметричную форму равновесия, которая задается неизвестными функциями $R(s)$ и $Z(s)$. Внешняя нагрузка определяется тремя величинами давлений. Внешнее давление p_e представляет собой давление среды на оболочку клетки. Внутреннее давление в клетке обозначим p_i. Для поддержания формы клетки оно должно превосходить внешнее давление. Процесс аспирации заключается в создании пониженного давления в пипетке p_p, в результате чего клетка начинает втягиваться в микропипетку.

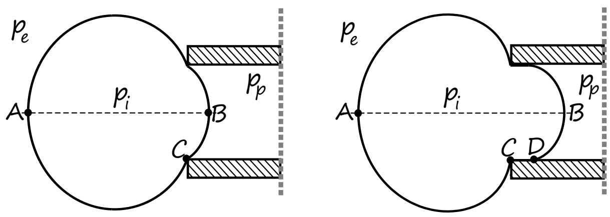


Рис. 2. Слабая и средняя аспирации оболочки.

Случай, когда соприкосновение оболочки и микропипетки происходит в одной точке C, назовем случаем слабой аспирации. Тогда задача о равновесии формулируется для двух областей оболочки (рис. 2): участок AC — область, лежащая вне микропипетки, CB — область, лежащая в микропипетке. При достижении определенного порога давления контакт оболочки и микропипетки перерастает в зону контакта CD. Когда мы имеет только одну зону контакта с внутренними стенками микропипетки, то будем говорить, что мы рассматриваем случай средней аспирации. В этом случае задача решается на трех участках оболочки: AC — область, лежащая вне микропипетки, BD — область, лежащая в микропипетке, CD — область контакта.

Свойства материала оболочки задаем функцией потенциальной энергии Бартенева–Хазановича:

$$W^* = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} - 3).$$

Все давления, приходящиеся на оболочку, являются нормальными: $\underline{q} = \xi\underline{N}$. На разных участках величина ξ имеет различные значения (с учетом направления вектора нормали):

$$\xi^{AC} = p_e - p_i, \ \xi^{BC} = p_p - p_i. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение главные кратности удлинений и функцию $\psi(q')$ — угол наклона касательной к деформированной оболочке. В данной задаче они выражаются следующим образом:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{R'^2 + Z'^2}{r'^2 + z'^2}}, \ \lambda_2 = \frac{R}{r}, \ \tan\psi = \frac{Z'}{R'}.$$

Уравнение равновесия оболочки в деформированной конфигурации имеет вид [5, 6]:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{q} = 0. \tag{2}$$

Граничные и начальные условия для уравнений равновесия, в случае слабой аспирации, на участках AC (область вне пипетки) и BC (область в пипетке) имеют вид:

$$A: \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{A}{r_0}, \\ \psi = 0 \end{matrix} \quad B: \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{B}{r_0}, \\ \psi = \pi \end{matrix} \quad C: \begin{matrix} {\lambda_1}^{AC}(s_C) = {\lambda_1}^{CB}(s_C) \\ {\lambda_2}^{AC}(s_C) = {\lambda_2}^{CB}(s_C) = \dfrac{r_p}{r(s_C)} \end{matrix}. \tag{3}$$

В случае средней аспирации граничные и начальные условия для уравнений равновесия на участках AC (область вне пипетки), CD (зона контакта оболочки и пипетки) и BD (область в пипетке) имеют вид:

$$A: \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{A}{r_0}, \\ \psi = 0 \end{matrix} \quad C: \begin{matrix} {\lambda_1}^{AC}(s_C) = {\lambda_1}^{CD}(s_C) \\ {\lambda_2}^{AC}(s_C) = \dfrac{r_p}{r(s_C)} \\ \psi < \pi \end{matrix} \tag{4}$$

$$B: \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{B}{r_0}, \\ \psi = \pi \end{matrix} \quad D: \begin{matrix} {\lambda_1}^{BD}(s_D) = {\lambda_1}^{BD}(s_D) \\ {\lambda_2}^{BD}(s_D) = \dfrac{r_p}{r(s_D)}. \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Здесь s_C, s_D — неизвестные лагранжевы координаты границ областей, r_p — радиус пипетки, A и B — неизвестные величины начальных значений кратностей удлинений в точках A и B, соответственно. Неизвестные параметры s_C, s_D, A, B определяются из условий неразрывности, налагаемых на решения в точках C и D.

В итоге, уравнения равновесия (2) осесимметричной деформации сферической оболочки под действием равномерно распределённого нормального давления, выраженные через функции кратностей удлинений λ_1, λ_2 и угол наклона касательной к деформированному сечению ψ, сводятся к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} {\lambda'}_1 = \left[-\dfrac{{g_{22}}'}{2g_{22}} \left(\dfrac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \dfrac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \lambda_2 \right) + \sqrt{\dfrac{g_{11}}{g_{22}}} \cos\psi \left(\dfrac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} - \dfrac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \lambda_1 \right) \right] \left(\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial {\lambda_1}^2} \right)^{-1}, \\ {\lambda'}_2 = \sqrt{\dfrac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \cos\psi - \dfrac{{g_{22}}'}{2g_{22}} \lambda_2 \,, \\ \psi = \left(-\dfrac{\xi \lambda_1 \lambda_2}{h} - \dfrac{1}{\sqrt{g_{22}}} \dfrac{\partial W^*}{\partial \lambda_2} \sin\psi \right) \left(\dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}} \dfrac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} \right)^{-1}. \end{cases} \tag{5}$$

Полученные уравнения описывают равновесие оболочки на обоих участках AB и BC (в случае слабой аспирации) и на участках AC и BD (в случае средней аспирации). Отличие на участках состоит в различных величинах ξ, задаваемых соотношениями (1). Для зоны контакта оболочки и стенки пипетки (в проекции на плоскость этот учаток обозначается CD) уравнения равновесия сводятся к одному уравнению:

$$\lambda'_1 = -\cot s \left(\frac{\partial W^*}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial^2 W^*}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \lambda_2 \right) \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial {\lambda_1}^2} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Система нелинейных ОДУ (5) и уравнение (6) с граничными условиями (3) и (4) представляют собой краевую задачу, решение которой ищется численно методом пристрелки по трём параметрам s_c, A, B. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществляется методом Рунге–Кутта четвёртого порядка. Численное решение реализовано в математическом пакете Matlab.

Важным показателем является то, как глубоко втянулась клетка в пипетку, в зависимости от внутреннего давления и радиуса пипетки. На рис. 3. представлена зависимость между глубиной всасывания оболочки в микропипетку H и разностью давлений $\triangle p^* = \triangle p/\mu$, где $\triangle p = \xi^{AB} - \xi^{BC}$.

Оболочка имеет какую-то кривизну, и в начальный момент, когда нет взаимодействия между мембраной и микропипеткой, клетка уже погружена в пипетку на некоторую величину. Поэтому начальная точка графика зависит от давления в клетке и величины радиуса пипетки. График зависимости глубины всасывания оболочки в микропипетку и разности давлений для случая средней аспирации построен для значений $r_p = 0,5R_0$, $\xi^{AB} = 0,005$, $\xi^{BC} \in [0,05, 0,0175]$, $\xi^{BD} \in [0,0175, 0.0365]$.

На рис. 4 представлены формы сечения оболочки, построенные для различных значений давления ξ^{BC} при $\xi^{AB} = 0{,}005$ и $r_p = 0{,}5r_0$.

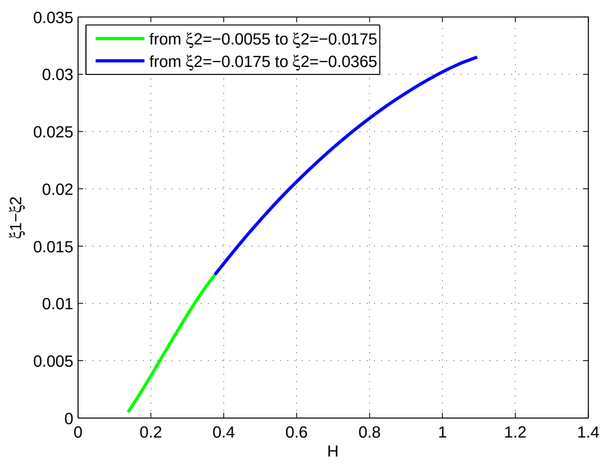


Рис. 3. Графики зависимости $\triangle p^*$ и H.

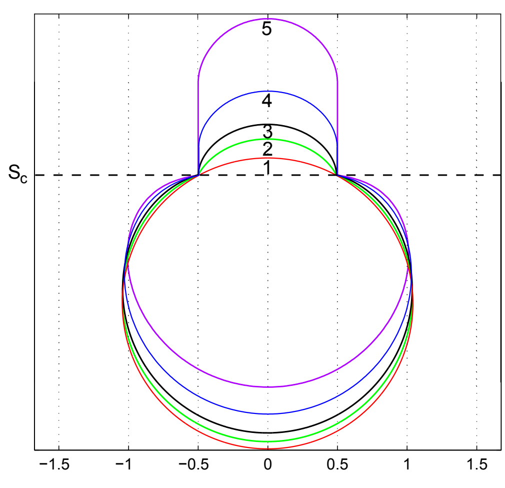


Рис. 4. Форма деформированной оболочки при аспирации.

График 1 — форма сечения оболочки до деформации, график 2 — промежуточная форма сечения при слабой аспирации, график 3 — форма сечения оболочки на последнем шаге до того, как контакта между оболочкой и микропипеткой престанет быть точкой, график 4 — промежуточный график формы при средней аспирации (оболочка прилегает к стенкам микропипетки), график 5 — форма оболочки до того, как появится еще одна область соприкосновения оболочки и микропипетки ($\psi^{AC}(s_C) < \pi$).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК – 439.2011.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Evans E. A., Hochmuth R. M.* Mechanochemical Properties of Membrane // Current Topics in Membranes and Transport. Bronner F., Klienzeller A. (eds.) Academic Press. 1978. № 10. Pp. 1–65.

[2] *Fung Y. C.* Biomechanics.: 2en ed. Springer Science, 1993. 569 p.

[3] *White J. G., Burris S. M., Tukey D., Smith C., Clawson C. C.* Micropipette aspiration of human platelets: influence of microtubules and actin filaments on deformability // Blood. 1984. № 17. Pp. 210–214.

[4] *Baaijens P. T., Trickey R., Laursen A., Guilak F.* Large Deformation Finite Element Analysis of Micropipette Aspiration to Determine the Mechanical Properties of the Chondrocyte // Annals of Biomedical Engineering. 1978. V. 33. № 4. Pp. 492–499.

[5] *Зубов Л. М., Колесников А. М.* Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2004. № 1. С. 33–37.

[6] *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // ZAMM. 2009. № 89. Issue 4. Pp. 288–305.

Zhbanova O. V. *Aspiration of a nonlinear elastic spherical shell.* In article reports on model of aspiration of membrane. A nonlinear theory of membrane shells is used for solving the problem. Statics problem is reduced to a boundary value problem of the set of nonlinear ordinary differential equations in the axisymmetric cases of deformation. It is noted that area of interaction between the membrane and the solid (a micropipette) is a point or area with pre unknown boundaries. The false position method by several parameters is used to solve the boundary value problem. We assume that the material properties determined by the function of the potential energy of Bartenev–Khazanovich. Deformed shape of the shell for different degrees of aspiration are constructed for a spherical shell. Dependence of pressure in the pipette and the depth of the shell suction is plotted.

ПРОГРАММНАЯ ОБОЛОЧКА АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Жеребко А. И.*, **Карякин М. И.*,****

**Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

***Южный математический институт, Владикавказ*

В рамках системы компьютерной алгебры Maple разработана интерактивная оболочка для анализа задач нелинейной теории упругости, поддерживающая двусторонний обмен данными со средой конечно-элементного анализа FlexPDE. Возможности использования разработанной системы, в том числе для решения некоторых типов обратных задач, продемонстрированы на примере задачи о растяжении прямоугольника с отверстием.

1. Введение. Учет нелинейности является одним из актуальных требований к моделям современной механики сплошной среды, и особенно к тем из них, которые применяются для изучения мягких биологических тканей. Моделирование поведения таких тканей обязательно должно учитывать, что и при естественном функционировании, и в процессе операционного вмешательства они испытывают деформации, существенно превышающие пределы применимости линейной теории. Не случайно современные пакеты конечно-элементного анализа активно внедряют различные модели учета больших деформаций.

Одной из серьезных проблем, стоящих перед исследователями в этой связи является проблема корректного выбора самой модели, которая в случае простого упругого материала сводится к выбору адекватной функции удельной потенциальной энергии, а также в определении ее необходимых параметров (например, упругих модулей). Поэтому до сих пор актуальным является исследование канонических задач теории упругости, связанных с моделированием экспериментов по определению механических характеристик — одноосного растяжения, кручения, изгиба и т. п. — в нелинейной постановке. С помощью полуобратного метода многие из этих задач удается свести к анализу краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, аппарат аналитического и численного анализа которых можно считать достаточно разработанным. Кроме того, современные средства компьютерной алгебры позволяют достаточно надежно и эффективно генерировать такие краевые задачи для широкого класса определяющих соотношений [1]. В то же время особенности мягких биологических тканей не позволяют применять ряд экспериментальных методик, пригодных для классических конструкционных материалов — из этих тканей нельзя изготовить, например, стандартный цилиндрический образец для опытов по одноосному растяжению. Это делает необходимым детальное изучение ряда задач, не сводящихся к одномерным — например, задачу о растяжении невысокого цилиндра из мягкого материала, края которого жестко сцеплены с перемещаемыми плоскостями [2]. Это означает, в свою очередь, необходимость привлечения методов конечно-элементного анализа.

Большинство коммерческих конечно-элементных пакетов для исследования нелинейных задач используют «экстенсивный подход», связанный с расширением количества моделей, «зашитых» в состав «решателей» пакета. В них имеются и средства подбора параметров таких моделей на основе экспериментальных данных. Однако решение вопроса о предпочтительности той или иной модели, а также внедрение новой модели нелинейно-упругого поведения в такие пакеты представляет собой достаточно сложную проблему. В этой связи для проведения расчетов был выбран пакет FlexPDE [3], опирающийся не на готовый набор конечных элементов, а предназначенный для анализа краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных достаточно общего вида.

Целью исследований была разработка в среде Maple программы, расширяющей возможности системы генерирования и анализа одномерных краевых задач [1].

2. Модельные задачи. В качестве примера, иллюстрирующего основные возможности разработанной программы, рассмотрим задачу о растяжении прямоугольного образца с круглым отверстием. Считаем, что исследуемый образец представляет собой прямоугольник со сторонами h и d, нижняя сторона которого жестко защемлена, к верхней — приложена равномерно распределенная нагрузка P, боковые грани свободны от напряжений; в центре образец имеет круглое отверстие радиуса r (рис. 1). Необходимо определить распределение напряжений в образце, а также найти зависимость формы отверстия от величины нагрузки. Заметим, что данная задача (в рамках линейной теории упругости) включена в базовый пакет документации пакета FlexPDE [3].

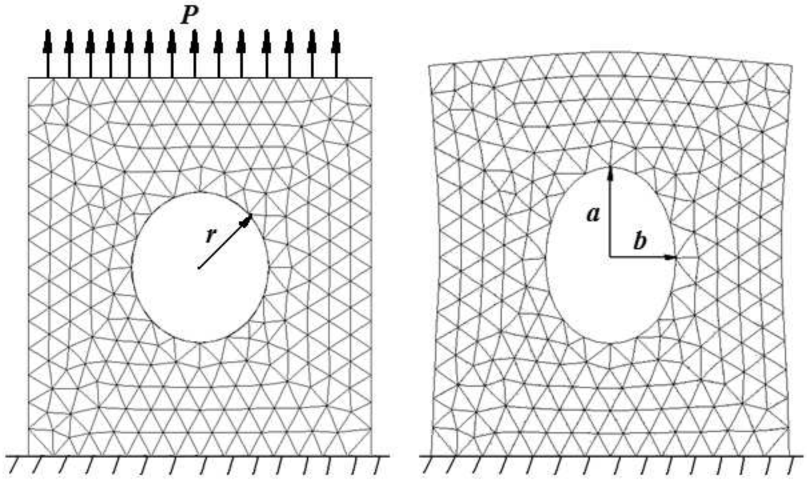


Рис. 1. Растяжение прямоугольника с отверстием.

Задачу будем решать в рамках плоской деформации, задаваемой соотношениями

$$X_1 = X_1(x_1, x_2), \quad X_2 = X_2(x_1, x_2), \quad X_3 = x_3, \tag{1}$$

где x_k, X_m — декартовы координаты точек прямоугольника в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно. С учетом (1) уравнения равновесия в терминах компонент тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ формально имеют простой вид

$$\frac{\partial D_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{i2}}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

При этом первая проблема с решением системы (2) состоит в выводе представлений величин D_{ij} через функции $X_m(x_1, x_2)$ на основе определяющего соотношения

$$D_{ij} = \frac{\partial W}{\partial C_{ij}},$$

где $C_{ij} = \partial X_j / \partial x_i$ — компоненты градиента деформации, а W — функция удельной потенциальной энергии. Вычисление этих представлений на основе заданного пользователем выражения для функции W выполняется разработанной Maple-программой. От пользователя программы требуется базовое знакомство с пакетом FlexPDE, позволяющее описать геометрию исследуемой области и граничные условия на встроенном языке этого пакета. В рассматриваемом случае граничные условия

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}|_{S_2} = 0, \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}|_{S_3} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}|_{S_4} = 0; \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}|_{S_5} = 0; \tag{3}$$

должны быть заменены их аналогами в пакете FlexPDE и сохранены вместе с описанием геометрии в отдельном текстовом файле. В (3) S_1 — нижняя сторона, S_3 — верхняя сторона, S_2, S_4 — боковые стороны прямоугольника, S_5 — граница отверстия, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений.

И описание геометрии, и описание граничных условий могут содержать «переменные» — не определенные пользователем параметры (величина нагрузки P в рассматриваемом примере). Разработанная Maple-программа позволяет, во-первых, определять наличие таких параметров, а, во-вторых, в интерактивном режиме выяснить необходимость построения различных зависимостей между ними (например, зависимость между приложенной нагрузкой и удлинением образца). Для создания интерфейса пользователя в среде Maple использована технология Maplets.

В файл описания геометрии и граничных условий добавляется автоматически генерируемый в среде Maple блок определяющих соотношений в синтаксисе среды FlexPDE. Обмен данными между средами осуществляется с помощью специально разработанных командных файлов, позволяющих автоматически запускать расчет сгенерированного скрипта задачи из Maple во FlexPDE, передавать полученные в последнем результаты в пакет Maple, и закрывать внешний «решатель» по окончании расчета. При необходимости пользователь может корректировать постановку задачи и описанный процесс повторяется, но уже для других параметров.

Для решения рассмотренной задачи в качестве выражения для упругого потенциала была выбрана функция энергии материала Блейтца и Ко (упрощенный вариант) [4]:

$$W = \frac{\mu}{2}\left(I_2 I_3^{-1} + 2\sqrt{I_3} - 5\right),$$

где I_k — главные инварианты меры деформации Коши.

На рис. 2 представлена зависимость отношения полуосей фигуры, в которую при растяжении превращается круговое отверстие, от величины нагрузки P. Для сравнения пунктирной линией на графике изображена кривая зависимости, соответствующей линейной теории упругости. Видно, что при $P = 0.15\mu$ имеется почти двукратное отличие между решениями. В то же время расчеты напряжений показали, что величина коэффициента интенсивности напряжений в рассмотренном диапазоне нагрузок отличается от линейной теории не более, чем на 1 %.

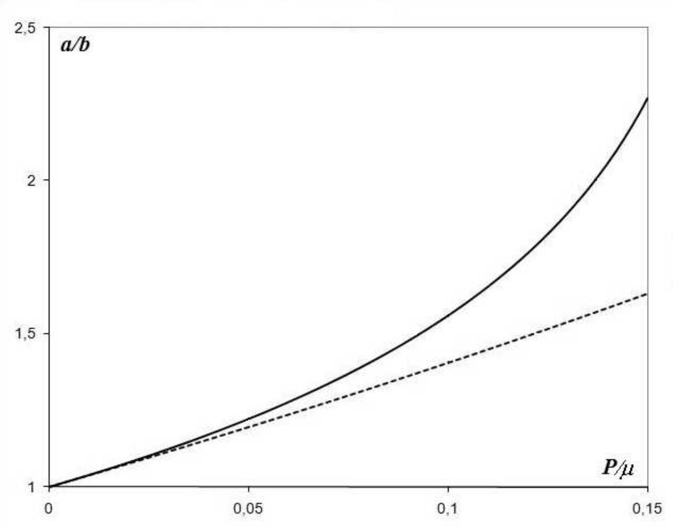


Рис. 2. Зависимость отношения полуосей отверстия от растягивающей нагрузки: сплошная линия — нелинейное решение, пунктирная — решение линейной задачи.

В качестве примера, демонстрирующего возможность решения простейших обратных задач, рассмотрим следующую проблему. Дан квадрат со стороной d, в центре которого имеется эллиптическое отверстие с полуосями a и b. Нижняя сторона квадрата защемлена, верхняя — жестко сцеплена с поверхностью абсолютно твердого тела, которое может перемещаться в вертикальном направлении; боковые стороны свободны от напряжений. Известно, что после растяжения квадрата на k % отверстие приняло форму фигуры, у которой полуоси A и B одинаковы. Требуется установить значение параметра a/b — отношения полуосей эллипса в отсчетной конфигурации.

При фиксированных значениях k и b подбор параметра a осуществлялся итерационно, при этом в среде Maple автоматически генерировалась, а затем передавалась для выполнения необходимая последовательность из пятнадцати-двадцати (в зависимости от настроек точности и геометрических соотношений) скриптов для анализа во FlexPDE, причем каждый следующий скрипт существенно использовал информацию на предыдущем шаге.

Результаты проведенного анализа представлены на рис. 3.

3. Основные результаты. В среде компьютерной алгебры Maple разработан алгоритм автоматической генерации краевых задач двумерной нелинейной теории упругости о равновесии тел, в том числе неканонической формы. Реализована схема автоматического определения типа задачи (одномерная, т. е. сводящаяся к краевой задаче для одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, двумерная или трехмерная) и выбора соответствующего типа «решателя». Для решения двумерных задач осуществлена интеграция возможностей пакета Maple и системы конечно-элементного анализа FlexPDE, позволяющая на основе заданной пользователем геометрии области, вида нагружения и модели

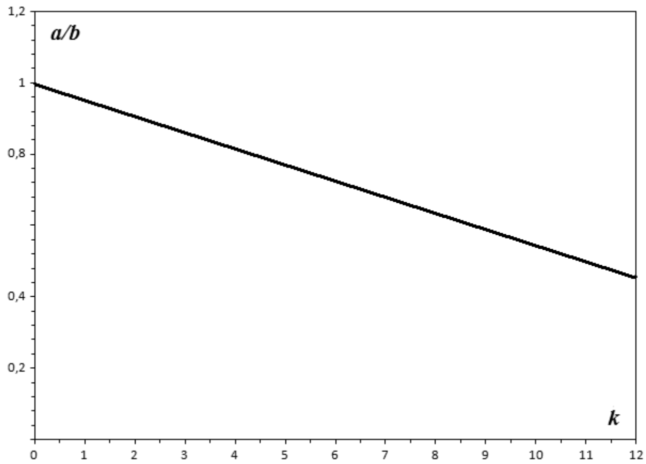


Рис. 3. Зависимость отношения полуосей эллиптического отверстия от удлинения прямоугольника.

материала (упругого потенциала) в автоматизированном режиме провести полный анализ соответствующей задачи. Разработанная система позволяет, в частности, решать простейшие обратные задачи по подбору или определению одной скалярной характеристики (геометрического, материального или силового параметра) рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Gavrilyachenko T. M., Karyakin M. I., Sukhov D. Yu.* Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple // Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008). IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo. Pp. 284–291.

[2] *Miller K.* How to test very soft biological tissues in extension? // Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 34. Pp. 651–657.

[3] *Backstrom G.* Fields of Physics by Finite Element Analysis // FlexPDE: finite element model builder for Partial Differential Equations [Электронный ресурс]. http://www.pdesolutions.com/cgi-bin/getbook50

[4] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 320 с.

Zherebko A. I., Karyakin M. I. *Program shell for analysis of one-dimensional and two-dimensional non-linear elastic problems*. Within the bounds of computer algebra system Maple the interactive system for analysis of non-linear elastic problems has been developed. It allows two-way data exchange with finite-element modeling system FlexPDE. The abilities of the program shell including one for solving some types of inverse problems are demonstrated on the problem about tension of the sample contained a hole.

ЭФФЕКТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЛЯВА В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ НА КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Жоголева Н. В.*, **Сторожев В. И.****

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*

***Донецкий национальный университет*

Представлены результаты аналитических и численных исследований по проблеме анализа нелинейных ангармонических эффектов при одновременном распространении двух сдвиговых упругих волн Лява различной круговой частоты ω_m $(m = 1, 2)$ в пространственной волноводной структуре с монокристаллическими компонентами. При исследовании использована модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования, предполагающая использование упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по деформациям и нелинейных представлений для конечных деформаций. Используется подход, связанный с разложением характеристик нелинейных упругих волн в ряды по малому параметру в виде отношения амплитуды волны к ее длине. Для суммы двух распространяющихся вдоль упруго эквивалентного направления Ox_1 линейных волн с разными частотами и длинами ангармоническое возмущение составляют вторые гармоники монохроматических волн с частотами $2\omega_m$ $(m = 1, 2)$ и слагаемое «комбинационного» типа, отвечающее волне с частотой $\omega_1 + \omega_2$. Расчеты кинематических характеристик вторых гармоник исследуемых волн проведены для составного волновода из слоя монокристалла германия и полупространства из монокристалла кремния с коллинеарными направлениями упругой симметрии. Используемый в работе подход ранее был применен при анализе нелинейных ангармонических возмущений для обобщенных монохроматических волн Лява в анизотропном слое между анизотропными полупространствами [1–2].

Введение. Исследуемая волноводная структура отнесена к системе нормированных прямоугольных координат, в которой слой занимает область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leqslant x_3 \leqslant 0\}$, а полупространство-подложка — область $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty\}$. Для анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении нескольких сдвиговых упругих волн Лява с различными частотами вдоль координатного направления Ox_1, коллинеарного упруго-эквивалентным направлениям кристаллических материалов слоя и полупространства, используется модель физически и геометрически нелинейного деформирования упругого монокристаллического материала класса m3m кубической системы, базирующаяся на представлениях упругого потенциала U и деформаций ε_{jk} в виде

$$U = \frac{1}{2}c_{jqrk}\varepsilon_{rq}\varepsilon_{jk} + \frac{1}{6}c_{jqrklm}\varepsilon_{rq}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,j} + u_{l,j}u_{l,k}), \tag{2}$$

где $c^{(p)}_{jqrk}$, $c^{(p)}_{jqrklm}$— соответственно тензоры упругих постоянных второго и третьего порядка для монокристалла слоя ($p = 1$) и монокристалла подложки ($p = 2$). Далее для сокращения записи в соответствии с известными правилами считаем, что физико-механические свойства компоненты волновода V_p характеризуются упругими постоянными второго порядка $c^{(p)}_{ij}$, третьего порядка $c^{(p)}_{ijk}$ и плотностью ρ_p.

Численно-аналитическое решение. В рассматриваемой задаче используется концепция определения составляющих нелинейного волнового поля как членов отрезка ряда по степеням малого параметра δ в представлении вектор-функций напряженности волны в компоненте V_p. В рамках такой методики на первом этапе строится решение задачи о распространении двух линейных волн Лява различной частоты. На втором этапе при определении нелинейных вторых гармоник строится решение неоднородной краевой задачи, с правой частью выражаемой через сумму характеристик линейных волн. Таким образом, в процессе исследования рассматривается однородная спектральная задача относительно комплексных функций напряженности $\vec{u}^{(p,l)}$ двух линейных волн Лява в рассматриваемой структуре

$$\sigma^{(p,l)}_{2j,j} - \rho_p \ddot{u}^{(p)}_2 = 0 \quad (j = \overline{1,3}; p = 1, 2), \tag{3}$$

$$(\sigma^{(1,l)}_{32})_{x_3=-h} = 0, \quad (\sigma^{(1,l)}_{32})_{x_3=0} = (\sigma^{(2,l)}_{32})_{x_3=0}, \quad (u^{(1,l)}_2)_{x_3=0} = (u^{(2,l)}_2)_{x_3=0} \tag{4}$$

и неоднородная краевая задача для определения функции напряженности $\vec{u}^{(p,n)}$ нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник суммы волн Лява)

$$(\sigma^{(p,l)}_{ij,j})_{\vec{u}^{(p)}=\vec{u}^{(p,n)}} - \rho_p \ddot{u}^{(p,n)}_i = (\sigma^{(p,n)}_{ij,j})_{\vec{u}^{(p)}=\vec{u}^{(p,l)}}; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
(\sigma^{(1,l)}_{ij})_{\vec{u}^{(1}=\vec{u}^{(1,n)}} + (\sigma^{(1,n)}_{ij})_{\vec{u}^{(1)}=\vec{u}^{(1,l)}} = 0, \quad x_3 = -h;\\
(\sigma^{(1,l)}_{3i})_{\vec{u}^{(1)}=\vec{u}^{(1,n)}} + (\sigma^{(1,n)}_{3i})_{\vec{u}^{(1)}=\vec{u}^{(1,l)}} = (\sigma^{(2,l)}_{3i})_{\vec{u}^{(2)}=\vec{u}^{(2,n)}} + (\sigma^{(2,n)}_{3i})_{\vec{u}^{(2)}=\vec{u}^{(2,l)}}, x_3 = 0;\\
u^{(2,n)}_j = u^{(1,n)}_j, \quad x_3 = 0; \quad (i = \overline{1,3}; j = 1; 3).
\end{gathered} \tag{6}$$

Из соотношений спектральной задачи (3), (4) следуют представления для комплексных функций напряженности двух линейных волн Лява $u^{(p,l)}_{2m}$ с нормирующими амплитудными параметрами $u^{(0)}_{2m}$ и круговыми частотами ω_m в предположении $\omega_1 \neq \omega_2$:

$$u^{(1,l)}_{2m} = u^{(0)}_{2m}\big(A^{(p)}_{qm}\cos(\alpha^{(1)}_m x_3) + B^{(p)}_{qm}\sin(\alpha^{(1)}_m x_3)\big)E_1, \quad x_3 \in [-h; 0];$$

$$u^{(2,l)}_{2m} = u^{(0)}_{2m} e^{i\alpha^{(2)}_m x_3} E_1, \quad x_3 \in [0; \infty); \quad E_1 = e^{-i(\omega_m t - k_m x_1)}. \tag{7}$$

Неоднородная граничная задача относительно компонент комплексного вектора напряженности вторых гармоник волн Лява для компоненты V_p в рассматриваемой структуре имеет вид:

$$\rho_p \ddot{u}^{(p,n)}_1 - c^{(p)}_{11} u^{(p,n)}_{1,11} - c^{(p)}_{44} u^{(p,n)}_{1,33} - \Delta^{(p)}_8 u^{(p,n)}_{3,31} = \Delta^{(p)}_3 u^{(p,l)}_{2,1} u^{(p,l)}_{2,11} +$$

$$+\Delta^{(p)}_6 u^{(p,l)}_{2,1} u^{(p,l)}_{2,33} + \big(\Delta^{(p)}_6 + \Delta^{(p)}_7\big) u^{(p,l)}_{2,3} u^{(p,l)}_{2,31},$$

$$\rho_p \ddot{u}^{(p,n)}_3 - c^{(p)}_{11} u^{(p,n)}_{3,33} - c^{(p)}_{44} u^{(p,n)}_{3,11} - \Delta^{(p)}_8 u^{(p,n)}_{1,13} = \Delta^{(p)}_3 u^{(p,l)}_{2,3} u^{(p,l)}_{2,33} +$$

$$+\Delta_6^{(p)}u_{2,3}^{(p,l)}u_{2,11}^{(p,l)}+\big(\Delta_6^{(p)}+\Delta_7^{(p)}\big)u_{2,1}^{(p,l)}u_{2,13}^{(p,l)}; \tag{8}$$

$$c_{44}^{(1)}\big(u_{1,3}^{(1,n)}+u_{3,1}^{(1,n)}\big)_{x_3=-h}=-\big(u_{2,1}^{(1,l)}u_{2,3}^{(1,l)}\big)_{x_3=-h},$$

$$\big(c_{12}^{(1)}u_{1,1}^{(1,n)}+c_{11}^{(1)}u_{3,3}^{(1,n)}\big)_{x_3=-h}=-\frac{1}{2}\big(\Delta_7^{(1)}(u_{2,1}^{(1,l)})^2+\Delta_3^{(1)}(u_{2,3}^{(1,l)})^2\big)_{x_3=-h},$$

$$c_{44}^{(1)}\big(u_{1,3}^{(1,n)}+u_{3,1}^{(1,n)}\big)_{x_3=0}-c_{44}^{(2)}\big(u_{1,3}^{(2,n)}+u_{3,1}^{(2,n)}\big)_{x_3=0}=$$

$$=\big(u_{2,1}^{(2,l)}u_{2,3}^{(2,l)}\big)_{x_3=0}-\big(u_{2,1}^{(1,l)}u_{2,3}^{(1,l)}\big)_{x_3=0}, \tag{9}$$

$$\big(c_{12}^{(1)}u_{1,1}^{(1,n)}+c_{11}^{(1)}u_{3,3}^{(1,n)}\big)_{x_3=0}-\big(c_{12}^{(2)}u_{1,1}^{(2,n)}+c_{11}^{(2)}u_{3,3}^{(2,n)}\big)_{x_3=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\big(\Delta_7^{(2)}(u_{2,1}^{(2,l)})^2+\Delta_3^{(2)}(u_{2,3}^{(2,l)})^2\big)_{x_3=0}-\frac{1}{2}\big(\Delta_7^{(1)}(u_{2,1}^{(1,l)})^2+\Delta_3^{(1)}(u_{2,3}^{(1,l)})^2\big)_{x_3=0},$$

$$\big(u_j^{(1,n)}\big)_{x_3=0}-\big(u_j^{(2,n)}\big)_{x_3=0}=0 \qquad (j=\overline{1,3}).$$

Структура соотношений (8), (9) показывает, что априори вторыми гармониками поверхностных линейных волн Лява будут волны $P-SV$ типа. Решение неоднородной задачи (8), (9) определения ангармоничного возмущения для суммы двух линейных SH-волн с разными частотами и длинами должно включать добавки, отвечающие вторым гармоникам монохроматических волн с частотами $2\omega_m$ $(m=\overline{1,2})$ и добавку «комбинационного» типа с частотой $\omega_1+\omega_2$.

Компоненты $u_{jm}^{(p,n)}$ $(j=1,\ j=3)$ комплексного вектора напряженности вторых гармоник монохроматических волн с частотами $2\omega_m$, $m=(1,2)$, определяются из соотношений краевой задачи (8), (9) в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеют структуру:

$$u_{1m}^{(1,n)}=\big(\lambda_{11m}\cos(\zeta_{1m}^{(1)}x_3)+\lambda_{12m}\cos(\zeta_{2m}^{(1)}x_3)+\mu_{11m}\sin(\zeta_{1m}^{(1)}x_3)+\mu_{12m}\sin(\zeta_{2m}^{(1)}x_3)+$$

$$+A_{11m1}+A_{11m2}\cos(2\alpha_m^{(1)}x_3)+A_{11m3}\sin(2\alpha_m^{(1)}x_3)\big)E_2;$$

$$u_{3m}^{(1,n)}=\big(\lambda_{31m}\sin(\zeta_{1m}^{(1)}x_3)+\lambda_{32m}\sin(\zeta_{2m}^{(1)}x_3)+\mu_{31m}\cos(\zeta_{1m}^{(1)}x_3)+\mu_{32m}\cos(\zeta_{2m}^{(1)}x_3)+$$

$$+A_{31m1}+A_{31m2}\sin(2\alpha_m^{(1)}x_3)+A_{31m3}\cos(2\alpha_m^{(1)}x_3)\big)E_2; \tag{10}$$

$$u_{1m}^{(2,n)}=\big(\beta_{11m}\exp(\zeta_{1m}^{(2)}x_3)+\beta_{12m}\exp(\zeta_{2m}^{(2)}x_3)+A_{12m1}\exp(2i\alpha_m^{(2)}x_3)\big)E_2;$$

$$u_{3m}^{(2,n)}=\big(\beta_{31m}\exp(\zeta_{1m}^{(2)}x_3)+\beta_{32m}\exp(\zeta_{2m}^{(2)}x_3)+A_{32m1}\exp(2i\alpha_m^{(2)}x_3)\big)E_2;$$

Здесь $E_2(t,x_1,\omega_m,k_m)=\exp(-2i(\omega_m t-k_m x_1))$, A_{jlmq} — коэффициенты в слагаемых, соответствующих частному решению системы дифференциальных уравнений (9), λ_{jlm}, μ_{jlm}, β_{jlm}— коэффициенты в слагаемых, соответствующих общему решению системы уравнений (8).

Комплексный вектор напряженности $u_{j+}^{(p,n)}$ $(j=1,\ j=3)$ второй гармоники «комбинационного» типа с частотой $\omega_1+\omega_2$ также определяется из соотношений (8), (9) в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеет структуру:

$$u_{1+}^{(1,n)}=\big(\lambda_{11+}\cos(\zeta_{1+}^{(1)}x_3)+\lambda_{12+}\cos(\zeta_{2+}^{(1)}x_3)+\mu_{11+}\sin(\zeta_{1+}^{(1)}x_3)+\mu_{12+}\sin(\zeta_{2+}^{(1)}x_3)+$$

$$+A_{1131}\cos((\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)})x_3)+A_{1132}\sin((\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)})x_3)+A_{1133}\cos((\alpha_1^{(1)}-\alpha_2^{(1)})x_3)+$$
$$+A_{1134}\sin((\alpha_1^{(1)}-\alpha_2^{(1)})x_3)\big)E_{12};$$
$$u_{3+}^{(1,n)}=\big(\lambda_{31+}\sin(\zeta_{1+}^{(1)}x_3)+\lambda_{32+}\sin(\zeta_{2+}^{(1)}x_3)+\mu_{31+}\cos(\zeta_{1+}^{(1)}x_3)+\mu_{32+}\cos(\zeta_{2+}^{(1)}x_3)+$$
$$+A_{3131}\sin((\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)})x_3)+A_{3132}\cos((\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)})x_3)+A_{3133}\sin((\alpha_1^{(1)}-\alpha_2^{(1)})x_3)+$$
$$+A_{3134}\cos((\alpha_1^{(1)}-\alpha_2^{(1)})x_3)\big)E_{12}; \qquad (11)$$
$$u_{1+}^{(2,n)}=\big(\beta_{11+}\exp(\zeta_{1+}^{(2)}x_3)+\beta_{12+}\exp(\zeta_{2+}^{(2)}x_3)+A_{1231}\exp(i(\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)})x_3)\big)E_{12};$$
$$u_{3+}^{(2,n)}=\big(\beta_{31+}\exp(\zeta_{1+}^{(2)}x_3)+\beta_{32+}\exp(\zeta_{2+}^{(2)}x_3)+A_{3231}\exp(i(\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)})x_3)\big)E_{12};$$

где $E_{12}(t,x_1,\omega_m,k_m)=\exp(-i((\omega_1 t-k_1x_1)+(\omega_2 t-k_2x_1)))$.

Численные результаты. Численные исследования кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник исследуемых поверхностных волн реализованы для волновода в виде слоя V_1 из монокристалла германия, расположенного на полупространстве V_2 из монокристалла кремния. Компоненты волновода характеризуются следующими независимыми физико-механическими постоянными:

$$\rho_1=5,32\rho_*;\ c_{11}^{(1)}=12,92c_*;\ c_{12}^{(1)}=4,79c_*;\ c_{44}^{(1)}=6,70c_*;\ c_{111}^{(1)}=-71,00c_*;$$
$$c_{112}^{(1)}=-38,90c_*;\ c_{123}^{(1)}=-1,80c_*;\ c_{144}^{(1)}=-2,30c_*;\ c_{456}^{(1)}=-5,30c_*;\ c_{155}^{(1)}=-29,20c_*;$$
$$\rho_2=2,33\rho_*;\ c_{11}^{(2)}=16,70c_*;\ c_{12}^{(2)}=7,90c_*;\ c_{44}^{(2)}=6,50c_*;\ c_{111}^{(2)}=-82,50c_*;$$
$$c_{112}^{(2)}=-45,10c_*;\ c_{123}^{(2)}=-6,40c_*;\ c_{144}^{(2)}=1,20c_*;\ c_{456}^{(2)}=-6,40c_*;\ c_{155}^{(2)}=-31,00c_*;$$

где $c_*=10^{10}$ Па и $\rho_*=10^3$ кг/м^3.

Для интерпретации результатов расчета построены тонированнные изображения распределений амплитуд комбинационных нелинейных вторых гармоник волн

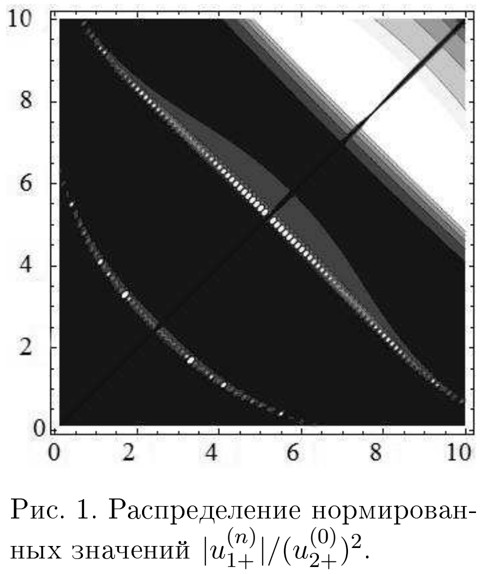


Рис. 1. Распределение нормированных значений $|u_{1+}^{(n)}|/(u_{2+}^{(0)})^2$.

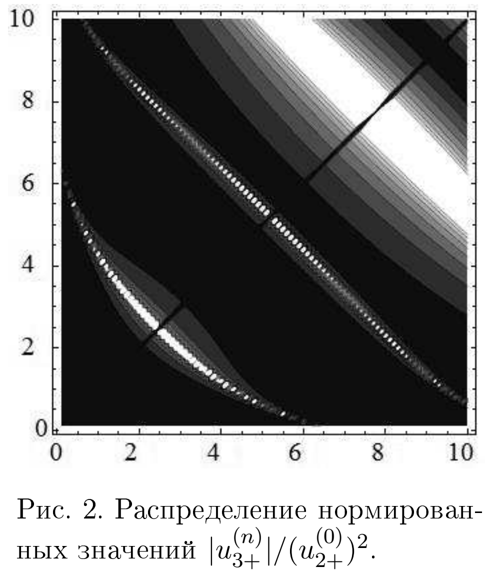


Рис. 2. Распределение нормированных значений $|u_{3+}^{(n)}|/(u_{2+}^{(0)})^2$.

Лява. На них отражены распределения $u_{1+}^{(n)}$ и $u_{3+}^{(n)}$ в зависимости от сочетания частот Ω_1 и Ω_2. Меньшим значениям исследуемой величины на тонированном изображении соответствует более темный цвет. Расчеты сделаны для сечения волновода $x_3 = 0$ и в момент времени $t = 0$. Рис. 1 описывает распределение амплитудных показателей функции $u_{1+}^{(n)}$, а рис. 2 — амплитудных показателей функции $u_{3+}^{(n)}$. Вертикальная ось соответствует интервалу изменения первой частоты Ω_1, горизонтальная — интервалу изменения второй частоты Ω_2 в пределах от 0 до 10.

Представленные распределения показывают, что для волновых перемещений $|u_{1+}^{(n)}|/(u_{2+}^{(0)})^2$ и $|u_{3+}^{(n)}|/(u_{2+}^{(0)})^2$ во вторых нелинейных гармониках комбинационного типа наблюдаются интенсивное возрастание амплитуды (резонансного генерирования) когда приведенные частоты взаимодействующих волн Лява Ω_1 и Ω_2 находятся в пределах от 7 до 10.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Щербак Н. В., Сторожев В. I.* Нелінійні другі гармоніки узагальнених хвиль Лява в анізотропному шарі на анізотропному півпросторі // Вісник Донецького університету, Сер.А: Природничі науки. 2008. Вип. 2 С. 75–80.

[2] *Щербак Н. В., Сторожев В. И.* Энергетические характеристики нелинейных вторых гармоник поверхностных волн Лява в волноводе с кристаллическими компонентами кубической системы // Труды XI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 26-29 ноября 2007 г.) Ростов-на-Дону, 2007. Т. 2. С. 173–177.

[3] *Harvey A. P., Tupholme G. E.* Propagation of anisotropic elastic and piezoelectric nonlinear surface acoustic waves // Wave Motion. 1992. Vol. 16. Pp. 125–135.

[4] *Kumon R. E., Hamilton M. F.* Directional dependence of nonlinear surface acoustic waves in the (001) plane of cubic crystals // J. Acoust. Sos. Am. 2002. Vol. 111. № 1. Pp. 2060–2069.

Zhogoleva N. V., Storozhev V. I. *Nonlinear anharmonic interaction effects in the fields of generalized surface Love waves.* The model of geometrically and physically nonlinear anisotropic elastic cubic system solids deformation is used. It based on the elastic potential presentation with quadratic and cubic deformation members. The method of wave displacement function expansion in terms of small parameter (acoustic Mach number) is applied. The results or analytical and numerical researches in the problem of nonlinear anharmonic effects analyze under two different frequency Love waves spreading are exhibited. The waveguide is the elastic layer and halfspace of m3m class cubic system with the ideal contact between them.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ИЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ФОКУСИРОВАНИЯ АМИНОКИСЛОТ В ЗАДАННОМ pH ГРАДИЕНТЕ

Жукова Н. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

При помощи метода конечных элементов численно исследована нестационарная задача изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) — процесса выделения при помощи электрического поля отдельных компонент смеси (аминокислот, белков) из многокомпонентного водного раствора с заданным градиентом pH. Приведены результаты вычислительного эксперимента, демонстрирующие динамику процесса фракционирования.

1. Введение. Изоэлектрофокусирование (ИЭФ) — это классический метод выделения из смеси отдельных компонент, широко используемый в медицине и биологии. Метод ИЭФ основан на разделении при помощи внешнего электрического поля многокомпонентных смесей на отдельные компоненты в среде с неоднородной величиной pH (показатель концентрации ионов водорода H^+).

С математической точки зрения, решение задачи сводится к исследованию уравнений переноса примесей в химически неоднородной среде, свойства которой определяются химическими реакциями, протекающими в растворе. При моделировании процесса ИЭФ приходится рассматривать несколько связанных между собой процессов, которые значительно различаются по характерному времени их протекания. Во-первых, это почти «мгновенные» химические реакции (микросекунды), формирующие некоторые неоднородные свойства среды разделения, например, pH-градиент, и определяющие параметры переноса компонент смеси в электрическом поле (подвижность, проводимость). Во-вторых, это длительный процесс образования под действием электрического поля стационарного стабильного pH-градиента (сутки). В третьих, это движение некоторых компонент смеси под действием электрического поля (часы), непосредственно приводящее к фракционированию смеси на отдельные компоненты.

Вышесказанное позволяет расщепить моделирование процесса ИЭФ на три практически независимых этапа: моделирование химических реакций в растворе и определение электрофоретических подвижностей, моделирование создания pH-градиента и моделирование движения примеси под действием электрического поля в неоднородной среде.

Основное внимание в работе уделяется исследованию динамики процесса разделения в среде с заданными параметрами, которые определены на предыдущих этапах моделирования. Обширный вычислительный эксперимент показал, что для веществ, параметры которых соответствуют реальным аминокислотам, уверенное разделение компонент смеси, оцениваемое по расстоянию между пиками концентраций на электрофореграмме, наступает гораздо раньше, чем процесс достигает стационарного состояния.

2. Модель фракционирования смеси. При изоэлектрофокусировании фракционирование смеси амфолитов (белков, аминокислот) проводится в так называемом буферном растворе с заданным pH-градиентом. На практике концентрации компонент буферной смеси, которая также представляет собой раствор амфолитов [1], намного больше концентраций компонент разделяемой смеси (примесей), и воздействие компонент разделяемой смеси на pH-градиент мало. Это означает, что можно рассматривать уравнения движения примесей в буферном растворе с уже созданным pH-градиентом. Тем не менее, влияние примесей на проводимость буферной смеси в некоторых случаях довольно значительно и вкладом примесей в проводимость смеси пренебрегать нельзя.

Уравнения, описывающие процесс переноса примесей в заданном pH-градиенте, в безразмерных переменных имеют вид [2, 3]:

$$\partial_t c_k + \operatorname{div} \boldsymbol{i}_k = 0, \quad \boldsymbol{i}_k = -\varepsilon\gamma_k \nabla c_k + \gamma_k e_k(\psi(\boldsymbol{x}))c_k \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \quad \sigma = \sigma_0(\boldsymbol{x}) + \xi \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \sigma_k(\psi) c_k,$$

где c_k, $\boldsymbol{i}_k$ — концентрация и плотность потока примеси, $\boldsymbol{E}$, φ — напряженность и потенциал электрического поля, $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока, σ — проводимость смеси, $\sigma_0(\boldsymbol{x})$ — проводимость буферной смеси, ξ — параметр, характеризующий вклад примесей в общую проводимость смеси, $\gamma_k e_k(\psi)$ — электрофоретическая подвижность примеси, $\gamma_k \sigma_k(\psi)$ — проводимость примеси, $\gamma_k > 0$ — характерная подвижность вещества, $\varepsilon\gamma_k > 0$ — характерный коэффициент диффузии, $\psi(\boldsymbol{x})$ — заданная кислотность смеси.

Обратим внимание, что вместо используемой в химии величины кислотности $\mathrm{pH} = -\lg\big([\mathrm{H}^+]/K_w\big)$, где где K_w — константа автодиссоциации воды, $[\mathrm{H}^+]$ — концентрация ионов водорода, в уравнениях (1) использована более удобная функция ψ, линейно зависящая от pH: $\mathrm{pH} = -\log_{10} K_w - \psi \log_{10} e$, $[\mathrm{H}^+] = K_w e^{\psi}$.

Система (1) не является замкнутой, и для замыкания необходимо задавать зависимости электрофоретической подвижности и проводимости примеси от pH, то есть функции $e_k = e_k(\psi)$, $\sigma_k = \sigma_k(\psi)$.

В случае раствора амфолитов, типичными представителями которых являются аминокислоты, например, $\mathrm{NH_3^+RCOO^-}$, где $\mathrm{NH_3^+}$ — аминогруппа, R — аминокислотный остаток, $\mathrm{COO^-}$ — карбоксильная группа, реакции диссоциации протекают по схеме: $\mathrm{NH_3^+RCOOH} \overset{pB}{\rightleftharpoons} \mathrm{NH_3^+RCOO^-} + \mathrm{H^+}$, $\mathrm{NH_3^+RCOO^-} \overset{pA}{\rightleftharpoons} \mathrm{NH_2RCOO^-} + \mathrm{H^+}$ или, в общем случае, по схеме

$$\mathrm{H^+R} \overset{B_i}{\rightleftharpoons} \mathrm{R}_i^0 + \mathrm{H^+}, \quad \mathrm{R}_i^0 \overset{A_i}{\rightleftharpoons} \mathrm{R}_i^- + \mathrm{H^+}.$$

Здесь R_i^0 — это цвиттерион (аминокислотный остаток), A_i и B_i — константы диссоциации для кислотной (R_i^-) и щелочной ($\mathrm{H^+R}_i$) групп, $\mathrm{H^+}$ — ион водорода.

Указанные реакции протекают почти мгновенно и условия равновесия реакций позволяют определить зависимость электрофоретической подвижности и молярной проводимости от кислотности (см., например, [2])

$$e_i(\psi) = \frac{[\mathrm{H^+R}_i] - [\mathrm{R}_i^-]}{c_i}, \quad \sigma_i(\psi) = \frac{[\mathrm{H^+R}_i] + [\mathrm{R}_i^-]}{c_i}, \quad c_i = [\mathrm{H^+R}_i] + [\mathrm{R}_i^0] + [\mathrm{R}_i^-],$$

$$e_i(\psi) = \frac{1}{\varphi_i(\psi)}\frac{d\varphi_i(\psi)}{d\psi}, \quad \sigma_i(\psi) = \frac{1}{\varphi_i(\psi)}\frac{d^2\varphi_i(\psi)}{d\psi^2} \geqslant \frac{1}{1+\delta_i}, \tag{2}$$

$$\varphi_i(\psi) = \delta_i + \mathrm{ch}(\psi - \psi_i), \quad \psi_i = \frac{1}{2}\ln\frac{A_iB_i}{K_w^2}, \quad \delta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{B_i}{A_i}\right)^{1/2},$$

где δ_i — безразмерный параметр, ψ_k — изоэлектрическая точка (значение ψ, при котором подвижность $\gamma_k e_k$ равна нулю, т. е. $\gamma_k e_k(\psi_k) = 0$).

Свойство электрофоретической подвижности $\gamma_k e_k(\psi_k)$ обращаться в нуль при значениях функции $\psi = \psi_k$ лежит в основе метода ИЭФ — вещества, перемещаемые электрическим полем, теряют подвижность в точках $x = x_k$, определяемых условием $\psi(x_k) = \psi_k$, и сосредотачиваются (фокусируются) в окрестности этих точек, что в итоге приводит к фракционированию смеси.

3. Стационарное решение и его асимптотика. Для пространственно одномерного случая нетрудно построить стационарное решение задачи о фракционировании смеси. Полагая проводимость смеси σ постоянной, а функцию ψ линейной по x и не зависящей от y

$$\psi'(x) = \mathrm{const}, \quad E = -\varphi'(x) = \mathrm{const}, \tag{3}$$

из уравнений (1), (2) с учетом (3) получим

$$c_k(x) = a_k \exp(\lambda S(x)), \quad \lambda = -\frac{E}{\varepsilon\psi'(x)} > 0, \quad S(x) = -\ln(\mathrm{ch}(\psi(x) - \psi_k) + \delta_k). \tag{4}$$

При больших значениях параметра λ, учитывая, что полное количество концентрации M_k задано, и используя асимптотическую формулу Лапласа, имеем

$$c_k(x) = \frac{M_k|\psi'(x)|\lambda^{1/2}\exp(\lambda S(x))}{(2\pi(1+\delta_k))^{1/2}}. \tag{5}$$

Полученное стационарное решение, в частности, можно использовать для контроля погрешности, сравнивая численное решение задачи для больших моментов времени со стационарным.

4. Вычислительный эксперимент. Уравнения (1), (2) решалась численно методом конечных элементов в области $0 \leqslant x \leqslant L_x$, $0 \leqslant y \leqslant L_y$ с краевыми условиями, отвечающими непроницаемости границ для примеси ($\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{n} = 0$), изолированными границами $y = 0, L_y$ ($\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$) и заданной разностью потенциалов φ_0 на границах $x = 0, L_x$. Для реализации алгоритма применялся пакет FreeFem++ [4]. Для этого система приводилась к вариационной форме и использовалась неявная схема аппроксимации по времени.

Приведем некоторые наиболее типичные результаты, демонстрирующие процесс разделения трех аминокислот Ser, Leu, Thr, которые имеют близкие изоэлектрические точки ψ_k, что приводит к увеличению времени процесса ИЭФ.

При проведении расчетов параметры выбирались в соответствии с экспериментальными данными работы [5] для аминокислот Ser, Leu, Thr: $\varepsilon = 0.002$, $\sigma_0 = 1.0$, $\xi = 0.1$, $\gamma_1 = 2.87$, $\gamma_2 = 2.44$, $\gamma_3 = 2.63$, $\delta_1 = 1315.13$, $\delta_2 = 2084.35$, $\delta_3 = 3836.81$.

В прямоугольной области (электрофоретической камере) с размерами $L_x = 5.0$, $L_y = 0.5$ на концах создавалась разность потенциалов $\varphi_0 = 1500$ и задавались значения $\psi_L = 6.90$, $\psi_R = -2.30$ ($\mathrm{pH}_L = 4.0$, $\mathrm{pH}_R = 8.0$), определяющие линейный pH-градиент. Значения концентраций первоначально однородного распределения аминокислот в камере: $c_{1,0} = 1.50$, $c_{2,0} = 1.95$, $c_{3,0} = 2.55$.

Рис. 1 демонстрирует стационарный этап разделения смеси для указанных аминокислот в случаях градиентов 4.0–8.0 и 5.6–6.7. Показаны линии уровня концентраций аминокислот (электрофореграммы) — три первых ряда электрофореграмм приведены для того, чтобы убедиться в том, что смесь действительно разделяется, последний ряд соответствует электрофореграммам, наблюдаемым в реальных экспериментах. В частности, по такой электрофореграмме для градиента 4.0–8.0 невозможно судить о разделении смеси, несмотря на то, что в действительности оно произошло. Кроме этого, на рис. 1 показаны профили концентраций аминокислот. Заметим, что в случае градиента 5.6–6.7 разделение смеси происходит

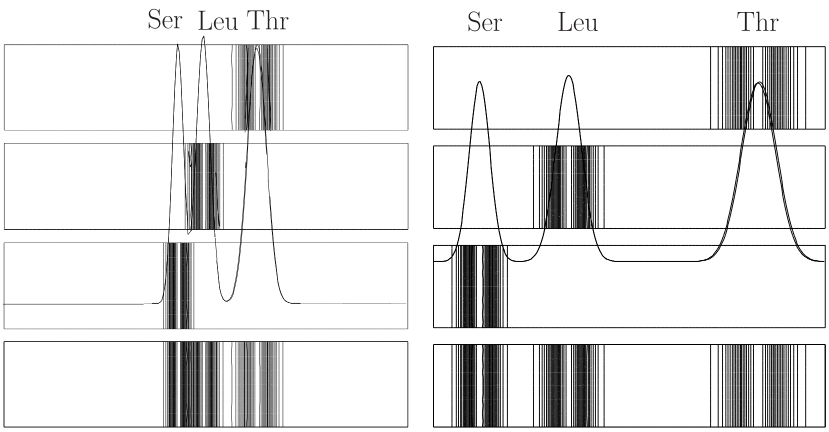


Рис. 1. Разделение смеси для pH-градиентов 4.0–8.0 и 5.6–6.7.

примерно при $t = 42.0$ (55.5 часа), тогда как для градиента 4.0–8.0 для достижения стационарного состояния требуется примерно $t = 9.5$ (12.5 часа).

При проведении ИЭФ важное значение имеет достижение процессом стационарного состояния, т. е. полного разделения смеси. Остановка процесса раньше времени может привести к неправильным выводам, например, о составе смеси. Рис. 2 показывает динамику процесса разделения для смеси Ser, Leu, Thr в pH-градиенте 5.6–6.7. Пунктирная линия 1 соответствует почти однородному распределению в момент времени $t = 0.55$. В момент времени $t = 5.55$ произошло частичное разделение смеси — видно (линия 2), что в ЭФК возникает два пика, соответствующие Ser и Leu, тогда как пик, соответствующий Thr отсутствует. В момент времени $t = 10.55$ (линия 3) пик, соответствующий Ser, практически достиг стационарного состояния, и появился плохо выраженный пик, соответствующий Thr. В момент времени $t = 15.55$ пики для Ser и Leu находятся почти в стационарном состоянии (линия 4). Сплошная черная линия 5 на рисунке ($t = 30.55$) показывает наличие трех ярко выраженных пиков, что, в свою очередь, указывает на полное разделение смеси, хотя стационарное состояние наступает примерно при $t = 42.00$.

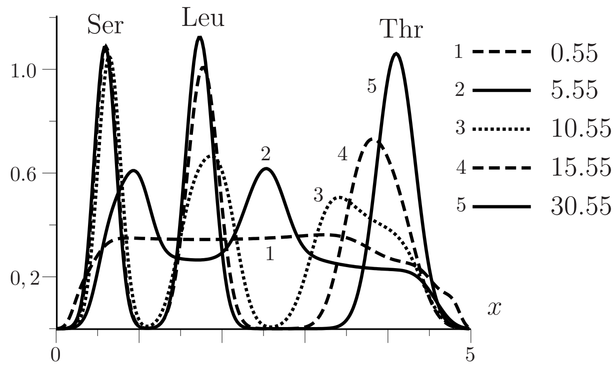


Рис. 2. Динамика процесса разделения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877, грантов РФФИ 10-05-00646, 11-05-01138, 11–05–91052, 10-01-00452, и АФГИР/CRDF RUM1–2943–RO–09.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Sakharova L. V., Vladimirov V. A., Zhukov M. Yu.* Self-discretization of medium in electrophoretic chamber: anomalous pH-gradient in ampholyte solution // arXiv.org [Электронный ресурс]. http://arxiv.org/abs/0902.3758.

[2] *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И.* Математическая теория электрофореза. Киев: Наукова думка, 1983. 204 с.

[3] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 2005. 216 с.

[4] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

[5] *Vcelakova K., Zuskova I., Kenndler E., Gas B.* Determination of cationic mobilities and pK_a values of 22 amino acids by capillary zone electrophoresis // Electrophoresis. 2004. **25**. Pp. 309–317.

Zhukova N. M. *Nonstationary IEF problem for aminoacid in given pH-gradient.* The isoelectric dynamics problem is numerically investigated by FEM. The results of the numerical experiments which demonstrate fractionating of mixture are presented.

ТЕРМОУПРУГАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ

Иваночкин П. Г.[*], **Колесников И. В.**[**]
[*]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*
[**]*Ростовский государственный университет путей сообщения*

Получено приближенное решение термоупругой контактной задачи для цилиндрического подшипника скольжения. Предполагается, что подшипник нагревается вследствии генерации тепла в дискретных областях номинальной поверхности трения, что приводит к необходимости использовать предложенные Барбером условия неидеального теплового контакта. Связь между перемещением точек внутренней поверхности втулки и контактным давлением получена в результате построения вырожденного (в асимптотическом смысле) решения термоупругой контактной задачи для тонкой втулки. Исследовано влияние тепловыделения на напряженно-деформированное состояние подшипника.

1. Введение. Обычно при решении задач контактного взаимодействия в трибологии для анализа распределения поля температур используют в качестве граничных условий в зоне контакта условия идеального теплового контакта [1]:

$$\begin{aligned} &-k_1\tfrac{\partial T_1(R,t)}{\partial n} + k_2\tfrac{\partial T_2(R,t)}{\partial n} = Q(t) \\ &T_1(R,t) = T_2(R,t) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь T_i $(i = 1,2)$ — температура i–того тела во всех точках R граничной поверхности, n — единичная нормаль к поверхности S, внешняя по отношению ко второму телу, k_i $(i = 1,2)$ — коэффициенты теплопроводности тел, Q — удельная мощность тепловыделения.

В реальном контакте взаимодействие тел осуществляется не по всей номинальной поверхности трения, а в дискретных областях. Размеры этих областей очень малы, а температуры в них существенно превышают среднюю температуру номинальной области контакта [2]. Поэтому условия идеального теплового контакта не позволяют адекватно описывать тепловые процессы.

В ряде работ [3, 4] используют условия неидеального теплового контакта с распределением тепловых потоков:

$$\begin{aligned} -k_1\tfrac{\partial T_1(R,t)}{\partial n} &= \alpha Q(t) \\ k_2\tfrac{\partial T_2(R,t)}{\partial n} &= (1-\alpha)Q(t) \end{aligned} \tag{2}$$

где α — коэффициент распределения тепловых потоков, показывающий какая часть теплоты, выделяющейся при трении, поступает в первое тело. Коэффициент распределения тепловых потоков определяется из условия равенства температур в дискретных областях контакта.

В общем случае переход от условий (1) к условиям (2) представляется некорректным, так как коэффициент α является переменным и применение условий (2) приводит к появлению разницы температур тел в области контакта.

Для определения температуры тел при трении целесообразно использовать предложенные Барбером условия неидеального теплового контакта [5], которые учитывают влияние разности температур на распределение теплоты между ними:

$$\begin{aligned} -k_1\tfrac{\partial T_1(R,t)}{\partial n} &= \alpha_f Q(t) - \lambda\left(T_1(R,t) - T_2(R,t)\right) \\ k_2\tfrac{\partial T_2(R,t)}{\partial n} &= (1-\alpha_f)Q(t) + \lambda\left(T_1(R,t) - T_2(R,t)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Введенный коэффициент α_f (коэффициент распределения энергии трения), показывает какая часть энергии образуется в виде теплоты на поверхности трения первого тела в результате разрушения адгезионных связей в фактических областях контакта и деформации неровностей шероховатости. Тепловая проводимость λ контакта приводит к появлению теплового потока из тела с более высокой температурой в области взаимодействия в тело с меньшей контактной температурой.

Условия (3) при $\lambda \to 0$ вырождаются в условия (2) неидеального теплового контакта с распределением тепловых потоков, а при $\lambda \to \infty$ из них получаются условия (1) идеального теплового контакта.

В работах [6, 7] были предложены условия неидеального теплового контакта, которые при наличии источника теплоты в области взаимодействия тел принимают вид

$$\begin{aligned} -k_1\tfrac{\partial T_1(R,t)}{\partial n} + k_2\tfrac{\partial T_2(R,t)}{\partial n} &= Q(t) \\ k_1\tfrac{\partial T_1(R,t)}{\partial n} + k_2\tfrac{\partial T_2(R,t)}{\partial n} &= 2\lambda\left(T_1(R,t) - T_2(R,t)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Условия (4) являются частным случаем (3) при $\alpha_f = 1/2$, т. е. когда тепловая энергия выделяется в равных долях на поверхностях трения тел.

Постановка задачи.

В рамках плоской термоупругой деформации рассмотрим подшипниковый узел, включающий следующие детали:

1) втулка с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2; $(h = r_2 - r_1)$,

2) вал радиуса r_0, $(r_0 = r_1 - \Delta)$,

3) опорная обойма с внутренним радиусом r_2.

Вал вдавливается на величину δ в поверхность втулки без перекоса погонной силой P и вращается с постоянной угловой скоростью ω. Угол контакта между валом и втулкой после деформации — $2\theta_0$.

Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат (r, z, θ) с осью z, параллельной оси подшипника и проходящей через точку O.

При вращении вала в области контакта выделяется тепло, поток которого равен

$$Q = r_1\omega f q\left(\theta\right) \tag{5}$$

где f — коэффициент трения между поверхностью вала и втулки, $q\left(\theta\right)$ — контактное давление. Температурный режим подшипника стационарен во времени.

При дальнейшем решении задачи введем следующие упрощающие предположения:

- при определении контактного давления будем считать, что

1) механические характеристики вала и обоймы значительно превосходят механические характеристики втулки, так что вал и обойму можно считать абсолютно жесткими;

2) полудлина дуги контакта $a = r_1\theta_0$ много больше толщины h, так что втулку можно считать относительно тонкой ($h \ll a$);

3) между поверхностями втулки и обоймы имеет место полное сцепление;

4) силами трения в области контакта можно пренебречь;

5) вне области контакта внутренняя поверхность втулки свободна от усилий;

6) при определении напряженно-деформированного состояния втулки можно использовать формулы линейной теории упругости;

- при определении поля температур будем считать, что:

1) в зоне контакта на поверхности вала и втулки выполняется условие неидеального теплового контакта

$$k_1 \frac{\partial T_1(\theta)}{\partial r} = \alpha_f Q + \lambda \left(T_1(\theta) - T_2(\theta)\right) \tag{6}$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2(\theta)}{\partial r} = (1-\alpha_f)Q - \lambda \left(T_1(\theta) - T_2(R,t)\right) \tag{7}$$

2) на внутренней поверхности втулки вне области контакта и на ее внешней поверхности будем считать заданными условиями теплообмена с окружающей средой

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + \alpha_1 \left(T_1 - T_*\right) = 0 \tag{8}$$

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + \alpha_2 \left(T_2 - T_0\right) = 0 \tag{9}$$

α_1 — коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки в зазор с температурой T_*, α_2 — коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности втулки. Температура $T_0 = \Phi(\theta)$ на внутренней поверхности обоймы считается известной функцией угла θ.

С целью получения вырожденного (в асимптотическом смысле) решения задачи будем следовать схеме, предложенной в [4]. Отличие предлагаемой постановки лишь в граничном условии для температуры на поверхности втулки в области контакта

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = -\mu q(\theta) + \chi \left(\overline{T}_1 - T_2\right) \tag{10}$$

$$\mu = (1-\alpha_f)\omega r_1 f {k_2}^{-1}, \chi = \lambda {k_2}^{-1}$$

Входящие в эти условия параметры α_f и λ определяются из условия

$$k_1 \frac{\partial T_1(\theta)}{\partial r} = \alpha_f \omega r_1 f {k_2}^{-1} q(\theta) - \lambda \left(T_1 - T_2\right) \quad \left(r = r_1 \quad |\theta| \leqslant \theta_0\right), \tag{11}$$

которое после осреднения по зоне контакта может быть приведено к виду

$$k_1 \frac{\partial \overline{T_1}(\theta)}{\partial r} + \lambda \overline{T_1} = \alpha_f \omega r_1 f q(\theta) + \lambda \int_{-\theta_0}^{\theta_0} T_2(\theta) d\theta \tag{12}$$

и условия равенства средних температур в зоне контакта

$$\overline{T_1} = \overline{T_2} \quad (r = r_1 \quad |\theta| \leqslant \theta_0) . \tag{13}$$

Требуется определить: закон распределения контактного давления $q(\theta)$ по координате θ, величину угла контакта $2\theta_0$, связь между силой P, действующей на вал и степенью его внедрения δ в поверхность втулки, параметры α_f и λ.

Построено решение поставленной задачи и исследовано влияние тепловой проводимости контакта. Расчеты проведены для втулки тормозной рычажной передачи локомотива ВЛ-80. Разница контактных температур максимальна для условий неидеального теплового контакта с распределением тепловых потоков, т. е. $\lambda = 0$. С увеличением тепловой проводимости разница температур уменьшается и становится равной нулю в условиях идеального теплового контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-08-01195-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ling F. F.* A Quasi-Iterative Metod for Computing Interface Temperature Distribution // Z. angew. Math. und Phys. 1959. V. 10. № 5. P. 461.

[2] *Bogdanovich P. N. Tkachuk D. V.* Temperature Distribution over Contact Area and «Hot Spots"in Rubbing Solid Contact // Tribology International. 2006. V. 39. No. 11. Pp. 1355–1360.

[3] *Blok H.* Theoretical Study of Temperature Rise at Surfaces of Actual Contact under Oilness Lubricating Conditions // Proc. Inst. Mech. Eng. London. 1937. V. 2. P. 222–235.

[4] *Александров В. М., Губарева Е. А.* Решение термоупругих контактных задач для цилиндрического и сферического подшипников скольжения // Трение и износ. 2005. Т. 26. № 4. С. 347–357.

[5] *Barber J. R.* The Conduction of Heat from Sliding Solids // Int. J. Heat Mass Transfer. 1970. V. 13. Pp. 857–869.

[6] *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // ИФЖ. 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.

[7] *Александров В. М., Аннакулова Г. К.* Взаимодействие покрытий с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.

Ivanochkin P. G., Kolesnikov I. V. *Thermoelastic contact problem for a cylindrical sleeve bearing with a non-ideal thermal contact.* An approximate solution of the thermoelastic contact problem for a cylindrical sleeve bearing. It is assumed that the bearing is heated due to the generation of heat in discrete regions of nominal friction surface, which leads to the need for the proposed use of non-ideal conditions by Barber thermal contact. The relationship between the movement of points inside surface of the sleeve and the contact pressure is obtained as a result of the construction of a degenerate (in the asymptotic sense) solution of the thermoelastic contact problem for a thin sleeve. The influence of heat on the stress-strain state of the bearing.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В ОБЛАСТИ ОТСЛОЕНИЯ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ

Индейцев Д. А.*, Абрамян А. К.*, Мочалова Ю. А.*, Семенов Б. Н.**

**Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

***Санкт-Петербургский государственный университет*

Исследованы особенности локализации колебаний на дефектах типа трещины — отслоения и влияние локализации на развитие дефектов. Предложена модель, позволяющая получить приближенное аналитическое решение и проанализировать условия роста отслоения и остановки его роста.

1. Введение. Эффекты локализации динамических процессов в деформируемых твердых телах в областях, содержащих включения с собственной динамикой, были впервые исследованы Воровичем И. И. и Бабешко В. А. [1]. Большинство известных работ посвящены определению необходимых и достаточных условий существования дискретного спектра для различных спектральных задач. Решение соответствующих нестационарных задач, а именно, исследование образования локализованных волн в сплошной среде с включениями в случае нестационарного нагружения встречается крайне редко. Открытым остается вопрос об изменении напряженного состояния в областях локализации динамического процесса по сравнению с напряженным состоянием, порожденным проходящей и отраженной волнами. Последнее важно при инженерной оценке контактной прочности включения и акустических свойств среды. Следует заметить, что определение динамического поведения сплошной среды с включением при выделении только локализованного состояния существенно упрощает решение полной исходной задачи Коши, учитывающей переходные волновые процессы.

В работе приводится решение двух важных с точки зрения инженерных приложений задач о нестационарном поведении упруго-деформируемого покрытия на подложке при наличии дефекта в виде отслоения. Решение первой задачи позволяет найти необходимые параметры рассматриваемой структуры, при которых явление локализации приводит к существенному увеличению напряжений в окрестности отслоения по сравнению с переходным волновым процессом. Решение второй задачи описывает рост области отслоения. Получены необходимые условия остановки роста в зависимости от параметров подложки и пленки и от параметров нагружения.

2. Постановка задачи. В качестве модели пленки на подложке возьмем струну на упругом основании, коэффициент жесткости которого $k\big[x, l(t)\big]$ принимает нулевые значения в области отслоения, а вне этой области равен k_0. Будем рассматривать силовое нагружение в виде сосредоточенного усилия $P(t)\delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. В этом случае уравнение описывающее перемещение струны на упругом основании имеет вид

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} - T u_{xx} + k\big[x, l(t)\big] u = P(t)\delta(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ &u,\ u_x \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — погонная плотность струны, u — вертикальное смещение струны, T — сила натяжения невозмущенной струны. Предполагаем, что в начальный момент времени $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

В качестве критерия отслоения выбираем деформационный критерий следующего вида: при достижении хотя бы в одном их концов отслоившегося участка критического значения смещения Δ происходит рост отслоения со скоростью β. Уравнение, описывающее рост области отслоения, имеет вид [3]

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta}{2}\Big\{H\big[u(x,t)|_{x=l_-(t)} - \Delta\big] + H\big[u(x,t)|_{x=l+(t)} - \Delta\big]\Big\}, \quad l\big|_{t=0} = l_0 \tag{2}$$

Здесь $l_-(t)$ — координата левого конца отслоения, $l_+(t)$ — координата правого конца отслоения, $2l(t) = l_- + l_+$ — длина области отслоения, $u(x,t)$ — перемещение точки струны с координатой x в момент времени t, H — функция Хевисайда, β — характерный параметр, Δ — критическое перемещение, при котором происходит отрыв пленки от упругого основания.

3. Локализованные моды. В случае фиксированной области отслоения $l(t) = l_0$ задача имеет точное решение. Это позволяет: во-первых, сравнить вклад локализованного решения, соответствующего дискретному спектру собственных частот колебаний [2] и переходного волнового процесса (непрерывный спектр собственных частот колебаний), и во-вторых, определить значения l_0 и параметра пленки $\omega_b = \sqrt{k/\rho}$ (частота отсечки), при которых существует единственная локализованная мода колебаний, формирующаяся в области включения. В самом общем случае значение смещения струны в местах отслоения ($x = \pm l_0$) имеет вид

$$\begin{aligned} u(l_0,t) = -\frac{1}{2\sqrt{k_0 T}}\Bigg[\sum_{j=1}^{N}\frac{\sin(\omega_j\, l_0/c)}{1 + l_0\sqrt{\omega_b^2 - \omega_j^2}/c}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\mathrm{d}\tau \,+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{\omega_b}^{\infty}\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}\cos(\omega\, l_0/c)}{\omega^2 - \omega_b^2\cos^2(\omega\, l_0/c)}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\Bigg] \end{aligned} \tag{3}$$

Можно показать, что выражение (3) полностью совпадает с решением, полученным в работе [2] с помощью метода разложения по локализованным и бегущим модам струны с распределенным включением и ω_j — это собственные частоты, лежащие до частоты отсечки.

Сравнение статического решения $u_{st}(l_0) = P_0/2\sqrt{k_0 T}$ (в случае симметричного нагружения ($x_p = 0$, $P = P_0 H(t)$) с динамическим, учитывающим влияние локализованных мод колебаний (3), показывает, что

$$u(l_0,t) \to u_{st}\left[1 - \sum_{j=1}^{N}\frac{\sin(\omega_j\, l_0/c)}{\omega_j\Big(1 + l_0\sqrt{\omega_b^2 - \omega_j^2}/c\Big)}\cos\omega_j t\right], \quad t \to \infty$$

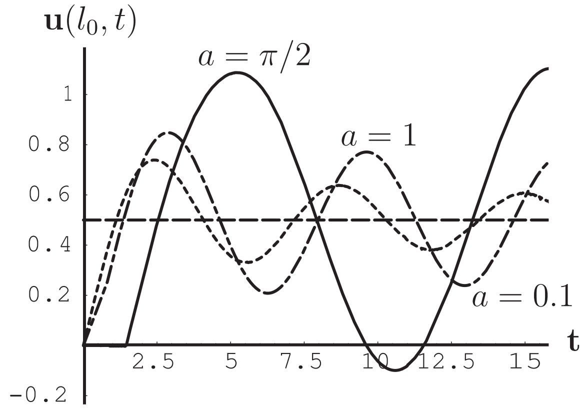


Рис. 1. Локализованная форма ($a = \omega_b l_0/c$).

Локализация волн в области отслоения пленки приводит к увеличению амплитуды ее вынужденных колебаний. Такие колебания при наличии в системе незначительной диссипации могут существовать длительное время. Существует диапазон параметров, при которых амплитуды локализованных колебаний могут значительно превосходить амплитуды распространяющихся волн. На рис. 1 приведены графики зависимости перемещения пленки в точке $x = l_0$ в зависимости от t для различных параметров $\omega_b\, l_0/c < \pi/2$. Как видно, при стремлении параметра $\omega_b\, l_0/c$ к $\pi/2$ наблюдается рост прогибов на краях области отслоения.

Далее исследуя исходную задачу о росте зоны отслоения, будем считать, что параметры рассматриваемой структуры таковы, что именно локализованные формы колебаний вносят основной вклад в решение и переходными процессами можно пренебречь. Это позволяет искать решение с помощью метода разложения по собственным формам, оставив в разложении только локализованные формы.

4. Отслоение пленки. Примем, что длина исходной области отслоения выбрана так, что соответствующая спектральная задача имеет одно значение дискретного спектра, которому соответствует симметричная мода, и непрерывный спектр, начинающийся за частотой отсечки. Локализация волнового процесса в области дефекта происходит за счет симметричной моды колебаний, поэтому считаем, что рост зоны отслоения происходит также симметрично ($l_+ = l_-$). Решение исходной нелинейной задачи будем искать применяя метод Бубнова–Галеркина на переменном интервале

$$u(x,t) = v_0(x,l)\, q_0(t), \tag{4}$$

$$v_0(x,l) = \cos\lambda x\, H\big(l-x\big) + \cos\lambda l\, \mathrm{e}^{-\gamma(x-l)} H\big(x-l\big), \quad 0 < x < \infty. \tag{5}$$

где $\omega_0 < \omega_b$ — собственная частота, $v_0(x,l)$ — соответствующая ей симметричная локализованная собственная мода, $q_0(t)$ — неизвестная функция (обобщенная координата), $\lambda = \omega_0(l)/c$, $\gamma = \sqrt{\omega_b^2 - \omega_0^2(l)}/c$. Переходные процессы, связанные с распространением бегущих волн, не рассматриваются.

Подставляя (4) в (1), умножая полученное уравнение на $v_0(x,l)$ и интегрируя по x, получим следующее уравнение относительно $q_0(t)$

$$\frac{d^2q_0}{dt^2} + \Big[\omega_0^2(l) - \frac{\omega_b^2 \cos^2 \lambda l}{c^2(1+l\gamma)}\Big(\frac{dl}{dt}\Big)^2\Big] q_0 = \frac{Q_0(t)}{M_0}, \quad q_0, \frac{dq_0}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Здесь $Q_0(t)$ — обобщенная сила, которая в случае импульсной нагрузки определяется как $Q_0(t) = P_0\delta(t)$, $M_0 = \rho(l + 1/\gamma)$ — обобщенная масса. Уравнение (6) получено в предположении малости изменения исходной собственной частоты колебаний, которая определяет форму колебаний при $l(t) = l_0$, а также учитывалось дисперсионное соотношение, определяющее зависимость собственной локализованной частоты ω_0 от l

$$\tan \frac{l\,\omega_0}{c} = \sqrt{\omega_b^2 - \omega_0^2}/\omega_0. \tag{7}$$

Уравнение (2), описывающее рост области отслоения, принимает вид

$$\frac{dl}{dt} = \beta H\Big[v_0(l,\omega_0)q_0(t) - \Delta\Big], \quad l|_{t=0} = l_0. \tag{8}$$

Таким образом, исходная задача свелась к системе уравнений (6)–(8).

Рассмотрим колебания, вызванные импульсной возбуждающей силой, $P(t) = P_0\delta(x)\delta(t)$. Тогда при $t < t_1$ величина зоны отслоения постоянна и, решение уравнения (6) известно. Подставляя его в (8) получим, что необходимое условие роста области отслоения имеет вид

$$\frac{P_0 \cos \lambda l_0}{M_0(l_0)\,\omega_0} \geqslant \Delta. \tag{9}$$

Если начальные условия таковы, что неравенство (9) выполняется, то линейный рост зоны отслоения со скоростью β начинается с момента времени $t = t_1$, который может быть приближенно определен следующим выражением

$$\sin \omega_0 t_1 = \frac{\Delta\,\omega_0 M_0(l_0)}{P_0 \cos \lambda l_0}, \quad l(t) = l_0 + \beta\, t\, H(t - t_1)$$

Длина зоны отслоения растет до того момента времени $t = t_2$ пока выполняется деформационный критерий (8). На этапе роста l меняется и ω_0 в соответствии с дисперсионном уравнением (7), а также $M_0(l)$. Таким образом, дифференциальное уравнение (8) имеет переменные коэффициенты и ненулевые начальные условия. При $t > t_2$ длина зоны отслоения остается постоянной и равной $l_1 = l(t_2)$. Рост зоны отслоения возобновляется в момент времени $t = t_3$, когда амплитуда колебаний пленки достигает Δ, и так далее. Такой ступенчатый рост зоны отслоения продолжается до тех пор пока $l(t)$ не достигнет некоторого критического значения. Таким образом, приближенное аналитическое решение задачи, построенное на основе одной локализованной моды (5), описывает ступенчатый рост области отслоения со скоростью, определяемой величиной параметра β. Результаты численного моделирования роста отслоения при различных значениях параметров $\beta = 0.3,\ 0.2, 0.1$ и $\Delta = 0.2$ приведены на рис. 2.

Заключение. На примере отслоения струны от упругого основания была показана возможность локализации колебаний на дефекте типа отслоения и проанализировано влияние этой локализации на процесс роста зоны отслоения.

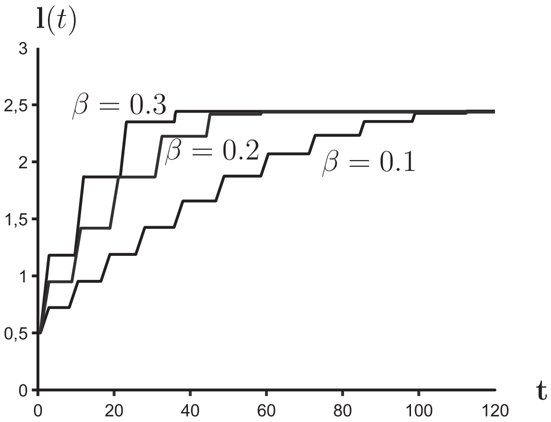


Рис. 2. Поведение границы области отслоения.

При построении приближенного аналитического решения учтена лишь первая симметричная форма колебаний. В дальнейшем необходим учет и несимметричной формы, а также перестройка колебаний при росте отслоения. Вполне естественно обобщение полученных результатов на случай отслоения двумерной пленки, балки и тонкой пластины.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-01-00814.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Г.* Высокочастотный резонанс в полуогранниченных телах с включениями // Механика твердого тела. 1990. Т. 3. С. 74–84.

[2] *Индейцев Д. А., Кузнецов Н. Г., Мотыгин О. В., Мочалова Ю. А.* Локализация линейных волн. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 342 с.

[3] *Andrews M. G., Massab R., Cavicchi A., Cox B. N.* Dynamic interaction effects of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending // Int. J. of Solids and Structures. 2009. V. 46. Pp. 1815–1833.

Indeitsev D. A., Abramyan A. K., Mochalova Yu. A., Semenov B. N. *Localization of oscillations in the thin-film delamination zone.* Localization of oscillations on defects of types of cracks or delaminations and the influence of the localization on the growth of defects are investigated. The model, which allows us to obtain an approximate analytical solution and to analyze the conditions of growth of delamination zone, is proposed.

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВОГО ШУМА

Карпинский Д. Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Выполнен расчет характеристик колебаний, вносимых тепловым шумом в малоамплитудный динамический режим микроконсоли атомно-силового микроскопа (АСМ). Уточнены условия работы атомно-силового микроскопа, когда единственной возмущающей силой является тепловой шум. Расчет показал, что среднеквадратичная амплитуда колебаний зонда АСМ заметно меняется при учете взаимодействия зонд-образец.

1. Введение. Малоамплитудные динамические режимы (контактный и неконтактный) атомно-силового микроскопа (АСМ) широко используются для получения изображения поверхности образца высокого разрешения, а также для калибровки микроконсоли АСМ [1, 2]. В [3] впервые выполнен расчет среднеквадратических отклонений микроконсоли АСМ под действием теплового шума в отсутствии взаимодействия зонд–образец. Результаты расчета [3] были подтверждены на опыте в [4]. В настоящей работе представлены результаты расчета влияния короткодействующих сил в контактном и сил ван дер Ваальса в бесконтактном малоамплитудных режимах на оценку среднеквадратических отклонений микроконсоли за счет тепловых шумов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим теперь постановку задачи о собственных колебаниях микроконсоли с зондом, на вершину которого действуют сосредоточенные силы. В случае малоамплитудных осцилляций около положения равновесия силу взаимодействия можно линеаризовать, тогда силы, действующие на вершину зонда по нормали F_n и вдоль F_l, F_t поверхности образца образца примут вид

$$F_n = k_n v, \quad F_l = k_l u, \quad F_t = k_t w,$$

где v, u, w малые перемещения конца зонда, а коэффициенты жесткости k_n, $k_l = k_t$ силы даны в [1] (табл. 1).

В расчете будем учитывать плоские (вертикальные) изгибные колебания микроконсоли, а также крутильные колебания и колебания бокового изгиба (рис. 1).

режим	D (нм)	k_n (Н/м)	k_t (Н/м)
нет взаимодействия	1.0	0	0
притяжение	0.5	-7.9	0
отталкивание	0.08	35	58

Таблица 1. Силы взаимодействия зонд–образец. D — расстояние между зондом и образцом.

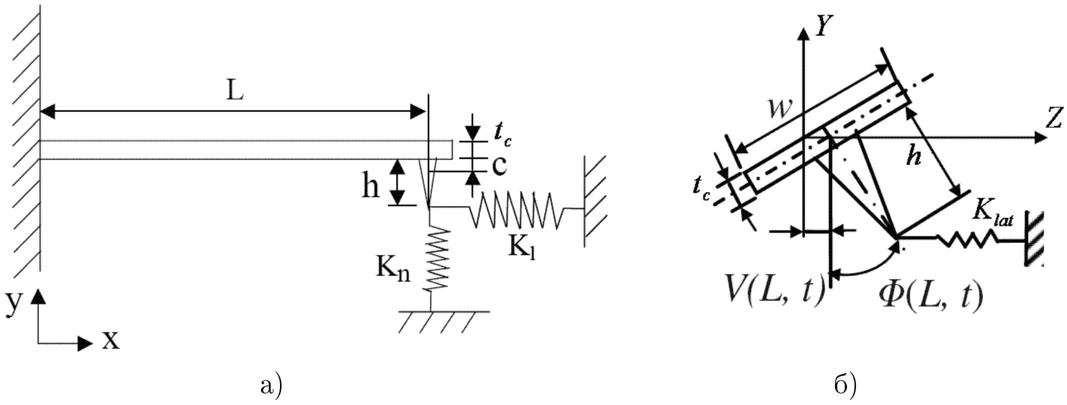


Рис. 1. Расчетная модель микроконсоли атомно-силового микроскопа: а) вид микроконсоли сбоку, б) вид с торца. Пружины соответствуют силам взаимодействия зонд–образец.

Уравнение движения микроконсоли и соответствующие граничные условия задачи аналогичны [6, 7]. Эти уравнения описывают изгибные вертикальные, боковые, а также связанные изгибно — крутильные моды колебаний. Численные значения для постоянных величин в задаче выбраны аналогично [7]: модуль Юнга — $E = 1.5 \cdot 10^{11}$ Па, длина микроконсоли — $L = 200$ мкм, ширина микроконсоли — $w = 40$ мкм, толщина — $t_c = 3.5$ мкм, масса зонда — $m = 2 \cdot 10^{-13}$ кг, высота зонда — $h = 15$ мкм. Решение данной задачи предусматривает нахождение собственных частот микроконсоли f_n, которые являются корнями соотвествующего частотного уравнения и определения собственных форм микроконсоли. Общее решение задачи имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) h_n(x/L), \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \tilde{h}_n(x/L),$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) g_n(x/L),$$

где $\Phi(x,t)$ — угол закрутки, $h_n(x/L)$, $\tilde{h}_n(x/L)$, $g_n(x/L)$ — собственные формы моды n (безразмерные) для вертикального, бокового изгибов и кручения, соответственно, а $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ — соответствующие им возмущения ($a_n(t)$, $b_n(t)$ — размерности длины, $c_n(t)$ — безразмерная величина) моды n в момент времени t. Собственные формы колебаний консоли, удовлетворяющие граничным условиям жесткого закрепления при $x = 0$, имеют вид

$$\begin{gathered} h_n(x/L) = G_n\left[\cos(k_n x/L) - \cosh(k_n x/L)\right] + H_n\left[\sin(k_n x/L) - \sinh(k_n x/L)\right], \\ \tilde{h}_n(x/L) = \tilde{G}_n\left[\cos(\gamma_n x/L) - \cosh(\gamma_n x/L)\right] + \tilde{H}_n\left[\sin(\gamma_n x/L) - \sinh(\gamma_n x/L)\right], \\ g_n(x/L) = B_n \sin(p_n x/L). \end{gathered} \tag{1}$$

3. Результаты расчетов и их обсуждение. В табл. 2 показаны собственные частоты для трех изгибных мод и одной связанной моды (кручение + боковой изгиб)при трех режимах взаимодействия зонд — поверхность образца. Расчеты пока-

Номер моды, k	Нет взаимодействия, кГц	Притяжение (бесконтактный), кГц	Отталкивание (контактный), кГц
1	111,7	15,0	245,2
2	706,4	698,1	752,8
3	1110,2	1110,2	1335,0 (1143,1)
4	1977,8	1974,8	1998,8

Таблица 2. Собственные частоты для задачи (4)–(12): первая, вторая и четвертая моды соответствуют вертикальному изгибу, третья связанным модам кручения и бокового изгиба. Число в скобках указывает собственную частоту чистой моды кручения.

зали, что в режиме притяжения собственные частоты уменьшаются по сравнению с режимом отсутствия взаимодействия, а в режиме отталкивания увеличиваются.

Рассмотрим далее энергетический вклад каждой моды колебаний вертикального изгиба микроконсоли. При отсутствии взаимодействия зонд — образец коэффициенты G_n, H_n для моды вертикального изгиба в (1) даются формулами

$$G_n = (-1)^n/2, \quad H_n = -G_n \frac{\cos k_n + \cosh k_n}{\sin k_n + \sinh k_n},$$

При взаимодействующих зонде и образце численный расчет коэффициентов G_n, H_n был выполнен с помощью программы Maple. Расчеты показали существенное различие первой собственной формы для случаев взаимодействия зонд — образец и его отсутствия. Для высоких мод различие между соответствующими собственными формами незначительно. При отсутствии взаимодействия зонд — образец величина потенциальной энергии моды $W_n^p(t)$ дается простой формулой [1]

$$W_n^p(t) = \frac{k_c k_n^4}{24} a_n^2(t), \tag{2}$$

В (2) $k_c = Ewt_c^2/4L^3$ — коэффициент жесткости микроконсоли при статической нагрузке. При выбранных значениях параметров $k_c = 8$ Н/м.

В случае взаимодействия зонд — образец потенциальная энергия моды n вертикального изгиба определяется численно по формуле

$$W_n^p(t) = EIa_n^2(t) \int_0^1 \frac{h_n''^2(z)}{(1 + h_n'^2)^3/2}\, dz. \tag{3}$$

Аналогично [3], предположим, что каждой собственной моде микроконсоли соответствует энергия $\frac{1}{2}k_B T$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура (теорема равнораспределения [8]). Это обстоятельство позволяет получить оценку для величины $\sqrt{< u_n^2(1,t) >}$ для каждой собственной моды. При отсутствии взаимодействия зонд–образец из (2) получаем, что средняя квадратичная оценка u_n имеет вид [1]

$$\sqrt{< u_n^2(1,t) >} = \frac{\sqrt{12}}{k_n^2} \sqrt{\frac{k_B T}{k_c}},$$

Расчеты среднего квадратического отклонения вершины микроконсоли $\sqrt{< u_n^2(1,t) >}$ с учетом взаимодействия зонд–образец выполнены с использованием (3)для значений F_n, соответствующих режимам притяжения (силы ван дер Ваальса) и отталкивания (короткодействующие силы). Результаты расчетов даны в табл. 3. Из этой таблицы видно, что взаимодействие зонд–образец существенно меняет оценку $\sqrt{< u_1^2(1,t) >}$, в то время как для высоких мод изменения малы.

режим	$\sqrt{< u_1^2(1,t) >}$, нм	$\sqrt{< u_2^2(1,t) >}$, нм	$\sqrt{< u_3^2(1,t) >}$, нм	$\sqrt{< u_4^2(1,t) >}$, нм
нет взаимодействия	0.0303	0.00716	0.00280	0.00331
притяжение	0.0321	0.00709	0.00280	0.00330
отталкивание	0.0226	0.00746	0.00264	0.00336

Таблица 3. Величины среднеквадратичного отклонения конца микроконсоли для изгибных мод (статическая жесткость $k_c = 8\,\text{Н/м}$).

В заключение обсудим основные результаты расчетов. Расчеты показали, что в режиме отталкивания (контактный режим) увеличение K_n/k_c при $K_n > 0$ (например, переход к мягким микроконсолям) происходит монотонное увеличение собственных частот, тогда как в режиме притяжения при $K_n < 0$ снижение по абсолютной величине приводит к снижению собственных частот вплоть до обращения первой собственной частоты в ноль при $K_n/k_c < -1$. Поскольку первая мода вносит основной вклад в энергию колебаний микроконсоли, то это обстоятельство значительно влияет на оценку влияния теплового шума для микроконсоли. Неожиданными также оказались результаты о немонотонной зависимости коэффициентов G_n и H_n от K_n/k_c (коэффициенты увеличиваются по абсолютной величине при $K_n/k_c \geqslant 2$) и исчезновение мод третьего и более высокого порядка в режиме отталкивания. И, наконец, можно сделать вывод о необходимости подбора для опытов микроконсоли в соответствии с поставленной задачей эксперимента. Так, например, при необходимости уменьшить влияние теплового шума при работе с внешней возбуждающей силой в контактном режиме следует использовать «мягкую» микроконсоль, а при работе в бесконтактном режиме «мягкую» микроконсоль использовать опасно, так как первая собственная частота может обратиться в ноль. Полученные результаты расчета будут использованы для исследования влияния теплового шума на процессы разрыва и восстановления химических связей согласно термофлуктуационной концепции прочности твердых тел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Song Y., Bhushan B. J.* Atomic force microscopy dynamic modes: modeling and applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2008. V. 20. 225012.

[2] *Levy R. Maaloum M.* Measuring the spring constant of atomic force microscope cantilevers: thermal fluctuations and other methods // Nanotechnology. 2002. V.13. Pp. 1333–1337.

[3] *Butt H. J., Jaschke M.* Calculation of thermal noise in atomic force microscopy // Nanotechnology. 1995. V. 6. Pp. 1–11.

[4] *Paolino P., Tiribilli B., Bellon L.* Direct measurement of spatial modes of a micro-cantilever from thermal noise // J. Appl. Phys. 2009. V. 106. 094313.

[5] *Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н.* Оценка влияния теплового шума в малоамплитудных режимах атомно-силового микроскопа // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2010. № 5. С. 76–79.

[6] *Wu T. S., Chang W. -J., Hsu J. -C.* Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers // Microelectronic Engineering. 2004. V. 71. Pp. 15–23.

[7] *Lee H. -L., Chang W. -J.* Coupled lateral bending-torsional vibration sensitivity of atomic force microscope cantilever // Ultramicroscopy. 2008. V. 108. Pp. 707–719.

[8] *Ландау Л. Д.,Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 567 с.

Karpinsky D. N. *Dynamic characteristic calculation of atomic force microscope under thermal force*. Estimation of the thermal noise influence in the low amplitude regimes for atomic force microscopy. It is realized the calculation of errors owning to the thermal noise in vibrational regime of microcantilever by the non-contact and contact dynamic regimes of atomic force microscope. It is specify the work conditions for atomic force microscope, when the only driving force is the thermal noise.

О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ КРУГЛОЙ ГОФРИРОВАННОЙ МЕМБРАНЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ХОДОМ

Карякин М. И.[*,**], **Сигаева Т. В.**[*]

[*]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[**]*Южный математический институт, Владикавказ*

В работе рассматриваются осесимметричные мембраны с жестко защемленными краями под действием гидростатического давления. Для моделирования упругого поведения мембраны используются нелинейные уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява. Представлено решение задачи поиска профиля мембраны, имеющей продолжительный участок линейной зависимости между приложенным давлением и изменением объема. В качестве оптимизационного метода был использован модифицированный генетический алгоритм. Приведены результаты расчетов, даны профили найденных мембран.

1. Введение. Важными требованиями, предъявляемыми инженерами и проектировщиками к тонкостенным конструкциям, являются не только дешевизна и легкость изготовления, но также предсказуемость и надежность работы в условиях сложного напряженного состояния, при больших деформациях, длительной эксплуатации, под действием радиоактивного излучения, низких и высоких температур. Для решения таких задач необходимы как разработка новых моделей, способных точно описать нелинейное поведение оболочек, так и привлечение эффективных методов оптимизации для подбора формы конструкции. Сказанным определяется актуальность тематики данной работы, посвященной поиску оптимального профиля круглой гофрированной мембраны, предназначенной для использования в современных датчиках давления.

2. Основные соотношения. Рассмотрим круглую осесимметричную мембрану толщиной h и радиусом ρ. Профиль поверхности задается гладкой функцией $z = f(r)$, где z — высота точки мембраны относительно контура защемления. Кривизны поверхности вдоль меридиана и параллели выражаются следующим образом:

$$k_1 = -\frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{f'}{r(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad f' = \frac{df}{dr}.$$

В осесимметричном случае уравнения равновесия мембраны, находящейся под действием гидростатического давления, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява (см. [1]), сводятся к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных компонент расширенного шестимерного вектора $\mathbf{Y}$ с безразмерными компонентами

$$\begin{gathered} Y_1 = \frac{u_1}{h}, \quad Y_2 = \frac{u_2}{h}, \quad Y_3 = \theta_1, \quad Y_4 = \frac{rT_{11}}{Bh}, \\ Y_5 = \frac{r(CQ_1 - T_{11}\theta_1)}{Bh}, \quad Y_6 = \frac{rM_{11}}{Bh^2}, \end{gathered} \tag{1}$$

где u_1, u_2 — смещения срединной поверхности мембраны вдоль меридиана и нормали, θ_1 — угол поворота нормали, T_{11} и M_{11} — продольное усилие и изгибающий момент соответственно. Полученная система выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{dY_1}{dx} = -\frac{\nu}{x}Y_1 - \frac{K_1+\nu K_2}{C}Y_2 + \frac{1}{Cx}Y_4 - \frac{1}{2C}Y_3^2, \\
\frac{dY_2}{dx} = -\frac{K_1}{C}Y_1 - \frac{1}{C}Y_3, \\
\frac{dY_3}{dx} = -\frac{\nu}{x}Y_3 + \frac{12}{Cx}Y_5, \\
\frac{dY_4}{dx} = \frac{(1-\nu^2)C}{x}Y_1 - (1-\nu^2)K_2Y_2 + \frac{px}{C}Y_3 + \frac{\nu}{x}Y_4 - \frac{K_1}{C}Y_6, \\
\frac{dY_5}{dx} = \frac{(1-\nu^2)C}{12x}Y_3 + \frac{1}{C}Y_6 - \frac{\nu}{x}Y_5 + \frac{1}{C}Y_3Y_4, \\
\frac{dY_6}{dx} = (1-\nu^2)K_2Y_1 + \frac{(1-\nu^2)K_2^2x}{C}Y_2 + \frac{K_1+\nu^2K_2^2}{C}Y_4 - \frac{px}{2C}Y_3^2 + \frac{px}{C}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $K_i = k_ih$ — безразмерные кривизны, $x = r/h$ — безразмерный радиус, а $C = C(r) = 1/(1+f'^2)^{1/2}$.

Граничные условия для (2) в точке $x_1 = \rho/h$ в случае жёсткого защемления края принимают вид:

$$Y_1(x_1) = 0, \quad Y_2(x_1) = 0, \quad Y_3(x_1) = 0. \tag{3}$$

При численном интегрировании системы (2) был использован подход, когда условия ограниченности решения при $x = 0$ заменяются граничными условиями при $x = x_0$ ($x_0 \leqslant 1$):

$$Y_4(x_0) = 0, \quad Y_5(x_0) = 0, \quad Y_6(x_0) = 0. \tag{4}$$

При численном решении двухточечной нелинейной краевой задачи (2)–(4) был применен метод пристрелки, в котором в качестве задаваемого параметра (параметра нагружения) выбирается величина вертикального прогиба в точке $x = x_0$, а набор пристреливаемых параметров $V_1 = Y_1(x_0)$, $V_2 = p$ и $V_3 = Y_3(x_0)$ определяется после решения задачи Коши (2)–(4) из условия удовлетворения соотношениям (3).

Данная модель эффективна для тонких оболочек и позволяет получить полную информацию о напряженно-деформированном состоянии и перемещениях мембраны. На основе полученных данных вычисляются одна или несколько характеристик мембраны, которые необходимо оптимизировать. В качестве такой характеристики может выступать функция поверхностных напряжений [2], сглаживание которой приведет к уменьшению зон пластических деформаций, являющихся одной из причин разрушений тонких оболочек. В настоящей работе для оптимизации выбрано изменение объема под мембраной в процессе нагружения, которое в идеале должно иметь максимально линейный характер.

3. Постановка и численные результаты задачи. В качестве примера оптимизации профиля рассмотрим задачу отыскания мебраны, у которой зависимость объема от приложенного давления имеет линейный характер, считая что оптимальной мембране соответствует максимальная (в смысле объема) длина такого линейного участка. Постановка задачи такова: среди множества круглых мембран с радиусом $\rho = 25$ мм и толщиной $h = 0.1$ мм найти такую, линейное изменение объема которой будет иметь место в наиболее широком диапазоне. Геометрия мембраны задается набором высот профиля $z_i (i = 1, ..., 6)$ в шести фиксированных по радиусу точках $r_i (i = 1, ..., 6)$, и сам профиль строится по заданному набору на основе сплайн-интерполяции. Координаты r_i заданы, а высоты z_i и будут являться оптимизируемыми параметрами. Дополнительно считаем, что середина мембраны и участок возле края являются пологими: $z = 0$ при $r = 23 \div 25$ мм и $z = \text{const}$ при $r = 0 \div 5$ мм.

В этой задаче по каждому профилю величина целевой функции находится на основе численного анализа краевой задачи (2)–(4) следующим образом. В ходе решения (2)–(4) строится зависимость между приложенным давлением и изменением в объеме под поверхностью, причем процесс продолжается до тех пор, пока эта зависимость явлется достаточно линейной. Близость к линейному означает, что среднеквадратичное отклонение функции от аппроксимирующей ее прямой не превосходит некоторого заданного малого значения. Конечная длина такой кривой совпадает со значением максимизируемой функции $l = l(z_1, ..., z_6)$ и зависит от набора параметров z_i сложно, нелинейно и немонотонно. Именно поэтому для поиска глобального максимума и был привлечен модифицированный генетический алгоритм из [3], имитирующий процессы эволюции для нахождения оптимального набора параметров даже в нелинейных задачах.

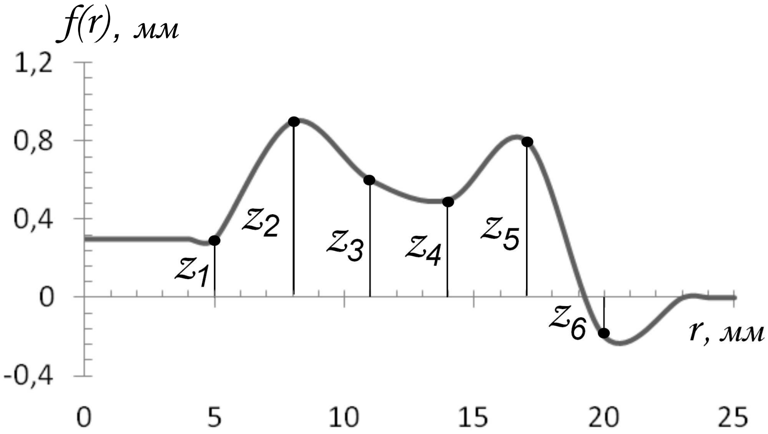


Рис. 1. Профиль оптимальной мембраны.

В процессе оптимизации был найден набор параметров z_i $(i = 1, ..., 6)$, составляющих профиль мембраны с максимальным линейным ходом. Гофрировка этой мембраны изображена на рис. 1, а ее диаграмма нагружения на рис. 2. Полученный результат иллюстрирует эффективность применения генетических алгоритмов и предложенной для симуляции модели из [1].

Строго говоря, данная мембрана мало отличается от круговой пластины — отношение высоты к диаметру составляет не более 2 %. При этом отличие диаграм нагружения гофрированной мембраны и пластины не только существенное,

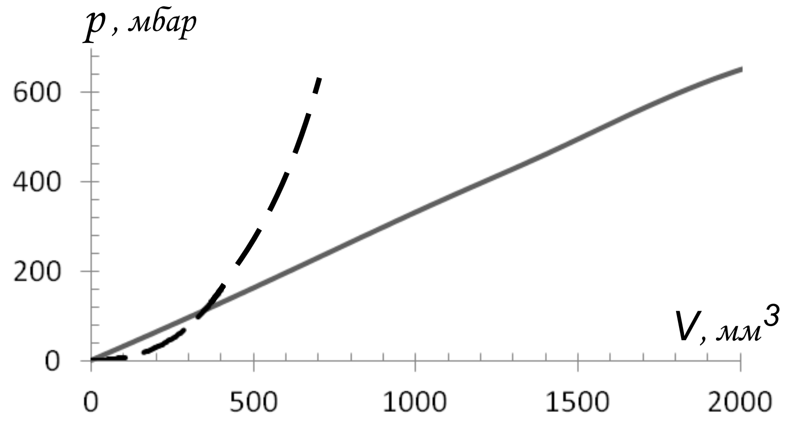


Рис. 2. Диаграммы нагружения круговой пластины (пунктирная линия) и оптимальной мембраны.

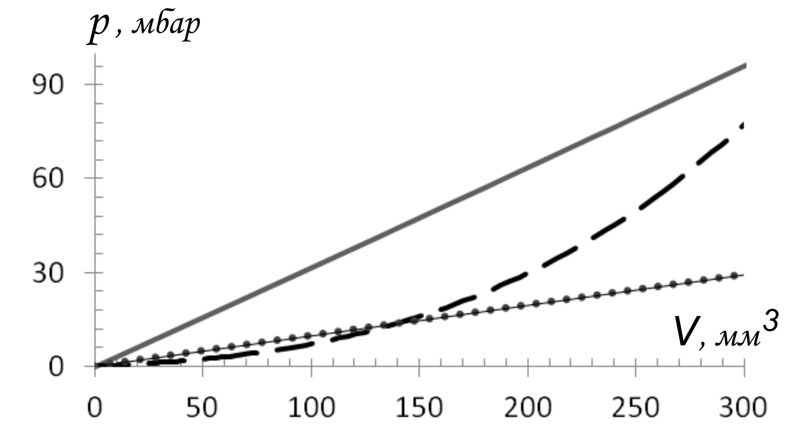


Рис. 3. Диаграммы нагружения круговой пластины (пунктирная линия), а также оптимальных мембран в смысле протяженности и пологости линейного участка (сплошная линия и линия с точками соответственно).

но и качественное — для сравнения на рис. 2 пунктиром изображена диаграма нагружения круговой пластинки с теми же характеристиками. Однако, несмотря на явные преимущества гофрировки на всем рассмотренном диапазоне изменения объема, поведение пластины в начале нагружения является более пологим. Именно поэтому была рассмотрена оптимизационная задача отыскания мембраны, у которой зависимость объема от приложенного давления имеет линейный характер на участке фиксированной длины, считая что оптимальной мембране соответствует линейный участок с минимальным углом наклона (линейное поведение при наименьшем давлении). Численный анализ (аналогичный предыдущей задаче) позволил найти такую мембрану, диаграмма нагружения которой показана на рис. 3.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 год (госконтракт П361).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гетман И. П., Карякин М. И., Устинов Ю. А.* Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.

[2] *Сигаева Т. В., Юдин А. С.* Анализ влияния геометрии на напряженное состояние оболочек вращения // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2011.

[3] *Karyakin M., Sigaeva T.* Application of Genetic Algorithms to the Shape Optimization of the Nonlinearly Elastic Corrugated Membranes // Adv. Srtuct. Materials. 2011. Vol. 15. Pp. 297–306.

Karyakin M. I., Sigaeva T. V. *About search of the round corrugated membrane profile*. Axisymmetric round membrane with rigidly fixed boundaries under hydrostatic pressure are considered in this paper. To model elastic behavior of the membrane the nonlinear equations based on the Kirchhov-Love hypothesis are used. The solving of profile search problem for such membranes is presented, where optimal criterion is the linear change in the scope during loading. As an optimization technique the genetic algorithm was used. Computation results are illustrated, found membrane profiles are given.

МЕТОД КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

Козин С. В., Сухов Д. Ю.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены задачи об идентификации параметров твердых тел на основе итеративного варианта метода квазилинеаризации. Для решения линейных краевых задач, возникающих на каждом шаге процесса, применен метод пристрелки. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению двух задач:

1. Определение начального приближения в задаче об идентификации свойств вязкоупругого стержня при анализе продольных колебаний;

2. Идентификация материальных параметров на примере задачи о сдвиговом кручении цилиндра из материала Блейтца и Ко.

1.1. Постановка задачи идентификации неоднородных характеристик. Уравнение установившихся продольных колебаний вязкоупругого стержня длины l переменной жесткости имеет вид

$$[G(\xi, i\varkappa)t'(\xi,\varkappa)]' + \varkappa^2 t(\xi,\varkappa) = 0,$$
$$\begin{cases} t(0,\varkappa) = 0, \\ [G(\xi, i\varkappa)t'(\xi,\varkappa)]_{x=1} = -1, \end{cases}$$

где $\xi(x) = \dfrac{x}{l}$ — безразмерная координата, $t(\xi)$ — безразмерное перемещение, $G(\xi, i\varkappa) = \dfrac{iM_0\varkappa f(\xi) + h(\xi)}{iM_0\varkappa + 1}$ — неизвестная функция, характеризующая изменение безразмерного комплексного модуля, $f(\xi) = \dfrac{E(\xi l)}{E_0}$ и $h(\xi) = \dfrac{H(\xi l)}{E_0}$ — безразмерные функции, отражающие законы изменения мгновенного $E(x)$ и длительного $H(x)$ модулей, $\varkappa^2 = \dfrac{\omega^2\rho l^2}{E_0}$ — безразмерная частота.

Произведя замену $s(\xi,\varkappa) = G(\xi, i\varkappa)t'(\xi,\varkappa)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} t\,(\xi,\varkappa) = \dfrac{1}{G\,(\xi, i\varkappa)} s\,(\xi,\varkappa)\,, \\ \dfrac{d}{d\xi} s\,(\xi,\varkappa) = -\varkappa^2 t\,(\xi,\varkappa) \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} t(0,\varkappa) = 0, \\ s(1,\varkappa) = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть имеется информация о смещении на конце стержня в двух частотах $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$:

$$\begin{cases} t(1,\varkappa_1) = \nu_1, \\ t(1,\varkappa_2) = \nu_2. \end{cases} \tag{3}$$

Будем искать начальное приближение комплексного модуля $G(\xi, i\varkappa)$ в виде

$$G(\xi, i\varkappa) = \frac{iM_0\varkappa e + h}{iM_0\varkappa + 1}, \quad e \text{ и } h - const.$$

1.2. Формулировка итерационного процесса. Для поиска начального приближения воспользуемся методом квазилинеаризации [1]. Произведем линеаризацию системы (1)–(2), предположив $t = t_0 + \varepsilon t_1$, $s = s_0 + \varepsilon s_1$, $e = e_0 + \varepsilon e_1$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$ и выписав операторные слагаемые при нулевой и первой степенях ε. Получим две системы, при ε^0

$$\begin{cases} (iM_0\varkappa e_0 + h_0)t_0' = (iM_0\varkappa + 1)\, s_0, \\ s_0' = -\varkappa^2 t_0, \\ e_0' = 0, \\ h_0' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0(0, \varkappa) = 0, \\ s_0(1, \varkappa) = -1, \end{cases} \tag{4}$$

и при ε^1

$$\begin{cases} (iM_0\varkappa e_0 + h_0)t_1' = (iM_0\varkappa + 1)s_1 - (iM_0\varkappa e_1 + h_1)t_0', \\ s_1' = -\varkappa^2 t_0, \\ e_1' = 0, \\ h_1' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1(0, \varkappa) = 0, \\ s_1(1, \varkappa) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть известны некоторые начальные значения e_0 и h_0, задающие нулевое приближение комплексного модуля. Опишем i-й шаг итерационного процесса.

Из системы (4) определяются функции $t_0^k = t_0(\xi, \varkappa_k)$ и $s_0^k = s_0(\xi, \varkappa_k)$, $k = 1..2$.

Вычисляется норма невязки $\delta^i = \max\{|\nu_1 - t_0^1(1)|, |\nu_2 - t_0^2(1)|\}$. Если $\delta^i < \delta$, где δ — требуемая точность, то начальное приближение найдено и итерационный процесс завершается.

Далее из системы (5) определяются поправки e_1 и h_1. Для этого линеаризованная система решается с краевыми условиями, в которых искомые функции поочередно получают единичные значения; таким образом в силу линейности решение отыскивается в виде линейной комбинации решений трех задач Коши, причем коэффициенты линейной комбинации определяются при удовлетворении дополнительных граничных условий из линейной алгебраической системы. Далее производится коррекция i-го приближения $e_0 = e_0 + e_1$, $h_0 = h_0 + h_1$.

Итерации осуществляются до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, либо достигнуто максимальное число итераций.

1.3. Численные результаты. Ниже приведен пример нахождения начальных приближений немонотонных функций, характеризующий изменение мгновенного и длительного модулей. Для функций вида

$$e(x) = 2 + x^2/4 + x^3/5 + \cos(\sin(\pi x)),$$
$$h(x) = 2 - \log(x + 0.5) + x^2/2$$

были выбраны начальные приближения $e_0 = 2.1$, $h_0 = 3.5$. Поиск приближения производился по информации о смещении и фазе на правом конце стержня в частотах $\varkappa_1 = 0.5$ и $\varkappa_2 = 4.1$.

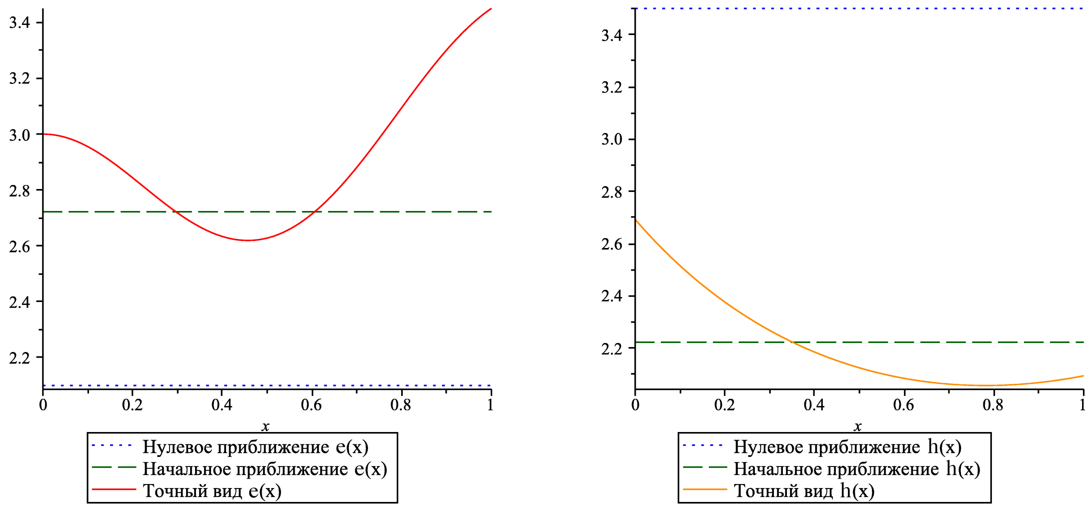


Рис. 1. Найденное начальное приближение $e_i = 2.72$, $h_i = 2.22$

Для достижения точности 10^{-3} потребовалось 11 итераций.

2.1. Идентификация материальных параметров нелинейно упругого тела. Опишем схему идентификации материальных параметров с помощью метода квазилинеаризации на примере задачи о кручения полого нелинейно упругого цилиндра. На рис. 2, иллюстрирующем ее постановку, точка A в результате деформации переходит в точку B.

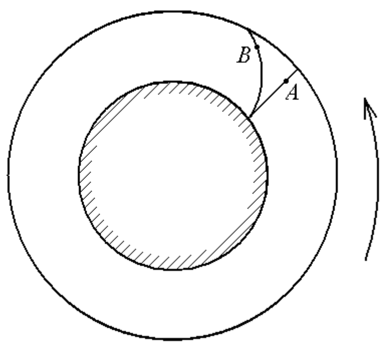


Рис. 2. К постановке задачи.

Для вывода уравнений равновесия использовался полуобратный метод Сен-Венана [4], в котором реализовано представление деформации вида $\{R = R(r),\ \Phi = P(r) + \varphi,\ Z = z\}$. Здесь функция $R(r)$ описывает новое положение точки по радиусу цилиндра, а $P(r)$ — приращение координаты φ.

Поведение материала цилиндра определялось двухпараметрическим потенциалом Блейтца и Ко

$$W = \mu\left(\frac{\beta\left(I_1 + \dfrac{I_3^{-\alpha} - 1}{\alpha} - 3\right)}{2} + \frac{(1-\beta)\left(\dfrac{I_2}{I_3} + \dfrac{I_3^{\alpha} - 1}{\alpha} - 3\right)}{2}\right).$$

В среде Maple были получены уравнения равновесия, которые представляют собой систему двух ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} R''(r) = F(R'(r), P'(r), R(r), P(r), r), \\ P''(r) = G(R'(r), P'(r), R(r), P(r), r), \end{cases} \qquad \begin{cases} R(r_0) = r_0, \quad R(r_1) = r_1, \\ P(r_0) = p_0, \quad P(r_1) = p_1. \end{cases}$$

В рассматриваемом примере идентифицировались значение постоянного параметра β и значение функции $u(r) = R'(r)$ в точке r_0.

Подготовка к проведению вычислительного эксперимента заключалась в том, что для фиксированных значений параметров

$$\mu = 1, \quad \alpha = 1/2, \quad \beta = 0, \quad r_0 = 0.85, \quad r_1 = 1, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 0.1 \tag{6}$$

решалась прямая задача и снималась информация о значении функции $R(r)$ в трех точках $R(r_0') = f_0$, $R(r_1') = f_1$, $R(r_2') = f_2$, где $r_0' = 0.88$, $r_1' = 0.9$, $r_2' = 0.92$. Далее на основе исходной задачи строилась каноническая система, в которой искомый параметр β считался неизвестной функцией, и условие его постоянности составило дополнительное уравнение. В результате была получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} R'(r) = u(r), \\ P'(r) = v(r), \\ u'(r) = F(u(r), v(r), R(r), P(r), \beta(r), r), \\ v'(r) = G(u(r), v(r), R(r), P(r), \beta(r), r), \\ \beta'(r) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u(r_0') = u_0, \\ v(r_0') = v_0, \\ R(r_0') = f_0, \\ P(r_0') = p_0, \\ \beta(r_0') = \beta_0. \end{cases} \tag{7}$$

При увеличении количества идентифицируемых материальных параметров в систему очевидным образом добавляются условия их постоянности.

В краевой задаче (7) f_0, p_0 и v_0 предполагаются известными из решения прямой задачи, а $u(r)$ и $\beta(r)$ являются искомыми параметрами и их начальное приближение может быть определено, например, с помощью грубого приближения производных на основе разностных аппроксимаций.

На основе системы (7) с помощью подхода, описанного в п. 1.2, составляется линеаризованная система. На каждом шаге алгоритма нелинейная система (7) решается приближенно и далее корректируется решением линеаризованной задачи, которое отыскивается в виде линейной комбинации решений линеаризованных уравнений с краевыми условиями вида

$$\begin{array}{ll} 1) & u_1(r_0') = 1, \quad v_1(r_0') = 0, \quad R_1(r_0') = 0, \quad P_1(r_0') = 0, \quad \beta_1(r_0') = 0; \\ 2) & u_2(r_0') = 0, \quad v_2(r_0') = 0, \quad R_2(r_0') = 0, \quad P_2(r_0') = 0, \quad \beta_2(r_0') = 1. \end{array}$$

Линейная комбинация решений этих задач имеет вид $R_l(r) = aR_1(r) + bR_2(r)$. Далее, используя информацию о решении $R(r)$, для определения неизвестных коэффициентов a, b составляется СЛАУ

$$\begin{cases} aR_1(r_1') + bR_2(r_1') = f_1 - R(r_1'), \\ aR_1(r_2') + bR_2(r_2') = f_2 - R(r_2'), \end{cases}$$

где $R(r)$ — приближенное решение нелинейной системы (7) на текущем шаге. Наконец, находится поправка краевых условий нелинейной системы (7)

$$u_1 = u_0 + a, \quad \beta_1 = \beta_0 + b.$$

Критерием выхода из итерационного процесса является малость суммы абсолютных величин поправок.

2.2. Численные результаты. Для решения прямой задачи использовались краевые условия (6). Извлеченная из прямой задачи информация о решении имеет вид

$$R(r'_0) = 0.88097290, \quad R(r'_1) = 0.90125470, \quad R(r'_2) = 0.92131206.$$

Точное решение $R'_{\text{точ}}(r_0) = 1.02056231$, $\beta_{\text{точ}} = 0$. Было выбрано начальное приближение $u_0 = R'_{\text{точ}}(r_0) - 0.3$, $\beta_0 = 0.3$.

Схема показала свою устойчивость при средней величине отклонений от точных значений параметров. Для идентификации двух параметров с погрешностью 10^{-3} понадобилось 15 итераций.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

Авторы выражают благодарность А. О. Ватульяну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.

[2] *Бахвалов Н. С.* Численные методы. 2-е изд. М.: Наука, 1975. 449 с.

[3] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

[4] *Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.* Методы компьютерной алгебры в задачах нелинейной теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 2-й Международной конференции. Т. 1. Ростов н/Д.: МП Книга, 1996. С. 30–34.

Kozin S. V., Sukhov D. Yu. *Quasilinearisation method for inverse problems.* Solid body parameters' identification problems based on iterative quasilinearization method are considered. Shooting method was applied to linear boundary value problems' solution at each iteration of the method. Results of numerical experiments are presented showing solution of two problems:

1. Initial approximation determination in the problem of properties identification of viscoelastic rod subjected to longitudinal oscillations;

2. Blatz and Co material parameters' identification for shear torsion problem of cylinder.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ХАОС В ДВУМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ СТОКСА

Курилко А. Б., $\boxed{\textbf{Мелешко В. В.}}$
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Исследовано двумерное течение Стокса в прямоугольной полости, которое приводится в движение одной из стенок, которая движется по заданному закону. Метод суперпозиции оказывается эффективным для решения задач механики, касающихся медленного течения вязкой жидкости под действием касательных скоростей. Указаны условия возникновения топологического хаоса в течении Стокса в прямоугольной полости без участия физических смесителей. Для заданной на границе скорости обнаружено существование трех периодических точек жидкости, которые порождают хаотическое движение.

1. Введение. В последние годы, начиная с работ [3, 4], методы топологии и теории пучков нашли широкое применение к анализу перемешивания в течениях. В работе [3] теоретически и экспериментально исследовались топологические схемы смешивания с участием физических стержней-смесителей. Доказано, что при использовании трех стержней-смесителей существует два различных периодических движения: первый сопровождается экспоненциальным растяжением и деформацией выделенного объема жидкости, известный как топологический хаос, в то время как второй не имеет вышеупомянутых характеристик. Анализ топологического хаоса базируется на теории Торстена–Нильсена, в основе которой лежит набор математических инструментов для анализа двумерных динамических систем.

Но наличие физических стержней не является обязательным для порождения топологического хаоса. Было показано, что пассивные частицы жидкости, которые движутся по периодическим орбитам, могут быть использованы в качестве смешивателей при смешивании вязкой жидкости в прямоугольной ячейке [8]. В этой работе показана возможность применения результатов, полученных в работе [3] к случаям, когда движение стержней-смесителей является топологически тривиальным, рассматривая при этом динамику движения специальных периодических точек, которые получили название «мнимых стержней» («ghost rods»).

В данной работе рассматривается двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости под действием касательных скоростей, приложенных на ее стенках. Целью работы является обобщение методики, которая предложена в работе [8], для нахождения специальных периодических точек, которые выполняют роль «мнимых стержней» в процессе смешивания, установления их типа, порядка и положения. Также с помощью методики анализа структуры отображения Пуанкаре необходимо провести исследования регулярных и хаотических регионов, возникающих в процессе адвекции пассивной жидкой частицы.

2. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости с движущейся верхней границей. В приближении Стокса влиянием инерционных сил на течение можно пренебречь в сравнении с влиянием сил вязкости. Тогда для функции тока

$\psi(x, y)$, с помощью которой компоненты вектора скорости определяются следующими формулами
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$
решение стационарной задачи сводится к решению бигармонического уравнения
$$\Delta\Delta\psi = 0. \tag{2}$$
с соответствующими граничными условиями на твердых стенках.

Пусть течение в прямоугольной полости $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ вызывается заданной касательной скоростью $U_{top}(x)$ на верхней стенке ($y = b$), а нижняя ($y = -b$) и боковые стенки $x = \pm a$ - неподвижны (рис. 1).

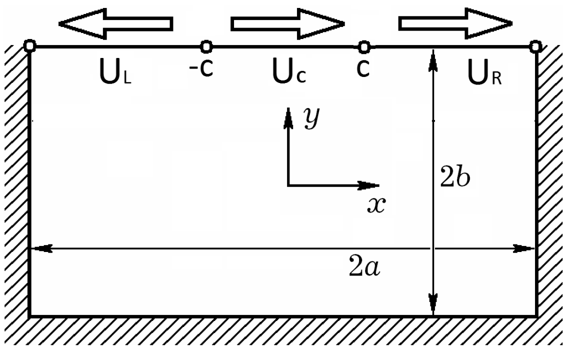


Рис. 1. Геометрия задачи.

В этом случае граничные условия для уравнения (2) имеют вид
$$\psi(\pm a, y) = 0, \; \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=\pm a} = 0, \; |y| \leqslant b, \tag{3}$$
$$\psi(x, \pm b) = 0, \; \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=-b} = 0, \; \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=b} = \begin{cases} -U_L, & \text{при } -a \leqslant x < -c; \\ U_C, & \text{при } |x| \leqslant c; \\ U_R, & \text{при } c < x \leqslant a. \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая линейность задачи (2)–(4), ее решение можно представить в следующем виде
$$\psi(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \psi_4(x, y), \tag{5}$$
где бигармонические функции $\psi_k(x, y)$ (k=1,4) есть решения задач, подробно изученных в работе [1]. При этом использовался аналитический метод суперпозиции, который есть эффективным для многих двумерных бигармонических задач для течения Стокса [5].

3. Численные результаты. В качестве примера рассмотрен случай движения жидкости в прямоугольной полости с размерами $a = 3.0$, $b = 1.0$, $c = 1.0$ при периодическом движении верхней границы с периодом $T = 2$.

На рис. 2 показано распределение функции течения в полости при $-U_L = U_R = U > 0$ и $U_C = 2.53U$, на котором нанесены линии одного уровня с эквидистантным шагом $\delta\psi = 0.4$. Видно, что в полости формируются две конвективные зоны течения, в которых жидкость движется по замкнутым траекториям с приблизительно равными скоростями. В нижней части полости скорость движения существенно уменьшается. Линия $\psi(x, y) = 0$ — сепаратриса, которая делит полость на конвективные зоны. Интересно отметить, что в левом и правом нижних углах течения есть две замкнутые области, в которых формируются вихри Моффата [6]. Определение точек H_L, H_C, H_R, а также их роль в процессах движения жидкости будет рассмотрено ниже.

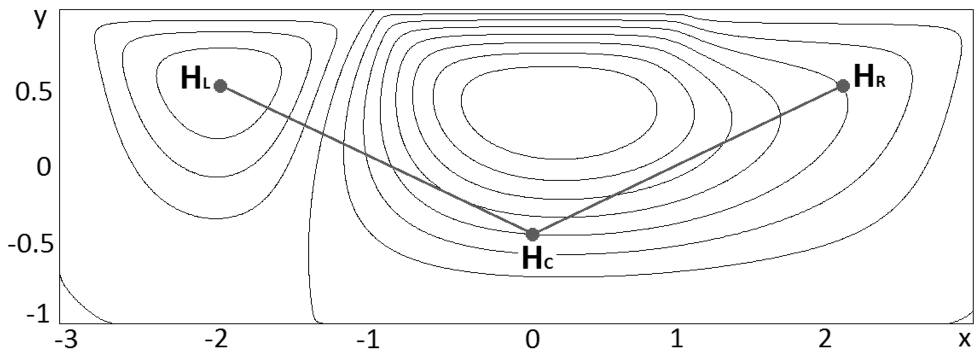


Рис. 2. Картина линий течения в прямоугольной полости под действием касательной скорости на верхней границе.

Значения параметров U_R и U_C определелялись таким образом, чтобы отношение U_C/U_R удовлетворяло следующим условиям: 1) существуют три периодические точки в жидкости $H_L = (-x_1, y_1)$, $H_C = (0, y_0)$, $H_R = (x_1, y_1)$, из которых H_L есть неподвижная точка стагнации, а H_C и H_R принадлежат одной линии течения; и 2) точки H_C и H_R точно обмениваются позициями за полупериод движения жидкости. Выполнение этих двух условий дает значения неизвестных U_R и U_C, а также координаты точек H_L, H_C и H_R: $-U_L = U_R = U = 5.84$, $U_C = 14.78$, $H_L = (-1.98, 0.51)$, $H_C = (0, -0.44)$ и $H_R = (1.98, 0.51)$.

Численный анализ траекторий отдельных жидких частиц показывает, что в рассматриваемом периодическом течении имеет место система периодических точек различного типа и порядка. На рис. 2 показаны периодические точки третьего порядка, которые через полных три периода T возвращаются в свои начальные положения, которые и есть специальные периодические точки и исполняют роль «мнимых стержней». Это гиперболические точки третьего порядка, тип которых определялся аналитически согласно методике, разработанной в работе [2].

На протяжении полупериода движения жидкости центральная H_C и правая H_R периодические точки обмениваются позициями, двигаясь по одной линии течения по ходу часовой стрелки, в то время как левая точка H_L остается неподвижной. Это движение аналогично топологии движения $R+$ физических стержней, рассмотренных в работе [3]. В последующем полупериоде движения, когда $-U_L = U_R = U > 0$ и $U_C = -2.53U$, правая точка остается неподвижной, а левая и центральная периодические точки обмениваются положениями, двигаясь по одной линии течения против хода часовой стрелки. Это движение аналогично движению $L\_$ физических стержней [3]. По этому, движение жидкости на протяжении полного периода T есть комбинация движений $R+$ и $L\_$ «мнимых стержней» течения и носит название псевдо-Аносового движения, а периодические точки образовывают псевдо-Аносовый пучок в трехмерном пространственно-временном масштабе, как показано на рис. 3. Этот режим движения порождает топологический хаос в рассматриваемом двумерном Стоксовом течении.

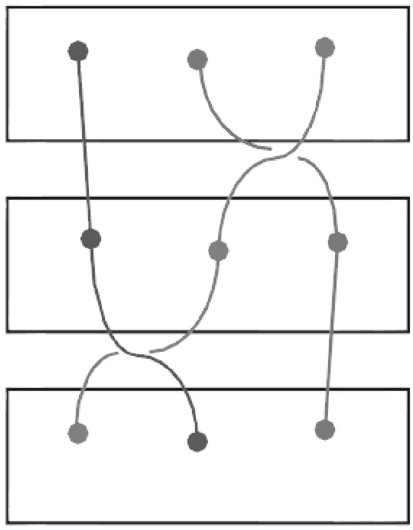


Рис. 3. Псевдо-Аносовый пучок, образованный траекториями периодических точек.

Согласно теоремы Торстена–Нильсена, топологическая энтропия h_{TN} течения псевдо-Аносового типа положительна и, как показано в работе [3],

$$h_{TN} = \ln\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right) = 0.96\ ,$$

поэтому число периодических точек и длины выделенных материальных линий течения возростают експоненциально $\exp(nh_{TN})$, где n — количество периодов движения жидкости.

Рис. 4 демонстрирует сечение Пуанкаре периодического течения вязкой жидкости в прямоугольной полости, которое получено следующим путем. Случайным образом выбираем пассивную жидкую частицу в полости и рассматриваем эволюцию ее движения на протяжении 30000 периодов движения жидкости, определяя новые координаты после каждого пеорида движения $R+$ и $L\_$. Следует отметить, что в углах возле нижней границы прямоугольной полости существуют области, где могут находиться жидкие частицы, но никогда не смогут их покинуть. Так же следует отметить существующий регулярный остров в хаотическом море. Если поместить подкрашенную жидкость в средине этого острова, то она никогда не сможет смешаться с окружающей жидкостью. В работе [7] приведены яркие экспериментальные демонстрации этого явления.

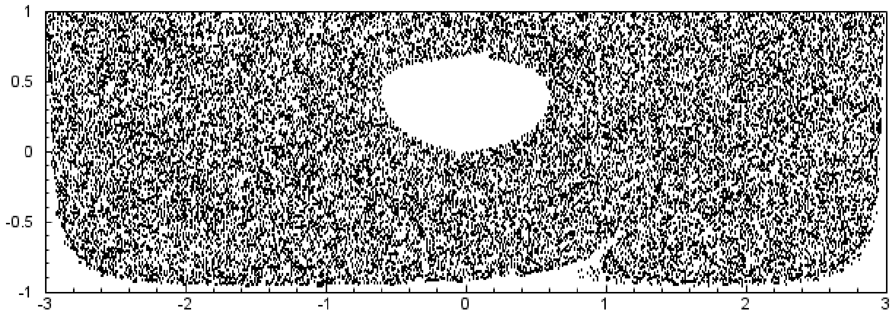


Рис. 4. Сечение Пуанкаре в двумерном течении вязкой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мелешко В. В., Гуржий А. А., Безымянная Е. Н.* Электро-осмотические течения вязкой жидкости в прямоугольной полости // Мат.методы и физ.-мех.поля. 2006. 50, № 1. С. 107–116.

[2] *Мелешко В. В., Краснопольская Т. С.* Смешивание вязких жидкостей // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1, № 3. С. 69–109.

[3] *Boyland P. L., Aref H., Stremler M. A.* Topological fluid mechanics of stirring // J. Fluid Mech. 2000. 403. Pp. 277–304.

[4] *Boyland P. L., Stremler M. A., Aref H.* Topological fluid mechanics of point vortex motions // Physica D. 2003. 175. Pp. 65–95.

[5] *Meleshko V. V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. R. Soc. London. 1996. A452. Pp. 1999–2022.

[6] *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. 18. Pp. 1–18.

[7] *Ottino J. M.* The mixing of fluids // Scient. Amer. 1989. 260. Pp. 56–67.

[8] *Stremler M. A., Chen J.* Generating topological chaos in lid-driven cavity flow // Physics of fluids. 2007. 19, 103602.

Kurylko A. B., Meleshko V. V. *Topological chaos in two-dimensional Stokes flow.* Stokes flow in a rectangular two-dimensional cavity in which the flow is driven by the steady motion of one of the walls is studied. The method of superposition is effective for solving mechanical problems concerning creeping flow of viscous fluid set up in a rectangular cavity by tangential velocities applied along its walls. The occurrence of topological chaos for Stokes flow in a two-dimensional rectangular cavity without internal rods is demonstrated. For appropriate choice of boundary velocity on the top and bottom walls, there exist three periodic points in the flow that produce a chaos-generating motion.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИИ ПАТОЛОГИЧЕСКОЙ И НОРМАЛЬНОЙ ЖЕЛЧИ

Кучумов А. Г.*, Гилёв В. Г., Попов В. А.**, Самарцев В. А.*****

**Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

***Пермский государственный национальный исследовательский университет*

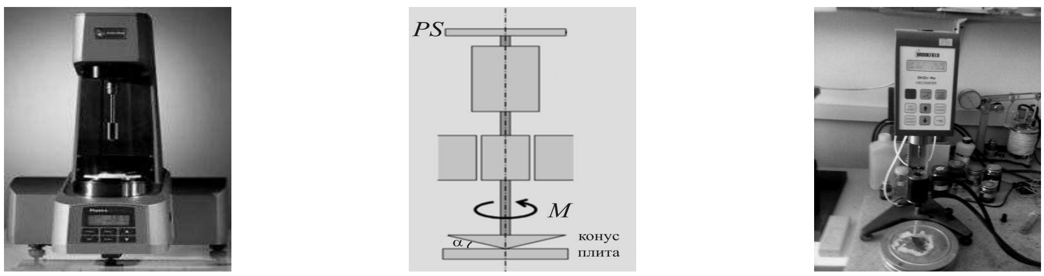
****Пермская государственная медицинская академия им. академика Е. А. Вагнера*

Представлены результаты экспериментального изучения патологической и нормальной желчи человека. Приведены зависимости вязкости от скорости сдвига, вязкости от времени, а также кривых течения, полученных для различных видов желчи. Получены параметры уравнения Кассона (*Casson*) в результате аппроксимации кривых. Показано, что патологическая желчь — неньютоновская тиксотропная жидкость, т. е. жидкость, способная уменьшать вязкость от механического воздействия и в дальнейшем при отсутствии механического воздействия увеличивать свою вязкость. Так же выявлено, что желчь в норме обладает свойствами ньютоновской жидкости. Выявлено различие между поведением пузырной и холедохиальной видов желчи, а также различие между поведением холедохиальной желчи, взятой у пациентов разного возраста и пола. Отмечено, что вязкость пузырной желчи выше, чем у холедохиальной, а также что при патологическом состоянии вязкость повышается. Максимальное значение вязкости достигается при начальных сдвиговых напряжениях, а затем кривые выходят на насыщение.

1. Введение. Для того чтобы понять причины заболеваний, важно осуществить физиологическое и механическое описание поведения билиарной системы человека в целом и её отдельных составляющих, в частности на макро-, мезо-, микро- и наноуровнях. Моделирование течения желчи в протоках требует знание реологических свойств желчи как в норме, так и при патологии. Экспериментальному изучению этих свойств желчи посвящена данная работа.

Работ по определению реологических свойств желчи не так много. Буше (*Bouchier*) [1] отметил, что динамическая вязкость пузырной желчи выше, чем у холедохиальной, а также что при патологическом состоянии вязкость повышается. Готшальк (*Gottschalk*) и Лохнер (*Lochner*) [2] исследовали вязкость холедохиальной желчи, взятой у 29 пациентов, с помощью дренажа T-образной трубкой с помощью вискозиметра *Contraves*, предназначенного для изучения жидкостей с маленькой вязкостью. Динамическая вязкость желчи снизилась с 5 мПа·с при скорости сдвига $0.1\,\text{с}^{-1}$ до 1.5 мПа·с при скорости сдвига $2\,\text{с}^{-1}$. Было показано, что в норме желчь можно считать ньютоновской жидкостью; повышение вязкости желчи можно считать важным фактором в развитии патологии камней. Также было выявлено, что реологические свойства желчи зависят от возраста, региона проживания и типа питания пациента, поскольку желчь является секретом печени. К недостаткам работ можно отнести ограниченное число экспериментов, устаревшее оборудование и отсутствие механического анализа кривых.

2. Материалы и методы. Для определения реологических характеристик патологической желчи применяется реометр *Physica MCR 501* (рис. 1, а). Реологические испытания проводились при температуре +37°С. В эксперименте использовалась геометрия «конус–плита». Диаметр конуса $d = 49,976$ мм, угол $\alpha = 1{,}001°$. При помещении образца на плиту и задании начальных условий (время эксперимента, начальное и конечное значение касательных напряжений) начинается эксперимент. Вращающий момент, который прикладывается к жидкости, пересчитывается в касательные напряжения. Вязкость находится из отношения касательных напряжений к скорости сдвига. Зная угол отклонения конуса и число оборотов конуса, которые измеряются с помощью датчика PS (рис. 1, б), прибор пересчитывает полученные данные в диаграммы типа «касательные напряжения — скорость сдвига». Целью эксперимента являлось выяснение типа жидкости, к которому от-



а б в

Рис. 1. а — ротационный реометр *Physica MCR 501*, б — устройство ротационного реометра, в — вискозиметр *DV–II+Pro*.

носится патологическая желчь, рассмотрение различий в реологии пузырной и холедохиальной видов желчи, а также выбор адекватного определяющего соотношения и нахождение его параметров для последующего компьютерного моделирования течения желчи в билиарной системе.

Для определения реологических характеристик желчи в норме использовался вискозиметр *DV–II+Pro* (рис. 1, в).

3. Результаты и обсуждение.

3.1. Желчь в норме.

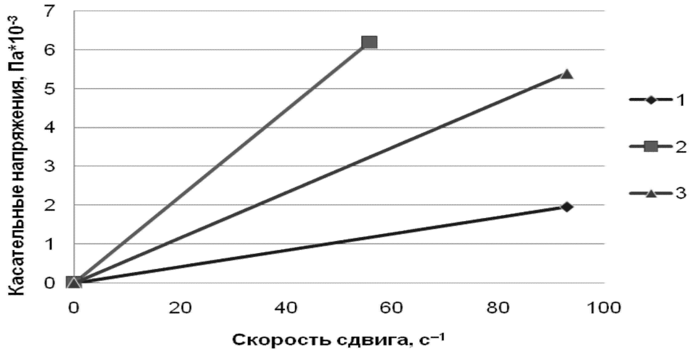
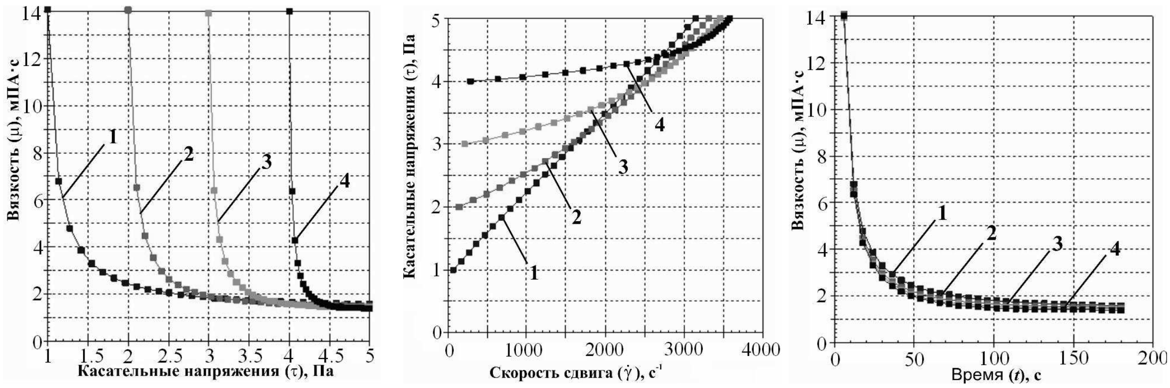


Рис. 2. Кривые течения, полученные для нормальной желчи.

Эксперимент проводился на базе лаборатории магнитных жидкостей ИМСС УрО РАН. В ходе эксперимента было выявлено, что желчь в норме является ньютоновской жидкостью, т. е. ее вязкость остается постоянной (рис. 2).

3.2. Холедохиальная патологическая желчь. На рис. 3 представлены зависимости, полученные для холедохиальной желчи. Из полученных зависимостей видно, что желчь обладает свойствами неньютоновской тиксотропной жидкости. Максимум вязкости достигается при начальных сдвиговых напряжениях, а затем кривые выходят на насыщение. Из рис 3, б видна нелинейная зависимость касательных напряжений от скорости сдвига, однако видно, что при увеличении начального касательного напряжения и увеличении скорости сдвига характер кривых приближается к ньютоновскому поведению. Из зависимости вязкости от времени (рис. 3, в) видно, что при увеличении начальных напряжений сдвига время разрушения доменов уменьшается. Динамическая вязкость холедохиальной желчи меняется в переделе от 0,3 до 16 мПа·с.



а б в

Рис. 3. Реологические кривые, полученные для холедохиальной желчи в диапазоне касательных напряжений: 1 — 1–5 Па; 2 — 2–5 Па; 3 — 3–5 Па; 4 — 4–5 Па: а — зависимость вязкости (η) от касательных напряжений (τ), б — зависимость касательных напряжений (τ) от скорости сдвига ($\dot{\gamma}$), в — зависимость вязкости (η) от времени (t).

Для экстраполяции полученных зависимостей использовалось уравнение Кассона, описывающее кривую течения материала

$$\sqrt[p]{\tau} = \tau_0 + \eta \sqrt[p]{\dot{\gamma}}. \tag{1}$$

где τ — напряжение сдвига, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, τ_0 — предельное сдвиговое напряжение, η — вязкость Кассона, p — показатель Кассона. В таблице 1 приведены параметры, полученные при экстраполяции кривой 1 уравнением Кассона.

τ, Па	τ_0, Па	η, мПа·с	p	Погрешность, %
1–5	0.49	0.77	3.17	1.7

Таблица 1. Параметры экстраполяции Кассона.

3.3. Пузырная патологическая желчь. Из полученных данных можно сделать вывод, что пузырная желчь, так же как и холедохиальная, является неньютоновской жидкостью. Время выхода вязкости на насыщение уменьшается с увеличением начального напряжения сдвига. По кривым течения (рис. 4, б) видно, что есть выделенная кривая, доходя до которой желчь начинает вести себя как ньютоновская жидкость, т. е. вязкость выходит на насыщение.

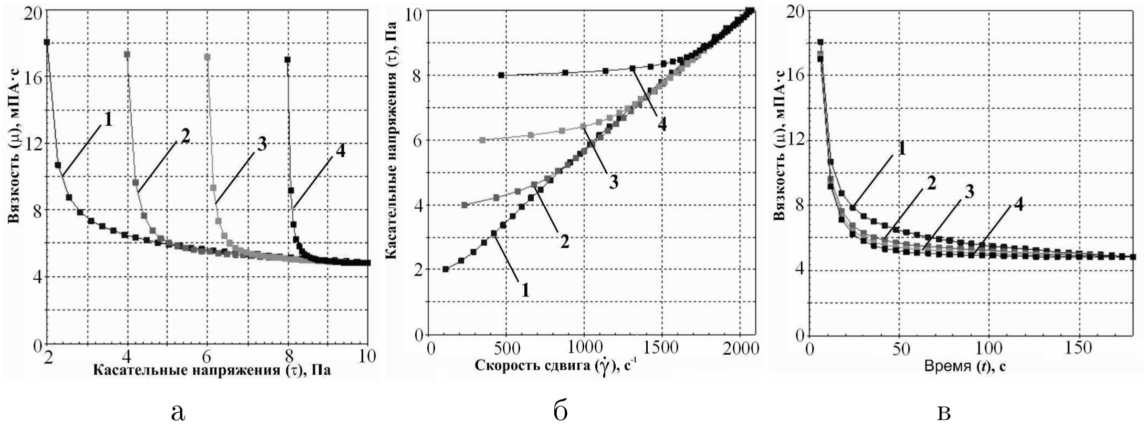


Рис. 4. Реологические кривые, полученные для пузырной желчи в диапазоне касательных напряжений: 1 — 2–10 Па; 2 — 4–10 Па; 3 — 6–10 Па; 4 — 8–10 Па: а — зависимость вязкости (η) от касательных напряжений (τ), б — зависимость касательных напряжений (τ) от скорости сдвига ($\dot{\gamma}$), в — зависимость вязкости (η) от времени (t).

Динамическая вязкость пузырной желчи меняется в пределе от 17 до 5 мПа·с.

По полученным данным можно судить, что пузырная желчь более вязкая по сравнению с холедохиальной. Оба вида желчи являются тиксотропными жидкостями. В таблице 2 приведены параметры, полученные при экстраполяции кривой 1 уравнением Кассона.

τ, Па	τ_0, Па	η, мПа·с	p	Погрешность, %
2–10	1.68	4.5	0.87	2.3

Таблица 2. Параметры экстраполяции Кассона.

4. Гипотезы. На данный момент существует две гипотезы неньютоновского поведения патологической желчи.

Первая гипотеза: неньютоновское поведение желчи вызвано тем, что изначально желчь состоит из большого количества доменов. При механическом воздействии домены начинают разрушаться, что приводит к уменьшению вязкости. Разрушение доменов происходит до тех пор, пока они не превратятся в один «большой домен», в этот момент вязкость выходит на насыщение, а желчь приобретает свойства ньютоновской жидкостью.

Вторая гипотеза: везикулы, входящие в состав желчи, имеют продолговатую форму. Изначально они ориентированны случайным образом в пространстве. Под механическим воздействием они начинают поворачиваться по полю, тем самым уменьшая вязкость желчи. Когда происходит полный разворот молекул по полю, вязкость выходит на насыщение.

5. Выводы. Показано, что желчь в норме — ньютоновская жидкость, а патологическая — неньютоновская тиксотропная жидкость. Отмечено, что вязкость пузырной желчи выше, чем у холедохиальной, а также что при патологическом состоянии вязкость повышается. Максимальное значение вязкости достигается при начальных сдвиговых напряжениях, а затем кривые выходят на насыщение. Увеличение начальных сдвиговых напряжений незначительно уменьшает время выхода вязкости на насыщение. Параметры, полученные при аппроксимации кривых, в дальнейшем будут применяться при моделировании течения желчи в билиарной системе в норме и при патологии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Bouchier I. A. D., Cooperband S. R., El Kodsi B. M.* Mucous substances and viscosity of normal and pathological human bile // Gastroenterology. 1965. Vol. 49. Pp. 343–353.

[2] *Gottschalk M., Lochner A.* Behaviour of postoperative viscosity of bile fluid from T-drainage // Gastroenterol. J. 1990. Vol. 50. Pp. 65–67.

Kuchumov A. G., Gilev V. G., Popov V. A., Samartsev V. A. *Experimental investigation of the pathologic and the normal bile rheology*. Annotation. The paper presents experimental study of pathological and normal human bile taken from the gallbladder and bile ducts. The article contains the dependence of viscosity on shear rate, the viscosity changes on time, as well as shear stress versus shear rate obtained for different types of bile. The parameters of the Casson's equation are presented as a result of curve approximation. It is shown that normal bile is Newtonian liquid. Also shown that the pathologic bile is non-Newtonian thixotropic liquid, i.e. liquid, which is able to decrease viscosity, when it is loaded and after that to increase its viscosity when loading vanishes. There is shown the difference between the behavior of the gallbladder bile and duct bile species. It is noted that the viscosity of gallbladder bile is higher than that of the duct bile, and that the bile viscosity tends to increase at the pathological state. The maximum viscosity value is achieved at initial shear stresses, and then curves reach the saturation.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ SH-ВОЛН В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОМ СЛОЕ

Леви М. О., Михайлова И. Б.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассматривается динамическая связанная задача о сдвиговых гармонических колебаниях электромагнитоупругого слоя при различных электрических и магнитных условиях на его гранях. Слой изготовлен из материала класса 2mm. Поверхность слоя предполагается свободной от механических напряжений, нижняя грань слоя жестко защемлена. Построено поле перемещений в слое. Исследовано влияние различных магнитных и электрических граничных условий на дисперсионные свойства среды.

1. Постановка задачи и граничные условия. Рассмотрим колебания слоя $|\,x_1|,\ |\,x_3\,| \leqslant \infty;\ \ 0 \leqslant x_2 \leqslant h,\ u_1 = u_2 = 0;\ u_3 = u_3(x_1, x_2)$, нижняя грань которого жестко защемлена, верхняя грань свободна от механических напряжений. Колебания в слое инициируются осциллирующей нагрузкой $\mathbf{q}(x_1, t) = \mathbf{q_0}(x_1)e^{-i\omega t}$ распределенной в области $|x_1| \leqslant a$. ($\mathbf{q} = \{q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_3 — компонента вектора механической нагрузки, q_4 — электрическая нагрузка, q_5 — магнитная нагрузка). Вне области $|x_1| \leqslant a$ поверхность свободна от механических напряжений. Колебания электромагнитоупругой среды описываются уравнениями движения и уравнениями Максвелла [1]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\ .$$

Компоненты уравнений в матричном представлении имеют вид [2, 3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \textbf{-e} & \textbf{-f} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}} & \epsilon & \mathbf{g} \\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}} & \mathbf{g} & \mu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}\ .$$

Здесь $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$ — тензоры напряжений и деформаций второго порядка, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{E} = -grad(\phi)$ и $\mathbf{H} = -grad(\psi)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, ϵ, μ, $\mathbf{g}$ – упругие, пьезоэлектрические, пьезомагнитные, диэлектрические, магнитной проницаемости и магнитоэлектрические коэффициенты соответственно.

Далее перейдем к безразмерным параметрам [4]: $e^{'}_{ij} = e_{ij}k_e/c_{44}$, $\varepsilon^{'}_{ij} = \varepsilon_{ij}k_e^2/c_{44}$, $f^{'}_{i,j} = f_{i,j}k_f/c_{44}$, $\mu^{'}_{ij} = \mu_{ij}k_f^2/c_{44}$, $g^{'}_{ij} = g_{ij}k_g^2/c_{44}$, $\omega^{'} = \omega h/V_{sef}$, $k_e = 10^{10}$ Н/Кл, $k_f = 10^7$ м/А, $k_g = 10^9$ В·Кл/м^2·с.

Здесь V_{sef} — скорость сдвиговой волны в электромагнитоупругой среде, k_e, k_f, k_g — специальные константы. Линейные параметры отнесены к характерному размеру задачи — толщине слоя.

Граничные условия для разных задач примут вид:

Задача 1:

$$x_2 = 1 : \begin{cases} T_{23} = 0; \\ D_2 = F(x_1); \\ \psi_2 = 0; \end{cases} \qquad x_2 = 0 : \begin{cases} u_3 = 0; \\ D_2 = 0; \\ B_2 = 0; \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2:

$$x_2 = 1 : \begin{cases} T_{23} = 0; \\ D_2 = F(x_1); \\ B_2 = 0; \end{cases} \qquad x_2 = 0 : \begin{cases} u_3 = 0; \\ D_2 = 0; \\ \psi_2 = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Задача 3:

$$x_2 = 1 : \begin{cases} T_{23} = 0; \\ D_2 = F(x_1); \\ B_2 = 0; \end{cases} \qquad x_2 = 0 : \begin{cases} u_3 = 0; \\ D_2 = 0; \\ B_2 = 0; \end{cases} \tag{3}$$

Задача 4:

$$x_2 = 1 : \begin{cases} T_{23} = 0; \\ D_2 = F(x_1); \\ \psi_2 = 0; \end{cases} \qquad x_2 = 0 : \begin{cases} u_3 = 0; \\ D_2 = 0; \\ \psi_2 = 0; \end{cases} \tag{4}$$

Здесь φ_2 и ψ_2 — электрический и магнитный потенциалы соответственно.

Следуя изложенным в [2] принципам, будем полагать, что граница является магнитно открытой при заданном значении потенциала $\psi_2 = 0$; граница является магнитно замкнутой — при $B_2 = 0$. Во всех задачах верхняя граница является электрически открытой при заданном значении $D_2 = F(x_1)$, механические напряжения отсутствуют ($T_{23} = 0$). На нижней границе слоя смещения и электрическая индукция равны нулю($u_3 = 0$, $D_2 = 0$).

2. Решение краевой задачи. После применения преобразования Фурье к системе уравнений движения по координате x_1 (α — параметр преобразования Фурье; $\frac{\partial U}{\partial x_1} = i\alpha\overline{U}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\alpha^2\overline{U}$) найдем величины σ_k, которые являются решением характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} c_{44}\sigma^2 - c_{55}\alpha^2 + \rho\omega^2 & e_{24}\sigma^2 - e_{15}\alpha^2 & f_{24}\sigma^2 - f_{15}\alpha^2 \\ e_{24}\sigma^2 - e_{15}\alpha^2 & -\varepsilon_{22}\sigma^2 + \varepsilon_{11}\alpha^2 & -g_{22}\sigma^2 + g_{11}\alpha^2 \\ f_{24}\sigma^2 - f_{15}\alpha^2 & -g_{22}\sigma^2 + g_{11}\alpha^2 & -\mu_{22}\sigma^2 + \mu_{11}\alpha^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Решения краевой задачи будем искать в виде ($k = 1, 2, 3$; $i = 3, 4, 5$):

$$\overline{U_i}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^{3} y_{ik}\ [C_k ch\sigma_k x_2 + C_{k+3} sh\sigma_k x_2]. \tag{6}$$

Незвестные y_{pk}(k=1,2,3) являются нетривиальными решениями системы:

$$\begin{cases} (c_{44}\sigma^2 - c_{55}\alpha^2 + \rho\omega^2)y_{3k} + (e_{24}\sigma^2 - e_{15}\alpha^2)y_{4k} + (f_{24}\sigma^2 - f_{15}\alpha^2)y_{5k} = 0, \\ (e_{24}\sigma^2 - e_{15}\alpha^2)y_{3k} + (-\varepsilon_{22}\sigma^2 + \varepsilon_{11}\alpha^2)y_{4k} + (-g_{22}\sigma^2 + g_{11}\alpha^2)y_{5k} = 0, \\ (f_{24}\sigma^2 - f_{15}\alpha^2)y_{3k} + (-g_{22}\sigma^2 + g_{11}\alpha^2)y_{4k} + (-\mu_{22}\sigma^2 + \mu_{11}\alpha^2)y_{5k} = 0; \end{cases} \tag{7}$$

Для отыскания неизвестных коэффициентов C_k подставим представление решения (6) в граничные условия (1)–(4). Получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{Q}, \tag{8}$$

$$\mathbf{C}=\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}\,,\quad \mathbf{Q}=\{Q_3,Q_4,Q_5,0,0,0\}\ ,$$

где $\mathbf{C}$ — искомые коэффициенты, $\mathbf{Q}$ — образ Фурье вектора нагрузки. Дисперсионное уравнение задачи имеет вид: $\det(\mathbf{A})=0$. Решим систему (8) относительно C_k, подставляя в нее решение системы (7) и выражение (6). Тогда решение краевых задач (1)–(4) примет вид:

$$\mathbf{u}\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\mathbf{k}\left(x_1-\xi,x_2,\omega\right)\,\mathbf{q_0}\left(\xi\right)\,d\xi, \tag{9}$$

$$\mathbf{k}\left(s,x_2,\omega\right)=\int_{\Gamma}\mathbf{K}\left(\alpha,x_2,\omega\right)e^{-i\alpha s}d\alpha. \tag{10}$$

Контур Γ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и поведением элементов матрицы-функции $K\left(\alpha,x_2,\omega\right)$ на вещественной оси. $K\left(\alpha,x_2,\omega\right)=\left\|K_{mn}\right\|_{m,n=3,4,5}$ — матрица-функция размера 3×3 с элементами:

$$K_{33}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^3,\quad K_{34}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{2k}^3,\quad K_{35}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{3k}^3,$$

$$K_{43}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^4,\quad K_{44}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^4,\quad K_{45}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^4,$$

$$K_{53}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^5,\quad K_{54}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^5,\quad K_{55}=\Delta_0^{-1}\sum_{k=1}^{3}N_{1k}^3,$$

$$N_{nk}^m=f_{mk}(\Delta_{nk}ch\sigma_kx_3+\Delta_{n,\,k+3}sh\sigma_kx_3),\ m=3,4,5.$$

где $\Delta_0=\det(\mathbf{A})$, Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента матрицы A с номером ik.

3. Дисперсионные свойства электромагнитоупругого слоя. Введем обозначения для граничных условий (1)–(4): МО/МС $\Rightarrow$ (1), МС/МО $\Rightarrow$ (2), МС/МС $\Rightarrow$ (3), МО/МО $\Rightarrow$ (4).

Представления (9) и (10) описывают перемещения, электрический и магнитный потенциалы в произвольной точке среды и позволяют проводить полное исследование динамического процесса в электромагнитоупругой среде. Ряд характеристик этого процесса, в частности дисперсионные свойства среды, можно исследовать на основе анализа подынтегрального выражения. Для численных исследований выбран материал класса 2mm. Ниже приведены его физические характеристики:

$$c_{55} = 40.5 \cdot 10^9\,\text{Н/м}^2;\ c_{44} = 44.5 \cdot 10^9\,\text{Н/м}^2;\ e_{15} = 3.6\,\text{Кл/м}^2;\ e_{24} = 4.1\,\text{Кл/м}^2;$$

$$f_{15} = 378.92\,\text{Н/(А·м)};\ f_{24} = 200.00\,\text{Н/(А·м)};\ g_{11} = -30.67 \cdot 10^9\,\text{(Н·с)/(В·Кл)};$$

$$g_{22} = -29.67 \cdot 10^9\,\text{(Н·с)/(В·Кл)};\ \epsilon_{11} = 4.06 \cdot 10^9\,\text{Кл}^2\text{/(Н·м}^2\text{)};\ \epsilon_{22} = 4.56 \cdot 10^9\,\text{Кл}^2\text{/(Н·м}^2\text{)};$$

$$\mu_{11} = -410.05 \cdot 10^{-6}\,\text{(Н·с}^2\text{)/Кл}^2;\ \mu_{22} = -230.05 \cdot 10^{-6}\,\text{(Н·с}^2\text{)/Кл}^2;\ \rho = 5450\,\text{кг/м}^3.$$

На рис. 1 приведены графики $Z_n = \overline{Z}_n - \overline{Z}_4$, иллюстрирующие влияние различных типов граничных условий на полюса соответствующей функции Грина. Здесь $\overline{Z}_n$ — значение полюса подынтегральной функции в (10) для задачи с граничными условиями n $(n = 1..4)$.

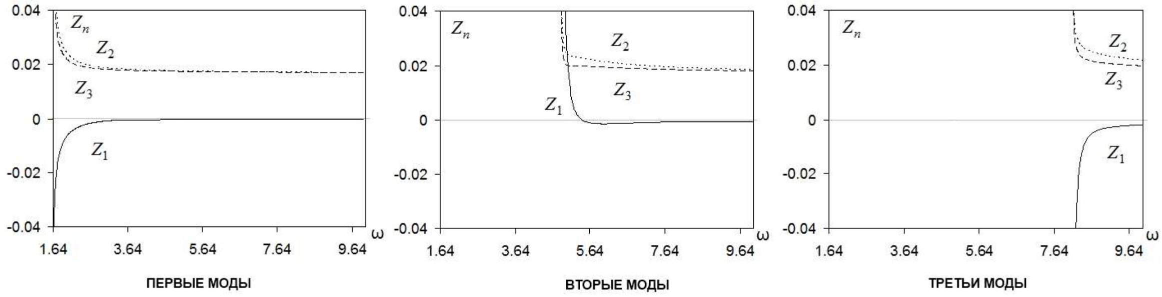


Рис. 1.

Из рис. 1 видно, что кривые полюсов попарно сходятся. Задача с граничными условиями МО/МС с увеличение частоты становится неразличима с задачей МО/МО. Аналогично, задача с условиями МС/МО становится неразличима с задачей МС/МС, что указывает на сильное влияние граничных условий на поверхности. Стоит заметить, что с увеличением частоты первые моды в магнитно открытых и магнитно закрытых на поверхности задачах не сходятся. Такое поведение характерно для вторых и третьих мод.

На рис. 2 приведены графики $\xi_n = \overline{\xi}_n - \overline{\xi}_4$, иллюстрирующие влияние различных типов граничных условий на нули подынтегральной функции в (10), а $\overline{\xi}_n$ — значение нулей для задачи с граничными условиями n $(n = 1..4)$.

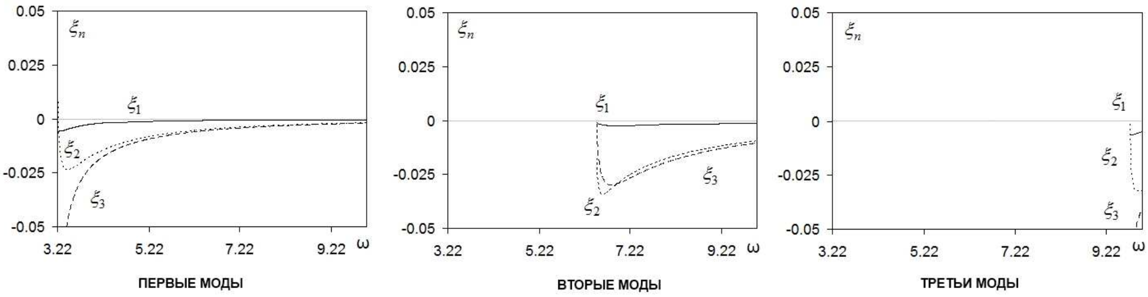


Рис. 2.

Из рисунков видно, что самая большая разница наблюдается между МО/МО и МС/МС. При конфигурациях МС/МО и МО/МС большее влияние оказывает верхняя магнитно закрытая поверхность. Наибольшая разница первых мод достигается на низких частотах ω. Эти частоты соответствуют частотам выхода первых мод, в то время как при увеличении частоты, пары мод МО/МС и МО/МО, а также МС/МО и МС/МС становятся неразличимы. На более высоких частотах граничные условия уменьшают свое влияние на дисперсионные свойства среды. В этом случае кривые нулей имеют тенденцию сходиться в области полностью открытой задачи.

В общем случае изменение граничных условий приводит к частотному смещению точек выходов нулей и полюсов. Наибольшие различия дисперсионных кривых видны в парах МО/МС и МС/МО.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Peng-Fei Hou, Hao-Jiang Ding, Jiang-Ying.* Green's functions for transversely isotropic magnetoelectroelastic media // International Journal of Engineering Science. № 43. Pp. 826–858.

[2] *Melkumyan A.* New pure shear elastic surface waves in magneto-electro-elastic half-space // arXiv.org [Электронный ресурс]. http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0607/0607112.pdf.

[3] *Calas H., Otero J. A., Rodrıǵuez-Ramos R., Monsivais G., Stern C.* Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures // International Journal of Solids and Structures № 45. 2008. Pp. 5356–5367

[4] *Евдокимова О. В., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестник ЮНЦ РАН. 2007. Т. 3, № 4. С. 19–25.

[5] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М: Наука, 1979. 320 с.

Levi M. O., Mikhailova I. B. *Some features of SH-waves propagation in electromagnetoelastic layer*. Dynamic behavior of shear horizontally waves in electromagnetoelacity layer with different border conditions are considered. Layer is a material with 2mm symmetry class. The layer surface is assumed to be free from mechanical stresses, the lower bound of the layer rigidly clamped. Green's function of the medium are constructed and studied. The influence of different magneto and electrical boundary conditions on dispersion properties of the medium is investigated.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ

Локшина Л. Я., Костандов Ю. А.
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния материала в условиях одноосного сжатия получено уравнение для расчета предела прочности материала, учитывающее внутреннее и внешнее трение. Найден вид траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Получены зависимости предельного напряжения и углов наклона ТМЭКН от внутреннего трения и контактного касательного напряжения, обусловленного внешним трением.

Авторами ранее получены уравнения состояния материала с учетом только внутреннего трения материала [1] и только внешнего (контактного) трения [2]. В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние образца горной породы при одноосном сжатии с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [3]. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_α за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_{ef} = \tau_\alpha - \mu\sigma_\alpha \leqslant k, \tag{1}$$

где τ_{ef} — эффективное касательное напряжение на ТМЭКН, τ_α — активное касательное напряжение на ТМЭКН, μ — коэффициент внутреннего трения материала, σ_α — нормальное напряжение на ТМЭКН, k — предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при $\tau_{ef} = k$ происходит разрушение, а при $\tau_{ef} < k$ материал находится в упругом состоянии.

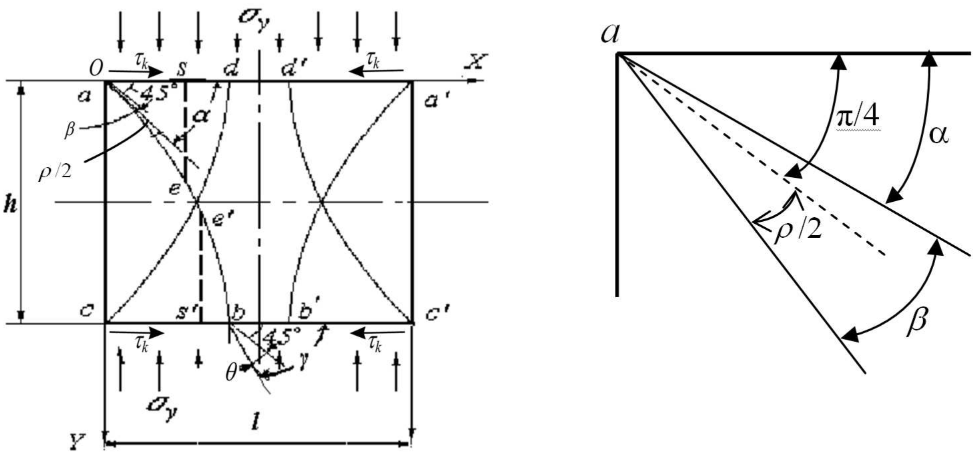
Рассмотрим образец горной породы шириной l и высотой h при сжатии вдоль оси OY нагрузкой σ_y. В силу симметрии задачи будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН ab в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках a и b, как показано на рис. 1а.

Из условия равновесия треугольников aes и $be's'$, формируемых ТМЭКН ab, найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси OX, касательных к ТМЭКН в точках a и b соответственно:

$$\sigma_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \tag{2}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \tag{3}$$

где τ_k — касательное напряжение, обусловленное внешним трением.



а б

Рис. 1.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим уравнение для эффективного касательного напряжения

$$\tau_{ef} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right). \quad (4)$$

По аналогии получим соответствующие уравнения для треугольника $be's'$:

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma - \tau_k \sin 2\gamma, \quad (5)$$

$$\tau_{ef} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma \right). \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение (2) по α, получим $\dfrac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha$. Подставляя в это уравнение критерий Кулона (1), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha). \quad (7)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника $be's'$:

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma). \quad (8)$$

Каждое из уравнений (7) и (8) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМКЭН между точками a и b

$$\int\limits_a^b \frac{d\sigma_\alpha}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha)} = -2 \int\limits_a^b d\alpha \qquad \text{или} \qquad \ln\left(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha\right)\Big|_a^b = -2\mu\alpha\Big|_a^b .$$

Из практических наблюдений известно, что в ряде случаев разрушение образца начинается из угла. Поэтому для этих случаев можно полагать, что условие разрушения материала выполняется в точке a и достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике $be's'$. Следовательно,

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha). \tag{9}$$

Для решения уравнения (9) необходимо найти углы α и γ. Для нахождения угла α, при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение, приравняем производную $\dfrac{d\tau_{ef}}{d\alpha}$ нулю и получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{ctg}(2\beta - \rho),$$

где ρ — угол внутреннего трения материала, $\mu = \operatorname{tg}\rho$, $\operatorname{tg} 2\beta = 2\tau_k/(\sigma_x + \sigma_y)$, β — угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Следовательно (см. рис. 1б), $\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta$.

По аналогии найдем угол γ для нижнего треугольника $be's'$:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{ctg}(2\theta - \rho),$$

где $\operatorname{tg} 2\theta = 2\tau_k/(\sigma_x - \sigma_y)$, θ — угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Следовательно (см. рис. 1б), $\gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta$.

Из анализа выражений для углов β и θ следует, что $\beta > \theta$. Следовательно, $\alpha < \gamma$, т. е. ТМЭКН является выпуклой кривой. Это означает, что учет касательных напряжений, вызванных контактным трением, приводит к увеличению поверхности разрушения и, следовательно, к увеличению сопротивляемости материала.

Поскольку $\gamma - \alpha = \beta - \theta$, выражение (9) можно записать в виде:

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp 2\mu(\theta - \beta). \tag{10}$$

Так как $\sigma_x = 0$ в точке a, из уравнений (2) и (4) следует, что в точке a

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sin\rho}{2}\sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_k^2}, \tag{11}$$

$$\tau_{ef} = k = -\mu\frac{\sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+\mu^2)(\sigma_y^2 + 4\tau_k^2)}. \tag{12}$$

При этом $\beta = \operatorname{arctg}(2\tau_k/\sigma_y)/2$ и из (12) находим предельное (разрушающее) напряжение:

$$\sigma_y = 2k\mu + \frac{2}{\cos\rho}\sqrt{k^2 - \tau_k^2}. \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда $\mu = 0$ и $\tau_k = 0$. Из выражения (13) получаем $\sigma_y = 2k$, что совпадает с известным результатом [4]. Для случая, когда $\mu = 0$, из выражения (13) получаем $\sigma_y = \sqrt{k^2 - \tau_k^2}$, что совпадает с результатами [2]. Для случая, когда $\tau_k = 0$, из выражения (13) получаем $\sigma_y = 2k(\sin\rho + 1)/\cos\rho$, что совпадает с результатами [1].

Для треугольника $be's'$ найдем τ_{ef} из (6), проведя ряд преобразований:

$$\tau_{ef} = -\mu\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1+\mu^2)\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_k^2\right]}. \qquad (14)$$

Определим σ_x в точке b из выражения (14) с учетом (13):

$$\sigma_x = 2k\mu + \frac{2\sqrt{k^2-\tau_k^2}}{\cos\rho} + \frac{2\left(\sin\rho-\sqrt{1-b^2}\right)}{\cos\rho}\left(\tau_{ef}+2k\mu^2+\frac{2\mu\sqrt{k^2-\tau_k^2}}{\cos\rho}\right), \qquad (15)$$

где $b = \dfrac{\tau_k\cos\rho}{2\mu\left(k\sin\rho+\sqrt{k^2-\tau_k^2}\right)+\tau_{ef}\cos\rho}$.

Для выполнения условия $\sigma_x < \sigma_y$ перед корнем $\sqrt{1-\beta^2}$ в (15) выберем знак «$-$» и наложим ограничение на параметр b: $b^2 < \cos^2\rho$.

Найдем σ_y в нижнем треугольнике $be's'$ из (5) с учетом (13) и (15):

$$\sigma_x = \left(2k\mu+\frac{2\mu\sqrt{k^2-\tau_k^2}}{\cos\rho}\right)\left(1-\sin\rho\sqrt{1-b^2}\right) - \cos\rho\tau_{ef}\sqrt{1-b^2}. \qquad (16)$$

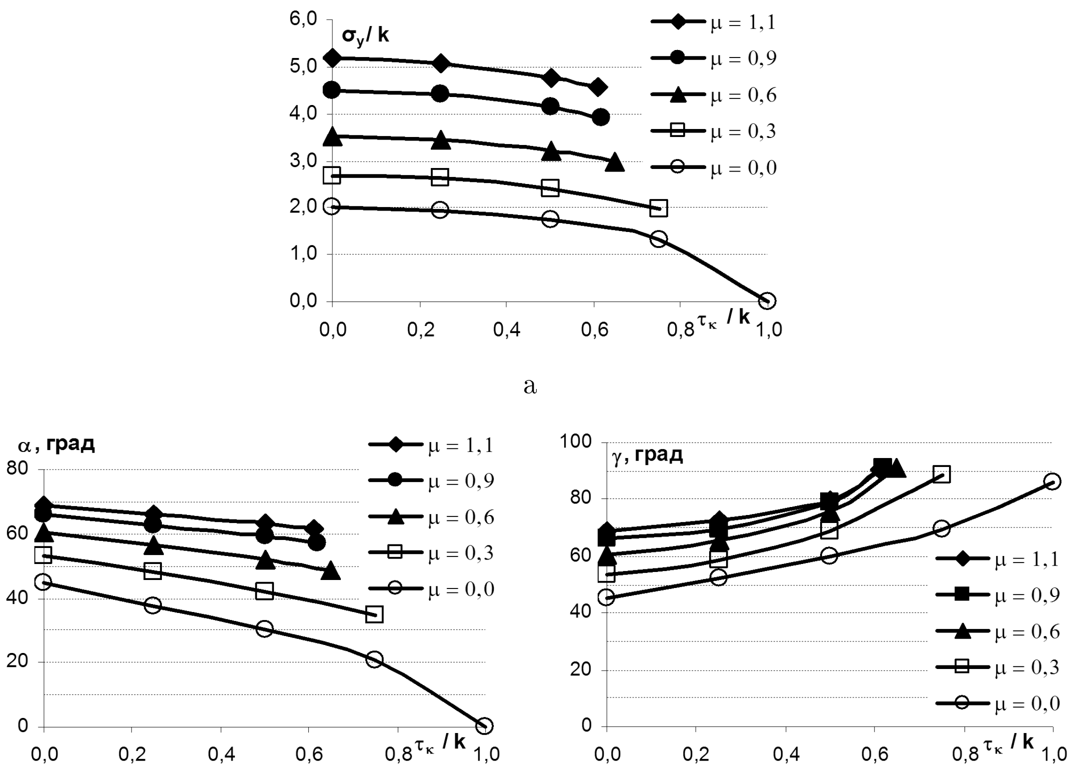


Рис. 2. Зависимости предельного напряжения σ_y (а), углов наклона α (б) и γ (в) касательных к ТМКЭН от касательного напряжения τ_k на поверхности приложения нагрузки для различных значений коэффициента внутреннего трения μ.

Подставляя σ_α и σ_γ из (11) и (16) в (10), с учетом (12) получим

$$b^2\left[I^2+(\tau_k\sin\rho)^2\right]-2\tau_k bI+\tau_k^2\cos^2\rho=0\ , \tag{17}$$

где $I=\left(k+\sin\rho\sqrt{k^2-\tau_k^2}\right)l^{2\mu(\theta-\beta)}$.

Уравнение (17) решается относительно b численным методом. При этом для каждой конкретной задачи из таблиц свойств материалов определяются значения ρ, μ, k и находятся значения σ_y и β. После вычисления b определяются τ_{ef} и θ. Знание этих величин позволяет полностью установить вид и углы наклона ТМКЭН.

Для нахождения корней уравнения (17) был разработан алгоритм, реализованный в среде *Microsoft Excel*. В результате вычислений получены зависимости, приведенные на рис. 2. Из них следует увеличение предельного напряжения σ_y и углов наклона α и γ с ростом коэффициента внутреннего трения μ. При росте касательного напряжения τ_k предельное напряжение σ_y и угол наклона α уменьшаются, а угол наклона γ увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Локшина Л. Я., Костандов Ю. А., Васильев Д. Л.* Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. трудов. Днепропетровск: 2009. № 82. С. 199–206.

[2] *Костандов Ю. А., Локшина Л. Я.* Влияние контактного трения на предельное напряжение в образце горной породы и вид траектории разрушения при сжатии // Физико-технические проблемы горного производства. 2010. № 13. С. 42–47.

[3] *Васильев Л. М., Васильев Д. Л.* Метод расчета предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. Вып. 42. С. 73–80.

[4] *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 419 с.

Lokshina L. Ya., Kostandov Yu. A. *Research of the limiting state of the deformed body taking into account the internal and external friction.* By consideration of the stress-strain state of material under the uniaxial compression is obtained the equation for calculation of strength limit of material taking into account an internal and external friction. The aspect of a trajectory of maximum effective tangential stresses (TMETS) is found. Dependences of limiting stress and angles of TMETS slope from internal friction and contact tangential stress caused by an external friction are got on.

К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ СТРУКТУР

Лыжов В. А.*, Тукодова О. М.*, Ворович Е. И.**

**Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

***Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В данной работе представлены результаты по исследованию особенностей распределения электрических полей для многоэлектродных систем на пьезоактивной подложке в различных режимах возбуждения. Предложена упрощенная модель расчета многоэлектродных структур, позволяющая учесть краевые эффекты и моделирующая исходную систему с ошибкой, не превышающей нескольких процентов.

Качественно новый уровень моделирования современных устройств на ПАВ возможен только при строгом математическом учете всех внешних воздействий и внутренних напряжений. Одним из перспективных направлений является разработка эффективных методов решения динамических связанных задач с разнородными граничными условиями в строгой математической постановке. Сформулируем задачу о возбуждении ПАВ планарными электродными структрами на пьезоактивной подложке.

Модель электроакустического устройства рассматривается в виде системы из N тонких протяженных электродов с заданными потенциалами на поверхности пьезоактивного слоисто неоднородного полупространства (рис. 1). Полагаем, что весом и жесткостью электродов можно пренебречь.

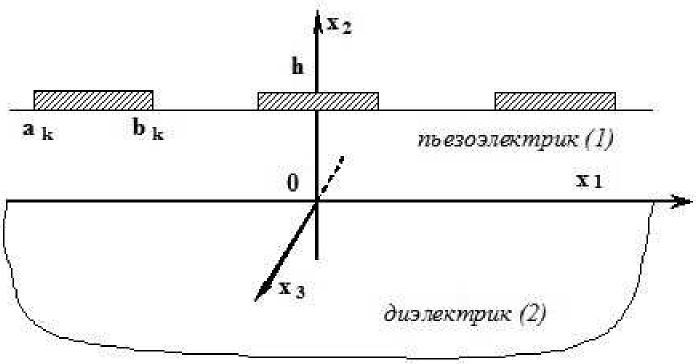


Рис. 1. Геометрия задачи для системы электродов на поверхности пьезоэлектрического слоя на диэлектрическом полупространстве.

Смещение точек среды описывается уравнениями движения электроупругости и квазиэлектростатики:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, имеющие следующий вид (индексом 1 отмечены величины в пьезоэлектрике, индексом 2 — в диэлектрике):

$$T_{ij}^{(1)} = C_{ijkl}^{(1)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} + e_{ijk}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_k} \qquad T_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_l} \tag{3}$$

$$D_i^{(1)} = e_{ijk}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_j}, \qquad D_i^{(2)} = -\varepsilon_{ij}^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_j} \tag{4}$$

$\mathbf{u}$ — вектор смещения, φ — электрический потенциал, C_{ijkl}, e_{ijk}, ε_{ij} — упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические константы соответственно.

На поверхности заданы механические напряжения и потенциалы на электродах, на внутренних границах между слоями предполагается равенство полей смещений и напряжений, потенциала и нормальной компоненты электрической индукции, на бесконечности учитываются условия излучения:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_k, \qquad x_2 = h, \qquad x_1 \in \ [a_k, b_k], \tag{5}$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(*)}, \qquad x_2 = h, \tag{6}$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}, \quad x_2 = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} \to 0, \qquad \varphi^{(2)} \to 0, \qquad x_2 \to -\infty. \tag{8}$$

В большинстве случаев можно считать продольные размеры электродов значительно превосходящими поперечные. Если к тому же свойства подложки однородны вдоль оси x_3, можно считать все параметры не зависящими от координаты x_3 и рассматривать плоскую задачу для волн типа Рэлея или антиплоскую для волн типа Лява и Гуляева–Блюштейна. Далее рассматривается антиплоская задача, для которой решение в любой точке подложки можно выразить через механические напряжения $T_{32}^*(x_1)$ и электрическую индукцию $D_2^*(x_1)$ на поверхности полупространства, в случае сдвиговых колебаний указанные выражения имеют вид:

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_{32}^*(\alpha) K_{31}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{32}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha \tag{9}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_{32}^*(\alpha) K_{41}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{42}(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha \tag{10}$$

Здесь α — параметр преобразования Фурье по координате x_1, K_{nm} — символы ядер соответствующих интегральных преобразований, описывающие структуру и свойства материала подложки.

Считая потенциалы на электродах известными, а поверхность — свободной от механических напряжений, можно записать интегральное уравнение относительно электрической индукции под электродами:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_2^*(\alpha) K_{42}(\alpha, 0) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \varphi(x_1, 0) \tag{11}$$

Для решения уравнения (11) был использован метод граничных элементов, подробно изложенный в [1]. Отметим лишь, что существование и единственность решения гарантируются свойствами символа ядра $K_{42}(\alpha)$, имеющего счетное количество нулей и полюсов, из них конечное расположено на вещественной оси. Запишем условие для нормальной компоненты электрической индукции на поверхности пьезоэлектрика:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = -q(x_1), \qquad x_1 \in\ [a_k, b_k], \tag{12}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = 0, \qquad x_1 \notin\ [a_k, b_k]. \tag{13}$$

Отсюда видно, что распределение $D_2^*(x_1)$ численно равно распределению плотности поверхностных зарядов $q(x_1)$ под электродами.

В целях изучения особенностей распределения полей многоэлектродных систем и влияния краевых эффектов на характеристики устройств были решены задачи для одного электрода, 3-, 5-, 7-, 9-электродных структур и так далее в сторону увеличения количества электродов в различных режимах возбуждения.

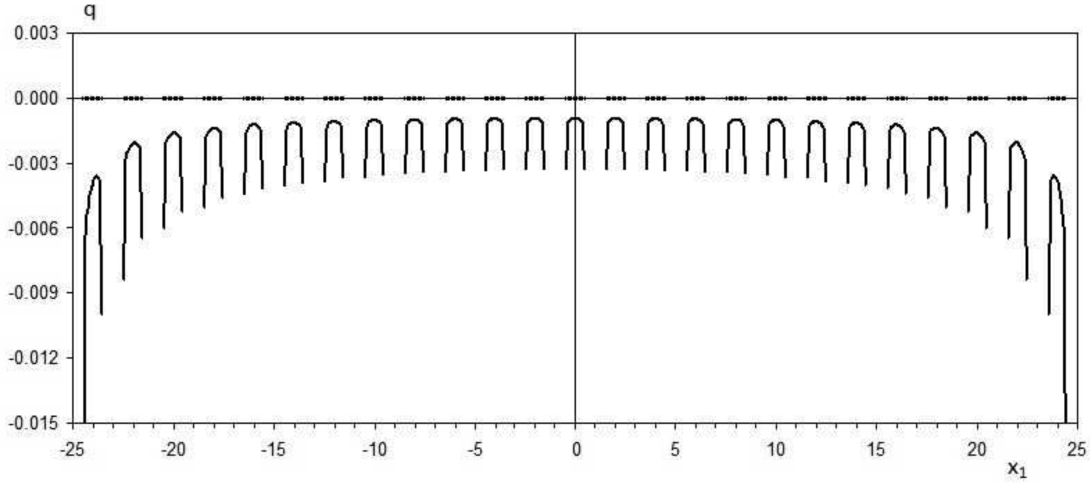


Рис. 2. Результаты точного расчета распределения заряда под 25-электродной структурой. Сплошная линия — вещественная часть, пунктирная — мнимая.

Первоначально предполагалось, что распределение полей в середине многоэлектродной структуры должно быть близким к решению для бесконечной периодической системы электродов (рис. 2). Проводился анализ возможности замены решения строгой задачи для большого количества электродов на решение задачи для упрощенной модели — учет нескольких крайних электродов для описания краевых эффектов и периодическая система между ними. Расчеты показали неприменимость такой модели — в месте стыковки крайних электродов с периодической структурой возникала ошибка, растущая с увеличением количества электродов в системе и достигающая 40% уже для 25 электродов. Однако были выявлены закономерности распределения заряда для различных электродных структур на графиках, построенных в относительных координатах $x_1^* = x_1/x_{max}$ (рис. 3).

Полученные результаты позволили предложить приближенную схему расчета таких систем, сводящуюся к последовательному решению двух вспомогательных задач. Вместо вычисления N неизвестных распределений зарядов под всеми

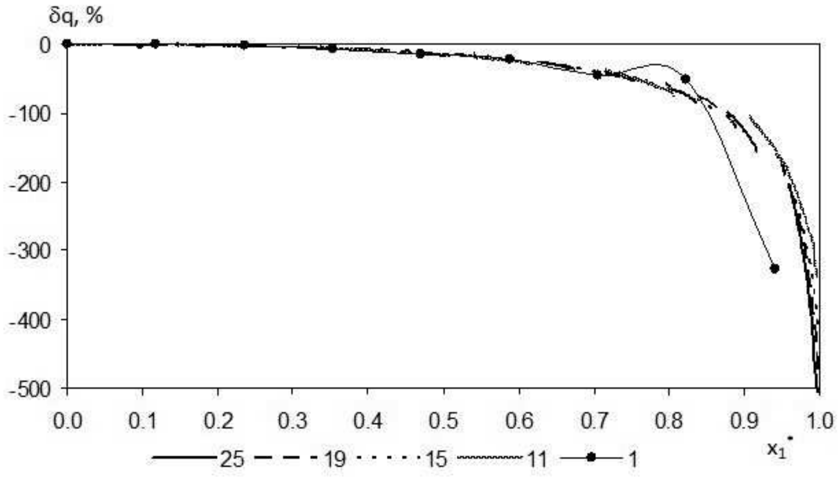


Рис. 3. Отклонение распределения заряда под электродами по сравнению с центральным электродом, построенные в относительных координатах для некоторых электродных структур.

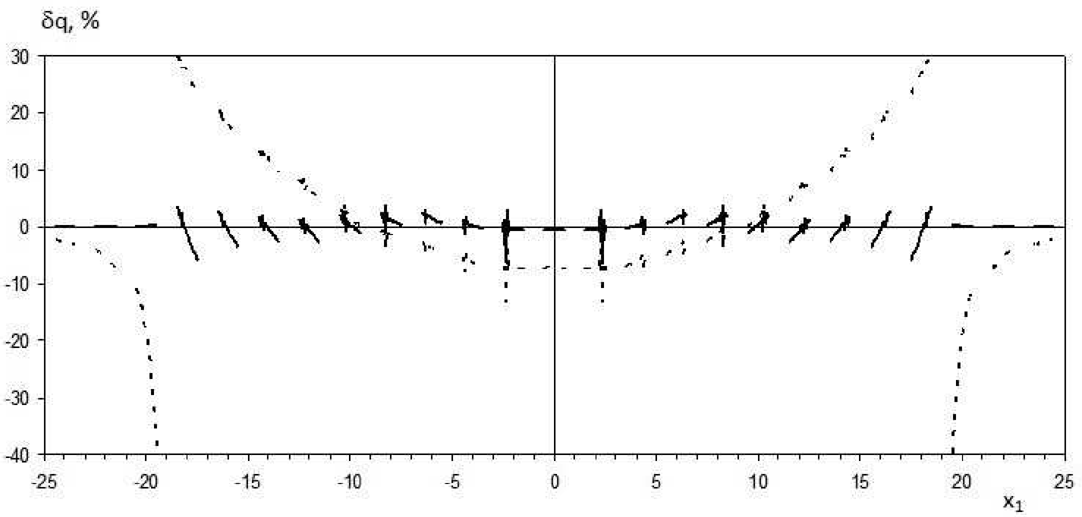


Рис. 4. Ошибка расчета электрического поля электродной структуры по упрощенной методике по сравнению с точным решением. Пунктирная линия — результат для первоначальной модели, сплошная — для модифицированной.

электродами, определнию подлежит всего 7 функций — распределение заряда под несколькими крайними и под центральным электродами. Учет 3-х крайних электродов позволяют хорошо описать краевые эффекты, а периодическая система между ними определяется согласно функции распределения заряда под всей электродной структурой, которая описывается решением контактной задачи для одного электрода. Ошибка расчета электрического поля по такой упрощенной схеме не превышает нескольких процентов и обусловлена в основном несимметричностью влияния электродной системы на нецентральные электроды (рис. 4). Такой подход позволяет сократить время расчета больших электродных систем в несколько десятков раз.

Работа была выполнена при частичной финансовой поддерже РФФИ в рамках грантов № 10-08-01082, 09-01-00695.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белянкова Т. И., Калинчук В. В. Лыжов В. А.* Связанная смещанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупрогого структурно неоднородного полупространства // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 895–908.

[2] *Белянкова Т. И., Лыжов В. А.* Некоторые особенности динамики слабо неоднородных пьезоактивных структур // Вестник Южного научного центра РАН. 2010. Т. 6. С. 3–10.

[3] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупрогих сред. М.: Физматлит, 2006. 272 с.

[4] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.

[5] *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

[6] Акустические кристаллы. *Под ред. Шаскольской М. П.* М.: Наука, 1982. 632 с.

Lyzhov V. A., Tukodova O. M., Vorovich E. I. *Effective modeling multi-electrode structures*. In article presents the results on the characteristics of the distribution of electric fields for multi-electrode systems on piezoactive substrate. We propose a simplified model for calculating the multi-electrode structures, which allows to take into account boundary effects and simulate the such system with error less a few percent.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСТУЩЕГО ШАРА

Лычев С. А., Манжиров А. В.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Работа посвящена исследованию нестационарного температурного поля в растущих телах сферической формы. Температура присоединяемого материала отлична от температуры основного тела. Решение начально-краевой задачи теплопроводности отыскивается в форме разложения по полной системе собственных функций дифференциального оператора, порождаемого задачей.

Задача теплопроводности для полого шара постоянного состава. Рассматривается тело, ограниченное двумя концентрическими сферами, радиусы которых равны a и b соответственно. Используется сферическая система координат, начало которой совпадает с центром сфер. Каждой точке соответствует тройка координат (r, θ, φ). Время обозначается символом t.

Температурное поле описывается дважды дифференцируемой по всем четырем аргументам функцией $T = T(r, \theta, \varphi, t)$. Предполагаем, что материал является однородным, изотропным и характеризуется плотностью ρ, удельной теплоемкостью при постоянных деформациях c_V и коэффициентом теплопроводности λ. Также полагаем, что внутри тела действуют источники тепла, мощность которых задается функцией $f(r, \theta, \varphi)$. Поле температур удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}\right] + f(r, \theta, \varphi). \quad (1)$$

В начальный момент времени распределение температуры внутри тела задано:

$$T(r, \theta, \varphi, t)|_{t=0} = T^{(0)}(r, \theta, \varphi), \quad (2)$$

а значение температуры на границе удовлетворяет краевым условиям:

$$T(r, \theta, \varphi, t)|_{r=a} = T^{(i)}, \quad T(r, \theta, \varphi, t)|_{r=b} = T^{(e)}, \quad (3)$$

где $T^{(i)}$ и $T^{(e)}$ — заданные температурные поля на границах тела.

Для построения решения в форме спектрального разложения необходимо привести исходную задачу к виду, в котором краевые условия оказались бы однородными. Осуществить это позволяет процедура стандартизации: вводится вспомогательная функция $u(r, \theta, \varphi, t)$, такая что

$$u = T - \frac{(r-a)T^{(e)} + (b-r)T^{(i)}}{b-a}. \quad (4)$$

В результате начально-краевая задача (1) — (3) преобразуется к задаче с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] + \tilde{f}(r, \theta, \varphi), \quad (5)$$

$$u(r,\theta,\varphi,t)|_{t=0} = u^{(0)}(r,\theta,\varphi), \quad u(r,\theta,\varphi,t)|_{r=a} = 0, \quad u(r,\theta,\varphi,t)|_{r=b} = 0. \tag{6}$$

Решение задачи будем искать в классе функций, определенных в шаровой области и интегрируемых в ней с квадратом. Уравнения (5)–(6) могут быть записаны в операторной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A[u] + \tilde{f},$$

$$A[u] = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

Оператор A является самосопряженным, положительно определенным и имеет дискретный спектр. Это позволяет представить решение в виде спектрального разложения по собственным функциям

$$u(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{mnk}(t)\psi_{mnk}(r,\theta,\varphi), \tag{7}$$

где $\psi_{mnk}(r,\theta,\varphi)$ — решение задачи Штурма-Лиувилля

$$\gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi_{mnk}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi_{mnk}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi_{mnk}}{\partial\varphi^2}\right] = \lambda_{mnk}\psi_{mnk}. \tag{8}$$

Решения дифференциального уравнения (8) представляются в виде:

$$\psi^{(e)}_{mnk}(r,\theta,\varphi) = (C^{(e)}_1 J_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r) + C^{(e)}_2 Y_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r))P^n_m(\cos\theta)\sin m\varphi, \tag{9}$$

$$\psi^{(o)}_{mnk}(r,\theta,\varphi) = (C^{(o)}_1 J_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r) + C^{(o)}_2 Y_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r))P^n_m(\cos\theta)\cos m\varphi, \tag{10}$$

где $J_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r)$ и $Y_{1/2+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}r)$ — функции Бесселя порядка $1/2+n$, первого и второго рода, соответственно; $P^n_m(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра; λ_{mnk} — собственные числа оператора. Константы $C^{(e)}_1 = C^{(o)}_1$, и $C^{(e)}_2 = C^{(o)}_2$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C^{(e)}_1 J_{\frac{1}{2}+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}a) + C^{(e)}_2 Y_{\frac{1}{2}+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}a) = 0\ , \\ C^{(e)}_1 J_{\frac{1}{2}+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}b) + C^{(e)}_2 Y_{\frac{1}{2}+k}(\sqrt{\lambda_{mnk}}b) = 0\ , \end{cases}$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Это условие позволяет найти собственные значения и выразить константу $C^{(o)}_1$ через $C^{(e)}_2$ и $C^{(e)}_1$ через $C^{(o)}_2$. Окончательно значение констант вычисляются из условия нормировки:

$$\iiint\limits_V \psi^2_{mnk}(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi = 1.$$

Собственные числа λ_{mnk} находим как решение трансцендентного уравнения:

$$J_{1/2+k}(a\sqrt{\lambda_{mnk}})Y_{1/2+k}(b\sqrt{\lambda_{mnk}}) = J_{1/2+k}(b\sqrt{\lambda_{mnk}})Y_{1/2+k}(a\sqrt{\lambda_{mnk}}).$$

Для нахождения координатных функций подставим (7) в уравнение (5), в результате чего исходная начально-краевая задача сведется к последовательности задач Коши:

$$\frac{\partial u_{mnk}}{\partial t} = \gamma^2 \lambda u_{mnk}(t) + \tilde{f}_{mnk}, \quad u_{mnk}(t)|_{t=0} = u_{mnk}^{(0)}, \tag{11}$$

где $\tilde{f}_{mnk}$ и $u_{mnk}^{(0)}$ — проекции функций $\tilde{f}(r,\theta,\varphi)$ и $u(r,\theta,\varphi)$ на собственную функцию с номером mnk:

$$\tilde{f}_{mnk} = \iiint\limits_V f(r,\theta,\varphi)\psi_{mnk}(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi,$$

$$u_{mnk}^{(0)} = \iiint\limits_V u^{(0)}(r,\theta,\varphi)\psi_{mnk}(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi.$$

Решение (11) может быть записано в форме:

$$u_{mnk} = u_{mnk}^{(0)} e^{-\lambda_{mnk}\gamma^2 t} + \int\limits_0^t \tilde{f}_{mnk}(\tau) \exp\{-\lambda_{mnk}\gamma^2 (t-\tau)\} \, d\tau. \tag{12}$$

Подставляя каждое значение координатной функции (12) в выражение (7) получим решение задачи (5) – (6). Далее, проведя замену, обратную (4) найдем распределение температуры внутри полого шара.

Задача теплопроводности для растущего сплошного шара Предполагается, что в начальный момент времени к границе рассматриваемого тела начинают присоединяться слои с температурой $T^{(e)}$. В результате радиус шара увеличивается по известному закону $b(t)$. Считаем, что дополнительный материал по своим свойствам идентичен основному телу. Начально-краевая задача для растущего шара записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right] + f(r,\theta,\varphi), \tag{13}$$

$$T(r,\theta,\varphi,t)|_{t=0} = T^{(0)}(r,\theta,\varphi), \quad T(r,\theta,\varphi,t)|_{r=0} = O(1), \quad T(r,\theta,\varphi,t)|_{r=b(t)} = T^{(e)}. \tag{14}$$

После проведения процедуры стандартизации с помощью замены

$$u(r,\theta,\varphi,t) = T(r,\theta,\varphi,t) - T^{(e)}$$

уравнения (13) – (14) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] + \tilde{f}(r,\theta,\varphi), \tag{15}$$

$$u(r,\theta,\varphi,t)|_{t=0} = u^{(0)}(r,\theta,\varphi), \quad u(r,\theta,\varphi,t)|_{r=0} = O(1), \quad u(r,\theta,\varphi,t)|_{r=b(t)} = 0. \tag{16}$$

Поверхность рассматриваемой области зависит от времени, т. е. является подвижной. Однако, с помощью замены переменных $\hat{r} = r\,/b(t)$ уравнения (15) – (16) могут быть приведены к виду

$$b^2(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2\left[\frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}^2\frac{\partial u}{\partial\hat{r}}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \tag{17}$$

$$u(\hat{r},\theta,\varphi,t)|_{t=0} = u^{(0)}(\hat{r},\theta,\varphi), \quad u(\hat{r},\theta,\varphi,t)|_{\hat{r}=0} = O(1), \quad u(\hat{r},\theta,\varphi,t)|_{\hat{r}=1} = 0. \tag{18}$$

Задача (17)–(18) отличается от классической задачи теплопроводности лишь тем, что множитель при производной по времени является функцией. Решение ищем в форме спектрального разложения. Задача Штурма–Лиувилля в этом случае имеет вид:

$$\gamma^2\left[\frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}^2\frac{\partial\psi_{mnk}}{\partial\hat{r}}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_{mnk}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\hat{r}^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi_{mnk}}{\partial\varphi^2}\right] = \lambda_{mnk}\psi_{mnk},$$

$$\psi_{mnk}(\hat{r},\theta,\varphi,t)|_{\hat{r}=0} = O(1), \quad \psi_{mnk}(\hat{r},\theta,\varphi,t)|_{\hat{r}=1} = 0.$$

Искомую функцию можно представить в виде следующего ряда:

$$u(\hat{r},\theta,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{mnk}(t)\psi_{mnk}(\hat{r},\theta,\varphi). \tag{19}$$

Подставляя разложения (19) в соотношения (17) – (18), приходим к следующей последовательности задач Коши:

$$b^2(t)\frac{\partial u_{mnk}}{\partial t} = \gamma^2\lambda u_{mnk}(t) + \tilde{f}_{mnk}, \quad u_{mnk}(t)|_{t=0} = u^{(0)}_{mnk}. \tag{20}$$

Коэффициенты $\tilde{f}_{mnk}$ и $u^{(0)}_{mnk}$ являются координатами функций $\tilde{f}(r,\theta,\varphi)$ и $u^{(0)}(r,\theta,\varphi)$ в базисе ψ_{mnk}

$$\tilde{f}_{mnk} = \iiint\limits_V f(\hat{r},\theta,\varphi)\psi_{mnk}(\hat{r},\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi,$$

$$u^{(0)}_{mnk} = \iiint\limits_V u^{(0)}(\hat{r},\theta,\varphi)\psi_{mnk}(\hat{r},\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi.$$

Решение задачи (20) может быть теперь представлено в виде

$$u_{mnk} = u^{(0)}_{mnk}\exp\left\{-\int\limits_0^t\frac{\lambda_{mnk}\gamma^2}{b^2(\tau)}\,d\tau\right\} + \int\limits_0^t\frac{\tilde{f}_{mnk}}{b^2(\tau)}\,d\tau.$$

Задача теплопроводности для растущего полого шара Рассмотрим растущий полый шар, внутренний радиус которого постоянен и равен a. Будем рассматривать случай центральной симметрии. Начально-краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] + f(r), \qquad t > 0, \qquad a < r < b(t),$$

$$T(r)|_{t=0} = T^{(0)}(r), \quad T(r,t)|_{r=a} = T^{(i)}, \quad T(r,t)|_{r=b(t)} = T^{(e)}.$$

Проведя процедуру стандартизации (4), приведем исходную начально-краевую задачу к задаче с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] + \tilde{f}(r), \tag{21}$$

$$u(r,t)|_{t=0} = u^{(0)}(r), \quad u(r,t)|_{r=a} = 0, \quad u(r,t)|_{r=b(t)} = 0. \tag{22}$$

Решение задачи (21) – (22) будем искать в форме спектрального разложения

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\psi_n(r,t). \tag{23}$$

Задача Штурма–Лиувилля

$$\gamma^2 \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi_n(r,t)}{\partial r}\right)\right] + \tilde{f}(r) = \lambda_n \psi_n(r,t), \quad u(r,t)|_{r=a} = 0, \quad u(r,t)|_{r=b(t)} = 0$$

параметрически зависит от времени t. Собственные числа и собственные функции также зависят от параметра t:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{(b(t)-a)^2}, \quad \psi_n = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi^2 n^2}{(b(t)-a)^2}\right)}{r\sqrt{b(t)-a}}.$$

Исходная начально-краевая задача приводится к задаче Коши для бесконечномерной системы связных линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \gamma^2 \lambda_n u_n(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{\partial \psi_n(t)}{\partial t}\psi_k(t)\,dr, \qquad n = 0, 1, \ldots\,. \tag{24}$$

Построение приближенного решения осуществляется путем выделения из системы (24) конечномерной подсистемы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00669_а, 09-08-01194_а, 09-08-01180_а, 11-08-93967-ЮАР_а) и Программы ОЭММПУ РАН № 13.

Lychev S. A., Manzhirov A. V. *Heat conduction problem for a growing globe.* Nonstationary temperature fields in growing globe are considered in present paper. The temperature of adhered material differs from the temperature of growing three dimensional solid. The solution of initial boundary value problem is obtained in the form of spectral expansion over complete system of eigenfunctions of differential operator which is generated by considered problem.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСТЯЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Майорова О. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена моделированию одного из экспериментов по определению механических характеристик биоматериала — растяжению нелинейно-упругого несжимаемого цилиндра с жестко защемленными основаниями. Описан класс моделей несжимаемых нелинейно-упругих материалов, в котором решение задачи о растяжении в случае жесткого нагружения может быть построено на основе гипотезы плоских сечений. Приведено сравнение найденного решения с конечно-элементным (ANSYS); определен диапазон геометрических характеристик цилиндра, при котором данное решение имеет физический смысл.

1. Решение на основе полуобратного представления. Рассматривается упругий цилиндр из несжимаемого материала, в недеформированном состоянии заполняющий объем $r \leqslant a$, $-h \leqslant z \leqslant h$. Вводится цилиндрическая система координат $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ с соответствующими ортами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi$.

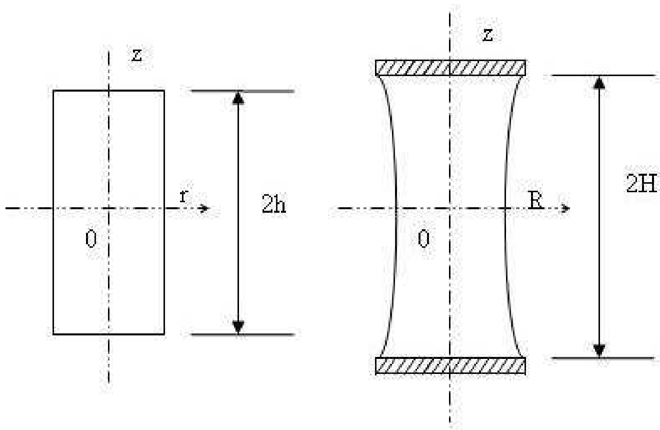


Рис. 1. Растяжение цилиндра.

Торцевые поверхности $z = \pm h$ скреплены с жесткими дисками, боковая поверхность $r = a$ свободна от нагружения. Дискам сообщаются направленные в противоположные стороны, параллельные оси цилиндра одинаковые перемещения. При этом высота цилиндра $2h$ становится равной $2H$, так что при растяжении $H > h$.

Деформация предполагается происходящей с сохранением осевой симметрии, используется кинематическая гипотеза плоских сечений, поэтому в актуальной конфигурации положение частицы, остающейся в той же меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$, может быть задано радиус-вектором [2]

$$R = R(r,z)\mathbf{e}_r + g(z)\mathbf{e}_z \ . \tag{1}$$

Искомые функции $R(r,z)$ и $g(z)$ должны быть подчинены геометрическим краевым условиям

$$R(r,\pm h) = r \ , \quad g(\pm h) = \pm H \ , \tag{2}$$

соответствующим условиям контакта между торцами цилиндра и жесткими дисками, а так же требованию статической эквивалентности нулю системы напряжений на боковой поверхности $r = a$.

В несжимаемой среде деформации происходят без изменения объема, таким образом, используя условие несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$, имеем

$$R(r,z) = rf(z) \ , \quad g'(z) = f^{-2}(z) \ . \tag{3}$$

Так как упругий потенциал W для несжимаемой среды зависит лишь от двух главных инвариантов $W = W(I_1, I_2)$, рассмотрим функцию удельной потенциальной энергии W в следующем виде

$$W = \frac{\mu n}{\alpha}(I_1 - 3)^{\alpha} + \frac{\mu m}{\beta}(I_2 - 3)^{\beta} \ , \tag{4}$$

где α, β, m, n — материальные параметры.

По градиенту деформации $\mathbf{C}$ определяется мера деформации Коши-Грина $\mathbf{G}$, ее главные инварианты имеют вид:

$$I_1 = 2f(z)^2 + r^2(f'(z))^2 + \frac{1}{f(z)^4} \ , \quad I_2 = \left(r^2\left(f'(z)\right)^2 + \frac{1}{f(z)^4}\right) f(z)^2 + \frac{1}{f(z)^2} + f(z)^4 \, .$$

Производные главных инвариантов симметричного тензора по самому тензору задаются формулами

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{G}} = \mathbf{E} \ , \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{G}} = I_1 \mathbf{E} - \mathbf{G} \ , \quad \left.\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{G}}\right|_{I_3=1} = \mathbf{G^{-1}} \ .$$

Определяющее соотношение для тензора напряжений Пиола имеет вид

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} + k\mathbf{C}^{-T} \ ,$$

где k — функция гидростатического давления, подлежащая определению.

Уравнение равновесия при отсутствии массовых сил имеет вид $\bigtriangledown \cdot \mathbf{D} = 0$. После внесения в него значений компонент тензора напряжений Пиола получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для определения функции $k(r,z)$ вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial r} = F_1(r, f(z), f'(z)) \ , \\[2ex] \dfrac{\partial k}{\partial z} = F_2(r, f(z), f'(z)) \ . \end{cases} \tag{5}$$

Условие интегрируемости

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial r} \tag{6}$$

приводит к дифференциальному уравнению для неизвестной функции $f(z)$.

В общем случае, для потенциальной энергии типа (4), получаем уравнение вида

$$\Psi\ [z, f(z)] + (\alpha - 1)\Psi_1[r, z, f(z)] + (\alpha - 1)^2\Psi_2[r, z, f(z)] +$$
$$(\beta - 1)\Psi_3[r, z, f(z)] + (\beta - 1)^2\Psi_4[r, z, f(z)] = 0\ , \tag{7}$$

где Ψ_i i=1...4, функционалы, существенно зависящие от r.

Можно показать, что удовлетворить соотношению (7) выбором функции f, зависящей только от z, можно лишь при следующих наборах значений параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $m + n = 1$. Это означает, что гипотеза плоских сечений, являющаяся универсальной, например, для задачи кручения, в данном случае справедлива лишь для узкого класса материалов.

Для общего случая (4) при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ условие интегрируемости (6) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$f'' = \frac{f(\gamma - f'^2 m)}{n + f^2 m}\ ,$$

решение которого можно построить численно. Параметр γ находится из краевого условия: $g(h) = H$. Заметим, что у тензора напряжений Пиола ненулевыеми будут компоненты : D_{rR}, D_{zZ}.

Боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузки, т. е. $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D} = 0$ при $r = a$. Вместо точного удовлетворения данным условиям, ограничимся интегральным равенством

$$2\pi \int_{-h}^{h} D_{rR}\mathbf{e}_R dz = 0\ . \tag{8}$$

Величину осевой силы, сообщающей жесткому диску перемещение, можно определить из условия равновесия, которое с учетом

$$f^{-2}(h) = 1\ , \tag{9}$$

имеет вид

$$P = 2\pi \int_0^a D_{zZ}\, r dr\ . \tag{10}$$

Заменив компоненту D_{zZ} ее значением и учитывая соотношение (9), из (10) получаем

$$P = \left(-\frac{\pi\gamma a^4}{2} + \frac{\pi n a^2}{f(z)^6} + \frac{2\pi m a^2}{f(z)^4}\right)\mu + \frac{\pi a^2 C_0}{f(z)^2}\ .$$

Равенство (8) после подстановки в него значений компонент напряжений дает уравнение для определения постоянной C_0:

$$C_0 = \int_{-h}^{h} \mu f(z)^2 (a^2\gamma - 2n - 2m f(z)^2 + n f(z)^{-6}) dz = 0\ .$$

В [2] приводится решение данной задачи в случае неогукова материала $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $n = 1$, $m = 0$. Аналитическое решение имеет вид:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha h}\ , \quad g(z) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{ch}^2(\alpha h)\operatorname{th}(\alpha z)\ . \tag{11}$$

Уравнение для определения постоянной α

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}\ , \quad x = 2\alpha h\ .$$

1.2. Сравнение аналитического решения с конечно-элементным решением (ANSYS).

В связи с наличием экспериментальных методик определения формы деформированной поверхности, нас интересует, насколько точно полуобратное представление описывает форму деформированного цилиндра.

Далее приводятся сравнения решений, полученных на основе полуобратного представления и в конечно-элементом пакете ANSYS для случая неогукова материала.

На рис. 2 представлены графики функции формы боковой поверхности $f(z)$ для различных соотношений размеров цилиндра. Видно, что решение, построенное на основе полуобратного представления совпадает с решением, полученным методом конечных элементов, лишь в случае тонких дисков. Это объясняется тем, что граничное условие на боковой поверхности, использованное для построения аналитического решения, выполняется интегрально.

Графики нормального радиального напряжения в радиальном сечении при $z = h/2$ представлены на рис. 3. Несовпадение численного и аналитического решений в этом случае также связано с геометрией образцов.

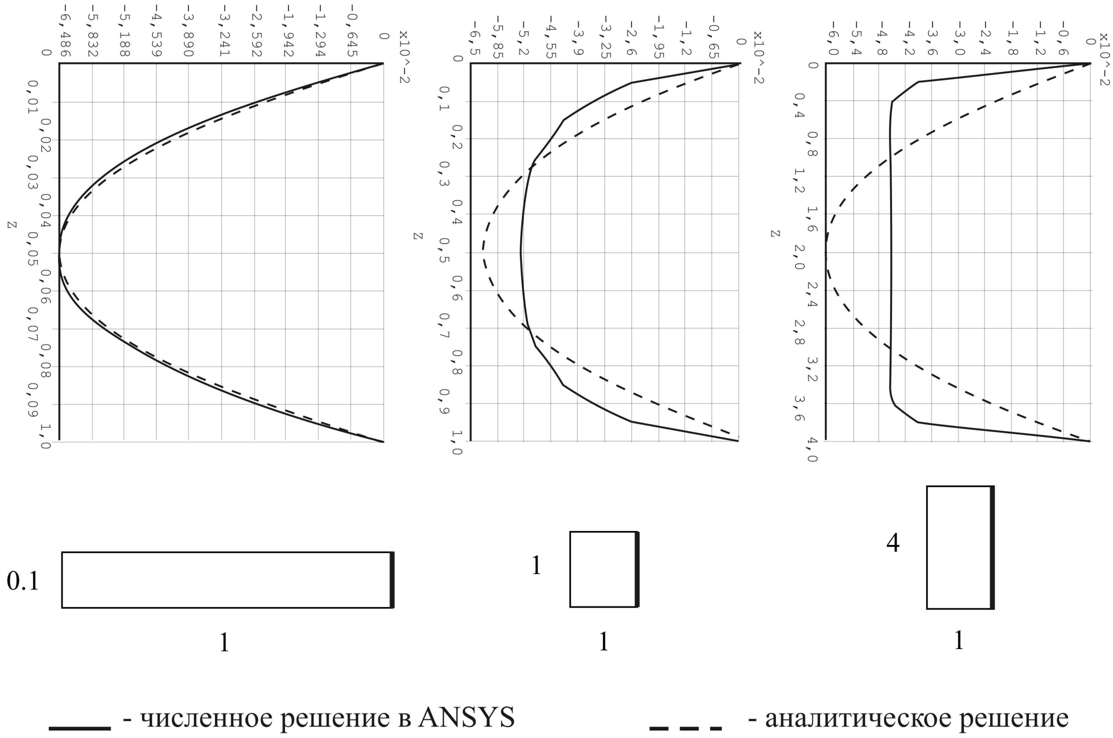


Рис. 2. Форма поверхности деформируемого цилиндра.

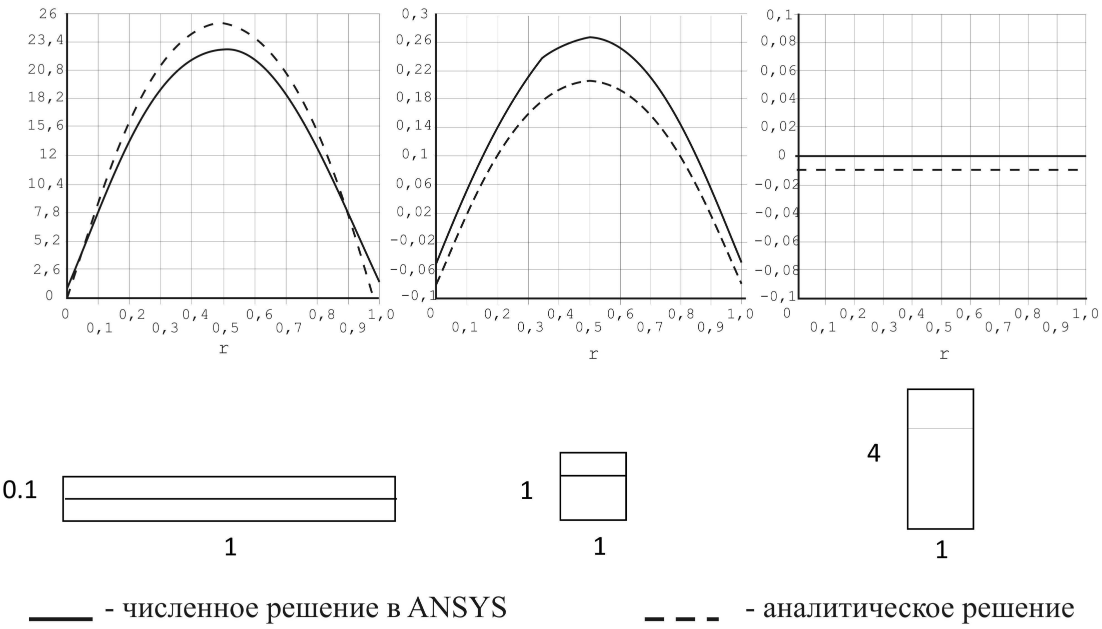


Рис. 3. Радиальное напряжение в растягиваемом цилиндре.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[2] *Суюншкалиев Н. Х.* Некоторые задачи теории конечных деформаций. Ташкент: Изд-во «Фан» Узбекской ССР, 1988. 126 с.

Mayorova O. A. *About semi inverse method aplication to nonlinear elastic cylinder tension research.* In this work we presented a theoretical description of tension of nonlinear elastic incompressible cylinder with rigidly clamped bases for determination of the mechanical properties of biomaterials. The models of incompressible nonlinear elastic materials, which have a solution of the tension problem in the case of the rigid loading based on the hypothesis of the plane sections, are described. A comparison of the found solution and the solution with finite elements (ANSYS) is presented together with a range of the geometric characteristics of the cylinder at which the solution has a physical meaning.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Макарова М. Е., Марчевский И. К.
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Рассмотрена задача моделирования стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды. Для профилей простейших форм методами ТФКП получено точное решение, по которому определяется интенсивность вихревого слоя, моделирующего профиль. Предложена модификация метода вихревых элементов и проведены тестовые расчеты, показывающие эффективность рассмотренного подхода по сравнению с классической расчетной схемой МВЭ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования обтекания неподвижного профиля потоком несжимаемой среды. Уравнения движения среды

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

где $\vec{v}$ — скорость, p — давление, $\rho = \mathrm{const}$ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости среды, могут быть записаны в виде $\dfrac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times ((\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{\Omega})$ относительно $\vec{\Omega}$ — распределения завихренности в области течения. В последнем уравнении $\vec{w}$ — диффузионная скорость, учитывающая влияние вязкости среды [1]. Уравнения движения дополняются граничными условиями затухания возмущений на бесконечности и условиями прилипания (либо непротекания) на профиле, а также соответствующими начальными условиями. Возмущение поля скоростей, вызываемое профилем, эквивалентно влиянию вихревого слоя, расположенного на его поверхности, поэтому задача определения поля скоростей среды может быть сведена к поиску интенсивности вихревого слоя на профиле.

2. Метод вихревых элементов. В вычислительной аэрогидродинамике при применении бессеточных лагранжевых методов вихревых элементов (МВЭ) задача поиска интенсивности вихревого слоя на обтекаемом профиле возникает на каждом шаге расчета [1, 2]. Поэтому от точности ее решения зависит точность метода в целом. Рассмотрим модельную задачу о стационарном безотрывном безвихревом обтекании профиля простой формы потоком идеальной несжимаемой среды, для которой может быть найдено точное решение методами ТФКП [3]. В такой постановке скорость в точке $(x; y)$ области течения можно определить по интенсивности вихревого слоя $\gamma(p_0) = \gamma(x_0, y_0)$, моделирующего профиль, используя закон Био–Савара. Пусть поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)^T$, точка вычисления скорости задается радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, 0)^T$, а точка на границе профиля, по координатам которой ведется интегрирование, — радиус-вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$, тогда $\vec{\gamma}(\vec{r}) = (0, 0, \gamma(\vec{r}))^T$ и

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \oint\limits_{\partial C} \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus C. \tag{1}$$

Предельные значения [2] скорости потока $\vec{v}_\pm(\vec{r})$ на границе профиля ∂C

$$\vec{v}_\pm(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \oint\limits_{\partial C} \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} \pm \left(\frac{\vec{\gamma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right), \quad r \in \partial C, \qquad (2)$$

где $\vec{n}(\vec{r})$ — единичная внешняя нормаль к профилю. Величина $\vec{v}_+(\vec{r})$ соответствует предельному значению скорости со стороны потока, $\vec{v}_-(\vec{r})$ — со стороны профиля. В (1) и (2) вектор $\vec{v}_\infty$ — скорость невозмущенного потока на бесконечности.

Для нахождения неизвестной интенсивности вихревого слоя $\gamma(\vec{r})$ используется условие равенства нулю скорости $\vec{v}_-(\vec{r})$. Можно доказать [2, 4], что для его выполнения в методе вихревых элементов достаточно потребовать равенства нулю либо нормальной, либо касательной компоненты $\vec{v}_-(\vec{r})$.

3. «Классический» метод вихревых элементов, соответствующий обнулению нормальной компоненты скорости [1, 2], предполагает скалярное умножение уравнения (2) на орт нормали к профилю и приводит к интегральному уравнению

$$\oint\limits_{\partial C} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0} = -\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{v}_\infty, \quad r \in \partial C, \qquad (3)$$

Такой подход будем сокращенно называть НМВЭ (метод вихревых элементов с нормальными компонентами скоростей).

Ядро сингулярного интегрального уравнения (3) имеет неинтегрируемую особенность при $|\vec{r} - \vec{r}_0| \to 0$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Его решение существует в силу вида правой части, но не единственно; один из способов выделения единственного решения — задание величины интеграла от решения вдоль контура [2]. Если граница профиля ∂C — гладкая кривая, то единственное решение можно выделить равенством $\oint\limits_{\partial C} \gamma(\vec{r}) dl_r = 0$. Данное условие соответствует отсутствию циркуляции, что при несимметричном обтекании физически неправдоподобно, но корректно с математической точки зрения. Если профиль имеет одну острую кромку (профиль Жуковского), то величина $\oint\limits_{\partial C} \gamma(\vec{r}) dl_r$ определяется, например, из точного решения задачи методами ТФКП.

При численном решении уравнение (3) заменяется системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей вихревых элементов. Граница профиля разбивается на участки — панели. Вся завихренность с панели стягивается в расчетную точку, в которую помещается вихревой элемент с заранее неизвестной интенсивностью, равной произведению средней интенсивности вихревого слоя на панели и длины панели.

Выделение главного значения обеспечивается расчетной схемой, которая предполагает чередование расчетных и контрольных точек. При этом для получения верных результатов контрольные точки, в которых обеспечивается выполнение дискретного аналога уравнения (3), должны располагаться строго посередине между расчетными. Система дополняется условием равенства интеграла от решения по профилю заданной величине циркуляции и становится в общем случае несовместной. Вопросам ее регуляризации посвящен ряд работ, в частности [2].

4. Модифицированный метод вихревых элементов решения интегрального уравнения (2) состоит в обеспечении равенства нулю касательной компоненты $\vec{v}_-(\vec{r})$ на профиле [4]. В результате получаем

$$\oint\limits_{\partial C} Q(\vec{r}-\vec{r}_0)\gamma(\vec{r}_0)dl_{r_0} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}(\vec{r})\cdot\vec{v}_\infty, \quad r\in\partial C. \tag{4}$$

Анализ ядра $Q(\vec{r}-\vec{r}_0) = \dfrac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}(\vec{r})}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$ показывает, что при гладкости контура ∂C оно является ограниченным и $Q\to\dfrac{\kappa}{4\pi}$ при $|\vec{r}-\vec{r}_0|\to 0$, где κ — кривизна профиля.

Этот подход будем сокращенно называть КМВЭ (метод вихревых элементов с касательными компонентами скоростей). Уравнение (4) является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Для его решения также будем разбивать контур на панели, однако расчетная схема может быть достаточно произвольной: в силу ограниченности Q нет жесткого требования к расположению расчетных и контрольных точек. Будем полагать интенсивность вихревого слоя постоянной на каждой панели, при этом интеграл в (4) заменяется суммой интегралов по отдельным панелям, каждый из которых вычисляется аналитически. Равенство нулю касательной компоненты скорости будем обеспечивать не в отдельных контрольных точках, а в среднем на каждой панели; соответствующие интегралы вычисляются численно с использованием квадратурных формул Гаусса.

Поскольку решение уравнения также не является единственным, как и в НМВЭ вводится дополнительное условие, а получаемая система регуляризируется.

5. Результаты расчетов. Ниже на графиках приведены вычисленные НМВЭ и КМВЭ интенсивности вихревых слоев на профиле в сравнении с точными решениями, а в таблицах — погрешности численных решений $\|\Delta\|_{l_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}|\gamma_i-\gamma_i^0|l_i$, $\|\Delta\|_\infty = \max\limits_i|\gamma_i-\gamma_i^0|$, где γ_i — среднее значение интенсивности вихревого слоя на i-й панели, γ_i^0 — точное решение, l_i — длина панели, n — число панелей.

На рис. 1 показаны результаты расчета обтекания эллиптического профиля с соотношением полуосей $a/b=10$, установленного под углом атаки $\beta=\pi/6$.

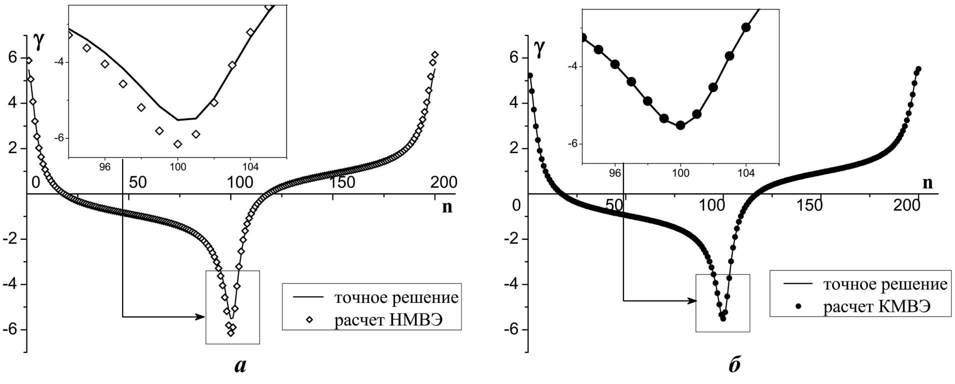


Рис. 1. Интенсивность вихревого слоя при обтекании эллипса ($a/b=10$), рассчитанная методами НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением.

n	50		200		500	
	НМВЭ	*КМВЭ*	*НМВЭ*	*КМВЭ*	*НМВЭ*	*КМВЭ*
Cond$A$	77	264	167	632	375	1011
$\|\Delta\|_{l_1}$	1.3164	0.0009	0.4439	0.0001	0.1876	0.0000
$\|\Delta\|_\infty$	0.4244	0.0082	0.1461	0.0061	0.0613	0.0012

Таблица 1. Расчет обтекания эллиптического профиля ($a/b = 20$).

Число обусловленности матрицы системы в КМВЭ несколько больше, чем в НМВЭ, однако КМВЭ в данном случае позволяет получить на 1–2 порядка более точное решение по сравнению с НМВЭ.

При рассмотрении более тонкого профиля (эллипса с полуосями $a/b = 20$ под углом атаки $\beta = 0$) погрешность НМВЭ даже при $n = 200$ оказывается достаточно большой, в то время как расчет КМВЭ обеспечивает намного бóльшую точность. При увеличении числа панелей погрешность обоих методов уменьшается. Числа обусловленности матриц КМВЭ при этом несколько выше, чем в НМВЭ (табл. 1).

При расчете обтекания симметричного профиля Жуковского с относительной толщиной 20 % под углом атаки $\beta = \pi/6$ наблюдается следующий эффект: при использовании НМВЭ численное решение существенно расходится с аналитическим вблизи острой кромки и на носке профиля, чего не наблюдается в КМВЭ (рис. 2).

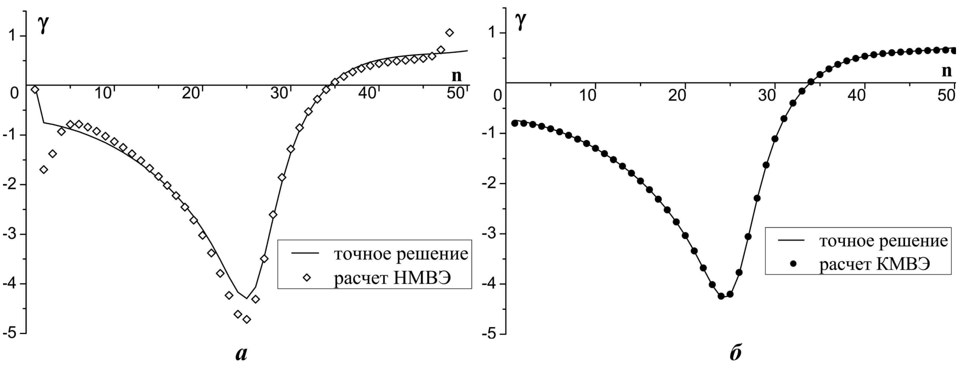


Рис. 2. Интенсивность вихревого слоя при обтекании симметричного профиля Жуковского, рассчитанная методами НМВЭ (а) и КМВЭ (б) в сравнении с точным решением.

При расчетах методом НМВЭ с увеличением числа панелей ошибка численного решения в норме $\|\cdot\|_\infty$ растет, а в норме $\|\cdot\|_{l_1}$ уменьшается; при этом наблюдается сильный рост числа обусловленности матрицы НМВЭ. Для решения, получаемого методом КМВЭ, результаты расчетов показывают сходимость к точному решению в обеих нормах, а число обусловленности матрицы растет не столь сильно и оно существенно меньше числа обусловленности матрицы НМВЭ.

Отмеченные для симметричного профиля Жуковского эффекты проявляются в еще большей мере для несимметричного профиля Жуковского (с относительной толщиной 14 %), установленного под тем же углом атаки $\beta = \pi/6$. В НМВЭ ошибка численного решения при приближении к острой кромке растет катастрофически и становится неприемлемо большой даже при небольших значениях n. Резкий рост

n	50		200		500	
	НМВЭ	*КМВЭ*	*НМВЭ*	*КМВЭ*	*НМВЭ*	*КМВЭ*
Cond$A$	$1.7 \cdot 10^4$	$4.5 \cdot 10^2$	$5.2 \cdot 10^5$	$3.1 \cdot 10^3$	$5.1 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^4$
$\|\Delta\|_{l_1}$	14.903	0.100	11.835	0.010	8.870	0.003
$\|\Delta\|_{\infty}$	118.028	0.138	1638.860	0.072	7933.360	0.051

Таблица 2. Расчет обтекания несимметричного профиля Жуковского.

числа обусловленности матрицы осложняет решение системы линейных уравнений (табл. 2), что также может повлечь серьезную погрешность.

При расчетах КМВЭ ошибка получается весьма малой и уменьшается в обеих нормах с ростом n, числа обусловленности матриц КМВЭ с увеличением n растут медленно, что позволяет без затруднений находить решение.

6. Выводы. Предложена модификация метода вихревых элементов. В отличие от известного подхода, приводящего к сингулярному интегральному уравнению, в данном случае задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Полученные результаты показывают, что при расчете обтекания эллипса с большим эксцентриситетом, а также профилей с острой кромкой данная модификация позволяет получить намного более точное решение, при этом число обусловленности матрицы системы, аппроксимирующей соответствующее интегральное уравнение, существенно ниже, чем при использовании классического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.

[2] *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.

[3] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

[4] *Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H.* Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700, March, 1996.

Makarova M. E., Marchevsky I. K. *Mathematical modeling of flow around an airfoil using modified vortex element method.* The problem of ideal incompressible steady flow simulation around an airfoil is reviewed. For some simplest airfoils the exact solution is known from theory of functions of complex variable. It allows to compute intensity of the vortex layer which simulates the airfoil. The modification of the vortex element method is proposed and test computations are carried out. It's shown that the proposed approach is much more effective in comparison with the classical numerical scheme.

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ РАСТУЩЕЙ ИЗГИБАЕМОЙ ПАНЕЛИ

Манжиров А. В., Лычев С. А.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Исследован класс универсальных деформаций наращиваемых гиперупругих несжимаемых тел. Наращивание осуществляется за счет присоединения предварительно деформированных слоев. Деформации послойно соответствуют преобразованию параллелепипеда в полый круговой цилиндр. Рассмотрены дискретные и непрерывные режимы наращивания. Приведена их классификация.

Универсальные деформации. Рассматриваются универсальные деформациями несжимаемой среды

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \sqrt{2\,(\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{X} + a)\,/b}\;(\mathbf{i}_1\,\cos(b\,\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{X}) + \mathbf{i}_2\sin(b\,\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{X})) + \mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{X}. \tag{1}$$

Здесь a, b — параметры деформации (1), которые ниже полагаются константами, либо дифференцируемыми функциями координаты r. В локальном базисе цилиндрической системы координат $\{\mathbf{e}_r,\, \mathbf{e}_\theta,\, \mathbf{e}_z\}$ поле мест $\mathbf{x}$ имеет представление

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad r = \sqrt{2(X+a)/b}, \quad \theta = bY.$$

Для деформаций вида (1) левый тензор Коши–Грина может быть представлен следующим разложением

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{b^2r^2}\,\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r + b^2\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z\otimes\mathbf{e}_z, \tag{2}$$

$$I_1 = \boldsymbol{I}:\boldsymbol{B} = 1 + \frac{1}{b^2r^2} + b^2r^2, \quad I_2 = \boldsymbol{I}:\boldsymbol{B}^{-1} = I_1, \quad I_3 = 1. \tag{3}$$

Для определения отклика несжимаемой изотропной гиперупругой среды на деформацию (1) следует задать конкретную форму потенциала $W = W(I_1, I_2)$, определяющего удельную потенциальную энергию деформирования. Напряжения Коши (истинные напряжения) $\boldsymbol{T}$ могут быть определены с точностью до гидростатического давления p следующим образом

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + J_1\boldsymbol{B} + J_{-1}\boldsymbol{B}^{-1},$$

где $J_1 = 2\partial W/\partial I_1$, $J_{-1} = -2\partial W/\partial I_2$ — коэффициенты реакции материала. Гидростатическое давление p определяется из уравнений равновесия

$$\frac{T^{rr}}{r} - rT^{\theta\theta} + \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} = 0, \quad \frac{T^{\theta\theta}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{T^{zz}}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Из последних двух уравнений (4) вытекает, что $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(r)$, а решение первого может быть записано в квадратурах

$$T^{rr} = \int \left(rT^{\theta\theta} - \frac{T^{rr}}{r}\right) dr = T^{rr} = \int (J_1 - J_{-1})\left(b^2r - \frac{1}{b^2r^3}\right) dr. \tag{5}$$

Полученные выше выражения для напряжений остаются справедливыми, если считать параметр b функцией переменной r. Если же полагать, что $b = \text{const}$, и учесть явные выражения для инвариантов $I_1 = I_2$ (3), то можно показать, что

$$p = J_1 \frac{1}{b^2 r^2} + J_{-1} b^2 r^2 - W - p_0.$$

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений, возникающие в материале Муни–Ривлина (μ, β — упругие модули) определяются соотношениями

$$T^{rr} = W + p_0, \quad T^{\theta\theta} = \frac{\mu}{2}\left(3b^2 - \frac{1}{b^2 r^4}\right) + \frac{p_0}{r^2},$$
$$T^{zz} = p_0 + \mu b^2 r^2 - \frac{\mu\beta(b^2r^2-1)^2}{2b^2r^2}.$$

Деформации вида (1) принадлежат классу контролируемых деформаций, т. е. они могут быть реализованы, если к граничным поверхностям приложить специальным образом подобранные поверхностные силы. Поскольку математическое определение деформаций (1) содержит параметры a, b, а поле напряжений определяется с точностью до постоянной p_0, оказывается возможным удовлетворить заранее заданным краевым условиям на некоторых граничных поверхностях поточечно, а на остальных интегрально. К граничным поверхностям первого типа относятся цилиндрические поверхности π_0, π_1, которые аналитически задаются соотношениями $r = r_0$, $r = r_1$:

$$r_0 = \sqrt{\frac{2a}{b}}, \quad r_1 = \sqrt{\frac{2(a+\Delta)}{b}}.$$

На этих поверхностях может быть задано постоянное давление интенсивностью q_0, q_1 соответственно, что приводит к системе двух нелинейных уравнений относительно a и p_0:

$$W\Big|_{r=\sqrt{2a/b}} = q_0 - p_0, \quad W\Big|_{r=\sqrt{2(a+\Delta)/b}} = q_1 - p_0. \tag{6}$$

Если коэффициенты реакции — константы, то ее решения могут быть найдены в замкнутой форме. В этом случае система (6) принимает вид

$$2ba + \frac{1}{2ba} = \frac{2}{\mu}\left(q_0 - p_0\right), \quad 2b(a+\Delta) + \frac{1}{2b(a+\Delta)} = \frac{2}{\mu}\left(q_0 - p_0\right) + 2\delta. \tag{7}$$

где $\left(q_1 - q_0\right)/\mu = \delta$. Посредством исключения p_0 система (7) преобразуется к квадратному уравнению относительно a:

$$a^2 + \Delta a - \frac{\Delta}{4b(\Delta b - \delta)} = 0. \tag{8}$$

Если $\delta < b\Delta$, то дискриминант уравнения (8) положителен. Из двух корней уравнения (8) следует выбрать положительный

$$a = \frac{\Delta}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\Delta b(\Delta b - \delta)}} - 1\right), \quad p_0 = q_0 - \mu\left(ba + \frac{1}{4ba}\right). \tag{9}$$

Определенным таким образом параметрам a и p_0 соответствуют в актуальном состоянии радиусы граничных цилиндрических поверхностей

$$r_0 = \frac{1}{b\sqrt{D_0}}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{D_0}}{b\sqrt{1-\frac{\delta}{\Delta b}}}, \quad D_0 = \Delta b - \delta + \sqrt{(\Delta b - \delta)^2 + 1 - \frac{\delta}{\Delta b}}. \tag{10}$$

На плоских граничных поверхностях $\theta = \mathrm{const}$ ω_0, ω_1 форма распределения напряжений предписана выбранной деформацией (1), однако главные значения усилий на этих поверхностях зависят от параметра b и могут быть выбраны так, чтобы условия на поверхностях ω_0, ω_1 удовлетворялись интегрально. Напряжения на этих поверхностях поверхностях, как и на любой поверхности $\theta = \mathrm{const}$, определяются выражениями

$$\mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} \cdot \boldsymbol{T} = \mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} \left(p_0 + \frac{\mu}{2}\left(3b^2r^2 - \frac{1}{b^2r^2}\right)\right), \quad \mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} = r\mathbf{e}_\theta.$$

Соответствующий им главный вектор $\mathbf{F}$ может быть найден по формуле

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} h \left(p_0\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\mu}{2}\left(b^2\left(r_1^3 - r_0^3\right) + \frac{1}{b^2r_1} - \frac{1}{b^2r_0}\right)\right). \tag{11}$$

Дискретное наращивание. Рассмотрим конечные множества Ω тел, которые в отсчетной ненапряженной конфигурации представляют собой параллелепипеды $\iota^k \subset \mathrm{E}$, $k = 1, 2, \ldots n$, деформируемые преобразованием (1) в кольцевые области $\phi^k \subset \mathrm{E}$, т.е. полые круговые цилиндры, основания которых лежат в плоскостях Π_0 и Π_1. Будем полагать, что стороны оснований Δ^k и h^k параллелепипедов ι^k одинаковы, т.е. $\Delta^k = \Delta$, $h^k = h$, а их высоты H^k, вообще говоря, различны. Тот факт, что результатом деформирования являются кольцевые области, а не их секторы, выражается соотношением $b^k = 2\pi/H^k$. Кроме того, будем полагать, что образы ϕ^k актуальных конфигураций элементов Ω попарно не пересекаются, а их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \phi^k$ представляет собой кольцевую область в E. Полученное в результате деформированное тело можно рассматривать как результат дискретного наращивания, если полагать, что после такой сборки на контактирующих поверхностях устанавливаются связи, препятствующие независимому деформированию элементов Ω.

Тип 1. Наращивание с заданной отсчетной геометрией. Заданы высоты $H^1, H^2 \ldots, H^n$ слоев в отсчетном состоянии, и, следовательно, $b^1 = 2\pi/H^1$, …, $b^n = 2\pi/H^n$. Требуется отыскать значения параметров a^k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Используем геометрические условия контакта слоев, а также условия нагружения внутренней цилиндрической граничной поверхности π_0^1 первого слоя и внешней цилиндрической граничной поверхности π_1^n последнего: $\delta^1 + \delta^2 + \ldots + \delta^n = \delta$, где δ определяется по формуле $\delta = \left(q_1^n - q_0^1\right)/\mu$, причем q_0^1 — давление на поверхности π_0^1, а q_1^n — на поверхности π_1^n. Если эти поверхности свободны от напряжений, то $\delta = 0$. Выражения для радиусов поверхностей контакта определяются соотношениями (10). Таким образом, приходим к системе n уравнений относительно параметров δ^n:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta^k=\delta,\quad \frac{\Delta b^k-\delta^k+\sqrt{(\Delta b^k-\delta^k)^2+1-\delta^k/(\Delta b^k)}}{(b^k)^2-b^k\delta^k/\Delta}=$$
$$=\frac{\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1}+\sqrt{(\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1})^2+1-\delta^{k+1}/(\Delta b^{k+1})}}{(b^{k+1})^2-b^{k+1}\delta^{k+1}/\Delta},\quad k=1,\ldots,n-1.\quad (12)$$

Тип 2. Наращивание с заданной актуальной геометрией. Значения параметров b^k и a^k не известны. Задан радиус R внешней граничной поверхности крайнего слоя. Рассматривается последовательность сборок из одного, двух и более элементов множества Ω, т. е. области $\hat{\phi}^1=\phi^1,\quad \hat{\phi}^2=\phi^1\cup\phi^1,\quad \ldots\quad \hat{\phi}^m=\phi^1\cup\phi^1\cup\ldots\cup\phi^m$. Каждой m-сборке $\hat{\phi}^m$ соответствует система уравнений относительно $m+1$ неизвестной $\{b^m,\delta^1,\delta^2,\ldots\delta^m\}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta^n=\delta,\quad \frac{\Delta b^k-\delta^k+\sqrt{(\Delta b^k-\delta^k)^2+1-\delta^k/(\Delta b^k)}}{(b^k)^2-b^k\delta^k/\Delta}=$$
$$=\frac{\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1}+\sqrt{(\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1})^2+1-\delta^{k+1}/(\Delta b^{k+1})}}{(b^{k+1})^2-b^{k+1}\delta^{k+1}/\Delta},\quad k=1,\ldots,m-1$$
$$R^2=\frac{\Delta b^m-\delta^m+\sqrt{(\Delta b^m-\delta^m)^2+1-\delta^m/(\Delta b^m)}}{(b^m)^2-b^m\delta^m/\Delta}.\quad (13)$$

Осуществляется последовательное решение систем: вначале решается система двух уравнений для 1-сборки $\hat{\phi}^1$, из которой определяются b^1,δ^1, затем, полагая b^1 известным, решается система для 2-сборки $\hat{\phi}^2$ относительно b^2,δ^1,δ^2, и так далее. Обратим внимание на то, что параметры δ^k пересчитываются на для каждой сборки заново.

Тип 3. Наращивание с заданным натягом. Значения параметров b^k и a^k не известны. Задан натяг F в крайнем слое. Рассматривается последовательность сборок $\hat{\phi}^m$. Каждой m-сборке соответствует система уравнений относительно $m+1$ неизвестной $\{b^m,\delta^1,\delta^2,\ldots\delta^m\}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta^n=\delta,\quad \frac{\Delta b^k-\delta^k+\sqrt{(\Delta b^k-\delta^k)^2+1-\delta^k/(\Delta b^k)}}{(b^k)^2-b^k\delta^k/\Delta}=$$
$$=\frac{\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1}+\sqrt{(\Delta b^{k+1}-\delta^{k+1})^2+1-\delta^{k+1}/(\Delta b^{k+1})}}{(b^{k+1})^2-b^{k+1}\delta^{k+1}/\Delta},\quad k=1,\ldots,m-1,$$
$$F=\mathcal{F}(b^m,\delta^m).\quad (14)$$

где символом $\mathcal{F}$ обозначено выражение, которое получается в результате подстановки (10), (9) в соотношение (11). Алгоритм решения последовательности систем тот же, что и рассмотренный выше.

Непрерывное наращивание. Параметр b заменяется непрерывной функцией $b=b(t)$, которую будем называть параметром дисторсии. Это позволяет описать непрерывное наращивание, реализуемое как непрерывный процесс присоединения материальных поверхностей. Тензорное поле $\boldsymbol{F}$ теперь не является градиентом никакой деформации, реализуемой в E.

Тип 1. Наращивание с заданной дисторсией. Параметр дисторсии задан как функция $b = b(r)$, причем полагаем, что она отлична от функции $1/r$. Задан объем присоединенного материала V и заданы давления q_0 и q_1 на цилиндрических граничных поверхностях π_0 и π_1 соответственно. Неизвестными являются: r_0 — внутренний радиус, r_1 — внешний радиус, p_0 — постоянная составляющая гидростатического давления. Для их нахождения решается система уравнений

$$T^{rr}\Big|_{r=r_0} = q_0, \quad T^{rr}\Big|_{r=r_1} = q_1, \quad \pi h\left(r_1^2 - r_0^2\right) = V. \tag{15}$$

которая может быть представлена в следующей форме

$$p_0 = q_0, \quad \mu \int_{r_0}^{r_1} \left(b^2(\zeta)\zeta - \frac{1}{b^2(\zeta)\zeta^3} \right) d\zeta + p_0 = q_1, \quad \pi h\left(r_1^2 - r_0^2\right) = V.$$

Дискретизация этого уравнения приводит к системе уравнений, подобной (12).

Тип 2. Наращивание с заданным положением поверхности роста. Объем присоединенного материала задается как функция времяподобного параметра $\tau \in (0, t)$, т. е. $V = V(\tau)$. Задано положение границы роста $r_1(\tau)$. Как и в предыдущем случае, заданы давления $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$ на граничных поверхностях π_0 и π_1. Заметим, что они теперь являются функциями параметра τ. Требуется определить функцию дисторсии $b(r)$, а также функции $r_0(\tau)$, $p_0(\tau)$. Они определяются из системы уравнений (15), которая приводится к интегральному уравнению

$$\mu \int_{\sqrt{r_1(\tau)^2 - V/(\pi h)}}^{r_1(\tau)} \left(b^2(\zeta)\zeta - \frac{1}{b^2(\zeta)\zeta^3} \right) d\zeta + q_0(\tau) = q_1(\tau).$$

Дискретизация этого уравнения приводит к системе уравнений, подобной (13).

Тип 3. Наращивание с заданным натягом. Как и выше, задается объем присоединенного материала $V = V(\tau)$, давления $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$ на граничных поверхностях π_0 и π_1 и поверхностные напряжения (натяг) $g(\tau)$ на границе роста. Требуется определить функцию дисторсии $b(r)$, а также функции $r_0(\tau)$, $r_1(\tau)$ и $p_0(\tau)$. Они определяются из условий

$$T^{rr}\Big|_{r=r_0} = q_0(\tau), \quad T^{rr}\Big|_{r=r_1} = q_1(\tau), \quad r^2 T^{\theta\theta}\Big|_{r=r_1} = g(\tau), \quad \pi h\left(r_1^2 - r_0^2\right) = V(\tau),$$

которые теперь приводятся к системе уравнений

$$q_1 + \mu\left(b^2 r^2 - \frac{1}{b^2 r^2} \right) = g(\tau), \quad \mu \int_{\sqrt{r_1(\tau)^2 - V/(\pi h)}}^{r_1(\tau)} \left(b^2(\zeta)\zeta - \frac{1}{b^2(\zeta)\zeta^3} \right) d\zeta + q_0(\tau) = q_1(\tau).$$

Дискретизация этого уравнения приводит к системе уравнений, подобной (14).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00669_а, 09-08-01194_а, 09-08-01180_а, 11-08-93967-ЮАР_а) и Программы ОЭММПУ РАН № 13.

Manzhirov A. V., Lychev S. A. *Finite Deformations of Accreted Bending Panel*. A new class of universal deformations of accreted hyperelastic incompressible solids is studied. Their accretion goes due to the deposition of prestressed layers. The deformations of each layer correspond to the transformation of a parallelepiped into a hollow circular cylinder. Discrete and continues modes of accretion are considered. Their classification is presented.

АЛГОРИТМ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ВО ВНЕШНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Марковский А. Н.
Кубанский государственный университет, Краснодар

В работе рассматривается классическая задача о движении точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Функция тока такого течения может быть представлена в виде суммы точечных вихрей с заданными интенсивностями плюс потенциал простого слоя, плотность которого (плотность вихрей на границе) требуется определить. Используя полную на границе систему потенциалов, искомая плотность может быть восстановлена. Приводится алгоритм вычисления траекторий движения точечных вихрей.

1. Постановка задачи. Обозначим внешность ограниченной односвязной области Q с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ через

$$Q^+ = R^2 \backslash \bar{Q}.$$

В области Q^+ рассмотрим точечные вихри $z_k = \{x_k, y_k\}$ с заданными интенсивностями Γ_k, $k = 1, 2, .., N$. Центры вихрей $z_k = z_k(t)$ переносятся возникающим течением и индуцируемое поле скоростей $\mathbf{w}(z, t)$ удовлетворяет в области Q^+ следующим условиям: $div\,\mathbf{w} = 0$; $rot\,\mathbf{w} = 0$ при $z \neq z_k$; $\mathbf{w}(\infty, t) = 0$; граница S — линия тока. Требуется определить векторное поле $\mathbf{w}$ в каждый момент времени, а также траектории вихрей.

2. Функция тока. Известно, что функция тока $\Psi(z)$ в каждый момент времени t удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Psi(z) = -\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \delta(z - z_k(t)),\ z \in Q^+,$$

где δ — дельта функция.

Для данного положения вихрей z_k, $k = 1, 2, .., N$, функцию тока $\Psi(z)$ будем определять в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k E(z - z_k) + \int_S q(\zeta) E(z - \zeta)\, dS_\zeta,\ z \in Q^+, \quad (1)$$

где $E(z)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2; функцию $q(\zeta)$ требуется определить так, чтобы выполнялось условие непротекания

$$\Psi(z) \equiv B = const,\ z \in S. \quad (2)$$

Справедливо утверждение [1]: если потенциал Робена на S не равен нулю, то существует и единственна функция $q(\zeta)$ в представлении (1) такая, что выполняется условие (2).

3. Системы потенциалов, полные на границе. Потенциал простого слоя

$$R(z) = \int_S \varphi^*(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta,\ z \in \bar{Q}^+,$$

для которого выполняется условие на границе $R(z)|_S = R_0$, называется потенциалом Робена [2]; функция $\varphi^*(\zeta)$ и константа R_0 называются соответственно плотностью и постоянной Робена.

В $L_2(S)$ возьмём подпространство $L_2^\varphi(S)$, ортогональное φ^*, так что

$$L_2(S) = \{\varphi^*\} \oplus L_2^\varphi(S).$$

Пусть последовательность точек b^m, $m = 1, 2, ...$, принадлежит области Q, отделена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций.

Справедливо утверждение [1]: система $\alpha_m^-(z) = E(b^{m+1} - z) - E(b^m - z),\ z \in S$, линейно независима и полна в $L_2^\varphi(S)$.

4. Аппроксимация плотности вихрей. Любая функция из $L_2(S)$ может быть разложена на ортогональные слагаемые,

$$q(\zeta) = c_0\varphi^*(\zeta) + h(\zeta),\ \zeta \in S,$$

где функция h принадлежит пространству $L_2^\varphi(S)$ и $c_0 \neq 0$, так как $(1, \varphi^*) \neq 0$.

Пусть h^M — проекция h на подпространство $\{\alpha_m^-(\zeta)\}_{m=1}^M$,

$$h^M(\zeta) = \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-(\zeta),$$

то есть $h = h^M + \rho_M(\zeta)$, где $\rho_M \perp \alpha_m^-$, $m = 1, 2, ..., M$ и $\rho_M \to 0,\ M \to \infty$.

Тогда аппроксимация $q^M(\zeta)$ функции $q(\zeta)$ — плотности вихрей, есть

$$q^M(\zeta) = c_0\varphi^*(\zeta) + \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-(\zeta). \tag{3}$$

Подставим (3) в выражение (1), и рассмотрим разность результата в точках b^{n+1} и b^n, $n = 1, 2, ..., M$, имеем

$$\Psi(z)\Big|_{b^n}^{b^{n+1}} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k E(z - z_k)\Bigg|_{b^n}^{b^{n+1}} + \int_S \left[c_0\varphi^* + \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-\right] E(z-\zeta)\, dS_\zeta\Bigg|_{b^n}^{b^{n+1}}. \tag{4}$$

Поскольку функция тока $\Psi(z)$ — гармоническая в Q и на границе принимает постоянное значение, то она тождественно постоянна в области Q и выражение в левой части (4) равно нулю. Согласно обозначениям введённым выше, выражение (4) запишется в виде

$$\sum_{m=1}^M c_m(\alpha_m^-, \alpha_n^-) = -\sum_{k=1}^N \Gamma_k \alpha_n^-(z_k),\ n = 1, 2, ..., M,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(S)$.

Таким образом для определения коэффициентов c_m, $i=1,2,...,M$, имеем систему линейных уравнений с матрицей Грама.

Константу c_0 можно положить равной нулю, исключая тем самым из решения чисто циркуляционное обтекание области Q.

Таким образом аппроксимация $\Psi^M(z)$ функции тока $\Psi(z)$ представляется в виде

$$\Psi^M(z)=\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k E(z-z_k)+\sum_{m=1}^{M}c_m\int_S \alpha_m^-(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta,\ z\in Q^+.$$

Для задачи движения точечных вихрей в ограниченной области можно использовать алгоритм представленный в работе [3].

5. Движение точечных вихрей. В текущий момент времени поле скоростей $\mathbf{w}$ определяется коградиентом $\nabla_c\Psi(z)$ функции тока, и каждый вихрь будет эволюционировать согласно закону

$$\dot{z_k}=\nabla_c\Psi(z_k)=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y),-\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y)\right\}\Bigg|_{(x,y)=(x_k,y_k)},\ k=1,2,...,N.$$

Функция $\Psi(z)$ имеет особенность в z_k, но она не влияет на движение k-го точечного вихря: записывая уравнения движения, мы можем вычесть вклад влияния этого вихря на себя [4].

Работа поддержана проектом РФФИ 11-01-96511 и проектом 2.1.1/3828 программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Министерства образования науки Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лежнев М. В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009. 134 с.

[2] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

[3] *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* О движении точечных вихрей в ограниченной области // Труды КРОМШ-2004. Спектральные и эволюционные задачи. Т. 15. 2004. С. 127–131.

[4] *Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А.* Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 704 с.

Markovskiy A. N. *The algorithm of a point vortices motion in the exterior of a bounded region* . This article we consider the classical problem of motion of point vortices in an ideal incompressible fluid. The function of the current flow can be represented as a sum of point vortices with a given intensity, plus single-layer potential whose density (the density of vortices at the boundary) need to be determined. The required density can be recovered using the complete at the boundary system of potentials. Algorithm for calculating the trajectories of the vortices is included.

КИНЕТИКА РОСТА ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В МЕЖЗЕРЕННОЙ ПЛЕНКЕ СТЕКЛОФАЗЫ ПРИ СПЕКАНИИ КЕРАМИКИ

Мартынов Р. Э.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Численное исследование условия роста газового пузырька, за счет переноса растворенного газа через массив стекломассы. Установлены условия для роста газового пузырька данного размера. Расчеты применены для оценки образования дефектов в керамики при её спекании.

Введение. Известно, что при спекании керамики в жидкой фазе (стеклофаза), заполняющей пространство между крупинками порошка при высокой температуре, образуются несплошности (пузырьки).

Обычно стеклофаза образует межзеренную пленку толщиной 10 нм, в которой критический размер пузырька превышает данный размер. По этой причине пузырек всегда образуется на границе кристаллит–стеклофаза и подчиняется условиям зарождения.

Дальнейшее исследование условий зарождения несплошностей обусловлены соотношением

1) кинетики проникания примесей, снижающих адгезионную прочность границы стеклофаза–кристаллит

2) скоростью удаления соседних кристаллитов друг от друга

Для определения условий образования пузырьков в стеклофазе важна оценка кинетики насыщения газом слоя стеклофазы в процессе спекания керамики до величины концентрации растворенного газа c , которая заметно влияет на условие зарождения пузырьков. В связи с этим в [1] рассмотрен процесс газонасыщения стеклофазы. Стеклофаза описывается как слой вязкой жидкости переменной толщины $\delta(t)$, меняющейся за счет расхождения пары зерен перпендикулярно слою.

Эволюция концентрации c растворенного в стеклофазе газа обусловлена процессом сорбции газовой фазы на поверхности мениска и диффузии растворенного газа внутрь слоя, которой помогают растягивающие напряжения в стеклофазе. Цель настоящей работы заключается в уточнении результатов расчета [1] миграции атомов газа в межзеренный слой стеклофазы при учете роста газового пузыря. Численные расчеты выполнены для стеклорасплава B_2O_3.

Постановка задачи. Предположим, что в начальный момент времени пузырек отсутствует, а слой стеклофазы имеет в плане форму диска радиуса $R = R_0$ и толщину $\delta = \delta_0$, материал стеклофазы несжимаем, а ее боковая поверхность образует круговой мениск радиуса r_m.

При высокой температуре $T > 1000$ K возможно рассмотрение стеклофазы как вязкой жидкости. В этом случае равновесное распределение давления $p(r)$ в стеклофазе описывается выражением [1]

$$p(r,t) = 3\eta\frac{\dot{\delta}}{\delta^3}(R^2 - r^2) + \frac{2\gamma_l\cos(\theta)}{\delta} \qquad (1)$$

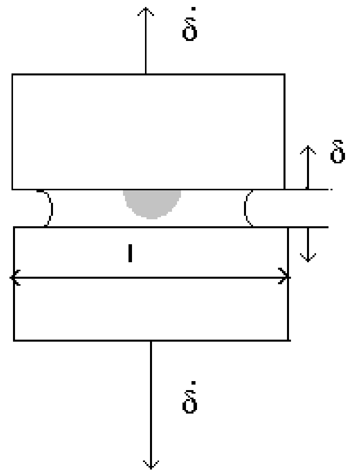


Рис. 1. Межзеренная пленка стеклофазы.

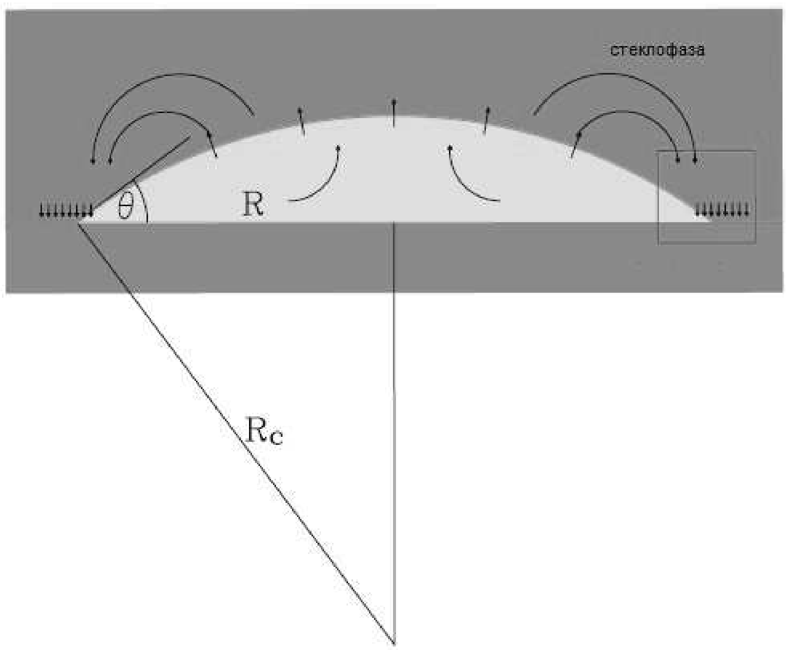


Рис. 2. Углы смачивания стеклофазы.

где $\dot{\delta}$ — скорость изменения δ, θ — угол смачивания стеклофазой поверхности зерен керамики, $\eta(T)$ — вязкость стеклофазы (в Па·с) при температурах выше температуры стеклования T_g[1]

$$\ln(\eta(T)) = -3,5 + \left(\frac{\beta}{\lg T - \lg T_g}\right) \tag{2}$$

где для стеклорасплава B_2O_3, $\beta = 15$, $T_g = 478K$, $n = 1,74$.

Рассмотрим теперь диффузию газа в этом слое с учетом распределения давления $p(r,t)$ в нем. Уравнение термомеханодиффузии газа (эффект Конобеевского–

Горского) [1] вдоль слоя имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla\left(\frac{D_c}{k_B T}\nabla\mu\right) \tag{3}$$

где химический потенциал слабого раствора газа

$$\mu = k_B T \ln\left(c/c_0\right) - \Omega p(r,t)$$

где $\Omega = N^{-1}$, $D(T) = D_0 T \exp\left(-\dfrac{E_D}{k_B T}\right)$ — коэффициент диффузии газа в стеклофазе, D_0 — постоянная, E_D — энергия активации процесса диффузии, N — число мест возможного расположения атомов газа в единице объема стеклофазы. Вид $D(T)$ — выбран для стеклорасплава B_2O_3 .

Начальное условие для (3) $c(r,0) = c_{0s}$, где c_{0s} — концентрация газа в отсутствии внешней нагрузки, а граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad -D\frac{\partial c}{\partial r} = h(c^2 - (\Gamma')^{-1}p^* \text{ при } r = R \tag{4}$$

где h — постоянная газового массообмена на поверхностях менисков, Γ' — модифицированная постоянная Генри, а p^* определено согласно формулы Томсона–Фрейндлиха [1]

$$\ln\left[\frac{p^*}{p_0}\right] = \ln\left[\frac{c^*}{c_0}\right] = \frac{2M\gamma_l}{r_m R^* T\rho} \tag{5}$$

В (5) p_0 и c_0 равновесные давления и концентрации газа над плоской поверхностью стеклофазы, M — молекулярная масса стеклофазы, R^* — газовая постоянная, ρ — плотность стеклофазы, удельная поверхностная энергия стеклофазы γ_l определена формулой[1]

$$\gamma_l = \gamma_{l0}\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right)^{2/3}(2-\cos(\theta))^{1/3} \tag{6}$$

В (6) γ_{l0} — удельная поверхностная энергия плоской поверхности стеклофазы. Оценки (5) показали, что для участков поверхностей стеклорасплава с радиусом кривизны $r_m \leqslant 20$ нм выражение в правой части (5) заметно отличается от 1. На поверхности пузырька задано второе граничное условие из (4)

Система уравнений (1–6) решалась численно, методом конечных элементов (пакет FlexPDE5). Для расчетов использованы следующие ззначения постоянных

B_2O_3 : $a = 3\cdot 10^{-7}$ м^2/с, $M = 70$ г, $\gamma_{l0} = 0,1$ Дж/м^2, $\rho = 2400$ кГ/м^3, $R^* = 8,3$ Дж(моль·К), $T = 1500$ К, $p_0 = 0,1$ МПа, $\Omega = 10^{-29}$ м^3, $R_0 = 10^{-6}$ м, $D_0 = 9,3\cdot 10^{-11}$ м^2/(с· К), $E_D = 20$ кДж/моль [1], $h = 1$ м/с, $\delta_0 = 10^{-9}$ м. Закон расхождения пары зерен выбран в виде: $\delta(t) = \dot{\delta}t + \delta_0$, где $\dot{\delta}/\delta = 10^{-2}$ с$^{-1}$.

Результаты расчёта. На рис. 2, 3 показаны распределиния безразмерной концентрации растворенного газа c/c_{0s} при величине радиуса пузырька $R_b = \dfrac{\delta_0}{8}$ и

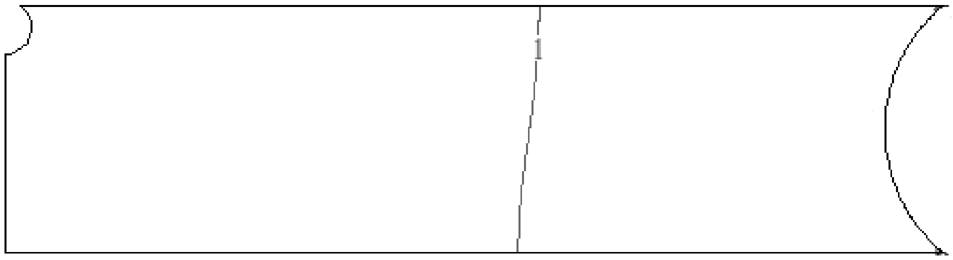


Рис. 3. Концентрация газа $c/c_{0s} = 0,025$ при $R_b = \dfrac{\delta_0}{8}$.

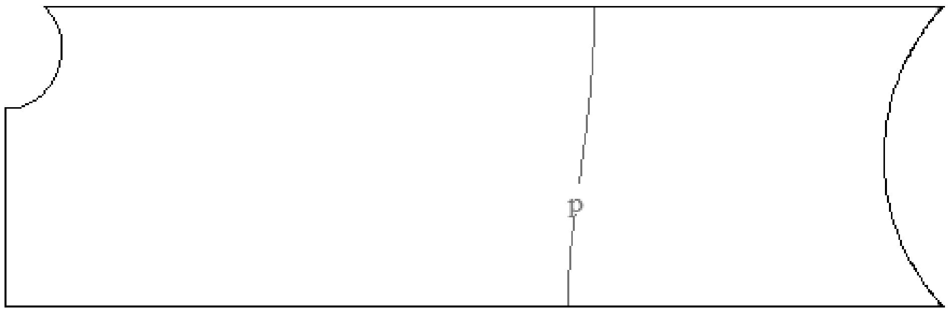


Рис. 4. Концентрация газа $c/c_{0s} = 0,05$ при $R_b = \dfrac{\delta_0}{4}$.

$R_b = \dfrac{\delta_0}{4}$. Сравнение полученных распределений с аналогичными распределениями в отсутствии растущего пузырька [1] позволяет сделать вывод о существенном перераспределении растворенного газа в слое стеклофазы из-за появления несплошности в ней.

Автор благодарит Карпинского Д. Н. за постановку задачи и помощь в ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Карпинский Д. Н., Панчихина Г. И.* Термодинамика и кинетика декогезии межзеренной газонасыщенной пленки при спекании керамики // Материаловедение, 2006, № 5. С. 25–28.

Martinov R. E. *Growth kinetics of the gas bubble in the intergranular film glass phase during sintering of ceramics*. Distributions of concentration of the dissolved gas in a layer glassphase are received at ceramics sintering. Calculation considers occurrences of a gas vial in the layer center. Comparison of results of calculations with early researches shows the appreciable contribution of a drain of the dissolved gas to a vial cavity. The received results can be used at a choice of a mode of sintering which warns occurrences uncontinuity into bake ceramics.

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Минченко Д. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В данной работе исследуются большие деформации высокоэластичной безмоментной цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением (либо разрежением) и продольной растягивающей силой, приложенной на одном из торцов. Радиус поперечного сечения на торцах оболочки считаем неизменным. Целью работы является определение характеристик, связывающих нагрузки и деформации для оболочек из различных резиноподобных материалов с заданными геометрическими параметрами. Решение задачи осуществляется численным методом. Построены графики распределения напряжений и деформаций по длине оболочки.

1. Введение.

Тонкостенные оболочки из резиноподобных материалов получили большое распространение в современой технике. Они используются при постройке различных надувных сооружений, гибких трубопроводов, в изготовлении водяных насосов и воздушных компрессоров. Во многом это обусловлено способностью таких оболочек сохранять целостность при высоких деформациях и большом количестве циклов нагружения-разгрузки. Распределение напряжений по длине оболочки круглого сечения с постоянным радиусом, а также изменение ее формы под воздействием осевой растягивающей нагрузки и внутреннего давления (разрежения) представляют значительный интерес. Увеличение в наше время количества работ, рассматривающих большие деформации тонкостенных конструкций, свидетельствует об актуальности данной темы. Заметный вклад в развитие нелинейной теории оболочек внесли И. И. Ворович, Л. М. Зубов [1, 2, 3], К. З. Галимов, A. Libai [4], A. E. Green, J. G. Simmonds [4] и другие.

2. Уравнения равновесия.

Пусть поверхность оболочки в начальной конфигурации o представляет собой круговой цилиндр длиной l, радиуса r, с образующей, параллельной орту $\boldsymbol{i}_3$. Положение $\boldsymbol{p}$ точки ее поверхности определяется в декартовой системе координат с помощью двух гауссовых координат q^1, q^2 следующим образом:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_r + z(q^1)\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}_1 \cos q^2 + \boldsymbol{i}_2 \sin q^2.$$

Здесь $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ — орты декартовой прямоугольной системы координат, q^1 — расстояние, отсчитываемое по оси цилиндра, q^2 — полярный угол. Пусть оболочку растянули вдоль продольной оси и нагрузили равномерно распределенным нормальным давлением ξ. Поверхность оболочки после деформации обозначим O. Тогда, рассматривая параметры q^1 и q^2 как лагранжевы координаты, положение точки деформированной поверхности можно задать радиус-вектором $\boldsymbol{P}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{P} = R(q^1)\boldsymbol{e}_r + Z(q^1)\boldsymbol{i}_3. \qquad (1)$$

В такой постановке задачи компоненты метрических тензоров недеформированной и деформированной поверхностей оболочки не зависят от координаты q^2 и образуют диагональную матрицу [3]

$$g_{11} = r^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

$$G_{11} = R^2, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = R'^2 + Z'^2,$$

$$B_{11} = -\frac{RZ'}{\sqrt{Z'^2 + R'^2}}, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = \frac{Z'R'' - R'Z''}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}.$$

В этом случае уравнения равовесия упругой мембраны сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{gathered} \frac{\partial \nu^{22}}{\partial q^1} + \nu^{22}(\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12}) + \nu^{11}\Gamma^2_{11} + \xi^2, \\ \xi^1 = 0, \quad \nu^{22}B_{22} + \nu^{11}B_{11} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\nu^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора усилий типа Коши, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ символы Кристоффеля второго рода [3]. Определяющие отношения для оболочки постоянной толщины h из несжимаемого гиперупругого изотропного материала можно представить через функцию удельной потенциальной энергии W следующим образом [2]

$$\nu^{\alpha\beta} = \frac{2}{\eta}\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{G_{11}G_{22}}}\frac{\partial W}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad \eta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 2, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3}$$

В случае неогуковского материала функция W имеет вид [3]

$$W = \frac{1}{2}\mu\left(G_{11}g^{11} + G_{22}g^{22} + \frac{g_{11}g_{22}}{G_{11}G_{22}} - 3\right), \tag{4}$$

где μ — модуль сдвига. Подставив выражения (3) и (4) в уравнения (2), получим систему из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций $R(q^1)$ и $Z(q^1)$. Граничные условия запишем в виде

$$Z(0) = 0; \quad Z(l) = l_1; \quad R(0) = r; \quad R(l) = r.$$

Данная краевая задача решается численно методом пристрелки, использованным ранее для решения задачи больших деформаций чистого изгиба цилиндрической оболочки [3].

3. Результаты.

Рассмотрим оболочку из неогуковского материала с модулем сдвига $\mu = 1$, длиной $l = 2$ и радиусом поперечного сечения $r = 1$. Приложим безразмерное внутреннее давление Q и одновременно деформируем оболочку вдоль образующей на 50 процентов.

На приведенных ниже рисунках кривые, изображенные сплошной линией, соответствуют значению внутреннего давления $Q = -0.1$, кривые, изображенные точками, соответствуют $Q = 0.1$, пунктиром — значению внутреннего давления

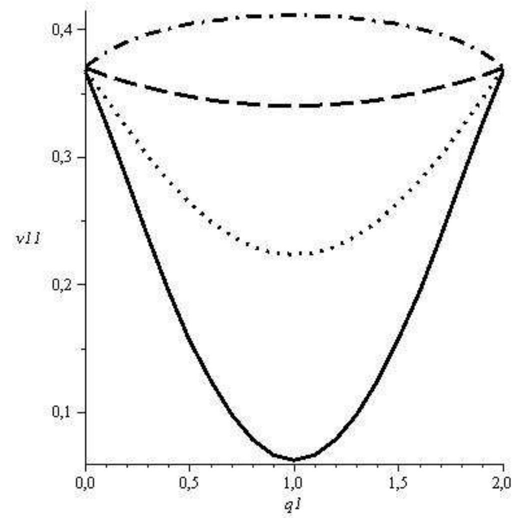


Рис. 1. Распределение напряжения ν_{11}.

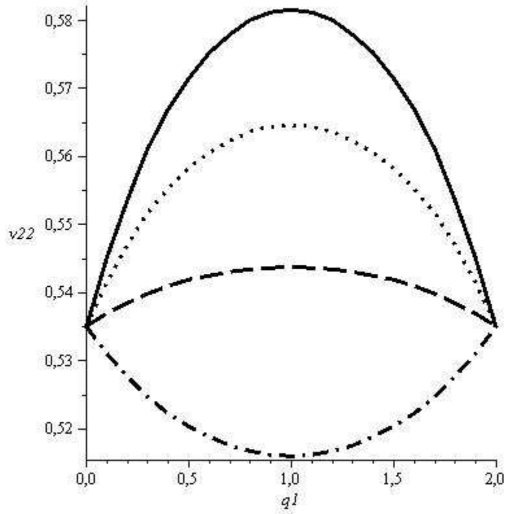


Рис. 2. Распределение напряжения ν_{22}.

$Q = 0.3$, штрих-пунктиром — значению $Q = 0.5$. На рис. 1 и 2 представлено распределение напряжений ν_{11} и ν_{22} по длине оболочки. По вертикальной оси отложено напряжение ν_{11} и, соответственно, ν_{22}. По горизонтальной оси отложена координата q^1. Из графиков видно, что напряжения симметричны относительно середины трубки.

На рис. 3 изображена форма деформированной образующей трубки. По вертикальной оси отложена осевая координата оболочки после деформации. По горизонтальной оси — ее радиус, также после деформации. Очевидно, что при небольших

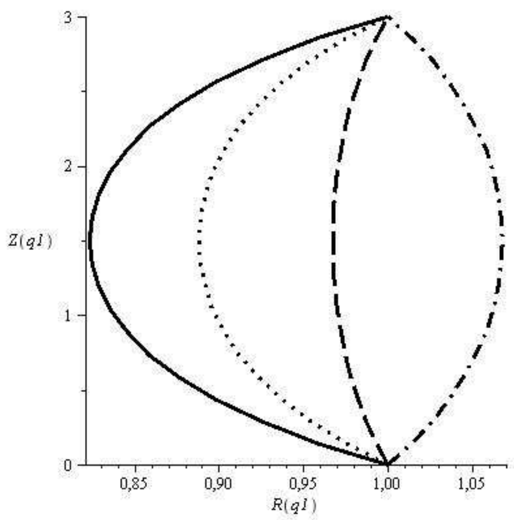


Рис. 3. Деформация образующей оболочки.

положительных значениях нормального внутреннего давления Q образующая оболочки будет прогибаться вовнутрь, что обусловлено наличием осевого растяжения. Увеличение внутреннего давления приводит к выпучивания оболочки наружу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Zubov L. M.* Semi-inverse solution in non-linear theory of elastic shells // Archives of Mechanics. 53. 2001. № 4–5. Pp. 599–610.

[2] *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-н/Д: Рост. унив., 1982. 144 с.

[3] *Kolesnikov J. M., Zubov L. M.* Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // Z. Angew.Math. Mech. 89. 2009. № 4. Pp. 288–305.

[4] *Libai M., Simmonds J. S.* The Nonlinear Theory of Elastic and Shells. 2^{nd} ed. Cambridge Univ. Press., Cambridge. 1998. 542 p.

Minchenko D.A. *Large deformations of elastic shells of revolution.* In this paper the large deformation of highly elastic thin-walled shell of revolution loaded by internal pressure (or negative pressure) and the longitudinal tensile force applied at one end is investigated. Cross-sectional radius at the ends of the shell feel the same. Our aim in this work is to determine the characteristics linking stress and deformation for shells of various rubber-like materials with prescribed geometric parameters. The problem is solved numerically. Curves of the distribution of stresses and strains along the length of the shell are given.

НОВЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБЪЕКТОВ КОНТРОЛЯ

Мирошниченко И. П., Паринов И. А., Рожков Е. В.
НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Разработаны перспективные оптические интерференционные средства для измерения малых перемещений поверхностей объектов контроля лазерными интерферометрами, представлены описания предлагаемых средств измерений и результаты экспериментальных исследований особенностей их функционирования в составе мобильных диагностических систем.

Проблема диагностики состояния конструкционных материалов и изделий, находящихся в эксплуатации, остается по-прежнему актуальной, несмотря на значительные успехи в развитии методов и средств неразрушающего контроля, особое место среди которых занимают акустические активные и пассивные методы неразрушающего контроля, а также средства для их реализации в процессе решения научных и производственных задач. Одним из важнейших направлений повышения точности и качества результатов контроля акустическими методами является разработка и внедрение новых, а также модификация известных оптических интерференционных средств для измерения малых перемещений, основанных на использовании лазерных интерферометров. При этом модификация известных оптических средств, проведенная после детальных расчетно-экспериментальных исследований их функциональных характеристик, более предпочтительна с точки зрения минимизации финансовых затрат. Актуальным в настоящее время также является создание новых бесконтактных средств измерений перемещений для мобильных диагностических систем. Настоящая работа посвящена разработке перспективных оптических интерференционных средств для измерения малых перемещений поверхностей объектов контроля лазерными интерферометрами для мобильных систем диагностики состояния конструкционных материалов и изделий, позволяющим повысить точность и качество результатов измерений с учетом особенностей их эксплуатации. Известны оптические устройства для измерения малых линейных и угловых перемещений поверхностей объектов контроля, основанные на применении интерференционных методов, содержащие оптически связанные и последовательно размещенные источник когерентного оптического излучения, оптическую систему, светоделитель, отражатель, жестко закрепленный на поверхности объекта контроля и экран с установленными на нем фотоприемными устройствами. При этом, полученная при совмещении опорного и объектного пучков интерференционная картина, представляющая собой совокупность колец различной интенсивности, проецируется на экран, а фотоприемные устройства, установленные в кольцах интерференционной картины, регистрируют изменения интенсивности оптического поля, которые однозначно связаны с перемещениями поверхности объекта контроля. Существенными недостатками данных устройств, препятствующими их использованию, в первую очередь, в перспективных мобильных диагностических системах из-за отсутствия специальных условий для проведения измерений, являются высокая трудоемкость подготовки к проведению измерений, низкие точность и качество результатов измерений. Высокая трудоемкость подготовки к проведению измерений обусловлена тем, что перед началом проведения любого отдельного вида испытаний, а соответственно и измерений, необходимо произвести индивидуальные установку (закрепление) и настройку (регулировку и фиксацию положения) каждого из оптических элементов отмеченных устройств для достижения совмещения опорного и объектного пучков и получения интерференционной картины в области размещения экрана, что значительно увеличивает трудоемкость подготовки к проведению измерений. Низкие точность и качество результатов измерений обусловлены тем, что на оптические элементы устройств и фотоприемное устройство в процессе проведения измерений воздействуют внешние источники оптического излучения (естественное освещение, осветительные приборы и т. п.), при этом интенсивности этих излучений и их изменения во времени носят случайный характер, что вносит случайные погрешности в результаты измерений. Задачей, на решение которой направлено предлагаемое техническое решение, является снижение трудоемкости подготовки к проведению измерений, повышение точности и качества результатов измерений перемещений поверхностей объектов контроля лазерным интерферометром, что позволяет обеспечить использование высокоточных оптических интерференционных средств измерения малых линейных и угловых перемещений в перспективных стационарных и мобильных диагностических системах без создания специальных условий для проведения измерений. Сущность предлагаемого технического решения заключается в том, что оптическое устройство для измерения перемещений содержит оптически связанные и последовательно размещенные источник когерентного оптического излучения, оптическую систему, светоделитель, отражатель, жестко закрепленный на поверхности объекта контроля, и фотоприемное устройство. Предлагаемое устройство конструктивно отличается от известных тем, что оно дополнительно содержит опорную плиту с центральным отверстием, скрепленную с основанием при помощи устройства для регулировки и фиксации ее положения, на внутренней поверхности плиты, обращенной к поверхности объекта контроля, жестко закреплено фотоприемное устройство, в котором выполнено отверстие, соосное отверстию в плите, и с возможностью регулировки и фиксации положения через фланец большого основания закреплен конический корпус, при этом на фланце малого основания конического корпуса жестко закреплены светоделитель и одним концом эластичная светонепроницаемая мембрана, выполненная в виде кольца и опирающаяся противоположным концом на поверхность объекта контроля, а на наружной поверхности плиты с возможностью регулировки и фиксации положения установлен цилиндрический корпус с размещенными в его полости источником когерентного оптического излучения и оптической системой. Предлагаемое техническое решение схематично изображено на рис. 1. Оптическое устройство для измерения перемещений содержит основание 1, опорную плиту 2 с центральным отверстием 3, скрепленную с основанием 1 при помощи устройства 4 для регулировки и фиксации ее положения, цилиндрический корпус 5, в полости 6 которого размещены источник 7 когерентного оптического излучения и оптическая система 8, фотоприемное устройство 9, выполненное в виде прямоугольной матрицы фотоприемников с центральным отверстием 10, соосным центральному отверстию 3 плиты 2, конический корпус 11 с фланцами 12 и 13, жестко скрепленными соответственно с большим и малым основаниями конуса, светоделитель 14, жестко закрепленный на фланце 13, отражатель 15, жестко закрепленный на поверхности 16 объекта контроля 17. Плита 2 имеет наружную 18 и внутреннюю 19 поверхности, при этом последняя обращена к поверхности 16 объекта контроля 17. Фотоприемное устройство 9 жестко закреплено на внутренней поверхности 19 плиты 2. Цилиндрический корпус 5 размещен на наружной поверхности 18 плиты 2 соосно отверстию 3 плиты 2 и отверстию 10 устройства 9 при помощи крепежных элементов 20, обеспечивающих регулировку и фиксацию его положения. Конический корпус 11 установлен на внутренней поверхности 19 соосно цилиндрическому корпусу 5, отверстию 3 плиты 2 и отверстию 10 фотоприемного устройства 9 при помощи крепежных элементов 21, обеспечивающих регулировку и фиксацию его положения. На фланце 13 конического корпуса 11 одним концом жестко закреплена эластичная светонепроницаемая мембрана 22, выполненная в виде кольца и опирающаяся противоположным концом на поверхность 16 объекта контроля 17.

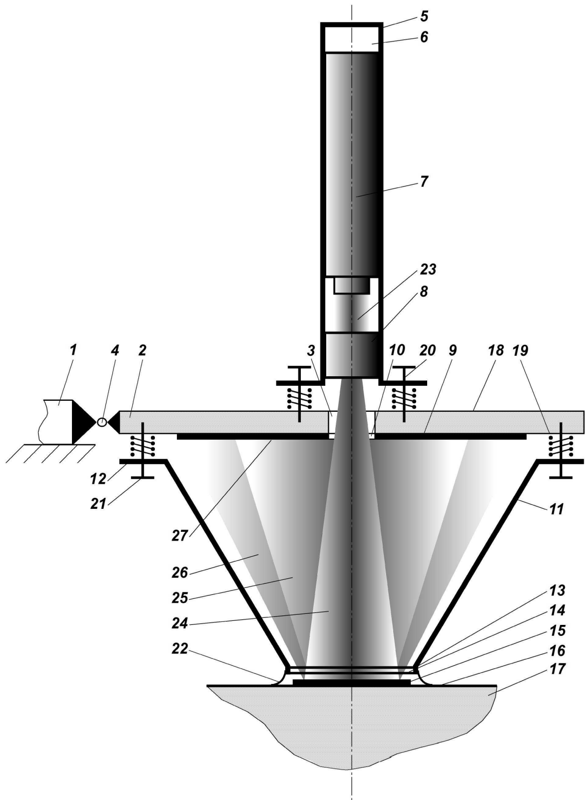


Рис. 1.

Устройство работает следующим образом. Излучение 23 источника 7 когерентного оптического излучения после прохождения оптической системы 8 преобразуется в расходящийся пучок 24, проходит через отверстия 3 плиты 2 и 10 фотоприемного устройства 9 и попадает на светоделитель 14, где происходит его разделение — одна часть отражается от поверхности светоделителя 14 (опорный пучок 25), а вторая часть — от отражателя 15 (объектный пучок 26), жестко закрепленного на поверхности 16 объекта контроля 17. Полученная при совмещении опорного 25 и объектного 26 пучков интерференционная картина 27, представляющая собой совокупность колец различной интенсивности, проецируется на фотоприемное устройство 9. Фотоприемное устройство 9 при перемещении поверхности 16 объекта контроля 17 регистрирует изменение интенсивности оптического поля интерференционной картины 27, которое соответствует величине данного перемещения. Результаты измерений от фотоприемного устройства 9 передаются в устройство для регистрации и отображения результатов измерений (на рис. 1 не показано). Для проведения экспериментального подтверждения функциональных свойств предлагаемого технического решения был изготовлен его опытный образец, внешний вид которого представлен на рис. 2, 3, при этом номера позиций элементов устройства соответствуют приведенным на рис. 1, защитная шторка 28 конического корпуса 11 в открытом положении, а эластичная светонепроницаемая мембрана 22 снята.

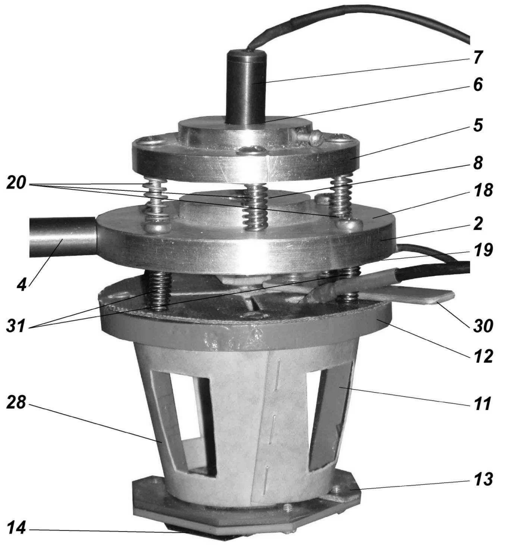


Рис. 2.

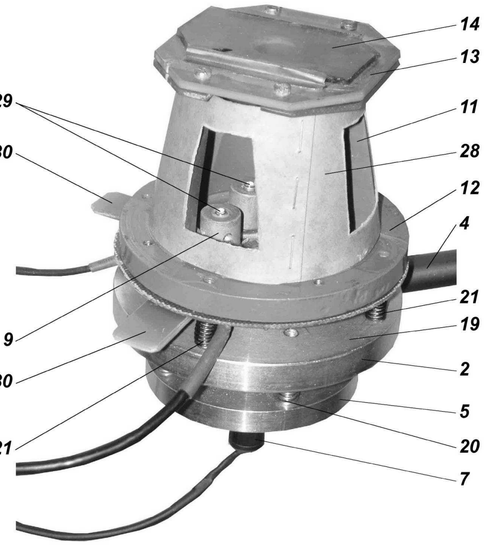


Рис. 3.

На рис. 2 изображен общий вид устройства, на рис. 3 — общий вид устройства с возможностью осмотра фотоприемного устройства 9. В опытном образце источником 7 когерентного оптического излучения являлся модуль лазерный точечный типа KLM-B635-3-5 (полупроводниковый лазер) с длиной волны 0,635 мкм и мощностью лазерного излучения 3 мВт, светоделителем 14 — полупрозрачное зеркало, а в качестве фотоприемного устройства 9 применялись два фотодиода 29 типа ФД9-111Э, каждый из которых был дополнительно оснащен устройством 30 для регулировки и фиксации положения в заданной области интерференционной картины 27. Анализ результатов экспериментального исследования показал, что предлагаемое техническое решение позволяет без создания специальных условий для проведения измерений обеспечить измерение малых линейных и угловых перемещений поверхностей объектов контроля при снижении более чем в 2 раза трудоемкости подготовки к проведению измерений, повышение точности и качества результатов измерений за счет полного исключения случайного воздействия на его оптические элементы и фотоприемное устройство внешних источников оптического излучения. Кроме этого, предлагаемое техническое решение конструктивно обеспечивает реализацию новых технических и технологических решений [1]. Обобщенно, можно отметить, что предлагаемое техническое решение, сохраняя положительные качества известных устройств, а также, конструктивно обеспечивая реализацию технических и технологических решений [1], отличается по сравнению с ними существенным снижением трудоемкости подготовки к проведению измерений, повышением точности и качества результатов измерений и может быть успешно применено в процессе высокоточных измерений малых линейных и угловых перемещений поверхностей объектов контроля при проведении экспериментальных исследований прочностных свойств образцов конструкционных материалов и конструкций, оценке их технического состояния и диагностике как в перспективных мобильных диагностических системах, так и в стационарных, а также при исследовании акустико-эмиссионных процессов в твердых телах, исследовании процессов дефектообразования в ленточных высокотемпературных сверхпроводниках, исследовании волновых процессов в слоистых конструкциях и конструкциях, выполненных из анизотропных конструкционных материалов и т. п. в машиностроении, авиастроении, судостроении, ракетно-космической технике и т. д. Предлагаемое техническое решение защищено патентом Российской Федерации на изобретение [2], а используемое в процессе его работы программное обеспечение — свидетельством о государственной регистрации программ для ЭВМ [3]. Описанные технические решения представлялись на XIV Московском Международном салоне изобретений и инновационных технологий «АРХИМЕД–2011», где получили одобрение специалистов и были удостоены Специального приза «За лучшее изобретение салона «АРХИМЕД».

Настоящая работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 10-08-00136.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мирошниченко И. П.* Перспективные оптические средства измерения малых перемещений для систем диагностики технического состояния материалов и изделий // Контроль. Диагностика. 2010. № 1. С. 45–49.

[2] *Мирошниченко И. П., Паринов И. А., Рожков Е. В., Серкин А. Г.* Оптическое устройство для измерения перемещений. Патент РФ № 2407988. 2010.

[3] *Мирошниченко И. П., Серкин А. Г.* Программа для расчета интенсивности оптического поля интерференционной картины. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008614831. 2008.

Miroshnichenko I. P., Parinov I. A., Rogkov E. V. *New optic interference means for measurement of displacements of the control object surfaces.* The report presents developed perspective optic interference means for measurement of displacements of the control object surface by laser interferometers. Moreover, the descriptions of proposed measuring means and experimental results of features of their work in mobile diagnostic systems are presented.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕКЦИИ БЕНАРА–КАРМАНА ДЛЯ ТОНКИХ ЦИЛИНДРОВ

Молодчанная А. В., Ширяева Е. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследована задача о конвекции Бенара-Кармана в тонком цилиндре с непроницаемыми границами, и вращающимися в противоположную сторону основаниями, на которых задана разность температур. В случае, когда толщина цилиндра стремится к нулю построена асимптотическая модель, для которой определены критические числа потери устойчивости.

Введение. В работе [1] исследовано влияние вращения подогретых оснований цилиндра на возникновение конвекции в цилиндрической области, заполненной жидкостью — так называемая конвекция Бенара–Кармана. В [1] для случая, когда высота и радиус цилиндра равны и число Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$, определены критические числа возникновения конвективной неустойчивости и изучена бифуркация основного режима течения. Большой интерес представляют собой исследования иных соотношений между высотой и радиусом цилиндра. В случае, когда высота цилиндра много меньше радиуса удалось построить достаточно простую асимптотическую модель, хорошо описывающую основные режимы течения жидкости — два тороидальных вихря. Исследование линеаризованной задачи показало, что главную роль в потере устойчивости основного режима течения играет подогрев оснований цилиндров.

1. Основные уравнения. Уравнения, описывающие конвекцию Бенара–Кармана в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндр, вдоль оси которого действует сила тяжести, в безразмерных переменных имеют вид:

$$u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi + wu_z - \frac{v^2}{r} = -p_r + \mu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2v_\varphi}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$v_t + uv_r + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r}p_\varphi + \mu\left(\Delta v - \frac{v}{r^2} + \frac{2u_\varphi}{r^2}\right), \tag{2}$$

$$w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z = -p_z + \mu\Delta w + \beta T, \tag{3}$$

$$(ru)_r + v_\varphi + rw_z = 0, \tag{4}$$

$$T_t + uT_r + \frac{v}{r}T_\varphi + wT_z = \delta\Delta T, \quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5}$$

На верхней и нижней крышках цилиндра, которые вращаются с одинаковой по величине, но противоположной по направлению угловой скоростью, заданы условия прилипания и температура, а на боковых стенках цилиндра — условия прилипания и отсутствия потока тепла

$$u = w = 0, \quad v = \Omega r, \quad T = 0, \quad z = h; \tag{6}$$

$$u = w = 0, \quad v = -\Omega r, \quad T = T_0, \quad z = -h. \tag{7}$$

$$u = w = 0, \quad v = 0, \quad T_r = 0, \quad r = R; \tag{8}$$

$$u = w_r = 0, \quad v = 0, \quad T_r = 0, \quad r = 0. \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ — скорость, p — давление, T — температура, T_0 — температура нижней крышки, Ω — угловая скорость вращения торцевых крышек, R, h — радиус и высота цилиндра, μ — кинематическая вязкость, δ — температуропроводность, β — коэффициент температурного расширения, которые связаны с обычно используемыми числами Рейнольдса Re, Прандтля Pr, Рэлея Ra соотношениями

$$\frac{1}{\mu} = \mathrm{Re} = \frac{\Omega_* L_*^2}{\mu_*}, \quad \mathrm{Ra} = \frac{g_* \beta_* T_* L_*^3}{\delta_* \mu_*}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_*}{\delta_*}, \quad \delta = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}, \quad \beta = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^2},$$

где звездочкой отмечены размерные величины, g_* — ускорение силы тяжести, Ω_*, L_*, T_* — характерные величины угловой скорости, длины и температуры.

Размерные и безразмерные переменные связаны между собой соотношениями

$$\left\{\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{p}, \overline{T}\right\} = \left\{L_*\Omega_*\boldsymbol{v},\ L_*^2\Omega_*^2\rho_* p,\ T_* T\right\},\ \overline{T}_w = T_0 T_*,\ R_* = RL_*,\ h_* = hL_*,\ \overline{\Omega}_c = \Omega\Omega_*,$$

где $\overline{T}_w$ — разность температур на крышках цилиндра, $\overline{\Omega}_c$ — угловая скорость вращения цилиндра, R_* — радиус цилиндра, h_* — полувысота цилиндра, ρ_* — характерная плотность жидкости.

В случае, когда в качестве характерных величин выбраны реальная угловая скорость, радиус цилиндра и разность температур, т. е. $T_w = T_*$, $R_* = L_*$, $\Omega_c = \Omega_*$, безразмерные параметры T_0, Ω, R будут: $T_0 = 1$, $\Omega = 1$, $R = 1$. Такой выбор не всегда удобен, так как затрудняет предельные переходы и построение асимптотик при стремлении параметров к нулю, например, вязкости, температуропроводности.

2. Асимптотическая модель. Построение асимптотической модели, в основном, следует работе [2]. Для поиска вращательно-симметричных режимов ($\partial/\partial\theta = 0$) в случае, когда высота цилиндра много меньше радиуса ($r \gg h$), используем асимптотическую модель. Ищем решение задачи (1)–(9) в виде

$$r = R + hx, \quad z = hy, \quad u = h\widetilde{u}, \quad w = h\widetilde{w}, \quad v = \widetilde{v}, \quad p = h\widetilde{p}, \quad t = h\widetilde{t}, \tag{10}$$

$$\mu = h\mu_0, \quad \delta = h\delta_0, \quad \mu_0 = O(1), \quad \delta_0 = O(1), \quad \beta = h^{-1}\beta_0, \quad \beta_0 = O(1),$$

$$T = T^{(0)}(z) + h\widetilde{\theta}, \quad \frac{T_0}{2h} = \gamma = h^{-1}\gamma_0, \quad \gamma_0 = O(1), \quad T^{(0)}(z) = \frac{T_0}{2h}(h - z) = \frac{1-y}{2}T_0,$$

где $T^{(0)}(z)$ — «равновесный» профиль температуры, γ — градиент температуры.

После подстановки (10) в (1)–(9) и пренебрежении членами более малого порядка по h, чем сохраненные, получим, опуская знак «$\tilde{}$», уравнения

$$u_t - \frac{v^2}{R} = -p_x + \mu_0\Delta_0 u, \quad w_t = -p_y + \mu_0\Delta_0 w + \beta_0\theta, \quad u_x + w_y = 0, \tag{11}$$

$$\theta_t - \gamma_0 w = \delta_0\Delta_0\theta, \quad v_t = \mu_0\Delta_0 v, \quad \Delta_0 = (\ )_{xx} + (\ )_{yy} \tag{12}$$

и краевые условия

$$u = w = 0, \quad v = \pm\Omega r = \pm\Omega(R + hx), \quad \theta = 0, \quad y = \pm 1; \tag{13}$$

$$u = w = 0, \quad v = 0, \quad \theta_x = 0, \quad x = -R/h = -R_0; \tag{14}$$

$$u = w_x = 0, \quad v = 0, \quad \theta_x = 0, \quad x = 0. \tag{15}$$

В асимптотической модели (11)–(15) задача для определения скорости v отщепляется и может быть проинтегрирована независимо от остальных уравнений.

Ищем стационарное решение задачи для $v = v_0(x, y)$ в виде

$$v_0 = \Omega r y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \sin \pi k y. \tag{16}$$

Для определения $a_k(x)$ имеем, заменяя R_0 на $+\infty$ при $h \to 0$,

$$a_k''(x) - \pi^2 k^2 a_k(x) = 0, \quad a_k(-R_0) = a_k(-\infty) = 0. \tag{17}$$

Тогда

$$a_k(x) = a_k(0) e^{\pi k x}. \tag{18}$$

Величины $a_k(0)$ определяются краевым условием для $v_0(0, y) = 0$

$$0 = \Omega R y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin \pi k y. \tag{19}$$

Вычисляя $a_k(0)$, получим

$$v_0 = \Omega r y + 2\Omega R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} e^{\pi k x} \sin \pi k y. \tag{20}$$

Ряд (20) суммируется. Действительно, вводя комплексную переменную $\xi = x + iy$ и функцию $F(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} e^{\pi k \xi}$, дифференцируя $F(\xi)$, получим сумму геометрической прогрессии с показателем $q = e^{\pi\xi}$, и после суммирования и интегрирования с учетом условия на бесконечности, имеем:

$$F'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (e^{\pi\xi})^k = -\frac{e^{\pi\xi}}{1 + e^{\pi\xi}}, \quad F(\xi) = -\frac{1}{\pi} \ln(1 + e^{\pi\xi}).$$

Вычисляя мнимую часть функции $F(\xi)$, окончательно получим

$$v_0 = \Omega r y - \frac{2\Omega R}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{\pi x} \sin \pi y}{1 + e^{\pi x} \cos \pi y}. \tag{21}$$

Профиль азимутальной скорости, рассчитанный по формуле (21) при $R_0 = 6$, $\Omega = 1$, приведен на рис. 1. Отчетливо виден пограничный слой в окрестности внешней боковой границы цилиндра. Кроме этого, задачи (11)–(15) и исходная задача (1)–(9) решались численно методом конечных элементов при помощи пакета FreeFem++ [4]. Основной режим течения теряет устойчивость, например, при $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^4$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Re} = 110$. В частности, развитие вторичного режима течения показано на рис. 1 справа. Профиль азимутальной скорости, рассчитанный для

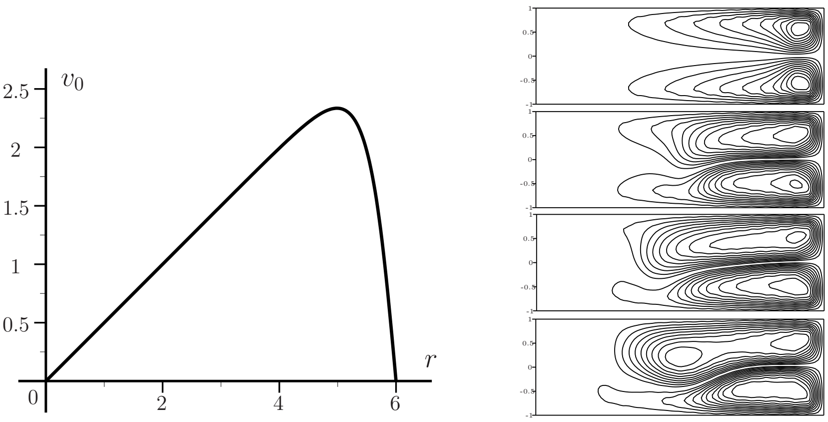


Рис. 1. Профиль азимутальной скорости при $y = 0{,}5$ и функция тока при $t = 3$; 9; 1,2; 1,5; $\mathrm{Ra} = 2 \cdot 10^4$; $\mathrm{Pr} = 1$; $\mathrm{Re} = 110$.

полной и асимптотической моделей, отличается от профиля, заданного формулой (21), не более чем на три процента, начиная со значений параметров $R/h \gtrsim 3$.

3. Линеаризованная задача. Линеаризуя задачу (11)–(15) в окрестности стационарного решения, получим систему уравнений с однородными краевыми условиями, аналогичными (13)–(15)

$$u_t - \frac{2v_0 v}{R} = -p_x + \mu_0\Delta_0 u, \quad w_t = -p_y + \mu_0\Delta_0 w + \beta_0\theta, \tag{22}$$

$$\theta_t - \gamma_0 w = \delta_0\Delta_0\theta, \quad u_x + w_y = 0, \tag{23}$$

$$v_t = \mu_0\Delta_0 v. \tag{24}$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (24) с однородными краевыми условиями тождественно равняется нулю, т. е. $v = 0$, и, окончательно, линеаризованная задача для определения потери устойчивости стационарного вращательно-симметричного режима в случае асимптотической модели имеет вид

$$u_t = -p_x + \mu_0\Delta_0 u, \quad w_t = -p_y + \mu_0\Delta_0 w + \beta_0\theta, \tag{25}$$

$$\theta_t - \gamma_0 w = \delta_0\Delta_0\theta, \quad u_x + w_y = 0, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} u = w = 0, \quad \theta = 0, \quad y = \pm 1; \\ u = w = 0, \quad \theta_x = 0, \quad x = -R/h = -R_0; \\ u = w_x = 0, \quad \theta_x = 0, \quad x = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

4. Монотонная неустойчивость. Очевидные замены

$$\mu_0 u = \overline{\overline{u}}, \quad \mu_0 w = \overline{\overline{w}}, \quad \theta = \frac{\gamma_0}{\mu_0\delta_0}\overline{\overline{\theta}}, \quad \mathcal{R} = \frac{\gamma_0\beta_0}{\mu_0\delta_0}$$

позволяют записать уравнения стационарой задачи (25)–(27) в виде (опуская двойную черту и индекс ноль у оператора Лапласа)

$$0 = -p_x + \Delta u, \quad 0 = -p_y + \Delta w + \mathcal{R}\theta, \quad -w = \Delta\theta, \quad u_x + w_y = 0 \tag{28}$$

с краевыми условиями (27), где $\mathcal{R}$ — аналог числа Рэлея.

При $R_0 \to \infty$ (или $h \to 0$) задача превращается в задачу для плоского горизонтального слоя с твердыми горизонтальными стенками, для которой критическое число Рэлея $\mathcal{R}_{\text{слой}}$ и критическое волновое число $k_{\text{слой}}$ для периодических вдоль слоя возмущений хорошо известны (для слоя единичной толщины, $\mathcal{R}_{\text{слой}} = 1707{,}76$, $k_{\text{слой}} = 3{,}116$, [3]). С учетом того, что в рассматриваемом случае толщина слоя равна двум, имеем $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{слой}}/16 = 106{,}36$, $k_* = k_{\text{слой}}/2 = 1{,}558$.

Для построения зависимости $\mathcal{R} = \mathcal{R}(R_0)$ необходимо решать краевую задачу на собственные значения (28), (27), которую удобно переписать в более простом виде, вводя функцию тока ψ,

$$\Delta^3\psi = \mathcal{R}\psi_{xx}, \quad u = \psi_y, \quad w = -\psi_x,$$

$$\psi(x, \pm 1) = \psi_y(x, \pm 1) = 0, \quad \psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = 0, \quad \psi(-R_0, y) = \psi_x(-R_0, y) = 0,$$
$$\psi_{yyyy}(x, \pm 1) = 0, \quad \psi_{yyyy}(0, y) = 0, \quad \psi_{yyyy}(-R_0, y) = 0.$$

В заключение еще раз подчеркнем, что в случае асимптотической модели вращение оснований цилиндра оказывает лишь слабое влияния на критические числа потери устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт 14.740.11.0877, грантов РФФИ 10-05-00646, 11-05-01138, 11-05-91052, 10-01-00452, и АФГИР/CRDF RUM1–2943–RO–09.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Bordja L. at all.* Influence of counter-rotating von Karman flow on cylindrical Rayleigh-Benard convection // Phys. Rev. E 81, 036322-1–16 (2010).

[2] *Владимиров В. А., Дениссенко П. В., Жуков М. Ю., Юдович В. И.* Течение вращающейся жидкости в зазоре между двумя параллельными пластинами // Мат. мод. 2001. Т. 13, № 2. С. 27–38.

[3] *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

[4] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008.

Molodchannaya A. V., Shiryaeva E. V. *Asymptotic model of Benard-Karman convection in thin cylinder.* Benard-Karman convection problem in thin cylinder whose upper and lower boundary disks are maintained at different temperature and rotate at equal and opposite angular velocities is investigated. In the case of small cylinder thickness an asymptotic convection model is constructed. The convection instability critical parameters are obtained.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ОКОЛО ТОЧКИ RES 2 В ЗАДАЧЕ КУЭТТА–ТЕЙЛОРА

Моршнева И. В., Овчинникова С. Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Изучаются течения вязкой несжимаемой жидкости между соосными бесконечными вращающимися цилиндрами в окрестности точек бифуркации коразмерности 2. В данной статье продолжается исследование резонансной ситуации Res 2, которая возникает, когда у нейтральных мод совпадают фазовые частоты и азимутальные квантовые числа, а осевые квантовые числа различны. Представлены результаты расчета точек резонанса Res 2 и численного исследования существования и устойчивости режимов течения в окрестности таких точек.

Постановка задачи. Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными цилиндрами радиусов r_1, r_2, вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно, описывается уравнениями Навье–Стокса. Предполагается, что решения уравнений движения имеют периодические вдоль оси цилиндров (оси z) поля скорости и давления с заданным периодом $2\pi/\alpha$ (α — безразмерное осевое волновое число).

Система Навье–Стокса зависит от четырех безразмерных параметров: двух чисел Рейнольдса $R_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu$, $R_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu$ (ν — коэффициент кинематической вязкости), отношения радиусов цилиндров $\eta = r_2/r_1$ и осевого волнового числа α. Хорошо известно, что при любых значениях параметров существует точное стационарное решение уравнений движения — течение Куэтта.

Как система Навье–Стокса, так и линеаризованная на течении Куэтта задача обладают группой симметрии $\mathcal{G} = SO(2) \times O(2)$ — инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси z и преобразования инверсии, которые действуют на поле скоростей $\mathbf{u}$ по правилам

$$(L_\theta^\delta \mathbf{u})(t,r,\theta,z) = \mathbf{u}(t,r,\theta+\delta,z), \ \ (L_z^h \mathbf{u})(t,r,\theta,z) = \mathbf{u}(t,r,\theta,z+h),$$
$$(\mathrm{J}\mathbf{u})(t,r,\theta,z) = (u_r(t,r,\theta,-z), u_\theta(t,r,\theta,-z), -u_z(t,r,\theta,-z)).$$

Симметрия задачи позволяет разыскивать решения линеаризованной на течении Куэтта задачи с вектором скорости

$$\Phi(r,\theta,z,t) = e^{i\omega t - i(m\theta + k\alpha z)}\boldsymbol{\varphi}(r),$$

где m (целое) — азимутальное, k (целое) — осевое квантовые числа.

Критическим значением числа Рейнольдса $R_{1*}(m,k,\alpha,\eta,R_2)$ называется значение R_1, при котором существует ненулевые решения $\Phi(r,\theta,z,t)$ линейной задачи устойчивости. На плоскости (R_1, R_2) при фиксированных значениях отношения радиусов η, осевого волнового числа α, квантовых чисел (m,k) существуют кривые, состоящие из критических точек (R_{1*}, R_2) (нейтральные кривые). Нейтральные кривые $R_1 = R_{1*}(m,k,\eta,R_2,\alpha)$ и $R_1 = R_{1*}(n,l,\eta,R_2,\alpha)$, отвечающие различным квантовым числам (m,k) и (n,l), могут пересекаться. В точке пересечения нейтральных кривых (R_{1*}, R_{2*}) колебательной потери устойчивости линеаризованная задача в силу симметрии имеет четыре независимые нейтральные моды с различными квантовыми числами

$$\Phi_1(t,r,\theta,z)=e^{i\omega_m t}\Phi_{0m}(r,\theta,z),\ \Phi_2(t,r,\theta,z)=e^{i\omega_m t}\Phi_{1m}(r,\theta,z),$$
$$\Phi_3(t,r,\theta,z)=e^{i\omega_n t}\Phi_{0n}(r,\theta,z),\ \Phi_4(t,r,\theta,z)=e^{i\omega_n t}\Phi_{1n}(r,\theta,z),$$

где

$$\Phi_{0m}(r,\theta,z)=e^{-i(m\theta+k\alpha z)}\varphi_{0m}(r),\ \Phi_{1m}(r,\theta,z)=e^{-i(m\theta-k\alpha z)}\varphi_{1m}(r),$$
$$\Phi_{0n}(r,\theta,z)=e^{-i(n\theta+l\alpha z)}\varphi_{0n}(r),\ \Phi_{1n}(r,\theta,z)=e^{-i(n\theta-l\alpha z)}\varphi_{1n}(r),$$

$\varphi_{1s}=j(\varphi_{0s})=(\varphi_{0sr},\varphi_{0s\theta},-\varphi_{0sz})$, $s=m,n$. В малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых возможно сильное взаимодействие нейтральных мод. Это взаимодействие описывается амплитудными системами, которые строятся с помощью теоремы о центральном многообразии или с помощью осреднения по быстрому времени. Впервые амплитудные системы для задачи Куэтта–Тейлора были построены в работах [1], [2] в случае равных осевых чисел $k=l$ (резонанс Res 1).

Малая окрестность точки пересечения (R_{1*}, R_{2*}) состоит из точек (R_1, R_2): $R_1=R_{1*}+k_1\varepsilon^2$ и $R_2=R_{2*}+k_2\varepsilon^2$, где ε — малый параметр, k_1, k_2 — константы надкритичности ($k_1^2+k_2^2=1$). Асимптотическое решение уравнений движения в малой окрестности точки (R_{1*},R_{2*}) разыскивается в виде

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}_{00}+\varepsilon(\Phi+\Phi^*)+\ldots \qquad (1)$$

Здесь $\Phi=\xi_{0m}(\tau)\Phi_1+\xi_{1m}(\tau)\Phi_2+\xi_{0n}(\tau)\Phi_3+\xi_{1n}(\tau)\Phi_4$, неизвестные комплексные амплитуды $\xi_{0m}(\tau)$, $\xi_{1m}(\tau)$, $\xi_{0n}(\tau)$, $\xi_{1n}(\tau)$ зависят от медленного времени $\tau=\varepsilon^2 t$, символ $*$ вверху означает комплексное сопряжение, $\mathbf{v}_{00}$ — вектор скорости течения Куэтта при $R_1=R_{1*}$ и $R_2=R_{2*}$.

Существуют соотношения между квантовыми числами (m,k), (n,l) и соответствующими им фазовыми частотами (ω_m,ω_n), которым отвечают различные системы уравнений для амплитуд ξ_{0m}, ξ_{1m}, ξ_{0n}, ξ_{1n}. Если ни одно из таких резонансных соотношений не выполняется, то слагаемые амплитудной системы отвечают лишь обязательным резонансам («нерезонансный» случай). В случае $m\neq 0$ и $n\neq 0$ существует шесть резонансных соотношений. В данной работе рассматривается случай резонанса Res 2, когда выполняются соотношения $n=m$, $\omega_n=\omega_m$ и $l\neq 3k$.

Точки резонанса Res 2. В пространстве Π параметров (α, η, R_1, R_2) точки резонанса Res 2 образуют однопараметрическое семейство (пространственную кривую). В точках резонанса Res 2 однозначно определяется значение осевого волнового числа α, что снимает трудный вопрос о селекции осевых волновых чисел. На рис. 1 представлены значения параметров в точках, соответствующих этому резонансу.

Вычисления показали, что в задаче Куэтта–Тейлора при пересечении нейтральных кривых, отвечающих первым (наименьшим) критическим числам Рейнольдса, точек резонанса Res 2 нет. Такие точки находятся вдали от кривой первого перехода. На рис. 2 в плоскости параметров (Ω,R_1) изображена кривая первой

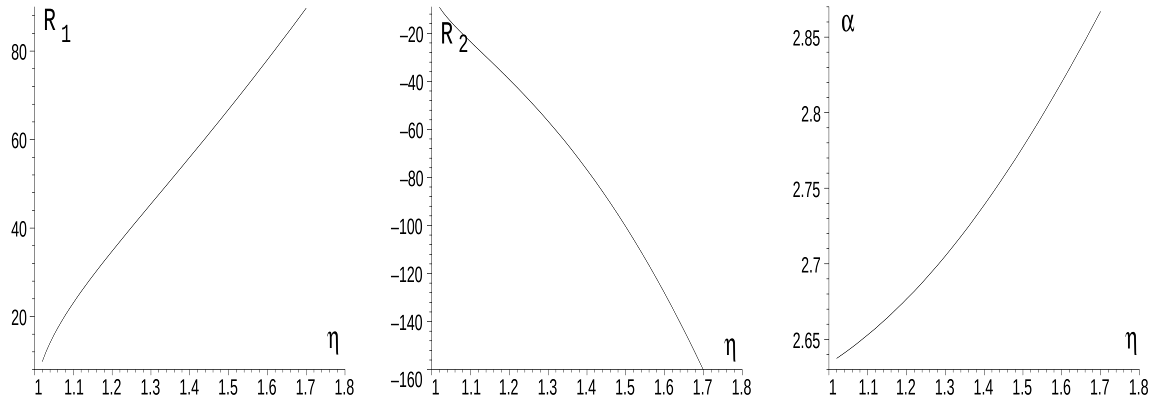


Рис. 1. На первых двух рисунках изображена зависимость критических значений R_{1*} и R_{2*}, определяющих точку пересечения бифуркаций, от η — отношения радиусов цилиндров. На третьем рисунке изображена зависимость волнового числа $\alpha(\eta)$, соответствующего точке пересечения (R_{1*}, R_{2*}).

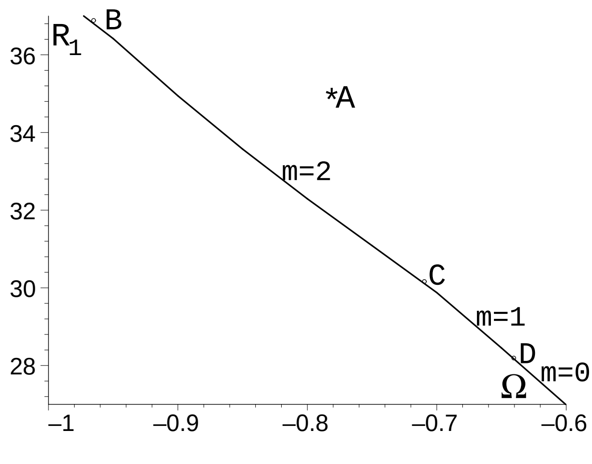


Рис. 2. Сплошная линия — нейтральная кривая первого перехода для $\eta = 1.2$. Буквой А обозначена точка резонанса Res 2.

потери устойчивости для отношения радиусов $\eta = 1.2$, а точка Res 2 обозначена буквой А. Отношение угловых скоростей $\Omega = \Omega_1/\Omega_2$ введено вместо параметра $R_2 = \Omega R_1 \eta^2$.

На рис. 3 видно, как при вращении цилиндров в противоположные стороны ($\Omega < 0$) появляются точки резонанса Res 2 для различных значений отношения радиусов цилиндров η. Кривые зависимости отношения фазовых частот ω_m/ω_n от Ω при $n = m = 1$, $k = 1$, $l = 2$, отвечающие точкам нерезонансного случая (Res 0), пересекают прямую $\omega_m/\omega_n = 1$.

При вращении цилиндров в одну сторону ($\Omega > 0$) точки резонанса Res 2 не обнаружены. Однако, равенство $\omega_m/\omega_n = 1$ выполняется асимптотически, если зазор между цилиндрами мал ($d = \eta - 1 \ll 1$), а $\Omega \approx 1/\eta^2$ (граница Сайнжа [4], которая разделяет области устойчивости и неустойчивости течения Куэтта относительно малых возмущений). Этот результат подсказывает, что при достаточно узких зазорах между цилиндрами и достаточно больших значениях Ω могут существовать режимы, близкие к резонансным. Возможно, что такие режимы найдут себе адекватную трактовку в не созданной ещё асимптотической теории бифуркаций.

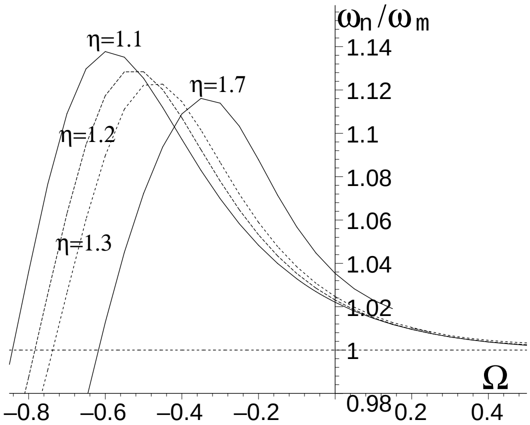


Рис. 3. Кривые изображают зависимость ω_m/ω_n от отношения угловых скоростей цилиндров Ω для точек, отвечающих нерезонансному случаю Res 0 при $n{=}m$, $l = 2k$ для отношения радиусов $\eta = 1.1, 1.2, 1.3, 1.7$. Эти кривые пересекают прямую $\omega_m/\omega_n = 1$ в точках резонанса Res 2.

Амплитудная система. Система уравнений для амплитуд ξ_{0m}, ξ_{1m}, ξ_{0n} и ξ_{1n} в случае резонанса Res 2 была выведена в [5]. При всех значениях параметров у этой амплитудной системы существует тривиальное решение, соответствующее течению Куэтта, асимптотически устойчивое в некоторой области на плоскости параметров надкритичности (k_1, k_2). На этой плоскости существуют также области, где помимо тривиального могут существовать другие решения амплитудной системы. В работе [6] были перечислены решения, отвечающие равновесиям моторной подсистемы амплитудной системы, которые могут существовать в малой окрестности точки резонанса Res 2, и условия их существования и устойчивости. В данной работе проведен расчет коэффициентов амплитудной системы и проделан анализ условий существования и устойчивости некоторых режимов течения при отношении радиусов цилиндров $\eta = 1.13257$. Такое значение η соответствует экспериментам, описанным [7]. Коэффициенты вычислены для трех точек (наборов) параметров:

1. $m = n = 1,\ k = 1,\ l = 2,\ R_1 = 27.134,\ \omega_m = \omega_n = 0.3894099,\ \Omega = -0.82140,$ $\alpha\ =\ 2.660219$;

2. $m = n = 1,\ k = 1,\ l = 4,\ R_1 = 35.122,\ \omega_m = \omega_n = 0.4039034,\ \Omega = -0.89254,$ $\alpha = 1.885125$;

3. $m = n = 2,\ k = 1,\ l = 2,\ R_1 = 31.486,\ \omega_m = \omega_n = 0.7769836,\ \Omega = -1.0428,$ $\alpha = 2.754978$.

Вычисления показали, что во всех трех перечисленных точках есть области на плоскости параметров надкритичности, где спиральные, азимутальные и двойные спиральные волны двух видов существуют, но не для всех этих режимов есть области, где они устойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным напрвлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007-2013 гг. (госконтракт 16.516.11.6106) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (госконтракт 14.740.11.0877), а также гранта РФФИ № 11-05-01138-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдович В. И.* Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Шестой всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов. С. 661.

[2] *Chossat P., Demay Y., Iooss G.* Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette–Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. Pp. 213–248.

[3] *Юдович В. И, Овчинникова С. Н.* Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. I. Нерезонансный случай // Деп. в ВИНИТИ 5.04.2005, № 458-В2005, 33 с.

[4] *Synge J. I.* On the stability of a viscous liquid between two rotating coaxial cylinders // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1938. V. 167. № 929. Pp. 250–256.

[5] *Юдович В. И, Овчинникова С. Н.* Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. II. Резонансы Res 1, Res 2 // Деп. в ВИНИТИ 17.01.2006, №47-В2006, 32 с.

[6] *Овчинникова С. Н., Моршнева И. В.* Режимы течения около точки резонанса Res 2 в задаче Куэтта–Тейлора // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010г., Т. 1. Ростов н/Д, Изд-во ЮФУ, 2010. С. 245–249.

[7] *Andereck C. David, Liu S. S., Swinney Harri L.* Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // J. Fluid Mech. 1986. V. 164. Pp. 155–183.

Morshneva I. V., Ovchinnikova S. N. *A numerical analysis regimes near point of Res 2 in the Couette–Taylor problem.* The flow of viscous incompressible fluid between two rigid infinite concentric cylinders near the points of codimension-2 bifurcation is studied. The present study is devoted to investigation of amplitude systems corresponding to Res 2 (the neutral modes frequencies and azimuthal quantum numbers equal and axial quantum numbers are not equal). The results of calculation of points of resonance Res 2 are presented. Numerical study of the existence and stability of certain periodic and quasiperiodic regimes arising near resonance points Res 2 is performed.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Нестеров С. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложен итерационный алгоритм идентификации модуля Юнга и удельной теплоемкости неоднородного термоупругого стержня. Обратная задача на основе метода линеаризации сводится к поэтапному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

В настоящее время в инженерной практике все более активно используются неоднородные материалы, позволяющие создавать изделия с уникальными физико-механическими характеристиками. Но на практике, в силу несовершенств технологии, может произойти отклонение полученных параметров от заданных расчетных значений. Поэтому актуальной является проблема идентификации реально полученных материалов. Количество работ, посвященных идентификации теплофизических характеристик материалов довольно велико [1]. Однако, случае же неоднородных тел исследования, как правило, ограничиваются только идентификацией коэффициента теплопроводности [2]. Но в последние годы развит альтернативный подход к решению коэффициентных обратных задач (КОЗ) теории упругости [3], теплопроводности и термоупругости в случае малой связанности полей [4] для неоднородных тел, основанный на сведении прямых одномерных задач к уравнениям Фредгольма второго рода, а нелинейных обратных задач к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается линейная задача. Однако, в работе [5] восстанавливается только одна из функций, остальные принимаются известными. В данной работе разработанный ранее подход применен для одновременной реконструкции двух коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости — модуля Юнга и удельной теплоемкости неоднородного стержня. Прямая задача решается методом возмущений.

Рассмотрим закрепленный на торце $x = 0$ термоупругий стержень длины l, в котором колебания возбуждаются при помощи внезапно приложенного к торцу $x = l$ теплового потока. Считаем, что модуль Юнга, удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплового расширения есть произвольные положительные функции координаты x. Тогда уравнения связанной термоупругости примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\sigma_x = E(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x)\theta\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = c(x)\rho(x)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0\alpha(x)E(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \tag{3}$$

а граничные условия представимы в форме

$$u(0,t) = \theta(0,t) = 0, \quad -k(l)\frac{\partial \theta}{\partial x}(l,t) = q_0 H(t), \quad \sigma_x(l,t) = 0. \tag{4}$$

Будем считать, что известна дополнительная информация о торцевой температуре $\theta(l,t) = f(t)$. Целью решения обратной задачи является реконструкция двух коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости (модуля Юнга и удельной теплоемкости) при известных остальных. Для этого вначале вводятся безразмерные параметры и функции

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \quad \tau = \frac{k_0 t}{c_0 \rho_0 l^2},$$

$$W(z,\tau) = \frac{k_0 \theta}{q_0 l}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \quad \delta_0 = \frac{\alpha_0^2 T_0 E_0}{c_0 \rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{k_0}{c_0 \sqrt{E_0 \rho_0} l}.$$

Здесь k_0,c_0,ρ_0,E_0 — некоторые характерные коэффициент теплопроводности, теплового расширения, удельной теплоемкости, плотности и модуля Юнга соответственно. После обезразмеривания к задаче применяется преобразование Лапласа аналогично [5]. Полученная краевая задача в трансформантах решается методом возмущения как в [6] и сводится к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно безразмерных трансформант температуры и напряжений [6].

Решение обратной задачи находим в пространстве трансформант. Для этого методом линеаризации было получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода,которое с сохранением обозначений, введенных в [4] имеет вид:

$$p\int_0^1 \delta\bar{c}_{n-1}(z)\bar{\rho}(z)\tilde{W}_{n-1}^2(z,p)dz + p\delta_0\int_0^1 \delta\bar{E}_{n-1}\left(\frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{p}(\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1} \tag{5}$$

Однако для реконструкции двух безразмерных функций $\bar{c}(z)$ и $\bar{E}(z)$ одного уравнения вида (5) недостаточно. Второе интегральное уравнение получаем, изменив способ нагружения стержня. Для этого колебания стержня возбуждают механическим способом. В этом случае в математической постановке задачи (1)–(4) нужно изменить граничные условия на $u(0,t) = \theta(0,t) = 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t) = 0$, $\sigma_x(l,t) = \sigma_0 H(t)$. Выполняя действия, аналогичные первой постановке задачи и пользуясь обозначениями, введенными в [6], получим второе интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$p\int_0^1 \delta\bar{c}_{n-1}(z)\bar{\rho}(z)\tilde{V}_{n-1}^2(z,p)dz + p\delta_0\int_0^1 \delta\bar{E}_{n-1}\left(\frac{d\tilde{V}_{n-1}}{dz}\right)^2 dz = -\lambda\delta_0(\tilde{V}_T - \tilde{V}_{n-1})|_{z=1} \tag{6}$$

Коэффициенты восстанавливались в два этапа. На первом этапе искалось начальное приближение в классе линейных положительных функций. На втором этапе происходило уточнение восстанавливаемых функций путем решения системы интегральных уравнений (5),(6). Решение интегральных уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей. Для регуляризации задачи применялся метод А. Н. Тихонова. После нахождения $\delta\bar{E}_{n-1}(z)$ и $\delta\bar{c}_{n-1}(z)$ из решения системы уравнений (5),(6) строились новые приближения $\bar{E}_n(z) = \bar{E}_{n-1}(z) + \delta\bar{E}_{n-1}(z)$ и $\bar{c}_n(z) = \bar{c}_{n-1}(z) + \delta\bar{c}_{n-1}(z)$. Критерием выхода из итерационного процесса является стабилизация функционала невязки между точными и вычисленными торцевыми смещениями и температурами

$$J_{n-1} = \int\limits_0^\infty (\tilde{W}_{n-1}(1,p) - \tilde{W}_T(1,p)^2 dp + \int\limits_0^\infty (\tilde{U}_{n-1}(1,p) - \tilde{U}_T(1,p)^2 dp\ .$$

В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. Одновременно восстанавливались две безразмерные функции — модуль Юнга и удельная теплоемкость, остальные безразмерные функции полагались равными единице. Восстанавливалсь экспоненциальные, тригонометрические и степенные функции. В ходе экспериментов выяснено, что наибольшая погрешность возникала на торцах стержня, задание торцевых значений значительно снижало погрешность; монотонные функции восстанавливались лучше немонотонных, восстановление удельной теплоемкости происходило с меньшей погрешностью, чем реконструкция модуля Юнга. Вычислительные эксперименты показали, что предложенный подход дает хорошее одновременное восстановление двух монотонных функций. На рисунках приведены примеры одновременной реконструкции модуля Юнга $\bar{E}(z) = e^{(-z)}$ и удельной теплоемкости $\bar{c}(z) = z^2 - z + 1$. При этом, начальное приближение для обеих функций оказалось равным $1 - 0,7z$. На четвертой итерации погрешность реконструкции для двух функций не превысила 7%, параметр регуляризации — $\alpha = 10^{-9}$, невязка $J_4 = 2 \cdot 10^{-6}$.

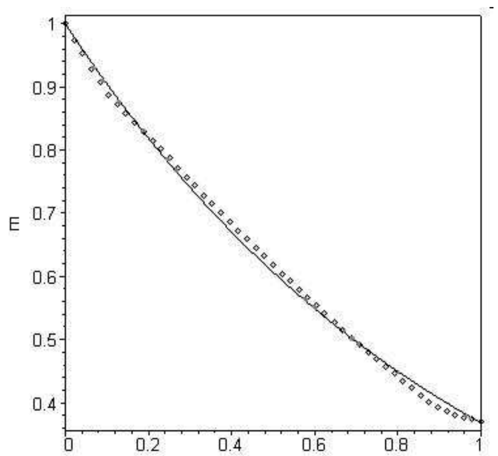


Рис. 1. Реконструкция модуля Юнга.

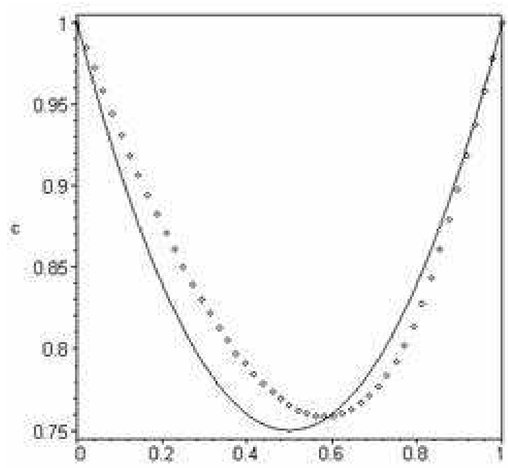


Рис. 2. Реконструкция удельной теплоемкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-01-00194-а. Автор благодарит профессора Ватульяна А. О. за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1988. 288 с.

[2] *Победря Б. Е., Кравчук А. С., Аризпе П. А.* Идентификация коэффициентов нестационарного уравнения теплопроводности // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. № 4. С. 78–87.

[3] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.:Физматлит, 2007. 223 с.

[4] *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 24–30.

[5] *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 1. С. 29–36.

[6] *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса и модуля Юнга неоднородного стержня // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII Международной конференции. Ростов-н/Д, 12–15 октября 2009. С. 44–48.

Nesterov S. A. *Identification of inhomoheneous properties of inhomoheneous rod*. The iteration algorithm of identification heat capacity and Young modulue of thermoelastic inhomogeneous rod is proposed. On the basis of method of linearization inverse problem is reduced to step by step solution of Fredholm integral equation of the first kind. Results of numerical experiments are given.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ БАЛКИ С ТОНКИМ РАЗРЕЗОМ

Осипов А. В.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Представлена модель балки с тонким разрезом. Сформулированы условия сопряжения на концах разреза. Проведен ряд численных экспериментов по оценке точности полученных условий сопряжения.

1. Введение.

В настоящее время все больше внимания уделяется исследованиям колебаний неоднородных стержней, в том числе стержней с дефектами. При этом исследованы задачи с полостями в стержне [1, 2], а также задачи с трещинами и разрезами в стержне [3, 4]. В настоящей работе представлен способ формулировки условий сопряжения на концах тонкого разреза при анализе поперечных колебаний консольно закрепленного стержня, проведен анализ влияния точности полученных условий на амплитудно-частотные зависимости.

2. Задача для трехэлементной балки.

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω упругой балки длины L. Будем считать, что балка на конце $x = 0$ жестко закреплена, а на конце $x = L$ действует нагрузка (сосредоточенная сила). Уравнение имеет вид [5]:

$$(EI(x)w''(x))'' - \rho\omega^2 F w(x) = 0,$$

где E — модуль Юнга, I — момент инерции, ρ — плотность, F — площадь поперечного сечения. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$w(0) = w'(0) = 0; EI(L)\cdot w''(L) = 0; (EI(L)\cdot w''(x))'(L) = P.$$

В точке x_0 сделан тонкий разрез шириной $2l$. Рассмотрим модель трехэлементной балки. Считая модуль Юнга величиной постоянной по всей длине балки $E = const$, будем искать решение на каждом промежутке:

$$\begin{cases} w_1^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_1}{EI_1} w_1 = 0, \\ w_0^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_0}{EI_0} w_0 = 0, \\ w_2^{IV} - \frac{\rho\omega^2 F_1}{EI_1} w_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $F_1 = F_2 = bH$, $F_0 = bh$, $I_1 = I_2 = \frac{bH^3}{12}$, $I_0 = \frac{bh^3}{12}$, H — толщина балки на участках 1 и 2, h — толщина балки на среднем участке. Имеем следующие граничные условия для системы (1):

$$\begin{aligned} & w_1(0) = 0, w_1'(0) = 0, \\ & w_1(x_0 - l) = w_0(x_0 - l), w_1'(x_0 - l) = w_0'(x_0 - l) \\ & I_1 w_1''(x_0 - l) = I_0 w_0''(x_0 - l), I_1 w_1'''(x_0 - l) = I_0 w_0'''(x_0 - l) \\ & w_0(x_0 + l) = w_2(x_0 + l), w_0'(x_0 + l) = w_2'(x_0 + l), \\ & I_0 w_0''(x_0 + l) = I_2 w_2''(x_0 + l), I_0 w_0'''(x_0 + l) = I_2 w_2'''(x_0 + l), \\ & w_2''(L) = 0, EI_2 w_2'''(L) = P \end{aligned} \tag{2}$$

3. Получение условий сопряжения для двухэлементной балки с тонким разрезом.

Для получения условий стыковки на концах разреза представим функцию w_0 в следующем виде:

$$w_0(x) = A_1 \cosh(k(x - x_0)) + A_2 \cos(k(x - x_0)) +$$
$$+ A_3 \sinh(k(x - x_0)) + A_4 \sin(k(x - x_0)), \tag{3}$$

где $k^4 = 12\rho\omega^2/Eh^2$. Используя (2) и (3), получим следующие соотношения на краях разреза для w_1 и w_2:

$$\begin{gathered}
w_2(x_0 + l) = (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4)kl;\\
w_2'(x_0 + l) = (A_1 - A_2)k^2 l + (A_3 + A_4)k;\\
I_2 w_2''(x_0 + l) = I_0((A_1 - A_2)k^2 + (A_3 - A_4)k^3 l);\\
I_2 w_2'''(x_0 + l) = I_0((A_1 + A_2)k^4 l + (A_3 - A_4)k^3);\\
w_1(x_0 - l) = (A_1 + A_2) - -(A_3 + A_4)kl;\\
w_1'(x_0 - l) = -(A_1 - A_2)k^2 l + (A_3 + A_4)k;\\
I_2 w_1''(x_0 - l) = I_0((A_1 - A_2)k^2 - (A_3 - A_4)k^3 l);\\
I_2 w_1'''(x_0 - l) = I_0(-(A_1 + A_2)k^4 l + (A_3 - A_4)k^3);
\end{gathered}$$

Исключив из полученных выражений произвольные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4, получаем следующие условия, связывающие соответствующие значения производных слева и справа от разреза:

$$\begin{gathered}
w_1(x_0 - l) - w_2(x_0 + l) + l(w_1'(x_0 - l) + w_2'(x_0 + l)) = 0;\\
w_1'(x_0 - l) - w_2'(x_0 + l) + l\frac{I_2}{I_0}(w_1''(x_0 - l) + w_2''(x_0 + l)) = 0;\\
\frac{I_2}{I_0}(w_1''(x_0 - l) - w_2''(x_0 + l)) + l\frac{I_2}{I_0}(w_1'''(x_0 - l) + w_2'''(x_0 + l)) = 0;\\
\frac{I_2}{I_0}(w_1'''(x_0 - l) - w_2'''(x_0 + l)) + k^4 l(w_1(x_0 - l) + w_2(x_0 + l)) = 0
\end{gathered}$$

Разложив каждое из полученных выражений в ряд с точностью до $O(l^2)$, получаем окончательно условия сопряжения на концах разреза (для поперечного сечения балки в виде прямоугольника):

$$\begin{aligned}
&1. w_1(x_0) - w_2(x_0) = 0;\\
&2. w_1'(x_0) - w_2'(x_0) + l\left(\frac{H^3}{h^3} - 1\right) 2w_1''(x_0) = 0;\\
&3. w_1''(x_0) - w_2''(x_0) = 0;\\
&4. w_1'''(x_0) - w_2'''(x_0) + \frac{12\rho\omega^2}{EH^3} h l^2 w_1(x_0) = 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

l	H	h	1	2	3	4
0.1	0.1	0.05	0.069265	0.003713	-0.143329	0.098768
0.05	0.1	0.05	0.026997	0.016095	-0.062581	0.020140
0.01	0.1	0.05	0.004333	0.004962	-0.011408	0.000681
0.005	0.1	0.05	0.002103	0.002577	-0.005641	0.000166
0.001	0.1	0.05	0.000410	0.000530	-0.001118	0.000006

Таблица 1. Значение невязок условий сопряжения при различных l.

l	H	h	1	2	3	4
0.01	0.1	0.09	0.004093	0.005322	-0.011168	0.000034
0.01	0.1	0.08	0.004111	0.005291	-0.011181	0.000062
0.01	0.1	0.07	0.004144	0.005240	-0.011206	0.000122
0.01	0.1	0.06	0.004204	0.005148	-0.011262	0.000267
0.001	0.1	0.05	0.000410	0.000530	-0.001118	0.000006
0.01	0.1	0.04	0.004666	0.004508	-0.011899	0.002209

Таблица 2. Значение невязок условий сопряжения при различных значениях глубины разреза.

В случае тонкого разреза, где $l \to 0$, в условиях 2 и 4 выполняется предельный переход и они сводятся к классическим.
В табл. 1 показано, как изменяется невязка каждого из условий с изменением длины разреза, в табл. 2 показано, как изменяется невязка при изменении глубины разреза.

Примечание. В табл. 1, 2 в столбцах с номерами «1», «2», «3», «4» приведены соответственно значения невязок при первом, втором, третьем и четвертом условиях сопряжения. Нетрудно заметить, что при увеличении длины или глубины разреза погрешность возрастает (при $H > 3h$), и, видимо,для адекватности требуется использование более сложных моделей изгиба балки, например, модели типа Тимошенко. Также стоит отметить, что величина невязки слабо зависит от выбора точки разреза x_0.

4. Задача для двухэлементной балки. С помощью выведенных условия сопряжения (4) можно исследовать задачу о двухэлементной балке, то есть балке с тонким разрезом, которой соответствует система двух дифференциальных уравнений, а вместо граничных условий (2) для трехэлементной балки выступают полученные условия сопряжения (4). Сравним полученное решение для двухэлементной балки и точное решение для трехэлементной балки, а в качестве критерия выберем значение смещения на свободном конце $w_2(L)$:

Нетрудно видеть, что погрешность приближённого решения увеличивается в окрестности резонанса, при этом на других участках она не превышает 5%.

5. Заключение. Сформулированы адекватные условия сопряжения на концах тонкого разреза. Проведен ряд численных экспериментов по оценке точности полученных условий. Результаты вычислительных экспериментов позволили оценить влияние параметров разреза на точность сформулированных условий сопряжения.

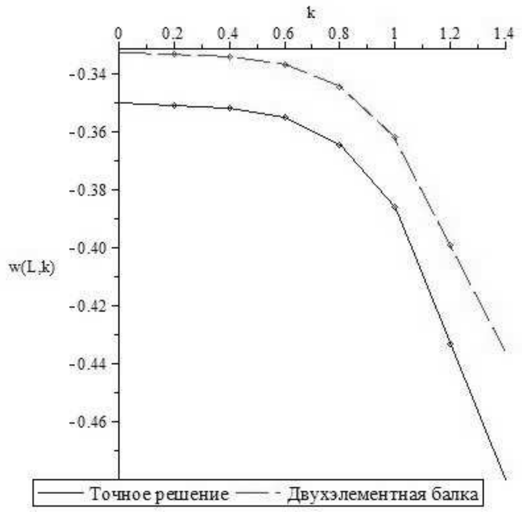


Рис. 1. Сравнение точного решения и решения задачи для двухэлементной балки до первого резонанса.

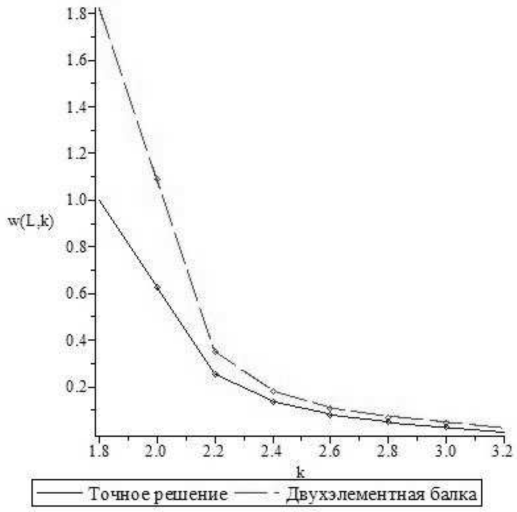


Рис. 2. Сравнение точного решения и решения задачи для двухэлементной балки после первого резонанса.

Автор благодарит проф. Ватульяна А. О. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ватульян А. О., Солуянов Н. О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9, С. 44–56.

[2] *Ахтямов А. М., Аюпова А. Р.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. № 3. С. 37–42.

[3] *Ахтямов А. М., Каримов А. Р.* Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний // Техническая акустика. 2010. № 10.

[4] *Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом. 2009. № 6. С. 83–89.

[5] *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.

Osipov A. V. *A model of a beam with a thin cut*. The model of a beam with a thin cut. The conditions of conjugation at the ends of the cut. A number of numerical experiments to evaluate the accuracy of the junction conditions.

РЕЗОНАНС 1:1 В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРАВИЛЬНОГО ВИХРЕВОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА ВНЕ КРУГА

Островская И. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена проблеме устойчивости правильного вихревого пятиугольника, расположенного вне круговой области, в критическом случае двукратной пары чисто мнимых собственных значений (жорданова клетка).

1. Постановка задачи. Движение системы пяти одинаковых точечных вихрей, расположенных вне круга радиуса R, описывается уравнениями [1]:

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{\varkappa}{2\pi i}\left(\sum_{j=1,j\neq k}^{5}\frac{1}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^{5}\frac{1}{z_k - \widehat{z}_j} + \frac{5}{z_k}\right), \quad k = 1,\ldots,5. \tag{1}$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,\ldots,5$ — комплексные переменные, x_k, y_k — декартовы координаты k-го вихря, $\widehat{z}_k = \dfrac{R^2}{\bar{z}_k}$ — отражение k-го вихря границей круга, $\varkappa$ — интенсивность вихря.

Система (1) — гамильтонова, с гамильтонианом

$$H = -\frac{\varkappa^2}{4\pi}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 5}\ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \frac{\varkappa^2}{8\pi}\sum_{j,k=1}^{5}\ln\left|R^2 - z_j z_k^*\right|^2 - \frac{5\varkappa^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{5}\ln\left|z_k\right|^2.$$

Система (1) имеет точное решение

$$\begin{gathered} z_k = e^{i\omega t}u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/5}, \quad k = 1,\ldots,5, \\ \omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2}\left(14 - \frac{10}{1-q^5}\right), \quad q = \frac{R^2}{R_0^2} < 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, система одинаковых вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах вписанного правильного n-угольника вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(q)$.

2. Устойчивость правильного вихревого пятиугольника. Замена переменных

$$z_k(t) = e^{i\omega t}v_k(t)$$

приводит уравнения (1) к гамильтоновой системе:

$$\dot{\bar{v}}_k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1,j\neq k}^{5}\frac{\varkappa}{v_k - v_j} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{5}\frac{\varkappa}{v_k - \widehat{v}_j} + \frac{5}{2\pi i}\frac{1}{v_k} + i\omega\bar{v}_k, \quad k = 1,\ldots,5 \tag{3}$$

с гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2}M(v), \quad M = \varkappa\sum_{k=1}^{5}|v_k|^2, \quad v = (v_1,\ldots,v_5)\in C^5. \tag{4}$$

На каждой плоскости переменных v_k введем квазиполярные координаты и запишем v_k в виде

$$v_k = R_0\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+r_k\right)}e^{i(\frac{2\pi}{n}(k-1)+\theta_k)}. \tag{5}$$

В переменных $r=(r_1,\dots,r_5), \theta=(\theta_1,\dots,\theta_5)$ уравнение (2) после замены $t\to t/R_0^2$ принимает вид

$$\dot r_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r,\theta)), \qquad \dot\theta_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r,\theta)). \tag{6}$$

Разложим функцию $E(v(\rho))$ в ряд Тейлора в окрестности нулевого решения:

$$E(v(\rho)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + E_4(v(\rho)) + \dots). \tag{7}$$

Многоточием обозначены слагаемые выше четвертой степени. Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (S\rho,\rho) \qquad S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2}G_0 \\ -\frac{1}{2}G_0 & F_2 \end{pmatrix}, \quad \rho=(r,\theta), \tag{8}$$

а матрица линеаризации системы (6) на нулевом решении имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матрицы F_1, F_2, G_0 являются циркулянтами (см. [2, п. 5.1]), причем F_1, F_2 — симметрические матрицы, а G_0 — кососимметрическая. Они выписаны в работе Хавелока [3] вместе с их собственными значениями и собственными значениями матрицы линеаризации L. Хавелок устоновил, что при $q > q_{*5}$ имеются экспоненциально растущие решения, а при $q < q_{*5}$ собственные значения чисто мнимые. Здесь

$$q_{*5} \approx .3345958365.$$

В случае $q = q_{*5}$ в рассматриваемой задаче устойчивости имеет место критический случай двукратной пары чисто мнимых собственных значений, анализ которого и является целью нашей работы.

Далее используется понятие формальной устойчивости по Раусу, которое определяется как формальная устойчивость по Ляпунову приведенной системы. Формальная устойчивость по Ляпунову положения равновесия системы означает (см., например, [4]), что существует степенной ряд, возможно расходящийся, который формально является интегралом системы, достигающий минимума на этом положении равновесия.

Теорема. *Стационарное вращение (2) правильного вихревого пятиугольника формально устойчиво по Раусу в критическом случае $q = q_{*5}$.*

Замечание 1. *Устойчивость для граничных значений параметра интересно изучить, чтобы выяснить «опасной» или «безопасной» (по Баутину [6]) является эта граница. Другими словами, жестко или мягко происходит потеря устойчивости томсоновского многоугольника, когда параметр q возрастая, проходит через критическое значение q_{*5}?*

Доказательство. Пусть выполнено условие $q = q_{*5}$. Тогда $\lambda_{12}(q_{*5}) = \lambda_{13}(q_{*5}) = 0$. Спектр матрицы линеризации L состоит из двукратного нулевого собственного значения $\sigma = 0$, двукратной пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_*$, где $\omega_* = \lambda_{02}(q_{*5}) = .5678764813$, и двух простых пар чисто мнимых собственных значений. Каждому двукратному собственному значению соответствует жорданова клетка в жордановой форме матрицы L.

Введем симплектическую замену переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \parallel B_1, B_2, \ldots, B_{10} \parallel, \tag{10}$$

$$B_1 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = -\frac{k_0}{x}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = -\frac{k_0}{x}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ -\nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix}, \quad B_7 = k_0 x \begin{pmatrix} h_2 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_8 = k_0 x \begin{pmatrix} h_3 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_9 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ \nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{15}}}\begin{pmatrix} h_5 \\ h_0 \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \sqrt{2\lambda_{15}}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix}.$$

Здесь B_k — колонки матрицы B ($k = 1, \ldots, 10$), введены обозначения $k_0 = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2\lambda_{22}}$, $\nu_1 = \sqrt[4]{\dfrac{|\lambda_{21}|}{|\lambda_{11}|}}$, λ_{1k} и λ_{2k} — собственные значения матриц F_1 и F_2 соответственно, вычисленные при $q = q_{*5}$, h_k — собственные векторы этих матриц, а $h_0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ — нулевой вектор столбец.

Симплектическая матрица B приводит квадратичную часть гамильтониана E_2 к нормальной форме.

Здесь ζ_5 — циклическая переменная полной нелинейной системы. Полагая $\xi_5 = 0$, получаем приведенный гамильтониан $\mathcal{W}$ с рядом Тейлора в окрестности нуля:

$$\mathcal{W} = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + a_*({\zeta_3}^2 + {\zeta_2}^2)^2 + \ldots). \tag{11}$$

Многоточиями обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных, причем $a_* = -57.271076$, а квадратичные слагаемые $\mathcal{W}_2$ имеют вид:

$$\mathcal{W}_2 = \omega_{*1}({\xi_1}^2 + {\zeta_1}^2) + \frac{1}{2}({\xi_2}^2 + {\xi_3}^2) + \omega_*(\xi_3\zeta_2 - \xi_2\zeta_3) + \omega_{*4}({\xi_4}^2 + {\zeta_4}^2). \tag{12}$$

$\mathcal{W}_3$ — кубическая форма:

$$\mathcal{W}_3 = \alpha_1 \left(\xi_3(\zeta_1\zeta_4 + \xi_1\xi_4) - \xi_2(\xi_4\zeta_1 - \xi_1\zeta_4)\right) + \alpha_2 \left({\xi_2}^2\zeta_1 - {\xi_3}^2\zeta_1 + 2\,\xi_1\xi_2\xi_3\right) +$$
$$+ \alpha_3 \left(-{\xi_1}^2\xi_3 + \xi_3{\zeta_1}^2 + 2\,\xi_1\xi_2\zeta_1\right) + \alpha_4 \left({\xi_2}^2\zeta_4 - {\xi_3}^2\zeta_4 - 2\,\xi_2\xi_3\xi_4\right) +$$
$$+ \alpha_5 \left(-\xi_3{\xi_4}^2 + \xi_3{\zeta_4}^2 - 2\,\xi_2\xi_4\zeta_4\right) + \alpha_6 \left(\zeta_2{\zeta_4}^2 - {\xi_4}^2\zeta_2 + 2\,\xi_4\zeta_3\zeta_4\right) +$$
$$+ \alpha_7 \left(\xi_1(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3) - \zeta_1(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2)\right) + \alpha_8 \left(\zeta_3(\xi_1\zeta_4 - \xi_4\zeta_1) - \zeta_2(\xi_1\xi_4 + \zeta_1\zeta_4)\right) +$$
$$+ \alpha_9 \left({\zeta_1}^2\zeta_2 - {\xi_1}^2\zeta_2 - 2\,\xi_1\zeta_1\zeta_3\right) + \alpha_{10} \left({\zeta_3}^2\zeta_4 - {\zeta_2}^2\zeta_4 + 2\,\xi_4\zeta_2\zeta_3\right) +$$
$$+ \alpha_{11} \left(\zeta_4(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2) + \xi_4(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3)\right) + \alpha_{12} \left(\zeta_1{\zeta_2}^2 - \zeta_1{\zeta_3}^2 + 2\,\xi_1\zeta_2\zeta_3\right)$$

с коэффициентами

$$\omega_{*1} = \omega_1(q_{*5}) = 1.717773311,\ \ \omega_{*4} = \omega_4(q_{*5}) = .2554286482,\ \ \omega_* = .5678764814.$$
$$\alpha_1 = .2649565946,\quad \alpha_2 = .3461307873,\quad \alpha_3 = .5640080910,\quad \alpha_4 = .1258475195,$$
$$\alpha_5 = .1132967762,\quad \alpha_6 = 6.899876845,\quad \alpha_7 = 2.358051096,\quad \alpha_8 = 7.834591892,$$
$$\alpha_9 = .4926700326,\quad \alpha_{10} = 18.20295882,\quad \alpha_{11} = 1.566468753,\quad \alpha_{12} = 8.191044555.$$

Согласно общей теории [4, 5], нормализованная до членов четвертого порядка включительно, функция Гамильтона (11) имеет вид

$$\mathcal{W}(\psi,\phi) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + \omega_{*1}\,({\psi_1}^2 +\ {\phi_1}^2) + \frac{1}{2}\,({\psi_2}^2 +\ {\psi_3}^2) + \omega_*\,(\psi_3\,\phi_2 - \psi_2\,\phi_3) +$$
$$+ \omega_{*4}\,({\psi_4}^2 +\ {\phi_4}^2) + A_*(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 + \ldots \quad (13)$$

где $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_4), \phi = (\phi_1,\ldots,\phi_4)$ — новые переменные, многоточием обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных. Коэффициет A_* вычисляется по формулам

$$A_* = a_* - \frac{1}{4}\frac{\alpha_{10}^2}{\omega_* + \omega_{*4}} + \frac{1}{4}\frac{\alpha_{12}^2}{\omega_* - \omega_{*1}} = 200.5128207608. \quad (14)$$

Нулевое равновесие приведенной гамильтоновой системы с гамильтонианом (11) формально устойчиво по Раусу, поскольку величина A_* положительна. Доказательство дословно повторяет рассуждения Сокольского в задаче устойчивости лагранжевых решений ограниченной проблемы трех тел (см. [4, с. 144], [5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральных целевых программ: «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт № 16.516.11.6106), Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 10-05-00646, 11-05-01138) и Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР/CRDF), грант RUM1-2943-RO-09.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.

[2] *Куракин Л. Г.* Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 3. С. 295–317.

[3] *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag. 1931. Vol. 11. № 70. Pp. 617–633.

[4] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

[5] *Сокольский А. Г.* Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 2. С. 366–369.

[6] *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. М.–Л.: Гостехиздат. 1984. 164 с.

Ostrovskaya I. V. *Resonance 1:1 in the problem of stability of regular vortex pentagon outside circular domain.* The paper is devoted to stability of the regular vortex pentagon located outside a circular domain in the critical case of double couple of purely imaginary eigenvalues (jordan cell).

РАСЧЁТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ В КАВЕРНЕ МЕТОДОМ LS-STAG – МЕТОДОМ ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ С ФУНКЦИЯМИ УРОВНЯ

Пузикова В. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Решается тестовая задача о течении вязкой несжимаемой среды в прямоугольной каверне методом погруженных границ LS-STAG. Рассмотрены простейшие типы усечённых ячеек в двумерном случае. Полученные решения сравниваются с результатами расчётов в пакете OpenFOAM.

В последнее время уделяется много внимания распространению методов расчёта течений на прямоугольных сетках на случаи областей сложной формы при помощи методов погруженных границ (погруженной называется граница раздела среды и твёрдого тела, в общем случае криволинейная и не проходящая через узлы прямоугольной сетки). В этих методах граница области течения не связывается с расчётной сеткой, и наиболее важным вопросом является работа с усечёнными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с погруженной границей области течения, поскольку решающую роль для точности и устойчивости расчёта играет дискретизация уравнений именно в этих ячейках.

Наиболее эффективным методом погруженных границ является метод LS-STAG (Level Set STAGgered – метод погруженных границ с функциями уровня для разнесённых сеток). Метод предложен в статье [1] как развитие MAC-метода [2] (метода маркеров и ячеек) и обладает, как показывают численные эксперименты, вторым порядком точности.

Метод LS-STAG имеет следующие характерные особенности.

- Точное представление погруженной границы достигается путём использования знакопеременной функции расстояния (функции уровня [3]) для её явного представления. Использование функций уровня даёт возможность легко вычислять все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки, уменьшая таким образом затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы.

- В отличие от классических методов погруженных границ (например, [4, 5]), описывающие течение величины непосредственно вычисляются в усечённых ячейках, а не интерполируются.

- В основу построения LS-STAG-дискретизации положены численные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и кинетической энергии во всей области течения, что является определяющим для получения физически правдоподобного численного решения [6].

- LS-STAG-дискретизация сохраняет пятиточечную структуру шаблона МАС-метода. Это позволяет использовать эффективные методы предобуславливания [7–10], при этом не требуется никаких модификаций для учёта погруженных границ.

В данной работе методом LS-STAG решается тестовая задача о расчете течения вязкой несжимаемой среды в прямоугольной каверне.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ в каверне — прямоугольной расчётной области $\Omega = [0,\ L] \times [0,\ H]$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (см. рис. 1).

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - \nu \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(x,\ y,\ 0) = \vec{0},\ (x, y) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}|_{\Gamma_4} = \vec{0},\ u|_{\Gamma_3} = V_0 = \mathrm{const},\ v|_{\Gamma_3} = \vec{0},\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$ — скорость, $p = p(x, y, t)$ — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

Пусть Ω^* — некоторый объём жидкости, Γ^* — его граница. Тогда можно переписать в интегральной форме уравнение неразрывности

$$\int\limits_{\Gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \tag{2}$$

и уравнение импульса в проекциях на оси Ox и Oy соответственно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega^*} u\, dV + \int\limits_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u\, dS + \frac{1}{\rho}\int\limits_{\Gamma^*} p\vec{e_x} \cdot \vec{n}\, dS - \int\limits_{\Gamma^*} \nu \nabla u \cdot \vec{n}\, dS = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega^*} v\, dV + \int\limits_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v\, dS + \frac{1}{\rho}\int\limits_{\Gamma^*} p\vec{e_y} \cdot \vec{n}\, dS - \int\limits_{\Gamma^*} \nu \nabla v \cdot \vec{n}\, dS = 0. \tag{4}$$

При расчётах полагаем, что область Ω квадратная ($L = H$), все величины будем считать безразмерными, в качестве характерной длины выбираем размер ячейки, в качестве характерной скорости — скорость движения границы Γ_3, тогда $L = 1$, $H = 1$, $V_0 = 1$, $\rho = 1$, $\nu = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}$, где Re — число Рейнольдса.

2. LS-STAG дискретизация. Дискретный аналог уравнения нразрывности в матричной форме имеет вид

$$DU + \overline{U}^{ib} = 0,\ \text{или}\ D^x u + D^y v + \overline{U}^{ib} = 0, \tag{5}$$

матрица D составлена из блоков D^x и D^y (далее под матрицами $C[\overline{U}]$, G, K, M будем понимать блочные матрицы, составленные аналогичным образом), вектор

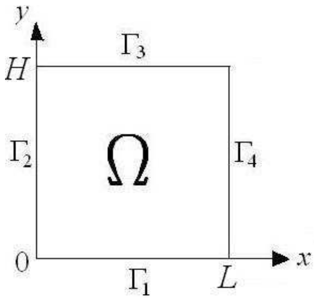


Рис. 1. Расчётная область.

скоростей U составлен из векторов u и v, $\overline{U}_{i,j}^{ib} \equiv 0$. Матрицы D^x и D^y строятся по следующим шаблонам ($i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$):

$$\begin{aligned} D_P^x(i,j) &= \vartheta_{i,j}^u \Delta y_j, \ D_W^x(i,j) = -\vartheta_{i-1,j}^u \Delta y_j, \\ D_P^y(i,j) &= \vartheta_{i,j}^v \Delta x_i, \ D_S^y(i,j) = -\vartheta_{i,j-1}^v \Delta x_i. \end{aligned} \tag{6}$$

В строке с номером (i,j) элемент с индексом P стоит на диагонали, элемент с индексом W находится в столбце с номером, равным номеру контрольного объёма, граничащего с $\Omega_{i,j}$ с запада, с индексом S — с юга, и т. д. Для уравнений импульса (3), (4) дискретизированная по пространству разностная схема имеет следующий матричный вид

$$\frac{d}{dt}(Mu) + C[\overline{U}]U + GP - \nu KU + S^{ib,c} - \nu S^{ib,\nu} = 0. \tag{7}$$

Здесь M — диагональная матрица, элементами которой являются объёмы ячеек, матрица G задаёт дискретный оператор градиента (полагаем, что он связан с дискретным оператором дивергенции соотношением $G = -D^T$), матрица K описывает вязкую диффузию, векторы $S^{ib,c}$ и $S^{ib,\nu}$ — источниковые члены, возникающие в силу граничных условий из конвективных и вязких членов соответственно.

3. Интегрирование по времени и решение СЛАУ. Интегрирование по времени дифференциально-алгебраической системы (5), (7) производится с помощью полунеявного метода, основанного на схеме Адамса–Башфорта второго порядка с дифференцированием назад (AB/BDF 2). Этот метод состоит из двух шагов. Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения Гельмгольца для $\widetilde{U}$ — прогноза скорости в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Следующий шаг

$$\frac{3}{2}M\frac{U^{n+1} - \widetilde{U}}{\Delta t} - D^T(P^{n+1} - P^n) = 0, \ DU^{n+1} + \overline{U}^{ib,n+1} = 0 \tag{8}$$

приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления $\Phi = \dfrac{2\Delta t(P^{n+1} - P^n)}{3}$:

$$A\Phi = D\widetilde{U} + \overline{U}^{ib,n+1}, \ A = -DM^{-1}D^T. \tag{9}$$

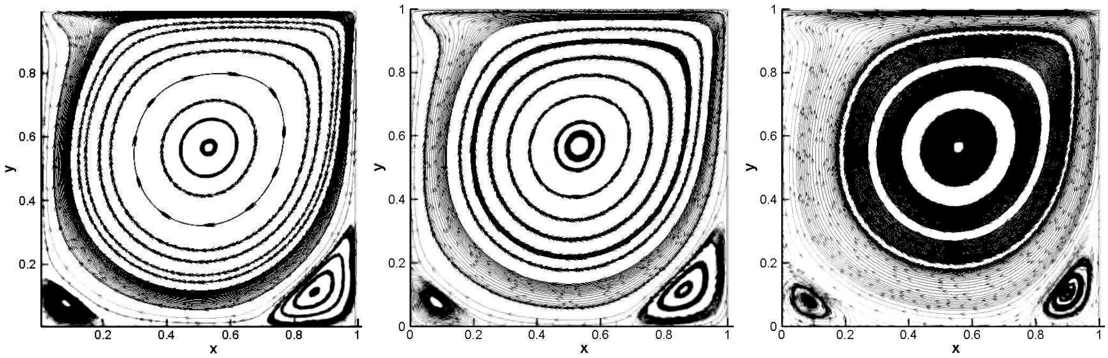


Рис. 2. Линии тока при $\mathrm{Re} = 1000$, расчёт в пакете OpenFOAM, сетка 100×100 (слева) и методом LS-STAG, сетка 50×50 (в середине) и 20×20 (справа) соответственно.

Для обеспечения невырожденности матрицы в вычислительном процессе к диагональному элементу $A_P(i,j)$ добавляется малая вещественная константа δ, величина которой порядка погрешности округления, и система (9) решается во всей расчётной области.

Затем определяются скорости и давление в момент времени t_{n+1} по формулам:

$$U^{n+1} = \widetilde{U} + M^{-1}D^T\Phi, \;\; P^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t}\Phi + P^n. \tag{10}$$

Согласно [1], численные эксперименты авторов показывают, что данная схема имеет второй порядок точности как по скоростям, так и по давлению.

4. Результаты расчётов. Было получено численное решение поставленной задачи методом LS-STAG для $\mathrm{Re} = 100$, $\mathrm{Re} = 500$ и $\mathrm{Re} = 1000$ на сетках 20×20 и 50×50. Оно сравнивалось с решением, полученным для этих задач в открытом свободно распространяемом пакете вычислительной гидродинамики OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) на сетке 100×100. На рис. 2 изображены линии тока для $\mathrm{Re} = 1000$.

5. Заключение. Решения, полученные методом LS-STAG, совпадают с решением, полученным в пакете OpenFOAM. При этом важно отметить, что расчёт методом LS-STAG проводился на более грубых сетках. На сетке 20×20 пакет OpenFOAM с решением задачи о каверне не справляется (получаемые линии тока сильно отличаются от линий тока, которые должны быть в действительности), в то время как метод LS-STAG позволяет получить на этой сетке качественно верное решение.

Решатель BiCGStab, используемый в нашей программе LS-STAG, решает на каждом шаге разностный аналог уравнений Гельмгольца для прогноза скорости за 1–2 итерации (с ILU-предобуславливателем), а разностный аналог уравнения Пуассона для давления — в среднем за 2–3 (с многосеточным предобуславливателем), в то время как в пакете OpenFOAM при их решении совершается до 20 и 120 итераций соответственно.

В перспективе планируется разработка численного метода и комплекса программ для моделирования течений среды и решения связанных задач аэрогидроупругости на основе LS-STAG метода. К настоящему моменту рассмотрены двумерный (плоский) случай и наиболее простые типы усечённых ячеек, идёт работа над увеличением быстродействия программы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Cheny Y., Botella O.* The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. 2010. № 229. Pp. 1043–1076.

[2] *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.

[3] *Osher S., Fedkiw R. P.* Level set methods and dynamic implicit surfaces. N. Y.: Springer, 2003. 273 p.

[4] *Винников В. В., Ревизников Д. Л.* Метод погруженной границы для расчёта сверхзвукового обтекания затупленных тел на прямоугольных сетках // Труды МАИ. 2007. № 27. С. 1–12.

[5] *Мортиков Е. В.* Применение метода погруженной границы для решения системы уравнений Навье–Стокса в областях сложной конфигурации// Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 32–42.

[6] *Arakawa A.* Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part I // J. Comput. Phys. 1996. № 1. Pp. 119–143.

[7] *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. N. Y.: PWS Publ., 1996. 547 p.

[8] *Stone H. L.* Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations // SIAM J. Sci. Numer. Anal. 1968. № 3. Pp. 530–558.

[9] *Van der Vorst H. A.* Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1992. № 2. Pp. 631–644.

[10] *Van der Vorst H. A.* High performance preconditioning // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1989. № 6. Pp. 1174–1185.

Puzikova V. V. *Viscous incompressible flow simulation in a cavity using LS-STAG method (Immersed Boundary Method with Level-set Functions).* The model problem about the incompressible viscous flow simulation in a cavity is solved by the LS-STAG method. The simplest types of «cut-cells» in two-dimensional case are considered. The obtained solutions are compared with the results of OpenFOAM's computations.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ НА ПОЛИМЕРНОЙ ОСНОВЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Сафроненко В. Г.[*], Трифонов В. В.[*], Шутько В. М.[**]

[*]*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону
[**]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Решены задачи о колебаниях композитной на полимерной основе цилиндрической оболочки, находящейся в однородном и поперечно неоднородном стационарном температурном поле. Предложен численный метод исследования, проведен сравнительный анализ амплитудно-частотных характеристик и собственных частот, полученных с учетом и без учета градиента температуры по толщине оболочки в зависимости от значений температуры, заданной на лицевых поверхностях оболочки. Рассмотрено влияние объемного содержания волокна в слоистом композите на решение поставленной задачи.

1. При исследовании виброактивности оболочек из полимерных композитных материалов важное значение имеет учет термовязкоупругих свойств матрицы. Это связано с тем, что способность оболочки к демпфированию колебаний в основном определяется физико-механическими свойствами полимерного связующего. Существенно и то, что эти характеристики являются нелинейными функциями частоты и температуры.

Рассмотрим случай неоднородности свойств композитной оболочки, связанный с наличием градиента температуры по толщине. Уравнения гармонических колебаний оболочки вращения, соответствующие теории оболочек типа Тимошенко, а также физические и деформационные соотношения представлены в [1] и [4]. В дальнейшем предполагается, что стенка оболочки состоит из симметрично армированных композитных слоев одинаковой толщины.

Предположим, что температура внешней окружающей среды равна T_- , а температура внутри — T_+. Также предположим, что температура стенки оболочки изменяется по толщине по линейному закону $T(Z)$ от значения T_+ до T_-. $T(S_-) = T_-$; $T(S_+) = T_+$. Если толщина оболочки равна h, то граничные условия для функции $T(Z)$ запишутся в виде: $T(h/2) = T_+$; $T(-h/2) = T_-$. Схема стенки многослойной оболочки представлена на рис. 1. Функция $T(Z)$ удовлетворяет граничным условиям на поверхностях:

$$T(Z) = T_+ + \triangle T(Z + h/2), -h/2 \leqslant Z \leqslant h/2, \tag{1}$$

где $\triangle T = (T_- - T_+)/h, h$ — безразмерная толщина.

Предполагаем, что оболочка составлена из достаточно большого числа слоев. Будем считать температуру в каждом отдельном слое однородной и равной T_k ($k = 1 \dots m$). Координата центра тяжести сечения k-го слоя равна: $Z_k = -h/2 +$

$h(2k-1)/(2m)$. Тогда, учитывая граничные условия на поверхностях (1), получим значение температуры для k-го слоя (T_k) по формуле:

$$T_k = T_+ + \triangle T h(2k-1)/(2m), k = 1...m. \tag{2}$$

В связи с зависимостью физико-механических свойств полимерного материала от температуры возникает необходимость нахождения вязкоупругих характеристик матрицы жесткости [3] в отдельности для каждого слоя. В отличие от однородной по температуре задачи коэффициенты жесткости $A_{ij} = h\Sigma_{k=1}^{m} C_{ij}^{k} Z_k \; i,j = 1,2$ и $A_{33} = h\Sigma_{k=1}^{m} C_{66}^{k} Z_k$ не будут равны нулю.

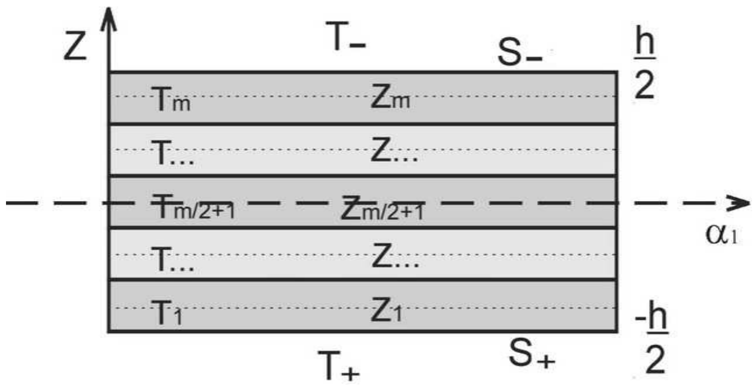


Рис. 1.

2. В работе [4] рассмотрена задача о гармонических колебаниях цилиндрической оболочки в однородном и неоднородном температурном поле. Ниже рассмотрим эту задачу, варьируя градиент температуры на лицевых поверхностях оболочки $dT = |T_+ - T_-|$. Пусть цилиндрическая оболочка находится под воздействием гармонической поверхностной нагрузки, распределенной по цилиндрической панели в центральной части оболочки. Для определенности взяты граничные условия, соответствующие жесткому закреплению. При неучете градиента температуры по толщине температура тела оболочки в этом случае принималась равной $T(Z) = (T_- + T_-)/2$. Расчетные параметры: $Re(E_f) = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $Re(\nu_{12f}) = 0.3$; $\rho_f = 1730$ кг/м^3; $V_f = 0.5$.

Построение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) производится с шагом по частоте $\triangle\Omega = 3.6 \cdot 10^{-4}$, и с интенсивностью амплитуды нагрузки $p_3 = 10^5$ Па, в диапазоне $\Omega = 0 \div 0.228$ с удержанием первых 11 мод гармонических колебаний ($moda = 0 \div 10$). Геометрические параметры оболочки: $L = 5R$, $R = 0.2$ м, Общая толщина пакета $h = 0.002$ м. На рис. 2 представлены АЧХ, рассчитанные с учетом (штриховая линия) и без учета (сплошная линия) влияния градиента температуры. В табл. 1, 2 приведены значения резонансных частот и амплитуд для неоднородной и однородной по температуре задачи. При этом сравнивались первые 5 собственных частот ($\Omega_1 \div \Omega_5$).

Неучет градиента температуры по толщине приводит к завышению жесткостных характеристик полимера и всей конструкции в целом, что приводит к существенным погрешностям в определении АЧХ. Особенно явно это проявляется

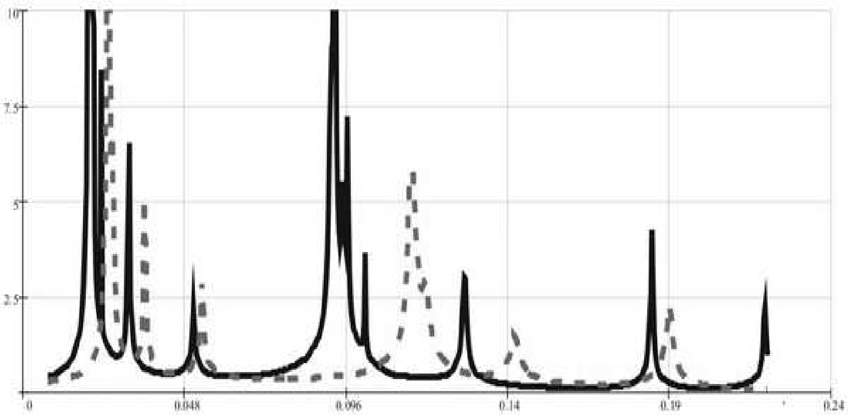


Рис. 2.

	ω_{gr}			W_{gr}		
dT	10	40	60	10	40	60
Ω_1	0.025	0.019	0.019	29.43	18.12	33.10
Ω_2	0.043	0.031	0.029	1.85	6.52	7.64
Ω_3	0.076	0.05	0.044	0.75	2.17	3.87
Ω_4	0.121	0.092	0.089	4.23	11.07	16.90
Ω_5	0.187	0.131	0.120	0.75	2.99	3.83

Таблица 1. ω_{gr},W_{gr} — частота и амплитуда решения с учетом градиента температур по толщине.

	ω			W		
dT	10	40	60	10	40	60
Ω_1	0.028	0.025	0.023	10.08	22.95	28.09
Ω_2	0.048	0.036	0.032	1.27	5.08	9.96
Ω_3	0.08	0.053	0.045	0.67	2.88	6.32
Ω_4	0.139	0.120	0.105	2.74	5.78	9.29
Ω_5	0.198	0.146	0.126	0.66	1.47	2.86

Таблица 2. ω, W — частота и амплитуда соответственно без учета градиента температур

	ω_{gr}		W_{gr}		ω		W	
V_f	0.5	0.7	0.5	0.7	0.5	0.7	0.5	0.7
Ω_1	0.021	0.024	40.01	9.08	0.026	0.032	8.66	9.56
Ω_2	0.034	0.045	2.02	3.98	0.039	0.049	1.41	2.05
Ω_3	0.056	0.079	0.83	0.68	0.059	0.075	0.91	1.16
Ω_4	0.096	0.113	6.47	4.71	0.122	0.147	4.44	3.29
Ω_5	0.141	0.184	0.68	1.64	0.161	0.196	0.66	0.81

Таблица 3. ω, W — частота и амплитуда соответственно без учета градиента температур.

для собственных частот Ω_1, Ω_4, расчитанных с большим количеством мод гармонических колебаний $m = 4, 5, 6, 7, 8, 10$, погрешность в данном случае достигает $20\% - 25\%$. Не так существенно расхождение результатов для частот Ω_2, Ω_3, Ω_5 с гармониками $m = 1, 2$ — $5\% - 10\%$.

Также было рассмотрено влияние объемного содержания волокна в слоистом композите на решение поставленной задачи. Условия задачи оставались прежними, менялось только объемное содержание армирующих волокон в композитном материале V_f (табл. 3). На рис. 3 представлены АЧХ для случая $V_f = 0.7$, штриховая линия — с учетом влияния градиента температуры, сплошная линия — без учета.

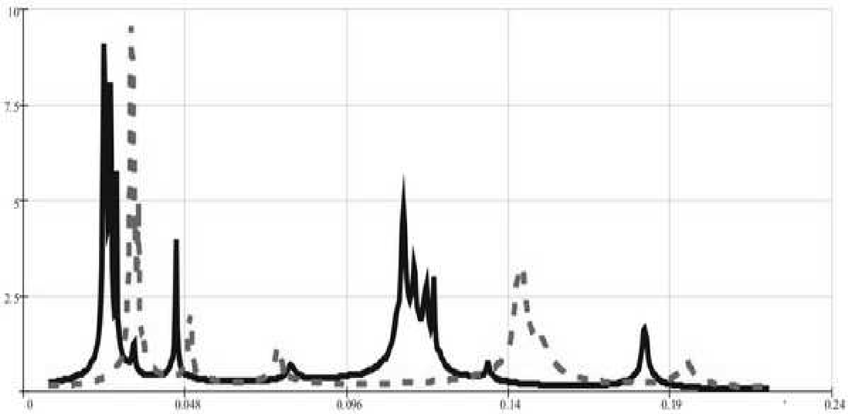


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение. 1988. 287 с.

[2] *Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д.* Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Соврем. пробл. мех. сплошной среды. Тр. II Междунар. конф. Ростов-н/Д: МП «Книга». 1997. Т. 1. С. 118–123.

[3] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

[4] *Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М.* Термовязкоупругие задачи стационарной динамики оболочек вращения из полимерного композита // Соврем. пробл. мех. сплошной среды. Тр. XI Междунар. конф. Ростов-на-Дону. 2007. С. 170–174.

Safronenko V. G., Trifonov V. V., Shutko V. M. *Forced vibrations of polymer composite shells of revolution in a inhomogeneous temperature field.* The problems of the vibrations of polymer-based composite cylindrical shell in a homogeneous and inhomogeneous transverse stationary temperature field. A numerical method for the study, a comparative analysis of the amplitude-frequency response and natural frequencies, obtained with and without temperature gradient along the thickness of the shell, depending on the temperature values given on the front surfaces of the shell. The influence of the volume content of fiber in a laminated composite solution to the problem.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ПРОГРАММЫ FLEXPDE ДЛЯ РАСЧЕТА СОСТАВНЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ СЕГНЕТОКЕРАМИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Скалиух А. С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Установлено, что прямое применение конечно-элементной программы к расчету пьезокерамических элементов не приводит к желаемому результату. Это связано с тем, что конечно-элементные матрицы системы линейных алгебраических уравнений имеют седловую структуру, а применяемые методы ее решения в этом случае не работают. В связи с этим было предложено использовать безразмерные уравнения электроупругости с определенным выбором масштабных множителей. Такой подход оказался эффективным для решения не только простых задач, но и задач, включающих в себя элементы из керамических материалов. В качестве примера приводится решение задачи о расчете статора пьезоэлектрического линейного двигателя.

Безразмерная форма уравнений электроупругости. Покажем, что пакет FlexPDE позволяет решать задачи для составных тел, включающих в себя пьезокерамические элементы. На первый взгляд это утверждение может вызвать недоумение. Ведь из описания программы следует, что с ее помощью можно решать системы дифференциальных уравнений в частных производных в дивергентной форме, к которой относятся и уравнения электроупругости. Однако первые же попытки решения простейшей статической трехмерной задачи о продольном растяжении поперечно поляризованного стержня прямоугольного сечения показывают, что получить численное решение, использовав форму уравнений электроупругости напрямую, не представляется возможным. Задачи модального анализа также не решаются. Выводимые на промежуточном этапе приближения собственных частот не удовлетворяют элементарным требованиям приближения сверху, а о сходимости вычислительного процесса ничего удовлетворительного сказать нельзя.

Тем не менее удалось разработать подход, позволяющий, используя вышеуказанную программу, получать приемлемые решения задач электроупругости. Этот подход базируется на следующих положениях. Во-первых, используется безразмерная форма уравнений, и во-вторых, специальным образом выбираются масштабные множители.

Переход к безразмерной форме осуществим стандартным образом, применяемом в теории размерностей [1] при использовании физических уравнений. Пусть для определенности, рассматриваются задачи модального анализа. При написании формул будем использовать стандартные обозначения суммирования по повторяющемуся индексу и обозначения производных с использованием запятой, индекс после которой указывает координату, по которой производится дифференцирование. Полная система уравнений электроупругости для амплитудных составляющих, как известно [2], включает в себя дифференциальные уравнения движения и уравнение электростатики диэлектриков,

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = -\rho\omega^2 u_i; \qquad D_{i,i} = 0,$$

геометрические соотношения Коши и уравнения, связывающие компоненты электрического поля с электрическим потенциалом,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \qquad E_i = -\varphi_{,i},$$

а также уравнения обобщенного закона Гука

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3; \quad \sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3; \\
\sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3; \quad \sigma_{23} = 2C_{44}\varepsilon_{23} - e_{15}E_2; \\
\sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1; \quad \sigma_{12} = (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{12}; \quad D_1 = 2e_{15}\varepsilon_{13} + g_{11}E_1; \\
D_2 = 2e_{15}\varepsilon_{23} + g_{11}E_2; \quad D_3 = e_{31}\varepsilon_{11} + e_{31}\varepsilon_{22} + e_{33}\varepsilon_{33} + g_{33}E_3;
\end{gathered}$$

Наиболее часто встречаются задачи с граничными условиями, когда на одной части поверхности задается вектор напряжений, а на другой вектор перемещения, и когда одна часть поверхности покрыта электродами, соединенными с генератором напряжений, а на другой части электроды отсутствуют. В задачах модального анализа граничные условия однородны:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0; \quad u_i|_{S_u} = 0; \\
\varphi|_{S_\varphi} = 0; \quad D_i n_i|_{S_D} = 0.
\end{gathered}$$

Анализ определяющих соотношений электроупругости показывает, что упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные имеют разные порядки: $C_{ij} \sim 10^{10}$, $e_{ij} \sim 10^0$, $g_{ij} \sim 10^{-10}$. Это приводит к тому, что элементы матрицы жесткости при конечно-элементном анализе будут иметь большой разброс в порядках. Кроме того, матрица имеет седловую структуру, что значительно осложняет ее численное решение. Если проигнорировать отмеченные выше особенности задачи и попытаться решать ее средствами пакета FlexPDE обычным способом, то мы получим неверное решение или ситуации расходимости процесса даже для статических задач.

Перейдем к безразмерной форме уравнений, для чего введем произвольные множители всех функций.

$$\begin{gathered}
x = l_0\,\hat{x}, \quad y = l_0\,\hat{y}, \quad z = l_0\,\hat{z}, \quad u_i = u_0\,\hat{u}_i, \quad \varphi = \varphi_0\,\hat{\varphi}, \\
\sigma_{ij} = \sigma_0\,\hat{\sigma}_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\,\hat{\varepsilon}_{ij}, \quad E_i = E_0\,\hat{E}_i, \quad D_i = D_0\,\hat{D}_i, \quad \rho = \rho_0\,\hat{\rho}, \quad \omega = \omega_0\,\hat{\omega}, \\
C_{ij} = C_0\,\hat{C}_{ij}, \quad e_{ij} = e_0\,\hat{e}_{ij}, \quad g_{ij} = g_0\,\hat{g}_{ij}
\end{gathered}$$

После подстановки этих соотношений в уравнения и граничные условия и учета условия инвариантности уравнений получаем, что 12 введенных коэффициентов удовлетворяют 7 соотношениям. Значит пять из них могут быть выбраны произвольно. Выберем в качестве произвольных следующие коэффициенты:

$$l_0, C_0, \rho_0, \varepsilon_0, g_0.$$

Положим $\varepsilon_0 = 1$, а остальные коэффициенты положим равными физическим характеристикам материала, например

$$l_0 = L, \quad C_0 = C_{11}, \quad \rho_0 = \rho, \quad g_0 = -\epsilon_{33},$$

здесь L — характерный линейный размер тела. Отличительной особенностью в выборе значений коэффициентов является введение знака «минус» для коэффициента g_0. Это сделано с тем расчетом, чтобы матрица жесткости не имела седловой структуры. Дело в том, что используемые решатели в конечно-элементном комплексе FlexPDE очень плохо работают с такими матрицами, можно даже сказать, что они «не решают» уравнений с такими матрицами. Однако ситуацию исправляет искусственно введенный отрицательный множитель.

Теперь остальные коэффициенты достаточно просто определяются из полученных выше соотношений:

$$u_0 = l_0, \quad \sigma_0 = C_0, \quad e_0 = \sqrt{-C_0\, g_0}, \quad \omega_0 = \frac{C_0}{\rho_0\, l_0^2}$$
$$E_0 = \sqrt{-\frac{C_0}{g_0}}, \quad D_0 = \sqrt{-C_0\, g_0}, \quad \varphi_0 = l_0\sqrt{-\frac{C_0}{g_0}}.$$

Задача о продольных колебаниях поперечно поляризованного стержня. В качестве примера рассмотрим консольно закрепленный керамический стержень прямоугольного сечения с электродами на верхней и нижней лицевой поверхностях. Зададим в программе небольшую точность вычислений $errlim = 0.1$ и выберем параметр $mode = 25$. Выберем также в качестве материала керамику ЦТС-19, и положим следующие размеры (система СИ): длина $L = 0.05$, ширина $a = 0.01$, толщина $h = 0.005$. Из полученного множества выберем только те решения, которые соответствуют продольным колебаниям стержня. Три первые моды колебаний приведены на рис. 1–3, там же указаны и безразмерные частоты. Обычно, чтобы удостовериться в правильности решения используют особенности

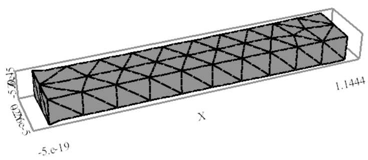


Рис. 1. $\Omega_1 = 1.209$.

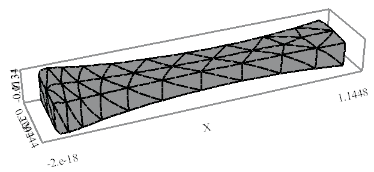


Рис. 2. $\Omega_2 = 3.606$.

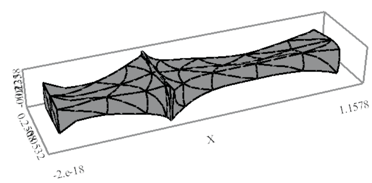


Рис. 3. $\Omega_3 = 5.937$.

решения задачи или сравнивают его с известным. В нашем случае такой особенностью задачи является то, что продольные колебания возникают на нечетных гармониках, т. е. должны быть выполнены отношения $\Omega_3 : \Omega_2 : \Omega_1 = 5 : 3 : 1$. В нашем случае в силу малой точности $errlim = 0.1$, которая была выбрана при решении задачи, имеем такое отношение $\Omega_3 : \Omega_2 : \Omega_1 = 5.937 : 3.606 : 1.209 = 4.91 : 2.98 : 1$, что несомненно говорит о верных расчетах. Если увеличить точность решения задачи до $errlim = 0.2$, то время решения задачи увеличивается в 2 раза, но получающиеся отношения $\Omega_3 : \Omega_2 : \Omega_1 = 4.91 : 2.98 : 1$ не изменяется.

Отметим, что существенное увеличение времени счета является главным недостатком этой программы при использовании ее в технических расчетах.

Расчет статора линейного пьезокерамического двигателя.

Продемонстрируем возможность применения программного комплекса FlexPDE к решению некоторых инженерных задач. Возьмем к примеру линейный пьезокерамический двигатель конструкции, показанной на рис. 4. Принцип

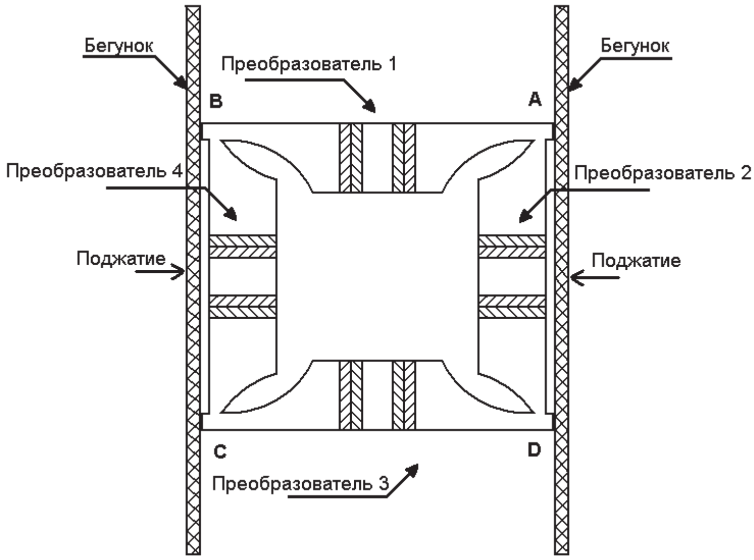


Рис. 4. Схема пьезодвигателя.

работы такого двигателя заключается в создании круговых движений концов A, B, C, D таким образом, чтобы когда точки A, B контактируют с бегунками, точки C, D в это время его бы не касались, и наоборот. Это достигается подачей разности напряжений на электроды преобразователей с соответствующей разностью фаз. Неподвижная часть двигателя — статор — выполнена таким образом, чтобы обеспечить круговые движения его концов. Последовательные парные механические воздействия концов статора на бегунки обеспечивают их движение в том или в другом направлениях. Основной задачей при расчете статора является нахождение первых собственных частот, чтобы в дальнейшем подавать разность потенциалов по гармоническому закону с частотой, равной первой собственной частоте или близкой к ней. Конструкция статора выполнена из разных материалов и включает в себя четыре пьезокерамических преобразователя, каждый из которых состоит из четырех керамических пластин, поляризованных по толщине, с алюминиевой вставкой между парами преобразователей. Угловые корпусные элементы изготовлены из стали. Крепление преобразователей к корпусным элементам осуществляется с помощью шпилек и гаек, не показанных на рисунке. Поскольку в нашу задачу входит лишь намерение показать, что конечно-элементную программу FlexPDE можно применять при расчете составных конструкций, рассмотрим целостную конструкцию без учета крепежных элементов.

Для определения собственных частот проведем модальный анализ статора на основе модели плоского напряженного состояния, учитывая, что он имеет две оси симметрии. Это позволяет рассмотреть только четверть составной конструкции. На рис. 5 изображена первая форма колебаний. На рис. 6 представлено поле перемещений на первой форме. Зададимся параметром ошибки $errlim = 0.001$ и от-

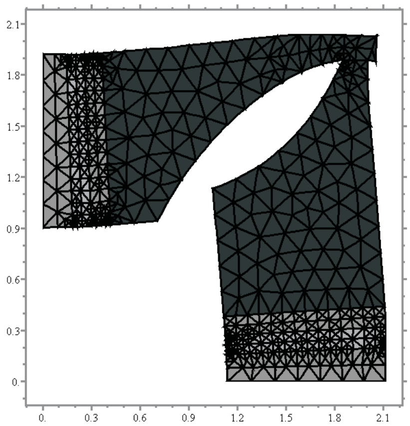


Рис. 5. 1-ая форма колебаний.

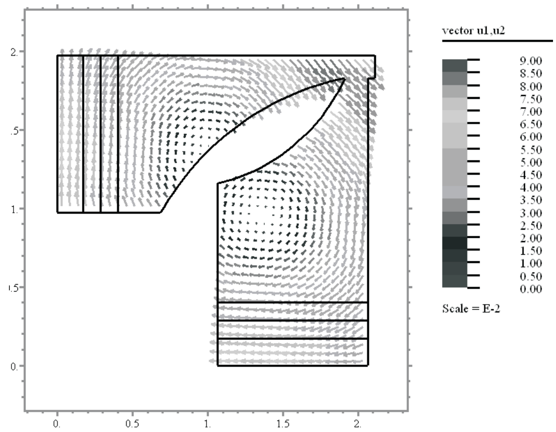


Рис. 6. Поле перемещений.

метим, что при решении плоских задач время решения при повышении точности возрастает не так сильно, как при решении пространственных задач. Из рисунков хорошо видно, что конструктивные вырезы доставляют части статора круговые вращения, заставляя соответствующие его концы двигаться под углом к бегункам. Учитывая гармонический характер движения, можно сказать, что они движутся по замкнутым траекториям. Соответствующая разность фаз на преобразователях вызывает необходимые движения линейного ротора.

Таким образом можно отметить, что с помощью программного комплекса FlexPDE можно решать инженерные задачи для составных электроупругих тел и даже проводить модальный анализ связанных задач электроупругости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шаповалов Л. А.* Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.

[2] *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

Skaliukh A. S. *Using finite-element program.* At a macroscopic level the dependence of deformations on stress is described with the help of the ordinary differential equation.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ КОМПЛЕКСЕ ACELAN

Соловьев А. Н.[*, **, ***], **Оганесян П. А.**[*]

[*]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

[**]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[***]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Разработан модуль конечно-элементного комплекса ACELAN для моделирования функционально неоднородных материалов, в том числе пьезоэлектрических керамик с неоднородной поляризацией. Приведены примеры использования разработанного программного обеспечения для расчета эффективности пьезоэлектрических преобразователей.

Введение. Композитные и функционально градиентные материалы играют важную роль при создании многих современных технических устройств в приборостроении, авиастроении медицине и др. Поскольку физическое моделирование таких материалов дорого и не всегда возможно, проектирование этих устройств опирается на теоретическое исследование напряженно деформированного состояния, которое в большинстве случаях возможно лишь на основе численного математического моделирования, например в рамках метода конечных элементов (МКЭ). Поэтому разработка программного обеспечения (ПО), позволяющего проводить такое моделирование представляется весьма актуальной и в настоящей работе проводится для конечно- элементного комплекса ACELAN. Один класс функционально неоднородных материалов возникает при поляризации керамики, когда электродное покрытие имеет сложную геометрию. Обзор работ и моделей этого направления широко представлены в монографии [1].

В настоящей статье разработан модуль конечно-элементного комплекса ACELAN для моделирования функционально неоднородных материалов, в том числе пьезоэлектрических керамик с неоднородной поляризацией. При этом координатный закон распределения неоднородных свойств материала предполагается известным в виде либо функциональной зависимости, либо дискретного набора значений величин соответствующих физических свойств в определенных узлах, полученного, например, с помощью модуля определения неоднородной поляризации ACELAN [1]. Описана методика интерполяции этих свойств на используемую конечно-элементную сетку, приведены примеры расчета эффективности пьезоэлектрических преобразователей с неоднородной поляризацией.

Постановка задач для тел с неоднородными свойствами. Математическая модель составного упругого, электроупругого и акустического тела с неоднородными свойствами твердых тел состоит из краевой задачи

для упругих и электроупругих тел:

$$\rho_{pk}\ddot{u} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{u} - \nabla\cdot\sigma = f_j,\ \nabla\cdot D = 0, \tag{1}$$

$$\sigma = c_j^E \cdot\cdot(\varepsilon + \beta_{dj}\dot{\varepsilon}) - e_j^T \cdot E, D + \varsigma_d \dot{D} = e_j \cdot\cdot (\varepsilon + \varsigma_d \dot{\varepsilon}) + \epsilon_j^S \cdot E \qquad (2)$$

$$\varepsilon = (\nabla u + \nabla u^T)/2, \ E = -\nabla\varphi \qquad (3)$$

для акустической среды:

$$\frac{1}{\rho_j c_j^2}\dot{p} + \nabla \cdot v = 0; v = \nabla\psi, \rho_j \dot{v} = \nabla \cdot \sigma; \sigma = -pI + b\nabla v \qquad (4)$$

где σ — тензор напряжений, ρ — плотность тела, ε — тензор деформаций, u — вектор перемещений, D — вектор электрической индукции, E — вектор напряженности электрического поля, f — вектор массовых сил, φ — электрический потенциал, α, β, ς — коэффициенты демпфирования, c^E, e, ϵ^S — тензоры упругих констант, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, индекс j отвечает номеру тела в модели. В уравнениях (4): c — скорость звука, v — вектор скоростей, ψ — потенциал скоростей, p — звуковое давление. К уравнениям (1)–(4) добовляются механические, электрические и акустические граничные условия. Тензоры c^E, e, ϵ^S и плотность тел будем считать функциями от положения точки в теле:

$$\rho_{pk} = \rho_{pk}(x) \qquad c_j^E = c_j^E(x) \qquad \epsilon_j^S = \epsilon_j^S(x) \qquad e_j^T = e_j^T(x) \qquad (5)$$

Для учета степени поляризации предлагается использовать следующую зависимость механических, электрических свойств материалов:

$$c = c^i + |P|(c^a - c^i), g = g^i + |P|(g^a - g), e = |P|e^a \qquad (6)$$

Эти соотношения описывают переход от изотропного состояния к анизотропному в зависимости от степени поляризации, причем индексом i обозначены тензоры для изотропного состояния, а индексом a — для анизотропного.

Интерполяция неоднородных свойств. При реализации алгоритма учета неоднородных свойств на этапе формирования конечно-элементных матриц модулю передается заранее созданный набор коэффициентов, описывающих свойства материала для каждого конечного элемента, либо узла интегрирования. Для генерации таких входных данных была создана специальная графическая оболочка, в которой можно задать неоднородности для конкретной модели, построенной в ACELAN и визуализировать их.

Для блока восстановления функций были реализованы несколько алгоритмов построения сплайнов, во-первых, thin-plate spline, отвечающий модели бесконечно протяженной пластины, деформируемой в некотором наборе точек лишь изгибом. Минимизация функционала гладкости этой пластины, описывающего полную свободную энергию изогнутой упругой пластины, приведет нас к решению задачи. Вид этого функционала:

$$J_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\right] dx\, dy \to \min . \qquad (7)$$

Решение такой задачи $\varphi(x_i,\, y_i) = f_i\,, \quad i = \overline{1,\, N}$ имеет общий вид

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, r_i^2 \ln r_i^2 + c_{N+1} + c_{N+2}\, x + c_{N+3}\, y, \ \ r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \qquad (8)$$

Чтобы определить коэффициенты c_i, нужно решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi\left(x_j,\,y_j\right)=\sum_{i=1}^{N}c_i r_{ij}^2\ln r_{ij}^2+c_{N+1}+c_{N+2}x_j+c_{N+3}y_j=f_j\,,\\ r_{ij}^2=(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2,\quad j=\overline{1,N}\,;\\ \sum_{i=1}^{N}c_i=0;\qquad \sum_{i=1}^{N}x_ic_i=0;\qquad \sum_{i=1}^{N}y_ic_i=0\,.\end{array}\right\}\tag{9}$$

Матрица системы не является положительно-определенной, на главной диагонали — нули. Для решения нужно используется метод Гаусса с выбором ведущего элемента. Плюс этого подхода — простота реализации.

Однако существуют и более эффективные способы построения сплайнов. Рассмотрим теорию интерполяционных D^m-сплайнов, которые позволяют получить функции с заданной степенью гладкости. Возникает следующая задача на минимизацию функционала гладкости:

$$J_m\left(\varphi\right)=\left\|\nabla^m\varphi\right\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\varphi)^2d\Omega\right)^{1/2}\tag{10}$$

$$J_m\left(\varphi\right)\to\min_{\varphi\in\Theta},\qquad \Theta=\left\{\,\varphi\in W_2^m\left(\mathrm{R}^n\right)\ \mid\ \varphi\left(t^i\right)=f^i,\ i=\overline{1,N}\right\}\ ,$$

t^i, $i{=}\overline{1,N}$ — это узлы интерполяции, f_i, $i{=}\overline{1,N}$ — заданные числа (значения восстанавливаемой функции в узлах интерполяции). Вывод этого уравнения приводится в книге О. В. Ашкеназы [2]. При условии, что количество точек интерполирования хотя бы вдвое превосходит заданную степень гладкости m (в рассматриваемом случае это выполняется практически всегда), существует единственное решение задачи (10), общий вид которого:

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i\,E_m\left(t,\ t^i\right)\ +p(t),\quad t\in\mathrm{R}^n\tag{11}$$

С точностью до положительного множителя:

$$E_m(u,v)=\left\{\begin{array}{ll}(-1)^{n/2-1}\left|\,u-v\right|^{2m-n}\ln\left|u-v\right|\ , & n=2k,k\in Z\,;\\ (-1)^{(n-1)/2}\ \left|\,u-v\right|^{2m-n} & ,\ \ n=2k+1,k\in Z\end{array}\right.\tag{12}$$

а второе слагаемое является многочленом степени $m-1$:

$$p(t)=\sum_{\nu=1}^{M}d_\nu\,\phi_\nu(t)\in P_{m-1},\tag{13}$$

причем $\phi_\nu(t)$, $\nu=\overline{1,M}$, $M{=}C_{n+m-1}^n$ — это различные одночлены степени, меньшей или равной m. Для определения коэффициентов сплайна нужно решить следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll}\sum_{j=1}^{N}c_jE_m\left(t^i,t^j\right)+\sum_{\nu=1}^{M}d_\nu\phi_\nu\left(t^i\right)=f^i, & i=\overline{1,N};\\ \sum_{j=1}^{N}c_j\phi_\nu\left(t^j\right)=0\ , & \nu=\overline{1,M}.\end{array}\right\}\tag{14}$$

Для решения этой системы использовался алгоритм Ж. Менге. Он заключается в выделении некоторого подмножества точек для построения системы фундаментальных многочленов, порядок которой зависит от выбранной степени гладкости сплайна. Таким образом исходная система разделяется на две — более маленькую для нахождения системы многочленов и основную для нахождения сплайна. Основная матрица в этом методе является положительно определенной и симметричной, что позволяет использовать быстрый и устойчивый метод квадратного корня для её решения.

В качестве одного из источников дискретных данных для модуля восстановления функций был выбран модуль, описанный в [1]. Этот модуль входит в комплекс ACELAN и позволяет строить поле поляризации для неоднородного пьезоэлектрического тела. Соответственно, можно получать данные о том, как поляризовано тело при конкретной конфигурации электродов и геометрии самого тела. Это позволило провести тестирование новых модулей с использованием данных, отвечающих реальному состоянию неоднородно поляризованного тела.

Численный пример. Рассмотрим работу описанного ПО на примере исследования неоднородно поляризованного пьезокерамического преобразователя, схема которого и неоднородная поляризация (половина осевого сечения) представлены на рис. 1.

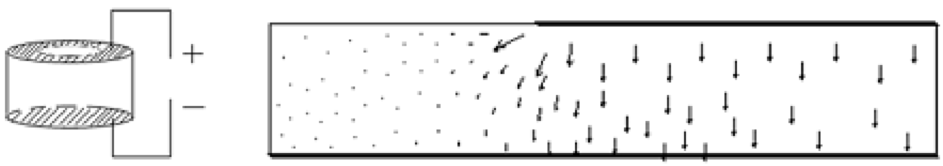


Рис. 1. Схема преобразователя и поле поляризации.

Исследовалась зависимость коэффициента электромеханической связи (КЭМС) преобразователя на первой радиальной моде от изменения внутреннего радиуса электрода на верхней поверхности. Для вычисления КЭМС воспользуемся формулой:

$$K^2 = (f_a^2 - f_r^2)/f_a^2 \tag{15}$$

здесь индексом a отмечена частота антирезонанса, индексом r — частота резонанса.

Эти дискретные данные являются входными для интерполяции на более мелкую сетку, на рис. 2 представлено два способа учета неоднородной поляризации в первом учитывается только направление вектора (слева) во втором и степень поляризации (справа) по соотношению (6).

На рис. 3 представлена зависимость КЭМС от площади электродного покрытия для трех моделей керамики: крупный пунктир — однородная поляризация, мелкий пунктир — учет направления вектора поляризации, сплошная линия — учет и степени поляризации.

Представленный модуль может быть эффективно использован для решения обратных задач идентификации неоднородных свойств на основе разработанного ранее оптимизационного модуля на основе генетических алгоритмов [3], так как

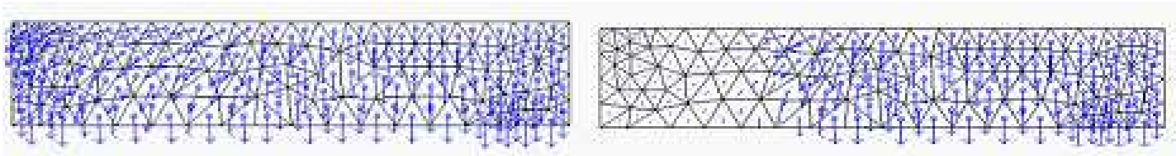


Рис. 2. Восстановленное поле вектора поляризации.

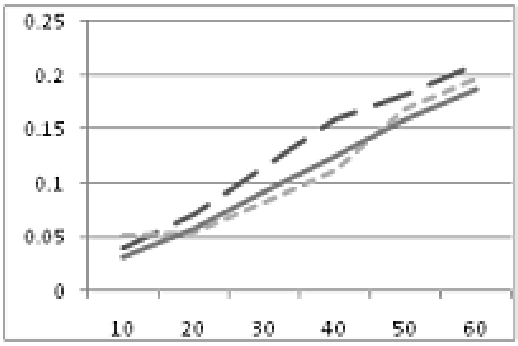


Рис. 3. Зависимость КЭМС от площади верхнего электрода.

может использовать в качестве входной информации дискретный набор данных о неоднородных свойствах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержки РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-01-00194-а, 10-08-00093-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белоконь А. В., Скалиух А. С.* Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М: Физматлит, 2010. 328 с.

[2] *Ашкеназы В. О.* Сплайн-поверхности: Основы теории и вычислительные алгоритмы. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2003. 82 с.

[3] *Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих тел // Вычислительные технологии 2006. Т. 11 , № 3. С. 14–26.

Soloviev A. N., Oganesyan P. A. *Finite-element modeling of inhomogeneous electroelastic materials*. A module of finite-element package ACELAN for modeling of inhomogeneous materials (including piezoceramics) was created. Some examples of using it for calculating the efficiency of piezoelectric transducers are included.

РАСЧЕТ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ ПО ПОЛНОЙ ДИАГРАММЕ КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

Стружанов В. В.
Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Основная проблема при диагностике и контроле заключается в том, что подавляющее число физических величин не может быть измерено непосредственно. Непосредственному измерению поддаётся лишь ограниченный набор физических параметров, на величину которых остальные (неизмеримые) параметры оказывают лишь опосредованное влияние. Отсюда возникает задача по определению физических величин по результатам их проявлений.

1. Пусть изучаемый объект (физическая величина) характеризуется элементом x_T (скаляр, функция, вектор и т. п.), принадлежащим множеству X. Элемент x_T недоступен для прямого измерения и известно лишь его проявление u_T, принадлежащее множеству U [1]. Полагаем, что известно отображение $F : X \to U$, которое каждому элементу из X ставит в соответствие элемент из U. Это отображение устанавливает связь между неизмеримыми параметрами и параметрами, которые поддаются измерению [1]. Таким образом, данное отображение определяет операторное уравнение

$$Fx = u. \tag{1}$$

Очевидно, что уравнение (1) имеет решение, принадлежащее X, только для таких элементов $u \in U$, которые принадлежат множеству FX.

Задача определения x (решения уравнения (1)) из множества X по данным $u \in U$ называется корректной если:

1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение $x \in X$;

2) решение определяется однозначно;

3) решение должно непрерывно зависеть от входных данных (устойчивость задачи).

Элемент u_T обычно получается путём измерений и поэтому известен приближённо. Поэтому u_T, вообще говоря, не принадлежит множеству FX. Отображение F во многих случаях является таким, что обратное отображение F^{-1} не является непрерывным [1]. Тогда в качестве приближённого решения нельзя брать точное решение уравнения (1) с приближённой правой частью так как:

1) такого решения может не существовать, поскольку u может не принадлежать множеству FX (не выполняется первое условие корректности);

2) такое решение, даже если оно существует, не будет обладать свойством устойчивости, поскольку обратное отображение не является непрерывным (не выполняется третье условие корректности).

Отсутствие устойчивости во многих случаях делает невозможной физическую интерпретацию результатов измерений. Таким образом, для некорректных задач возникает вопрос: что надо понимать под приближённым решением таких задач [1, 2].

2. Одним из основных методов построения решений некорректных задач является метод подбора [1]. Он состоит в том, что вычисляется левая часть уравнения (1) Fx для некоторого подмножества X_1 элементов x, принадлежащих X, т. е. решается прямая задача. В качестве искомого приближённого решения выбирается такой элемент $x \in X_1$, для которого невязка $\rho(Fx, u)$ минимальна на X_1. Здесь $\rho(Fx, u)$ — расстояние в некоторой метрике между элементами Fx и элементом u. Обычно в качестве X_1 выбирается семейство элементов x, зависящих от конечного числа числовых параметров так, что X_1 является замкнутым множеством конечномерного пространства. Таким образом, находится, так называемое, квазирешение [1] уравнения (1).

3. В качестве примера рассмотрим кручение цилиндрического образца длиной L и радиусом поперечного сечения R. Если φ — абсолютный угол закручивания, то $\vartheta = \varphi/L$ относительный угол закручивания и $\gamma^m = R\varphi/L$ — максимальный сдвиг [3]. Распределение деформаций сдвига по радиусу линейно, поэтому уравнение, связывающее крутящий момент M и зависимость $\tau(\gamma)$, имеет вид [3]

$$\frac{2\pi L^3}{\varphi^3}\int_0^{a\varphi}\tau(\gamma)\gamma^2 d\gamma = M(\varphi),$$

где $a\varphi = R\varphi/L$, $\tau(\gamma)$ — функция, определяющая свойства материала при чистом сдвиге. Запишем данное уравнение в виде

$$\int_0^{a\varphi} K(\varphi,\gamma)\tau(\gamma)d\gamma = F(\varphi), \tag{2}$$

где $F(\varphi) = M(\varphi)/2\pi L$, $K(\varphi,\gamma) = K_1(\varphi)K_2(\gamma)$, $K_1(\varphi) = \varphi^{-3}$, $K_2(\gamma) = \gamma^2$. Если известна зависимость $\tau(\gamma)$, то выражение (2) определяет зависимость $M(\varphi)$ (прямая задача).

Поставим обратную задачу, формулировка которой заключается в следующем: по известной зависимости $M(\varphi)$, полученной из эксперимента, требуется определить зависимость $\tau(\gamma)$, характеризующую свойства материала при чистом сдвиге.

Перейдём от уравнения (1) к системе алгебраических уравнений. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\int_0^{a\varphi}\tau(\gamma)\gamma^2 d\gamma = f(\varphi), \tag{3}$$

где $f(\varphi) = F(\varphi)K_1^{-1}(\varphi)$. Введём на отрезке $[0, \varphi_Z]$ сетку узлов $\varphi_i = ih$, $i = 1, ..., n$, $nh = \varphi_Z$. Здесь φ_Z — предельное значение угла закручивания цилиндра, h — шаг разбиения. Представим теперь уравнение (3) в виде системы уравнений

$$\Sigma_{i=1}^{j}\int_{a\varphi_{i-1}}^{a\varphi_i}\gamma^2\tau(\gamma)d\gamma = f_j, \qquad j = 1, ...n.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{a\varphi_{i-1}}^{a\varphi_i}\gamma^2\tau(\gamma)d\gamma = f_i - f_{i-1}. \tag{4}$$

Здесь $a\varphi_i = \gamma_i^m$, $f_i = f(\varphi_i)$, $\varphi_0 = 0$, $f_0 = 0$. Аппроксимируя теперь функцию $\tau(\gamma)$ на отрезках $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ линейной функцией $\tau = \tau_{i-1} + \alpha_{i-1}(\gamma - \gamma_{i-1})$, где $\tau_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, получаем, из (4) после интегрирования и некоторых преобразований треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_0 \frac{a^4 \varphi_1^4}{4} = f_1, \tag{5}$$

$$\frac{\alpha_{i-1} a^4}{12}(3\varphi_i^4 - 4\varphi_{i-1}\varphi_i^3 + \varphi_{i-1}^4) + \frac{a^4}{3}\left(\varphi_i^3 - \varphi_{i-1}^3\right) \Sigma_{j=0}^{i-2} \alpha_j \left(\varphi_{j+1} - \varphi_j\right) = \\ = f_i - f_{i-1}, \qquad i \geqslant 2. \tag{6}$$

Сначала из уравнения (5) находим величину α_0 и подставляем её в уравнение (6) при $i = 2$. Из данного уравнения вычисляем величину α_1 и подставляем её в уравнение (6) при $i = 3$ и т. д. Очевидно, что система уравнений (5), (6) однозначно разрешима при любой правой части. После определения коэффициентов α_i напряжения в концах отрезков вычисляем исходя из вида линейной аппроксимации. Таким образом, восстанавливается диаграмма $\tau(\gamma)$.

Отметим, что коэффициенты α_i есть инкрементальные (касательные) модули сдвига G_i^p.

Рассмотрим множество X, состоящее из заданных на отрезке $[0, \gamma_Z]$, где $\gamma_Z = a\varphi_Z$, всевозможных непрерывных функций $\tau(\gamma)$ таких, что $\tau(0) = 0$. Образ этого множества при отображении, осуществляемым оператором (1), определяет множество Y, элементами которого являются функции $M(\varphi)$. Считаем, что задача имеет точные исходные данные, если они заданы функцией $M_T \in Y$.

Возьмём для стержня длиной $L = 10$ мм и радиусом поперечного сечения $R = 1$ мм функцию $\tau_T \in X$, заданную выражениями

$$\tau_T = \begin{cases} G\gamma, & 0 \leqslant \gamma \leqslant 0.003; \\ 23.08 + G_1^p(\gamma - 0.003), & 0.003 \leqslant \gamma \leqslant 0.007; \\ 38.46 + G_2^p(\gamma - 0.007), & 0.007 \leqslant \gamma \leqslant 0.009, \end{cases} \tag{7}$$

где $G = 7692$ кг/мм^2, $G_1^p = 3846$ кг/мм^2, $G_2^p = -19231$ кг/мм^2. Решая прямую задачу, находим

$$M_T = \begin{cases} \pi 384.6\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 3 \cdot 10^{-3}; \\ 2\pi\left(11.54 + 96.15\varphi - \frac{0.26 \cdot 10^{-4}}{\varphi^3}\right), & 3 \cdot 10^{-3} \leqslant \varphi \leqslant 7 \cdot 10^{-3}; \\ 2\pi\left(173.08 - 480.78\varphi - \frac{4.65 \cdot 10^{-3}}{\varphi^3}\right), & 7 \cdot 10^{-3} \leqslant \varphi \leqslant 9 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \tag{8}$$

Используя функцию (8), определяем $f_T(\varphi)$. Задавая затем некоторый шаг разбиения h, находим величины f_{iT}, решаем систему (5), (6) и вычисляем значения τ_i, γ_i . Проведённые расчёты показали, что при любом шаге разбиения величины $\tau_i = \tau_{iT}(\gamma_i)$, т. е. получаем функцию τ_T (7).

Значения функции M определяются путём измерений в экспериментах на кручение и потому известны приближённо. Пусть M_Δ такая приближённая функция.

В этом случае речь может идти лишь о нахождении приближённого к τ_T решения уравнения (2). При этом M_Δ, вообще говоря, не принадлежит множеству Y и приближённого решения при $f = f_\Delta$ может не существовать. Если такое решение даже и существует, оно не будет обладать свойством устойчивости.

Моделируя данную ситуацию, оставим в значениях f_{iT} только один знак после запятой. Для полученных таким образом приближённых данных $f_{i\Delta}$ решим обратную задачу, используя систему (5), (6). В результате расчётов при $h = 0.0001$ получаем характерную пилообразную ломаную.

Причина появления данного решения при неточном задании исходных данных заключается в том, что уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение Вольтера первого рода, которое является классическим примером некорректной задачи [4]. Для некорректных задач не выполняется третье условие корректности по Адамару, а именно, сколь угодно малым возмущениям исходных данных соответствуют большие изменения решения. Поэтому и возникают решения в виде пилообразных функций [4].

В этом случае речь может идти лишь о нахождении приближённого к τ решения уравнения (2). В качестве приближённого решения (квазирешения) берётся такой элемент τ_*, на котором невязка $\rho(A\tau_*, M_\Delta)$ достигает минимума, т. е.

$$\rho(A\tau_*, M_\Delta) = \inf \rho(A\tau, M_\Delta) \tag{9}$$

Здесь A — оператор уравнения (2), ρ — расстояние в некоторой метрике.

Осуществим построение приближённого решения, применяя следующий алгоритм подбора. Пусть до точки C приближённая диаграмма $\tau(\gamma)$ известна и из этой точки выходит ломаная $CNLK$, являющаяся частью оставшейся несглаженной пилообразной ломаной (рис. 1).

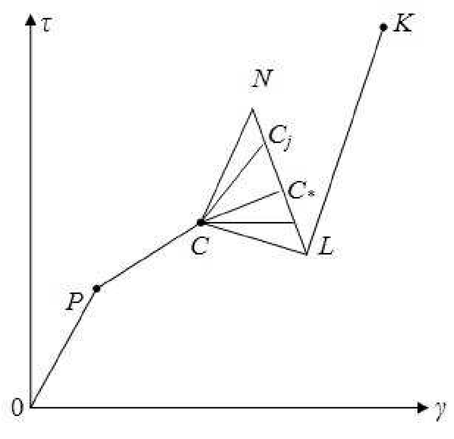


Рис. 1. Иллюстация алгоритма подбора решения.

Разбиваем отрезок NL точками C_j (j — достаточно большое число) и решаем прямую задачу для диаграмм $OPCC_j$. Из полученного множества зависимостей $M_j(\varphi)$ находим ту, которая удовлетворяет неравенству (9). Таким образом, определяется точка C_* (рис. 1) такая, что прямой расчёт с использованием диаграмм $OPCC_*$ даёт кривую, достаточно близко расположенную к кривой $M_\Delta(\varphi)$.

Далее процесс повторяем с тем изменением, что вместо точки C берём уже точку C_*. Реализуя данный алгоритм при $\delta = 0.1$, получаем диаграмму $\tau_*(\gamma)$, которая незначительно отличается от диаграммы $\tau_a(\gamma) = \tau_T(\gamma)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-96018).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 320 с.

[2] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

[3] *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

[4] *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтера I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.

Struzhanov V. V. *The analysis of complete deformation curve of material for pure shear using the rotating diagram of cylindrical pattern.* A fundamental problem, which was occurring during the diagnostics and check, is that the overwhelming majority of quantity couldn't be measure directly. Only finite set of physical parameters is measurable straight. The rest of parameters (intangible parameters) are influence mediately. Hence the problem about definition of the quantities, using the manifestation results of this quantities, appears.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПРЕДНАГРЕВА НА ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ

Суворова Г. Ю.[*]**, Анджикович И. Е.**[**]
[*]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*
[**]*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассматривается плоская связанная динамическая задача о распространении термоупругих волн в преднапряженном слое, возникающих под действием осциллирующей тепловой нагрузки. Поверхность слоя предполагается свободной от механических напряжений, нижняя грань слоя жестко защемлена и теплоизолирована. Начальное напряженное состояние слоя создается за счет действия механических усилий и предварительного нагрева. Построена функция Грина термоупругой среды, исследованы ее дисперсионные свойства в широком диапазоне изменения параметров задачи.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим термоупругий слой, занимающий область $|x_1|,\ |x_2| \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant h$, его поверхность свободна от механических напряжений и теплоизолирована, нижняя грань жестко защемлена и теплоизолирована. Колебания $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ($\{u_1, u_2, u_3\}$ — компоненты вектора механических перемещений, u_4 — температура) инициируются осциллирующей распределенной в области $\Omega = \{|x_1| \leqslant 1, |x_2| \leqslant \infty\}$ на поверхности тепловой нагрузкой $q_4(x_1, x_2, t) = q_{40}(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$ ($q_{40} = -K_{33}\frac{\partial u_4}{\partial x_3}$ — ориентированная по нормали компонента теплового потока). Начальные деформации и температура в слое предполагаются однородными. Колебания предполагаются происходящими по гармоническому закону, поэтому все функции представляются в виде:

$$f = f_0 e^{-i\omega t}.$$

Рассмотрим плоскую задачу о колебаниях слоя под действием теплового потока $q_{40} = const$. Полагаем, что $u_2 \equiv 0$, все остальные параметры задачи удовлетворяют условиям:

$$f = f(x_1, x_3),\ \frac{\partial}{\partial x_2} f \equiv 0.$$

В общем случае колебания преднапряженной термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [1], [4–6]:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$K_{ik} u_{4,ik} = \frac{c_\varepsilon \rho_0 \theta_1}{\theta_0} \frac{\partial u_4}{\partial t} + \theta_1 Q^*_{ik} \frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь

$$\theta_{ij} = c^*_{ijkl} u_{k,l} - Q^*_{ij} u_4 \tag{3}$$

компоненты линеаризованного тензора Пиолы $\mathbf{\Theta}$ [3]. Участвующие в уравнениях (1)–(3) коэффициенты при однородной начальной деформации и преднагреве определяются выражениями

$$c^*_{ijkl} = \delta_{kj}\left(c_{ilmm}\frac{(\lambda_m^2-1)}{2} - (\theta_1-\theta_0)\,Q_{il}\right) + c_{ijkl}\lambda_j\lambda_k \tag{4}$$

$$Q^*_{ij} = \lambda_j Q_{ij}. \tag{5}$$

Задача рассматривается в безразмерных величинах [2, 4]:

$$x'_i = \frac{x_i\cdot\omega^*}{V_p},\quad t' = \omega^* t,\quad V_P = \sqrt{c_{11}/\rho_0}\ ,\quad u'_i = \frac{u_i\cdot\rho_0\omega^* V_p}{Q_{11}\theta_0}\ ,\ i = 1-3,\quad u'_4 = \frac{u_4}{\theta_0},$$

$$c'_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{1111}},\quad Q'_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_{11}},\quad K'_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_{11}},\quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}\ ,\quad \omega^* = \frac{c_\varepsilon c_{11}}{K_{11}}.$$

В формулах (1) – (5) c_{ijkl}, K_{ij}, α_{ij}, $Q_{kl} = \alpha_{ij}c_{ijkl}$ — компоненты тензоров упругих постоянных, коэффициентов удельной теплопроводности, теплового расширения, термоупругости, ρ_0 — плотность материала в естественном состоянии, c_ε — удельная теплоемкость. θ_0 и θ_1 — соответственно температура тела в недеформированном и начальном деформированном состоянии, $\lambda_k = 1+\delta_k$, где δ_k $(k = 1, 2, 3)$ — относительные удлинения волокон. Для упругих констант будет использоваться система обозначений Фойгта, в соответствии с которой пары в четырехмерных индексах, кроме пар 12, 13, 23, сворачиваются по правилу [1]: $11\to1$, $22\to2$, $33\to3$. Далее нули в индексах, экспоненты и штрихи опущены.

Граничные условия имеют вид: $x_3 = 0$:

$$\theta_{31} = 0 \tag{6}$$

$$\theta_{33} = 0 \tag{7}$$

$$u_{4,3} = \begin{cases} q_4, & x_1\in\Omega \\ 0, & x_1\notin\Omega \end{cases} \tag{8}$$

$x_3 = 0$:

$$u_1 = u_3 = 0 \tag{9}$$

$$u_{4,3} = 0 \tag{10}$$

2. Решение краевой задачи. После применения преобразования Фурье к системе уравнений движения, теплопроводности и граничным условиям по координате x_1 (α — параметр преобразования Фурье) их решение будем искать в виде:

$$U_1(\alpha, x_3, \omega) = -i\alpha\sum_{k=1}^{3} f_{1k}\left(C_k\,\mathrm{sh}\,\sigma_k x_3 + C_{k+3}\,\mathrm{ch}\,\sigma_k x_3\right),$$

$$U_3(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^{3} f_{3k}\left(C_k\,\mathrm{ch}\,\sigma_k x_3 + C_{k+3}\,\mathrm{sh}\,\sigma_k x_3\right), \tag{11}$$

$$U_4(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^{3} f_{4k} \left(C_k \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + C_{k+3} \operatorname{ch} \sigma_k x_3 \right).$$

В (11) σ_k находятся численно для каждого значения α и ω из характеристического уравнения. Для отыскания неизвестных коэффициентов $\boldsymbol{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ подставим представление решения (11) в граничные условия (6)–(10), получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{LC} = \mathbf{Q}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{Q} = \{0, 0, Q_4, 0, 0, 0\}$, Q_4 — образ Фурье q_4. Дисперсионное уравнение задачи: $\det \boldsymbol{L} = 0$.

Найдя C_k из (12), решение краевой задачи (1),(2),(6)–(10) можем представить в виде [4]:

$$\boldsymbol{u}\left(x_1, x_3\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \boldsymbol{k}\left(x_1 - \xi, x_3, \omega\right) \boldsymbol{q}\left(\xi\right) d\xi, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{k}\left(s, x_3, \omega\right) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{K}\left(\alpha, x_3, \omega\right) e^{-i\alpha s} d\alpha, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{K}\left(\alpha, x_3, \omega\right)$ — матрица-функция Грина задачи.

3. Исследование дисперсионных свойств преднапряженного термоупругого слоя. Представления (13) и (14) описывают перемещения и температуру в произвольной точке среды и позволяют проводить полное исследование динамического процесса в термоупругой среде. Ряд характеристик этого процесса, в частности дисперсионные свойства среды, можно исследовать на основе анализа подынтегрального выражения.

Для численных исследований выбран материал класса 6мм селенид кадмия, описанный в [3]. Ниже приведены его физические характеристики:

$$c_{11} = 7.41 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2, \quad c_{12} = 4.52 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2, \quad c_{13} = 3.93 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2,$$

$$c_{33} = 8.36 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2, \quad c_{44} = 1.32 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2, \quad Q_{11} = 0.621 \cdot 10^{6}\,\text{Н/(К} \cdot \text{м}^2),$$

$$Q_{33} = 0.551 \cdot 10^{6}\,\text{Н/(К} \cdot \text{м}^2), \quad c_{\varepsilon} = 260\,\text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad K_{11} = K_{33} = 9\,\text{Вт/(м} \cdot \text{К)},$$

$$\rho_0 = 5504\,\text{кг/м}^3, \quad \theta_0 = 280\,\text{К}.$$

На рис. 1–2 приведены графики максимума модуля элемента матрицы функции Грина $K_{34}(\alpha, \omega)$ (интенсивность в точках (α, ω)) рассматриваемой задачи. Введено обозначение $d\theta = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0}$.

На рис. 1 приведены дисперсионные кривые в случае, когда начальные механические напряжения отсутствуют, среда подвергается предварительному нагреву или охлаждению.

Из рис. 1 следует, что в отсутствие начальных механических напряжений предварительный нагрев ($d\theta = 0.3$) уменьшает фазовую скорость, в то время как предварительное охлаждение ($d\theta = -0.3$) увеличивает фазовую скорость. Также при преднагреве появляется дополнительная мода на данном диапазоне частот.

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые в случае, когда предварительное температурное воздействие отсутствует, среда подвергается предварительному сжатию или растяжению.

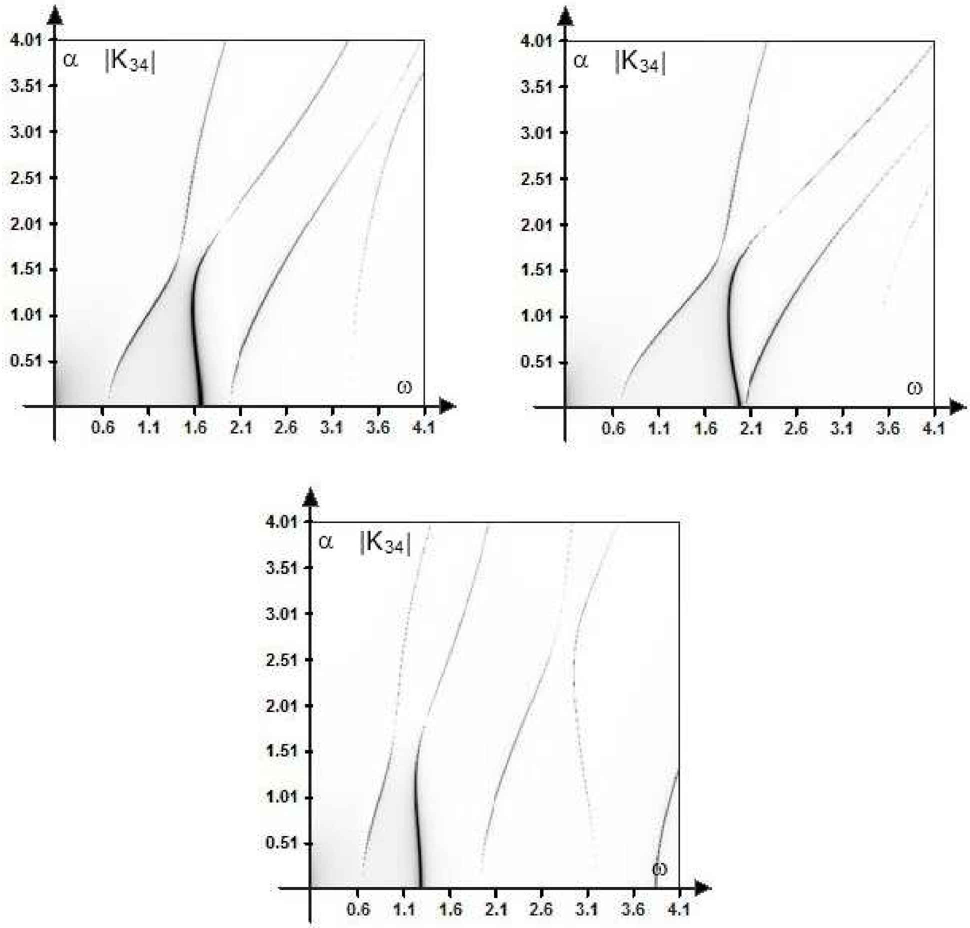


Рис. 1. Влияние преднагрева на дисперсионные кривые, $\lambda = 1$. a) $d\theta = 0$; b) $d\theta = -0.3$; c) $d\theta = 0.3$.

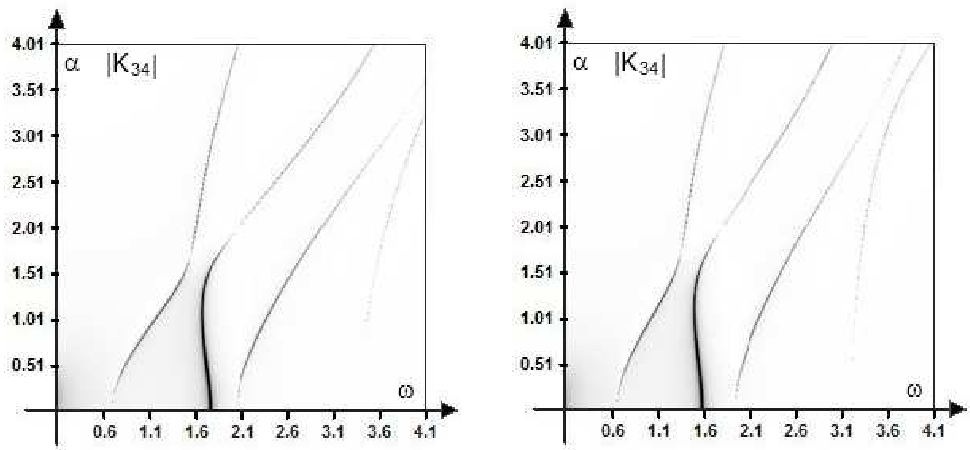


Рис. 2. Влияние начальных деформаций на дисперсионные кривые, $d\theta = 0$. a) $\lambda = 1.03$; б) $\lambda = 0.97$.

Из рис. 2 следует, что в отсутствие начального теплового воздействия предварительное растяжение ($d\theta = 1.03$) приводит к увеличению фазовой скорости, а предварительное сжатие ($\lambda = 0.97$) к уменьшению фазовой скорости. Влияние механических напряжений на первые моды мало, в то время как на остальные моды оно существенно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 301 с.

[2] *Sharma J. N. Mohinder Pal, Dayal Chand/* Propogation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials // Journal of Sound and Vibration. 2005. № 284. Pp. 227–248.

[3] *Шейдаков Д. Н. Белянкова Т. И. Шейдаков Н. Е. Калинчук В. В.* Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды // Вестник ЮНЦ РАН.2008. № 3. С. 9–15.

[4] *Суворова Г. Ю. Анджикович И. Е. Калинчук В. В.* емпературные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды // Вестник ЮНЦ РАН.2010. № 4. С. 18–23.

[5] *Евдокимова О. В. Белянкова Т. И. Калинчук В. В.* Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестник ЮНЦ РАН.2007. № 4. С. 19–25.

[6] *Ворович И. И. Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Suvorova G. Yu., Andzhikovich I. E. *Influence of initial strain and preheating on the thermoelasticity layer dispersion properties*. The plane dynamic coupled problem of the propagation of thermoelastic waves, arising by influence of oscillating heat load in prestressed layer is considered. Layer surface is assumed to be free from mechanical stresses, the lower bound of the layer is rigidly clamped and insulated. The initial stress state of the layer is created due to mechanical effect and preheating. The Green function of a thermo-elastic medium is constructed, its dispersion properties are investigated in a wide range of problem parametrs.

БЫСТРЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРУКТУРЫ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТИ С СИСТЕМОЙ БАРЬЕРОВ

Танюшин Р. А.*, **Попузин В. В.****
**Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
***University of Catania*

В данной статье предлагается эффективный способ расчета рассеяния волн на поверхности моря на системе, состоящей из конечного числа тонких барьеров. В процессе решения уравнения Гельмгольца задача сводится к решению граничного интегрального уравнения, которое, в свою очередь, решается с помощью метода Белоцерковского-Лифанова. Производительность данного метода увеличена за счет разработанного нами итерационного алгоритма.

1. Введение.

Рассеяние волн системой барьеров является задачей не только гидродинамики, но и акустики, радиофизики, квантовой механики и других областей. В области гидромеханики этой задаче посвящены, в частности, работы Porter и Evans [1], Linton и Evans [2], в которых рассматривается рассеяние на различных системах препятствий, таких как периодические системы барьеров, или система препятствий внутри волноводов.

В данной статье рассматриваются методы, применимые для задач, которые сводятся к рассеянию плоских гармонических поверхностных волн на системе, состоящей из конечного числа тонких барьеров, не пересекающихся между собой. Скорость вычисления решения граничного интегрального уравнения (ГИУ), а также количество требуемых вычислительных ресурсов для таких систем напрямую зависят от частоты набегающих волн, а также количества барьеров в системе, что, соответственно, делает непрактичным непосредственное решение ГИУ для больших систем и высоких частот колебаний. Мы предлагаем способ ускорить эти вычисления с помощью метода, основанного на последовательном приближении решения ГИУ решениями более простых уравнений. Таким образом, получен быстрый «итерационный» метод решения этой задачи.

2. Постановка задачи.

Будем считать, что набегающие волны представляют собой гармонические линейные колебания постоянной частоты, заданной волновым числом k, и постоянной амплитуды, а глубина настолько велика, что дно не влияет на распространение волн. Волны рассеиваются на системе из N неподвижных плоских абсолютно твердых барьеров $L = \bigcup_{i=1}^{N} l_i$, не пересекающихся между собой. Ширина барьеров много меньше их протяженности, и кривизна настолько мала, что ей можно пренебречь.

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы направление одной из осей (x_1) совпадало с направлением распространения набегающих волн. Положение барьеров будем задавать парами точек $[a_i, b_i]_{i=1}^{N}$, таким образом что

$$a_i = (a_{i1}; a_{i2})$$
$$b_i = (b_{i1}; b_{i2})$$

Будем искать величину волнового давления p в произвольной точке на поверхности моря $x = (x_1; x_2)$ (далее везде индекс 1 будет означать проекцию на ось абсцисс, а индекс 2 — на ось ординат). Среда считается идеальной и баротропной. Тогда распространение волн будет удовлетворять уравнению Гельмгольца [3]

$$(\Delta + k^2)p = 0$$

а на поверхности каждого из барьеров будет выполняться граничное условие

$$\left.\frac{\partial p(y)}{\partial n_y}\right|_L = 0 \tag{1}$$

где y — точка на поверхности барьера, а n_y — вектор нормали к поверхности барьера в этой точке. Волновое давление ищется в виде суммы давлений набегающих волн p^{inc} и рассеянных на системе барьеров p^{sc}

$$p = p^{inc} + p^{sc} \tag{2}$$

Для простоты изложения положим что исходящее давление имеет форму плоской волны: $p^{inc}(x) = e^{ikx_1}$, а рассеянное поле давления задается следующим интегралом:

$$p^{sc}(x) = \int_L p(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(k|y-x|)dL_y \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче функция Грина выражается через функцию Ханкеля первого рода:

$$\Phi(k|y-x|) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|y-x|)$$

3. Основное интегральное уравнение и его дискретный аналог.

Разобьем поверхность каждого из барьеров l_i на две односторонние поверхности l_i^+ и l_i^- таким образом, что если смотреть от точки a_i на точку b_i, то вектор нормали n_i^+ к l_i^+ будет направлен вправо, а вектор n_i^- к l_i^- соответственно влево.

Перейдя в формуле (3) от функции полного давления $p(y)$ к функции перепада давлений $g(y)$ и воспользовавшись граничными условиями (1), а также выражением для полного давления (2), с учетом разбиения на l_i^+ и l_i^- получим граничное интегральное уравнение для нахождения функции перепада давлений:

$$p^{sc}(x) = \int_{L'} g(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(k|y-x|)dL_y = \sum_{i=1}^{N}\int_{l_i'} g(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n_y}(k|y-x|)dl_y$$

где y — точка на системе экранов, L' — односторонняя поверхность, соответствующая системе барьеров.

Таким образом для нахождения функции перепада давлений на барьерах необходимо решить следующее интегральное уравнение

$$-\frac{\partial p^{inc}(y^0)}{\partial n_{y^0}} = \sum_{i=1}^{N}\int_{l_i'} g(y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n_{y^0}\partial n_y}(k|y-y^0|)dl_{iy} \tag{4}$$

где y^0 — произвольная точка на системе барьеров.

Найдя производные по нормалям в предположении, что y принадлежит экрану l_i, а y^0 — экрану l_j и подставив их в уравнение (4) для функции перепада давлений, получим:

$$4(b_{j_2}-a_{j_2})e^{iky_1^0}=\sum_{i=1}^{N}\int_{l_i'}g(y)\frac{H_1^{(1)}(k|y-y^0|)\sum_{m=1}^{2}(b_{i_m}-a_{i_m})(b_{j_m}-a_{j_m})}{|b_i-a_i||y-y^0|}dl_{iy} \tag{5}$$

В подынтегральном выражении удобно перейти к безразмерным величинам, для чего произведем следующую замену переменных:

$$\begin{cases}y_{i1}=a_{i1}+(b_{i1}-a_{i1})t\\ y_{i2}=a_{i2}+(b_{i2}-a_{i2})t\end{cases}\qquad\begin{cases}y_{j1}^0=a_{j1}+(b_{j1}-a_{j1})\tau\\ y_{j2}^0=a_{j2}+(b_{j2}-a_{j2})\tau\end{cases}$$

Очевидно, что тогда $dl_{iy}=|b_i-a_i|dt$ и $g(y)=g_i(t)$, а правую часть уравнения (5) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 g_i(t)\frac{H_1^{(1)}(k|y(t)-y^0(\tau)|)\left[(b_{i_2}-a_{i_2})(b_{j_2}-a_{j_2})+(b_{i_1}-a_{i_1})(b_{j_1}-a_{j_1})\right]}{|y(t)-y^0(\tau)|}dt$$

В случае когда точки y и y^0 принадлежат одному барьеру ($i=j$), ядро интегрального уравнения преобразуется в:

$$\frac{H_1^{(1)}(k|y(t)-y^0(\tau)|)\left[(b_{i_2}-a_{i_2})(b_{j_2}-a_{j_2})+(b_{i_1}-a_{i_1})(b_{j_1}-a_{j_1})\right]}{|y(t)-y^0(\tau)|}=$$
$$=\frac{H_1^{(1)}(k|b_i-a_i||t-\tau|)|b_i-a_i|}{|t-\tau|} \tag{6}$$

Если точки на отражателе совпадают $y=y^0$, или что тоже самое $t=\tau$, в знаменателе возникает особенность. Чтобы определить тип данной особенности, воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля в нуле

$$H_1^{(1)}(x)\overset{x\to 0}{\sim}-\frac{2i}{\pi x}$$

Тогда (6) можно переписать ввиде

$$\frac{H_1^{(1)}(k|b_i-a_i||t-\tau|)|b_i-a_i|}{|t-\tau|}\overset{t\to\tau}{\sim}\frac{\left(-\frac{2i}{\pi k|b_i-a_i||t-\tau|}\right)|b_i-a_i|}{|t-\tau|}=-\frac{2i}{\pi k(t-\tau)^2}$$

Квадратичная особенность в знаменателе свидетельствует о том, что уравнение является гиперсингулярным [4]. Выделим в ядре гиперсингулярную часть:

$$\frac{H_1^{(1)}(k|b_i-a_i||t-\tau|)|b_i-a_i|}{|t-\tau|}-\frac{2i}{\pi k(t-\tau)^2}+\frac{2i}{\pi k(t-\tau)^2}=$$
$$=-\frac{2i}{\pi k}\left(\frac{1}{(t-\tau)^2}+\frac{\pi ik|b_i-a_i||t-\tau|H_1^{(1)}(k|b_i-a_i||t-\tau|)-2}{2(t-\tau)^2}\right) \tag{7}$$

Тогда, согласно методу Белоцерковского–Лифанова [5], ядро уравнения будет эквивалентно:

$$-\frac{2i}{\pi k}\left(\frac{1}{\tau_v^j - t_u^i} - \frac{1}{\tau_v^j - t_{u-1}^i} + \frac{\pi i k|b_i - a_i| d(\tau_v^j, t_u^i) H_1^{(1)}(k|b_i - a_i| d(\tau_v^j, t_u^i)) - 2}{2d(\tau_v^j, t_u^i)^2}\frac{1}{n_i}\right)$$

где $d(\tau_v^j, t_u^i) = \sqrt{|(\tau_v^j - t_u^i)(\tau_v^j - t_{u-1}^i)|}$, $\tau_v^j = (v-0.5)/(n_j)$, $t_u^i = (u)/(n_i)$, $i, j = 1, .., N$, $u = 1, .., n_i$, $v = 1, .., n_j$

В случае, когда y и y^0 находятся на разных барьерах, ядро интегрального уравнения является регулярной функцией. Окончательное дискретное представление ядра интегрального уравнения выглядит следующим образом:

$$K_{uv}^{ij} = \begin{cases} -\frac{2i}{\pi k}\left(\frac{1}{\tau_v^j - t_u^i} - \frac{1}{\tau_v^j - t_{u-1}^i} + \frac{\pi i k|b_i - a_i| d(\tau_v^j, t_u^i) H_1^{(1)}(k|b_i - a_i| d(\tau_v^j, t_u^i)) - 2}{2d(\tau_v^j, t_u^i)^2}\frac{1}{n_i}\right), & i = j \\ \frac{H_1^{(1)}(k|y(t_u^i) - y^0(\tau_v^j)|)\left[(b_{i_2} - a_{i_2})(b_{j_2} - a_{j_2}) + (b_{i_1} - a_{i_1})(b_{j_1} - a_{j_1})\right]}{|y(t_u^i) - y^0(\tau_v^j)|}\frac{1}{n_i}, & i \neq j \end{cases}$$

а уравнение для g(y) будет эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{n_i} g_i(t_u^i) K_{uv}^{ij} = 4(b_{j_2} - a_{j_2}) e^{iky_1^0(\tau_v^j)} \tag{8}$$

$$|y(t_u^i) - y^0(\tau_v^j)| = \sqrt{(y_{i_1} - y_{j_1}^0)^2 + (y_{i_2} - y_{j_2}^0)^2}$$

4. Итерационный алгоритм.

Для нахождения искомой величины перепада давлений g необходимо решить алгебраическую систему размерности $\sum_{i=1}^{N} n_i$. В случае, когда частота набегающих волн велика, для достижения удовлетворительной точности необходимо брать достаточно плотные сетки на системе барьеров. В результате приходится иметь дело с системой больших размеров и использование классических прямых методов решения (таких как метод Гаусса) оказывается неэффективным, поскольку требуется $O(M^3)$ арифметических операций (где $M = N * n_i$ — это размерность системы).

Для построения более быстрого алгоритма, который требует линейного в отличии от кубического количества операций, заметим тот факт, что для каждого отдельного барьера система является теплицевой и может быть решена с помощью метода сопряженных градиентов за линейное количество операций [6]. Основываясь на этом, можно построить быстрый итерационный алгоритм, на каждом шаге которого будет решаться N теплицевых систем порядка n_i.

На первом шаге предлагаемого алгоритма мы находим величину перепада давлений на каждом барьере без учета влияния остальных

$$\sum_{u=1}^{n_i} g_i^0 K_{uv}^{ii} = b_i, \quad i = 1, .., N \tag{9}$$

Здесь правая часть выражается через $b_i = 4(b_{j_2} - a_{j_2}) e^{iky_1^0(\tau_v^j)}$.

На каждом новом шаге будем уточнять величину перепада давлений, используя значения, полученные на предыдущем шаге:

$$\sum_{u=1}^{n_i} g_i^k K_{uv}^{ii} = b_i - \sum_{u=1, u\neq i}^{N} g_i^{k-1} K_{uv}^{ii}, \qquad i = 1, .., N \tag{10}$$

Поскольку на каждом шаге нам необходимо решить N систем с теплицевыми матрицами, то общая вычислительная сложность предлагаемого подхода равна $O(kNn_i \log(n_i))$ арифметических операций. Численные эксперименты показывают, что количество итераций k мало. Так, для систем из двух и четырех препятствий необходимо всего два шага предлагаемого алгоритма. Заметим, что в случае большого количества препятствий N предложенный алгоритм эффективнее прямого решения системы (8) даже без использования быстрых методов решения теплицевых систем, поскольку требует $O(kNn_i^3)$ вместо $O(N^3 n_i^3)$ количества операций.

Авторы благодарят своего научного руководителя, профессора Сумбатяна М. А. (Южный федеральный университет) за постановку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Porter R., Evans D. V.* Wave scattering by periodic arrays of breakwaters // Wave Motion 1996. № 23. Pp. 95–120.

[2] *Linton C. M., Evans D. V.* Integral equations for a class of problems concerning obstacles in waveguides // Fluid Mechanics 1992. № 245. Pp. 349–365.

[3] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947. 929 с.

[4] *Манжиров А. В., Полянин А. Д.* Методы решения интегральных уравнений. Справочник. М.: Факториал, 1999. 272 с.

[5] *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

[6] *Chan R. H, Ng M. K.* Conjugate gradient methods for toeplitz systems // SIAM Review 1996. № 38(3). Pp. 427–482.

Tanyushin R. A., Popuzin V. V. *Fast methods to calculate the structure of the wave field for an array of barriers*. In the present paper we propose an efficient method to calculate the waves diffracted by the system of finite number of barriers. Starting from the Helmholtz equation, we reduce the problem to a system of Boundary Integral Equations. This system is solved numerically by the Belocerkovskiy–Lifanov method. The efficiency of the algorithm is significantly improved by the application of a fast iterative scheme, with the use of the Toeplitz solvers.

АЭРОУПРУГОСТЬ МАШУЩЕГО КРЫЛА В РАМКАХ ГИПОТЕЗЫ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Тарасов А. Е.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе предлагается полуаналитический подход к исследованию гармонических колебаний машущего прямоугольного упругого крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости. При построении решения задачи применен метод интегральных преобразований Фурье. Использование гипотезы плоских сечений позволяет свести задачу к одномерным интегральным уравнениям, которые решаются методом ортогональных многочленов.

1. Постановка задачи. Пусть тонкое прямоугольное в плане крыло находится в однородном на бесконечности потоке идеальной несжимаемой жидкости. Крыло представляет собой упругую балку длиной $2l$ с постоянной жесткостью на изгиб EJ и линейной плотностью m, на которую жестко насажены прямолинейные недеформируемые хорды длиной $2c$. Балка может только изгибаться. Невозмущенная скорость потока равна u_0.

Вследствие того, что на оси симметрии x балку вынуждают гармонически колебаться с амплитудой перемещения W_0 и амплитудой начального угла W_*, эти колебания распространяются на все крыло. Всю картину колебания считаем симметричной по y и происходящей при нулевом угле атаки крыла.

Граничное условие на оси:

$$\tilde{W}(y,t) = W_0 e^{i\omega t}, \quad \frac{d\tilde{W}}{dy}(y,t) = \pm W_* e^{i\chi} e^{i\omega t}, \quad y = \mp 0, \tag{1}$$

где $\tilde{W}(y,t)$ — функция колебания крыла, χ — сдвиг фаз угловых колебаний.

Форма колебания крыла и все остальные механические характеристики определяются, с одной стороны, упругими свойствами крыла [1, 2], а с другой стороны, гидродинамическими силами воздействия потока на крыло. Рассматривая крыло как упругую систему, записываем уравнение колебания балки

$$EJ\frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} = p_\pm, \tag{2}$$

где $p_\pm$ — распределенная нагрузка вдоль хорды, которая определена как разность между давлением p_- снизу и p_+ сверху крыла

$$p_\pm = \int_{-c}^{c} (p_- - p_+)dx.$$

Боковые кромки крыла свободны, поэтому

$$\frac{d^2\tilde{W}}{dy^2} = \frac{d^3\tilde{W}}{dy^3} = 0\,, \qquad y = \pm l. \tag{3}$$

При рассмотрении гидродинамической картины предполагаем потенциальность возмущенного течения, $\tilde{\varphi}$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0. \tag{4}$$

Гидродинамическое давление p, которое испытывает крыло со стороны жидкости, в предположении малости вносимых крылом возмущений, связано с функцией φ линеаризованным интегралом Лагранжа-Коши

$$p = -\rho\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} - \rho u_0\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}. \tag{5}$$

Условие непроницания подразумевает

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t}, \quad (z = 0,\, |x| < c). \tag{6}$$

При $x \to -\infty$ должно выполняться условие отсутствия возмущений вдали от крыла: поскольку потенциал определен с точностью до произвольного слагаемого, его можно принять исчезающим на бесконечности

$$\tilde{\varphi} = 0, \qquad x \to -\infty\,, \quad y \to \pm\infty. \tag{7}$$

Интересно заметить, что потенциал не исчезает при $x \to +\infty$. В самом деле, вихревая пелена срывается с заднего ребра крыла, что приводит к разрывности тангенциальной составляющей вектора скорости при переходе через вихревую пелену. Однако давление и нормальная компонента вектора скорости непрерывны, следовательно

$$p_- = p_+\,, \quad \frac{\partial\tilde{\varphi}_-}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\varphi}_+}{\partial z}\,, \qquad (z = 0\,, |x| > c). \tag{8}$$

Функции $\tilde{W}$ и $\tilde{\varphi}$ считаем подчиняющимися гармоническому по времени закону и представим в виде

$$\tilde{W}(y,t) = W(y)e^{i\omega t}\,, \qquad \tilde{\varphi}(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)e^{i\omega t}. \tag{9}$$

Из (1) – (9) могут быть получены следующие уравнения, граничные условия и условия на бесконечности для функций W и φ

$$EJ\frac{d^4W}{dy^4} - m\omega^2 W = \int\limits_{-c}^{c}\gamma(x)dx\,; \quad \gamma = i\omega\rho(\varphi_+ - \varphi_-) + \rho u_0(\frac{\partial\varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial x}), \tag{10}$$

$$W(\mp 0) = W_0\,, \quad \frac{dW}{dx}(\mp 0) = \pm W_*\,e^{i\chi}, \quad \frac{d^2W}{dy^2}(\pm l) = \frac{d^3W}{dy^3}(\pm l) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial z} = i\omega W\,, \quad (z = 0,\, |x| < c), \tag{11}$$

$$p_- = p_+\,, \quad \frac{\partial\varphi_-}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_+}{\partial z}, \qquad (z = 0\,, \quad |x| > c). \tag{12}$$

2. Вывод интегрального уравнения. Используя обобщенное интегральное преобразование Фурье, запишем

$$\varphi_{\pm}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda}\Phi(s,z)e^{-isx}ds.$$

Внесем это представление в (4), откуда получим

$$\Phi_{\pm}(s,z)=A_{+}(s)e^{-|s|z}+A_{-}(s)e^{|s|z}.$$

Тогда

$$\varphi_{-}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda}A_{-}(s)e^{|s|z-isx}ds\qquad(z<0),\tag{13}$$

$$\varphi_{+}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda}A_{+}(s)e^{-|s|z-isx}ds\qquad(z\geqslant 0).$$

Из (12) следует, что

$$A_{+}(s)=-A_{-}(s).$$

Функцию $\gamma(x)$ временно будем считать известной и представимой в виде интегрального преобразования Фурье

$$\gamma(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Lambda}G(s)e^{-isx}ds;\quad G(s)=\int\limits_{-c}^{c}\gamma(\xi)e^{is\xi}d\xi.\tag{14}$$

Тогда из представления γ в (10) найдем

$$A_{-}=\frac{G(s)}{2\rho iu_0(s-\frac{\omega}{u\,0})};\qquad A_{+}=-\frac{G(s)}{2\rho iu_0(s-\frac{\omega}{u\,0})}.\tag{15}$$

Из (13)–(15) найдем

$$\varphi_{-}(x,z)=\frac{1}{4\pi i\rho u_0}\int\limits_{-c}^{c}\gamma(\xi)d\xi\int\limits_{\Lambda}\frac{e^{|s|z+is(\xi-x)}}{(s-\frac{\omega}{u\,0})}d\xi.\tag{16}$$

Аналогично, может быть получено и для $\varphi_{+}(x,z)$. Из (16) найдем

$$\frac{\partial\varphi_{-}(x,0)}{\partial z}=\frac{1}{4\pi i\rho u_0}\int\limits_{-c}^{c}\gamma(\xi)K(\xi-x)d\xi;\quad K(x)=\int\limits_{\Lambda}\frac{|s|}{s-\frac{\omega}{u\,0}}e^{isx}ds.\tag{17}$$

Контур интегрирования Λ в (17), в соответствии с принципом излучения Зоммерфельда, обходит особенность на вещественной оси в точке $s=\frac{\omega}{u_0}$.

Из (17) и (11), с учетом (12) получим интегральное уравнение

$$\int\limits_{-c}^{c}\gamma(\xi)K(\xi-x)d\xi=-4\pi\rho u_0W(y).\tag{18}$$

3. Алгоритм решения задачи. Таким образом, для определения функций $W(y)$ и $\gamma(x)$ получена система двух уравнений: дифференциального (10) и интегрального (18).

Из условия Кутта-Жуковского [3] следует, что на передней кромке давление обращается в бесконечность порядка $\frac{1}{\sqrt{c+x}}$, $x \to -c$, а на задней — в ноль порядка $\sqrt{c-x}$, $x \to c$. Интегральное уравнение (18) целесообразно решать методом ортогональных многочленов [4]. При этом функцию $\gamma(x)$ следует искать в виде ряда

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(y) P_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

здесь $\sqrt{\frac{(c-x)}{(c+x)}}$ является весом в условии ортогональности полиномов Якоби $P_k^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$.

Процедура метода ортогональных многочленов сводит решение каждого из уравнений (18) к решению системы линейных алгебраических уравнений. Бесконечную систему уравнений целесообразно решать методом редукции. Вычислив γ, подставим его в дифференциальное уравнение (10). Аналогично, применяя метод ортогональных многочленов и метод редукции получим полностью функцию колебания крыла.

Работа поддержана ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы», Госконтракт № 16.516.11.6106.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Некрасов А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке // М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.

[2] *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 480 с.

[3] *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.

[4] *Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.

Tarasov A. E. *Aeroelasticity of flapping wing in frames of plane section hypothesis.* We propose a semi-analytical approach to study harmonic oscillations of the flapping rectangular wing in a flow of inviscid incompressible fluid. To construct the solution of this problem we apply the integral Fourier transform. With the use of the 'plane sections' hypothesis we reduce the problem to one-dimensional integral equations which are solved by the method of orthogonal polynomials.

КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ВОЛНОВОМ СТЕНДЕ

Трепачев В. В.*, Трепачева Г. Н.**

**Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

*** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Получено решение смешанной краевой задачи о возбуждении гармонических поверхностных пространственных волн в сжимаемой жидкости, размещенной в волновом стенде конечных размеров. Движение сжимаемой жидкости вызвано колебаниями вертикальной прямоугольной пластиной, имеющей заданную форму. В случае отсутствия поверхностного натяжения построенное решение имеет замкнутый вид. Изучено влияние малой диссипации энергии.

Плоские малые колебания идеальной сжимаемой жидкости, вызванные на свободной поверхности жидкости конечной глубины с помощью колебаний вертикальной пластины, изучались в [1]. Волны в несжимаемой жидкости конечной глубины, генерируемые изгибными колебаниями бесконечной полосы, рассматривались в [2]. Установление плоских прогрессивных волн при гармонических колебаниях вертикальной стенки в глубокой идеальной несжимаемой жидкости исследовалось в [3].

В [1] указано, что предельный переход к случаю, когда отражающая стенка находится на бесконечном расстоянии от волнообразующей стенки, невозможен в выбранных авторами предположениях. Предлагаемая теория позволяет рассмотреть подобный предельный переход, что соответствует экспериментальным наблюдениям прогрессивных волн [4]. Теория прогрессивных плоских волн в несжимаемой жидкости, вызванных пластиной заданной формы [5], обобщается здесь на случай пространственных волн в сжимаемой среде.

1. Постановка задачи о волновом движении тяжелой сжимаемой жидкости, вызванной вертикальной пластиной, имеет вид

$$\Phi_{tt} + \mu\Phi_t = c_0^2\Delta\Phi;$$

$$\Phi_{tt} + \mu\Phi_t + g\Phi_z + \frac{\alpha}{\rho_0}\Phi_{zzz} = 0,\ z = h;$$

$$\Phi_z = 0,\ z = 0;$$

$$\Phi_x = \frac{\partial u}{\partial t},\ x = 0,\ |y| < b,\ 0 < z < h;$$

$$\Phi_y = 0,\ y = \pm b,\ 0 < z < h;$$

$$\Phi_x = 0,\ x = a,\ |y| < b,\ 0 < z < h. \qquad (1)$$

В (1) величина c_0 — скорость звука в жидкости, Φ — потенциал скорости, t — время, x, y — координаты в горизонтальной плоскости, z — вертикальная координата,

μ — коэффициент диссипации энергии Рэлея, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ_0 — плотность жидкости; $u = u(y, z, t)$ — горизонтальная скорость движения пластины, помещенной на вертикальной стенке бассейна прямоугольной формы. Ширина бассейна — $2b$, глубина бассейна — h, длина бассейна — a. На боковых стенках $y \pm b$, на задней стенке ($x = a$), на дне ($z = 0$) данного бассейна выполнены условия непротекания. На передней стенке бассейна ($x = 0$) находится вертикальная пластина. Начало декартовой системы координат находится на линии пересечения дна и передней стенки бассейна. Давление в жидкости P, возвышение поверхности ξ равны

$$P = -\rho_0(\Phi_t + \mu\Phi + gz),\ 0 < z < h;$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \Phi_z,\ z = h, \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения. Пластина совершает гармонические колебания круговой частоты ω

$$\Phi = \varphi e^{i\omega t},\ \xi = \eta e^{i\omega t},\ u = u_0 e^{i\omega t}. \tag{3}$$

После подстановки (3) в (1) выведем постановку задачи относительно комплексных амплитуд колебаний φ, η, u_0 в виде

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + \frac{\omega^2 - i\mu\omega}{c_0^2}\ \varphi = 0;$$
$$(\omega^2 - i\mu\omega)\ \varphi - (g\varphi_z + \frac{\alpha}{\rho}\varphi_{zzz}) = 0,\ z = h;$$
$$\varphi_z = 0,\ z = 0;$$
$$\varphi_x = 0,\ x = a,\ |y| < b,\ 0 < z < h;$$
$$\varphi_x = i\omega u_o,\ x = 0,\ |y| < b,\ 0 < z < h;$$
$$\varphi_y = 0,\ y = \pm b. \tag{4}$$

Краевая задача (4) неоднородная за счет условия на пластине при $x = 0$.

2. Потенциал скорости. Потенциал скорости движения сжимаемой жидкости представим в виде суперпозиции частных решений задачи, полученной из(4) для её однородных условий, которая описывается двойным рядом

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\cos(k_3(m)z)\cos(k_2(n)(b - y))\times$$
$$\times\ [e^{-m_1(m,n)(2a-x)} + e^{-m_1(m,n)x}]. \tag{5}$$

Система функций $\cos k_3(n)(b - y) = \cos(n\pi/2b)(b - y)$ ортогональна на отрезке $-b \leqslant y \leqslant b$. Дисперсионное уравнение для волнового числа в вертикальном направлении $k_3(m)$ получено в следующем виде

$$\sin(k_3 h)(1 - \beta k_3^2) = \frac{k_p}{k_3}\cos(k_3 h), \quad \beta = \frac{\alpha}{\rho g}, \quad k_p = \frac{\omega^2 - i\mu\omega}{g}. \tag{6}$$

Волновое число относительно оси x, т. е. $m_1(m,n)$ равно величине

$$m_1(m,n) = \sqrt{k_2^2(n) + k_3^2(m) - k_0^2}, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2 - i\mu\omega}{c_0^2}, \quad Re\,(m_1) > 0, \quad \mu > 0, \tag{7}$$

где k_0 — волновое число продольной упругой волны в неограниченной сжимаемой жидкости; $k_2(n)$ — волновое число поверхностной волны в направлении оси y. Коэффициенты A_{mn} неизвестны и согласно (4) удовлетворяют условию на пластине

$$\varphi_x = i\omega u_0(z,y), \quad x = 0, \ |y| < b, \ 0 < z < h. \tag{8}$$

Умножим левую и правую части соотношения (8) на произведение функций $(2/bh)\cos(k_3(p)z)\cos(k_2(n)(b-y))$. Проинтегрируем (8) по области $0 < z \leqslant h$, $-b \leqslant y \leqslant b$. Обозначим

$$\alpha_{pn} = \frac{2i\omega}{bh}\int\limits_0^h\int\limits_{-b}^b u_0(z,y)\cos(k_3(p)z)\cos(k_2(n)(y-b))dzdy,$$

$$p = 0,1,2,\ldots, \ n = 0,1,2,\ldots;$$

$$\varepsilon_0 = 2, \ \varepsilon_n = 1, \ n = 1,2,\ldots;$$

$$\beta_{pm} = \frac{2}{h}\int\limits_0^h \cos(k_3(m)z)\cos(k_3(n)z)dz;$$

$$\beta_{mm} = \left[1 + \frac{\sin 2k_3(m)h}{2k_3(m)h}\right], \ m = 0,1,2,\ldots. \tag{9}$$

После интегрирования преобразованной формулы (9) получаем набор бесконечных систем алгебраических уравнений, которые необходимы для определения неизвестных коэффициентов A_{mn} в формуле потенциала скорости (5), в следующем виде

$$\varepsilon_n\sum_{m=0}^{\infty} m_1(m,n)[e^{-2am_1(m,n)} - 1]\beta_{pm}A_{mn} = \alpha_{pn};$$

$$n = 0,1,2,\ldots; \ p = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

где n — номер бесконечной алгебраической системы уравнений; a — длина бассейна; $\varepsilon_n, \beta_{pm}$ — известные коэффициенты, найденные в формулах (9); α_{pn} — правые части бесконечных алгебраических уравнений, определенные в формулах (9); A_{mn} — неизвестные коэффициенты разложения (5); m — номер неизвестной в бесконечной алгебраической системе уравнений за номером n; p — номер уравнения в бесконечной алгебраической системе уравнений за номером n. Рассмотрим построение асимптотических решений каждой системы уравнений (10) в области низких частот $\omega^2/g \to 0$, а также в области высоких частот $\omega^2/g \to \infty$, считая, что остальные параметры задачи β, h, μ, a принимают некоторые фиксированные значения. Следует считать в асимптотическом смысле, что $\beta_{pm} = 0$ в случае $p \neq m$. В результате системы уравнений (10) сводятся к диагональному виду

$$\varepsilon_n m_1(p,n)[e^{-2am_1(p,n)} - 1]\beta_{pp}A_{pn} = \alpha_{pn},$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{11}$$

Из соотношений (11) находим неизвестные коэффициенты разложения (5) в следующем виде

$$A_{mn} = -\frac{\alpha_{mn}}{m_1(m,n)\beta_{mm}\varepsilon_n[1 - e^{-2am_1(m,n)}]}. \tag{12}$$

Коэффициенты $\beta_{mm} \neq 0$ в (12), а в случае $\mu = 0$, $m \geqslant 1$ справедлива оценка $1 < \beta_{mm} < 2$. Формулы (12) являются асимптотическими в трех случаях: в области низких частот, в области высоких частот; в области малых значений коэффициента поверхностного натяжения (при малых значениях β). Регулярность бесконечных систем уравнений (10) доказывается аналогичным способом, что и в [5].

Формулы (12) являются точными в случае отсутствия поверхностного натяжения, т. е. при $\beta = 0$, т. к. $\beta_{pm} = 0$, $p \neq m$, $\mu \geqslant 0$.

В области высоких частот первые моды колебаний свободной поверхности ведут себя почти так же, как и в случае ударного нагружения жидкости. На свободной поверхности $\varphi \approx 0$. Физически это означает пренебрежение влиянием силы тяжести.

Слагаемое $e^{-m_1(0,0)x}$, встречающееся в решении (5), описывает поверхностную волну с плоским фронтом, распространяющуюся от пластины и затухающую вдоль оси x. Из полученных результатов в виде частного случая вытекают известные результаты для плоской задачи о вертикальном волнопродукторе [1–5]. Наличие диссипации энергии в данной работе дополняет известные исследования, т. к. позволяет оптимизировать длину стенда при отработке вопроса гашения волн, отраженных от задней стенки стенда.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наукова думка, 1975. С. 38–58.

[2] *Черкесов Л. В.* Неустановившиеся волны. Киев: Наукова думка, 1970. С. 26–32.

[3] *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. С. 320–335.

[4] *Madsen O. S.* On the generation of long waves // J. Geophysical Rearch. 1971. Vol. 76, № 36. P. 8672–8683.

[5] *Трепачев В. В., Трепачева Г. Н.* Поверхностные волны, вызванные колебаниями пластины заданной формы // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды: Тр. VIII Межд. конф. Ростов н/Д, 14-18 окт. 2002. С. 188–192.

Trepachev V. V., Trepacheva G. N. *Oscillations free surface of compressible fluid in the wave tank.* We obtained the solution of the mixed boundary problem about the excitation of harmony surface space waves in the compressible fluid which is placed in the wave tank. This wave tank have the finite spatial sizes. All movements of the compressible fluid get excited by harmony oscillations of vertical plate. In the absence surface tension obtained solution have the closed form. We investigate small energy dissipation influence on the behaviour of the solution.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА КОНВЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ В ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕ

Трофимова А. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции несжимаемой жидкости в пористой кольцевой области. Развит численный метод расчета конвективных движений на основе модели Дарси и конечно-разностной схемы, сохраняющей косимметрию исходной задачи. В численном эксперименте для кольцевых областей исследовано ответвление семейства стационарных режимов от механического равновесия, изучена эволюция конвективных движений с ростом числа Рэлея и проанализировано возникновение неустойчивости на семействе стационарных состояний.

Конвективные движения в пористых средах характеризуются рядом интересных эффектов. Так, для плоской конвекции Дарси в бесконечном цилиндре при подогреве снизу было обнаружено ответвление от механического равновесия однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов [1]. Это явление было объяснено В. И. Юдовичем с помощью теории косимметрии [2]. Аналитическое исследование плоской задачи фильтрационной конвекции позволило получить асимптотику семейства равновесий и изучить его устойчивость вблизи бифуркации рождения. Анализ сильной неединственности решений при больших надкритичностях возможен только с помощью численных методов. Исследование семейства стационарных режимов ранее было выполнено для прямоугольных областей на основе метода Галеркина [3] и конечно-разностного метода [4].

В данной работе для расчета конвективных движений в кольце описан численный метод на основе уравнений в полярных координатах. Для решения задачи использовалась конечно-разностная схема, развитая для кольцевых секторов в [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская задача фильтрационной конвекции в пористой кольцевой области $D = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi]$, подогреваемой снизу. Система уравнений в полярных координатах и безразмерных переменных имеет вид [5]:

$$\partial_t \theta = \Delta\theta + G(\psi) - J(\theta,\psi), \qquad J(\theta,\psi) = \frac{1}{r}\left[\partial_r(\theta\,\partial_\varphi\,\psi) - \partial_\varphi(\theta\,\partial_r\,\psi)\right], \tag{1}$$

$$0 = \Delta\psi - \lambda\,G(\theta), \qquad G(\theta) = \frac{1}{r}\left[\partial_\varphi(\cos\varphi\,\theta) + \partial_r(r\sin\varphi\,\theta)\right], \tag{2}$$

$$\theta\big|_{\partial D} = 0, \qquad \psi\big|_{\partial D} = 0, \tag{3}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(r,\varphi). \tag{4}$$

Здесь t — время; (r,φ) — полярные координаты; $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r + \frac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2$ — оператор Лапласа; θ — отклонение температуры от линейного профиля, соответствующего механическому равновесию; ψ — функция тока; λ — фильтрационное число Рэлея.

Для задачи (1)–(3) косимметрией является вектор-функция $L = (\psi, -\theta)$, что означает возможность появления однопараметрического семейства решений [2].

Нулевое равновесие $\theta = \psi = 0$ для системы (1)–(4) имеется при всех значениях параметра λ и при переходе параметра λ через λ_{cr} от состояния покоя ответвляется семейство стационарных режимов с переменным спектром.

2. Метод численного решения. Для численного решения задачи (1)–(4) используется метод конечных разностей. Вводятся равномерные сетки по координатам: $r_i = R_1 + ih_r$, $i = 1\dots n$, $h_r = (R_2 - R_1)/(n+1)$, $\varphi_j = jh_\varphi$, $j = 1\dots m$, $h_\varphi = 2\pi/m$. Температура и функция тока определяются в узлах (r_i, φ_j), при вычислении конвективного члена $J(\theta, \psi)$ используются узлы смещенных сеток: $r_{i-1/2} = R_1 + (i-1/2)h_r$, $i = 1\dots n+1$, $\varphi_{j-1/2} = (j-1/2)h_\varphi$, $j = 1\dots m+1$.

На двухточечных шаблонах вводятся разностные операторы первых производных и операторы вычисления среднего:

$$(\delta_1\theta)_{i-1/2,j} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{h_r}, \quad (\delta_2\theta)_{i,j-1/2} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{h_\varphi},$$
$$(\delta_0^1\theta)_{i-1/2,j} = \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{2}, \quad (\delta_0^2\theta)_{i,j-1/2} = \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{2}.$$

С их помощью задаются операторы на четырехточечном шаблоне, разностные операторы первых производных на трехточечных шаблонах и дискретный аналог лапласиана:

$$(d_0\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_0^2\theta)_{i,j}, \quad (d_1\theta)_{i,j} = (\delta_0^2\delta_1\theta)_{i,j}, \quad (d_2\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_2\theta)_{i,j},$$
$$(D_1\theta)_{i,j} = (\delta_0^1\delta_1\theta)_{i,j}, \quad (D_2\theta)_{i,j} = (\delta_0^2\delta_2\theta)_{i,j}, \quad \Delta_h\theta_{i,j} = \left(\frac{1}{r}\,\delta_1(r\delta_1\theta) + \frac{1}{r^2}\,\delta_2\delta_2\theta\right)_{i,j}.$$

Аппроксимации уравнений (1), (2) записываются следующим образом:

$$\partial_t\theta_{i,j} = \Delta_h\theta_{i,j} + G_{i,j}(\psi) - J_{i,j}(\theta,\psi), \quad 0 = \Delta_h\psi_{i,j} - \lambda\, G_{i,j}(\theta). \tag{5}$$

Дискретные аналоги краевых условий даются формулами:

$$\theta_{0,j} = 0, \quad \theta_{n+1,j} = 0, \qquad \psi_{0,j} = 0, \quad \psi_{n+1,j} = 0, \qquad j = 0,\dots,m+1,$$
$$\theta_{i,0} = 0, \quad \theta_{i,m+1} = 0, \qquad \psi_{i,0} = 0, \quad \psi_{i,m+1} = 0, \qquad i = 0,\dots,n+1.$$

При аппроксимации якобиана применялся аналог формулы Аракавы:

$$J_{i,j}(\theta,\psi) = \frac{\alpha}{r_i}\left[D_1(\theta D_2\psi) - D_2(\theta D_1\psi)\right]_{i,j} + \frac{(1-\alpha)}{r_i}\left[d_1(d_0\theta d_2\psi) - d_2(d_0\theta d_1\psi)\right]_{i,j}, \tag{6}$$

а для аппроксимации $G(\theta)$ аналитически была выведена формула:

$$G_{i,j}(\theta) = \frac{\beta}{r_i}\left(\cos\varphi\, D_2\theta + r\,\sin\varphi\, D_1\theta\right)_{i,j} + \frac{(1-\beta)}{r_i}\left(D_2(\cos\varphi\,\theta) + D_1(r\,\sin\varphi\,\theta)\right)_{i,j}. \tag{7}$$

При $\alpha = 1/3$ и $\beta = 1/2$ конечно-разностная схема системы сохраняет косимметрию исходной задачи.

Полученная в результате дискретизации система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) записывается в векторной форме:

$$\dot\Theta = A\Theta + B\Psi - F(\Theta,\Psi), \qquad 0 = A\Psi - \lambda\, B\Theta,$$

здесь $\Theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \ldots, \theta_{ij}, \theta_{i,j+1}, \ldots, \theta_{nm})$, $\Psi = (\psi_{11}, \psi_{12}, \ldots, \psi_{ij}, \psi_{i,j+1}, \ldots, \psi_{nm})$.

Система уравнений дополняется разностным аналогом начального условия (4): $\Theta\big|_{t=0} = \Theta^0 = (\theta^0(r_1, \varphi_1), \ldots, \theta^0(r_n, \varphi_m))$. Для решения задачи Коши используется метод Рунге–Кутта 4-го порядка. Расчеты конвективных режимов проводились в среде MATLAB. Для вычисления семейства стационарных режимов применяется алгоритм [3, 4]. Для каждого стационарного решения матрица линеаризации находится численно, а ее ядро определяется методом SVD-разложения. Для уточнения равновесия в окрестности семейства применяется метод Ньютона, и прогнозное значение для следующей точки на семействе вычисляется при помощи экстраполяционного метода Адамса.

3. Расчет семейства конвективных режимов. В работе представлены результаты расчета конвективных режимов задачи (1)–(4) для кольцевых областей разной толщины. Во всех случаях состояние покоя $\theta = \psi = 0$ глобально устойчиво при малых градиентах температуры (параметр Рэлея $\lambda < \lambda_{cr}$). При превышении критического значения возникают непрерывные семейства стационарных конвективных режимов. Вычислительный эксперимент состоял в нахождении семейств конвективных режимов и продолжении их по параметру Рэлея до возникновения неустойчивости.

Для узкой кольцевой области $D_1 = [1, 1.5] \times [0, 2\pi]$ основные расчеты проводились на сетке из 8×60 внутренних узлов. Семейство равновесий ответвляется при $\lambda_{cr} \approx 171$ и его эволюция с ростом числа Рэлея представлена на рис. 1. С увеличением параметра Рэлея λ возрастает тепловой поток и меняется форма семейства. В нижней части формируется «остриё», впервые потеря устойчивости на семействе происходит для режимов из этой области кривой при $\lambda \approx 209$. На рис. 1b звездочками обозначены стационарные решения, потерявшие устойчивость колебательным образом. Конвективные движения для узкого кольца имеют от восьми до десяти валов, их расположение может быть симметричным и несимметричным относительно вертикальной оси.

В случае кольцевой области $D_2 = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ механическое равновесие теряет устойчивость при $\lambda_{cr} \approx 41$ (расчеты проводились на сетке 12×60). На

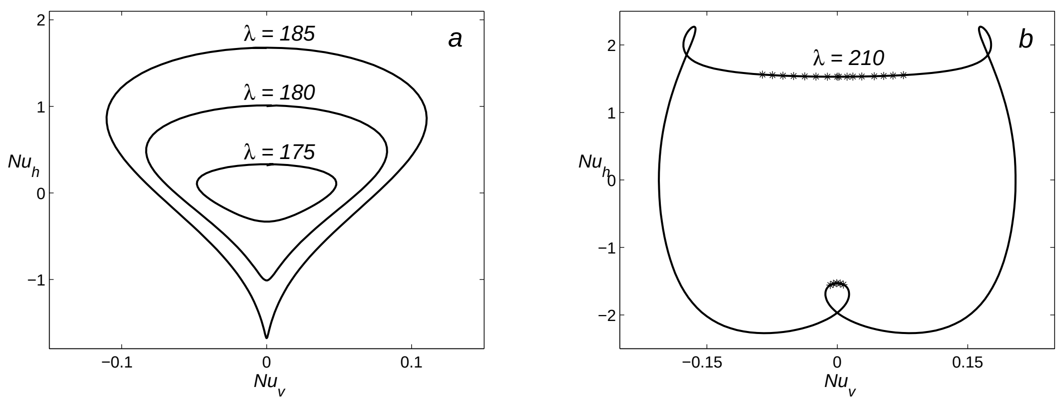


Рис. 1. Эволюция семейств стационарных режимов для кольца D_1. Звездочками обозначены режимы с колебательной неустойчивостью.

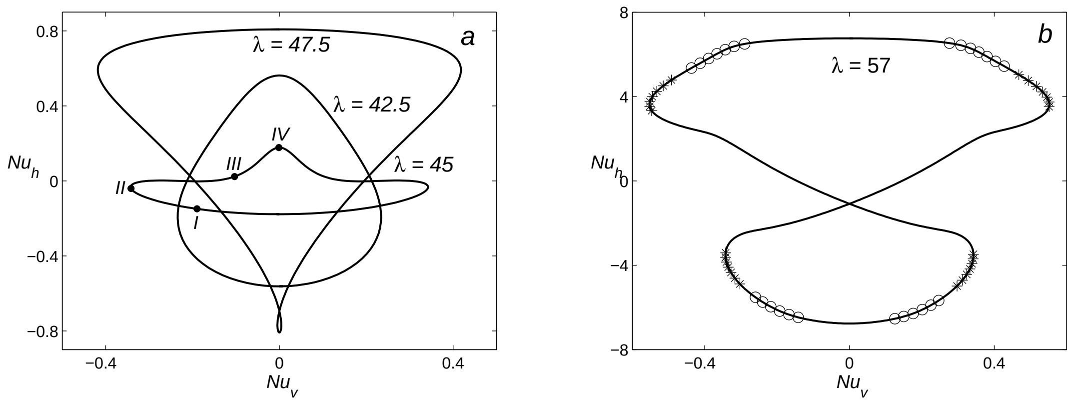


Рис. 2. Эволюция семейств стационарных режимов для кольца D_2. Цифрами (I–IV) обозначены режимы, для которых на рис. 3 представлены линии тока, изотермы и спектр устойчивости. Звездочками (кружочками) обозначены режимы с колебательной (монотонной) неустойчивостью.

рис. 2 изображено развитие семейств стационарных режимов с ростом числа Рэлея. Неустойчивость колебательного и монотонного типа наблюдалась при $\lambda > 56$.

На рис. 3 приведены линии тока, изотермы и спектр устойчивости для режимов, обозначенных цифрами I–IV на рис. 2а. Режимы состояли в основном из шести конвективных валов. На рис. 3с представлена часть спектра устойчивости, наиболее приближенная к мнимой оси. Наличие практически нулевого значения в спектре указывает на принадлежность этих конвективных структур однопараметрическому семейству стационарных состояний. Видно, что характер распределения спектральных величин σ меняется от режима к режиму. Неустойчивость на

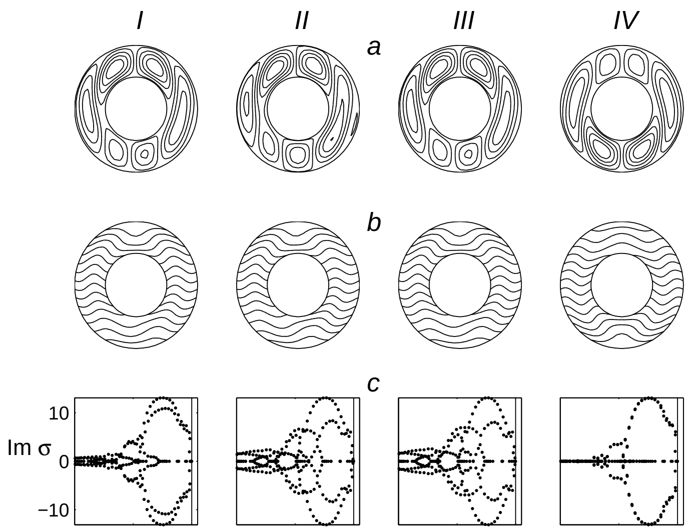


Рис. 3. Линии тока (a), изотермы (b) и спектр устойчивости режимов (c) из семейства для кольца D_2 при $\lambda = 45$.

семействе конвективных режимов впервые возникает для структур с симметричным расположением валов (режим *III*).

Для широкого кольца ($[1,3] \times [0,2\pi]$) семейство ответвляется при $\lambda_{cr} \approx 9.8$ и содержит, в основном, режимы с четырьмя конвективными валами. Неустойчивость на семействе стационарных режимов впервые возникает при $\lambda \approx 14.8$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00708-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Любимов Д. В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.

[2] *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.

[3] *Говорухин В. Н.* Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задачи плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53-62.

[4] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A. 1999. Vol. 262. №. 4. Pp. 321–329.

[5] *Трофимова А. В., Цибулин В. Г.* Конвективных движения в пористом кольцевом секторе // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 3. С. 116–125.

Trofimova A. V. *Computation of the family of steady states in a porous annulus*. The planar problem of the convection of incompressible fluid in an annulus filled with a porous medium is considered. The finite-difference scheme is developed for the equations in polar coordinates. Families of steady states for annular domains heating below are calculated and instability on the family is analyzed.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ УПРУГОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ГРАНИЦЫ ВНЕ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Хапилова Н. С.*, Залётов С. В.**

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*

***Донецкий национальный университет*

Построено аналитическое решение смешанной задачи о симметричной деформации изотропного полупространства, к границе которого приложена нагрузка, распределенная по круговой области V, вне V — нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения на граничной плоскости отсутствуют. Частными случаями рассматриваемой задачи являются задача о действии сосредоточенной силы на полупространство с упруго закрепленной границей , а также первая основная задача теории упругости, когда коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений на границе обращается в нуль.

1. Постановка задачи. Рассматривается смешанная задача для упругого полупространства, на границе которого действует распределенная по круговой области нагрузка, удовлетворяющая условиям осевой симметрии; вне области приложения нагрузки напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения на всей плоскости, ограничивающей полупространство, отсутствуют; напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

Введем цилиндрическую систему координат r, Θ, z с началом в центре области приложения нагрузки. Координатную ось z направим вертикально вверх. В случае осесимметричной деформации система уравнений теории упругости для изотропного тела (уравнения равновесия, закон Гука, соотношения Коши, связывающие компоненты деформации с перемещениями) сводится к уравнению [1]

$$\nabla^2\nabla^2\Phi(r,z) = 0, \tag{1}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

причем компоненты тензора напряжений и вектора перемещений через функцию напряжения Лява выражаются следующими формулами:

$$u = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},$$

$$w = \frac{1}{2G_1}\left(2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, G_1 — модуль сдвига. Граничные условия для верхнего упругого полупространства $z \geqslant 0$ запишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_z(r,0) = -q(r), r < a;\\ \sigma_z(r,0) = kw(r,0), r > a;\\ \tau_{rz}(r,0) = 0, r < \infty.\end{gathered} \tag{3}$$

2. Аналитическое решение смешанной задачи. Для решения смешанной задачи (1)–(3) в области $z \geqslant 0$ используем интегральное преобразование Ханкеля. Обозначим через $Q(t,z)$ изображение функции $\Phi(r,z)$. Будем иметь

$$Q(z,t) = \int_0^\infty \Phi(r,z) r J_0(rt) dr \tag{4}$$

и, согласно формуле обращения,

$$\Phi(r,z) = \int_0^\infty Q(r,t) t J_0(rt) dt. \tag{5}$$

Здесь $J_0(rt)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Умножим уравнение (1) на $rJ_0(rt)$ и проинтегрируем от нуля до бесконечности, получим

$$\frac{d^4Q}{dz^4} - 2t^2\frac{d^2Q}{dz^2} + t^4Q = 0. \tag{6}$$

Учитывая, что корни характеристического уравнения равны $k_{1,2} = t, k_{3,4} = -t$, ограниченное на бесконечности решение уравнения (6) запишем в виде

$$Q(z,t) = (A + Bz)e^{-tz}. \tag{7}$$

Используя формулы (7), (5), вычислим касательное напряжение (2) и, приравняв его нулю на границе полупространства, найдем связь между коэффициентами A и B

$$B = \frac{1}{2\nu}At. \tag{8}$$

Введем функцию

$$\beta(r) = \begin{cases} q(r) + kw(r,0), & r < a\ ,\\ 0, \quad r > a\ , \end{cases} \tag{9}$$

с помощью которой первые два условия (3) запишем следующим образом:

$$\sigma_z(r,0) = -\beta(r) + kw(r,0), r < \infty. \tag{10}$$

Применим к равенству (10) интегральное преобразование Ханкеля, получим

$$\overline{\sigma}_z = \overline{\beta} + k\overline{w}. \tag{11}$$

Принимая во внимание формулы (2), (5), вычислим изображения функций

$$\overline{\sigma}_z = -(2-\nu)t^2 Q' + (1-\nu)Q'',$$

$$\overline{w} = \frac{1}{2G}\left[-2(1-\nu)t^2 Q + (1-2\nu)Q''\right]. \tag{12}$$

Подставим соотношения (12), (7), (8) в равенство (11), в результате найдем

$$A = -\frac{2\nu\overline{\beta}}{t^2(t+\chi)}, \tag{13}$$

где

$$\chi = \frac{2k(1-\nu^2)}{E}. \tag{14}$$

Таким образом, функция $Q(t,z)$ записывается в виде

$$Q = -\frac{\overline{\beta}(2\nu + tz)}{t^2(t+\chi)}e^{-tz}. \tag{15}$$

Из равенств (5), (15) находим функцию напряжений

$$\Phi(r,z) = -\int_0^\infty \frac{\overline{\beta}(2\nu + tz)}{t(t+\chi)}e^{-tz}J_0(rt)dt \tag{16}$$

Подставив $\Phi(r,z)$ в формулы (2), определим компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в изотропном полупространстве

$$u(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{17}$$

$$w(r,z) = -\frac{1+\nu}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(2\nu-2-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{18}$$

$$\sigma_z(r,z) = -\int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^2(1+zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi}, \tag{19}$$

$$\sigma_r(r,z) = \int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^2(1-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} -$$

$$-\frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{20}$$

$$\sigma_\Theta(r,z) = 2\nu\int_0^\infty \overline{\beta(t)}e^{-tz}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi} +$$

$$
+\frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}(1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{21}
$$

$$
\tau_{rz}(r,z)=-z\int_0^\infty \overline{\beta(t)}t^3e^{-tz}J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi}. \tag{22}
$$

Устремив в формулах (17)–(22) координату z к нулю, вычислим перемещения и напряжения на границе полупространства

$$
u(r,0)=-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{23}
$$

$$
w(r,0)=-\frac{2(1-\nu^2}{E}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{24}
$$

$$
\sigma_z(r,0)=-\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}, \tag{25}
$$

$$
\sigma_r(r,0)=\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}-\frac{1-2\nu}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{26}
$$

$$
\sigma_\Theta(r,0)=2\nu\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_0(rt)\frac{t^2dt}{t+\chi}+\frac{1-2\nu}{r}\int_0^\infty \overline{\beta(t)}J_1(rt)\frac{tdt}{t+\chi}, \tag{27}
$$

$$
\tau_{rz}(r,z)=0. \tag{28}
$$

Как следует из равенства (28), касательные напряжения на границе обращаются в нуль. Преобразовав соотношение (25) к виду

$$
\sigma_z(r,0)=-\int_0^\infty \overline{\beta}J_0(rt)\frac{t(t+\chi-\chi)dt}{t+\chi}= \tag{29}
$$

$$
=-\int_0^\infty \overline{\beta}tJ_0(rt)dt+\chi\int_0^\infty \overline{\beta}J_0(rt)\frac{tdt}{t+\chi}=-\beta(r)+kw(r,0),
$$

убеждаемся, что граничные условия для напряжения σ_z тождественно удовлетворяются.

Вычислим изображение функции $\beta(r)$. С учетом формулы (9) получаем

$$
\overline{\beta(t)}=\int_0^\infty \beta(r)rJ_0(rt)dr=\int_0^a [q(r)+kw(r,0)]rJ_0(rt)dr. \tag{30}
$$

Подставим в соотношение (30) перемещение $w(r,0)$, определяемое формулой (24), получим интегральное уравнение

$$
\overline{\beta(t)}=\int_0^a q(r)rJ_0(rt)dr+\chi\int_0^\infty \overline{\beta(t_1)}K(t,t_1)dt_1, \tag{31}
$$

ядро которого имеет вид

$$
K(t,t_1)=\int_0^a \frac{t_1r}{t_1+\chi}J_0(rt_1)J_0(rt)dr. \tag{32}
$$

Итак, решение осесимметричной задачи (3) определяется формулами (17)–(28), причем входящая в них функция $\overline{\beta(t)}$ находится из интегрального уравнения (31). При $\chi = 0$ ($k = 0$) задача (3) трансформируется в первую основную задачу, решение которой получено Тередзавой [2] и приведено в монографии [3]. Если $\chi \neq 0$, а на упруго закрепленной границе действует сосредоточенная сила P, то устремив радиус круга a к нулю, найдем, что функция $\overline{\beta(t)}$ равна $P/2\pi$, а полученные результаты (17)–(28) совпадают с опубликованными формулами в работах [4–6].

На практике решение задачи (3) может быть использованно для расчета пространственного напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке пластовых месторождений полезных ископаемых, а также при оценке прочности деталей с тонкими перфорированными прослойками.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

[2] *Terezawa K. J. Coll.* Sci. Imp. Univ. Tokio. 1916. Т.37, № 7.

[3] *Новацкий В. И.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[4] *Залетов В. В.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. 2004. Т. 9. С. 61–67.

[5] *Залетов В. В., Хапилова Н. С.* Закономерности распределения перемещений в изотропном полупространстве, лежащем на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Т. 20. С. 65–73.

[6] *Хапилова Н. С., Залетов В. В.* Симметричная деформация упругого полупространства при смешанных граничных условиях // Математические проблемы механики неоднородных структур. VIII Международная научная конференция, 14–17 сентября 2010 г. Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача, 2010. С. 96–97.

Khapilova N. S., Zaletov S. V. *Axisymmetric deformation of an isotropic half-space at elastic fixing of boundary outside domain of application normal load.* It was obtained analytic solution mixed problem about axisymmetric deformation of an isotropic half-space on boundary wich the load is distributed in a circular domain V, outside V — the normal stresses and displacements are proportional, the shear stresses on the boundary plane are missing. Particular cases of the problem are the task of acting of concentrated force on half-space with an elastically fixed boundary, and also the first the main task of the theory of elasticity, when the coefficient proportionality of stresses and displacements on the boundary is zero.

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ

Черпаков А. В., Акопьян В. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

С помощью численного моделирования в КЭ комплексе ANSYS рассмотрен новый подход к решению задачи идентификации повреждений в стержневой связанной конструкции треугольной конфигурации с повреждением в виде надреза. Приведен сравнительный конечно-элементный анализ частот и форм колебаний упругого стержня и связанных стержневых элементов конструкции, в результате которого установлено, что амплитуда и угол между касательными к кривым форм 3-й моды колебаний упругого стержня и связанного элемента стержневой конструкции треугольной конфигурации в совокупности позволяют оценить степень поврежденности.

Решению задач идентификации повреждений в упругих стержнях и балках достаточно подробно рассмотрены в обзорах [1, 2], в то время как аналогичные задачи идентификации сложных стержневых конструкций исследованы явно недостаточно [3–6]. Среди последних выделяются известные подходы В. А. Постнова [7], Mohammad H. F. Dado et al. [8] при рассмотрении моделей колебаний Эйлера-Бернулли и др. Их анализ показывает, что конечные результаты в таких исследованиях, где используется итерационный подход, могут быть получены путем большого объема численных расчетов и обязательных трудоемких натурных экспериментов. Однако, решение таких задач может быть упрощено с помощью новых подходов, один из которых и предложен в настоящей работе.

Цель работы: разработка нового подхода для решения задачи идентификации повреждений в связанной треугольной конструкции на основе сравнительного анализа результатов конечно-элементного модального расчета резонансных частот и форм различных мод колебаний стержневых структур различной конфигурации с повреждением.

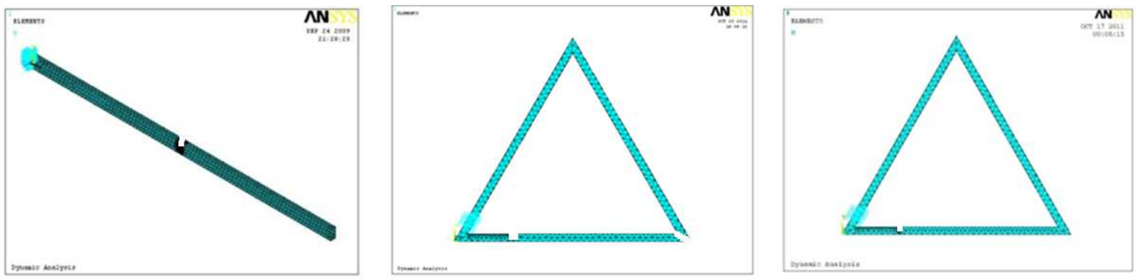
Для решения поставленной задачи был проведен сравнительный конечно-элементный анализ резонансных частот и форм нескольких мод колебаний упругого консольного стержня и связанного элемента стержневой конструкции треугольной конфигурации с повреждением в виде надрезов.

В качестве объектов исследования были рассмотрены три конечно-элементные (КЭ) модели (рис. 1):
- первая — консольно-закрепленный упругий стержень с повреждением на расстоянии $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления;
- вторая — связанная стержневая консольно-закрепленная структура треугольной конфигурации с двумя повреждениями, одно из которых находится в противоположном от защемления углу на пересечении нижней и боковой граней конструкции и имеет полный разрез, а второе на нижней грани на расстоянии $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления (аналог стержня с надрезом);

- третья — связанная консольно-закрепленная стержневая структура треугольной конфигурации с одним повреждением, расположенным на нижней грани на расстоянии $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления.

В каждой из модели рассматривалось повреждение в виде надреза, расположенного на нижней грани (для треугольной конфигурации) на расстоянии $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления.

Как и ранее, в [3] для каждой из моделей с помощью конечно-элементного комплекса *ANSYS* были построены трехмерные модели тел на основе конечного элемента *SOLID92*. Разбивка моделей на узлы по длине производилась кратной 1/40 от общей длины. Количество конечных элементов — более 5000. Повреждение моделировалось в виде надреза шириной 1 мм. Сетка имела двукратное сгущение в месте расположения дефекта. Поврежденность оценивалась относительной глубиной надреза $\bar{t} = t_i/t_0$, где t_i — глубина надреза, t_0 — высота поперечного сечения.



а) б) в)

Рис. 1. Конечно-элементные модели: а) консольно-защемленный стержень; б) связанная стержневая структура треугольной конфигурации с двумя повреждениями; в) связанная стержневая структура треугольной конфигурации с одним повреждением.

Результаты КЭ-моделирования. В результате модального анализа колебаний всех 3-х моделей были получены собственные частоты и соответствующие им формы колебаний. В задаче рассматриваются формы поперечных изгибных колебаний в вертикальной плоскости модели (плоские формы колебаний). Графики амплитуд поперечных смещений в упругом стержне и в двух связанных стержневых конструкциях, с повреждением $\bar{t}$ различной величины приведены на рис. 2.

На них показано распределение амплитуд по длине стержня L с интервалом $0.1\bar{L}$, где $\bar{L} = L_i/L_0$ (L_i — текущее расстояние до зажатого конца стержня). Вычисления производились при относительной глубине надреза $\bar{t}$, принимающей значения $\bar{t} = 0$; 0.30; 0.50; 0.70; 0.9.

Анализ форм колебаний упругого стержня и связанных стержневых структур треугольной конфигурации. Как на первых графиках форм колебаний для стержня [3], так и для 2-х других для связанных структур (треугольники с одним и двумя повреждениями) обнаружены особенности в виде изломов (перегибов) форм колебаний. Координата изломов соответствует местоположению надреза ($\bar{L}_c = 0.25$) глубиной $\bar{t} = 0.3$; 0.5; 0.7; 0.9. Как было показано ранее, на формах колебаний неповрежденных структур эта особенность отсутствует [4]. На всех 3-х группах графиков форм колебаний эти изломы хорошо выражены для кривых колебаний стержня и треугольных связанных структур в случаях надре-

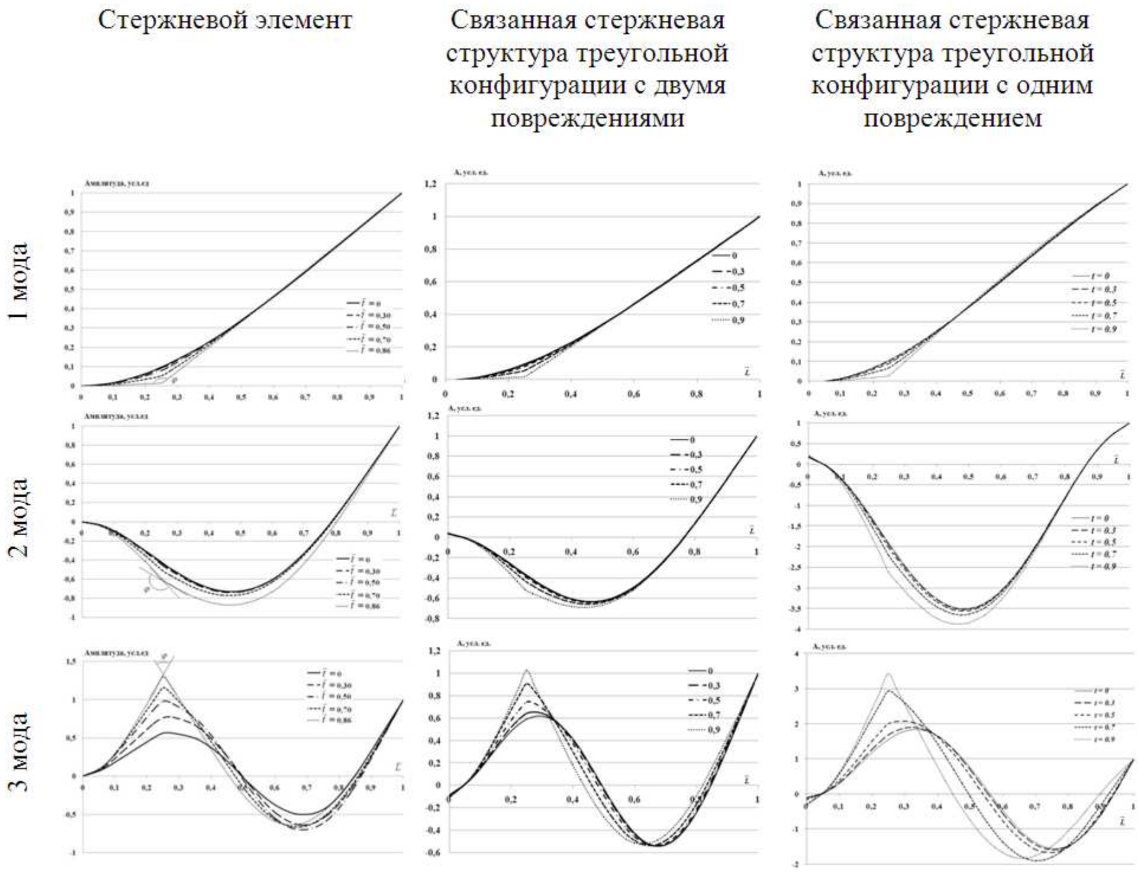
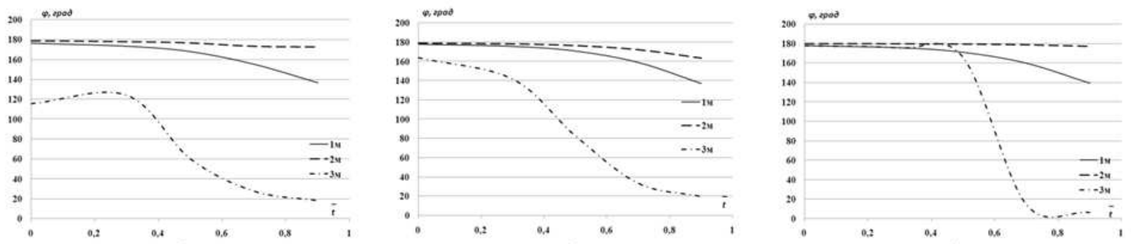


Рис. 2. Сопоставление первых трех форм собственных колебаний соответственно трех моделей при различной степени поврежденности $\bar{t}$. Повреждение находится в месте $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления.

зов глубиной $\bar{t} \geqslant 0.3$. Кроме того, существенное отличие графиков для стержня и треугольной структуры с одним повреждением заключается в величине амплитуды поперечных смещений в точке, согласующейся с местом надреза — амплитуды отличаются в два раза и более. Еще одно отличие графиков этих сравниваемых форм — это величина угла φ между касательными к графику форм колебаний в точке, соответствующей координате повреждения.

Для количественной оценки динамики изменения угла φ при увеличении глубины надреза (степени поврежденности) были рассчитаны значения угла φ в зависимости от местоположения надреза $\bar{L}_c$ при различной его глубине $\bar{t}$. По результатам КЭ расчета для 3-х первых мод колебаний были построены графики зависимостей $\varphi(\bar{L}, \bar{t})$ (рис. 3).

Анализ этих графиков показал, что угол между касательными φ уменьшается с ростом глубины надреза от $\bar{t} = 0.30$ до $\bar{t} = 0.70$ только для 1-й и 3-й мод колебаний, причем эта особенность отчетливо проявляется в точке стержня, расположенной на расстоянии $\bar{L}_c = 0.25$ от его защемления. Это уменьшение угла φ наблюдается как на расчетных, так и на экспериментальных графиках для упругого стержня, полученных нами ранее в работе [3]. Этот вывод подтверждается также расчетными значениями углов φ, приведенными в табл. 1 и 2.



а) б) в)

Рис. 3. Изменение угла φ между касательными к графикам форм колебаний в точке стержня с координатой $\bar{L}_c = 0.25$ для стержневого элемента (а), треугольного элемента с двумя повреждениями (б) и треугольного элемента с одним повреждением (в): 1 м, 2 м, 3 м — расчетные значения для 1-й, 2-й, 3-й мод колебаний, соответственно.

номер моды собственных колебаний	Углы φ между касательными, град.				
	Относительная глубина надреза $\bar{t}$				
	0	0,3	0,5	0,7	0,9
1 м	176,3	173,2	167,8	155,1	136,4
2 м	178,9	178,0	176,8	173,3	172,6
3 м	115,6	124,1	60,3	27,8	18,3

Таблица 1. Углы φ на графиках форм колебаний стержня в точке с координатой $\bar{L}_c = 0.25$ от защемления.

номер моды собственных колебаний	Углы φ между касательными, град.				
	Относительная глубина надреза $\bar{t}$				
	0	0,3	0,5	0,7	0,9
1 м	177,8	175,7	171,0	159,8	139,4
2 м	179,8	179,7	179,4	178,7	177,4
3 м	177,8	175,6	166,0	14,4	6,2

Таблица 2. Углы φ на графиках форм колебаний треугольной модели с одним повреждением в точке с координатой $\bar{L}_c = 0.25$ на нижней грани от защемления.

Выводы.

1. В результате сравнительного анализа спектров частот и параметров повреждения в упругом стержне и в связанном элементе треугольной конструкции установлена особенность в виде изгибных форм колебаний, которая позволяет сформулировать диагностический признака идентификации повреждения в связанной структуре.

2. Предполагаемый диагностический признак включает в себя два взаимосвязанных параметра: критическую частоту одной из мод колебаний и соответствующую ей величину угла перегиба форм колебаний.

3. Результаты конечно-элементного расчета показали, что по исходным данным для упругого стержня можно оценить степень поврежденности связанного элемента конструкции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 10-08-00093а, 10-08-01296-а, 10-08-05011-б, 10-08-13300-РТ_ОМИ, 11-08-90703-моб_ст).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Dimarogonas A. D.* 1996 Vibration of cracked structures: a state of the art review. Eng. Fract. Mech. 55, 831–857. (doi:10.1016/0013-7944(94)00175-8).

[2] *Friswell M. I.* Damage identification using inverse methods // Phil. Trans. R. Soc. A (2007) 365, 393–410. (doi:10.1098/rsta.2006.1930.).

[3] *Черпаков А. В., Акопьян В. А., Рожков Е. В., Соловьев А. Н., Шевцов С. Н.* Идентификация параметров повреждений в упругом стержне смешанным конечно-элементным и экспериментальным методами // Вестник ДГТУ, 2011. № 1. С. 17–24.

[4] *Шевцов С. Н., Акопьян В. А., Рожков Е. В.* Решение задачи идентификации повреждений в упругом стержне на основе модели Тимошенко // Дефектоскопия, 2011. № 7. С. 65–78.

[5] *Bamnios Y. Douka E. and Trochidis.* Crack identification in beam structures using mechanical impedance // J. of Sound and Vibration, 2002. v. 256(2). Pp. 287–297.

[6] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

[7] *Постнов В. А., Томашик Г. А.* Использование метода Ньютона для решения задачи идентификации балочных систем // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. ННТУ им. Н. И. Лобачевского, 2006. Вып. 68. С. 86–94.

[8] *Mohammad H. F. Dado, Omar A. Shpli.* Crack parameter estimation in structures using finite element modeling // Jntern. Journ. Solid and Structures. 2003, v. 40, Pp. 5389–5406.

Cherpakov A. V., Akopyan V. A. *Estimation of damage degree of the connected elements of the rod construction.* By using numerical modeling in FE complex ANSYS the new approach to solution of problem of the damage identification in the bar, connected construction of triangular configuration with incision has been studied. The comparative FE analysis of the frequencies and shapes of oscillations of the elastic bar and connected elements of the bar structures has been presented. The amplitudes and angles between tangents to curves of the 3rd oscillation mode for elastic bar and connected elements of the bar structures with triangular configurations in whole have allowed one to estimate the damage degree of the connected elements of the bar construction.

К ЗАДАЧЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

Шалдырван В. А., Ержаков Г. В.
Донецкий национальный университет

Рассматривается модельная задача о деформации трансверсально-изотропного (транстропного) слоя, ослабленного цилиндрической полостью, под действием изгибающих усилий на бесконечности. Исследуется характер напряженного состояния как тонких, так и толстых плит для различных материалов гексагональной структуры.

1. Введение. Интерес к транстропным материалам резко возрос в середине 80-ых годов прошлого столетия. Это связано с разработкой новых методов и созданием новых материалов с улучшенными прочностными характеристиками. Оказалось, что их возможно аппроксимировать некоторыми транстропными материалами. Развитие методов и результаты исследований деформативного состояния пластин из таких материалов частично отражены в обзоре [1]. А о современном состоянии проблемы можно судить по результатам, представленным в фундаментальной монографии [2], посвященной исследованию напряженного состояния транстропных тел. В [3] получено решение задачи изгиба для изотропных плит, для транстропных материалов подобная задача не решалась.

2. Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим равновесие слоя толщины $2H$ из низкомодульного транстропного материала (константы b_1, b_2 удовлетворяют соотношению $b_1^2 - b_2 < 0$, $b_1 > 0$ [4]), плоскость изотропии которой параллельна срединной плоскости. Пластина ослаблена цилиндрической круговой полостью радиуса R, образующие которой перпендикулярны торцам. Плоские грани свободны от напряжений, а деформация осуществляется изгибающими усилиями вида $p\tilde{z}$, действующими на бесконечности. Отнесем рассматриваемое тело к декартовой системе координат так, чтобы плоскость $\tilde{x}O\tilde{y}$ лежала в срединной плоскости, а ось $O\tilde{x}$ была параллельна изгибающим усилиям. Начало координат поместим в центре полости Ω. Далее будем использовать безразмерные координаты $x = \tilde{x}/R$, $y = \tilde{y}/R$, $z = \tilde{z}/hR$ и характеристики напряженно-деформированного состояния $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\tilde{u}}(\vec{r})/R$, $\sigma_{ij}(\vec{r}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\vec{r})/2G$, $i, j = x, y, z$, где $h = H/R$ — относительная толщина, $\vec{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Также введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) с полюсом в центре полости.

Данная задача в безразмерных величинах описывается уравнениями равновесия типа Ламе для транстропных материалов [4] и граничными условиями

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{yz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = 0; \tag{1}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } r = 1;$$

$$\sigma_{xx} = pz, \sigma_{ij} = 0, \text{ если } i \neq x \text{ и } j \neq x \text{ при } x \to \infty. \tag{2}$$

Решение вспомагательной задачи, т. е. уравнения Ламе с нулевыми условиями на торцах (1), в соответствии с плоским вариантом теоремы Гельмгольца, разыскивается в виде

$$\{u\,(r)\,,v\,(r)\} = p(z)\left\{\frac{\partial\Phi\,(x,y)}{\partial y},-\frac{\partial\Phi\,(x,y)}{\partial x}\right\} + n(z;\bar{\nu}^*)\left\{\frac{\partial\Psi\,(x,y)}{\partial x},\frac{\partial\Psi\,(x,y)}{\partial y}\right\},$$

$$w\,(r) = q(z;\bar{\nu}^*)\Psi\,(x,y)\,, \tag{3}$$

где $\bar{\nu}^* = \{\nu_2;\nu_z;s_0\}$, $\nu_2 = \nu_z E/E_z$, $s_0^2 = G/G_z$, а $p(z)$, $n(z;\bar{\nu}^*)$, $q(z;\bar{\nu}^*)$ (в дальнейшем указывать параметры не будем), Φ, Ψ — произвольные дифференцируемые функции, . При этом вспомагательная задача сводится к определению функций Φ и Ψ, удовлетворяющих метагармоническим уравнениям

$$D^2\Phi(x,y) = (\delta/h)^2\,\Phi(x,y),\;\; D^2\Psi\,(x,y) = (\gamma/h)^2\,\Psi\,(x,y)\,,$$

и отысканию δ, γ, n, q, p из спектральных задач

$$\left\{\begin{array}{l} n''(z) + (1+\mu_1)\gamma^2 s_0^2 n(z) + h\mu_3 s_0^2 q'(z) = 0,\\ q''(z) + \dfrac{\gamma^2}{\mu_2 s_0^2}q + \dfrac{\gamma^2\mu_3}{h\mu_2}n'(z) = 0.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} q'(\pm1) + \dfrac{\gamma^2\nu_2}{h(1-\nu)}n(\pm1) = 0,\\ n'(\pm1) + hq(\pm1) = 0.\end{array}\right. \tag{4}$$

$$p''(z) + \delta^2 s_0^2 p(z) = 0,\;\; p^{'}(\pm1) = 0.$$

Собственные числа δ и γ являются корнями уравнений

$$F_1(\delta) = \delta s_0\cos\delta s_0 = 0 \;\text{ и } F_2(\gamma) = \beta\sin 2\alpha\gamma - \alpha sh2\beta\gamma = 0. \tag{5}$$

При $\gamma_p \neq 0$ n, q, p имеют вид [4]

$$n_p(z) = \sin\gamma_p s_2\sin\gamma_p s_1 z - s_3\sin\gamma_p s_1\sin\gamma_p s_2 z,$$

$$q_p(z) = -S_{1p}\sin\gamma_p s_2\cos\gamma_p s_1 z + s_3 S_{2p}\sin\gamma_p s_1\cos\gamma_p s_2 z,\;\; p_k(z) = \frac{2}{\delta_k}\sin\delta_k s_0 z$$

Второе из трансцендентных уравнений (5) имеет нулевой трехкратный корень $\gamma_0 = 0$, поэтому для отыскания соответствующего ему решения необходимо строить систему присоединенных функций. Решение I-го порядка ищется в виде

$$u_0\,(r) = n_0(z)\frac{\partial\Psi_0\,(x,y)}{\partial x},\;\; v_0\,(r) = n_0(z)\frac{\partial\Psi_0\,(x,y)}{\partial y},\;\; w_0\,(r) = q_0(z)\Psi_0\,(x,y)\,.$$

Решая соответствующую граничную задачу (4) при $\gamma_0 = 0$, получим

$$u_0\,(r) = -hB_1 z\frac{\partial D^2 F}{\partial x}, v_0\,(r) = -hB_1 z\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}, w_0\,(r) = B_1 D^2 F,$$

где F — бигармоническая функция. Далее, решение II-го порядка ищется в виде

$$u_1\,(r) = n_0(z)\frac{\partial\Psi_1\,(x,y)}{\partial x} + n_1(z)\frac{\partial\Psi_0\,(x,y)}{\partial x}, v_1\,(r) = n_0(z)\frac{\partial\Psi_1\,(x,y)}{\partial y} + n_1(z)\frac{\partial\Psi_0\,(x,y)}{\partial y},$$

$$w_1\,(r) = q_0(z)\Psi_1\,(x,y) + q_1(z)\Psi_0\,(x,y)\,.$$

Подстановка этих представлений в уравнения равновесия приводит к граничной задаче, решение которой позволяет записать перемещения в виде

$$u_1(r) = -hB_0 z\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} - \frac{B_0 z}{h}\frac{\partial F}{\partial x} + \left[hB_0 z\left(\mu_4 z^2 - 2s_0^2\mu_5\right) - h\tilde{B}_0 z\right]\frac{\partial D^2 F}{\partial x},$$
$$v_1(r) = -hB_0 z\frac{\partial\Psi_0}{\partial y} - \frac{B_0 z}{h}\frac{\partial F}{\partial y} + \left[hB_0 z\left(\mu_4 z^2 - 2s_0^2\mu_5\right) - h\tilde{B}_0 z\right]\frac{\partial D^2 F}{\partial y},$$
$$w_1(r) = B_0\Phi_0 + B_0/h^2\cdot F + \left(\tilde{B}_0 + \mu_5\nu_2 B_0 z^2\right)D^2F. \tag{6}$$

где Φ_0 — произвольная гармоническая функция. Видно, что решение I-го порядка есть частный случай решения II-го порядка, а решение III-го порядка полностью совпадает с ним. Полагая в (6) $B_0 = -h$, $\tilde{B}_0 = 2s_0^2 h\mu_5$ и $\Phi_0(x, y) = 0$, получим решение

$$u = \partial\left[zF - z^3h^2\mu_4 D^2F\right]/\partial x,\ v = \partial\left[zF - z^3h^2\mu_4 D^2F\right]/\partial y,$$
$$w = -\frac{F}{h} - h\mu_5\left(\nu_2 z^2 - 2s_0^2\right)\ D^2F,\ \mu_4 = \frac{2s_0^2 - \nu_2}{6\,(1-\nu)},\ \mu_5 = \frac{1}{2\,(1-\nu)},$$

совпадающее с приведенным в [4] и названное бигармоническим. Отметим, что функцию F можно представить по формуле Гурса.

Возникающее в плите поле напряжений σ_{ij}^* есть суперпозиция основного σ_{ij}^0 и возмущенного состояний σ_{ij}: $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}$. Под основным состоянием будем понимать напряженное состояние сплошного слоя с граничными условиями (1), (2). Его компоненты в цилиндрической системе имеют вид:

$$\sigma_{rr}^{(0)} + i\sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}pz(1+\sigma_i^{-2}),\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(0)} = pz,$$
$$\sigma_{rz}^{(0)} = \sigma_{\theta z}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(0)} = 0,\ \sigma = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Под возмущенным состоянием будем понимать напряженное состояние, возникающее в плите с полостью, у которой на торцах и на бесконечности напряжения отсутствуют, а на боковой поверхности приложены усилия

$$\sigma_{rr}|_{r=1} + i\sigma_{r\theta}|_{r=1} = -1/2pz(1+\sigma^{-2}),\quad \sigma_{rz}|_{r=1} = 0. \tag{7}$$

Поскольку задача геометрически и физически симметрична относительно плоскостей xOz и yOz, то комплексные потенциалы и метагармонические функции Φ, Ψ можно представить в виде

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n},\ \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n},\ a_n = \bar{a}_n,\ b_n = \bar{b}_n,$$

$$\Psi_p(r,\theta) = c_{2p}^* K_2(\gamma_p^* r)\cos 2\theta,\ c_{2p}^* = \frac{c_{2p}}{K_2(\gamma_p^*)}, \Phi_k(r,\theta) = b_{2k}^* K_2(\delta_k^* r)\sin 2\theta,\ b_{2k}^* = \frac{b_{2k}}{K_2(\delta_k^*)}.$$

Используя эти представления и подставляя напряжения в граничные условия (7), придем к функциональной системе

$$-\left(4a_1\mu_7 + 3b_3\right)z + 24h^2\mu_4 z^3 a_1 + \sum_1^{\infty} p_k M_2^-(\delta_k^*) b_{2k} + \sum_1^{\infty}\left[l_p + n_p N_2^-(\gamma_p^*)\right]c_{2p} = -pz/2,$$

$$(2a_1 - 3b_3)\,z + 24h^2\mu_4 z^3 a_1 + \sum_1^\infty p_k\left(\frac{1}{2}\delta_k^{*2} + N_2^-(\delta_k^*)\right)b_{2k} - \sum_1^\infty n_p M_2^-(\gamma_p^*)c_{2p} = pz/2,$$

$$8a_1\mu_5(1-z^2)h - 2\sum_1^\infty g_k b_{2k} + \sum_1^\infty r_p P_2^-(\gamma_p^*)c_{2p} = 0,\ b_1 = p/2.$$

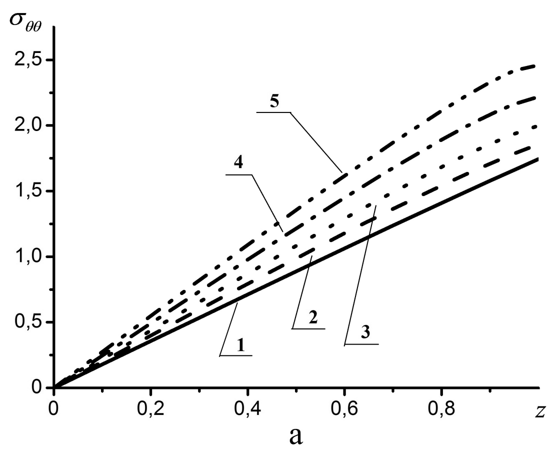
Разлагая выражения в левой и правой частях данной системы в ряд Фурье, и приравнивая соответствующие коэффициенты, придем к бесконечной алгебраической системе. Оставляя в ней необходимое количество членов, получим решение с нужной точностью.

2. Результаты численных исследований. Технические постоянные материалов [2, 5], для которых приводятся результаты, и их безразмерные аналоги ν, ν_z, ν_2, s_0^2 помещены в табл. 1. Среди напряжений интерес вызывают напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz}, поскольку остальные близки к нулю при любых допустимых значениях r, θ, z. На рис. 1 а, б, рис. 2 а, б приведены эпюры распределения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} по

Материал	E, ГПа	E_z, ГПа	G, ГПа	G_z, ГПа	ν	ν_z	ν_2	s_0^2
Бериллий	2,960	3,41	1,357	1,66	0,091	0,034	0,030	0,817
InSe	47,917	18	23	12	0,042	0,3	0,799	1,917

Таблица 1. Технические постоянные материалов и их безразмерные параметры.

толщине z на полости при $\theta = \pi/2$ для пластин из Be и InSe, соответственно, при различных значениях h: 1 — $h = 0.1$; 2 — $h = 0.5$; 3 — $h = 1.0$; 4 — $h = 2$; 5 — $h = 4.0$. Как видно, напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в материале из бериллия для всех h имеют максимум на верхней границе полости, для материала из InSe после некоторого значения h максимум напряжений перемещается в глубь материала (в районе $z = 0.9$). Аналогичное поведение пластинам из бериллия имеют материалы, у которых коэффициент Пуассона ν_z мал, для других материалов характерны графики, изображенные на рис. 2. Также есть различие в поведении напряжений σ_{zz} для материалов с малыми и большими ν_z. С ростом h при больших ν_z скорость роста напряжений



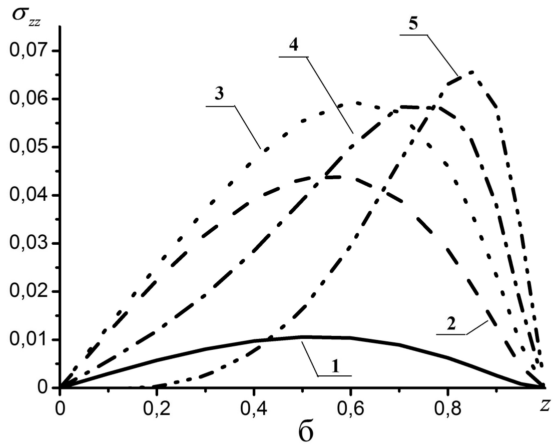


Рис. 1. Зависимости напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} от толщины для плиты из бериллия.

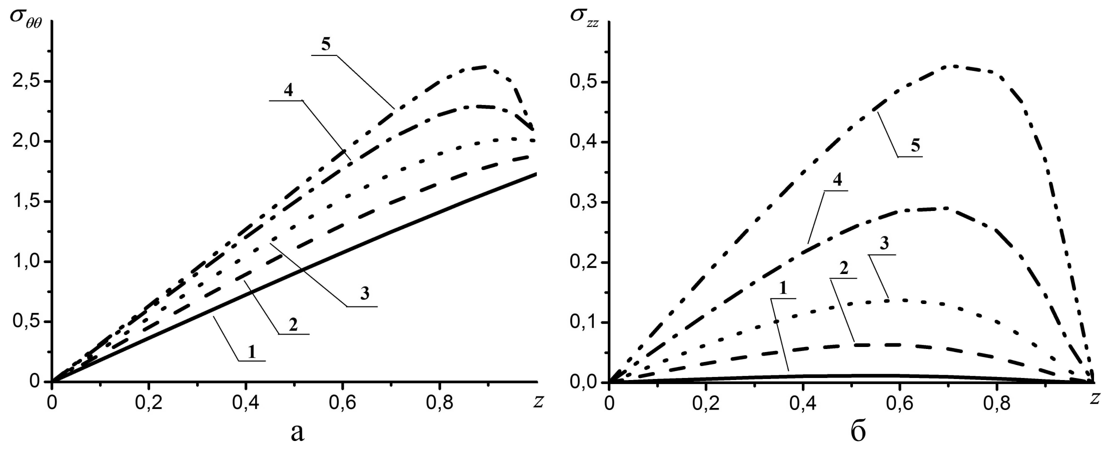


Рис. 2. Зависимости напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} от толщины для плиты из InSe.

при малых z постоянно увеличивается, в то время как для малых ν_z после некоторого значения относительной толщины скорость роста начинает уменьшаться. В обоих случаях с ростом h максимум напряжений смещается к торцам плиты. Точность решения контролировалась проверкой граничных условий на поверхности полости. При расчетах максимальные отклонения напряжения σ_{rr} от нуля не превосходили 10^{-4}, при этом для малых h в системе сохранялось 50 неизвестных, для больших h система была гораздо больше, например, при $h = 4$ оставлялось 400 неизвестных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы теории пластин (обзор) // Прикладная механика. 2007. Т. 43, No 2. С. 45–69.

[2] *Ding H. Chen W. Zhang L.* Elasticity of transversaly isotropic materials. Dordrecht: Springer, 2006. 454 p.

[3] *Космодамианский А. С. Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью // Прикладная механика. 1974. Т. 10, No 5. С. 27–32.

[4] *Космодамианский А. С. Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. К.: Наукова думка, 1978. 240 с.

[5] *Huntington H. B.* The elastic constants of crystals. State New York; place City London: Academic Press, 1958. 139 p.

Shaldyrvan V. A., Erzhakov G. V. *For the problem of cylindrical bend of transversaly isotropic layer with cavity.* Considering the model problem of deformation of a transversaly isotropic (transtropic) layer weakened by cylindrical cavity under the action of bending forces at infinity. Carring out the character of stress state of both thin and thick plate of different materials of hexagonal structure.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОВЕДЕНИИ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ.

Шретер С. А., Илюхин А. А.
Таганрогский государственный педагогический институт им. А. П. Чехова

Основная идея используемого в данной работе метода построения решения нелинейной задачи теории упругих стержней состоит в сведении исходного уравнения Кирхгофа к системе уравнений гамильтонова типа с последующей нормализацией функции Гамильтона в определенном числе членов. Специфика задач механики гибких стержней в том, что граничные условия в них задаются в нескольких точках оси стержня. И при аналитическом построении приближенного решения приходится вычислять постоянные интегрирования из граничных условий. А для этой цели полезно иметь явный вид обратного преобразования Биркгофа. Решение задачи может быть использовано при проведении экспериментов в аэродинамических трубах.

Рассматривается задача об изгибе потоком воздуха стержня, жестко закрепленного нижним концом, к его верхнему концу жестко прикреплена абсолютно твердая пластинка. Предполагается, что поток воздействует только на пластинку, изгиб стержня происходит в одной плоскости. Цель работы состоит в том чтобы, получив решение уравнения равновесия, установить зависимость между аэродинамическими силами и углом поворота пластинки, тем самым построить математическую модель эксперимента в аэродинамической трубе.

Направление силы воздействия $\overrightarrow{R}$ потока на пластинку может не совпадать с направлением вектора скорости $\overrightarrow{V}$, поэтому вектор $\overrightarrow{R}$ представляют в виде суммы двух векторов — вектора $\overrightarrow{S}$ силы сопротивления и вектора $\overrightarrow{P}$ подъемной силы:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{P}, \quad \overrightarrow{S} \parallel \overrightarrow{V}, \quad \overrightarrow{P} \perp \overrightarrow{V}$$

Для аэродинамических сил взяты зависимости [1]:

$$\overrightarrow{S} = \frac{\rho}{2} s(\alpha) V \overrightarrow{V}, \;\; \overrightarrow{P} = \frac{\rho}{2} p\,(\alpha)\,(\,\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{V}\,)$$

Функции $s\,(\alpha)$, $p\,(\alpha)$ — коэффициенты аэродинамических сил, зависят от формы и размеров пластинки и определяются экспериментально. Общие свойства этих функций: $s\,(\alpha) \geqslant s_0 > 0$, а $p\,(\alpha)$ меняет свой знак при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ $(p\,(0) = p\,(\pi/2\,) = 0)$ [1].

К стержню кроме силы $\overrightarrow{R}$ приложен момент:

$$M = \frac{\rho}{2} d(\alpha) \left(pV \cos\alpha \; + sV^2 \sin\alpha\,\right)$$

где $d\,(\alpha)$ — расстояние от центра давления до точки крепления пластинки и стержня.

Уравнение равновесия Кирхгофа представленной системы имеет вид:

$$B\frac{d^2\theta}{dl^2}+\frac{\rho}{2}sV^2\sin\theta\ +\frac{\rho}{2}pV\cos\theta\ =0 \tag{1}$$

Для преобразования уравнения равновесия (1) к системе двух уравнений Гамильтона поступим формально: выберем обобщенную координату θ, укажем сопряженный координате импульс p_θ, и приведем соответствующую такому выбору функцию Гамильтона.Через обобщенную координату $\theta=\theta(l)$ обозначен угол наклона касательной деформированной оси стержня к оси Ox, ($Ox \parallel \overrightarrow{V}$). Введя сопряженные переменные θ и $p_\theta=B\frac{d\theta}{dl}$, получим вместо уравнения равновесия (1) систему двух уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{dl}=\dfrac{1}{B}p_\theta\\[2mm] \dfrac{dp_\theta}{dl}=-\dfrac{1}{2}\rho sV^2\sin\theta\ -\dfrac{1}{2}\rho pV\cos\theta\end{cases} \tag{2}$$

Если взять функцию Гамильтона H в виде:

$$H=\frac{1}{2B}{p_\theta}^2-\frac{1}{2}\rho sV^2\cos\theta\ +\frac{1}{2}\rho pV\sin\theta \tag{3}$$

то уравнения (2) будут уравнениями Гамильтона с функцией (3).

Сделаем каноническую замену $\zeta=\theta+\delta$, $p_\zeta=p_\theta$, где $\cos\delta\ =V/\sqrt{V^2+(p/s)^2}$. Тогда уравнения (2) примут вид (4):

$$\begin{cases}\dfrac{d\zeta}{dl}=\dfrac{p_\zeta}{B}\\[2mm] \dfrac{dp_\zeta}{dl}=-\dfrac{1}{2}R\sin\zeta\end{cases} \tag{4}$$

где $R=\rho sV\sqrt{V^2+(p/s)^2}$, а функция Гамильтона (3) в новых канонических переменных будет иметь вид:

$$H=\frac{{p_\zeta}^2}{2B}-\frac{1}{2}R\cos\zeta \tag{5}$$

Система (4) допускает тривиальное решение $\zeta=0$, $p_\zeta=0$. Решение, отличное от тривиального, будем искать методом нормальных форм. Разложим функцию Гамильтона H (5) в ряд по степеням канонических переменных ζ, p_ζ удерживая в разложении члены до четвертого порядка включительно.

$$H=H_2+H_4,\quad H_2=\frac{{p_\zeta}^2}{2B}+\frac{1}{4}R\zeta^2,\quad H_2=-\frac{1}{48}R\zeta^4 \tag{6}$$

Введем безразмерные величины:

$$p'_\zeta=\frac{p_\zeta}{\sqrt{BR}},\quad l'=l\sqrt{\frac{R}{2B}},\quad \zeta'=\frac{\zeta}{\sqrt{2}},\quad H'=\frac{H}{R},\quad H'_i=\frac{H_i}{R}\,(i=2,4)\,.$$

Опуская штрихи, представим разложение (6) в безразмерном виде и в результате получим нормализованную функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}({p_\zeta}^2 + \zeta^2) - \frac{1}{12}\zeta^4 \tag{7}$$

Для последующих преобразований удобнее ввести комплексно сопряженные канонические переменные $p = p_\zeta + i\zeta$, $q = p_\zeta - i\zeta$, причем необходимо учесть валентность такого преобразования $\overline{H} = -2iH$. Здесь $\overline{H}$ — новая функция Гамильтона, которая в переменных p и q примет вид:

$$\overline{H} = -i\left[pq - \frac{1}{96}(p^4 - 4p^3q + 6p^2q^2 - 4pq^3 + q^4)\right] \tag{8}$$

При отсутствии соответствующих резонансов в системе (4), функцию Гамильтона (8) каноническим преобразованием приводим к нормальной форме в членах до четвертого порядка [2]. В качестве канонического преобразования выберем преобразование Биркгофа [3] с соответствующей порождающей функцией

$$p = u + \frac{\partial S_4(u,v)}{\partial v}, \quad q = v - \frac{\partial S_4(u,v)}{\partial u}$$

$$S_4 = S_{04}v^4 + S_{13}uv^3 + S_{22}u^2v^2 + S_{31}u^3v + S_{40}u^4$$

Специальным выбором коэффициентов порождающей функции приводим функцию Гамильтона (8) к нормальному виду в переменных u и v

$$H_* = -i(uv - \frac{1}{16}u^2v^2) \tag{9}$$

Следует напомнить, что функция H_*, определяемая равенством (9) не тождественна функции $\overline{H}$, преобразованной к переменным u и v. Необходимо учитывать, что приведение функции Гамильтона исходной системы (2) к нормальной форме осуществлено только в членах до четвертого порядка включительно [4]. Поэтому рассматриваемая система с функцией Гамильтона (9) является только приближением исходной системы (2).

Соответствующая система дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (9) допускает общий интеграл $r = uv = const$, что дает возможность представить точное решение этой системы в явном виде:

$$v = (a+ib)\,e^{iml}, u = (a-ib)\,e^{-iml}, \quad m = i\frac{\partial H_*}{\partial(uv)} = const,$$

где m зависит, как от параметров стержня, так и от граничных условий [4]. В результате получаем зависимость p'_ζ и ζ' от дуговой координаты l:

$$p'_\zeta = \left(a - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2\right)a\right)\cos ml \;+ \left(-b + \frac{1}{16}\left(a^2+b^2\right)b\right)\sin ml \;+$$

$$+\frac{1}{32}a\left(a^2-3b^2\right)\cos 3ml \;+ \frac{1}{32}b\left(b^2-3a^2\right)\sin 3ml$$

$$\zeta' = \left(-b - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2\right)b\right)\cos ml \ + \left(-a - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2\right)a\right)\sin ml \ +$$
$$+\ \frac{1}{96}b\left(b^2-3a^2\right)\cos 3ml \ + \frac{1}{96}a\left(-a^2+3b^2\right)\sin 3ml$$

Таким образом, найдено решение поставленной задачи

$$\theta(l) = \sqrt{2}\zeta' - \delta$$

Для определения постоянных интегрирования a и b воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} l = 0: &\qquad \theta = \psi \\ l = L: &\qquad B\left(\frac{d\theta}{dl}\right) = \frac{1}{2}\rho d\left(sV^2\sin\alpha_T \ + pV\cos\ \alpha_T\right) \end{aligned}$$

Перепишем граничные условия в новых переменных ${p'}_\zeta$ и ζ'.

$$\begin{aligned} \zeta' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\psi+\delta) \\ {p'}_\zeta \ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{d}{L}Y\sin\left(\alpha_0 - \psi + \sqrt{2}\zeta'\right), \quad \text{где } Y = L\sqrt{\tfrac{R}{2B}} \end{aligned} \qquad (10)$$

Заменив уравнения для ${p'}_\zeta$ и ζ' приближенными, и воспользовавшись граничными условиями (10), будем иметь систему уравнений для нахождения a и b.

$$-\frac{b}{96}\left(96+9a^2+5b^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\psi+\delta),$$

$$\left(\frac{1}{16}\sin Y \ + \frac{1}{8}Y\cos Y \ - \frac{3}{32}\sin 3Y \ \right)a^2b + \left(-\frac{1}{16}\cos Y \ \ + \frac{1}{8}Y\sin Y \ - \frac{3}{32}\cos 3Y \ \right)ab^2 +$$
$$+\left(-\frac{1}{16}\cos Y \ \ + \frac{1}{8}Y\sin Y \ + \frac{1}{32}\cos 3Y \ \right)a^3 + \left(\frac{2}{32}\sin Y \ + \frac{1}{8}Y\cos Y \ + \frac{1}{32}\sin 3Y \ \right)b^3 +$$
$$+a\cos Y \ - b\sin Y \ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{d}{L}Y\sin\left(\alpha_0 - \psi + \sqrt{2}\zeta'\right),$$
$$\zeta' = -b\cos Y \ - a\sin Y \ +$$
$$+\left(-\frac{1}{16}\cos Y \ - \frac{1}{8}Y\sin Y \ - \frac{1}{32}\cos 3Y \ \right)a^2b + \left(-\frac{1}{16}\sin Y \ + \frac{1}{8}Y\cos Y \ + \frac{1}{32}\sin 3Y \ \right)ab^2 +$$
$$+\left(-\frac{1}{16}\sin Y \ + \frac{1}{8}Y\cos Y \ - \frac{1}{96}\sin 3Y \ \right)a^3 + \left(-\frac{1}{16}\cos Y \ - \frac{1}{8}Y\sin Y \ + \frac{1}{96}\cos 3Y \ \right)b^3$$

Построенное приближенное решение задачи явным образом зависит от постоянных интегрирования a и b, непосредственная подстановка граничных значений в это решение приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Однако, в том случае, когда известны значения исходных переменных при $l = 0$, нет необходимости решать полученную нелинейную систему. Явный вид a и b можно получить, используя обратное преобразование Биркгофа [3].

$$u = p - \tfrac{1}{96}(q^3 - 6pq^2 + 2p^3), \quad v = q + \tfrac{1}{96}(-2q^3 + 6p^2q - p^3)$$

Возвращаясь к переменным p'_ζ, ζ', получим систему для нахождения неизвестных постоянных a и b

$$a - ib = p'_\zeta + i\,\zeta' - \frac{1}{96}((p'_\zeta - i\,\zeta')^3 - 6(p'_\zeta + i\,\zeta')\big(p'_\zeta - i\,\zeta'\big)^2 + 2\big(p'_\zeta + i\,\zeta'\big)^3)$$

$$a + ib = p'_\zeta - i\,\zeta' + \frac{1}{96}(-2\big(p'_\zeta - i\,\zeta'\big)^3 + 6\big(p'_\zeta + i\,\zeta'\big)^2\,\big(p'_\zeta - i\,\zeta'\big) - \big(p'_\zeta + i\,\zeta'\big)^3)$$

где p'_ζ и ζ' вычисляются при $l = 0$.

Если же значения p'_ζ и ζ' заданы в некоторой текущей точке $l = l_T$, то правые части необходимо поделить соответственно на e^{-iml} и e^{iml}. Однако в этом случае возникают определенные трудности при вычислении a и b, т. к. m зависит от a и b. Поэтому задача о нахождении постоянных интегрирования решается значительно проще, когда p'_ζ и ζ' заданы при $l = 0$ [4].

В том случае, когда значения p'_ζ и ζ' не заданы одновременно в одной точке, необходимо решать нелинейную систему. Данную систему предлагается решать методом последовательных приближений. Идея метода состоит в выборе некоторого нулевого приближения величины α_{T_0}, которое соответствует выбранной скорости потока, исходя из соображений физической целесообразности. Далее, решаем систему, по найденному значению ζ' в точке крепления стержня с пластинкой (за счет жесткости крепления) находим значение α_{T_1} и используем его в качестве приближения на следующем шаге итерации. Как показывают вычисления, каждый шаг итерации уточняет значение угла на один знак после запятой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Локшин Б. Я. Привалов В. А. Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 86 с.

[2] *Арнольд В. И.* Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 304 с.

[3] *Биркгоф Г. Д.* Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.

[4] *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. К.: Наук. Думка, 1979. 216 с.

Schreter S. A., Ilyukhin A. A. *Problem on the behavior of plate on an elastic rod under the influence forces aerodynamic.* Consider the problem of bending of the air flow of the rod, rigidly fixed by the bottom end to which top end absolutely firm plate is rigidly attached. Supposed that the flow acts only on the plate, the bending of the rod is in the same plane. The purpose of this paper is to obtain a solution of the equation of balance, to establish the dependence of the aerodynamic forces and the angle of rotation of the plate, thereby to construct a model. In the transition is carried out from the equation of balance of Kirchhoff to the equations of Hamilton. Specified and implemented software algorithm for the numerical construction of the angle of attack depending on the plate from the free stream velocity.

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ФОРМОВКИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Юдин А. С., Юдин С. А.
НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Знание механических свойств материалов при больших деформациях необходимо в задачах моделирования технологических процессов формовки, при расчётах поведения конструкций в предельных условиях. Для идентификации нелинейных свойств материалов широко используются испытания одномерных образцов (стержней, полос). Однако в случае процессов листовой штамповки предпочтительным методом является продавливание листовых образцов через отверстия, обычно, круглые [1, 2]. Здесь дано обобщение и развитие решения, на основе которого моделируется вытяжка куполообразных оболочек из круглых пластинок.

При свободной вытяжке купола из пластины равномерным (гидростатическим) давлением купол проходит стадии формы как сплюснутого, так и вытянутого эллипсоидов вращения [3]. Ранее строилось решение только для слегка сплюснутых сфероидов с использованием малости эксцентриситета, что обеспечивалось дополнительной (артифицирующей) силой [4–6]. Для целей идентификации материалов необходимо развитие метода построения решения. При этом сделанное обобщение пригодно как для сплюснутого, так и для вытянутого эллипсоидов вращения и не использует малость эксцентриситета.

При параметрическом задании меридиана поверхности в виде $r_0 = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ её площадь можно определить интегралом:

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\sqrt{(\varphi_{,t})^2 + (\psi_{,t})^2}dt. \tag{1}$$

В рассматриваемых вариантах эллипсоидов:

$$r_0 = \varphi(t) = a\sin t, \;\; z = \psi(t) = z_c - b\cos t, \tag{2}$$

где z_c — координата центра эллипса. При этом полярная координата r_0 связана с лагранжевой r, отсчитываемой на пластине, через радиальную компоненту перемещения $u: \; r_0 = r + u$.

После подстановки выражений для производных $\varphi_{,t} = a\cos t, \psi_{,t} = b\sin t$ интеграл (1) получает вид:

$$S = 2\pi a \int_{0}^{T} \sin t\sqrt{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2}dt, \tag{3}$$

где T — граничное значение переменной t, соответствующее внешнему контуру сегмента.

Определим T через параметры эллипса. На контуре эллиптического сегмента $r_0 = r_p$, $z = 0$. Тогда из (2) следует:

$$\frac{r_p}{-z_c} = -\frac{a}{b}\operatorname{tg} T = -\frac{1}{k_c}\operatorname{tg} T, \quad T = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_c r_p}{z_c}\right).$$

Объём эллипсоидальной оболочки переменной толщины $h(t)$ находится по формуле:

$$V = 2\pi a \int\limits_0^T h(t) g(t) \sin t dt\,,$$

где $g(t) = \sqrt{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2}$.

Аппроксимацию функции $h(t)$ задаем в виде [3, 4]:

$$h(t) = h_p\{1 - \delta\;[1 - (t/T)^2]\}.$$

Тогда

$$V = 2\pi a \int\limits_0^T h_p\{1 - \delta\;[1 - (t/T)^2]\} g(t) \sin t\, dt.$$

Объём исходной пластины, имеющей радиус r_p и толщину h_p, будет $V_p = \pi r_p^2 h_p$. Поскольку рассматривается несжимаемый материал, то $V = V_p$, т. е.

$$2\pi a h_p \int\limits_0^T \{1 - \delta\;[1 - (t/T)^2]\} g(t) \sin t\, dt = \pi r_p^2 h_p\,. \tag{4}$$

Рассматриваем (4) как уравнение для определения коэффициента δ:

$$\int\limits_0^T \{1 - \delta\;[1 - (t/T)^2]\} g(t) \sin t\, dt - r_p^2/2a = 0.$$

Ведем обозначения:

$$I_0 = \int\limits_0^T [1 - (t/T)^2] g(t) \sin t\, dt,$$

$$I_1 = \int\limits_0^T g(t) \sin t\, dt - r_p^2/2a.$$

Из уравнения $I_1 - I_0\delta = 0$ следует $\delta = I_1/I_0$, или:

$$\delta = \frac{\int_0^T g(t)\sin t\, dt - r_p^2/2a}{\int_0^T [1 - (t/T)^2] g(t) \sin t\, dt}\,.$$

Далее, необходимо построить функциональное уравнение, из которого с помощью простого итерационного процесса можно определить компоненту радиального перемещения при деформировании пластины в купол. Для этого применим условие несжимаемости к участкам купола и пластины, определяемым общей лагранжевой координатой, которой является радиус цилиндрической системы координат r.

По условию несжимаемости для эквивалентных участков купола и пластины, отсекаемых координатой r, имеет место уравнение:

$$\int\limits_0^t \left\{1 - \delta\,\left[1 - (t/T)^2\right]\right\} g(t) \sin t\, dt = r^2/(2a). \tag{5}$$

На основе (2) переменный верхний предел интеграла левой части зависит от r и $u(r)$:

$$r + u(r) = a \sin t\big(r, u(r)\big), \quad t\big(r, u(r)\big) = \arcsin\left(\frac{r + u(r)}{a}\right). \tag{6}$$

Таким образом, независимой переменной в уравнении (5) является лагранжева координата r.

Левую часть уравнения (5) представим в виде суммы двух интегралов $J_1 + J_2$, где:

$$J_1 = \int\limits_0^t g(t) \sin t\ dt, \quad J_2 = -\int\limits_0^t \delta\ [1 - (t/T)^2] g(t) \sin t\ dt. \tag{7}$$

Под интегралом J_1 выделим слагаемое, которое легко интегрируется в явном виде. Этот прием был предложен нами в работе [7]. Для этого добавим и вычтем единицу:

$$J_1 = \int\limits_0^t (1 - 1 + g(t) \sin t)\ dt = t - \int\limits_0^t (1 - g(t) \sin t)\, dt. \tag{8}$$

Тогда на основе (5), (7), (8) имеем:

$$t = \int\limits_0^t (1 - g(t) \sin t\,)\, dt + \delta \int\limits_0^t\ \left[1 - (t/T)^2\right] g(t) \sin t\ dt - r^2/(2a).$$

Учитывая (6), получаем:

$$u(r) = a \sin \left[\ \int\limits_0^{t(r,u(r))} (1 - g(t) \sin t\,)\, dt + \right.$$

$$\left. +\ \delta \int\limits_0^{t(r,u(r))}\ [1 - (t/T)^2] g(t) \sin t\ dt - r^2/(2a) \right] - r\ . \tag{9}$$

Для уравнения (9) можно организовать простой итерационный процесс на основе принципа сжимающих отображений [8]. Задаваясь некоторым начальным (с номером 0) приближением $u_0(r)$ и вычисляя с ним правую часть в (9), получим первое приближение $u_1(r)$. Далее процесс повторяется, и для $(k+1)$-го шага имеем:

$$u_{k+1}(r) = a\sin\left[\int\limits_0^{t(r,u_k(r))} (1-g(t)\sin t)\ dt + \right.$$
$$\left. +\ \delta \int\limits_0^{t(r,u_k(r))} [1-(t/T)^2]g(t)\sin t\ dt - r^2/(2a)\right] - r\ . \qquad (10)$$

Процесс (10) быстро сходится и проверяется сравнением с ранее полученным решением для слабосплюснутого сфероида, которое при наличии только формообразующего давления (без артифицирующей силы) верно для относительных высот подъёма $H/r_p \leqslant 0.2$ [3]. Более общая форма построенного алгоритма дает возможность не рассматривать отдельно варианты сплюснутого и вытянутого эллипсоидов, поскольку здесь не используются разложение в степенной ряд по эксцентриситету. Хотя для повышения эффективности вычислительного процесса этот приём может быть использован для малых эксцентриситетов. В представленном здесь обобщённом подходе малость эксцентриситета не предполагается. Это позволяет расширить возможности апробации данного полуобратного метода в предельных случаях высокопластичных материалов. Другие этапы построения решения и получения формулы, связывающей давление вытяжки с параметрами купола, в т. ч. его высотой, аналогичны ранее разработанным [3–6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сю (Hsu T. C.)* Напряжения пластического течения в листовом материале при формовке из него изделий почти сферической формы // Теор. основы инж. расчетов: тр. амер. общ-ва инж.-механиков. М.: Мир, 1975. Т. 97, № 1. С. 66–75.

[2] *Куркин С. А.* Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением: монография. М: Машиностроение, 1976. 184 с.

[3] *Юдин А. С., Юдин С. А.* Условия сферичности купола при пластической формовке из круглой пластинки // Модели и алгоритмы для имитац. физ.-хим. процессов: м-лы междунар. конф. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008. С. 86–94.

[4] *Юдин С. А., Юдин А. С.* Аналитика пластической формовки сферического купола из круглой пластинки // Матем. модели и алгор. для имитац. физич. процессов: м-лы междунар. науч.-технич. конф. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2006. Т. 1. С. 212–215.

[5] *Юдин А. С., Юдин С. А.* Моделирование пластической формовки артифицированной хлопающей мембраны // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды: Тр. X междунар. конф. Ростов н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2006. Т. 1. С. 290–294.

[6] *Юдин А. С., Юдин С. А.* Пластическая вытяжка купола из круглой пластинки: теория и эксперимент // Соврем. пробл. мех. сплош. среды: Тр. XI междунар. конф. Ростов н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. Т. 1. С. 255–259.

[7] *Юдин С. А., Юдин А. С.* Нелинейное деформирование защемленной цилиндрической оболочки внутренним давлением // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды: Тр. XIII междунар. конф. Ростов н/Д, 12-15 окт. 2009г. Т. 1. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. С. 213–217.

[8] *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды: учеб. пособие. М.: Вузовская книга, 2000. 320 с.

Yudin A. S., Yudin S. A. *Generalized decision for the plastic forming problem of the spheroid shells*. The knowledge of materials mechanical properties at the large deformations is necessary in problems of modeling of technological forming processes, at calculations of behavior of structures in limiting conditions. For identification of nonlinear properties of materials testing of one-dimensional samples (rods, strips) are widely used. However in case of processes of sheet punching by a preferable method is sheet samples pressing through apertures, usually, circular. Here generalizations and decision development on base of which modeled extension of a dome-shaped shells from a circular plates are given.