

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
РОССИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ
ОБЪЕДИНЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СОВЕТ РАН ПО КОМПЛЕКСНОЙ
ПРОБЛЕМЕ «МЕХАНИКА»
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А. Ю. ИШЛИНСКОГО РАН
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механика деформируемого твёрдого тела

*Сборник трудов
IX Всероссийской конференции*

Воронеж,
12–15 сентября 2016 г.

Воронеж
Издательство
«Научно-исследовательские публикации»
2016

УДК 531.36
ББК 22.251
М55

Председатель:

Морозов Н. Ф. – академик РАН

Сопредседатели:

Ендовицкий Д. А. – д-р экон. наук, ректор Воронежского государственного университета,
Манжиров А. В. – д-р физ.-мат. наук, профессор, иностранный член НАН РА, Институт
проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН

Заместители председателя:

Радаев Ю. Н., Шашкин А. И.

Программный комитет:

Айзикович С. М., Аннин Б. Д., Бабешко В. А., Баженов В. Г., Буренин А. А., Ватульян А. О.,
Вервейко Н. Д., Георгиевский Д. В., Гольдштейн Р. В., Горячева И. Г., Зимин В. Н.,
Игумнов Л. А., Индейцев Д. А., Калинин В. В., Канель Г. И., Карев В. И., Карякин М. И.,
Кириллова И. В., Климов Д. М., Ковалев В. А., Колесников В. И., Коссович Л. Ю.,
Кувыркин Г. Н., Куропатенко В. Ф., Локощенко А. М., Ломакин Е. В., Маркин А. А.,
Матвеев В. П., Минаева Н. В., Миронов Б. Г., Мулюков Р. Р., Мурашкин Е. В.,
Немировский Ю. В., Ненашев М. В., Псахье С. Г., Радченко В. П., Спорыхин А. Н.,
Старостенков М. Д., Суржиков С. Т., Тарлаковский Д. В., Фомин В. М., Хромов А. И.,
Цатурян А. К., Шифрин Е. И.

Организационный комитет:

Андреева Ю. В., Аристова Е. М., Горностаев К. К., Гоцев Д. В.,
Каплиева Н. А., Ковалев А. В., Яковлев А. Ю.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 16-31-10339 мол-г

Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов IX Всероссийской конференции, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2016. – 226 с.

ISBN 978-5-9907623-0-5

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на IX Всероссийской конференции «Механика деформируемого твердого тела», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531.36
ББК 22.251

ISBN 978-5-9907623-0-5

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2016
© ИПМех РАН, 2016
© ООО «Вэлборн», 2016

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
И ДРУГИХ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

О КОЛЕБАНИЯХ ДВУХ СМЕЖНЫХ ОТРЕЗКОВ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФЕКТОВ В СПЛОШНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В. В. Дежин

Воронежский государственный технический университет

Задача, рассмотренная в настоящей статье, возникает при исследовании колебаний отрезков дислокации (линейного дефекта) в кристалле. Ранее в работе [1] с использованием лагранжевого формализма получено уравнение движения бесконечной дислокации, а в работах [2, 3] исследованы колебания одиночного дислокационного сегмента. В данной статье с использованием результатов работ [1–3] рассмотрены два смежных отрезка бесконечной прямолинейной дислокации в кристалле, совершающие малые колебания под действием внешней силы. Кристалл при этом моделировался сплошной изотропной средой. Линия дислокации располагалась вдоль оси Oz , смещение точек дислокационной линии $\xi(z, t) = 0$ при $z \in (\infty, -L_1) \cup \{0\} \cup [L_2, \infty)$, где t – время, L_1 и L_2 – длины смежных отрезков линейных дефектов. Уравнение колебаний дислокации [1] после преобразований, устраняющих расходимость функции $G(z, \omega)$, для двух смежных отрезков линейных дефектов примет вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_{-L_1}^{L_2} dz' G_0(z - z', \omega) \xi(z', \omega) = f(z, \omega), \quad (1)$$

где ω – частота, $f(z, \omega)$ – величина внешней силы на единицу длины линейного дефекта, произвольная в общем случае. Функции $\xi(z, \omega)$ и $f(z, \omega)$ из физических соображений предполагались непрерывными, ядро $G_0(z - z', \omega)$ – несимметричное по переменным z и z' , в общем случае принимает комплексные значения. Для решения задачи неизвестная функция $\xi(z, \omega)$, согласно методу неопределенных коэффициентов [4], представлялась в виде ряда по полной системе линейно независимых функций $\varphi_n(z)$ с учетом условий закрепления линейных дефектов. Из физических соображений в качестве функций $\varphi_n^{(1)}$ и $\varphi_n^{(2)}$ (z) возьмем соответственно $\sin(\pi n z / L_1)$ и $\sin(\pi n z / L_2)$. Внешнюю силу также разложим в ряд по этой системе функций:

$$\xi(z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(1)}(\omega) \sin \frac{\pi n z}{L_1} \theta(L_1/2 - |z + L_1/2|) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(2)}(\omega) \sin \frac{\pi n z}{L_2} \theta(L_2/2 - |z - L_2/2|), \quad (2)$$

$$f(z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)}(\omega) \sin \frac{\pi n z}{L_1} \theta(L_1/2 - |z + L_1/2|) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(\omega) \sin \frac{\pi n z}{L_2} \theta(L_2/2 - |z - L_2/2|). \quad (3)$$

Здесь $\theta(x)$ – функция Хевисайда, обозначение ⁽¹⁾ относится к сегменту $[-L_1, 0]$, а обозначение ⁽²⁾ – к сегменту $[0, L_2]$. При таком разложении получается $f(0, \omega) = 0$, но это допустимо, потому что $z = 0$ – точка закрепления линейных дефектов. Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим уравнение колебаний двух смежных отрезков линейных дефектов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_n^{(1)}(\omega) \int_{-L_1}^0 dz' G_0(z - z', \omega) \sin \frac{\pi n z'}{L_1} + Q_n^{(2)}(\omega) \int_0^{L_2} dz' G_0(z - z', \omega) \sin \frac{\pi n z'}{L_2} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^{(1)}(\omega) \sin(\pi n z / L_1) \theta(L_1/2 - |z + L_1/2|) + F_n^{(2)}(\omega) \sin(\pi n z / L_2) \theta(L_2/2 - |z + L_2/2|)]. \quad (4)$$

Умножим уравнение (4) на $\sin(\pi m z / L_1)$ и проинтегрируем по z на отрезке $[-L_1, 0]$ с учетом формулы

$$G_0(z - z', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) e^{iq(z-z')}.$$

Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}^{(1,1)}(\omega) Q_n^{(1)}(\omega) + B_{mn}^{(1,2)}(\omega) Q_n^{(2)}(\omega)) = F_m^{(1)}(\omega). \quad (5)$$

Аналогично, умножая уравнение (4) на $\sin(\pi m z / L_2)$ и интегрируя по z на отрезке $[0, L_2]$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}^{(2,1)}(\omega) Q_n^{(1)}(\omega) + B_{mn}^{(2,2)}(\omega) Q_n^{(2)}(\omega)) = F_m^{(2)}(\omega). \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) $B_{mn}^{(s,t)}$ – матричные элементы, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(1,1)}(\omega) &= \frac{2}{L_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \int_{-L_1}^0 dz \sin \frac{\pi m z}{L_1} e^{iqz} \int_{-L_1}^0 dz' \sin \frac{\pi n z'}{L_1} e^{-iqz'} = \\ &= \frac{4\pi^2 mn}{L_1^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \frac{1 - (-1)^n \cos qL_1}{[(\pi m/L_1)^2 - q^2][(\pi n/L_1)^2 - q^2]}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(2,2)}(\omega) &= \frac{2}{L_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \int_0^{L_2} dz \sin \frac{\pi m z}{L_2} e^{iqz} \int_0^{L_2} dz' \sin \frac{\pi n z'}{L_2} e^{-iqz'} = \\ &= \frac{4\pi^2 mn}{L_2^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \frac{1 - (-1)^n \cos qL_2}{[(\pi m/L_2)^2 - q^2][(\pi n/L_2)^2 - q^2]}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(1,2)}(\omega) &= \frac{2}{L_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \int_{-L_1}^0 dz \sin \frac{\pi m z}{L_1} e^{iqz} \int_0^{L_2} dz' \sin \frac{\pi n z'}{L_2} e^{-iqz'} = \\ &= -\frac{2\pi^2 mn}{L_1^2 L_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \frac{1 - (-1)^m \cos qL_1 - (-1)^n \cos qL_2 + (-1)^{m+n} \cos q(L_1 + L_2)}{[(\pi m/L_1)^2 - q^2][(\pi n/L_2)^2 - q^2]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(2,1)}(\omega) &= \frac{2}{L_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \int_0^{L_2} dz \sin \frac{\pi m z}{L_2} e^{iqz} \int_{-L_1}^0 dz' \sin \frac{\pi n z'}{L_1} e^{-iqz'} = \\ &= -\frac{2\pi^2 mn}{L_1 L_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} G_0(q, \omega) \frac{1 - (-1)^n \cos qL_1 - (-1)^m \cos qL_2 + (-1)^{m+n} \cos q(L_1 + L_2)}{[(\pi m/L_2)^2 - q^2][(\pi n/L_1)^2 - q^2]}. \end{aligned}$$

В выражениях (7), (8) числа m и n – одновременно четные или нечетные, также заметим, что эти выражения совпадают с выражением для матричных элементов в случае одиночного дислокационного сегмента [2].

Уравнения (5) и (6) запишем в виде произведения блочных матриц [5]:

$$\begin{pmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ Q^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим для амплитудного спектра смещений двух смежных отрезков линейных дефектов

$$\begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ Q^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, блочная матрица $\begin{pmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{pmatrix}^{-1}$ является функцией линейного отклика (обобщенной восприимчивостью) двух смежных отрезков линейных дефектов. Уравнение, определяющее собственные частоты колебаний этих отрезков, имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} B^{(1,1)}(\omega) & B^{(1,2)}(\omega) \\ B^{(2,1)}(\omega) & B^{(2,2)}(\omega) \end{pmatrix} = 0.$$

Согласно известной формуле [5] запишем это равенство в виде произведения определителей обычных матриц $|B^{(1,1)}| |B^{(2,2)} - B^{(2,1)}(B^{(1,1)})^{-1}B^{(1,2)}| = 0$, где $|B^{(1,1)}| \neq 0$. Таким образом, получим уравнение на собственные колебания двух смежных отрезков линейных дефектов

$$|B^{(2,2)} - B^{(2,1)}(B^{(1,1)})^{-1}B^{(1,2)}| = 0.$$

Литература

1. Батаронов И. Л. Влияние центров пиннинга и рельефа Пайерлса на обобщенную восприимчивость дислокаций в реальных кристаллах / И. Л. Батаронов, В. В. Дежин, А. М. Рощупкин // Изв. РАН. Сер. Физическая. – 1993. – Т. 57, № 11. – С. 97–105.
2. Батаронов И. Л. Обобщенная восприимчивость дислокационных осцилляторов / И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Физико-математическое моделирование систем: Материалы II Международного семинара. Ч. 1. – Воронеж : ВГТУ, 2005. – С. 105–114.
3. Батаронов И. Л. О колебаниях дислокационного сегмента / И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Вестник Тамбовского университета. – 2013. – Т. 18, в. 4, ч. 2. – С. 1566–1567.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 304 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

УДК 531, 538.9.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТЫХ И НАНОСТРУКТУРНЫХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Р. Р. Мулюков

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН

Объемные ультрамелкозернистые и наноструктурные металлы и сплавы со средним размером зерен в них от 100 нм до 1 мкм получены различными деформационными методами. Исследованы изменения их многоуровневой структуры в результате измельчения среднего размера зерен. Обнаружены изменения свойств границ зерен, заключающиеся в их избыточной энтальпии, фиксированном изменении параметров сверхтонкой магнитной структуры, в появлении дополнительного пика на распределении автоэлектронов по полным энергиям.

Установлено влияние изменений структуры на упругость, прочностные свойства, демпфирование, электрические и магнитные свойства металлов и сплавов.

Представлены перспективы практического применения объемных наноструктурных сплавов и примеры их реализации.

МЕХАНИКА И СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФОРМЫ ОСНАСТКИ РЕКОНФИГУРИРУЕМОГО УСТРОЙСТВА ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ПАНЕЛИ

К. С. Бормотин, Вин Аунг

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

В последнее время конструкции современных изделий все больше состоят из крупногабаритных монолитных панелей из алюминиевых сплавов. Данные панели имеют двойную кривизну, разнотолщинность, вырезы и т. д. Изготовление их требует разработки процессов формообразования, позволяющих обеспечить требуемые физико-механические свойства, а также необходимые геометрические параметры формы детали. На сегодняшний день существуют различные технические решения по многопуансонному оборудованию, используемому в промышленности для формообразования крупногабаритных заготовок в режиме ползучести [1–3]. Имеются разработки, когда используются не жесткие, а предварительно настраиваемые на произвольные формы поверхности матрицы и пуансоны [4–7]. Данные устройства формования включает штыревую оснастку, которая состоит из рабочих органов и их приводов, расположенных снаружи камеры формования. Штыревая оснастка задает формующую поверхность верхней и нижней матрицей. Матрицы образованы двумя системами соосно расположенных стержней, каждый из которых выставляется в индивидуальную позицию по высоте $z = z(x, y)$ и таким образом образуют перенастраиваемую матрицу.

Для формовки данной технологией с помощью штыревой оснастки необходимо знать закон перемещения каждого стержня, задающий упреждающую форму панели. Упреждающая форма панели должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после освобождения ее. Величина отклонения панели при разгрузке зависит от температурного режима формовки, свойства материала и способа деформирования. Таким образом, можно поставить обратную задачу, в частности относительно упреждающего контура: определить перемещения стержней, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки. Ранее в работах [8–10] была сформулирована обратная задача формообразования и построен итерационный метод решения относительно неизвестных перемещений точек поверхности панели задающей упреждающую кривизну. Но в сравнении с заданием формы панели контактными жесткими штампами остаточные отклонения будут различными [11]. Таким образом, в модели обратной задачи формообразования необходимо учитывать контактные условия. Наиболее часто для учета контактных ограничений используются метод множителей Лагранжа или метод штрафа [12, 13].

Применяя основные процедуры МКЭ [13] к вариационным принципам задач деформирования с контактными ограничениями и разгрузкой, строится система линейных алгебраических уравнений двух задач

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}}(\dot{\mathbf{U}}),$$

где \mathbf{K} , $\tilde{\mathbf{K}}$ – симметричные матрицы касательной жесткости, $\dot{\mathbf{R}}$ – вектор скоростей внутренних и внешних сил, $\hat{\mathbf{R}}$ – вектор скорости сил, обусловленных начальными деформациями

и начальными напряжениями. Данные уравнения, выраженные через скорости, можно использовать только при решении квазистатических задач в приращениях. В результате решения первой задачи по заданным перемещениям получаем деформированную модель с распределением напряжений и деформаций. Вторая задача на основе данных о начальных напряжениях и деформациях определяет перемещения разгрузки. После этого можно найти остаточные узловые перемещения $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{U}}$.

Итерационный метод решения обратной задачи формообразования с учетом контактных условий имеет вид:

$$\bar{u}_i^{k+1} = \bar{u}_i^k + \alpha^k (\tilde{u}_i^* - \tilde{u}_i^k),$$

где компоненты перемещений с чертой сверху представляют собой компоненты текущих перемещений на контактной поверхности, а компоненты перемещений с волной – остаточные перемещения, вычисленные на контактной поверхности. Заданные остаточные перемещения обозначены звездочкой.

Рассматривается задача определения перемещений стержней реконфигурируемой установки, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки. В качестве заданной формы панели взята панель двойной кривизны центроплановой части самолета. Заготовка имеет свойства материала АК4-1Т (алюминиевого сплава).

Итерационный метод реализован в системе MSC.Marc с помощью ряда пользовательских процедур. Для подготовки расчетной модели с заданными граничными условиями и определения проекций контактных тел применялись пользовательские программы, разработанные в MSC.Patran.

По расчетам задачи определения упреждающей формы пластинки для обеспечения заданной кривизны после разгрузки с помощью итерационного метода с разными постоянными коэффициентами обнаруживается сходимость к решению при $0 < \alpha^k < 2$.

Таким образом, учет контактов в задачах формообразования панелей штампами повышает точность в определении технологических параметров при изготовлении деталей. Построенный итерационный алгоритм дает возможность рассчитать закон движения стержней в реконфигурируемом устройстве при многоточечном формообразовании панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента (МК-6127.2015.1), РФФИ (16-31-60038 мол_а_дж), Минобрнауки РФ по государственному заданию (№ 909).

Литература

1. Банщикова И. А. О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе / И. А. Банщикова, Б. В. Горев, И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – № 5(285). – С. 156–159.
2. Горев Б. В. Технология формообразования крупногабаритных деталей из листа и плит в режиме ползучести / Б. В. Горев // Технология машиностроения. – 2008. – № 2. – С. 11–17.
3. Аннин Б. Д. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 / Б. Д. Аннин, А. И. Олейников, К. С. Бормотин // ПМТФ. – 2010. – Т. 51. – № 4. – С. 155–165.
4. Патент РФ №2076010, В 21 D 11/20. Устройство для формообразования / Л. Л. Рублевский, О. В. Соснин, Б. В. Горев, М. И. Бондаренко – Бюл. Изобр. – 1997. – № 9. – С. 136.

5. Патент РФ 2251464, В 21 D 11/20. Устройство формования / И. Д. Клопотов, И. В. Любашевская, Г. А. Раевская, Л. Л. Рублевский, О. В. Соснин – Бюл. Изобр. – 2005. – № 13.
6. *Wang W. W.* A new flexible sheet metal forming method and its stamping process / W. W. Wang, B. B. Jia, J. B. Yu // The 14th IFToMM World Congress. – 2015. DOI: 10.6567/IFToMM.14TH.WC.PS20.006
7. *Simon D.* A reconfigurable tooling system for producing plastic shields. Variety Management in Manufacturing / D. Simon, L. Kern, J. Wagner, G. Reinhart // Proceedings of the 47th CIRP Conference on Manufacturing. – 2014. – pp. 853–858.
8. *Цвелодуб И. Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. – Новосибирск : ИГиЛ СО АН СССР, 1991. – 216 с.
9. *Бормотин К. С.* Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести / К. С. Бормотин // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – Раздел 1. – С. 141–148.
10. *Bormotin K. S.* Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping / K. S. Bormotin // Computational mathematics and mathematical physics. – 2013. – Vol. 53. – № 12. – pp. 1908–1915.
11. *Бормотин К. С.* Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести / К. С. Бормотин // Интернет-журнал «Науковедение». – Выпуск 1(20). – 2014.
12. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Second Edition, 2006.
13. *Коробейников С. Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000.

ОСНОВАТЕЛЯМ ФАКУЛЬТЕТА ПММ ВГУ ПОСВЯЩАЕТСЯ ...

А. И. Шашкин, О. Ф. Ускова, Е. Н. Коржов, О. Д. Горбенко, А. Ю. Яковлев

Воронежский государственный университет

Факультет прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета образован в нашей стране в 1969 году одним из первых факультетов подобного профиля. В настоящее время ПММ – это

- динамично развивающийся факультет – лидер;
- высококвалифицированный профессорско-преподавательский коллектив;
- богатейший парк самых современных компьютеров;
- лаборатории с уникальным оборудованием;
- функционирующая система непрерывного ИТ-образования;
- международная система управления качеством;
- признание образования в России и за её рубежом.

Воронежский госуниверситет в течение пят последних лет выигрывал гранты Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции науки и высшего образования» на проведение Открытых региональных студенческих школ-олимпиад по программированию и компьютерному моделированию и в течение 9 лет был базовым вузом проведения третьего (основного) этапа Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» [1]. Организатором всех этих студенческих мероприятий был факультет ПММ, становление которого связано с именами двух выдающихся ученых: заслуженного деятеля науки РФ, доктора физико-математических наук, профессора, члена национального комитета РАН по теоретической и прикладной механики Ивлева Дюиса Даниловича и первого декана факультета ПММ, доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева.

Олимпиада по информатике первокурсников факультета ПММ, посвященная 70-летию со дня рождения Ивлева Д. Д., была проведена 20–26 июля 2000 года. В её организации принимали участие старшекурсники ПММ Селезнев К., Поляков А., Мхитарян Л., Гладышев О. Победителями олимпиады стали Андреев Д., Радионов С (1 место); Мухоедов Д., Громов С. (2 место); Некрасов С. (3 место). Первое место среди первокурсниц заняла Бондаренко Е.

Памяти первого декана факультета ПММ Быковцева Г. И. была посвящена VII региональная открытая школа-олимпиада по программированию и компьютерному моделированию (приказ министерства образования и науки РФ № 285 от 1.11.06 «О награждении победителей олимпиад»). Она проходила 16–17 сентября 2006 года при активном участии членов студенческого директората, в состав которого входили Гайдай Виктор (аспирант), Мамонов Дмитрий (5 курс), Мамедов Эмин (5 курс), Пунов Алексей (3 курс), Стукалин Андрей. В олимпиаде участвовало свыше 200 студентов различных вузов. Победителями стали:

- 1 место Селюной Андрей (Белгород)
Гладков Дмитрий (ПММ)
Кириченко Денис (ПММ)

2 место Алимов Александр (Волгоград)
Чельшев Владимир (Волгоград)

3 место Лазаренко Алексей (ПММ)
Мишина Любовь (Тамбов)
Теряев Никита (Тамбов)
Ушаков Сергей (ВГТУ)

Олимпиада по механике для студентов 2 и 3 курсов факультета ПММ ВГУ, которая состоялась 6 сентября 2010 года, была посвящена 80-летию со дня рождения Ивлева Д. Д. Он создал в Воронеже научную школу по механике деформируемого твердого тела, воспитал целую плеяду ученых, успешно работающих в вузах, научных и конструкторских организациях Воронежа и других городов России.

Студентам были предложены нестандартные задачи трёх типов. Требовалось, используя универсальные подходы к решению задач механики, добавить сообразительность и смекалку, чтобы получить короткое и изящное решение. Наиболее успешно справились с заданием студенты Сметанин Е., Щербаков В., Новиков С., Тюхов А., Новиков М., Логунова М., Москвин А. (3 курс) и Свиридов И., Володин А., Кузьмин А., Годелюк Э., Сумин В., Скоблов С. (2 курс).

Студенческие олимпиады способствуют развитию важнейших качеств личности: инициативности, способности творчески мыслить и находить нестандартные решения.

Литература

1. Ускова О. Ф. Воронежский государственный университет – головной вуз проведения Всероссийской олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко, А. И. Шашкин // Педагогическая секция V Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования», Воронеж, 11–16 сентября 2016 г. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. – 177 с. С. 154–156.

**МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ, МЕХАНИКА
КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ТРИБОЛОГИЯ**

КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПРОСЛОЙКАМИ ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Н. Г. Бурого¹, И. С. Никитин²

¹Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

²Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва

1. Уточненная модель с линейной вязкостью на контактных границах

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon \ll 1$ является малым параметром.

На границах слоев выполняются следующие условия скольжения в предположении, что межслойная граница всегда поджата и выполнено линейное условие вязкого трения:

$$\sigma_{33} < 0 \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0, \quad \sigma_{\gamma 3} = \eta[v_\gamma]/\varepsilon.$$

Здесь u_k – компоненты вектора смещений, v_k – компоненты вектора скорости, $v_k = u_{k,t}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, η – коэффициент эффективной вязкости на границе слоев. Квадратные скобки $[f] = f|_{x^{(s)+0}} - f|_{x^{(s)-0}}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе. Далее для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом: $\partial(\dots)/\partial x_j = (\dots)_{,j}$, $\partial(\dots)/\partial t = (\dots)_{,t}$, $\partial(\dots)/\partial \xi = (\dots)_{,\xi}$.

Сами слои являются изотропными упругими и подчиняются закону Гука (при $x_3 \neq x^{(s)}$)

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l},$$

где тензор модулей упругости имеет вид: $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$. Примем нулевые начальные условия для смещений и скоростей среды: $u_k|_{t=0} = v_k|_{t=0} = 0$.

Введем в соответствии с методом асимптотического осреднения [1] «быструю» переменную $\xi = x_3/\varepsilon$. Будем считать, что функция $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ является гладкой по «медленным» переменным x_l и гладкой по «быстрой» переменной ξ , за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где она может терпеть разрывы первого рода. Кроме того, по ξ эта функция является 1-периодической: $[[u_i]] = u_i|_{\xi^{(s)+1/2}} - u_i|_{\xi^{(s)-1/2}} = 0$. С учетом такого выбора аргументов и правила дифференцирования сложной функции, перепишем систему на ячейке периодичности $x^{(s)} - 1/2 \leq x_3 \leq x^{(s)} + 1/2$, $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$. При $x_3 \neq x^{(s)}$, $\xi \neq 0$ уравнения имеют вид

$$\varepsilon^{-2} C_{i3k3} u_{k,\xi\xi} + \varepsilon^{-1} (C_{ijk3} u_{k,j\xi} + C_{i3kl} u_{k,l\xi}) + C_{ijkl} u_{k,lj} - \rho u_{i,tt} = 0.$$

Имеем также контактные условия при $x_3 = x^{(s)}$, $\xi = 0$

$$\varepsilon^{-1} C_{33k3} u_{k,\xi} + C_{33kl} u_{k,l} < 0, \quad [u_3] = 0, \quad [\varepsilon^{-1} C_{i3k3} u_{k,\xi} + C_{i3kl} u_{k,l}] = 0,$$

$$\varepsilon^{-1} C_{\gamma 3k3} u_{k,\xi} + C_{\gamma 3kl} u_{k,l} = \varepsilon^{-1} \eta [u_{\gamma,t}]$$

и условия 1-периодичности: $[[u_i]] = u_i|_{\xi+1/2} - u_i|_{\xi-1/2} = 0$.

Здесь и далее греческие индексы (β, γ) принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1, 2, 3. Представим смещения среды в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε : $u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + \dots$

Введем операцию «осреднения» $\langle f \rangle$ для функции «быстрой» переменной ξ , которая будет часто использоваться в дальнейшем: $\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f d\xi$. Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию $\langle u_k^{(n)} \rangle = 0$ [1].

Подставим это представление в систему уравнений теории упругости. Приравнявая к нулю член при отрицательной степени ε^{-1} , получим, что первое приближение $u_i^{(1)}$ удовлетворяет уравнению: $C_{i3k3} u_{k,\xi\xi}^{(1)} = 0$. Система уравнений после этого примет вид:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} + \varepsilon [C_{ijkl} u_{k,jl}^{(1)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(2)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(2)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(3)})_{,\xi}] + \\ + \varepsilon^2 [C_{ijkl} u_{k,jl}^{(2)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(3)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(3)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(4)})_{,\xi}] + \dots = \rho w_{i,tt} + \varepsilon \rho u_{i,tt}^{(1)} + \varepsilon^2 \rho u_{i,tt}^{(2)} + \dots$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \quad \sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3} u_{k,\xi}^{(n+1)}.$$

Все приближения напряжений являются 1-периодическими функциями ξ . В частности, выполняются условия $[\sigma_{i3}^{(n)}] = 0$, $[[\sigma_{i3}^{(n)}]] = 0$. Легко видеть, что $\langle \sigma_{i3,\xi}^{(n)} \rangle = 0$.

Выведем уточненную теорию второго порядка, для этого в системе уравнений удержим члены порядка ε^2 . Применяя операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle \rangle$ к системе уравнений, получим искомый результат:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} \langle u_{k,\xi}^{(1)} \rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3} \langle u_{k,\xi}^{(2)} \rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3} \langle u_{k,\xi}^{(3)} \rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}.$$

Каждая из функций $u_i^{(n)}(x_k, \xi, t)$ ($n = 1, 2, 3$), находится из соответствующей «задачи на ячейке периодичности» при $-1/2 \leq \xi \leq 1/2$ [1, 2]. Эти задачи в общем виде решены в [2] с точностью до некоторых функций, которые определяются из условий проскальзывания.

Для заданных условий решение для первого приближения касательных смещений имеет вид $u_\gamma^{(1)} = \varphi_\gamma(\xi - \text{sign}\xi/2)$. Функции φ_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей $\eta[u_{\gamma,t}^{(1)}] = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu u_{\gamma,\xi}^{(1)}$. Отсюда следует уравнение для φ_γ :

$$\eta \varphi_{\gamma,t} + \mu \varphi_\gamma = -\tau_\gamma, \quad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}).$$

Решение для второго приближения касательных смещений будет выглядеть так [2]:

$$u_\gamma^{(2)} = -\psi_\gamma(\xi^2 - \xi \text{sign}\xi + 1/6)/2, \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}.$$

Решение для третьего приближения касательных смещений имеет вид [2]:

$$u_\gamma^{(3)} = \chi_\gamma(\xi^3/6 - \xi^2 \text{sign}/4 + b_\gamma \xi + c_\gamma^\pm), \quad [u_\gamma^{(3)}] = \chi_\gamma(1/12 - b_\gamma), \quad c_\gamma^+ - c_\gamma^- = 1/12 - b_\gamma,$$

$$\chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,tt} - (\lambda + \mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda + \mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu.$$

Функции b_γ определяются из условия на скачок касательных скоростей

$$\eta[u_{\gamma,t}^{(3)}] = \eta\Omega_{\gamma,t} = \mu(\chi_\gamma b_\gamma - \psi_{\gamma,3}/12 - \psi_{3,\gamma}/12), \quad \text{где } \Omega_\gamma = \chi_\gamma(1/12 - b_\gamma).$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для Ω_γ :

$$\eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma = \mu g_\gamma, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12.$$

С использованием полученных результатов, а также с учетом выражения для тензора модулей упругости уточненная система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3} &= \rho w_{\gamma,tt} \\ (\lambda + \mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta} &= \rho w_{3,tt} \\ \varphi_\gamma &= -\int_0^t \tau_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1/\eta, \quad \tau_\gamma = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}), \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}, \\ \chi_\gamma &= -\varphi_{\gamma,tt} - (\lambda + \mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda + \mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu, \\ \Omega_\gamma &= \int_0^t \mu g_\gamma e^{-\mu(t-t_1)/\eta} dt_1/\eta, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12 \end{aligned}$$

2. Уточненная модель с нелинейной вязкостью на контактных границах

Рассмотрим случай проскальзывания между слоями с условиями нелинейной вязкости. Эти условия можно сформулировать различными способами. Выберем условия, моделирующие явление вязкопластичности. При этом предполагается, что до какого-то предельного уровня касательных напряжений σ_s на межслойных границах проскальзывания не происходит, а при превышении этого уровня появляется возможность вязкого проскальзывания. Чтобы избежать громоздких выкладок выберем относительно простую форму такого условия проскальзывания:

$$\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H(\sigma_{\beta 3} \sigma_{\beta 3} / \sigma_s^2 - 1).$$

Здесь $H(y)$ – функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$, $H(y) = 1$ при $y \geq 0$. Однако процедура подстановки асимптотических разложений скоростей и напряжений в сильно нелинейное (разрывное) условие проскальзывания не является корректной. Поэтому видоизменим это условие, «размазав» функцию Хэвисайда на некоторую «эффективную» ширину d :

$$\eta[v_\gamma]/\varepsilon = \sigma_{\gamma 3} H_d(\sigma_{\beta 3} \sigma_{\beta 3} / \sigma_s^2 - 1).$$

Здесь $H_d(y)$ – гладкая функция, $H_d(y) \rightarrow H(y)$ при $d \rightarrow 0$. Для определенности примем конкретное (одно из возможных) выражение для этой функции:

$$H_d(y) = 1/2 + \arctg(y/d)\pi, \quad H'_d(y) = d/(\pi(d^2 + y^2)), \quad H''_d(y) = -2dy/(\pi(d^2 + y^2)^2).$$

Подставим разложения скоростей и касательных напряжений в условие проскальзывания:

$$\begin{aligned} \eta([v_\gamma^{(1)}] + \varepsilon[v_\gamma^{(2)}] + \varepsilon^2[v_\gamma^{(3)}] + \dots) &= \\ &= (\sigma_{\gamma 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\gamma 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\gamma 3}^{(2)} + \dots) H_d \left(\left((\sigma_{\beta 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\beta 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\beta 3}^{(2)}) (\sigma_{\beta 3}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\beta 3}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\beta 3}^{(2)}) / \sigma_s^2 - 1 \right) / d \right). \end{aligned}$$

Аргумент функции H_d с точностью до членов порядка ε^2 имеет вид:

$$y = \Delta_0 + \varepsilon(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2) + \varepsilon^2(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(2)} + \sigma_{\beta 3}^{(1)}\sigma_{\beta 3}^{(1)})/\sigma_s^2, \quad \text{где } \Delta_0 = \sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(0)}/\sigma_s^2 - 1.$$

Функцию $H_d(y/d)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности значения Δ_0 , ограничиваясь членами порядка ε^2 :

$$H_d = H_d(\Delta_0/d) + \varepsilon(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) + \\ + \varepsilon^2 \left((2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(2)} + \sigma_{\beta 3}^{(1)}\sigma_{\beta 3}^{(1)})/\sigma_s^2 \cdot d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) - 4(\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2)^2 \cdot d\Delta_0/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)^2) \right).$$

Видно, что для сохранения порядков членов асимптотического разложения в зоне перехода к вязкопластичности $\Delta_0 \sim \varepsilon$, нельзя допускать малых значений параметра d , $d \sim O(1)$.

Условия проскальзывания различного порядка по ε запишутся в виде

$$\eta[u_{\gamma,t}^{(1)}] = \sigma_{\gamma 3}^{(0)} H_d(\Delta_0/d), \quad \eta[u_{\gamma,t}^{(2)}] = \sigma_{\gamma 3}^{(1)} H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(0)}(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)), \\ \eta[u_{\gamma,t}^{(3)}] = \sigma_{\gamma 3}^{(2)} H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(1)}(2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) + \\ + \sigma_{\gamma 3}^{(0)} \left((2\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(2)} + \sigma_{\beta 3}^{(1)}\sigma_{\beta 3}^{(1)})/\sigma_s^2 \cdot d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) - 4(\sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(1)}/\sigma_s^2)^2 \cdot d\Delta_0/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)^2) \right).$$

Дифференциальное уравнение для функции φ_γ , введенной в п. 1, следует из нелинейного условия проскальзывания:

$$\varphi_{\gamma,t} = -\sigma_{\gamma 3}^{(0)} H_d(\Delta_0/d)/\eta, \quad \sigma_{\gamma 3}^{(0)} = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu\varphi_\gamma.$$

Из нелинейного условия проскальзывания также следует система неоднородных дифференциальных уравнений для функции Ω_γ , введенной в п. 1:

$$\eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(0)}(2\mu\sigma_{\beta 3}^{(0)}\Omega_\beta/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) = \\ = \mu g_\gamma H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(0)}(2\mu\sigma_{\beta 3}^{(0)}g_\beta/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)).$$

Окончательно уточненная система уравнений принимает вид:

$$(\lambda + \mu)w_{k,k\gamma} + \mu w_{\gamma,kk} + \mu\varphi_{\gamma,3} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\gamma,3} = \rho w_{\gamma,tt} \\ (\lambda + \mu)w_{k,k3} + \mu w_{3,kk} + \mu\varphi_{\beta,\beta} - \varepsilon^2\mu\Omega_{\beta,\beta} = \rho w_{3,tt} \\ \varphi_{\gamma,t} = -\sigma_{\gamma 3}^{(0)} H_d(\Delta_0/d)/\eta, \quad \sigma_{\gamma 3}^{(0)} = \mu(w_{\gamma,3} + w_{3,\gamma}) + \mu\varphi_\gamma \\ \eta\Omega_{\gamma,t} + \mu\Omega_\gamma H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(0)}(2\mu\sigma_{\beta 3}^{(0)}\Omega_\beta/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) = \\ = \mu g_\gamma H_d(\Delta_0/d) + \sigma_{\gamma 3}^{(0)}(2\mu\sigma_{\beta 3}^{(0)}g_\beta/\sigma_s^2)d/(\pi(d^2 + \Delta_0^2)) \\ \Delta_0 = \sigma_{\beta 3}^{(0)}\sigma_{\beta 3}^{(0)}/\sigma_s^2 - 1, \quad \psi_\gamma = \varphi_{\gamma,3}, \quad g_\gamma = (\chi_\gamma - \psi_{\gamma,3} - \psi_{3,\gamma})/12, \\ \chi_\gamma = -\varphi_{\gamma,tt} - (\lambda + \mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma}/\mu + 2\psi_{\gamma,3} + (\lambda + \mu)\psi_{3,\gamma}/\mu + \rho\varphi_{\gamma,tt}/\mu.$$

Для модели с нелинейной вязкостью в систему уравнений для смещений $w_i(x_k, t)$ вошли дополнительные функции φ_γ и Ω_γ , для которых получены нелинейные дифференциальные уравнения. Вид этих уравнений связан с выбором контактных условий.

Полученные модели могут быть полезны для исследования волновых процессов в геологических массивах с соответствующей структурой и динамических процессов деформирования слоистых композитов.

Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392 и программе РАН ОЭМПУ-12.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
2. Бураго Н. Г., Никитин И. С. Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах // Прикл. математика и механика. – 2016. – Т. 80, № 2. – С. 230–241.

КОНТАКТ ОСНОВАНИЯ С ПОВЕРХНОСТНО НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ И РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

К. Е. Казаков^{1,2}, С. П. Курдина², А. Х. Сабитова²

¹Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

²Московский государственный университет имени Н. Э. Баумана

Исследуется задача взаимодействия вязкоупругого слоя с упругим покрытием, лежащего на недеформируемом жестком основании, и регулярной системы жестких плоских штампов в случае плоской деформации при условии, что жесткость упругого покрытия переменна от точки к точке поверхности (покрытие является поверхностно неоднородным). Штампы начинают вдавливаться в поверхность описанного двухслойного основания в момент времени τ_0 силами $P_i(t)$ с эксцентриситетами приложения $e_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$, n – количество штампов). Область контакта со временем не изменяется, длина линий контакта $b = b_i - a_i$. Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта, т. е. его толщина $h \ll b$. Предполагается, что жесткость покрытия меньше жесткости нижнего слоя, или же они имеют один порядок.

Для построения модели задачи необходимо заменить штампы распределенными нагрузками $p_i(x, t) = -q_i(x, t)$, действующими на тех же участках, где и штампы. Приравнявая вертикальные перемещения [1], вызванные нагрузками $q_i(x, t)$, и перемещения штампов, получим ($i = \overline{1, n}$, $x \in [a_i, b_i]$)

$$\frac{q_i(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \mathbf{F}_j \frac{q_j(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta_i(t) + \alpha_i(t) \left(x - \frac{a_i + b_i}{2} \right), \quad (1)$$

где $R(x)$ – жесткость покрытия, ν_2 , $E_2(t - \tau_2)$ – коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t)$ – осадка i -го штампа, $\alpha_i(t)$ – угол его поворота; \mathbf{I} – тождественный оператор, \mathbf{V} – интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K(t, \tau)$, \mathbf{F}_i – интегральные операторы Фредгольма с ядром плоской контактной задачи $k_{pl}[(x - \xi)/H]$ [2], зависящее от условий соединения нижнего слоя и недеформируемого основания. Условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i} \left(\xi - \frac{a_i + b_i}{2} \right) q_i(\xi, t) d\xi = M_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

где через $M_i(t) = e_i(t)P_i(t)$ обозначены моменты приложения сил.

Сделав в (1) и (2) замену переменных по формулам

$$x^* = \frac{2(x - \eta_i)}{b}, \quad \xi^* = \frac{2(\xi - \eta_j)}{b}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{2H}{b}, \quad \eta_i = \frac{a_i + b_i}{2},$$

$$\delta^{i*}(t^*) = \frac{2\delta_i(t)}{b}, \quad \alpha^{i*}(t^*) = \alpha_i(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_1}, \quad m^*(x^*) \equiv m^i(x^*) = \frac{E_0}{R(x)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{b},$$

$$q^{i*}(x^*, t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)q_i(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P^{i*}(t^*) = \frac{4P_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)b}, \quad M^{i*}(t^*) = \frac{8M_i(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)b^2},$$

$$\mathbf{F}^{ij*} f(x^*) = \int_{-1}^1 k^{ij}(x^*, \xi^*) f(\xi^*) d\xi^*, \quad k^{ij}(x^*, \xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right),$$

$$\mathbf{V}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad K^*(t^*, \tau^*) = K(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений ($x \in [-1, 1]$)

$$c(t)m(x)q^i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij} q^j(x, t) = \delta^i(t) + \alpha^i(t)x, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 q^i(\xi, t) d\xi = P^i(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q^i(\xi, t) d\xi = M^i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

На каждом штампе можно задать один из 4 типов условий: осадку и угол поворота, вдавливающую силу и момент, осадку и момент, силу и угол поворота. Можно показать, что существует 15 возможных вариантов постановки задачи. В данной работе рассмотрим решение для случая, когда на всех штампах заданы сила и момент. Решения для остальных вариантов строятся аналогично.

Приведем систему уравнений (1) с дополнительными условиями (2) к одному операторному уравнению с двумя дополнительными векторными условиями. Примем, что $\mathbf{q}(x, t) = q^i(x, t) \mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\delta}(t) = \delta^i(t) \mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\alpha}(t) = \alpha^i(t) \mathbf{i}^i$, $\mathbf{P}(t) = P^i(t) \mathbf{i}^i$, $\mathbf{M}(t) = M^i(t) \mathbf{i}^i$, $\mathbf{k}(x, \xi) = k^{ij}(x, \xi)$, $\mathbf{Gf}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi$. Здесь и далее по верхним повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n , если левая часть формулы не зависит от этого индекса. Тогда уравнения (3), (4) можно записать в виде

$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{Gq}(x, t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x, \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \xi \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (6)$$

Введя в (5), (6) обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \sqrt{m(x)} \mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, t) = \frac{\mathbf{k}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)m(\xi)}}, \quad \mathbf{Ff}(x) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi,$$

получим ($x \in [-1, 1]$)

$$c(t)\mathbf{Q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{FQ}(x, t) = [\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x] / \sqrt{m(x)} = \boldsymbol{\Delta}(x, t), \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{\xi \mathbf{q}(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (8)$$

Решение разрешающего операторного уравнения (7) с дополнительными условиями (8) будем строить в классе вектор-функций из гильбертова пространства $L_2([-1, 1], V)$. Так как в операторное уравнение и дополнительные условия входит функция $\sqrt{m(x)}$, связанная с поверхностной неоднородностью покрытия, то при построении решения следует учитывать, что эта функция может быть быстроизменяющейся и даже разрывной. Поэтому в структуру функционального базиса должна входить функция $\sqrt{m(x)}$. Система ортонормированных базисных вектор-функций, удовлетворяющая вышеописанным условиям, сможет быть построена по следующему правилу

$$\mathbf{p}_k^i(x) = \frac{\mathbf{p}_k^{i*}(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad \mathbf{p}_k^{i*}(x) = p_k^*(x)\mathbf{i}^i,$$

$$d_{-1} = 1, \quad J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^k d\xi}{m(\xi)},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_k & \cdots & J_{2k} \end{vmatrix}, \quad p_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k-1} & J_k & \cdots & J_{2k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

Следуя обобщенному проекционному методу [3], пространство $L_2([-1, 1], V)$ представим в виде прямой суммы евклидова пространства $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$, базисом которого являются функции $\{\mathbf{p}_0^i(x), \mathbf{p}_1^i(x)\}$, и ортогонального ему гильбертова пространства $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ с базисом $\{\mathbf{p}_k^i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 2, 3, \dots$. Тогда неизвестная вектор-функция $\mathbf{Q}(x, t)$ и правая часть уравнения (7) представимы в виде суммы функций, определенных в пространствах $L_2^{(0)}([-1, 1], V)$ и $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$, $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_0 + \mathbf{\Delta}_1$. Причем из дополнительных условий (8) сразу можно определить $\mathbf{Q}_0(x, t) \in L_2^{(0)}([-1, 1], V)$, а $\mathbf{\Delta}_1(x, t) \equiv 0$. Введя ортопроекторы $\mathbf{P}_0 : L_2 \rightarrow L_2^{(0)}$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0 : L_2 \rightarrow L_2^{(1)}$ и подействовав \mathbf{P}_1 на (7), получим уравнение с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_1(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_1(x, t) = \mathbf{\Delta}_1(x, t) - (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_1\mathbf{F}\mathbf{Q}_0(x, t) = \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x, t),$$

решение которого строится в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_1\mathbf{F}\varphi_k(x) = \gamma_k\varphi_k(x)$, $\varphi_k(x) = \sum_{l=2}^{\infty} \psi_{kl}^i \mathbf{p}_l^i(x)$. Тогда функция $\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x)$, где функции разложения определяются из соотношений $z_k(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_k)\{\Delta_k(t)/[c(t) + \gamma_k]\}$, $\Delta_k(t)$ – функции разложения правой части по $\tilde{\mathbf{\Delta}}_1(x, t)$ по базису $\varphi_k(x)$, \mathbf{W}_k – операторы Вольтерра с ядром, являющиеся резольвентами ядер $\gamma_k K(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$. Отметим, что решение имеет вид $q_i(x, t) = \frac{1}{m(x)}[p_0^{i*}(x)z_0^i(t) + p_1^{i*}(x)z_1^i(t) + \dots]$, то есть в нем отдельным сомножителем выделена функция $m(x)$, что позволяет производить вычисления в случаях, когда поверхностные неоднородности описываются быстроменяющимися функциями.

Определив функцию $\mathbf{Q}_1(x, t)$ можно найти и осадки и углы поворотов штампов, для чего необходимо подействовать оператором \mathbf{P}_0 на уравнение (7).

Авторы благодарны А. В. Манжирову за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научных проектов № 15-31-70002 "мол_а_мос" и № 16-31-00320 "мол_а".

Литература

1. *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести. – Ереван : Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
2. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М. : Наука, 1983. – 488 с.
3. *Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of Integral Equations, 2nd edition. – Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008. – 1144 p.

ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Ле Тхи Тхань, И. М. Лавит

Тульский государственный университет

Задача о краевой трещине в полуплоскости (рис. 1) решалась различными методами, аналитическими и численными ([1–3] и др.). Предлагаемый подход отличается простотой и позволяет не только найти коэффициент интенсивности напряжений (КИН), но и легко вычислить напряжения в любой точке, что важно, например, для решения задач о взаимодействии трещин. Этот подход применим, когда исходную задачу можно представить как объединение более простых задач, решение которых известно [4].

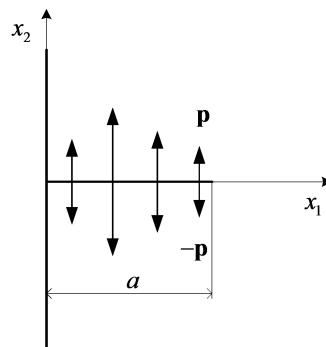


Рис. 1. Полуплоскость с краевой трещиной длиной a . К краевкам трещины приложены равные противоположно направленные нагрузки, причем $p_1 = 0$, $p_2 = q(x_1)$

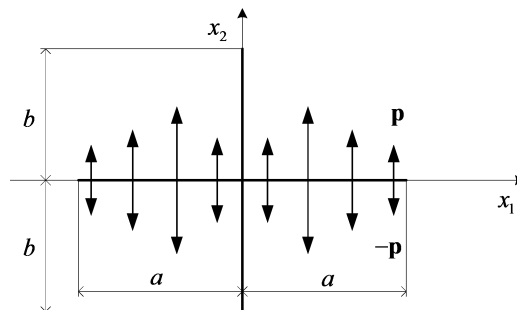


Рис. 2. Плоскость с двумя пересекающимися трещинами.
Интенсивность нагрузки $q(x_1)$ – четная функция

Рассмотрим плоскость с двумя пересекающимися трещинами (рис. 2). При $b \rightarrow \infty$ расчетная схема сводится, в силу симметрии, к расчетной схеме, изображенной на рис. 1. Это позволяет получить решение поставленной задачи как суперпозицию решения задачи о трещине длиной $2a$ в плоскости и задачи о полуплоскости, находящейся под действием распределенной нагрузки. Решения этих двух задач известны [5].

Напряжения в плоской задаче теории упругости определяются формулами Колосова [5]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{cases}, \quad (1)$$

где σ_{km} – напряжения в декартовых координатах x_k ; $z = x_1 + ix_2$ – комплексная переменная (i – мнимая единица); $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ – голоморфные функции, определяемые из граничных

условий задачи; черта над символом обозначает комплексное сопряжение, штрих – производную.

Решение первой задачи (для трещины в плоскости) имеет вид [5]

$$\Phi_{(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi(z^2 - a^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{(q + p_{(1)})\sqrt{a^2 - \xi^2}d\xi}{\xi - z}; \quad \Psi_{(1)}(z) = -z\Phi'_{(1)}(z), \quad (2)$$

где $p_{(1)}(x_1)$ – дополнительная нагрузка, компенсирующая влияние разреза вдоль оси ординат. Функция $p_{(1)}(x_1)$ (очевидно, четная) находится в процессе решения задачи.

По формулам (1) определяется напряжение $\sigma_{(1)11}$ на оси ординат (напряжение $\sigma_{(1)12}$ в силу симметрии равно нулю) и соответствующая ему нагрузка, приложенная к правой полуплоскости в направлении оси абсцисс: $f_{(1)}(x_2) = -\sigma_{(1)11}(x_2)$. Так как граница полуплоскости не нагружена, необходимо эту нагрузку компенсировать, то есть приложить нагрузку $p_{(2)}(x_2) = \sigma_{(1)11}(x_2)$. Приходим к задаче о правой полуплоскости, нагруженной распределенной нагрузкой. Решение легко получить, используя формулы работы [5]:

$$\Phi_{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{(2)}(\eta)d\eta}{i\eta - z}; \quad \Psi_{(2)}(z) = z\Phi'_{(2)}(z). \quad (3)$$

Теперь по формулам (1) находится напряжение на оси абсцисс $\sigma_{(2)22}$ (напряжение $\sigma_{(2)12}$ в силу симметрии равно нулю), обусловленное влиянием полуплоскости. Соответствующая нагрузка, приложенная к верхней кромке трещины в направлении оси ординат, равна $f_{(2)}(x_1) = -\sigma_{(2)22}(x_1)$. Эта нагрузка компенсируется дополнительной нагрузкой $p_{(1)}(x_1)$, которая фигурирует в выражении (2): $p_{(1)}(x_1) = \sigma_{(2)22}(x_1)$.

Условия для нагрузок $p_{(1)}(x_1)$ и $p_{(2)}(x_2)$ приводят к системе двух интегральных уравнений относительно этих функций. Исключая одну из них (в данном случае это $p_{(2)}$), приходим к интегральному уравнению относительно функции $p_{(1)}$:

$$p_{(1)}(x) - \int_0^a K(x, \xi)p_{(1)}(\xi)d\xi = \int_0^a K(x, \xi)q(\xi)d\xi; \quad (4)$$

$$K(x, \xi) = \frac{8x}{\pi^2} \sqrt{a^2 - \xi^2} \int_0^{\infty} \frac{\eta^3}{\sqrt{a^2 + \eta^2}(x^2 + \eta^2)^2(\xi^2 + \eta^2)} \left(\frac{a^2}{a^2 + \eta^2} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right) d\eta,$$

где $x = x_1$. Интеграл в выражении для ядра получается в конечном виде (получающаяся громоздкая формула не приводится). Ядро $K(x, \xi)$ имеет интегрируемую особенность в точке $(0, 0)$.

Для решения уравнения (4) в данной работе использовался метод Галеркина. В качестве координатных функций брались полиномы Лежандра.

После определения функции $p_{(1)}(x)$ можно найти КИН:

$$K_I = \sqrt{\pi a} \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{q(x) + p_{(1)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \quad (5)$$

Рассмотрим результаты его вычисления при $q = \text{const}$. В таблице приведены рассчитанные значения безразмерной величины $K_I^* = K_I / (q\sqrt{\pi a})$ в зависимости от числа координатных функций N .

N	10	20	30	40	50	60
K_I^*	1.1197	1.1211	1.1214	1.1215	1.1215	1.1215

В работах [1, 3] для K_I^* получено значение 1.1215, что позволяет сделать вывод о приемлемой точности и быстрой сходимости приведенного выше решения.

Литература

1. *Koiter W. T.* On the flexural rigidity of a beam weakened by transverse saw cuts // Proc. Royal Neth. Acad. of Sci. – 1956. – В59. – P. 354–374.
2. *Khrapkov A. A.* The first basic problem for a notch at the apex of an infinite wedge // Int. J. of Fract. Mechanics. – 1971. – V. 7. – P. 373–382.
3. *Hasebe N., Inohara S.* Stress analysis of a semi-infinite plate with oblique edge crack // Ingenieur-Archiv (Archive of Appl. Mechanics). – 1980. – V. 49. – P. 51–62.
4. *Зайцева Е. В., Лавит И. М.* Метод решения задачи о взаимодействии трещин // Изв. ТулГУ. Математика, механика, информатика. – 2004. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 70–76.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПОЛОСЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

А. В. Малик, И. М. Лавит

Тулльский государственный университет

Рассматривается упругая полоса, находящаяся в состоянии плоской деформации (рис. 1). В начальный момент к полосе мгновенно прикладывается равномерно распределенная нагрузка величиной q , далее остающаяся неизменной. Ставится задача определить функцию $K_I(t)$ – зависимость коэффициента интенсивности напряжений (КИН) от времени.

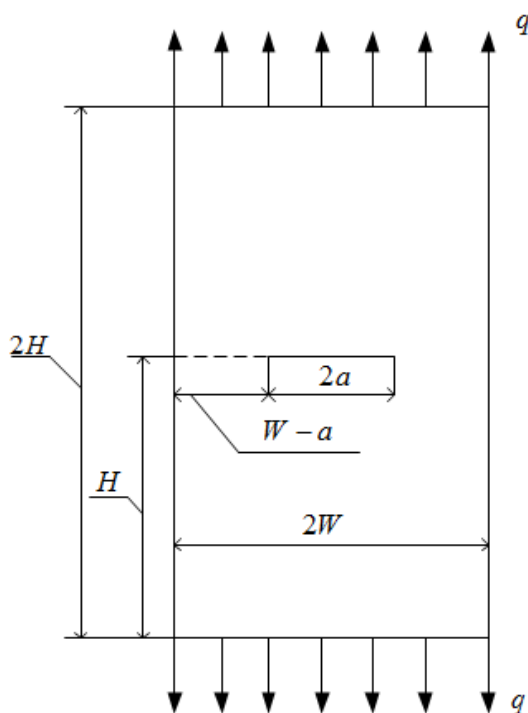


Рис. 1. Поперечное сечение полосы – прямоугольник с симметрично расположенной прямолинейной центральной трещиной длиной $2a$

Эта задача, называемая задачей Чена [1], была предметом ряда исследований ([1–3] и др.). Ее можно считать тестовой, потому что авторы упомянутых работ получили близкие результаты, причем они применяли различные методы. Ниже представлено решение, полученное новым методом [4].

Задача имеет две оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника. Поэтому расчетная схема – это четверть сечения, вырезанная осями симметрии.

Решение задачи получается на основе принципа возможных перемещений

$$\int_S (\rho \partial_t \partial_t u_k \delta u_k + \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km}) dS = \int_l p_k \delta u_k dl, \quad (1)$$

где S – площадь области (рис. 2); l – ее граничный контур; ρ – плотность материала; t – время; $k, m = 1, 2$; u_k – вектор перемещений; δ – символ вариации; σ_{km} – тензор напряжений; ε_{km} – тензор деформаций; p_k – распределенная нагрузка, приложенная к контуру; $\partial_t = \partial/\partial t$ – оператор дифференцирования по времени.

Уравнение (1) преобразуется в конечноразностное уравнение по времени по неявной схеме Кранка-Николсон. Граничные задачи, возникающие на каждом шаге по времени, решаются методом конечных элементов.

При численном решении задач механики разрушения возникает проблема моделирования напряженно-деформированного состояния окрестности кончика трещины. В настоящей работе она решается с помощью включения в конечноэлементную сетку специальных когезионных элементов [5].

Таким образом, используются элементы двух типов. Геометрически они одинаковы и отличаются лишь числом узловых неизвестных и функциями формы. Элементы первого типа – это обычные конечные элементы, элементы второго типа – когезионные элементы, которые обеспечивают плавное смыкание сторон трещины в ее кончике и тем самым –

отсутствие сингулярности полей напряжений и деформаций [6]. Когезионные элементы составляют горизонтальный ряд, прилегающий к кромке трещины (рис. 2).

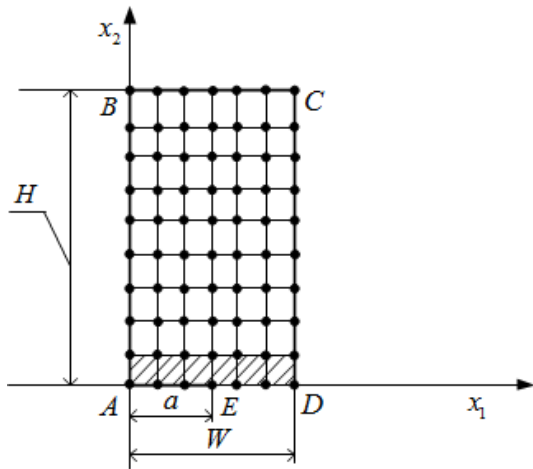


Рис. 2. Конечноэлементная сетка (принципиальная схема). Когезионные элементы заштрихованы

Граничные условия записываются следующим образом. На участке контура AB : $u_1 = 0$, $p_2 = 0$ – условия симметрии; на участке BC : $p_1 = 0$, $p_2 = q$; на участке CD : $p_1 = 0$, $p_2 = 0$; на участке DE : $u_2 = 0$, $p_1 = 0$ – условия симметрии; на участке EA (кромка трещины): $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Расчеты проводились при следующих исходных данных [1–3]: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 5000$ кг/м³, нагрузка $q = 400$ МПа, размеры полосы: $W = 10$ мм, $H = 20$ мм, половина длины трещины $a = 2,4$ мм. Рассматриваемый интервал времени равен $t_{\max} = 14$ мкс. Сходимость численного решения исследовалась на различных конечноэлементных сетках при различном количестве шагов по времени N . На рис. 3 представлены результаты расчета при $N = 900$, числе конечных элементов по оси абсцисс $n_1 = 100$ и числе конечных элементов по оси ординат $n_2 = 200$. При этом относительная погрешность расчета не превышает 1 %. На рис. 3 по оси абсцисс отложено безразмерное время $\tau = c_1 t / (2W)$, где c_1 – скорость волны расширения [3], а по оси ординат отложена величина безразмерного КИН $K_I^* = K_I / (q\sqrt{\pi a})$.

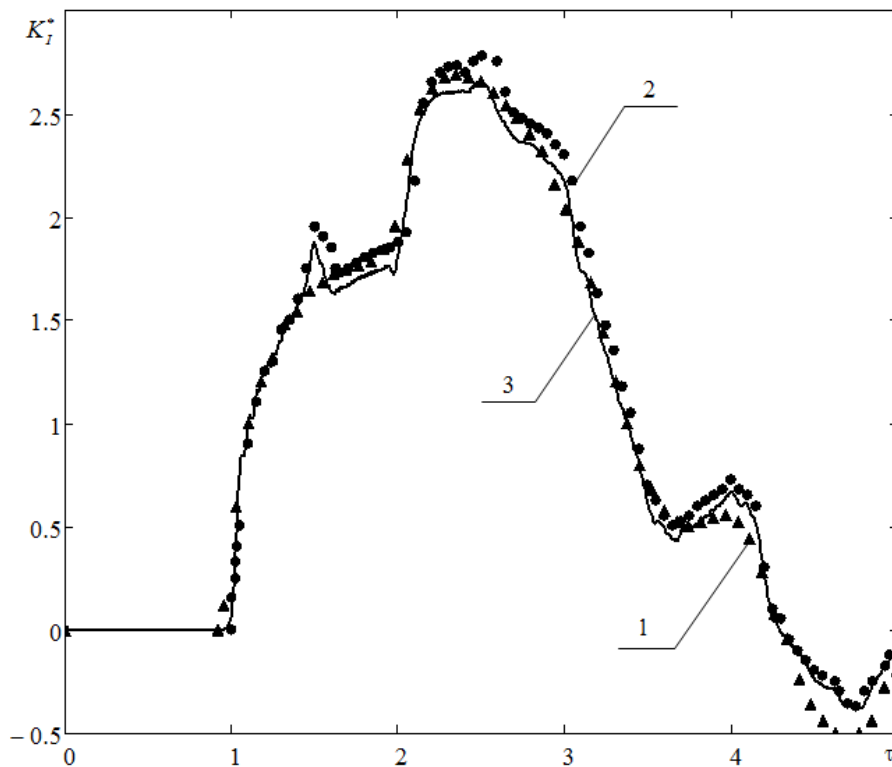


Рис. 3. Зависимость КИН от времени: 1 – решение Чена [2]; 2 – результаты работы [1]; 3 – результаты расчета разработанным методом

Как следует из рис. 3, результаты выполненных расчетов практически совпадают с результатами работ [1, 2], что свидетельствует о приемлемой точности использованного метода. Другие его достоинства: простота и возможность применения к более сложным задачам, в частности, задачам о распространении трещин, в том числе и с учетом пластического деформирования. Примеры решения таких задач в квазистатической постановке даны в работе [5].

Литература

1. *Lin X., Ballmann J.* Re-consideration of Chen's problem by finite difference method // Eng. Fract. Mech. – 1993. – V. 44. – P. 735–739.
2. *Chen Y. M.* Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a lagrangian finite-difference method (the NEMP code) // Eng. Fract. Mech. – 1975. – V. 7. – P. 653–660.
3. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамика хрупкого разрушения. – М. : Машиностроение, 1988. – 240 с.
4. *Малик А. В., Белая Л. А., Лавит И. М.* О динамическом нагружении тела с трещиной в условиях плоской деформации // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2016. – № 1 (315). – С. 3–10.
5. *Лавит И. М.* Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Проблемы прочности. – 1988. – № 7. – С. 18–23.
6. *Баренблатт Г. И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 4. – С. 3–56.

МЕХАНИКА РАСТУЩИХ ТЕЛ

**ОБ ОБЩИХ ПОДХОДАХ И МЕТОДАХ МЕХАНИКИ
НАРАЩИВАЕМЫХ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ
И ЕЕ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ**

А. В. Манжиров^{1,2,3}, Д. А. Паршин^{1,2}

¹*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского, РАН, г. Москва*

²*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана*

³*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва*

Рассмотрим процесс непрерывного наращивания деформируемого твердого тела на интервале времени $t \in (t_1, t_2)$. Для рассматриваемого растущего тела имеем: уравнение равновесия $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ – тензор напряжений, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – интенсивность объемных сил, \mathbf{x} – радиус-вектор точки тела; краевые условия на различных кусках неподвижной части поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in S_1(t) : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{x} \in S_2(t) : \quad \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x} \in S_3(t) : \quad \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x} \in S_4(t) : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{u} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

где \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности тела, \mathbf{u} – вектор перемещения; начально-краевое условие на растущей поверхности [1]

$$\mathbf{x} \in S^*(t) : \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^*, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{p}^* \quad (t = \tau^*(\mathbf{x})),$$

где $\tau^*(\mathbf{x})$ – момент присоединения к телу частицы с радиус-вектором \mathbf{x} ; соотношение между скоростями деформации и перемещения $\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ и уравнение состояния в форме [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{x})}) [2\mathbf{E} + (\kappa - 1)I_1(\mathbf{E}) \mathbf{1}], \\ \tau_0(\mathbf{x}) &= \begin{cases} t_0, & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \tau^*(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega^*(t), \end{cases} \end{aligned}$$

где \mathbf{E} – тензор малой деформации, $\mathbf{1}$ – единичный тензор, $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$, ν – коэффициент Пуассона, Ω_0 и $\Omega^*(t)$ – области, занимаемые исходной и дополнительной частями тела, t_0 – момент загрузки исходной части тела.

Сформулированные соотношения представляют собой общую неклассическую начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела. В них $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \tau^*(\mathbf{x}))$ – задаваемый на $S^*(t)$ тензор напряжений, согласованный с внешними силами \mathbf{p}^* , а оператор $\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{x})}$ является линейным интегральным оператором вязкоупругости [2]. Следует заметить, что в исследуемом процессе наращивания некоторого исходно существующего тела новыми материальными элементами используемое определяющее соотношение в общем случае имеет разрыв на поверхности раздела исходной и дополнительной частей тела. В частном случае (при занулении $\mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{x})}$) данное уравнение состояния описывает линейно упругое тело.

Сформулированную задачу можно привести к краевой задаче в скоростях соответствующих величин в форме [1–3]

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{h} - \theta(\tau^*(\mathbf{x})/t_1 - 1)\mathbf{h}_1 - \delta(\tau^*(\mathbf{x})/t_1 - 1)\mathbf{h}_2 = \mathbf{0};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)I_1(\mathbf{D})\mathbf{1}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]; \\
\mathbf{x} \in S_1(t) &: \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{w}_0, \\
\mathbf{x} \in S_2(t) &: \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\
\mathbf{x} \in S_3(t) &: \mathbf{nn} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{w}_1, \\
\mathbf{x} \in S_4(t) &: \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{nn} = \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{v} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_2, \\
\mathbf{x} \in S^*(t) &: \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \left[\nabla \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{x})/G(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau^*(\mathbf{x}))/G(t) - \right. \\
&\quad \left. - \theta(\tau^*(\mathbf{x})/t_1 - 1)\mathbf{f}_1^0(\mathbf{x}, t) - \right. \\
&\quad \left. - \delta(\tau^*(\mathbf{x})/t_1 - 1)\mathbf{f}_2^0(\mathbf{x}, t) \right] s_n, \\
&\quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}) \quad (t = \tau^*(\mathbf{x})); \\
\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{T}^0}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t}, \quad \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{f}^0}{\partial t}, \quad \mathbf{w}_k = \frac{\partial \mathbf{p}_k^0}{\partial t}, \\
(\cdot)^0 &= (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{x})})^{-1} G(t)^{-1}(\cdot).
\end{aligned}$$

Здесь $\theta(t)$ и $\delta(t)$ — функции Хевисайда и Дирака, s_n — скорость движения поверхности роста в нормальном направлении, функции \mathbf{f}_k^0 и \mathbf{h}_k определяются по заданным (известным) функциям исходной начально-краевой задачи.

Последняя краевая задача для скоростей совпадает по форме с краевой задачей теории упругости с параметром времени t . Для ее решения можно применить все известные аналитические и численные методы. Решение же исходной начально-краевой задачи можно затем восстановить по полученным формулам расшифровки

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= G(t) \left\{ \frac{\mathbf{T}(\mathbf{x}, \tau_0(\mathbf{x}))}{G(\tau_0(\mathbf{x}))} \left[1 + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t \left[\mathbf{S}(\mathbf{x}, \tau) + R(t, \tau) \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \zeta) d\zeta \right] d\tau \right\}, \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau_0(\mathbf{x})) + \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

которые имеют универсальный характер и позволяют найти истинные поля напряжений и деформации в любой момент времени.

Обсуждения разнообразных приложений построенной теории и решения соответствующих задач механики можно найти, например, в [3–10].

В настоящей работе в качестве одного из возможных физических приложений рассмотрены процессы формирования твердых шаровых тел в поле сил собственной гравитации за счет притока (аккреции) дополнительного вещества на их поверхность. В работе построено замкнутое решение соответствующей неклассической начально-краевой задачи, выполнены многочисленные числовые расчеты. Изучено влияние скорости и характера роста на напряженно-деформированное состояние самогравитирующих объектов, формирующихся в процессе аккреции. Проведен сравнительный анализ моделей, учитывающих и не учитывающих механические особенности процесса наращивания. Обнаружен и детально исследован целый ряд принципиально новых механических эффектов, проявляющихся в рассматриваемых физических процессах.

В качестве инженерного приложения рассмотрена задача о возведении тяжелого кругового цилиндрического свода на горизонтальном основании методом послойного утолщения первоначально установленной арочной заготовки. На примере этой задачи изучено

влияние сил тяжести на постепенно формируемые в их присутствии объекты. Проанализирован процесс эволюции напряженно-деформированного состояния таких объектов. Моделирование проведено с учетом возможности использования при утолщении свода предварительно напряженных конструктивных элементов, а также организации его локальной поддержки во время возведения с помощью подвеса с контролируемой силой натяжения. Показана исключительная важность принятия во внимание сил тяжести, действующих на протяжении всего процесса возведения, при оценке прочности, устойчивости и несущей способности получаемой в итоге конструкции. Продемонстрирована возможность весьма эффективного управления текущим и результирующим состоянием изготавливаемого посредством наращивания тяжелого тела путем создания в присоединяемом к нему дополнительном материале ненулевых начальных напряжений, а также с помощью временного локального нагружения поверхности этого тела.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ № НШ-2954.2014.1, грантов РФФИ №№ 14-01-00741-а, 15-08-06330-а, а также Программы № 12 ОЭММПУ РАН.

Литература

1. Манжиров А. В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. – 1995. – Т. 59. Вып. 5. – С. 836–848.
2. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
3. Manzhirou A. V. Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proc. of the World Congress on Engineering 2015, 1–3 July, 2015, London, U.K. – Volume II. London: IAENG, 2015. – P. 710–714.
4. Манжиров А. В., Черныш В. А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – № 5. – С. 25–37.
5. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 1. – С. 66–83.
6. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 6. – С. 149–166.
7. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4 (54). – С. 290–303.
8. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики. Труды Всероссийской объединенной научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 16–20 июня 2008 г. / Отв. ред. С. М. Ткач. – Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 2008. – С. 130–137.
9. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Возведение арочной конструкции с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 5. – С. 94–107.
10. Манжиров А. В., Паршин Д. А. Влияние режима возведения на напряженное состояние вязкоупругой арочной конструкции, возводимой с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 6. – С. 69–91.

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА КОНВЕКЦИЮ МАРАНГОНИ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ КРИСТАЛЛОВ ПО МЕТОДУ ЧОХРАЛЬСКОГО

А. И. Федюшкин, Н. Г. Бураго

Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлунского РАН, г. Москва

При выращивании кристаллов по методу Чохральского распределение температуры по расплаву нестабильно: наиболее холодная зона расположена вблизи охлаждаемого растущего кристалла, располагающегося над горячим расплавом в печи (см. рис. 1). Из-за нагрева нижней и боковых поверхностей печи, неравномерности распределения температуры и термо-капиллярных эффектов на верхней свободной поверхности происходит постоянное конвективное перемешивание всего расплава. Аналогичное действие может оказывать и концентрационно-капиллярная конвекция из-за сильной зависимости поверхностного натяжения от примесной неоднородности расплава. Такое конвективное движение расплава существенно влияет на распределение примеси в расплаве и, соответственно, влияет на распределение примеси в растущем кристалле. Помимо капиллярных эффектов значительное воздействие на распределение примесей оказывают также режимы вращения тигля и кристалла. Изучению влияния вращения на конвекцию посвящено много опубликованных работ. Кроме этого в последние годы было обращено внимание на еще один эффективный способ воздействия на конвекцию расплава, заключающийся в применении вибраций (см. например [1]). Для более глубокого понимания влияния вибраций на гидродинамику и теплоперенос расплава при росте кристаллов необходимо изучать не только воздействие вибраций в отдельности, но также их влияние во взаимодействии с другими типами воздействий (вращение, тепловые, гравитационные, электро-магнитные и тому подобные воздействия). Экспериментальное изучение воздействия вибраций на рост кристаллов выполняется в течение ряда лет под руководством проф. Е. В. Жарикова [2, 3]. В статьях [4, 5, 6] вибрационные потоки изучались численно и показан ряд их закономерностей, в частности, уменьшение толщины пограничных слоев. В настоящей работе представлены некоторые результаты численного моделирования выращивания кристаллов методом Чохральского с учетом вибраций кристалла, термо-гравитационной, термо-капиллярной и вынужденной конвекции, а также вращений кристалла и тигля.

Постановка задачи

Расчетная область для расчета рассматриваемых течений расплава в осесимметричной постановке показана на рис. 1. Роль вибратора играет растущий цилиндр-кристалл. Приняты следующие обозначения: R – внешний радиус тигля, R_C – радиус кристалла, H – вертикальный размер тигля, z – ось симметрии. Скорость роста кристалла и тепловые граничные условия считаются заданными и не зависящими от времени. Вибрации имеют амплитуду, пренебрежимо малую по сравнению с высотой тигля, так что они заданы изменением вертикальной скорости на поверхности кристалла по гармоническому закону $v = A \sin(\omega, t)$, где A и ω – амплитуда и частота, соответственно.

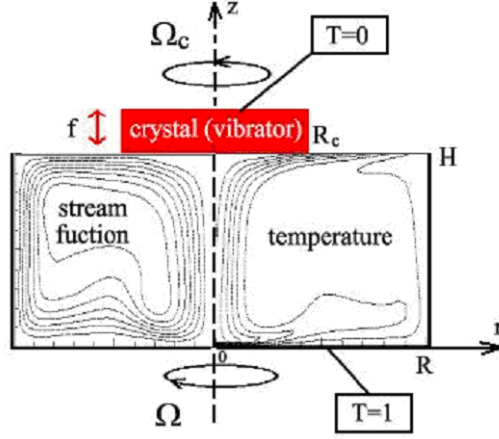


Рис. 1. Расчетная область

В приближении Навье-Стокса-Буссинеска система исходных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_* \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_* \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \nu_* \frac{u}{r}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_* \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_* \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g \beta_T (T - T_0)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{uv}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_* \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_* \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \nu_* \frac{v}{r^2}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

где $d/dt = u\partial/\partial r + w\partial/\partial z$ – материальная временная производная, u , w , v – радиальная, осевая и азимутальная проекции скорости, T – температура, ρ_0 – плотность при температуре T_0 , p – давление, c_p – изобарическая теплоемкость, ν_* – коэффициент кинематической вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, g – ускорение силы тяжести, β_T – коэффициент температурного расширения жидкости.

Граничные условия на оси симметрии имеют вид

$$0 \leq z \leq H, \quad r = 0 : u = 0, \quad \partial w / \partial r = 0, \quad v = 0, \quad \partial T / \partial r = 0$$

граничные условия на поверхности кристалла записываются так

$$z = H, \quad 0 \leq r \leq R_C : u = 0, \quad w = W_s + A\omega \sin(\omega t), \quad v = 2\pi r \Omega_C, \quad T = 0.$$

На стенках тигля граничные условия таковы

$$z = 0, \quad 0 \leq r \leq R : u = 0, \quad w = W_s + A\omega \sin(\omega t), \quad v = 2\pi r \Omega_C, \quad T = 1.$$

На свободной поверхности расплава условия принимались такими

$$z = H, \quad R_C \leq r \leq R : \rho_0 \nu_* \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ или } T = \frac{r - R_C}{R - R_C}.$$

Здесь W_s – скорость роста кристалла, A и ω – амплитуда и частота вибраций, Ω_C и Ω – частоты вращения кристалла и тигля, R_C и R – радиусы кристалла и тигля, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Формулировка граничных условий определяет степень соответствия математической модели экспериментальным данным. В общем случае граничные условия могут зависеть от времени. Это пока не применялось в расчетах.

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq H : u = 0, \quad w = 0, \quad v = 0, \quad T = 0.$$

Рассматриваемый процесс определяется следующими параметрами подобия: числом Прандтля $Pr = \rho c_p \nu_* / \lambda$, числами Рейнольдса $Re_C = \Omega R^2 / \nu_*$, $Re = W_s R / \nu_*$, числом Грасгофа $Gr = g \beta \Delta T R^3 / \nu_*^2$ (или числом Рэлея $Ra = Gr Pr$) и числом Марангони $Mn = \sigma \beta_\sigma R \Delta T / (\rho_0 \nu_*^2)$. В большинстве случаев эти числа принимали значения: $Pr = 5.43$, Re_Ω и Re не более 1000, $Gr = 0 \div 10^6$, $Mn = 0 \div 500$. Гармонические вибрации кристалла имели амплитуду $A = 100 \mu m$ и частоты $f = \omega / 2\pi = 0 \div 100$ Гц. Скорость роста кристаллов была в пределах $W_s = 0 \div 0.3$ см/час.

Численный метод

Рассмотрим алгоритм решения на примере типичного уравнения конвекции-диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla \cdot (k \nabla \mathbf{A}) + \mathbf{F}.$$

Решение получалось с помощью вариационной схемы Петрова-Галеркина

$$\int_V \left(\frac{\mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{A}^n}{\Delta t^n} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{A}^{n+1} \right) (\delta \mathbf{A} + \Delta t^n \mathbf{u}^n \cdot \nabla \delta \mathbf{A}) dV + \int_V \tilde{k}^n \nabla \mathbf{A}^{n+1} \cdot \delta \mathbf{A} dV = \int_V \mathbf{F}^{n+1} \cdot \delta \mathbf{A} dV + \int_{S \setminus S_A} P_*^{n+1} \cdot \delta \mathbf{A} dS,$$

которая дополняется главными граничными условиями

$$t \geq 0, \quad \mathbf{r} \in S_A : \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}_*(\mathbf{x}, t^{n+1})$$

и начальными условиями

$$t = 0, \quad \mathbf{r} \in V : \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_*(\mathbf{x}).$$

Естественные граничные условия

$$t \geq 0, \quad \mathbf{r} \in S \setminus S_A : k \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{P}_*^{n+1} = \mathbf{P}_*(\mathbf{x}, t^{n+1})$$

учтены в записанном выше вариационном уравнении Галеркина-Петрова. Величины со звездочками являются заданными. Величина $\tilde{k}_*^n \geq 0$ является коэффициентом вязкости,

подправленным (уменьшенным) по методу экспоненциальной подгонки А. А. Самарского (в самом простом варианте)

$$\tilde{k}_*^n = \frac{k^2}{k + \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^n \Delta t^n}.$$

По пространственным переменным применялась простейшая кусочно-линейная аппроксимация решения на треугольных конечных элементах. Решение дискретизированных задач получалось безматричным итерационным методом сопряженных градиентов, каждая итерация которого эквивалентна расчету временного шага по явной двухслойной конечно-разностной схеме. Число итераций для получения решения не превышает числа \sqrt{N} , где N – число неизвестных значений искомой функции в узлах. Поскольку число операций на каждой итерации прямо пропорционально N , то асимптотическая оценка числа операций, затрачиваемых на расчет шага по времени дает число пропорциональное $N^{3/2}$. Потребная память ЭВМ составляет $5N$ (5 массивов длины N). Таким образом, применяемый метод позволяет решать данные задачи весьма быстро на обычных бытовых ноутбуках. Отметим, что хотя формально неявный метод является безусловно устойчивым, для получения приемлемой точности расчета конвективных течений шаг по времени в нестационарных задачах должен быть ограничен условием Куранта $\Delta t^n \leq \min(h/|\mathbf{u}^n|)$.

Отметим дополнительно, что уравнения движения для радиальной и осевой скоростей решались совместно с условием несжимаемости, которое включалось в вариационное уравнение в качестве ограничения по методу штрафных функций. Величина коэффициента штрафа определялась по максимуму модуля скорости в области течения так, чтобы не усилить курантовское ограничение шага по времени, записанное выше. Затем отдельно решались задачи для азимутальных скоростей и температуры. Более подробно данные алгоритмы описаны в [7, 8].

Характеристики осредненных по времени вибрационных течений, например, некоторой величины f в процессе решения определялись по формулам

$$f_{average} = \frac{1}{t} \int_0^t f dt.$$

Дополнительно расчетный шаг по времени выбирался так, чтобы на период колебаний вибратора приходилось по крайней мере 20 шагов по времени. Представленные ниже результаты расчетов осредненных вибрационных течений относятся к тому моменту времени, когда осредненное течение становится квазистационарным, если противное не оговорено.

Результаты расчетов

Для чисто термо-гравитационной конвекции принималось: $Gr = 2 \cdot 10^5$, $Pr = 5.43$, $H/R = 1$, $R_C/R = 0.3$. Для конвекции Марангони принято $Mn = 500$.

На рис. 2 показано сравнение осредненных температур для термо-гравитационной конвекции (а) и добавочно для конвекции Марангони (б, в) для двух случаев тепловых условий на свободной границе ($z = H$, $R_C \leq r \leq R$). Отличия видны отчетливо. В случаях конвекции Марангони градиент температуры у кристалла значительно возрастает по сравнению со случаем только термо-гравитационной конвекции.

На рис. 3 показано влияние вибраций на распределение температуры в расплаве для трех величин частоты вибраций ($f = 50, 10, 1$ Гц). Видно, что вибрации приводят к интенсификации перемешивания расплава и к сужению температурных пограничных слоев на дне тигля и около кристалла.

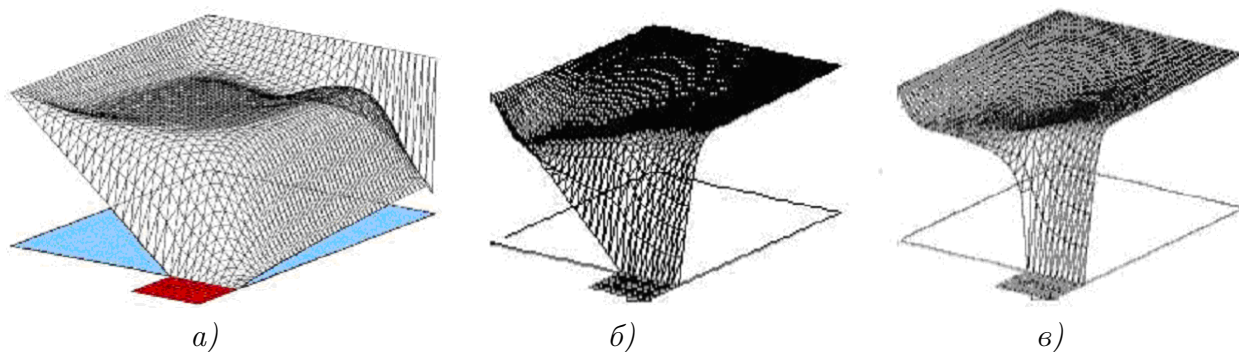


Рис. 2. Распределение осредненной температуры: термо-гравитационная конвекция (а), конвекция Марангони ($Mn = 500$) с линейным законом изменения температуры поверхности (б) и в случае теплоизолированной поверхности (в)

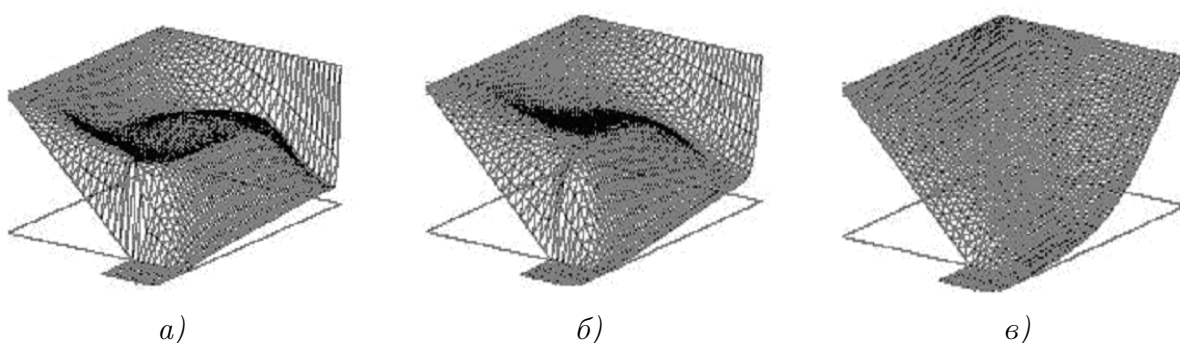


Рис. 3. Распределение осредненной температуры при вибрациях кристалла с частотами 50 Гц (а), 10 Гц (б) и 1 Гц (в)

Вибрации охлаждают ядро течения расплава сильнее, чем термо-гравитационная конвекция. Изменения температуры наблюдаются только около стенок тигля. На свободной поверхности распределение осредненной скорости (рис. 4) свидетельствует наличие стоячих волн, что наблюдается в экспериментах [2].

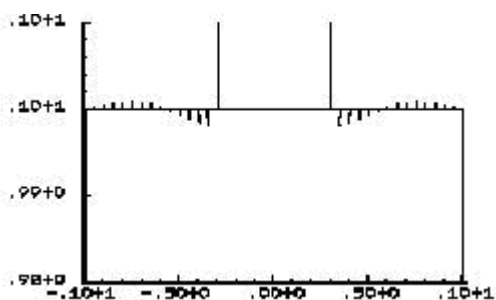


Рис. 4. Осредненные по времени скорости вибрационного течения на свободной поверхности

Представленные результаты показывают, что при частотах порядка 50 Hz вибрации обеспечивают значительно лучшее перемешивание расплава и выравнивание температур в области течения, нежели термо-гравитационная конвекция и конвекция Марангони. Причем этот эффект не связан с гравитацией и может эффективно использоваться как в земных, так и в космических условиях.

Для выравнивания распределения температур и интенсификации перемешивания расплава в методе Чохральского часто применяется вращение тигля и растущего кристалла. Для усиления воздействия вращения часто кристалл и печь вращаются в противоположных направлениях или с ускорением. Также как термо-гравитационная конвекция вращение тигля снижает температуру около кристалла, вращение кристалла наоборот повышает температуру около кристалла. Ширина теплового пограничного слоя около поверхности кристалла уменьшается с повышением частоты вращения. Результаты совместного действия вибраций при частоте 50 Гц

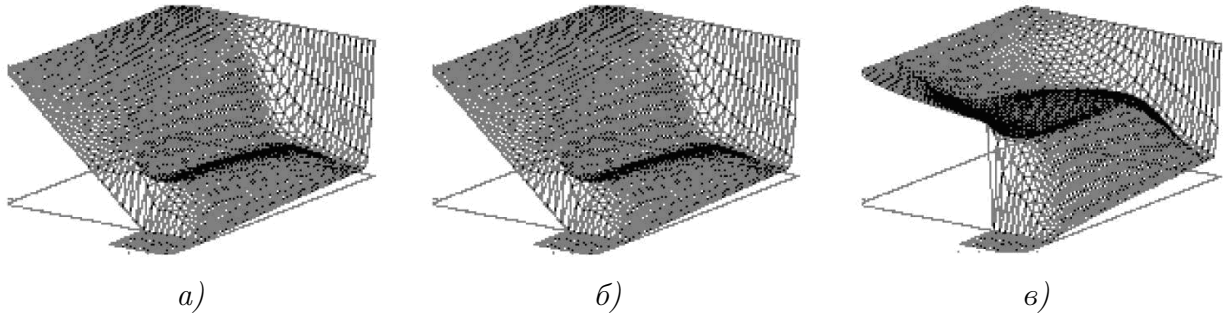


Рис. 5. Распределение температуры в печи при совместном действии вибраций и вращений (а), вибраций, вращений и термогравитационной конвекции (б), вибраций и конвекции Марангони (в)

и одновременных взаимно противоположных вращений тигля и кристалла с вращательными числами Рейнольдса ± 500 показаны на рис. 5а. Диапазон изменения температуры $[0 \div 1]$. Результаты совместного действия вибраций при частоте 50 Гц и одновременных взаимно противоположных вращений тигля и кристалла с вращательными числами Рейнольдса ± 500 , соответственно, и термо-гравитационной конвекции показаны на рис. 5б. Совместное действие вибраций и конвекции Марангони показано на рис. 5в. Заметим, что на всех рисунках диапазон изменения безразмерной температуры один и тот же $[0 \div 1]$.

Выводы

Показано, что вибрации способны уменьшать толщину пограничных слоев и увеличивать температурные градиенты. Это может интенсифицировать тепло-массообмен около фронта роста кристалла и повысить скорость его роста. Вибрации существенно усиливают перемешивание расплава независимо от наличия силы тяжести. Стоячие волны на свободной поверхности при действии вибраций воспроизведены в численных экспериментах. Установлено также, что вибрации могут ослабить влияние термо-капиллярной конвекции Марангони.

Исследование поддержано грантами РФФИ № 14-01-00741, РФФИ № 14-19-01280 и программой РАН ОЭММПУ-12.

Литература

1. *Gershuni G.Z. and Lubimov D.V.* Thermal vibrational convection. – John Willey&Sons Ltd. – 1998. – 357 p.
2. *Zharikov E. V., Prihod'ko L. V., Storozhev N. R.* Fluid flow formation resulting from forced vibration of a growing crystal. – J. Crystal Growth. – 1990. – V. 99.– Pp. 910–914.
3. *Fedyushkin A., Bourago N., Polezhaev V., Zharikov E.* The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth. – J. of Crystal Growth. – 2005. – V. 275, No. 1-2. – Pp. e1557–e1564.
4. *Fedyushkin A. I., Bourago N. G.* Influence of vibrations on boundary layers in Bridgman crystal growth. Proceedings of 2nd Pan Pacific Basin Workshop on Microgravity Sciences. – Pasadena. – 2001, paper CG-1073.
5. *Fedyushkin A. I., Bourago N. G., Polezhaev V. I. and Zharikov E. V.* Influence of vibration on heat and mass transfer during crystal growth in ground-based and microgravity environments. Proceedings of 2nd Pan Pacific Basin Workshop on Microgravity Sciences. – Pasadena. – 2001, paper CG-1065.

6. *Федюшкин А. И., Иванов К. А.* Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов. – Препринт № 1085, Москва : ИПМех РАН. – 2014. – 107 с.

7. *Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н.* Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. – М. : ИПМех АН СССР, 1988. – Препринт N326. – С. 1–63. Второе издание в кн. Вычислительная механика твердого деформируемого тела. – Вып. 2. – М. : Наука, 1991. – С. 78–122.

8. *Бураго Н. Г.* Вычислительная механика. Электронная книга. – 2012. – 275 с. DOI: 10.13140/RG.2.1.4610.5047.

МЕХАНИКА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОСЕССИММЕТРИЧНЫХ
ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ
НАГРУЖЕНИЯХ**

**В. Г. Баженов, А. А. Артемьева, М. С. Баранова,
Т. В. Кузмичева, И. А. Фролова**

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
имени Н. И. Лобачевского*

В связи с развитием математических моделей, вычислительной техники, численных методов и программных систем появились новые возможности решения задач устойчивости упругопластических конструкций в геометрически нелинейной постановке как неидеальных систем с начальными несовершенствами формы при сложных нагружениях. При этом вместо критических бифуркационных нагрузок определяются предельные нагрузки и соответствующие формоизменения конструкций. В настоящее время получили развитие теории типа течения с изотропным и кинематическим комбинированным упрочнением. Эти теории имеют достаточно широкую область применимости при описании процессов сложного нагружения в момент потери устойчивости упругопластических оболочек. Для численного решения подобных квазистатических задач в теории упругости хорошо разработан метод продолжения по обобщенному параметру нагружения, в который включаются и формоизменения конструкций. Для упругопластических задач этот метод неэффективен и мало пригоден, ввиду зависимости решения от истории нагружения. Весьма перспективным для исследования процессов деформирования и оценки предельных нагрузок упругопластических тел при неоднородных напряженно-деформированных состояниях, сложных нагружениях и немалых формоизменениях является применение динамической формулировки задачи с использованием в качестве параметра нагружения модифицированного времени. В квазистатических задачах роль регуляризатора численного решения выполняют инерционные члены, вклад которых определяется выбором соответствующей скорости нагружения и ее реверсом при разгрузениях. Отметим, что только динамическая постановка задачи позволяет моделировать закритическое поведение упругопластических конструкций – перескок к новым устойчивым равновесным состояниям. Теоретическое исследование рассматриваемых процессов будем проводить на основе теории непологих оболочек типа Тимошенко в обобщенной двумерной постановке с разложением в ряд по окружной координате для описания неосесимметричных форм выпучивания при квазистатических и динамических нагружениях. Описание упругопластических свойств материала осуществим в рамках обобщенной модели упругопластической среды с изотропным и кинематическим упрочнением [1]. Кинематические соотношения формулируем в скоростях в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие деформации и формоизменения оболочек в общей цилиндрической системе эйлеровых координат. Уравнения движения оболочки выводятся из уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред. Численное решение осуществляется по явной конечно-разностной схеме второго порядка точности типа «крест» [2]. Вращение элементов как жесткого целого относительно нормали к срединной поверхности оболочки при кручении учитывается введением коротационной производной Яуманна. Местная сопутствующая система координат обуславливается осесимметричными формоизменениями оболочки без учета

сдвиговых деформаций кручения, то есть она является лагранжевой только для чисто осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены критерием устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Металлические трубки при чистом кручении, как показывают эксперименты, теряют устойчивость при углах сдвига менее 5° с образованием неосесимметричных форм. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени [3]. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений неосесимметричной задачи, так как за базовую берется ортогональная лагранжева система координат осесимметричной задачи. Неосесимметричные компоненты нормального прогиба полагаются малыми, они определяются решением геометрически линеаризованной системы уравнений. Влияние неосесимметричного выпучивания на осесимметричное деформирование проявляется через физические соотношения теории пластичности и приводит к снижению усилий в срединной поверхности оболочки по мере развития неосесимметричных прогибов. Потеря устойчивости оболочек вращения $50 > R/h > 10$ средней длины происходит как правило по второй или третьей форме по окружной координате в пластической области. Поэтому при решении подобных задач теория пологих оболочек не применима [4].

Рассмотрим неосесимметричную потерю устойчивости трубчатого образца ($L = 92$ мм, $R = 14.5$ мм, $h = 1$ мм) при последовательном нагружении внутренним давлением и кручением. Образец с жестко заземленными торцами сначала нагружается линейно возрастающим внутренним давлением до изменения диаметра оболочки в средней части на 14 %. Затем образец разгружается, один торец остается жестко заземленным, а второй закручивается с постоянной угловой скоростью $\dot{\alpha} = 0.3$ град/с. При численном моделировании использовалась диаграмма деформирования [5], полученная экспериментально-расчетным методом при растяжении трубчатых образцов из стали 12Х18Н10Т до момента разрушения. При квазистатическом нагружении начальное распределение скоростей перемещений вдоль оболочки полагается линейным, а скорость перемещения торца оболочки - постоянной, чтобы вклад сил инерции в решении задачи был пренебрежимо мал. Как следует из анализа экспериментальных данных и численных расчетов значения амплитуд волнообразования мало изменяются при числе волн по окружности $n = 2$ и угле винтовых складок с образующей $40^\circ < \alpha < 50^\circ$.

На рис. 1 представлены формоизменения оболочки, полученные в расчете и эксперименте в закритической стадии деформирования.

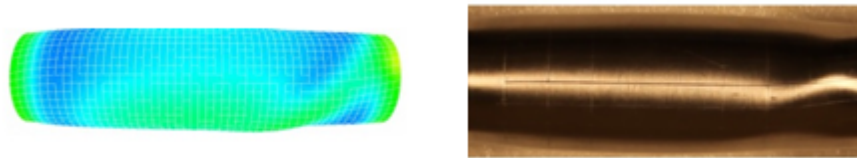


Рис. 1.

На рис. 2 показаны схема нагружения внутренним давлением – кручением и графики зависимости безразмерного крутящего момента на нагружаемом торце оболочки от условной сдвиговой деформации. Маркером «крест» изображены результаты эксперимента, сплошной линией – значения с учетом неосесимметричных форм, штриховой линией – без учета неосесимметричных форм.

При закручивании максимальные пластические деформации (18 %) образуются в узких полосах краевого эффекта. Когда угол закручивания торца достигает 20 градусов, оболочка теряет устойчивость вблизи одного из краев оболочки. Предварительное деформирование образца внутренним давлением увеличивает предельное значение крутящего момента по сравнению с чистым кручением на 30 %.

Проведенные исследования показывают, что предварительное нагружение изменяет начальную геометрию оболочки и формирует деформационную анизотропию с большим упрочнением материала в направлении главной оси деформирования.

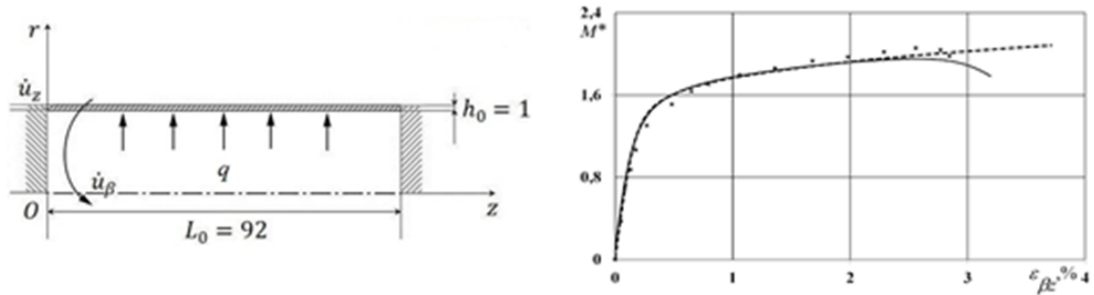


Рис. 2.

Кручение разгруженной оболочки приводит к сложному нагружению, которое проявляется в начальный момент приложения нагрузки и не оказывает заметного влияния на критические параметры неосесимметричной потери устойчивости. Эффективность разработанной математической модели обоснована хорошим соответствием результатов теоретических и экспериментальных исследований при комбинированных сложных нагружениях. Она может быть использована для моделирования процессов деформирования и потери устойчивости оболочек вращения по осесимметричным и неосесимметричным формам в широком диапазоне скоростей нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 16-38-50088 мол_нр, 16-38-60107 мол_а_дж.

Литература

1. Chaboche J. L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Inter. J. of Plasticity. – 1989. – Vol. 5, № 3. – P. 247–302.
2. Артемьева А. А., Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. Теоретический и экспериментальный анализ больших деформаций и предельных состояний упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // Прикладная математика и механика. – Т. 79, вып. 4. – 2015. – С. 558–570.
3. Аннин Б. Д., Коробейников С. Н. Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упруго-пластичности // Сиб. журн. индустр. матем. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 21–34.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1967 – 984 с.
5. Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 57–66.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСКРЫТИЯ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОСМИЧЕСКИХ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В. Н. Зимин, А. В. Крылов, С. А. Чурилин

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Создание космических крупногабаритных трансформируемых конструкций сопряжено с решением ряда технических и механических проблем, обусловленных уникальностью объектов, характерной особенностью которых является сочетание противоречивых требований увеличения габаритных размеров и обеспечения достаточной жесткости при весьма ограниченной массе силового каркаса. Как правило, подобные конструкции представляют из себя трансформируемый силовой каркас с натянутым на него сетеполотном, формирующим отражающую поверхность. Существует много разных концепций построения каркасов таких конструкций, одной из которых является концепция каркаса, состоящего из множества однотипных элементов, связанных между собой шарнирными узлами, образующих плоскую или пространственную конструкцию отражателя в развернутом состоянии [1]. Условно такие конструкции можно разделить на два класса: плоские шарнирно-многозвенные конструкции и пространственно шарнирно-многозвенные конструкции (рис. 1).

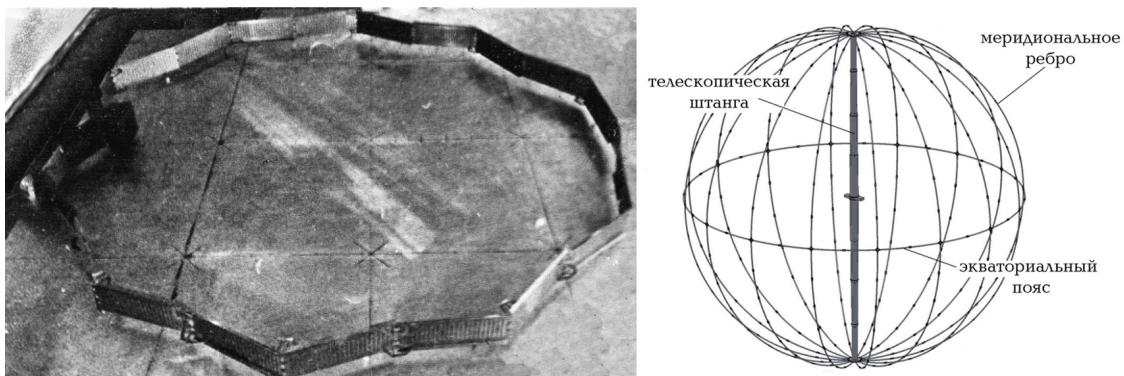


Рис. 1. Контурная антенна и общий вид космических калибровочных аппаратов в рабочем положении

Несмотря на достигнутые значительные успехи в области проектирования таких конструкций, важной остается задача обеспечения плавного и надежного процесса их раскрытия при гарантированном обеспечении последующего функционирования изделия. Для моделирования динамики раскрытия трансформируемых конструкций целесообразно использовать такие программные комплексы как Euler и Adams [2].

Процесс развертывания трансформируемых конструкций индивидуален для каждого изделия, тем не менее, можно определить общий подход к построению расчетных моделей их развертывания. Для расчетов принята расчетная схема в виде системы абсолютно твердых тел, связанных между собой шарнирными узлами. Массы и моменты инерции твердых тел приняты равными массам и моментам инерции реальных звеньев конструкции. Под шарнирным узлом здесь понимается не только шарнирное соединение, допускающее относительное вращение смежных звеньев, но и пружины кручения, накапливающие в

процессе укладки изделия в транспортное положение необходимую для последующего его развертывания энергию, или электромеханические приводы, отвечающие за раскрытие. При определенном относительном положении смежных звеньев во время раскрытия на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное угловое смещение.

Напряженно-деформированное состояние элементов таких трансформируемых конструкций при развертывании определяется ударными нагрузками при установке соседних звеньев на упоры. Ударные нагрузки определяются из рассмотрения кинематики развертывания конструкции. Расчеты показывают, что звенья конструкций контурной антенны и фрагмента калибровочного аппарата встают на упоры в разные моменты времени. Поэтому для определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при развертывании принимаются такие их формы, когда относительные скорости соседних звеньев максимальны. Тогда они представляют собой кинематически неизменяемые системы, что необходимо для проведения расчета на прочность. Такой подход идет в запас прочности, так как некоторая подвижность отдельных звеньев конструкций относительно друг друга в рассматриваемые моменты времени приводит к снижению напряжений, что обусловлено потерями кинетической энергии в шарнирных соединениях.

В результате расчета процесса развертывания в пакетах моделирования динамики многокомпонентных механических систем Euler и Adams с шагом по времени $\Delta t = 10^{-3}$ с получены координаты, скорости и ускорения центров масс звеньев, а также их угловые скорости и ускорения. Для определения напряжений, возникающих в рассматриваемых конструкциях при постановке звеньев на упоры, необходимо определить моменты времени, в которые относительные скорости звеньев максимальны. Для складного контурной антенны выбраны два момента времени: $t = 1,8$ с и $t = 2,6$ с. При $t = 1,8$ с только некоторые звенья достигают своего предельного положения, тогда как при $t = 2,6$ с почти все звенья уже стоят на упорах, однако при $t = 1,8$ с относительные скорости звеньев максимальны, поэтому расчет напряженно-деформированного состояния ведется и для этого момента времени. Для фрагмента космического калибровочного аппарата выбрано одно положение, принимается, что все звенья стоят на упорах.

Вычисленные значения скоростей в заданных точках моделей (рис. 2) принимаются в качестве начальных условий для расчета переходного процесса в программном комплексе MSC.Nastran, то есть при $t = 0$: $u(t) = 0$, $\dot{u}(t) = \dot{u}_0(t)$, где $\dot{u}_0(t)$ – вектор начальных узловых скоростей.

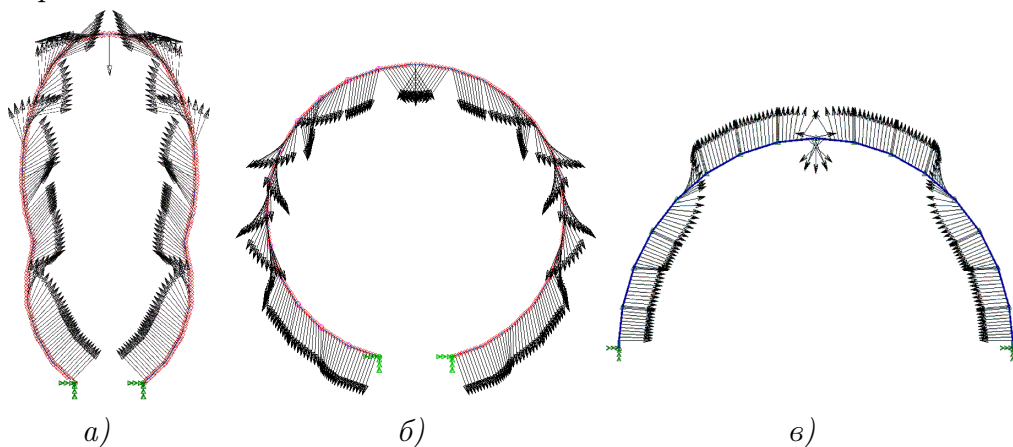


Рис. 2. Начальные условия в узлах конечно-элементной модели

На рис. 3 показаны максимальные пиковые напряжения в узлах конечно-элементных моделей контурной антенны в положениях $t = 1,8$ с: $\sigma = 163$ МПа и $t = 2,6$ с:

$\sigma = 50$ МПа, и фрагмента космического калибровочного аппарата $\sigma = 176$ МПа, в которых эти напряжения максимальны.

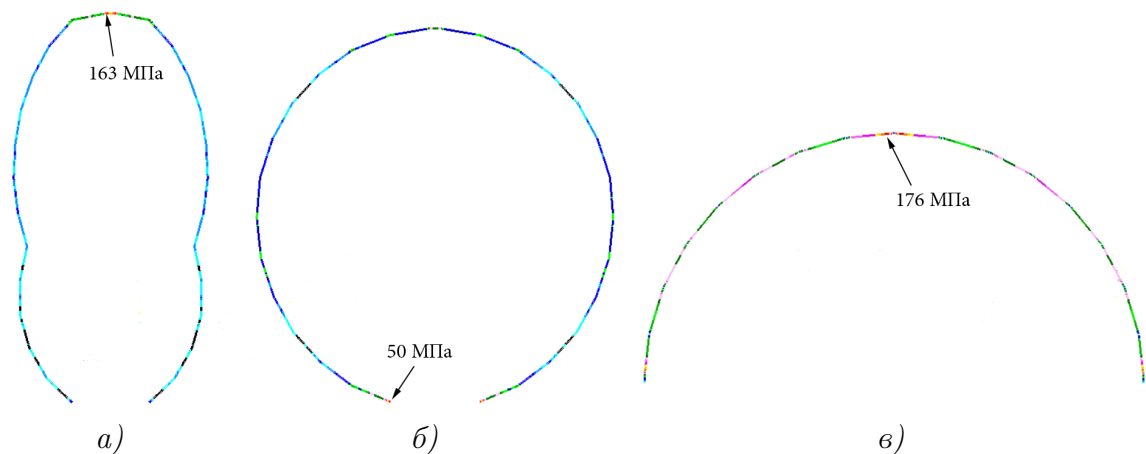


Рис. 3. Максимальные пиковые напряжения в узлах конечно-элементных моделей контурной антенны и фрагмента космического калибровочного аппарата

Данные значения эквивалентных напряжений в указанных зонах трансформируемых конструкций характеризуют напряженное состояние, существующее в течение весьма малого промежутка времени и определяющееся динамическим характером нагружения.

Литература

1. Зимин В. Н. Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // Полет, 2008.– № 10. – С. 42–48.
2. Крылов, А.В. Моделирование разворачивания многозвенных замкнутых космических конструкций / А. В. Крылов, С. А. Чурилин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». Специальный выпуск «Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем». – 2012. – С. 80–91.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Н. В. Минаева, А. Н. Шевалдин

Воронежский государственный университет

Рассмотрена пластина толщины h , находящаяся на упругом основании жесткости k . Она нагружена поперечной нагрузкой $p_1(x, y)$, по краям продольными усилиями интенсивности $p_2(x, y)$, $p_3(x, y)$. Два противоположных края жестко защемлены, а пара других – шарнирно закреплены.

По линейной теории пластин, функция $u(x, y)$, описывающая прогиб, является решением следующей задачи [1]:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u + h \left(p_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + ku &= p_1 \\ u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$; D – цилиндрическая жесткость.

Пусть при $p_1 = p_{10}(x, y)$, $k = k_0$ было найдено решение задачи (1)

$$u = u_0(x, y).$$

Оно будет описывать прогиб рассматриваемой пластины при заданных внешних воздействиях и принятой жесткости основания, если функция $u(x, y)$ непрерывно зависит от p_1 и k при $p_1 = p_{10}(x, y)$, $k = k_0$.

В результате проведенных исследований, согласно [2], было найдено соотношение, определяющее область непрерывной зависимости $u(x, y)$ от p_1 и k

$$4\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \operatorname{ch}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \operatorname{ch}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_{1,2} = \sqrt{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 2a_2}}$, $a_1 = \frac{p_2 h}{2D} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $a_2 = \frac{(n\pi)^2}{2a^2} \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{p_3 h}{D} + \frac{p_1 2a^2}{D(n\pi)^2} \right)$, $n \in Z$.

Если внешние нагрузки, параметры пластины и жесткости основания таковы, что соответствующая им точка лежит вне области, ограниченной (2), то непрерывная зависимость нарушается, и $u_0(x, y)$ уже не будет описывать поведение рассматриваемой пластины. Для подобных значений следует проводить исследования не на основе задачи (1), а использовать другую математическую модель.

Литература

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 880 с.

2. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел / Н. В. Минаева. – М. : Научная книга, 2006. – 235 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Ю. М. Севдималиев, Я. Т. Мегралиев, Х. Б. Мамедов

Бакинский государственный университет

В аэродинамике больших скоростей закон плоских сечений открытый А. А. Ильюшиным [1] дал возможность сформировать законченную математическую формулировку панельного флаттера пластин и пологих оболочек с приведением ее к эффективным аналитическим методам.

Задачи аэроупругости являются некоторой краевой задачей, сводящейся к интегрированию дифференциального уравнения либо системы уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях. Краевые задачи, описывающие консервативные системы, всегда является самосопряженным, а задачи аэроупругости как правило, бывают несамосопряженными.

В геомеханических приложениях представляет интерес случай чисто вязкой пластинки, плавающей на гравитирующим очень вязком основании – типа некоторых толстых слоев глины или консолидированного иля [2], приводимую к аналогичным краевым задачам.

В случае пластинки с начальными неправильностями $w_0 = w_0(x, y)$ уравнение движение элемента пластинки [3]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

двумерный бигармонический оператор, а $\Phi = \Phi(x, y)$ – функция напряжений в срединной поверхности, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрический жесткость, ρ , E и μ – физические постоянные материала пластинки, h – ее толщина. Часто задаются усилия, действующие в срединной поверхности (мембранные усилия), в этих случаях исследование изгиба и устойчивости пластин сводится к интегрирование лишь одного дифференциального уравнения системы (1), так как второе уравнение совпадает с уравнением плоской задачи теории упругости изотропного или анизотропного тела.

Для пластинки, которых прогибы малы и мембранные усилия оказывают малое влияние на изгиб и выпучивание, которыми можно пренебречь, то в дифференциальном уравнении (1) пренебрегая членами, зависящих от мембранных усилий упругую поверхность $w = w(x, y, t)$ пластины можно найти путем интегрирования дифференциального уравнения движения.

Во многих случаях оказывается возможным рассматривать пластинку из композиционного материала как ортотропную. Для таких элементов конструкции уравнение движение поверхности имеет вид [5]

$$D_1 \frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial y^4} = q(x, y, t) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Если представит решение в виде $w = v(x, y) \exp(\omega t)$, то наряду с невозмущенным состоянием $w_0 = w_0(x, y)$ будем рассмотреть возмущенную, которое вследствие взаимодействия с потоком возникает аэродинамическое (избыточное) давление

$$q = q_0(x, y) \exp(\omega t). \quad (3)$$

Здесь $q_0(x, y)$ имеет размерность интенсивности нагрузки. В случае изотропной пластинки дифференциальное уравнение, определяющее упругую поверхность, будет $D_1 = D_2 = D_3 = D$,

$$D \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) = q - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Кинематические граничные условия для уравнения (2) относящиеся к перемещениям $v(x, y)$ могут быть

$$\begin{aligned} v_x = (0, y) = v(1, y) = v_{xxx}(0, y) = v_{xx}(1, y) = 0, \\ v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad v_y(x, 1) = \varphi_1(x), \quad v_{yy}(x, 0) = \varphi_2(x), \quad v_{yyy}(x, 1) = \varphi_3(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Что касается начальных условий, то они обычно формулируются для перемещений и соответствующих скоростей точек срединной поверхности пластинки [3, 6].

Решение краевой задачи для уравнения (2) и (5) при помощи двойных тригонометрических рядов для статических и стационарных задач получены и они известны в случае удовлетворения дифференциальных операторов требований [7]

а) кратность дифференцирования по каждой из пространственных координат четная, включая нуль,

в) граничные условия на каждой паре противоположных кромок контура выражается в виде равенств нулю четных производных искоемых функций, при этом на одной паре кромок по аргументу x , а на другой по y . Но они не претендуют на общность.

В предлагаемой работе для нестационарных задач панельного флаттера предложена краевая задача и для нее доказывается существование и единственность решения.

Литература

1. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. – 1956. – Т.20, вып.6. – С. 733–755.
2. *Nadai A.* Theory of flow and fracture of solids. New York, Toronto and London, 1950.
3. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
4. *Кийко И. А.* Флаттер вязкоупругой платины. // ПММ. – 1996. – Т. 60, вып. 1. – С. 172–175.
5. *Курдюмов А. А. , Ложкин А. З., Иосифов Р. А., Козляков В. В.* Строительная механика корабля и теория упругости. – Т. 2. – 1968. – 418 с.
6. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. – М. : Наука, 2006. – 247 с.
7. *Филлин А. П.* Приближенные методы математического анализа, используемые в механике твердых деформируемых тел. – Ленинград, 1971. – 159 с.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА НЕЛОКАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин, И. Ю. Савельева

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Разработке моделей поведения нелокальной среды, учитывающих особенности структуры, посвящено сравнительно немного исследований. В данной работе, используя идею А. К. Эрингена [1, 2] о том, что дальнедействующие силы, которые отвечают за нелокальное поведение материала в данной точке пространства \mathbf{x} , адекватно описываются с использованием функции расстояния $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, убывающей с ростом $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, получены определяющие уравнений, описывающие термомеханические процессы в деформируемом твердом теле. Для этого были введены в рассмотрение эффективная температура Φ и эффективная деформация $\hat{\varepsilon}^{(eff)}$, которые определены следующими соотношениями:

$$\Phi = p_1 T + p_2 T^{(nl)}, \quad \hat{\varepsilon}^{(eff)} = p_1 \hat{\varepsilon} + p_2 \hat{\varepsilon}^{(nl)}. \quad (1)$$

Здесь T – абсолютная температура, $T^{(nl)} = \int_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) T(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$ – нелокальная температура; $\hat{\varepsilon}$ – тензор малой деформации; $\hat{\varepsilon}^{(nl)} = \int_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$ – тензор нелокальной деформации; $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ – функция влияния, определяющая эффект пространственной нелокальности, причем $\int_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' = 1$; $p_1, p_2 \in [0, 1]$ – доли влияния локальных и нелокальных переменных на эффективные переменные, $p_1 + p_2 = 1$.

Соотношения, аналогичные (1) используют в механике деформируемого твердого тела (без учета влияния температуры) при построении нелокальных зависимостей компонент тензора напряжений от тензора деформации [1–3].

Определяющие уравнения в этом случае будут иметь вид [4]

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\Phi C_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^{(eff)} \alpha_{ij}^{(T)} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{(eff)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}), \quad (2)$$

где ρ – плотность материала; c_ε – удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации, q_k – проекции вектора плотности теплового потока на оси Ox_k прямоугольной системы координат, $k = 1, 2, 3$; q_V – объемная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты; C_{ijkl} – компоненты тензора, характеризующего механические свойства тела; $\alpha_{ij}^{(T)}$ – компоненты тензора коэффициентов температурной деформации; $\varepsilon_{kl}^{(T)}$ – компоненты тензора температурной деформации, $\varepsilon_{kl}^{(T)} = \alpha_{kl}^{(T)} \Delta \Phi$. Выражение для вектора плотности теплового потока \mathbf{q} запишем следующим образом:

$$q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \partial \Phi(\mathbf{x}', t) / \partial x'_j, \quad (3)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)}$ – компоненты тензора теплопроводности, обусловленной эффективной температурой.

Определяющие соотношения модели термомеханических процессов в твердом теле можно переписать в терминах абсолютной температуры и локальной деформации, если подставить в (2) соотношения (1) и (3).

Рассмотрим задачу поверхностного нагрева упругого изотропного и однородного тела в одномерной постановке. Для получения уравнений термоупругости и теплопроводности положим, что термомеханическая нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали, а температура и напряжения зависят только от времени и координаты x_1 , направленной по нормали в глубь тела. С учетом постановки задачи соотношения (2) в безразмерных переменных можно привести к следующему виду:

$$R^2 \ddot{\sigma} + R^2 \left[p_1 \ddot{\theta} + p_2 \int_V \varphi(|z' - z|) \ddot{\theta}(z', \bar{t}) dz' \right] = p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \varphi(|z' - z|) \frac{\partial \sigma(z', \bar{t})}{\partial z'} dz', \quad (4)$$

$$(1 + \delta) \left[p_1 \dot{\theta} + p_2 \int_V \varphi(|z' - z|) \dot{\theta}(z', \bar{t}) dz' \right] = p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_V \varphi(|z' - z|) \theta(z', \bar{t}) dz' - \delta \dot{\sigma}, \quad (5)$$

$$z = 0, \quad \sigma(0, \bar{t}) = 0, \quad p_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + p_2 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \varphi(|z' - z|) \theta(z', \bar{t}) dz' = -q_0(\bar{t}),$$

$$q_0(\bar{t}) = M \bar{t}^m \exp(-m\bar{t}), \quad M = m^m / (m - 1)!, \quad m \geq 1;$$

$$z \rightarrow \infty, \quad \sigma(z, \bar{t}) \rightarrow 0, \quad p_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + p_2 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \varphi(|z' - z|) \theta(z', \bar{t}) dz' \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь выбраны следующие безразмерные параметры и переменные:

$$z = x_1 / \sqrt{at_0}, \quad \bar{t} = t / t_0, \quad \theta = (T - T_0) / T^*, \quad D_q^2 = \tau_q / t_0, \quad T^* = At_0^m \sqrt{at_0} / \lambda^{(T)}, \quad a = \lambda^{(T)} / (\rho c),$$

$$R^2 = a\rho / (\lambda + 2\mu) / t_0, \quad \sigma = \sigma_{11} / ((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)} T^*), \quad \delta = ((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)})^2 / T_0 / (\rho c (\lambda + 2\mu)).$$

Параметр связанности δ характеризует изменение температуры вследствие деформирования, для металлов он лежит в пределах 0,01 ... 0,03, для полимерных материалов его значения могут быть значительно выше. В данной работе положим $\delta = 0$.

Численное решение задачи (4)–(6) может быть найдено с помощью конечно-элементной процедуры в форме метода Бубнова-Галеркина.

На рис. 1 в сравнении на качественном уровне представлены распределения абсолютной температуры без учета (сплошная линия) и с учетом (штриховая линия) нелокальности пространства по глубине тела для различных моментов времени (значения у кривых) и долях влияния p_1 и p_2 : а) – $p_1 = 0.75$, $p_2 = 0.25$; б) – $p_1 = p_2 = 0.5$. Функция $\varphi(|z'_1 - z_1|)$ выбрана в виде:

$$\varphi(|z'_1 - z_1|) = \exp(-|z'_1 - z_1| / \bar{a}) / 2\bar{a},$$

где \bar{a} – безразмерная величина пространственного влияния. На рис. 2 представлены распределения напряжений с учетом нелокальности пространства (штриховая линия) и без учета (сплошная линия) при различных значениях R и долях влияния p_1 и p_2 .

Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук, а также в рамках государственного задания по проекту № 1.2640.2014 и по проекту 1712 государственного задания 2014/104.

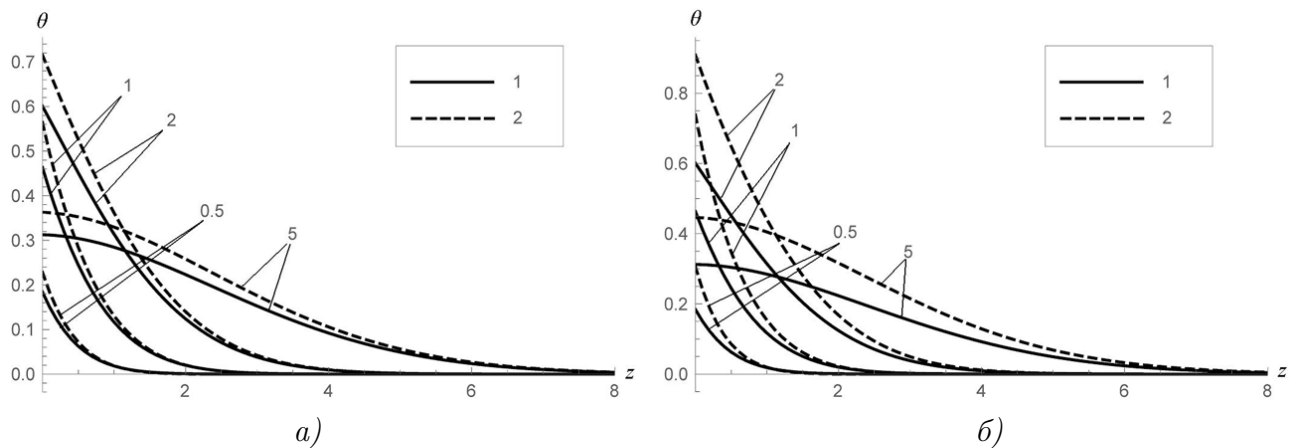


Рис. 1

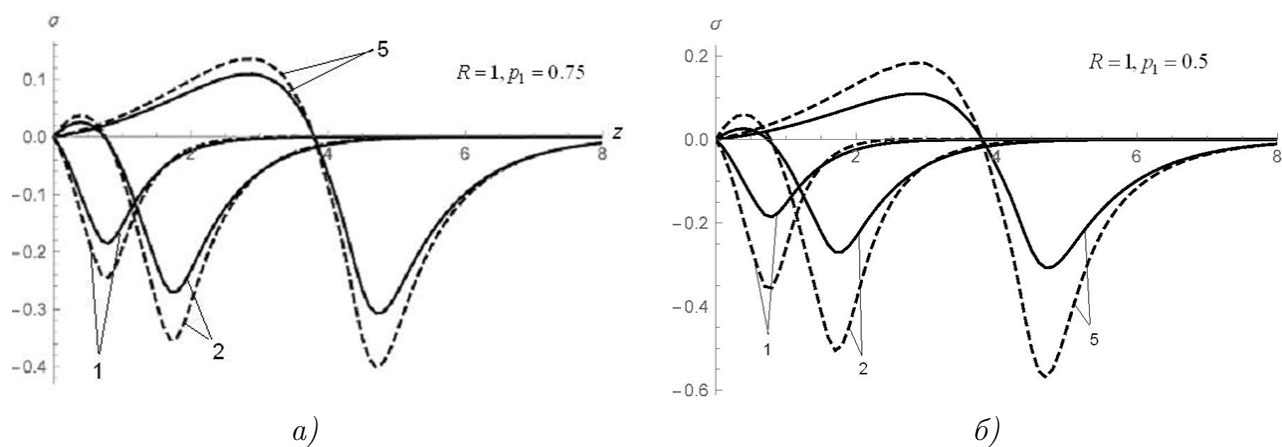


Рис. 2

Литература

1. Eringen A. C. Nonlocal continuum field theories. – New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 393 pp.
2. Pisano A. A, Fuschi P. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension // International journal of Solids and Structures. – 2003. – Pp. 13–23.
3. Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К., Сиодзава К., Танака К. Введение в микромеханику. Пер. с япон. – М. : Металлургия, 1987. – 280 с.
4. Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю. Термомеханическая модель нелокального деформирования твердого тела // Изв. РАН. МТТ. – 2016.– № 3. – С. 20–27.

НЕПРИВОДИМЫЕ СИСТЕМЫ ОБЪЕКТИВНЫХ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы

²Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Теория микрополярных континуумов предоставляет возможность сравнительно точного описания механического поведения нескольких классов материалов, обладающих микроструктурой: жидкие кристаллы, горные породы и гранулированные среды, композиты, кристаллы с несовершенствами в форме дислокаций. В работе в рамках теоретико-полевой схемы [1, 2] ставится и решается проблема построения систем неприводимых тензоров деформации и экстра-деформации микрополярного континуума. Рассматриваются два различных подхода. Первый из них алгебраический, когда тензоры деформации получаются как целые рациональные инварианты (относительно поворотов пространственного координатного триэдра) некоторой системы контравариантных эйлеровых векторов. Второй — основан на полярных разложениях градиентов деформации и экстра-деформации.

1. „Конечная“ деформация континуума определяется преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

положения \mathbf{X} отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} пространства. В микрополярных средах она сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных полярных d -векторов [3] \mathbf{d}_a (индексом a нумеруются различные векторы), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (2)$$

Система пространственных полярных d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается „нежесткой“.

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} (и соответствующие позиционные координаты X^α , x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума. Деформация и экстра-деформация, представленные в координатах X^α , x^j , имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \quad (3)$$

$$d_a^j = d_a^j(X^\alpha, t). \quad (4)$$

Необходимо различать две метрики: отсчетную (лагранжеву) метрику ${}^l g_{\alpha\beta}$ и пространственную (эйлерову) метрику g_{ij} . Вторая из них является внешней по отношению к континууму и определяется по существу вложением континуума во внешнее пространство. Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и, в отличие от метрик ${}^l g_{\alpha\beta}$ и g_{ij} , определяется деформацией (1):

Обратным штрихом слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$$\backslash \mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ вычисляется с помощью градиента деформации и эйлеровой g_{ij} метрики согласно следующей формуле:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \quad (5)$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы x^j . Последнее справедливо и для отсчетной метрики $\backslash g_{\alpha\beta}$, поскольку

$$\backslash g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha \backslash x^i)(\partial_\beta \backslash x^j). \quad (6)$$

2. Один из способов построения тензоров деформации и экстра-деформации микрополярного континуума можно охарактеризовать как алгебраический, поскольку он опирается на теорию алгебраических инвариантов (см., например: Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.). В рамках указанного подхода (см. [4]) тензоры деформации получаются как целые рациональные инварианты относительно поворотов эйлеровой координатной системы следующей системы контравариантных эйлеровых векторов:

$$\partial_\alpha x^i, \quad d_\alpha^j, \quad \partial_\beta d_\alpha^j. \quad (7)$$

При этом следует рассматривать только такие инварианты, которые в действительности рационально зависят от градиента деформации $\partial_\alpha x^i$, трактуемого как система контравариантных эйлеровых векторов.

Можно показать, что неприводимая система целых рациональных инвариантов системы векторов (7) состоит из следующих инвариантных относительно поворотов эйлеровой координатной системы лагранжевых тензоров и векторов:

$$\begin{aligned} &g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \\ &g_{ij}(\partial_\alpha x^i)d_\alpha^j, \\ &g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_\alpha^j). \end{aligned} \quad (8)$$

Первый из перечисленных тензоров является метрическим тензором конвективной метрики.

3. Неприводимые инвариантные относительно поворотов эйлеровой координатной системы тензоры деформации могут быть построены также и другим способом. Он связан с полярным разложением градиента деформации $(\partial_\alpha x^i)$ ($i, \alpha = 1, 2, 3$) и референциальных градиентов микрополярных директоров $(\partial_\alpha d_\alpha^i)$ ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$).

Известно, что градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительного и положительно определенного тензора второго ранга $|x|_{\alpha\beta}$ ($|x|_{\alpha\beta} > 0$) и ортогонального тензора $\lambda^{i\beta}$:

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}. \quad (9)$$

Положительный тензор $|x|_{\alpha\beta}$ называется модулем градиента деформации, тензор $\lambda^{i\beta}$ — тензором поворота.

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ выражается следующими соотношениями:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \quad (10)$$

ортогональность тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ подразумевает выполнение следующих двух условий:

$$\begin{aligned} g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} &= \backslash g^{\beta\gamma}, \\ \backslash g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} &= g^{ij}. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия (11), как нетрудно видеть, эквивалентны, поскольку одно из них следует из другого. Если совершить поворот произвольного вектора $\backslash a_\alpha$ из отсчетного положения в актуальное $a^i = \lambda^{i\alpha}\backslash a_\alpha$, то указанные условия гарантируют совпадение длины вектора $\backslash a_\alpha$, вычисленной с помощью отсчетной метрики, с длиной вектора a^i , вычисленной с помощью эйлеровой метрики, т.е. выполнение равенства

$$\backslash g^{\beta\gamma}\backslash a_\beta\backslash a_\gamma = g_{ij}\lambda^{i\beta}\backslash a_\beta\lambda^{j\gamma}\backslash a_\gamma;$$

если выполняется обратный поворот вектора a_s из актуального положения в отсчетное $\backslash a^\alpha = \lambda^{s\alpha}a_s$, то совпадают длины векторов a_s (в эйлеровой метрике) и $\backslash a^\alpha$ (в отсчетной метрике):

$$g^{ij}a_i a_j = \backslash g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}a_i\lambda^{j\gamma}a_j.$$

В частности, вычисляя длины векторов $d_j\lambda^{j\beta}$ в отсчетной метрике $\backslash g_{\beta\gamma}$, имеем:

$$\backslash g_{\beta\gamma}d_i\lambda^{i\beta}d_j\lambda^{j\gamma} = g^{ij}d_i d_j,$$

где величина справа есть длина d -директора с указателем \mathbf{a} в эйлеровой метрике.

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ обеспечивает вещественность его спектра. Спектральные значения $|x|_A$ ($A = 1, 2, 3$) вычисляются как корни характеристического уравнения:

$$\det(|x|_{\alpha\beta} - \lambda\backslash g_{\alpha\beta}) = 0$$

и называются главными растяжениями.

Собственные векторы модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$, которые мы будем обозначать через $\backslash k_A^\beta$ ($A = 1, 2, 3$), образуют ортонормированный в отсчетной метрике $\backslash g_{\alpha\beta}$ триэдр

$$\backslash g_{\alpha\beta}\backslash k_A^\beta\backslash k_C^\beta = \delta_{AC},$$

определяющий отсчетные ориентации главных осей деформации.

Актуальная ориентация главных осей деформации определяется в результате поворота триэдра $\backslash k_A^\beta$ ($A = 1, 2, 3$):

$$k_A^s = \lambda^{s\beta}\backslash k_A^\beta.$$

Векторы k_A^s ($A = 1, 2, 3$) взаимно ортогональны в эйлеровой метрике g_{ij} .

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$, таким образом, представляет собой композицию последовательно выполняемых чистой деформации (растяжений относительно трех взаимно ортогональных

главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота отсчетного триэдра главных осей деформации до их актуального положения.

Все сказанное выше относится и к референциальным градиентам микрополярных директоров $(\partial_\alpha d_\alpha^i)$ ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$). Полярные разложения градиентов директоров d_α^i ($\mathbf{a} = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\partial_\alpha d_\alpha^i = |d|_{\alpha\beta} |d|_{\alpha\beta} \lambda_\alpha^{i\beta}, \quad (12)$$

где тензоры $|d|_{\alpha\beta}$ симметричны и положительны, а „тензоры поворота“ $\lambda_\alpha^{i\beta}$ ортогональны.

Тензоры $|x|_{\alpha\beta}$ и $|d|_{\alpha\beta}$, очевидно, инвариантны относительно поворотов эйлеровой координатной системы. С тем, чтобы получить полную систему к ним следует добавить следующие ротационно-инвариантные внутренние произведения (обязательно содержащие множитель $\lambda^{i\beta}$):

$$g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}. \quad (13)$$

Рассмотрим контравариантный отсчетный вектор $g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta}$. Очевидно, что он получается в результате обратного поворота актуального положения d -директора с указателем \mathbf{a} в некоторое отсчетное положение, вообще говоря, отличающееся от такового, определяемого вектором $\backslash d_\alpha^\beta$. По этой причине нам придется ввести специальное обозначение

$$\backslash e_\alpha^\beta = g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta}, \quad (14)$$

для инвариантного относительно поворота эйлеровой координатной системы отсчетного вектора.

Второй из перечисленных в (13) ротационно-инвариантных тензоров в силу ортогональности тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ в точности совпадает с отсчетной метрикой:

$$\backslash g^{\beta\gamma} = g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}. \quad (15)$$

В силу того, что тензор $|d|_{\alpha\beta}$ никак не связан с градиентом деформации, его следует включить в один тензоров из (13), например, в третий из них:

$$|d|_{\beta\zeta} g_{ij} \lambda^{i\gamma} \lambda^{j\zeta}. \quad (16)$$

Наконец, установим связь между двумя данными выше системами ротационно-инвариантных относительно поворота эйлеровой координатной системы тензоров. Можно утверждать, что каждая из них выражается в терминах другой; для обоснования этого утверждения достаточно учесть следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g_{ij} |x|_{\alpha\sigma} |x|_{\beta\kappa} \lambda^{i\sigma} \lambda^{j\kappa} &= \backslash g^{\sigma\kappa} |x|_{\alpha\sigma} |x|_{\beta\kappa}, \\ g_{ij} |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta} d_\alpha^j &= |x|_{\alpha\beta} d_\alpha^j \lambda^{j\beta}, \\ g_{ij} |x|_{\alpha\sigma} \lambda^{i\sigma} |d|_{\beta\gamma} \lambda^{j\gamma} &= |x|_{\alpha\sigma} |d|_{\beta\gamma} g_{ij} \lambda^{i\sigma} \lambda^{j\gamma}. \end{aligned} \quad (17)$$

Литература

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.

2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.

3. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d -тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 2, Ч. 1. – С. 60–68.

4. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – №1 (34). – С. 66–85.

СОБСТВЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НАРАЩИВАНИИ УПРУГОГО ПОЛУШАРА

К. Г. Койфман

*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлунского РАН, г. Москва
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана*

В природе и технике встречаются процессы, сопровождающиеся увеличением размеров и изменением формы твёрдых тел за счёт притока к ним дополнительного материала. При этом, возникают несовместные деформации и соответствующие им собственные напряжения. Для иллюстрации такого эффекта, в настоящей работе рассмотрена модельная задача о наращивании упругого полушара в поле силы тяжести.

Процесс деформирования происходит в физическом пространстве E , которое считается трехмерным евклидовым точечным пространством с ассоциированным векторным пространством V . В пространстве E введена фиксированная декартова координатная система с правым ортонормированным репером $\{i, j, k\}$ и началом в точке o . Через I обозначается единичный тензор (второго ранга), а через $u \cdot v$ и $u \otimes v$ – соответственно, внутреннее и тензорное произведения векторов $u, v \in V$. Величина $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ есть евклидова норма вектора u . Основные определения тензорных операций в евклидовом пространстве считаются известными [1]. Далее под полушаром с центром в o радиуса R понимается точечное множество

$$H_R = \{p \in E \mid \|x(p)\| < R, x(p) \cdot k > 0\},$$

где $x : p \mapsto x(p)$ – поле векторов места в E .

Зафиксируем плоскость, ортогональную вектору k и содержащую точку o (рис. 1). В пространстве определено поле силы тяжести, определяемое ускорением свободного падения g (постоянная величина), которое направлено перпендикулярно данной плоскости.

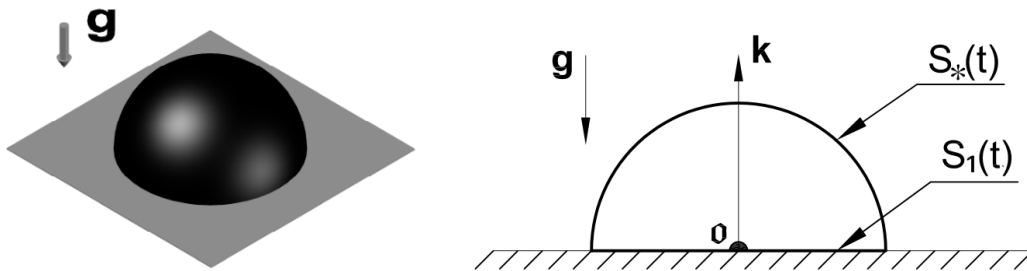


Рис. 1. Формируемый полушар $H_{R(t)}$ с границей $\partial H_{R(t)} = S_*(t) \cup S_1(t)$

Процесс наращивания происходит следующим образом. С момента времени $t = 0$ к точке o присоединяются частицы, формирующие вокруг неё твёрдый деформируемый упругий полушар, занимающий область $H_{R(t)}$ с границей $\partial H_{R(t)} = S_*(t) \cup S_1(t)$ и увеличивающийся со временем в размерах (рис. 1). Присоединяемые частицы свободны от напряжений и скорость их присоединения к телу нулевая. Процесс наращивания является непрерывным, граница роста [2, 3] – полусфера $S_*(t)$ с заданным законом изменения радиуса $R : t \mapsto R(t)$, который представлен гладкой и возрастающей по времени функцией на отрезке наблюдения $[0, t_1]$, где $t_1 > 0$. Поверхность $S_1(t)$ – граница между наращиваемым телом и плоскостью.

Предполагается, что полушар сделан из упругого изотропного и однородного материала, градиенты перемещения и скорости малы по норме, процесс деформирования квазистатический, а в точках прикосновения тела с плоскостью отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения.

Для определения собственных напряжений необходимо к полю тензора напряжений \mathbf{T} прибавить поле тензора напряжений \mathbf{T}^* , получаемое из решения задачи о деформировании полушара $H_{R(t)}$, стоящего на гладком жёстком основании, с нулевыми напряжениями на сферической границе и плотностью массовых сил равной $-\mathbf{g}$. В этой задаче время - вещественный параметр. В силу ограничений на объем работы, указаны лишь основные этапы, необходимые для получения тензора собственных напряжений $\mathbf{T}_{\text{res}} = \mathbf{T} + \mathbf{T}^*$.

Использовалась сферическая система координат (r, θ, φ) , определяемая соотношением

$$\mathbf{x} = r(\mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta),$$

где $r = \|\mathbf{x}\| \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Через \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ обозначается физический базис сферической системы координат [1].

Принятые допущения в совокупности с методами, изложенными в [2, 3], приводят к следующей краевой задаче в скоростях:

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad p \in H_{R(t)},$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} \Big|_{S_*(t)} = \rho \frac{R'_t}{\mu} \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta \Big|_{S_1(t)} = 0, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \Big|_{S_1(t)} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{v} : (r, \theta, t) \mapsto \mathbf{v}(r, \theta, t)$ - поле скоростей точек полушара, ρ - объемная плотность, μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}$, \mathbf{T} - тензор напряжений. Время t - вещественный параметр.

Задача (1) является осесимметричной. Она решалась путем сведения к эквивалентной задаче для шара. По найденному, с использованием представления Буссинеска-Папковича-Нейбера, полю \mathbf{v} определялся тензор \mathbf{S} , из которого, с учётом формулы $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$ и условия отсутствия напряжений в присоединяемых слоях, определялся искомым тензор \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}(r, \theta, t) = \int_{R^{-1}(r)}^t \mathbf{S}(r, \theta, \xi) d\xi.$$

Тензор \mathbf{T}^* определялся из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\mu}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad p \in H_{R(t)},$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}^* \Big|_{S_*(t)} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta \Big|_{S_1(t)} = 0, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{T}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \Big|_{S_1(t)} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{T}^* = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{\mu\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$. Частное решение задачи (2), соответствующее объемным силам, может быть определено с использованием метода, изложенного в [4].

Определив тензоры \mathbf{T} и \mathbf{T}^* , можно найти тензор $\mathbf{T}_{\text{res}} = \mathbf{T} + \mathbf{T}^*$. Для расчётов введены безразмерные переменные $r^\circ = \frac{r}{R(t_1)}$, $R^\circ(t) = \frac{R(t)}{R(t_1)}$, $\mathbf{T}_{\text{res}}^\circ = \frac{\mathbf{T}_{\text{res}}}{\rho g R(t_1)}$. В качестве примера, на рис. 2 показаны распределения нормы тензора $\mathbf{T}_{\text{res}}^\circ$ по радиусу полушара r° при значении $\theta = \frac{\pi}{2}$. Штрихпунктирная линия соответствует $R^\circ = 0.1$, штриховая линия соответствует $R^\circ = 0.5$, а сплошная – $R^\circ = 1$.

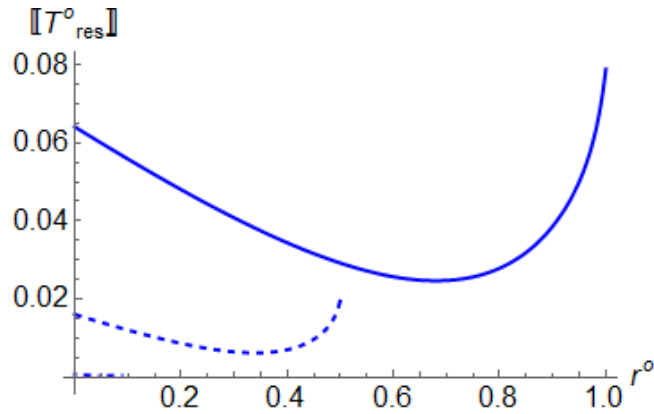


Рис. 2. Распределение нормы $\|\mathbf{T}_{\text{res}}\| = \sqrt{\mathbf{T}_{\text{res}}^\circ : \mathbf{T}_{\text{res}}^\circ}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01280).

Литература

1. Лурье А. И. Теория упругости. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
2. Манжиров А. В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. – 1995. – Т. 59, Вып. 5. – С. 836–848.
3. Манжиров А. В., Черныш В. А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – № 5. – С. 25–37.
4. Бондарева В. Ф. Контактная задача для весомого полушара // Тр. Всерос. науч.-исслед. ин-та физ.-техн. и радиотехн. измерений. – 1974. – С. 3–13.

**НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
В СМЕЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ МЕХАНИКИ**

**К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ МАЛОГО
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОГО ТЕЛА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

В. С. Купцов, А. А. Катрахова

Воронежский государственный технический университет

Пусть основной (невозмущенный) поток удовлетворяет уравнениям вида

$$\frac{\partial U_i^0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^0}{\partial x_i} + \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U_i^0}{\partial x_j^2}; \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U_j^0}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

где t – время, x_j – декартовы координаты, U_i^0 – компоненты вектора скорости, P^0 – давление в жидкости, ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, $i = 1, 2, 3$.

Решение уравнений (1) можно записать в виде разложения поля скоростей с помощью гармонических функций (см. работу [4]). Для поля скоростей и давлений решением конкретной краевой задачи получены конкретные выражения, ввиду громоздкости этих выражений, они в статье не приводятся. Однако, с их помощью получено силовое воздействие на эллипсоид.

Рассмотрим уравнение эллипсоида в системе координат y_i , причем направление осей y_i совпадает с направлением полуосей a_i .

Пусть полуоси эллипсоида подчиняются уравнению

$$a_i = a + \varepsilon(\alpha\delta_{i2} + \delta_{i3})a. \quad (2)$$

где ε – мало, $0 < \alpha < 1$, a – радиус сферы. Уравнение (2) дает возможность рассмотреть эллипсоид, у которого две полуоси мало отличаются от радиуса сферы, δ_{ij} – тензор Кронекера.

Введем новую систему координат $z_i = \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + \varepsilon\alpha\delta_{i2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{i3}\delta_{j3})y_j$.

Тогда уравнение эллипсоида в новой системе координат имеет вид: $z_j z_j = a^2$ (здесь и далее по повторным индексам ведется суммирование). Применяя к уравнениям (1) метод операционного исчисления с учетом (2), и новой системы координат, будем иметь

$$\begin{aligned} (\delta_{kj} + \varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-2} \frac{\partial^2 U_i^{*\text{эл}}}{\partial z_k^2} - \frac{p}{\nu} U_i^{*\text{эл}} &= \frac{1}{\mu} (\delta_{ij} + \varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-1} \frac{\partial P^{*\text{эл}}}{\partial z_k}; \\ (\delta_{kj} + \varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-1} \frac{\partial U_i^{*\text{эл}}}{\partial z_k} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

где p – параметр преобразования Лапласа; $U_i^{*\text{эл}}$, $P^{*\text{эл}}$ – образы компонент поля скоростей и давления в возмущенном эллипсоидом потоке, $\mu = \rho\nu$.

Граничные условия для уравнений (3) имеют вид:

$$U_i^{*\text{эл}}|_{r=a} = 0; \quad U_i^{*\text{эл}}|_{r \rightarrow \infty} = U_i^*(z_m, p), \quad (4)$$

где $r^2 = z_j \cdot z_j$, U_i^* – компоненты образа скорости невозмущенного потока.

Решение уравнений (3) с учетом граничных условия (4) будет:

$$U_i^{*\text{эл}} U_i^{*c}(z_m, p) + \varepsilon V_i^{*\text{эл}}(z_m, p) + \dots; \quad P^{*\text{эл}} = P^{*c}(z_m, p) + \varepsilon P^{*1}(z_m, p) + \dots \quad (5)$$

Нулевое приближение задачи согласно (5) будет обтекание сферы неустановившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости. Первое приближение:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V_i^{*\text{эл}}}{\partial z_j^2} - \frac{P}{v} V_i^{*\text{эл}} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P^{*1}}{\partial z_i} + (\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) \left(2 \frac{\partial^2 U_i^{*c}}{\partial z_j^2} - \frac{\delta_{ij}}{\mu} \frac{\partial P_B^{*\text{эл}}}{\partial z_k} \right);$$

$$\frac{\partial V_j^{*\text{эл}}}{\partial z_j} - (\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j} = 0. \quad (6)$$

Граничные условия

$$V_i^{*\text{эл}}|_{r=a} = 0; \quad U_i^{*\text{эл}}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Решение (6) с учетом (7) представим как

$$V_i^{*\text{эл}} = W_i^{*\text{эл}} + (\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j};$$

$$P^{*1} = T^{*1} - (\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial P^{*c}}{\partial z_j}. \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнения (6)–(7), то

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 W_i^{*\text{эл}}}{\partial z_j^2} - \frac{P}{v} W_i^{*\text{эл}} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T^{*1}}{\partial z_i}; \quad \frac{\partial W_j^{*\text{эл}}}{\partial z_i} = 0. \quad (9)$$

где T^{*1} , $W_i^{*\text{эл}}$ – неизвестные функции координат и времени t ; при этом $W_i^{*\text{эл}}$ удовлетворяет $W_i^{*\text{эл}}|_{r=a} = -(\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j}$; $W_i^{*\text{эл}}|_{r \rightarrow \infty} = 0$. Согласно результатам работы [4] имеем для сферы с условием прилипания жидкости на ее поверхности

$$U_i^{*c} = -\frac{v}{p \cdot \mu} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{0,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_i}(\bar{q}, p) - \frac{3z_i z_j}{r^2} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j}(\bar{q}, p) \right\}, \quad (10)$$

где $K_n(r)$ – функция Макдональда дробного порядка; P^* – давление невозмущенного потока; q_j – координаты центра эллипсоида, $\bar{q} = \{q_j\}$. Решение (9) с учетом соответствующих граничных условий будет:

$$W_i^{*\text{эл}} = r^{0,5} K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \left(\frac{p}{v} \right)^{1,25} \left[z_j \frac{\partial}{\partial z_e} \left(\frac{A_m^* z_j z_e}{r^5} \right) - z_e \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{A_m^* z_j z_e}{r^5} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{A_m^* z_m}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z_i} \left[B_j \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \left(\frac{z_j}{r^3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z_i} \left[K_j^0 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \left(\frac{z_i}{r^3} \right) \right] - 3T_j r^{4,5} \left(\frac{p}{v} \right)^{2,25} K_{4,5} \left(r \frac{p}{v} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \left(\frac{z_j}{r^3} \right) \right], \quad (11)$$

где $A_m^* z_j z_e = A_1 z_2 z_3 + A_2 z_1 z_3 + A_3 z_1 z_2$, $i \neq \gamma \neq e$ и образуют перестановку чисел 1, 2, 3; A_j^* , A_j , B_j , T_j , L_j , K_j^0 – постоянные определяются из системы уравнений (4). Они имеют вид: $L_i = T_i/\alpha$, $K_i^0 = B_i/\alpha$, $A_i = -0, 4a^2[(\alpha + 1)\delta_{ij} - 0, 5\alpha \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} - 0, 5 \cdot \delta_{i3}\delta_{j3}]a_i^*$, $A_i^0 = 0, 4[(\alpha + 1)\delta_{ij} - (3, 5 + \alpha) \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} + (1, 5\alpha - 1) \cdot \delta_{i3}\delta_{j3}]a_i^*$, $T_i = \alpha \cdot a_i^*/105a^2n_*$,

$$B_i = (\alpha \cdot a_i^*(m_* + 7a^9n_*))/105a^2n_*, \quad n_* = a^{-4,5} \left(\frac{p}{v} \right)^{2,25} K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right),$$

$$m_* = a^{4,5} \left(\frac{p}{v} \right)^{2,25} \left[\left(1 + \frac{15v}{pa^2} \right) K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + 3 \left(\frac{p}{v} \right)^{-0,5} K_{1,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \right],$$

$$a_i^* = -\frac{1}{2\mu a^2} \left[\alpha \left(\frac{p}{v} \right)^{-0,5} + \frac{v}{p} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_i}(\bar{q}, p).$$

Получены оригиналы поля скоростей и давлений возмущенного течения, которые ввиду громоздкости в данной работе не приведены. Определим силовое воздействие на эллипсоид по формуле

$$F_i^{\text{эл}} = \int_{S_{\text{эл}}} \sigma_{ij} N_j ds, \quad (12)$$

где $S_{\text{эл}}$ – площадь поверхности, N_j – компоненты нормали к данной поверхности, σ_{ij} тензор напряжений возмущенного потока жидкости. Используя нулевое и первое приближение в разложении (5), из (12) получено выражение для силы, действующей на эллипсоид. С учетом зависимости тензора напряжений от скорости и давления в жидкости

$$F_i^{\text{эл}} = F_i^C + F_{i\text{уст}}^{\text{эл}} + \varepsilon \cdot F_i'$$

где F_i^C – компоненты силового воздействия на сферу, помещенную в нестационарный неоднородный поток вязкой несжимаемой жидкости

$$-2\pi a^3 \left\{ \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, t) + \frac{3v}{a^2} \int_0^t \left[1 + a/(v\pi(t - \tau)) \right]^{0,5} \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, \tau) d\tau \right\}, \quad F_{i\text{уст}}^{\text{эл}} - \text{силовое воздействие на эллипсоид, помещенный в установившийся поток неоднородной жидкости}$$

$$F_{i\text{уст}}^{\text{эл}} = 6\pi\mu a U_i^0(\bar{q}, 0) + \pi a^3 \frac{\partial p^0}{\partial x_i}(\bar{q}, 0) +$$

$$2, 4a \cdot \varepsilon [(1 + \alpha)\delta_{ij} - 0, 5\alpha\delta_{i2}\delta_{j2} - 0, 5\delta_{i3}\delta_{j3}] \left(\mu K_j^0(\bar{q}, 0) + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial p^0}{\partial x_j}(\bar{q}, 0) \right) +$$

$$+ 2\pi a^3 \mu \varepsilon (\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) \frac{\partial^2 U_i^0}{\partial x_j^2}(\bar{q}, 0).$$

Первое приближение за счет не стационарности потока:

$$F_i = -0,4\pi a^3 \left\{ [(1 + \alpha)\delta_{ij} - 0,5\alpha \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} - 0,5 \cdot \delta_{i3}\delta_{j3}] \times \right. \\ \times \left[\frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, t) + \frac{4}{a} \left(\frac{v}{\pi}\right)^{0,5} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, \tau) d\tau - \frac{2v}{a^2} \int_0^t \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, \tau) d\tau \right] - \\ \left. -2,5(\alpha \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3}) \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\bar{q}, t) \right\}, \quad p' = p^0 - p^0|_{t=0}.$$

Точность решения задачи для силового воздействия она будет порядка a^3 , для компонент вектора скорости-порядка (a/L) , где L – расстояние от центра эллипсоида до особенностей основного потока.

Литература

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. – М. : Наука, 1973.
2. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М. : Гос. изд. технико-теоретич. литер., 1955.
3. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М. : Мир, 1976.
4. *Купцов В. С.* О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости // В кн: Сб. статей по мех.спл. сред. Труды НИИ-Ма.Воронеж : ВГУ, 1976. – вып. 18.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Н. С. Потапов, А. И. Шашкин

Воронежский государственный университет

Задача плоской деформации для цилиндрической области, нагруженной внешними давлениями, представляет практический интерес. Эта задача для разных моделей рассматривалась многими исследователями, например, [1–3]. Настоящая статья является продолжением работы [4].

Жесткопластическое тело

Для плоского деформированного состояния $\varepsilon_z = 0$ при выборе модели жесткопластического тела в рамках теории течения равенство

$$\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

выполняется для всех гладких и кусочно-гладких условий пластичности вида (\mathbf{s} – девиатор напряжений)

$$f(tr(\mathbf{s}^2), tr^2(\mathbf{s}^3)) = 0, \quad (1)$$

кроме условия Треска [5]. Условие пластичности Треска не позволяет определить осевое напряжение σ_z .

Для условия Треска задача плоской деформации для жесткопластического тела решается, если принять, что

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} = k, \\ \sigma_{\min} &\leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом задача будет статически определимой, если не учитывать неизвестное осевое давление. Если выбирается условие Мизеса, независящее от третьего инварианта девиатора напряжений,

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} &= k, \\ \sigma_z &= (\sigma_x + \sigma_y)/2, \end{aligned} \quad (3)$$

то задача не будет статически определимой, поскольку равенство $\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/3$ является следствием ассоциированного закона.

Упругопластическое тело

Для сжимаемого упругопластического тела при решении задачи Ламе осевое напряжение не всегда может быть средним [6].

Рассмотрим осесимметричный случай. Для цилиндрической области $a \leq r \leq b$, нагружаемой внешним давлением p_b и внутренним давлением p_a при решении задачи Ламе [7]

$$y_{r,u} = A \mp \frac{B}{r^2}, \quad y_z = 2\nu A, \quad A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{b^2 a^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \quad (4)$$

Все функции пластичности вида (1) для напряженного состояния (4) принимают наибольшее значение на границе $r = a$, поэтому пластическая зона будет зарождаться на этой границе.

Пусть в пластической зоне, когда выбирается условие пластичности Треска, реализуется режим

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \kappa 2k, \quad \sigma_{\min} \leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}, \quad k = \text{const}, \quad \kappa = \text{sign}(\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (5)$$

Для этого режима задача «статически определима» только для компонент σ_θ, σ_r .

В рамках теории пластического течения, принимая гипотезу о естественном состоянии, осевая компонента тензора пластических деформаций

$$e_z^p = 0.$$

Учитывая, что для плоской деформации $e_z = e_z^e + e_z^p = 0$, согласно закону Гука осевое напряжение $\sigma_z = \nu(\sigma_\theta - \sigma_r)$, поэтому в пластической зоне, где выполняется режим (5), имеем

$$\sigma_r = 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a, \quad \sigma_\theta = 2k + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a, \quad \sigma_z = 2\nu \left(k + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a \right). \quad (6)$$

Упругие деформации, соответствующие напряжениям (6), определяются по формулам

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\theta^e &= (1 + \nu) \left((1 - 2\nu) \left(k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a \right) + (1 - \nu)k \right), \\ E\varepsilon_r^e &= (1 + \nu) \left((1 - 2\nu) \left(k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a \right) - \nu k \right), \quad E\varepsilon_z^e = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассматривая $\sigma_\theta - \sigma_r$ в качестве пластического потенциала, получаем

$$\varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p = 0,$$

поэтому радиальное перемещение в пластической зоне будут определяться из решения уравнения

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e.$$

Учитывая (7), получаем

$$\begin{aligned} Eu &= \frac{C}{r} + r(1 + \nu)(1 - 2\nu) \left(2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a \right), \\ E\varepsilon_\theta &= \frac{C}{r^2} + (1 + \nu)(1 - 2\nu) \left(2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a \right), \\ E\varepsilon_r &= -\frac{C}{r^2} + (1 + \nu)(1 - 2\nu) \left(2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) - p_a + 2k \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7), (8) находим, что

$$E\varepsilon_r^p = -E\varepsilon_\theta^p = -\frac{C}{r^2} + 2k(1 - \nu^2).$$

Из того, что на упругопластической границе $r = c$ пластические деформации равны нулю, следует

$$C = 2k(1 - \nu^2)c^2.$$

Решение (6) справедливо в области [8]

$$a \leq r \leq r_1 = a \exp\left(\frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{p_a}{2k}\right).$$

На границе $r = r_1$ выполняется равенство

$$\sigma_r = \sigma_z = \frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

а это возможно, если на внешнем контуре $r = b$ задано растягивающее усилие.

Из формулы

$$r_1 = a \exp\left(\frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{p_a}{2k}\right) \quad (9)$$

следует, что режим (6) в пластической области не реализуется, когда давление на внутреннем контуре

$$p_a < -\frac{2\nu k}{1-2\nu}.$$

На рис. 1 показано распределение максимальных касательных напряжений для напряженного состояния (6).

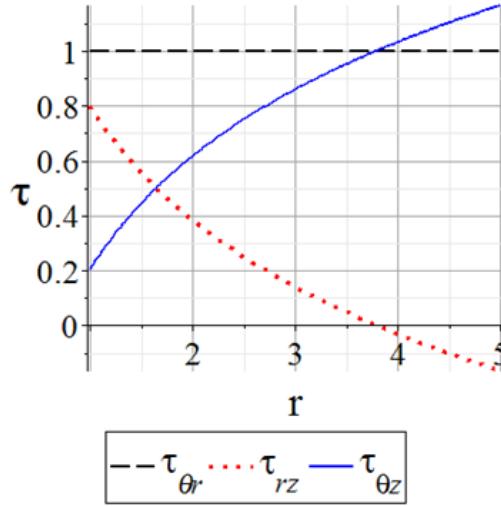


Рис. 1. $k = 0.5$, $\nu = 0.2$, $p_a = 1$

Переход упругого состояния в пластическое, когда выбирается условие Треска, при фиксированных значениях параметров a , b , k , ν зависит от значений давлений p_a , p_b [4, 9].

Рассмотрим условие пластичности Треска. Для режима

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_z \leq 2k, \\ \sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \\ \sigma_z - \sigma_r \leq 2k, \end{cases}$$

выбирая зависимость p_a от p_b , получаем

$$p_a = p_b + 2k \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

и интервал допустимых значений для p_b

$$2k \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{1-2\nu}\right) \leq p_b \leq 2k \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{1-2\nu}\right).$$

О режиме полной пластичности

В пластической зоне на границе $r = r_1$ происходит смена режимов. На границе $r = r_1$

$$\sigma_\theta = 2k + 2k \ln \left(\frac{r_1}{a} \right) - p_a, \quad \sigma_r = 2k \ln \left(\frac{r_1}{a} \right) - p - a, \quad \sigma_z = 2\nu \left(k + 2k \ln \left(\frac{r_1}{a} \right) - p_a \right).$$

Если $r_1 < b$, то режим полной пластичности

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_r = 2k \\ \sigma_\theta - \sigma_z = 2k, \end{cases} \quad (11)$$

не может выполняться в некоторой кольцевой области $r_1 \leq r \leq r_2$. Ассоциированный с режимом (11) закон пластического течения дает (после интегрирования)

$$\varepsilon_\theta^p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \varepsilon_r^p = -\lambda_1, \quad \varepsilon_z^p = -\lambda_2.$$

Поскольку $E\varepsilon_z = 0$, то в пластической зоне $E\varepsilon_z^p = -E\varepsilon_z^e = -\lambda_2$,

$$E\varepsilon_z^p = 2k \left(\nu - (1 - 2\nu) \left(\ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{p_a}{k} \right) \right), \quad (12)$$

На упругопластической границе $r = c$ компонента $e_z^p = 0$. Из (12) находим

$$c = a \exp \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} + \frac{p_a}{2k} \right). \quad (13)$$

Сравнивая (13) и (9), получаем $c = r_1$, то есть режим полной пластичности может выполняться только при $r = r_1$.

О смене режима пластического состояния

Если $r_1 < b$, то при выполнении режима

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_z = 2k, \\ \sigma_\theta - \sigma_r \leq 2k, \\ \sigma_r - \sigma_z \leq 2k, \end{cases} \quad (14)$$

для определения напряженного состояния необходимо рассмотреть все уравнения, определяющие модель [10, 11].

Для режима (14)

$$\sigma_\theta = m(r^{m-1}C_1 - r^{-m-1}C_2) + \frac{2k}{1 - 2\nu}, \quad \sigma_r = r^{m-1}C_1 + r^{-m-1}C_2 + \frac{2k}{1 - 2\nu},$$

$$\sigma_z = m(r^{m-1} - r^{-m-1}C_2) + \frac{4k\nu}{1 - 2\nu}.$$

На рис. 2 приведено распределение напряжений в пластической зоне.

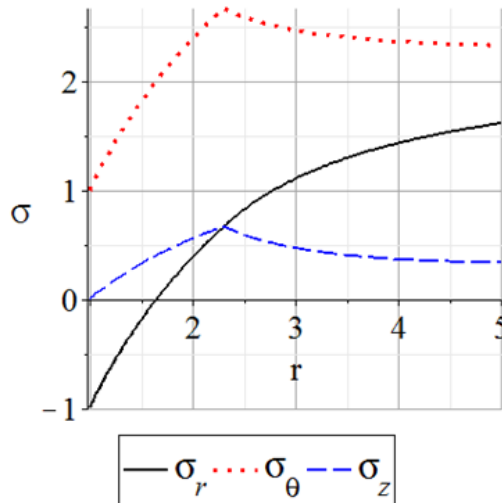


Рис. 2. $a = 1$, $c = b = 5$, $k = 1$, $\nu = 0.2$, $p_a = 1$

Выводы

При рассмотрении осесимметричной упругопластической задачи для случая плоской деформации учет упругой сжимаемости при определенном выборе давлений, действующих на боковые поверхности цилиндрической области, позволяет реализовать любой режим кусочно-линейных условий пластичности. При этом режимы, соответствующие сингулярным точкам кривой пластичности, не реализуются. Аналогичные задачи для плоского напряженного состояния рассматривались в работе [12].

Литература

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
2. Kollmann F. G. Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter Querpressverbinde // Forsch. Ing.-Wes. – 1978, № 44. – Р. 1–11.
3. Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. – 1986, № 61. – Р. 1–14.
4. Артемов М. А., Барановский Е. С., Шашкин А. И. Об одной нестандартной краевой задаче // Механика предельного состояния и смежные вопросы. Материалы всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. – 2015. – С. 118–122.
5. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Следствия нормального закона пластического течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 9. – С. 145–147.
6. Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
7. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М. : Наука, 1965. – 856 с.
8. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.

9. *Артемов М. А., Якубенко А. П.* К задаче Ламе // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 11–13.

10. *Артемов М. А., Ларин И. А.* Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 7. – С. 39–42.

11. *Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П.* Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 5. – С. 126–128.

12. *Артемов М. А., Потапов Н. С.* Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле в случае плоского напряженного состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 8. – С. 25–29.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МАТЕРИАЛАХ СБОРКИ, ФОРМИРУЕМОЙ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ

А. А. Буренин^{1,2}, А. В. Ткачева¹, Г. А. Щербатюк²

¹*Институт машиностроения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре*

²*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет*

Технология горячей посадки была введена в промышленное производство стволов крупнокалиберных артиллерийских систем блистательным инженером, экстраординарным академиком Петербургской академии наук Гадолиным А. В. (1828–1892). С тех пор данная технология, благодаря своей незамысловатости в производстве и способности обеспечить в соединении требуемые прочностные свойства, получила широкое распространение в различных отраслях машиностроения и промышленного строительства. Действительно, что может быть проще? Охватываемую цилиндрическую деталь охлаждают или оставляют при комнатной температуре, а охватывающую (размерно подготовленную) нагревают до требуемой температуры и помещают над первой. В процессе охлаждения на воздухе и формируется требуемый натяг.

Нормативные документы по осуществлению данной технологической операции [1] до настоящего времени основаны на теории температурных напряжений. Однако, для исключения возможного необратимого (пластического) деформирования весомых аргументов (кроме упростить вычисления) предложений не находится. Учет возможных пластических течений существенно усложняет задачу. Упрощению вычислений служит также использование кусочно-линейных пластических потенциалов, классическим примером которых является условие максимальных касательных напряжений (критерий Треска – Сен-Венана). На такой основе задача горячей посадки, простейшая по постановке задача теории температурных напряжений, рассматривалась неоднократно. В случае плоского напряженного состояния, например в [2, 3], в условиях плоского деформируемого состояния в [4]. В последнем случае рассмотрение произведено особо тщательно и оказалось, что возникающая область пластического течения в свою очередь разделяется на части, в которых течение подчинено разным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряжённых состояний разным граням и ребру поверхности нагружения (призмы Треска). Уже завершившееся пластическое деформирование в условиях дальнейшего остывания сборки возникает вновь (повторное пластическое течение) и так до полного остывания сборки. На некоторые из подобных качественных эффектов деформирования указывал еще в середине прошлого столетия Д. Бленд [5].

Уже отмечалось, что использование кусочно-линейного условия пластичности Треска значительно упрощает алгоритмы расчетов, изменяющихся во времени и с температурой температурных напряжений, поскольку позволяет на каждом временном шаге расчетов записать конечные зависимости между искомыми параметрами (проинтегрировать уравнения равновесия). Однако, как и замечалось, возникает задача алгоритмического отслеживания момента и места зарождения пластического течения и дальнейшего продвижения границы раздела пластических областей на части, также как и упругопластических границ. Упрощения здесь возможно достичь, если вместо условия пластичности Треска использовать условия максимальных приведённых касательных напряжений (критерий Ишлинского – Ивлева). Связаны также упрощения с проявляющимся здесь замечатель-

ным свойством условия пластичности Ишлинского – Ивлева. Если в призме Треска переход напряженных состояний с одной грани на другую через соответствующее ребро порождает область течения в состоянии полной пластичности (на ребре призмы), то течения на ребре призмы Ивлева не происходит. В этом случае осуществляется мгновенный перескок в напряженных состояниях на иную грань. Отсутствие в таком случае аналогов состояний полной пластичности сокращает число разбиений области пластического течения и, следовательно, упрощает алгоритмы расчетов. В этом состоит самое заметное, но не единственное преимущество в использовании в качестве поверхности нагружения призмы Ивлева. Здесь проведем сравнения результатов расчетов, приведенных в [4] для условия максимальных касательных напряжений (призмы Треска) и полученных с использованием условия приведенных касательных напряжений (призма Ивлева). Постановку задачи здесь приводить не станем; она вполне аналогично постановке принятой в [4]. Отличие заключается только в использованном условии пластичности. Вместо условия

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad (1)$$

принимаем

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (2)$$

В (1), (2) σ_i – главные напряжения. Зависимость предела текучести k задаём в форме

$$k(T) = k(r.t) = k_0 \frac{(T_p - T(r.t))^2}{(T_p - T_0)^2}. \quad (3)$$

Здесь $k_0 = \text{const}$ – предел текучести материала при комнатной температуре T_0 , T_p – температура плавления.

Размеры настоящей заметки заставляют ограничиться в обсуждаемом сравнении только одним расчетном моментом времени. Выберем в качестве такого момент полного остывания сборки и сравним натяг и распределения остаточных напряжений. Последние представлены на рисунке, где по оси абсцисс отложена безразмерная пространственная координата (R_2 – внешний радиус насаживаемой муфты), а по оси ординат безразмерные, отнесённые к k_0 , напряжения. Прежде всего замечаем, что натяг не зависит от выбора кусочно-линейного пластического потенциала; он одинаков с точностью до ошибок вычисления в обоих рассмотренных случаях. Распределения напряжений по материалам сборки совершенно размеренное. Отметим, что рисунок указывает существование двух разных зон пластического течения (границы зон пластического течения отмечены вертикальными штриховыми линиями): зоны течения с условиями грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ (2–3) ребра $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$ (1–2) призмы Треска. В тех же условиях при использовании условий пластичности максимального приведенного касательного напряжения (призма Ивлева) область течения единственная и соответствует грани $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = -4k$ призмы Ивлева. Данное обстоятельство позволяет рекомендовать в качестве нормативного расчета операции посадки именно расчеты согласно критерию Ишлинского – Ивлева, поскольку в этом случае расчеты существенно сокращаются.

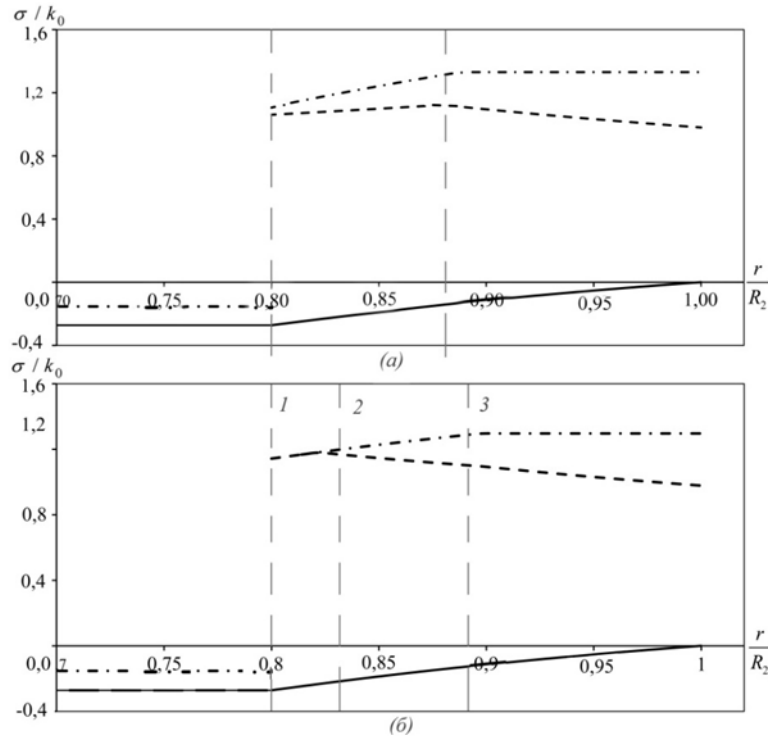


Рис. Сравнение распределений остаточных напряжений на сборке:
 а) – условие Ишминского – Ивлева, б) – условие Треска – Сен-Венана

Литература

1. Берникер Е. И. Посадка с натягом в машиностроении. – Ленинград : Машиностроение, 1966. – 168 с.
2. Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. – Vol. 40, №. 2. – 1996. – pp. 103–112.
3. Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния. – 2014. – №4(22). – С. 204–213.
4. Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния. – 2015. – № 4(26). – С. 162–178.
5. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4. – P. 209–229.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННОГО МОДУЛЯ БИО ПОРОУПРУГОЙ ТРУБЫ

А. О. Ватульян, В. В. Дударев, Р. М. Мнухин

Южный федеральный университет, Владикавказский научный центр РАН

В настоящее время теория пороупругости приобретает все более широкое прикладное значение. В рамках этой теории можно описывать поведение многих биологических и искусственных объектов [1-4]. При этом важное значение играет точность задания параметров в определяющих соотношениях выбранной модели. Согласно наиболее распространенной линейной теории Био уравнения, описывающие движение пороупругого тела, имеют вид [1,2]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\lambda \text{tr} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{I}} + \mu \left(\nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}})^T \right) - A p \underline{\underline{I}} \right) = \rho \frac{\partial^2 \underline{\underline{u}}}{\partial t^2}, \\ -\nabla \cdot (K \nabla p) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi^2 p}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial t} A \nabla \cdot \underline{\underline{u}} = 0, \end{cases}$$

где ρ – плотность тела, λ, μ – параметры Ламе, $\underline{\underline{u}}$ – вектор перемещений, p – внутрипоровое давление, R – гидростатическая константа, ϕ – пористость, K – коэффициент проницаемости среды, A – модуль Био.

В качестве конкретного объекта рассмотрим пороупругую трубу, находящуюся в режиме установившихся радиальных колебаний, внутренний радиус равен $r_1 > 0$, внешний r_2 . Колебания вызываются действием внешней нормальной нагрузки, имеющей амплитуду p_0 и частоту ω . Принимая $p(r, t) = P(r)e^{-i\omega t}$, радиальное смещение $u_r(r, t) = U(r)e^{-i\omega t}$, в условиях плоской деформации можно перейти к постановке задачи, записанной в виде безразмерной канонической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} p'(\xi) = -\frac{H_\xi(\xi)}{K(\xi)}, \\ H'_\xi(\xi)\theta = -\frac{H_\xi(\xi)}{\xi}\theta + i\kappa\beta a(\xi) \left(u'(\xi) + \frac{u(\xi)}{\xi} \right) + i\kappa p(\xi)\eta, \\ u'(\xi) = y(\xi) + \beta a(\xi)p(\xi) - c_2 \frac{u(\xi)}{\xi}, \\ y'(\xi) = c_1 \left(\frac{u(\xi)}{\xi^2} - y(\xi) - \beta \frac{a(\xi)p(\xi)}{\xi} + c_2 \frac{u(\xi)}{\xi^2} \right) - \kappa^2 u(\xi), \\ p(\xi_0) = 0, \\ p(1) = 0, \\ y(\xi_0) = 0, \\ y(1) = p_*, \end{cases} \quad (1)$$

где введены следующие безразмерные функции и параметры: $\xi = r/r_2$, $P(r) = P^*p(\xi)$, $K(r) = K_0K(\xi)$, $H(r) = K_0P^*/r_2H_\xi(\xi)$ – поток, $U(r) = r_2u(\xi)$, $A(r) = A^*a(\xi)$, $(\lambda + 2\mu)y(\xi) = (\lambda + 2\mu)U' + \lambda U(r)/r - A(r)P(r)$ – функция обобщенного напряжения,

$$\xi_0 = r_1/r_2, \theta = \frac{P^*K_0\sqrt{\rho r_2^2}}{r_2^2(\lambda + 2\mu)^{3/2}}, \eta = \frac{\phi^2 P^*}{R(\lambda + 2\mu)}, \beta = \frac{A^*P^*}{\lambda + 2\mu}, \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{\lambda + 2\mu}, c_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu},$$

$$c_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, p_* = \frac{p_0}{\lambda + 2\mu}.$$

Решение задачи (1) об определении функций $u(\xi)$ и $p(\xi)$ при заданных законах, характеризующих неоднородные свойства трубы, реализовано численно с помощью метода пристрелки. Следует отметить, что описанное обезразмеривание позволило существенно повысить точность реализации численной схемы. Проведенные расчеты показали влияние функции $a(\xi)$ и параметра A^* на амплитудно-частотную характеристику, измеренную на внешней границе, и первые резонансные значения параметра κ .

Рассмотрим обратную задачу об определении функции распределения модуля Био $a(\xi)$ по данным о функции смещения на внешней границе трубы $f(1, \kappa)$, заданной в диапазоне частот $\kappa \in [\kappa^-, \kappa^+]$. Перепишем постановку задачи (1) относительно функций смещения $u(\xi)$ и давления $p(\xi)$ в виде:

$$\begin{cases} \xi u''(\xi) + u'(\xi) - \frac{u(\xi)}{\xi} - \beta \xi (a'(\xi)p(\xi) + a(\xi)p'(\xi)) + \kappa^2 \xi u(\xi) = 0 \\ (-K(\xi)p'(\xi))' \cdot \theta \xi - K(\xi)p'(\xi) \cdot \theta - i\kappa\beta a(\xi)(u'(\xi)\xi + u(\xi)) - i\kappa p(\xi) \cdot \xi \eta = 0 \\ p(\xi_0) = 0 \\ p(1) = 0 \\ \xi_0 u'(\xi_0) + c_2 u(\xi_0) - \xi_0 \beta a(\xi_0) p(\xi_0) = 0 \\ u'(1) + c_2 u(1) - \beta a(1) p(1) = p^* \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда следует, что сформулированная обратная задача представляет собой нелинейную задачу об отыскании тройки функций $a(\xi)$, $p(\xi)$ и $u(\xi, \kappa)$. Для построения решения воспользуемся процедурой линеаризации:

$$a(\xi) = a_0(\xi) + \varepsilon a_1(\xi), \quad u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi), \quad p(\xi) = p_0(\xi) + \varepsilon p_1(\xi),$$

где ε – формальный параметр. Подставив эти представления в (2) можно выписать две задачи, соответствующие нулевой и первой степеням параметра ε . Далее используя аналогичную технику [3,4], получим искомое операторное соотношение в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции поправки модуля Био $a_1(\xi)$:

$$\int_{\xi_0}^1 2\beta p_0(\xi) (\xi u_0(\xi, \kappa))' a_1(\xi) d\xi = p^*(f(1, \kappa) - u_0(1, \kappa)), \quad \kappa \in [\kappa^-, \kappa^+], \quad (3)$$

здесь $u_0(1, \kappa)$ и $p_0(\xi)$ – соответственно смещение и давление, полученные из численного решения прямой задачи (1) при заданном приближении $a_0(\xi)$. Поскольку решение (3) представляет собой некорректную задачу, то ее решение может быть получено только с помощью специальных методов, например, метода А. Н. Тихонова [5]. Из структуры выписанного интегрального уравнения видно, что его ядро в силу граничных условий (2) обращается в ноль на концах отрезка $[\xi_0, 1]$. Поэтому определение функции поправки $a_1(\xi)$ в этих точках не может быть осуществлено с достаточной точностью.

На основе (3) составлен итерационный процесс по восстановлению искомой функции $a(\xi)$ для различных видов законов распределения (монотонных и немонотонных). Начальное приближение выбиралось в классе линейных функций $a(\xi) = k\xi + m$ по априорной информации об ограниченности и положительности модуля Био. Коэффициенты k , m определялись из условия минимума функционала невязки $J = \int_{\kappa^-}^{\kappa^+} |f(1, \kappa) - u_0(1, \kappa)|^2 d\kappa$

на построенном компактном множестве. Выход осуществляется по условию достижения максимального наперед заданного количества итераций или малости правой части (3). Проведенные численные эксперименты показали, что наибольшая относительная погрешность восстановленной функции $a(\xi)$ наблюдается вблизи концов отрезка $[\xi_0, 1]$, а вдали от них обычно не превышает 5%. Наиболее точные результаты были получены при выборе отрезка $[\kappa^-, \kappa^+]$ вблизи первого резонансного значения параметра κ .

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К и программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки президиума РАН №1, при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-5440.2016.1).

Литература

1. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – V. 12, N 2. – P. 155–164.
2. *Coussy O.* Poromechanics. – John Wiley & Sons, 2004. – 312 p.
3. *Ватульян А. О., Ляпин А. А.* Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – № 2. – С. 114–121.
4. *Дударев В. В., Ляпин А. А., Святко Ю. А.* Реконструкция поля предварительных напряжений в неоднородной пороупругой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – № 3. – С. 20–25.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 285 с.

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров

Воронежский государственный университет

Расчет напряженно-деформированного состояния оболочек при их динамическом нагружении представляет значительные трудности обусловленные многими причинами: трехмерностью геометрической области расчета напряжений и деформаций; нестационарностью этой области вследствие распространения волновых поверхностей, ограничивающих область возмущения; нелинейностью поведения упруговязкопластического материала; отсутствием точных методов решения нелинейных нестационарных систем уравнений в частных производных, составляющих модель деформирования.

Упрощение задачи проводится разными путями из которых остановимся на следующих:

Рассмотрение осесимметричной задачи деформирования.

Осреднение параметров напряженно-деформированного состояния поперек оболочек с учетом поперечного сдвига, что проведено С. П. Тимошенко [1].

Использование нелинейной модели упруговязкопластического материал, что приводит математическую модель к системе квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Использование приближенного лучевого метода [2, 3] построения решения динамических задач в окрестности волновых фронтов.

Предположенные упрощения позволили лучевым методом свести задачу расчета динамического напряженно-деформированного состояния оболочек вблизи волновых фронтов к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постановкой задачи Коши. Точное решение этих уравнений дает приближенное решение (кусочно - постоянное) как функцию времени или пройденного волной расстояния ($n = ct$).

Приближение нулевого порядка

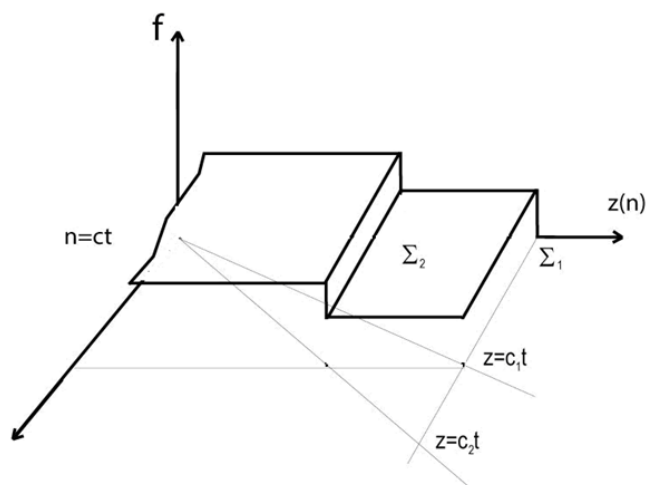


Рис. 1. Кусочно-постоянное по z представление решения за Σ_1 и Σ_2

Приближение первого порядка

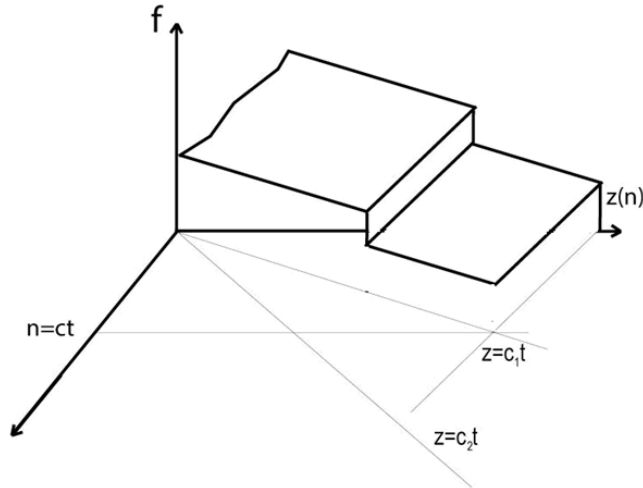


Рис. 2. Кусочно-линейное по z представление решения за Σ_1 и Σ_2

Использование метода Пикара, состоящего в последовательном дифференцировании обыкновенного дифференциального уравнения с целью нахождения производных более высокого порядка чем задание в задаче Коши позволяет найти слагаемые более высокого порядка в разложении решения в степенной ряд Тейлора и продолжить решение за Σ :

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} y^{(k)}(z, t)|_{\Sigma} h^k + R_N(h, t)h. \quad (1)$$

На примере обыкновенной дифференциальной задачи Коши второго порядка это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} g(y'', y', y, x) &= 0 \\ y(0) &= y_0, \quad y'(0) = y_{01} \end{aligned} \quad (2)$$

Разрешается уравнение (2) относительно y'' : $yy'' = g^{-1}(y', y, x)$ и последовательно дифференцируется N раз:

$$y''' = g_{,x}^{-1} g_{,y}^{-1} y' + g_{,y}^{-1} y'' \text{ и т. д.} \quad (3)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} y^{(k)}(0) h^k + R_N(h, t) h^{N+1}. \quad (4)$$

Неудобство метода Пикара состоит в необходимости дифференцирования нелинейного уравнения(2) для каждого вида $g(y', y, x) = 0$.

Для случая квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных гиперболического типа лучевой метод, как обобщение метода Пикара, будет состоять в последовательном решении одного и того же обыкновенного линейного дифференциального уравнения (с различной правой частью) для производных более высокого порядка по x .

Геометрически учет слагаемых до порядка h^2 означает представление решения вблизи волнового фронте в виде квадратичной функции с повышением порядка погрешности до $O(h^3)$.

Приближение второго порядка

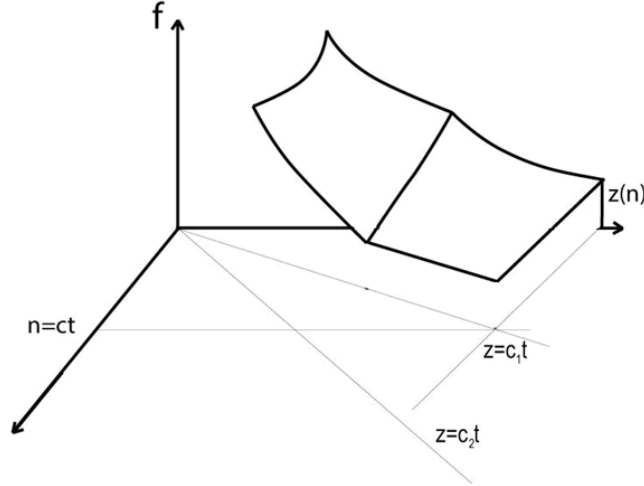


Рис. 3. Представление решения за Σ_1 и Σ_2 с точностью до $(\Delta n)^2$

Математическая модель С. П. Тимошенко деформирования оболочек вращения переменного радиуса, модифицированная для деформирования упруговязкопластического материала представляет собой квазилинейную систему уравнений для продольного и радиального перемещений как функции времени t и продольной координаты z .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{c_1^2 \nu}{R^2} v \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2\mu}{\rho c} e_{zz}^p; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t} = c_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2}{h^2} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{12c_2^2 k^2 \psi}{h^2} - \frac{2c_1^2 \nu}{R^3} v \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t} = c_2^2 k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_2^2 k^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{c_1^2}{R^2} v - \frac{c_1^2 \nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c_1^2 \nu}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_1^2 \nu}{R} v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3c_2^2 v}{2R^3} - \frac{2\mu}{\rho c} e_{rz}^p; \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) допускает распространение волн двух типов разрыва скоростей и напряжений – продольных и сдвиговых: $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu)}$, c_1 – скорость распространения продольных возмущений, $c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$, c_2 – скорость распространения сдвиговых возмущений.

Система уравнений(5), записанная в подвижных координатах (t, n_1) и (t, n_2) , где: $n_1 = z + c_1 t$; $n_2 = z + c_2 t$ получается путем последовательной подстановки $c = c_1$, $c = c_2 k$.

Повышение порядка уравнений (5) по производным по z последовательным дифференцированием позволяет продолжить решение за Σ_1 и Σ_2 решая одно и тоже уравнение на Σ_1 и Σ_2 с различными правыми частями [5]:

$$\frac{\delta[f]_{k\Sigma_1}}{\delta t} + \dots = g_{1e}, \quad (8)$$

$$\frac{\delta[f]_{k\Sigma_2}}{\delta t} + \dots = g_{2e}, \quad (9)$$

где $[f]_k$ – значение функции и её производных k -го порядка.

Правые части уравнений (6)–(9) учитывают пластическое деформирование материала из предыдущих приближений.

Численная реализация уточненного лучевого метода расчета перемещений за Σ_1 и Σ_2 с точностью до h^2 при распределении радиуса срединного сечения $R(n) = 1 + 0,5n$ приведены на рисунках 4–7.

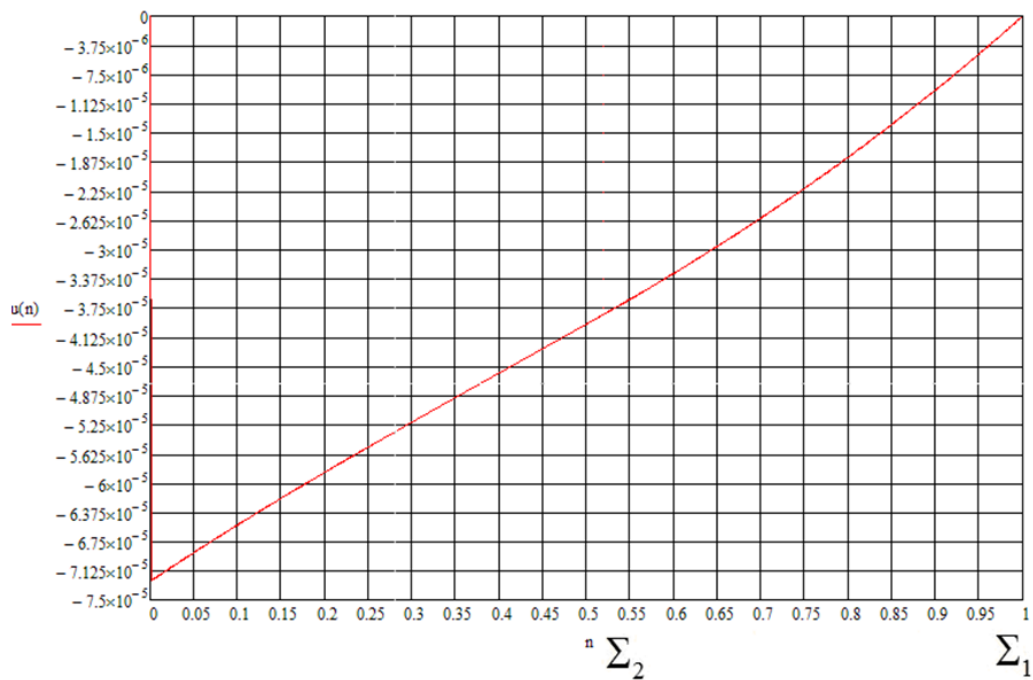


Рис. 4. График распределения продольного перемещения

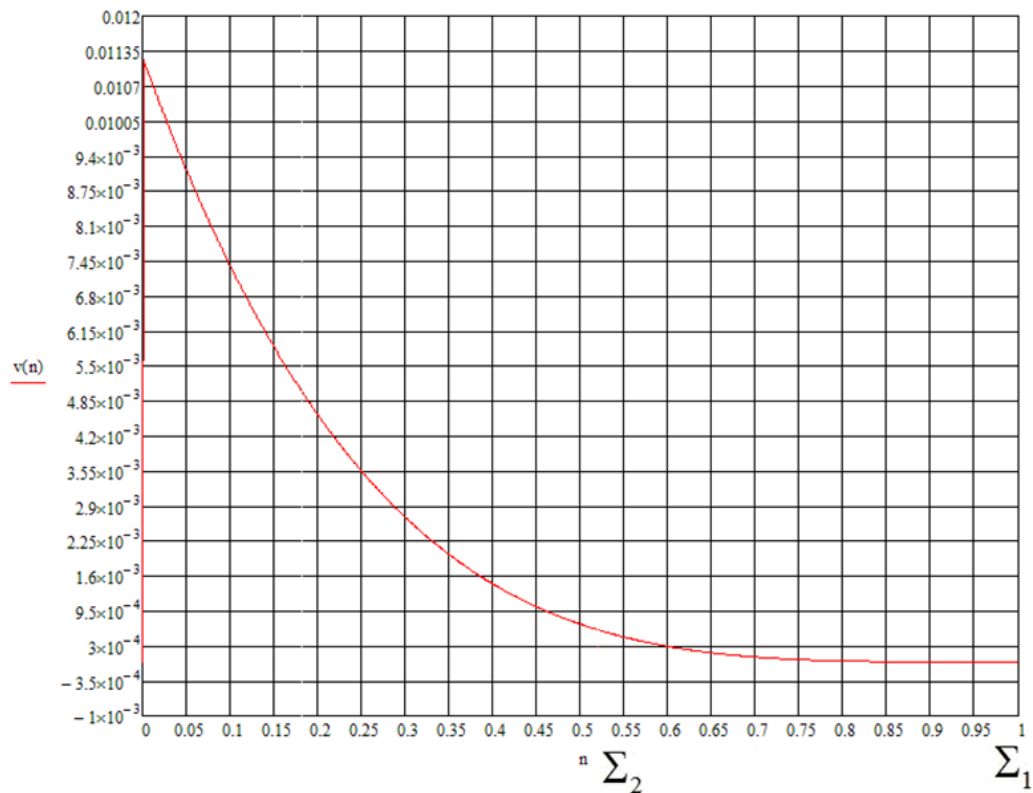


Рис. 5. График распределения сдвигового перемещения

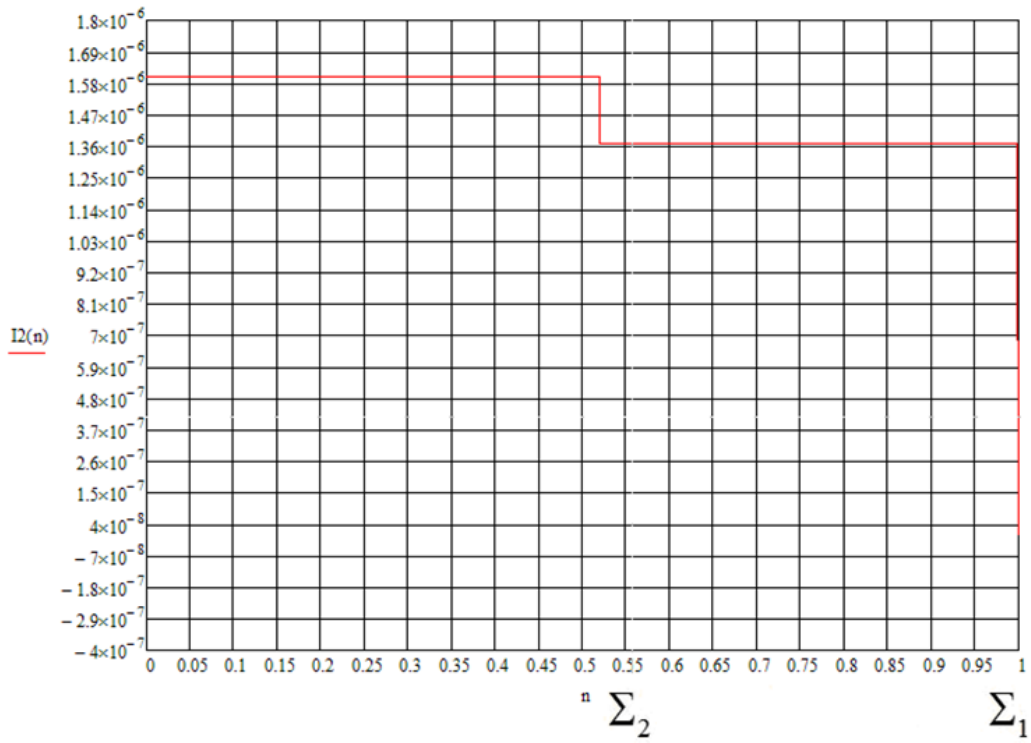


Рис. 6. График изменения второго инварианта диватора тензора деформаций

В случае волн нагружения малой длины h и малого времени $\tau = h/c$ полученные расчетные данные для $u(n)$ и $v(n)$ позволяют вычислить остаточные деформации e_{rr}^p , e_{rz}^p за Σ_1 и Σ_2 , которые затухают по мере продвижения волн разрыва.

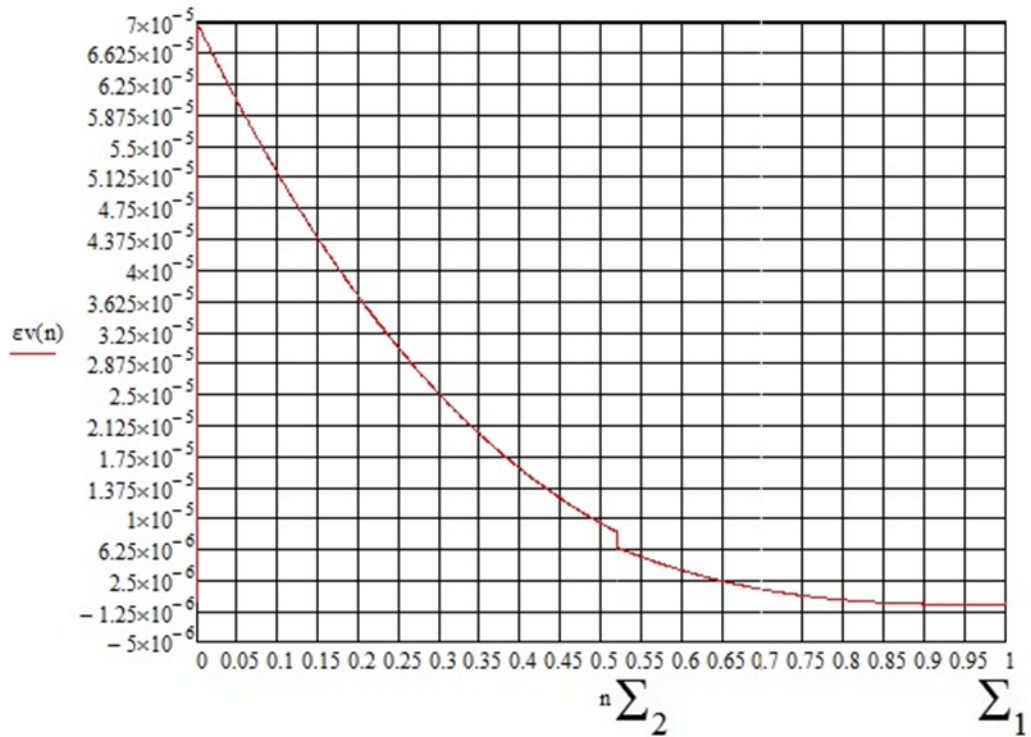


Рис. 7. График изменения остаточных сдвиговых деформаций

Литература

1. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер // Москва : Наука. – 1975. – 575 с.
2. Бабичева А. А. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах / А. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // Прикладная математика и механика. – 1973. – С. 145–155.
3. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас // Москва : Мир, 1964. – 306 с.
4. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко // Воронеж : Изд-во ВГУ, 1997. – 204 с.
5. Вервейко Н. Д. Лучевой метод расчета динамического напряженного состояния оболочки вращения / Н. Д. Вервейко, М. В. Егоров // Вестник ЧГПУ. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – 2015. – С. 120–129.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПОРИСТЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛАХ С УЧЕТОМ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛНОСТЬЮ СЖАТОЙ МАТРИЦЫ

Д. В. Гоцев, Н. С. Перунов

Воронежский государственный университет

Основные соотношения, моделирующие НДС пористого тела со сложной реологией сжатого скелета

Деформирование пористого материала с начальным раствором пор – ε_0 можно разделить на два взаимосвязанных этапа [1, 2]. Первый – упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй – неупругое деформирование полностью сжатой матрицы с упрочняющимися упруго-вязко-пластическими свойствами. Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе берется в виде закона Гука для сжимаемого тела.

На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела [1]

$$S_j^\beta = \begin{cases} 2(\mu_0 + \mu_1) \varepsilon_j^e - 2\mu_0 \left(\varepsilon_j^\beta \right) + \frac{2}{3} \mu_1 \varepsilon_0 g_j^\beta, \\ -\varepsilon_\alpha^e = \varepsilon_0 \end{cases} \quad (1)$$

где S_j^β – компоненты тензора дивергента напряжений σ_j^β ; $\left(\varepsilon_j^\beta \right)_0$ – компоненты тензора упругих деформаций, вычисленные на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия $\varepsilon_\alpha^e = -\varepsilon_0$; $\mu_0 + \mu_1$ – модуль сдвига несжимаемого тела.

В зоне пластического деформирования полностью сжатой матрицы будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела [3] с поверхностью нагружения

$$F = \left(S_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta \dot{\varepsilon}_j^\beta \right) \left(S_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j - \eta \dot{\varepsilon}_\beta^j \right) - k^2, \quad (2)$$

где ε_j^β , $\dot{\varepsilon}_j^\beta$ – компоненты тензоров пластических деформаций и скоростей пластических деформаций соответственно, c – коэффициент упрочнения, η – коэффициент вязкости, k – предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_j^\beta = \varepsilon_j^e + \varepsilon_j^p, \quad (3)$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nm}^p = 0, \quad \varepsilon_{nm}^e = -\varepsilon_0. \quad (4)$$

В (2), (4), (5) и далее индексы «e» и «p» сверху величин обозначают их принадлежность соответственно к упругой и пластической зонам деформирования сжатого скелета.

Для моделирования внутренней структуры среды в реологической схеме был использован элемент жесткого контакта, уравнение которого имеет вид [2]

$$\sigma_j^\beta (\varepsilon_\alpha^\alpha + \varepsilon_0) = 0, \quad (5)$$

причем $\sigma_j^\beta = 0$ до схлопывания пор, и $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$ после. Таким образом, условие наличия несхлопнутых пор будет иметь вид

$$\varepsilon_\alpha^\alpha < \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0). \quad (6)$$

Для определения констант интегрирования, а так же радиуса упругопластической границы для второго этапа деформирования, воспользуемся следующими условиями непрерывности:

$$[u_j] \Big|_S = 0, \quad [N_j \sigma_\beta^j] \Big|_S = 0. \quad (7)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на упругопластической границе S .

и граничными условиями

$$u_j \Big|_{\Gamma_1} = u_j^*, \quad N_j \sigma_\beta^j \Big|_{\Gamma_2} = P_\beta^*, \quad (8)$$

где Γ_1 область, на которой заданы перемещения, а Γ_2 область, на которой заданы напряжения.

Распределение полей напряжений и перемещений

Проводя моделирование НДС с учетом уравнений (1)–(8) для таких осесимметричных тел, как цилиндрическое толстостенное тело и сферическое толстостенное тело, удастся получить аналитические решения, описывающие распределение полей напряжений и перемещений в указанных телах. При этом соотношения описывающие НДС на первом этапе деформирования, то есть при наличии несхлопнутых пор в теле, для цилиндрического тела представлены в работе [5], а для сферического в работе [4]. НДС на момент полного сжатия пор, получаемое при условии перехода в (6) к равенству, для цилиндрического тела представлено в работе [5], а для сферического в работе [4].

На втором этапе деформирования при выполнении (2) возникнет и будет расти около внутренней поверхности крепи пластическая зона, препятствовать развитию которой будут упрочнение c и вязкость η материала, то есть полностью сжатый скелет будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упруго-вязко-пластическая среда с параметрами $\mu = 1 + \mu_0$, k , c , η .

НДС полностью сжатой матрицы цилиндрического тела определяется в виде
– в упругой области ($\gamma < r < 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\eta \chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(2\gamma \dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) + \frac{c + 2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{\eta \chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(2\gamma \dot{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) + \frac{c + 2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - q_b; \end{aligned} \quad (9)$$

– в пластической области ($a < r < \gamma$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^p &= -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right) \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right), \\ \sigma_r &= -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{r} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta \gamma \dot{\gamma} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right) + (c+2\mu) \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{2\gamma^2}{r^2} + \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{a}{r} - 3 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta \gamma \dot{\gamma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right) + (c+2\mu) \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right).\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь в (10), (11) и далее $\chi = \text{sign}(q_a - q_b)$, q_a и q_b – интенсивности сжимающих нагрузок, равномерно распределенных по внутренне ($r = a$) и внешней ($r = 1$) поверхности тела соответственно.

Радиус γ раздела зон упругого и пластического определяется из решения уравнения

$$\begin{aligned}q_b - q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left(2 \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left(\mu \left(\frac{\gamma^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \gamma \dot{\gamma} \eta \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right) + (c+2\mu) \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \right) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

НДС полностью сжатого скелета сферического тела определяется в виде
– в упругой области ($\gamma < r < 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{r^3} \right) \left(\frac{8\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left(3\gamma^2 \dot{\gamma} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0 a^3}{3} \right) - q_b \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{r^3} \right) \left(\frac{4\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left(3\gamma^2 \dot{\gamma} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0 a^3}{6} \right) - q_b;\end{aligned}\tag{12}$$

– в пластической области ($a < r < \gamma$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^p &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left(\frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right), \\ \sigma_r &= -q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \left(\left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left(\left(\frac{r^3}{a^3} - 1 \right) \left(2\mu - \frac{3\eta\gamma^2\dot{\gamma}}{r^3} \right) + 6\mu \ln \frac{a}{r} \right) - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(c + 2\mu)\gamma^3 \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3} \right); \\
\sigma_\theta = & -q_a + \frac{\chi k}{\sqrt{3}(c + 2\mu)} \left(\left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left(6\mu \left(\frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{2r^3}{3a^3} - \frac{5}{3} + 2 \ln \frac{a}{r} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\eta\gamma^2\dot{\gamma} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{a^3} \right) \right) - (c + 2\mu)\gamma^3 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{a^3} \right) \right). \tag{13}
\end{aligned}$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях в этом случае определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
u = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{3}r, \quad \varepsilon_r = -\frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \tag{14} \\
D(t) = \frac{\chi\eta k}{2\sqrt{3}\mu(c + 2\mu)} \cdot \left(3\gamma^2\dot{\gamma} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) - \frac{c + 2\mu}{\eta}\gamma^3 \right) + \\
+ \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{12\mu\mu_1}.
\end{aligned}$$

Радиус γ раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета сферического тела определяется из решения дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
q_b - q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c + 2\mu)} \left(\mu \left(1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left(2 \left(\frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) + 6 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \right. \\
+ \gamma^2 \left(3\eta\dot{\gamma} \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) - (c + 2\mu)\gamma \right) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{4}{3} \right) \Big) + \\
+ \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0}{9} \left(\frac{a^3}{\gamma^3} - a^3 \right) = 0. \tag{15}
\end{aligned}$$

Соотношения (9)–(15) записаны в безразмерном виде. При этом все величины имеющие размерность напряжений отнесены к параметру Ламе μ_1 сжимаемого упругого тела, которое выбиралось в качестве модели среды на первом этапе деформирования, а величины имеющие размерность напряжений к внешнему радиусу тела.

Результаты численного эксперимента

Кривые 1 соответствуют $k = 0.038$, кривые 2 – $k = 0.039$, кривые 3 – $k = 0.04$, безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров брались следующими $a = 0.1$, $b = 1$, $q_a = 10^{-5}$, $q_b = 0.16384$, $c = 10^{-5}$, $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.02048$, $\mu = 3$, $\eta = 0.00008$.

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания НДС сплошной среды, учитывающая пористую структуру материала и упруго-вязко-пластические свойства сжатого скелета. В рамках предложенного подхода на основе соотношений геометрически-линейной теории малых деформаций решены задачи об определении полей напряжений и перемещений в толстостенном сферическом и цилиндрическом телах, находящихся под действием всестороннего равномерного сжатия. Получены аналитические

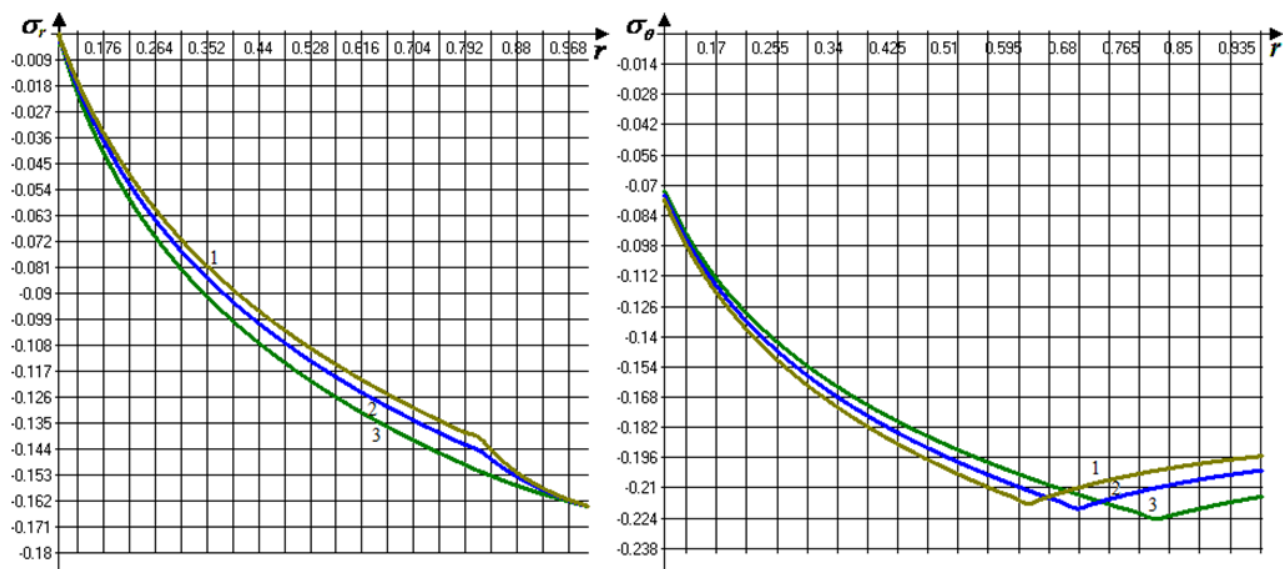


Рис. 1. Зависимость компонент напряжений от радиуса при различных значениях k для цилиндрического тела

соотношения, описывающие НДС на этапах упругого сжатия пор и неупругого деформирования сжатого скелета. Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всем теле.

Литература

1. Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
2. Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
3. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруго-вязко-пластических тел // Прикл. механика и техн. физика. – 1967. – № 4. – С. 52–58.
4. Гоцев Д. В., Перунов Н. С. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния пористого сферического тела при сжатии с учетом упруго-вязко-пластических свойств сжатого скелета // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2015. – С. 53–56.
5. Гоцев Д. В., Бунтов А. Е., Перунов Н. С. Математическая модель напряженно-деформированного состояния крепи вертикального шахтного ствола с учетом начальной пористости материала и упруго-пластических свойств сжатого скелета // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 88–96.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ СТАЛЬНОЙ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ВДАВЛИВАНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

А. В. Демарева, А. И. Кибец, Ю. А. Шушкина

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского*

Рассматривается задача упругопластического выпучивания тонкостенной полусферической оболочки при вдавливании упругого индентора. Внизу полусферическая оболочка опирается на неподвижное недеформируемое основание. Индентор имеет вид полого цилиндрического образца. Нагружающее устройство обеспечивает постоянную скорость смещения индентора.

Для численного анализа выпучивания оболочки применяется динамическая постановка задачи при малых скоростях нагружения [1]. Движение оболочки и индентора описывается с позиций механики сплошных сред с применением текущей лагранжевой формулировки [2–4]. Математическая модель включает в себя: 1) уравнения движения, 2) кинематические соотношения, 3) уравнения упруговязкопластического деформирования металлов и сплавов, 4) условия контактного взаимодействия. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы [4]. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с изотропным упрочнением [5, 6]. Контакт оболочки и индентора описывается условиями непроникания, допускающими отрыв поверхностей друг от друга и повторное вступление в контакт. Определяющая система уравнений дополняется начальными условиями и кинематическими граничными условиями.

Решение определяющей системы уравнений основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест» [7–12]. Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным применяется 8-узловой изопараметрический конечный элемент с полилинейными функциями формы. Скорости деформаций определяются в локальном базисе, отслеживающем поворот конечного элемента как жесткого целого [12,13], и аппроксимируются линейными функциями в виде суммы безмоментных и моментных составляющих [8,12]. Пластические и упругие компоненты деформаций определяются из уравнений состояния в выбранных фиксированных точках конечного элемента. В каждом конечном элементе мощность виртуальной работы выражается через матрицу масс, узловое ускорения, силы и виртуальные скорости перемещения. Для определения узловых сил, статически эквивалентных напряжениям, применяются квадратурные формулы [10]. Для численного решения задачи контакта оболочки и индентора на несогласованных конечно-элементных сетках используется алгоритм [14].

Программная реализация конечно-элементной методики осуществлена в рамках вычислительного комплекса (ВК) «Динамика-3» [15]. На его основе выполнен расчет упругопластического деформирования и выпучивания полусферической стальной оболочки (внешний радиус $R = 5,1$ см, $R/h = 63, 75$), расположенной на неподвижной плите при квазистатическом вдавливании упругого полого цилиндра. Толщина цилиндра задавалась равной 0,5 см, а его внутренний радиус $r = 0,866R$. Скорость смещения индентора 1 м/с.

Результаты численного исследования сопоставлялись с представленными в [16] экспериментальными данными и результатами расчетов с применением вычислительной системы ABAQUS [17].

Как показали вычислительные и натурные эксперименты полусферическая оболочка в процессе нагружения претерпевает значительные локальные формоизменения в области контакта с индентором, характеризующиеся большими смещениями и углами поворота конечных элементов как жесткого целого. После потери устойчивости на закритической стадии в оболочке образуется кольцевая складка, интенсивность пластических деформаций в которой достигает 17 %.

Расхождение графиков зависимости контактной силы от смещения нагружающего устройства, полученных расчетным путем и экспериментально, не превышает 7 %. Так, критическое значение нагрузки в расчете и в эксперименте составило 17,5 кН и 16,7 кН соответственно. Перемещение индентора, при котором оболочка теряет устойчивость, равны 0,07 см (расчет) и 0,075 см (эксперимент). Остаточные формы оболочки в расчете и эксперименте также хорошо согласуются друг с другом.

Таким образом, сопоставление результатов эксперимента и расчета показало, что вычислительный комплекс «Динамика-3» [15] и реализованная в нем конечно-элементная методика [12] позволяют с приемлемой точностью оценивать величину критической нагрузки при потере устойчивости и описывать большие формоизменения тонкостенной сферической оболочки на закритической стадии.

Проведено численное исследование влияния размеров индентора на уровень пластических деформаций и величину критической нагрузки. В этих расчетах внутренний радиус индентора r менялся в интервале от $0,25R$ до $0,96R$ (R – внешний радиус оболочки). Показано, что уменьшение радиуса индентора приводит к снижению критической нагрузки. При $r/R < 0,7$ после потери устойчивости нагрузка на полусферическую оболочку монотонно увеличивается, хотя скорость ее роста замедляется по сравнению с докритической стадией. С увеличением радиуса индентора от $0,7R$ до $0,96R$ критическая нагрузка увеличивается, примерно, в 10 раз. Однако при ($r/R > 0,8$) на закритической стадии контактная сила между оболочкой и индентором резко уменьшается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-08-00656-а).

Литература

1. *Баженов В. Г. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях / В. Г. Баженов и [др.] // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 13–22.*
2. *Поздеев А. А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин // – М. : Наука, 1986. – 232 с.*
3. *Bathe K.-Y. Finite element procedures. – New Jersey : Upper Saddle River «Prentice Hall», 1996. – 1037 p.*
4. *Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.*
5. *Казаков Д. А. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций / Д. А. Казаков, С. А. Капустин, Ю. Г. Коротких. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1999.*
6. *Волков И. А., Коротких Ю. Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.*

7. Артемьева А. А. Конечно-элементное моделирование упругопластического выпучивания незамкнутых сферических оболочек при сжатии / А. А. Артемьева и [др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – № 74. – С. 84–91.
8. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев : Вища школа; Лейпциг : ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
9. Голованов А. И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 391 с.
10. *Belytschko T., Liu W.K., Moran B.* Nonlinear finite elements for continua and structures. New York: John Wiley & Sons, 2000. – 600 p.
11. Артемьева А. А. Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек / А. А. Артемьева и [др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 2. С. 5–14.
12. Баженов В. Г. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором / В. Г. Баженов и [др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 4. – С. 22–33.
13. Коробейников С. Н. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек / С. Н. Коробейников, А. В. Шутов // Вычислительные технологии, 2003. – Т. 8. – № 6. – С. 38–59.
14. Баженов В. Г. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций / В. Г. Баженов, А. И. Кибец, И. Н. Цветкова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1995. – № 2. – С. 20–26.
15. Вычислительный комплекс «Динамика-3». Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.
16. *Shariati M.* Numerical and experimental investigations on the buckling of steel semi-spherical shells under various loadings / M. Shariati, H. R. Allahbakhsh // Thin-Walled Structures. – 2010. – Vol. 48, № 8. – pp. 620–628.
17. *Abaqus.* Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. – Publisher-Simulia, 2008. – 711 p.

РАЗНОТИПНЫЕ БЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭКОЛОГИИ**М. В. Зарецкая***Кубанский государственный университет*

Развитие современных систем геоэкологического мониторинга, регулирования качества окружающей среды, рационального природопользования предполагает широкое использование средств математического моделирования. Качество разрабатываемых моделей определяется двумя факторами: во-первых, задачами, стоящими перед службами контроля, во-вторых, требованиями адекватности применяемых моделей реальным процессам в среде.

Разработчики подобных моделей и систем сталкиваются с проблемами: необходимо учитывать комплекс физико-механических, химических, гидродинамических, пластических явлений; исследуемая среда обладает сложной геометрией и внутренней структурой; объект исследования подвергается внутреннему и внешнему воздействию.

Применение современных вычислительных средств и численных методов не всегда позволяет решить указанные проблемы и возникает необходимость разработать метод, позволяющий ставить и решать граничные задачи на основе уравнений движения в различных системах координат для сред, характеризующихся существенно отличающимися механическими, химическими, реологическими характеристиками.

Такую возможность предоставляют теория блочных структур и дифференциальный метод факторизации, разработанные для решения граничных задач для совокупности контактирующих тел с разными физико-механическими свойствами. Теория блочных структур позволяет ввести в области блочную структуру, каждый элемент которой обладает своими специфическими физико-механическими свойствами. Дифференциальный метод факторизации предназначен для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в сложных, в том числе, блочных областях, в интегральном представлении.

При решении класса задач по моделированию процессов в сложно структурированной среде возможны две ситуации. Первая: требуется провести исследование в блоке с цилиндрической границей, если с границы подается некоторый поток механических полей. Блок включен в общую структуру среды, моделируемой, например, пространством, полупространством, слоем, прямоугольным параллелепипедом. В этом случае вводится элемент в виде цилиндра, исследование производится во внутренней области, граничные условия задаются на внешней границе цилиндра.

Вторая ситуация: поток механических полей подается с границы блока с цилиндрической границей во внешнюю область. В этом случае область рассекается плоскостями, продолжающими торцы цилиндра. Получаются три элемента структуры: слой с цилиндрическим отверстием и два полупространства. Граничные условия задаются на внешней поверхности цилиндра.

В работах [1–3] предложена схема применения факторизационных методов в общем случае для граничных задач, поставленных в декартовой системе координат. Ниже предложены варианты дифференциального метода факторизации для блочно структурированной среды, отдельные блоки которой формируются внутренними и внешними цилиндрическими границами.

1. Рассмотрим внутреннюю граничную задачу в ограниченном цилиндре Ω радиуса b . Пусть процесс описывается дифференциальным уравнением Гельмгольца в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$(\Delta + k_1^2)\psi = 0,$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad r, \varphi, z \in \Omega.$$

В соответствии со схемой дифференциального метода факторизации [3, 4] вводятся прямое и обратное преобразования Фурье-Бесселя. Далее необходимо применить к исходному уравнению Гельмгольца прямые преобразования Фурье-Бесселя, построить внешнюю форму, осуществить переход к функциональному уравнению и после некоторых преобразований получить псевдодифференциальные уравнения, представленные в виде

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_1(\theta, \sigma_-, b, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_- c_1) = 0, \quad r \in [0, b],$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_1(\theta, \sigma_+, b, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_+ c_2) = 0, \quad r \in [0, b],$$

где $\sigma_{\pm} = \pm i\sqrt{\theta^2 - k_1^2}$, $\Psi_{\nu p} = \mathbf{B}_1(r, p, z)\psi_{\nu}$;

$$\begin{aligned} P_1(\theta, \sigma, b, c_1, c_2) &= \int_{c_1}^{c_2} \left[J_p(\theta b) \frac{\partial \Psi_{rp}}{\partial r} - \theta J_p'(\theta b) \Psi_{rp} \right] b \exp i\sigma z dz + \\ &+ \int_0^b J_p(\theta b) \left[\frac{\partial \Psi_{1p}}{\partial z} - i\sigma \Psi_{1p} \right] r \exp i\sigma c_1 dr + \int_0^b J_p(\theta b) \left[\frac{\partial \Psi_{2p}}{\partial z} - i\sigma \Psi_{2p} \right] r \exp i\sigma c_2 dr; \\ \mathbf{F}_2(\theta)u &= \int_0^b u(r) J_p(\theta r) r dr = U(\theta); \quad \mathbf{F}_2^{-1}(r)U(\theta) = \int_0^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} U(\theta) J_p(\theta r) \theta d\theta = u(r). \end{aligned}$$

Некоторые частные вопросы получения систем псевдодифференциальных уравнений для внутренней граничной задачи в ограниченном цилиндре, методы решения и обозначения представлены, например, в работе [4].

Системы псевдодифференциальных уравнений позволяют формировать интегральные уравнения для всех возможных вариантов граничных условий. Решение задачи в интегральном представлении, полученное после обращения псевдодифференциального уравнения, имеет вид:

$$\psi(r, \varphi, z) = \mathbf{B}_3^{-1}(r, \varphi, z) K^{-1}(\theta, \sigma) \int_{\partial\Omega_1} \omega.$$

2. Рассмотрим внешнюю граничную задачу. Пусть процесс описывается дифференциальным уравнением Гельмгольца в цилиндрической системе координат r, φ, z

$$(\Delta + k_2^2)w = 0$$

в области $\Omega_2 : a \leq r \leq \infty, -\infty \leq z \leq c_1, c_2 \leq z \leq \infty$.

Граничные условия задаются выражениями:

$$w(a, \varphi, z) = w_r, \quad c_1 \leq z \leq c_2 \quad w(r, \varphi, c_1) = w_1 \quad \text{и} \quad w(r, \varphi, c_2) = w_2, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Выпишем системы псевдодифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1^{-1}(z)P_2(\theta_1, \sigma, b, c_1, c_2) &= 0, \quad z \in [c_1, c_2], \quad \theta_1 = i\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}, \\
\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2(\theta, \sigma_-, a, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_-c_1) &= 0, \quad r \in [a, \infty], \quad \sigma_{\pm} = \pm i\sqrt{\theta^2 - k_2^2}, \\
\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2(\theta, \sigma_+, a, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_+c_2) &= 0, \quad r \in [a, \infty], \\
\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2^-(\theta, \sigma_-, b, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_-c_1) &= 0, \quad r \in [0, \infty], \\
\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2^+(\theta, \sigma_+, b, c_1, c_2) \exp(-i\sigma_+c_2) &= 0, \quad r \in [0, \infty],
\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
P_2(\theta, \sigma, a, c_1, c_2) &= \int_{c_1}^{c_2} \left[H_p^{(1)}(\theta a) \frac{\partial W_{rp}}{\partial r} - \theta (H_p^{(1)}(\theta a))' W_{rp} \right] a \exp i\sigma z dz + \\
&+ \int_a^{\infty} J_p(\theta r) \left[\frac{\partial W_{1p}^+}{\partial z} - i\sigma W_{1p}^+ \right] r \exp i\sigma c_1 dr + \int_a^{\infty} J_p(\theta r) \left[\frac{\partial W_{2p}^+}{\partial z} - i\sigma W_{2p}^+ \right] r \exp i\sigma c_2 dr; \\
P_2^-(\theta, \sigma, a, c_1) &= \int_0^{\infty} J_p(\theta r) \left[\frac{\partial (W_{1p} + W_{1p}^+)}{\partial z} - i\sigma (W_{1p} + W_{1p}^+) \right] r \exp i\sigma c_1 dr; \\
P_2^+(\theta, \sigma, a, c_+) &= \int_0^{\infty} J_p(\theta r) \left[\frac{\partial (W_{2p} + W_{2p}^+)}{\partial z} - i\sigma (W_{2p} + W_{2p}^+) \right] r \exp i\sigma c_2 dr;
\end{aligned}$$

$$W_{\nu p} = \mathbf{B}_1(r, p, z)w_{\nu}; \quad W_{\nu p}^+ = 0, \quad r \leq a, \quad \nu = 1, 2.$$

Дальнейший ход решения аналогичен внутренней граничной задаче.

Полученные результаты имеют важные практические приложения, прежде всего, в развитии новых наукоемких технологий мониторинга и прогнозирования чрезвычайных ситуаций и их возможных последствий. Введение блочного элемента с цилиндрической границей и развитие дифференциального метода факторизации в цилиндрических координатах позволяет исследовать широкий класс конвективных течений, возникающих в атмосфере (моделирование смерчей), морях и океанах (циклонические течения различных масштабов), геофизике (исследование тепловой конвекции в мантии и вынужденной конвекции при субдукции литосферных плит).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-08-00191_а), РФФИ и администрации Краснодарского края (гранты № 16-41-230154).

Литература

1. *Бабешко В. А.* О приложениях теории блочных структур в науках о земле, сейсмологии, строительстве, материаловедении / В. А. Бабешко и др. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 4. – С. 27–34.
2. *Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в приложениях / В. А. Бабешко и др. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 2. – С. 5–12.
3. *Зарецкая М. В.* Математический аппарат исследования блочных структур с разнотипными блоками / М. В. Зарецкая, А. Г. Зарецкий // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 3 (45). Часть 2. – С. 58–60.
4. *Babeshko V. A.* Block elements with a cylindrical boundary in macro-and nanostructures / V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko // Doklady Physics. – 2011. – Volume 56. – Issue 10. – P. 544–547.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПРОФИЛЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков

Воронежский государственный университет

Рассматривается стохастическая модель устойчивости тела с шероховатой границей при различных профилях случайных неровностей. Исследуется случай тонкой упругой пластины с однонаправленными неровностями, приводящий к статистически нелинейному уравнению прогибов. Задача потери устойчивости типа продольно-поперечного изгиба решается на основе метода возмущений в стохастической задаче на собственные значения [1]. Проведено сравнение влияния на устойчивость различных видов случайных функций, описывающих шероховатый профиль поверхности. Получены зависимости критических сжимающих усилий и соответствующей длины полуволны прогиба пластины от статистических характеристик неровностей поверхности и размеров пластины.

1. На рис.1 представлен профиль пластины с шероховатыми поверхностями для фиксированного значения ординаты y . Серединная плоскость пластины совпадает с плоскостью XOY . По аналогии с [2] предлагается описывать случайные неровности поверхности с помощью случайного поля $h(x, y)$.

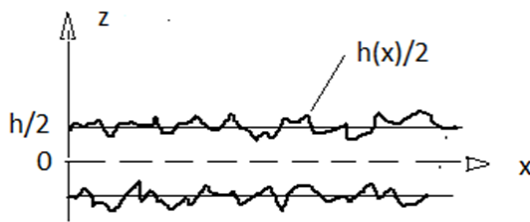


Рис. 1. Пластина с шероховатыми поверхностями

В качестве примера рассмотрим шероховатую пластину, удлиненную вдоль оси x ($a \gg b$) и сжатую вдоль длинной стороны усилиями σ_x .

Уравнение прогибов для пластины переменной толщины $h = h(x, y)$ при заданных нагрузках принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \sigma_x \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot h(x, y) = 0.$$

Здесь

$\omega(x, y)$ – перемещения точек серединной плоскости в направлении оси z ,

$D(x, y) = Eh^3(x, y)/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость,

E – модуль Юнга,

μ – коэффициент Пуассона.

Так как цилиндрическая жесткость является случайной функцией координат x и y , то последнее уравнение является статистически нелинейным.

Если рассмотреть случай однонаправленных шероховатостей $h = h(x)$, то уравнение прогибов упрощается

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) + D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \sigma_x \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot h(x, y) = 0. \quad (1)$$

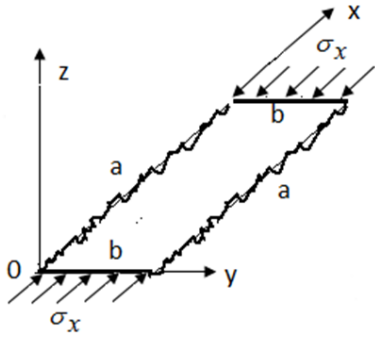


Рис. 2. Пластина, сжатая вдоль длинной стороны

Граничные условия примем детерминированными и соответствующими шарнирному закреплению по длинным краям

$$\omega(x, 0) = \omega(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0. \quad (2)$$

Задача состоит в определении критического значения сжимающей нагрузки $p = \sigma_x \cdot h$.

2. Воспользовавшись подходом, предложенным в [1], для заданного вида корреляционной функции случайной функции, описывающей шероховатости, можно получить оценки критической сжимающей нагрузки.

Будем рассматривать вариант стационарной случайной функции $h = h(x)$ и введем следующие обозначения

$$h(x) = \langle h \rangle + h'(x), \quad H'(x) = \frac{h'(x)}{\langle h \rangle},$$

$$K_H(\rho) = \langle H'(x)H'(x + \rho) \rangle, \quad D_H = \langle H'(x)H'(x) \rangle.$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию математического ожидания,

$K_H(\rho)$ – корреляционная функция шероховатостей, D_H – дисперсия.

В случае нормального закона распределения шероховатостей корреляционная функция имеет вид

$$K(\tau) = D_H \exp(-\alpha \tau^2), \quad \alpha > 0.$$

Для величины, характеризующей длину полуволны прогиба l рассматриваемой пластины получается следующая оценка [1]

$$u1 = \sqrt{1 - \frac{18D_H\mu}{(1 + D_H)r}}, \quad r = \frac{\rho^2\pi^2}{b^2}, \quad \rho^2 = \frac{1}{\alpha}, \quad u = \frac{b}{l}. \quad (3)$$

Очевидно (3) имеет смысл при условии

$$\frac{D_H\mu}{(1 + D_H)r} < \frac{1}{18}.$$

Оценка критического значения сжимающей нагрузки в этом случае имеет вид

$$\Omega = \frac{2 \cdot (1 + D_H) \cdot (u1 + 1)}{u1} - \frac{18 \cdot D_H \cdot (u1 + 2\mu)}{u1 \cdot r}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Omega = \frac{\sigma_x \cdot 12 \cdot (1 - \mu^2)b^2}{\langle h \rangle^2 E \pi^2}.$$

3. Рассмотрим случай, когда корреляционная функция шероховатостей имеет периодическую составляющую

$$K(\tau) = D_H \exp(-\alpha \tau^2) \cos \beta \tau, \quad \alpha > 0.$$

Можно показать, что характеристики устойчивости пластины принимают вид

$$u_2 = \sqrt{1 - \frac{9D_H \left(q + \frac{2}{r}\right) \mu}{(1 + D_H)}}, \quad q = \frac{\beta^2 b^2}{\pi^2} \quad (5)$$

$$\Omega = \frac{2 \cdot (1 + D_H) \cdot (u_2 + 1)}{u_2} - \frac{9 \cdot D_H \cdot \left(q + \frac{2}{r}\right) (u_2 + 2\mu)}{u_2}. \quad (6)$$

Область, в которой могут изменяться параметры определяется условием

$$\frac{D_H \left(q + \frac{2}{r}\right) \mu}{(1 + D_H)} < \frac{1}{9}.$$

4. Пусть корреляционная функция случайных шероховатостей является знакопеременной затухающей функцией вида

$$K(\tau) = D_H \exp(-\alpha_1 |\tau|) \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha_1}{\beta} \sin \beta |\tau| \right), \quad \alpha_1 = \sqrt{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

В этом случае рассмотренная модель дает следующие оценки

$$u_3 = \sqrt{1 - \frac{9D_H \left(q + \frac{1}{r}\right) \mu}{(1 + D_H)}}, \quad \frac{D_H \left(q + \frac{1}{r}\right)}{(1 + D_H)} < \frac{1}{9}, \quad (7)$$

$$\Omega = \frac{2 \cdot (1 + D_H) \cdot (u_3 + 1)}{u_3} - \frac{9 \cdot D_H \left(q + \frac{1}{r}\right) (u_3 + 2\mu)}{u_3}.$$

Можно показать, что на области допустимых значений параметров рассмотренной математической модели выполняются системы неравенств

$$\begin{cases} u_2 < u_1 < u_3 \\ \rho \cdot \beta < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 < u_3 < u_1 \\ \rho \cdot \beta > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Соотношения (3)–(8) описывают характеристики рассмотренной модели и определяют возможности управления ее устойчивостью.

Литература

1. *Иванищева О. И.* Задача на собственные значения для модели со стохастическими дефектами / *О. И.Иванищева* // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) : сборник трудов 7 Международной конференции, Воронеж, 14-21 сентября 2014 г. – Воронеж, 2014. – С. 157–159.

2. *Хусу А. П.* Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход / *А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В. А. Пальмов.* – М. : Наука, 1975. – 343 с.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ТОНКОГО УПРУГОГО КОЛЬЦА И ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

А. В. Ковалев, Е. Ю. Русина, А. Ю. Яковлев

Воронежский государственный университет

Одной из важных задач математического моделирования [5, 11, 13, 14] является разработка математических моделей механического поведения материала в упругопластических составных конструкциях. Задача об определении напряженного и деформированного состояний в составных упругих и упругопластических конструкциях рассматривалась многими авторами, в частности в работах [2–4, 6–10, 12, 15].

Настоящая работа посвящена определению напряженнодеформированного состояния в тонкой пластине с отверстием близким по форме к правильному m – угольнику, в которое помещено несколько большее по размеру тонкое кольцеобразное включение. Внутренний контур упругого кольцеобразного включения близок по форме к правильному n – угольнику. На бесконечности конструкция подвержена растяжению взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями P_1 и P_2 . Вдоль внутреннего контура включения приложено нормальное давление P_0 .

При решении задачи принималось, что под влиянием внешних нагрузок включение остается полностью в упругом состоянии, а в пластине возникает пластическая зона, целиком охватывающая сложный контур отверстия.

Механическое состояние материала пластины в пластической области определяется соотношениями условия пластичности Треска [6] в рамках идеальной пластичности.

Задача решается методом возмущений [1–3, 6–10, 15] в цилиндрической системе координат ρ, θ, z . При этом имеем случай плосконапряженного состояния материала. Ось Oz направлена вдоль оси перпендикулярной плоскости пластины, а начало координат выбираем в центре кольцеобразного включения.

За нулевое приближение выбиралось осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α с тонким упругим включением с внешним радиусом α_1 и внутренним β . На бесконечности данная конструкция подвержена растяжению взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями $P = (P_1 + P_2)/4k$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0 . В данной задаче малый параметр характеризует отклонение контуров отверстий в пластине и включения от окружностей, а также возмущение статических граничных условий $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/4k$, где δ – малый параметр, d_3 – безразмерная константа. Все соотношения при решении были записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, были отнесены к $2k$ – удвоенной величине предела текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения отнесены к радиусу упругопластической границы в плите r_{s0} в нулевом приближении.

Формы контуров в плоскости, перпендикулярной оси OZ , согласно [6–10, 15] записывались в виде следующих уравнений:

для контура, ограничивающего отверстие в пластине до деформации

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_2 \cos m\theta - \dots), \quad (1)$$

для контура, ограничивающего включение до деформации

$$\rho = \alpha_1(1 + \delta d_2 \cos m\theta - \dots), \quad (2)$$

для контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации

$$\rho = \beta(1 + \delta d_3 \cos n\theta - \dots), \quad (3)$$

где $\alpha_1 > \alpha$, α , α_1 , β – радиусы круговых контуров в нулевом приближении соответственно для: отверстия в пластине, внешнего очертания включения и внутреннего отверстия во включении; d_2 , d_3 – безразмерные константы.

Полученная математическая модель позволяет определить напряженное и деформированное состояния в пластине для первого приближения, а также вид упругопластической границы в пластине.

Литература

1. *Артемов М. А.* О двусном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала / М. А. Артемов // ПМТФ. – 1985. – № 6. – С. 158–163.

2. *Горностаев К. К., Ковалев А. В.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 135–140.

3. *Горностаев К. К., Ковалев А. В.* О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 3 (25). – С. 176–184.

4. *Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Спорыхин А. Н.* Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 3 (247). – С. 146–151.

5. *Ерофеев И. В., Коржов Е. Н., Шашкин А. И., Иванов А.В., Добросоцкая М. В.* Математическое моделирование турбулентного течения жидкости в кольцевом конфузоре под действием перепада давления // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 138–146.

6. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

7. *Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю.* Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции // Материалы всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.) : в 2 ч. – С. 107–114.

8. *Ковалев А. В.* Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 65–69.

9. *Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю.* Исследование механического взаимодействия элементов различных форм и свойств в системе спрессованных тел // Современные проблемы механики и прикладной математики сборник трудов международной школы-семинара. Ответственный редактор: А. Д. Чернышов. – 2004. – С. 280–281.

10. *Ковалев А. В., Хвостов И. Г.* Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). – С. 29–35.

11. *Кретов И. Т., Шашкин А. И., Шахов С. В., Черных В. Б., Белозерцев А. С.* Моделирование процесса вакуум-сублимационной сушки пищевых продуктов в поле СВЧ // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. – 2003. – № 5-6. – С. 65–68.
12. *Ивлев Д. Д., Ковалев А. В., Тихонов С. В.* О статически определяемых состояниях в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 11. – С. 70–74.
13. *Огарков В. Б., Шашкин А. И., Скомарохова Е. А.* Вынужденные колебания материальной точки в среде с сопротивлением // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы. – 2012. – С. 142–145.
14. *Шашкин А. И., Черных В. Б., Антипов С. Т., Шахов С. В.* Математическое моделирование процесса вакуум-сублимационной сушки гранулированного продукта во вращающемся барабане // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2001. – № 2. – С. 123–131.
15. *Яковлев А. Ю.* О влиянии формы внешнего контура включения на напряженно-деформированное состояние упругопластического пространства // Перспективы развития науки и образования сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 160–162.

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
АНИЗОТРОПНОГО КРУГОВОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА
С ПЕРЕМЕННЫМ ДИАМЕТРОМ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ
КРУЧЕНИИ**

А. В. Ковалев, И. Э. Свиридов, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

Работы многих авторов посвящены проблеме определения напряженного и деформированного состояния, например [5], [6], а также, с учетом температуры и неустойчивости [4], [7], [8], [13]. В работах [2], [9] исследуется напряженно-деформированное состояние пластически анизотропного кругового цилиндра или толстостенной трубы при упругопластическом кручении в случае трансляционной анизотропии и анизотропии по Хиллу [12].

В данной работе рассматривается упругопластическое кручение кругового полого цилиндра с переменным диаметром [3], внешняя и внутренняя боковые поверхности которого не сильно отличаются от цилиндрической и описываются выражениями

$$\rho = \alpha + \delta\varphi(z) \quad (1)$$

$$\rho = \beta + \delta\varphi(z),$$

где δ безразмерный малый параметр ($\delta \ll 1$), а $\varphi(z)$ – непрерывная функция на интервале $-l \leq z \leq l$. Начало координат поместим в среднем сечении цилиндра.

Материал предполагается анизотропным и обладает свойствами анизотропии, частными случаями которого являются анизотропия согласно Хиллу и трансляционная анизотропия [11]. Условие пластичности примет вид

$$F \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + G \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} - \frac{k_3 - k_4}{2} \right)^2 + H \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} - \frac{k_5 - k_6}{2} \right)^2 + \quad (2)$$

$$+ L(\tau_{xy} - k_7)^2 + M(\tau_{xz} - k_8)^2 + N(\tau_{yz} - k_9)^2 = k^2,$$

где σ_{ij} , τ_{ij} – компоненты напряжения в декартовой системе координат, F , G , H , L , M , N – параметры анизотропии, k – предел текучести.

Перейдем к компонентам напряжений $\tau_{\theta z}$, $\tau_{\rho\theta}$ в цилиндрической системе координат ρ , θ , z по формулам

$$\tau_{xy} = \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta, \quad \tau_{yz} = \tau_{\theta z} \cos \theta, \quad \tau_{xz} = -\tau_{\theta z} \sin \theta, \quad \sigma_x = -\tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \quad \sigma_y = \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta. \quad (3)$$

Для определения напряженного состояния цилиндра наряду с (2) используются следующие соотношения: уравнения равновесия сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0, \quad (4)$$

В упругой области имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\theta z}$ – компоненты тензора деформаций, v – перемещение.

Закон Гука

$$\tau_{\rho\theta} = 2G\varepsilon_{\rho\theta}, \quad \tau_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}, \quad (6)$$

где G – модуль сдвига.

Введем функцию напряжений $\Phi = \Phi(\rho, z)$, удовлетворяющую уравнению равновесия (4)

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (8)$$

Так как боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузки, то на внешнем и внутреннем контурах поперечного сечения легко определить функцию напряжений, для которой выполняются граничные условия

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \Big|_{L_{1,2}} = 0 \quad \text{или} \quad \Phi \Big|_{L_{1,2}} = \text{const}, \quad (9)$$

где s – длина дуги контура меридионального сечения. Аддитивную константу, не влияющую на распределение напряжений, примем равной нулю $\Phi \Big|_{L_{1,2}} = 0$.

На упругопластической границе L_s выполняются условия непрерывности напряжений

$$[\tau_{\rho\theta}] \Big|_{L_s} = 0, \quad [\tau_{\theta z}] \Big|_{L_s} = 0. \quad (10)$$

В упругой области, удовлетворяя условиям совместности, с учетом (5), (6) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

Величины в соотношениях (2)–(11), имеющие размерность напряжений, отнесем к пределу текучести k , а величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу упругопластической границы ρ_0 при упругопластическом кручении изотропного кругового цилиндра. Символы «р», «е» подчеркивают принадлежность величин к пластической и упругой зоне соответственно.

С помощью метода малого параметра [1] определим напряженное состояние и упругопластическую границу в первом приближении. Представим искомые величины в виде рядов по степеням безразмерного малого параметра $\delta \ll 1$.

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \delta \Phi^{(1)} + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)} + \dots, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)} + \dots, \quad k_i = \delta k_i^{(1)}, \quad F = 1 + \delta f_1 + \dots,$$

$$G = 1 + \delta g_1 + \dots, \quad H = 1 + \delta h_1 + \dots, \quad L = 1 + \delta l_1 + \dots, \quad M = 1 + \delta m_1 + \dots, \quad N = 1 + \delta n_1 + \dots \quad (12)$$

Подставляя разложения (12) в соотношения, необходимые для определения напряженного состояния и приравнивая члены при одинаковых степенях параметра δ , получим системы соотношений для каждого приближения.

В нулевом приближении имеет место задача упругопластического кручения кругового полого изотропного цилиндра, в которой $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(\rho)$ не зависит от z . Подставляя в (2) формулы перехода (3), с учетом разложения (12) и граничных условий (9), определим $\Phi^{(1)p}$ в пластической области

$$\Phi^{(1)p} = \frac{\rho^3 - \beta^3}{3} \left(k_9^{(1)} \cos \theta - k_8^{(1)} \sin \theta - \frac{1}{2} (e_1 \sin^2 \theta + f_1 \cos \theta) \right) - \beta^2 \varphi(z). \quad (13)$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической области определено.

Определим напряженное состояние в упругой области. Функция $\varphi(z)$ является непрерывной, тогда аппроксимируем функцию $\varphi(z)$ полиномом. Получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^n b_k \left(\frac{z}{l}\right)^k. \quad (14)$$

Решение в первом приближении в упругой области будем искать в виде

$$\Phi^{(1)e}(\rho, z) = \sum_{k=0}^n R_k(\rho) \left(\frac{z}{l}\right)^k, \quad (15)$$

где $R_k(\rho)$ неизвестные функции. Подставляя разложение (15) в (11) с учетом (12) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $R_k(\rho)$, которая просто интегрируется. Граничное условие на внутреннем контуре (9) и условие непрерывности (10) при подстановке (12), (8), (13) и (15) для первого приближения примут вид

$$\sum_{k=0}^n R_k(\alpha) \left(\frac{z}{l}\right)^k = -\alpha^3 \sum_{k=0}^m b_k \left(\frac{z}{l}\right)^k \quad (16)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{l} R_k(1) \left(\frac{z}{l}\right)^{k-1} = -\beta^2 \sum_{k=0}^m \frac{b_k k}{l} \left(\frac{z}{l}\right)^{k-1}.$$

Радиус упругопластической границы в первом приближении определяется из условия непрерывности напряжений (10) для компоненты $\tau_{\theta z}$

$$\rho_1 = \left(\frac{\partial \Phi^{(1)p}}{\partial \rho} - \frac{\partial \Phi^{(1)e}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (17)$$

Применим данный алгоритм для кручения конического стержня, для которого функция $\varphi(z) = -\frac{z}{l}$. Тогда напряженное состояние и упругопластическая граница в первом приближении определяются следующими соотношениями

$$\Phi^{(1)p} = \frac{\rho^3 - \beta^3}{3} \left(k_9^{(1)} \cos \theta - k_8^{(1)} \sin \theta - \frac{1}{2}(e_1 \sin^2 \theta + f_1 \cos \theta) \right) + \beta^2 \frac{z}{l} \quad (18)$$

$$\Phi^{(1)e} = \left((\rho^4 - 1) \frac{\beta^2 - \alpha^3}{1 - \alpha^4} + \beta^2 \right) \frac{z}{l} \quad (19)$$

$$\rho_1 = k_9^{(1)} \cos \theta - k_8^{(1)} \sin \theta - \frac{1}{2}(e_1 \sin^2 \theta + f_1 \cos \theta) - 4 \frac{\beta^2 - \alpha^3}{1 - \alpha^4} \frac{z}{l}. \quad (20)$$

Литература

1. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М : Наука, 1978. – 208 с.
2. *Ивлев Д. Д.* О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – Ч. 3. – С. 596–600.

3. Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести / Л. М. Качанов. – М. : Москва, 1949. – 164 с.
4. Ковалев А. В. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 3 (247). – С. 146–151.
5. Ковалев А. В. О статически определимых состояниях в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, А. В. Ковалев, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 11. – С. 70–74.
6. Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации / А. В. Ковалев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 65–69.
7. Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды / К. К. Горностаев, А. В. Ковалев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 135–140.
8. Ковалев А. В. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры / А. В. Ковалев, К. К. Горностаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 3 (25). – С. 176–184.
9. Ковалев А. В. Упругопластическое кручение кругового цилиндра в случае анизотропии согласно Хиллу / А. В. Ковалев, И. Э. Свиридов, Ю. Д. Щеглова // сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16–18 декабря. 2015 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 68–71.
10. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 575 с.
11. Фоминых С. О. Определение упругопластического состояния в толстостенной трубе при условии идеальнопластической трансляционной анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 2(16). – Ч. 3. – С. 150–153.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
13. Шашкин А. И. Вынужденные колебания материальной точки в среде с сопротивлением / В. Б. Огарков, А. И. Шашкин, Е. А. Скомарохова / Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы. – 2012. – С. 142–145.

СГЛАЖИВАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ МЕТОДОМ ОБОБЩЁННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е. О. Кузнецов, Ю. А. Пузино

Научный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В данной работе даётся описание разработанного и реализованного алгоритма сглаживания сетки, использующего обобщенное линейное программирование.

Для оценки пригодности конечно-элементной сетки к применению в численных методах используют метрики качества, которые характеризуют, насколько форма элементов сетки соответствует желаемой. Для треугольных элементов эти функции равны 0 в случае вырожденных треугольников и равны 1 для равносторонних. Таким образом, задача оптимизации сводится к задаче максимизации выбранного функционала качества.

В роли метрик качества треугольника используются следующие функции:

1. минимальный угол треугольников сетки.
2. отношение радиусов: $q = \frac{2r}{R}$, где r и R – радиусы вписанной и описанной окружности.
3. отношение средних: $q = \frac{4\sqrt{3}S}{a^2+b^2+c^2}$, где S – площадь треугольника, а a, b, c – длины его сторон.

Наибольший интерес представляет «отношение средних», т.к. для фиксированной стороны треугольника множество его третьих вершин при фиксированном качестве образует окружность.

Существующие алгоритмы сглаживания имеют свои недостатки: В алгоритме сглаживания по Лапласу недостатком является то, что новый узел конечного элемента находится рядом, но не совпадает с оптимальным. В алгоритме сглаживания методом оптимизации (реализованном в программном пакете Ansys [1]) недостатком является тот факт, что градиент метрики качества наихудшего треугольника может не совпадать с направлением в точку минимума. Тогда градиентный спуск может выполняться зигзагами и даже остановиться на линии равенства двух метрик качества, не достигнув к оптимума.

Разработанный алгоритм выполняет сглаживание сетки, используя решение задачи обобщенного линейного программирования MSW. При этом используется метрика качества треугольников «отношение средних».

Обобщенное линейное программирование – метод решения LP задач, разделяющих некоторое черты с задачами линейного программирования. LP задача определена как конечное множество S и функция f , отображающая подмножество S в некоторое линейно упорядоченное множество. Причем функция f должна удовлетворять условиям:

- **Монотонность:** для любых подмножеств $A \subseteq B \subseteq S$, $f(A) \leq f(B) \leq f(S)$.
- **Локальность:** для любых двух подмножеств $A \subseteq B \subseteq S$ и любого элемента $x \in S$, если $f(A) = f(B) = f(A \cup \{x\})$, то $f(A) = f(B \cup \{x\})$.

Базис LP задачи – подмножество $B \subseteq S$, обладающее свойством, что для любого $C \subset B$ $f(C) < f(B)$. Размерность LP задачи – максимальный размер базиса. Цель обобщенного линейного программирования – нахождение базиса B с наименьшим значением $f(B)$, используя как можно меньше элементов из S .

Алгоритм для решения LP задач, работающий за

$$\min(O(d^2 2^d n), e^{2\sqrt{d \ln(n \sqrt{d})} + O(\sqrt{d} + \ln(n))}),$$

где d – размерность задачи, был предложен в работе [2]. Так как d фиксировано, то данный алгоритм MSW работает за линейное время от n (при размере множества S). Данный алгоритм может быть также применён для нахождения позиции точки внутри полигона, которая максимизирует минимальный угол внутри всех треугольников, образованных соединением данной точки со всеми вершинами полигона, причем размерность задачи равна 3.

Листинг $msw(S, f, C)$:

- (1) *if* $S = C$: *return* C
- (2) *choose random element* x *of* $S \setminus C$
- (3) $B = msw(S \setminus x, f, C)$
- (4) *if* $f(B) \neq f(B \cup \{x\})$: $B = basis(B \cup \{x\})$, $B = msw(S, f, B)$
- (5) *return* B

Условие (4) $f(B) \neq f(B \cup \{x\})$ в большинстве случаев не выполняется, поэтому дорогостоящая функция нахождения базиса $basis(B \cup \{x\})$ вызывается достаточно редко.

Задача сглаживания сетки, максимизирующая минимальное качество сетки с использованием широкого спектра метрик (среди которых и «отношение средних») может быть решена любым алгоритмом обобщенного линейного программирования за линейное время [3]. Базисом данной задачи является набор окружностей, соответствующих областям значений функции «отношение средних» для некоторых сторон полигона при $q = f(B)$. Легко показать, что базис имеет размер 2 или 3:

- $\dim(B) = 2$ соответствует двум окружностям, касающимся в одной точке.
- $\dim(B) = 3$ соответствует трём окружностям, пересекающимся в одной точке, никакие 2 из которых не соприкасаются.

Таким образом, максимальная размерность данной задачи равна 3. Операция $f(B) \neq f(B \cup \{x\})$ алгоритма MSW сводится к простому условию принадлежности точки пересечения окружностей базиса окружности, соответствующей стороне x .

Наибольшую сложность в реализации представляет функция нахождения нового базиса $basis(B \cup \{x\})$.

Для нахождения точки касания прообразов метрик качества двух сторон составляется уравнение:

$$(c1(q) - c2(q)) \cdot (c1(q) - c2(q)) = (r1(q) + r2(q))^2,$$

которое сводится к уравнению 4-й степени относительно q .

Для нахождения точки пересечения прообразов метрик качества трех сторон составляется система квадратных уравнений:

$$(p-c1(q)) \cdot (p-c1(q)) = r1(q)^2, (p-c2(q)) \cdot (p-c2(q)) = r2(q)^2, (p-c3(q)) \cdot (p-c3(q)) = r3(q)^2$$

которая сводится к уравнению 5 степени относительно q . Для нахождения нового базиса находятся пересечения нового элемента x с каждым элементом и парой элементов старого базиса B , и для полученных базисов выполняется проверка нахождения результирующих точек внутри всех окружностей.

Таким образом, для нахождения нового базиса необходимо решить:

- при размере базиса $\dim(B) = 2$: два уравнения 4-й степени и одно 5-й степени.
- при размере базиса $\dim(B) = 3$: по три уравнения 4 и 5 степеней.

Улучшение алгоритма сглаживания.

Немаловажным вопросом является выбор начального базиса для алгоритма MSW. Здесь работает простая эвристика: в процессе сглаживания сетки наиболее вероятно, что наихудшие треугольники улучшат своё качество, но так и останутся наихудшими.

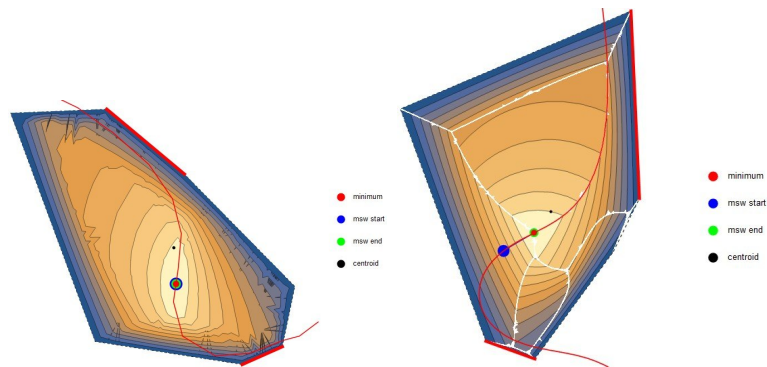


Рис. 1. (а) Начальный базис является решением; (б) Для достижения минимума необходимо выполнить 1 операцию нахождения базиса



Рис. 2. Результаты тестирования предложенной стратегии выбора начального базиса

Таким образом, оптимальный начальный базис должен состоять из двух окружностей, соответствующих сторонам наихудших треугольников в первоначальной триангуляции полигона.

Проведённое тестирование на 2000 случайных полигонах размером от 3 до 9 вершин показало, что при начальном базисе, выбранном согласно предложенной стратегии, в подавляющем большинстве случаев этот базис и является итоговым или требуется выполнить операцию нахождения базиса всего один раз.

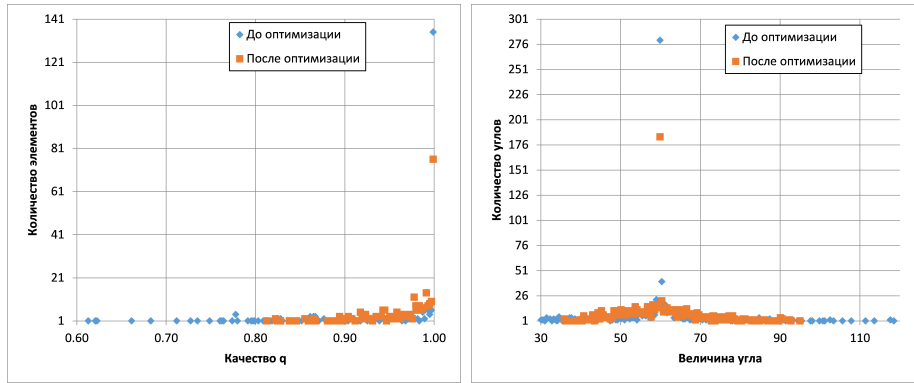


Рис. 3. (a) Распределение качества; (b) Распределение углов до и после оптимизации

После апробации рассмотренного алгоритма сглаживания на заготовке из 290 треугольных элементов были получены распределения величин углов и качества элементов. После проведения оптимизации качество элементов не опускается ниже 0.8, а углы элементов варьируются в диапазоне от 35 до 95 градусов в наихудших случаях.

Литература

1. *Canann S. A., Tristano J. R., Staten M. L.* An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and quad-dominant meshes. // 7th International Meshing Roundtable. – 1998. – pp. 479–494.
2. *Matousek J., Sharir M., Welzl E.* A subexponential bound for linear programming // *Algorithmica*. – 1996. – Volume 16, Issue 4. – pp. 498–516.
3. *Amenta N., Bern M., Eppstein D.* Optimal point placement for mesh smoothing. // *Journal of Algorithms*. – 1999. – Volume 30, Issue 2. – pp. 302-322.

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ
ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ
ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ
(ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)**

П. Н. Кузнецов

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева

В статье рассматривается упругопластическое состояние пластины с круговым отверстием, подкрепленным эллиптическим включением. Материал пластины предполагается изотропным, неоднородным. Определены компоненты напряжения пластины во втором приближении. Рассмотрено влияние неоднородности на напряженное состояние плоскости.

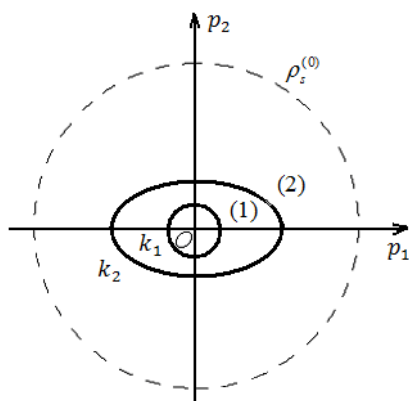


Рис. 1.

Рассмотрим плоскость с круговым отверстием радиуса R , подкрепленную эллиптическим включением (см. рис. 1). Предел текучести материала включения равен k_1 , предел текучести материала плоскости – k_2 . Плоскость находится в состоянии двусосного растяжения под действием усилий на бесконечности p_1, p_2 . (см. рис. 1).

Положим, что уравнение эллиптического контура имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса.

Условие пластичности в зоне включения примем в

виде

$$(\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\theta 1})^2 + 4\tau_{\rho\theta 1}^2 = 4k_1^2, \quad (2)$$

где $\sigma_{\rho 1}, \sigma_{\theta 1}, \tau_{\rho\theta 1}$ – компоненты напряжений в полярной системе координат ρ, θ ; k_1 – предел текучести материала включения.

Условие пластичности вне зоны включения примем в виде

$$(\sigma_{\rho 2} - \sigma_{\theta 2})^2 + 4\tau_{\rho\theta 2}^2 = 4k_2^2, \quad (3)$$

где $\sigma_{\rho 2}, \sigma_{\theta 2}, \tau_{\rho\theta 2}$ – компоненты напряжений в полярной системе координат ρ, θ ; k_2 – предел текучести материала плоскости.

Все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести материала включения k_1 , все линейные размеры будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$. Обозначим: $k_2/k_1 = \chi$. Величины $(a - b)/2\rho_s^{(0)}, (p_1 - p_2)/2k_1$ будем считать достаточно малыми, порядка δ и обозначим

$$\frac{(a - b)}{2\rho_s^{(0)}} = \delta_1, \quad \frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} = \delta_2. \quad (4)$$

Далее примем

$$\delta_1 = d_1\delta, \quad \delta_2 = d_2\delta, \quad d_i = \text{const}, \quad 0 \leq d_i \leq 1.$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij}\delta + \sigma''_{ij}\delta^2 + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho'_s\delta + \rho''_s\delta^2 + \dots, \quad (5)$$

где ρ_s – радиус пластической зоны.

В статье [2] были определены компоненты напряжения в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad \sigma_{\rho 1}^{(0)p} = 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\ \sigma_{\rho 2}^{(0)p} = 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = 2\chi \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi, \\ \sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{\chi}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{\chi}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = R/r_s^{(0)}$, $\beta = (a+b)/2\rho_s^{(0)}$.

Компоненты напряжения в первой и второй областях, согласно [2], равны

$$\sigma_{\rho 1}^{pp} = \sigma_{\theta 1}^{pp} = \tau_{\rho\theta 1}^{pp} = 0, \quad \sigma_{\rho 1}^{pp} = \sigma_{\theta 1}^{pp} = \tau_{\rho\theta 1}^{pp} = 0. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{pp} = \sigma_{\theta 2}^{pp} = \frac{2(1-\chi_1)}{\rho} d_1 \times \left([\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ \left. + [\sin(\sqrt{3} \ln \beta) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \beta)] \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_{\rho\theta 2}^{pp} = \frac{4(1-\chi_1)}{\rho} d_1 \times \left(\cos(\sqrt{3} \ln \beta) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \sin(\sqrt{3} \ln \beta) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right) \sin 2\theta.$$

Аналогично [2], можно получить компоненты напряжения в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{te} = 2d_1(1-\chi) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right] \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta + \\ + 4d_1(1-\chi) \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \cos 2\theta - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{te} = 2d_1(1-\chi) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right] \left(\frac{1}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + \\ + 4d_1(1-\chi) \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \left(-\frac{2}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{te} = 2d_1(1-\chi) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \right] \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \\ + 4d_1(1-\chi) \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \sin 2\theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) d_2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение эллипса (1) перепишем в виде

$$\frac{x^2}{(\beta + \delta d_1)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \delta d_1)^2} = 1.$$

Переходя к полярным координатам [1, 2], получим

$$\rho_{\varepsilon l} = \beta + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 \frac{d_1^2}{\beta} (1 - \cos 4\theta) + \dots \quad (10)$$

Согласно [1], граничные условия при $\rho = \beta$ для второго приближения запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \sigma_{\rho 1}^{\prime\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 1}^{\prime p}}{d\rho} \rho'_{\varepsilon l} + \frac{d^2\sigma_{\rho 1}^{(0)p}}{d\rho^2} \frac{\rho_{\varepsilon l}^{\prime 2}}{2} + \frac{d\sigma_{\rho 1}^{(0)p}}{d\rho} \rho_{\varepsilon l}^{\prime\prime} + \\ & + (\sigma_{\theta 1}^{(0)p} - \sigma_{\rho 1}^{(0)p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}^{\prime 2}}{\beta^2} - 2\tau_{\rho\theta 1}^{\prime p} \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta} = \sigma_{\rho 2}^{\prime\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{\prime p}}{d\rho} \rho'_{\varepsilon l} + \frac{d^2\sigma_{\rho 2}^{(0)p}}{d\rho^2} \frac{\rho_{\varepsilon l}^{\prime 2}}{2} + \\ & + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho_{\varepsilon l}^{\prime\prime} + (\sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}^{\prime 2}}{\beta^2} - 2\tau_{\rho\theta 2}^{\prime p} \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta}, \\ & \tau_{\rho 1}^{\prime\prime p} - (\sigma_{\theta 1}^{(0)p} - \sigma_{\rho 1}^{(0)p}) \left(\frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}^{\prime\prime}}{\beta} - \frac{\rho'_{\varepsilon l} \dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta^2} \right) - (\sigma_{\theta 1}^{\prime p} - \sigma_{\rho 1}^{\prime p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta} + \\ & + \frac{d}{d\rho} \left[\tau_{\rho\theta 1}^{\prime p} - (\sigma_{\theta 1}^{(0)p} - \sigma_{\rho 1}^{(0)p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta} \right] \rho'_{\varepsilon l} = \tau_{\rho 2}^{\prime\prime p} - (\sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p}) \left(\frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}^{\prime\prime}}{\beta} - \frac{\rho'_{\varepsilon l} \dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta^2} \right) - \\ & - (\sigma_{\theta 2}^{\prime p} - \sigma_{\rho 2}^{\prime p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta} + \frac{d}{d\rho} \left[\tau_{\rho\theta 2}^{\prime p} - (\sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p}) \frac{\dot{\rho}_{\varepsilon l}}{\beta} \right] \rho'_{\varepsilon l}, \end{aligned} \quad (11)$$

где точка наверху означает дифференцирование по θ .

Из (6)–(8), (10), (11) получим

$$\sigma_{\rho 2}^{\prime\prime p}|_{\rho=\beta} = (1 - \chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} (-5 + 6 \cos 4\theta), \quad \tau_{\rho 2}^{\prime\prime p} = 6(1 - \chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} \sin 4\theta. \quad (12)$$

Из (3), (5), (8) для компонентов напряжения в зоне 2 справедливо

$$\begin{aligned} (\sigma_{\rho 2}^{\prime\prime p} - \sigma_{\theta 2}^{\prime\prime p}) &= \frac{16(1 - \chi)^2 d_1^2}{\chi \rho^2} \times [\cos^2(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \cos^2(\sqrt{3} \ln \rho) + \\ & + 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \cos(\sqrt{3} \ln \rho) \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \\ & + \sin^2(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \sin^3(\sqrt{3} \ln \rho)] \sin^2 2\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_p^{\prime\prime p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{\prime\prime p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{\prime\prime p} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (14)$$

Из (13), (14) для второй области имеет место

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \\ & = \frac{16}{\chi} (1 - \chi)^2 d_1^2 \times [\cos^2(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \cos^2(\sqrt{3} \ln \rho) + \\ & + 2 \cos(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \cos(\sqrt{3} \ln \rho) \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+ \sin^2(\sqrt{3} \ln \beta) \cdot \sin^2(\sqrt{3} \ln \rho)] \sin^2 2\theta.$$

Решение представим в виде суммы однородной компоненты $\Phi_{одн}$ и неоднородной $\Phi_{неодн}$

$$\Phi = \Phi_{одн} + \Phi_{неодн}. \quad (16)$$

Тогда имеет место

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi_{одн}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi_{одн}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi_{одн}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17)$$

Решение в зоне 2 будем искать в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^2}''^{p одн} = \sigma_{\theta^2}''^{p одн} &= C_{00} + \frac{1}{\rho} \{ [-15C_{41} + \sqrt{15}C_{42}] \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \\ &+ [-\sqrt{15}C_{41} - 15C_{42}] \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho^2}''^{p одн} &= 4\sqrt{15} \frac{1}{\rho} [C_{42} \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - C_{41} \sin(\sqrt{15} \ln \rho)] \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

где C_{00} , C_{41} , C_{42} – некоторые постоянные.

Из (12), (18) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^2}''^{p одн} &= -5(1 - \chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} + 6 \frac{d_1^2}{\beta} (1 - \chi) \frac{1}{\rho} \left\{ \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - \frac{\sqrt{15}}{5} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta^2}''^{p одн} &= \sigma_{\rho^2}''^{p одн}, \\ \tau_{\rho^2}''^{p одн} &= 6\sqrt{15} \frac{d_1^2}{\beta} (1 - \chi) \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{1}{5} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (15) определим неоднородные решения для функции напряжений

$$\begin{aligned} \Phi_{неодн} &= \frac{2d_1^2(1 - \chi)^2}{\chi} \left\{ \ln \rho + \frac{1}{8} \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{\sqrt{3}}{24} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin \left(3\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right] \cos 4\theta \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (14), (20) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho^2}''^{p неодн} &= \frac{d_1^2(1 - \chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 4 - \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \right. \\ &\left. + \left[-32 + 7\sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 11 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right] \cos 4\theta \right\}, \\ \sigma_{\theta^2}''^{p неодн} &= \frac{d_1^2(1 - \chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 4 - \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 7 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \right. \\ &\left. + \left[7\sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 3 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right] \cos 4\theta \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tau_{\rho\theta 2}'' p \text{ неодн} = -\frac{d_1^2(1-\chi)^2}{\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 4 + 7 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \sin 4\theta.$$

Общее решение определяется суммой решений

$$\sigma_{\rho 2}'' p = \sigma_{\rho 2}'' p \text{ одн} + \sigma_{\rho 2}'' p \text{ неодн}, \quad \sigma_{\theta 2}'' p = \sigma_{\theta 2}'' p \text{ одн} + \sigma_{\theta 2}'' p \text{ неодн}, \quad \tau_{\rho\theta 2}'' p = \tau_{\rho\theta 2}'' p \text{ одн} + \tau_{\rho\theta 2}'' p \text{ неодн},$$

откуда, согласно (19), (21), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}'' p &= -5(1-\chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} + \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 4 - \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} + \\ &+ 6 \frac{d_1^2}{\beta} (1-\chi) \frac{1}{\rho} \left\{ \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - \frac{\sqrt{15}}{5} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \cos 4\theta + \\ &+ \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ -32 + 7\sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 11 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta 2}'' p &= -5(1-\chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} + \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ -4 - \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 7 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} + \\ &+ 6 \frac{d_1^2}{\beta} (1-\chi) \frac{1}{\rho} \left\{ \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - \frac{\sqrt{15}}{5} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \cos 4\theta + \\ &+ \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 7\sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) - 3 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho 2}'' p &= 6\sqrt{15} \frac{d_1^2}{\beta} (1-\chi) \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \frac{1}{5} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \sin 4\theta - \\ &- \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{\chi} \frac{1}{\rho^2} \left\{ 4 + 7 \cos \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) + \sqrt{3} \sin \left(2\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\beta} \right) \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Условие сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе запишется в виде

$$\sigma_{\rho 2}'' p \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}'' e \Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta 2}'' p \Big|_{\rho=1} = \tau_{\rho\theta}'' e \Big|_{\rho=1}. \quad (23)$$

Из (22), (23) получим

$$\sigma_{\rho}'' e \Big|_{\rho=1} = A + B \cos 4\theta, \quad \tau_{\rho\theta}'' e \Big|_{\rho=1} = D \sin 4\theta, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -5(1-\chi) \frac{d_1^2}{\beta^2} + \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \left\{ 4 + \sqrt{3} \sin(2\sqrt{3} \ln \beta) + \cos(2\sqrt{3} \ln \beta) \right\}, \\ B &= 6 \frac{d_1^2}{\beta} (1-\chi) \left\{ \cos(\sqrt{15} \ln \beta) + \frac{\sqrt{15}}{5} \sin(\sqrt{15} \ln \beta) \right\} + \\ &+ \frac{d_1^2(1-\chi)^2}{2\chi} \left\{ -31 - 7\sqrt{3} \sin(2\sqrt{3} \ln \beta) - 11 \cos(2\sqrt{3} \ln \beta) \right\} \\ D &= 6\sqrt{15} \frac{d_1^2}{\beta} (1-\chi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \cos(\sqrt{15} \ln \beta) - \frac{1}{5} \sin(\sqrt{15} \ln \beta) \right\} - \end{aligned}$$

$$-\frac{d_1^2(1-\chi)^2}{\chi} \left\{ 4 + 7 \cos(2\sqrt{3} \ln \beta) - \sqrt{3} \sin(2\sqrt{3} \ln \beta) \right\}.$$

Решение в упругой области, согласно [1], примем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{\prime\prime e} &= \frac{A}{\rho^2} + \left\{ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) a_4'' + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{3}{\rho^4} \right) b_4''' \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime\prime e} &= -\frac{A}{\rho^2} + \left\{ \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) a_4'' + \left(-\frac{3}{\rho^6} + \frac{1}{\rho^4} \right) b_4''' \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime\prime e} &= \left\{ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{2}{\rho^4} \right) a_4'' + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) b_4''' \right\} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (24), (25) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{\prime\prime e} &= \frac{A}{\rho^2} + \left\{ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) B + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{3}{\rho^4} \right) D \right\} \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime\prime e} &= -\frac{A}{\rho^2} + \left\{ \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) B + \left(-\frac{3}{\rho^6} + \frac{1}{\rho^4} \right) D \right\} \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime\prime e} &= \left\{ \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{2}{\rho^4} \right) B + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4} \right) D \right\} \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

где величины A , B , D определяются из (24).

Литература

1. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М. : Наука, 1978.
2. *Кузнецов П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным включением, ограниченными эллипсами, при двусосном растяжении // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2009. – С. 118–126.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ДВУМЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

С. Ф. Кузнецов

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Рассматривается установившееся течение несжимаемой вязкопластической среды без учета инерционных эффектов, вызванное вращением одной осесимметричной поверхности внутри другой с постоянной угловой скоростью. Особенность вязкопластических течений связана с наличием так называемых застойных зон, в которых среда ведет себя как твердое тело. Геометрия застойных зон зависит от искривленности поверхностей, а также других факторов, например, угловой скорости вращения тела. Для решения задач вязкопластического течения известен вариационный метод [1], который весьма эффективен для решения таких задач. Но при наличии неизвестных границ, подобных застойным зонам, применение представляет некоторые трудности. Для решения поставленной задачи используется эвристический метод [2], преимущество которого перед другими методами численного решения состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса решается краевая задача для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Получено поле скоростей, по которому найдены характеристики течения. Определена граница застойных зон и показана особенность её формы.

1. Постановка задачи. Рассматривается установившееся течение несжимаемой вязкопластической среды между неподвижной сферой радиуса R и находящимся внутри нее эллипсоидом при отсутствии внешних сил. Эллипсоид вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω_0 . В качестве модели используется вязкопластическое тело Бингама-Шведова. Уравнение движения сплошной среды при отсутствии внешних массовых сил

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

условие несжимаемости

$$V_{i,i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Используется сферическая система координат r, φ, θ . В случае вращения тела отлична от нуля лишь одна компонента скорости течения среды $V_\varphi = V(r, \theta)$. Контуры сечений подвижной и неподвижной поверхностей, между которыми заключена вязкопластическая среда, обозначим Γ_0 и Γ_1 соответственно. Получим два граничных условия

$$\omega \Big|_{\Gamma_0} = \omega_0, \quad \omega \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1)$$

которые выполняются в случае, если в области течения нет застойных зон.

Дифференциальное уравнение движения несжимаемой вязкопластической среды в сферических координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mu \left(r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r}\omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_0 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) + \\ & + \frac{\tau_0}{\sin \theta} \left(\frac{r\omega_\theta^2 \omega_{rr} + 4\omega_r \omega_\theta^2 + 3r^2 \omega_r^3 + r\omega_r^2 \omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r \omega_\theta \omega_{r\theta}}{(\omega_\theta^2 + r^2 \omega_r^2)^{3/2}} + \frac{2\omega_0 \operatorname{ctg} \theta}{r(\omega_\theta^2 + r^2 \omega_r^2)^{1/2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если внутреннюю поверхность вращать с малой угловой скоростью, то она будет вовлекать в движение небольшую часть вязкопластической среды, внешняя граница Γ которой

заранее неизвестна и должна быть определена в ходе решения задачи. За границей среда ведет себя как твердое тело, и эта область носит название застойной зоны.

Граничные условия при наличии застойных зон запишем в виде

$$\omega \Big|_{\Gamma_0} = \omega_0, \quad \omega \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \partial\omega/\partial n = 0, \quad (3)$$

где n – нормаль к границе застойных зон.

Таким образом, функция ω будет решением краевой задачи (2), (3) для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого угловую скорость отнесем к величине ω_0 , линейные размеры к большой полуоси эллипса.

Краевая задача (2), (3) в безразмерных переменных примет вид:

$$r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r}\omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_0 \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{H \sin \theta} \left(\frac{r\omega_{\theta}^2\omega_{rr} + 4\omega_r\omega_{\theta}^2 + 3r^2\omega_r^3 + r\omega_r^2\omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r\omega_{\theta}\omega_{r\theta}}{(\omega_{\theta}^2 + r^2\omega_r^2)^{3/2}} + \frac{2\omega_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r(\omega_{\theta}^2 + r^2\omega_r^2)^{1/2}} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\omega \Big|_{\Gamma_0} = \omega_0, \quad \omega \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \partial\omega/\partial n = 0, \quad (5)$$

где $H = \mu\omega_0/\tau_0$ – безразмерный параметр. Величина $S = H^{-1}$ носит название параметра Сен-Венана.

2. Метод решения. Для решения краевой задачи (4), (5) воспользуемся итерационным методом [2]. В уравнении (4) от переменных (r, θ) перейдем к переменным (ξ, η) с помощью замены

$$\xi = \xi(r, \theta), \quad \eta = \eta(r, \theta), \quad (6)$$

При введении переменной ξ производными от ω по η и смешанными производными можно пренебречь по сравнению с остальными членами, так как согласно методу [2] переменная ξ подобрана таким образом, что изменение ω вдоль линии $\xi = \text{const}$ должно быть малым. Тогда функция ω будет решением краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)\omega_{\xi\xi} + (r^2\xi_{rr} + 4r\xi_r + \xi_{\theta\theta} + 3\xi_{\theta} \operatorname{ctg} \theta)\omega_{\xi} + \frac{1}{H \sin \theta} \left((r^2\xi_{\theta}^2\xi_{rr} + 4r\xi_r\xi_{\theta}^2 + 3r^2 + r^2\xi_r^2\xi_{\theta\theta} - 2r^2\xi_r\xi_{\theta}\xi_{r\theta})(\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-3/2} + 2\xi_{\theta} \operatorname{ctg} \theta (\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-1/2} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\omega \Big|_{\xi=1} = 1, \quad \omega \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (8)$$

Переменная η при интегрировании уравнения (7) играет роль параметра. Нулевое приближение в (6) обозначим через ξ^0 . Решив задачу (7), (8), найдем $\omega^0(\xi^0, \eta)$. Обозначив $\omega^0(\xi^0, \eta)$ через ξ^1 , для нахождения следующего приближения решим краевую задачу, аналогичную задаче (7), (8), с переменными (ξ^1, η) . Так же поступаем на последующих итерациях.

Наиболее легко реализуемый итерационный процесс получается, если на каждом шаге полагать $\eta = \theta$. При таком выборе переменной η после обратного перехода от переменных (ξ, η) к переменным (r, θ) уравнение (7) останется линейным дифференциальным уравнением

$$\omega_{rr} + \left(4r\xi_r^2 - \frac{\xi_{rr}\xi_{\theta}^2}{\xi_r} + \xi_r\xi_{\theta\theta} + 3\xi_r\xi_{\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) (\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-1}\omega_r + \frac{1}{H \sin \theta} \left((r^2\xi_{\theta}^2\xi_{rr} + 4\xi_r\xi_{\theta}^2 + 3r^3\xi_r^3 + r^2\xi_r^2\xi_{\theta\theta} - 2r^2\xi_r\xi_{\theta}\xi_{r\theta})(\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-3/2} + 3\xi_{\theta} \operatorname{ctg} \theta (\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-1/2} \right) \xi_r^2 (\xi_{\theta}^2 + r^2\xi_r^2)^{-1} = 0, \quad (9)$$

$$\omega \Big|_{\Gamma_0} = 1, \quad \omega \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

Переменная θ входит в (9) в качестве параметра.

3. Вращение эллипсоида в неподвижной сфере. Контуры сечений эллипсоида и сферы заданы (в безразмерных переменных) уравнениями:

$$r = R_0(\theta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}, \quad r = R_1(\theta) = R,$$

где ε – малая полуось эллипса ($0 < \varepsilon < 1$), R – радиус сферы ($R > 1$). При $\varepsilon = 1$ получим задачу о вращении сферы в сфере [3].

Размеры области течения зависят от геометрии эллипсоида (величины малой полуоси эллипса ε) и значений безразмерного параметра $H = \mu\omega_0/\tau_0$. Граница зоны течения имеет эллипсоидальную форму. С увеличением H граница приближается к сфере и разделяется на несколько частей. Части в окрестности полюсов имеют конусообразную форму, вершина которой касается полюса эллипсоида, и остаются там постоянно при любом значении H ; другая часть сосредоточена на поверхности сферы и вытянута в направлении полюсов. При увеличении H зона на сфере уменьшается, превращаясь в точку, затем исчезает.

Контуры сечений эллипсоида и сферы заданы (в безразмерных переменных) уравнениями:

$$r = R_0(\theta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta}}, \quad r = R_1(\theta) = R,$$

где ε – малая полуось эллипса ($0 < \varepsilon < 1$), R – радиус сферы ($R > 1$).

В рассматриваемом случае размеры области течения зависят от величины малой полуоси эллипсоида ε и значений параметра $H = \mu\omega_0/\tau_0$. Граница зоны течения имеет эллиптическую форму. При малых угловых скоростях область течения среды находится между эллипсоидом и застойной зоной, которая примыкает к внешней сфере. С увеличением параметра H граница приближается к сфере и при некотором критическом значении H^* параметра H касается сферы на экваторе. При дальнейшем увеличении H зона разделяется на две симметричные относительно плоскости экватора части конусообразной формы, вершина которой касается полюса эллипсоида, и остаются там постоянно при любом значении H . В качестве характеристики течения вычислен объем среды, вовлеченный в сдвиговое течение вращающимся телом.

Литература

1. Мосолов П. П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических тел / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 114 с.
2. Чернышов А. Д. Об одном эвристическом методе решения нелинейных задач эллиптического типа для двусвязных областей / А. Д. Чернышов // ПММ. – 1978. – Т. 42, вып. 2. – С. 321–326.
3. Кузнецов С. Ф. Течение вязкопластического материала между двумя концентрическими сферами / С.Ф. Кузнецов, А. Д. Чернышов // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 133–139.

ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ МЕТАЛЛОВ ПРИ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОЙ ОБРАБОТКЕ – ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА

В. М. Леонов

Тульский государственный университет

В соответствии с дальнейшим анализом характеристик процесса магнитно-импульсной обработки материалов на базе реализующей программы Tetra Compound v.1.1, свидетельство № 2013610558 на основе соотношений Трещева А. А. [1, 2]. Рассмотрение тестовых сплавов на примере АМг2М в конечно-элементной модели позволяет производить детальный анализ всех параметров напряженно-деформированного состояния для любой выбранной области исходной заготовки. Рассмотрение формоизменения образца при длительности процесса более 25 мкс. для осевого и продольного сечения, а также сечения под углом 45° от оси заготовки на операции отбортовки бокового отверстия. Расстояние выбранных точек от края отверстия составляет 5 мм. Расчет с однослойной сеткой конечных элементов в форме тетраэдра (24 тетраэдра образуют единичный прямоугольный параллелепипед) с четырьмя узлами регулярной равномерной решетки, каждый узел обладает шестью степенями свободы в 3-D постановке для решаемой задачи. Результирующее значение числа элементов находится в пределах $2 \dots 6 \cdot 10^4$ элементов. Рассмотрение протекающих процессов формоизменения материала на операции отбортовки бокового отверстия предполагает с учетом возможного масштабирования в дальнейшем широкий спектр возможных решений, направленных на оптимизацию существующих и разработку новых технологий с учетом фактора замещения импортной продукции. При генерации формировалась регулярная неравномерная сетка конечных элементов для достижения требуемой степени дискретизации в местах с наибольшей интенсивностью деформаций.

При формоизменении цилиндрических оболочек возникают существенные дополнительные усилия в их срединной поверхности. Процесс сложного формоизменения может быть сведен к системе локально-простых процессов. В ходе которых рассмотрение траектории деформирования может быть представлено в поэтапном виде. Ресурсоемкость данного расчета очевидна. Вычисление, хранение данных и последующий анализ также являются самостоятельной задачей. В связи с этим необходимо ограничить рассматриваемую область.

Проводимый анализ распределения компонент тензоров в объеме материала и во времени позволяет отследить их пространственно-временное изменение с целью оценки темпов и характера взаимно относительного распределения. Для компонент тензора, обеспечивающих наибольший вклад в изменение интенсивности и работы деформации подобный подход позволяет сформулировать ряд промежуточных параметров и результирующий критерий для оценки меры исчерпания ресурса пластичности. Вклад каждой из компонент тензора в совокупный объем работы по формоизменению материала.

Достижение различных степеней деформации на одинаковом временном интервале происходит за счет перераспределения между компонентами в тензоре деформаций при изменении параметров внешнего электромагнитного импульса. Соответственно происходит перераспределение компонент в тензоре напряжений при изменении общей работы по формоизменению образца и каждого из рассматриваемых фрагментов материала. Важность анализа обусловлена уточнением величины предельного неразрушающего воздействия при формоизменении материалов.

Различие в диаграмме напряжений для выбранных точек позволяет сделать вывод о соотношении нормальных и касательных напряжений и необходимости более детального анализа компонент тензоров напряжений и деформаций (рис. 1), а также взаимосвязанных значений накопленной работы по формоизменению материала. Для верхней точки в осевом сечении сдвиговые деформации преобладают над нормальными, последние являются преобладающими в крайней точке поперечного сечения заготовки.

Характер распределения компонент тензора деформаций во времени по краю для половины отверстия представлен на рис. 1. Из ближайшего рассмотрения не сложно отметить, что материал при больших степенях деформации в отдельных сегментах приближается значительно быстрее прочих к исчерпанию ресурса пластичности.

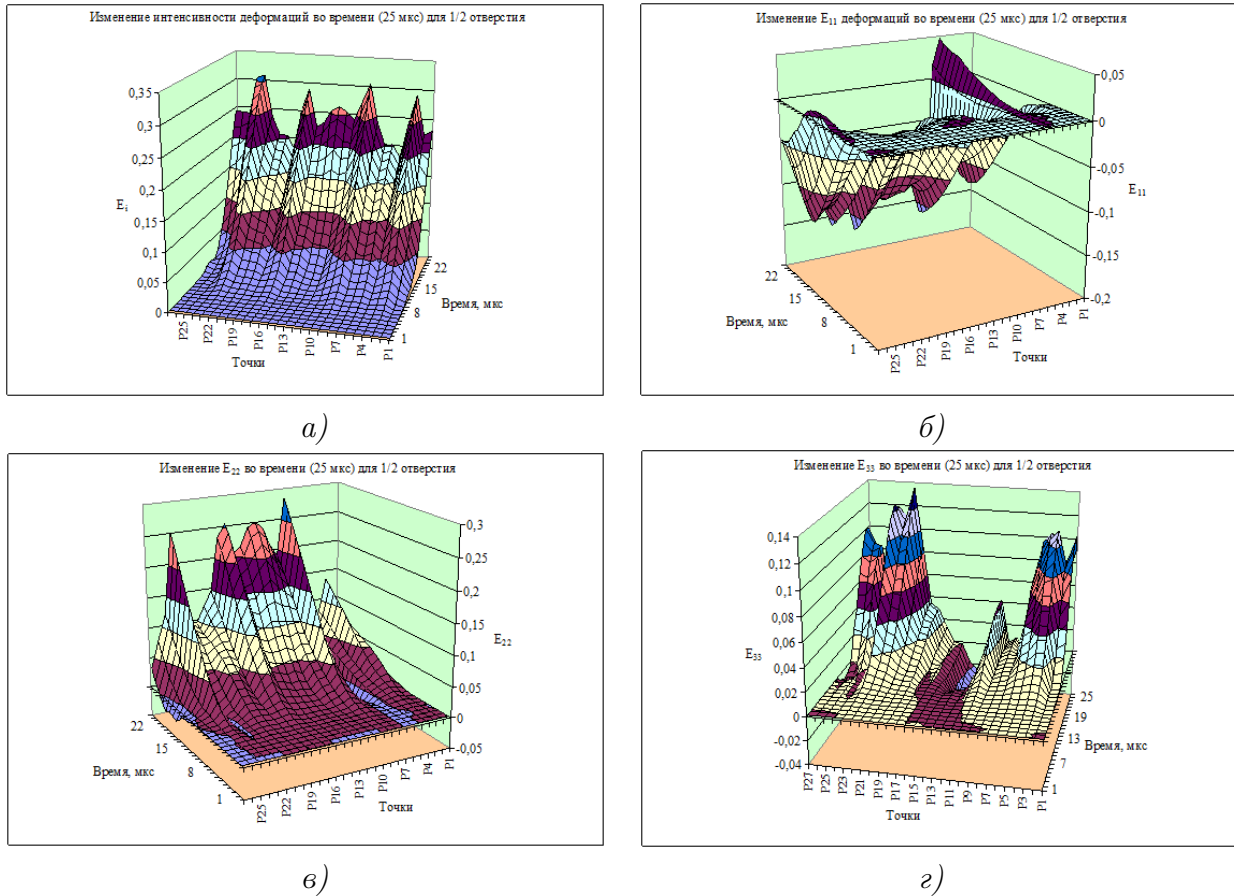


Рис. 1. Распределение характеристик для 1/2 отверстия по высоте (5 мм от края).

а – ε_i ; б – ε_{11} ; в – ε_{22} ; г – ε_{33}

Из ранее проведенных расчетов и последующего анализа значений деформаций в точках 1 и 3 можно сделать вывод, что операцию отбортовки отверстия в цилиндрической заготовке предпочтительнее проводить при частоте разряда большей 15 кГц для снижения деформаций на крае отверстия при постоянном угле отбортовки. Так, например, для радиуса 0.29 при увеличении частоты с 8 до 20 кГц интенсивность деформаций снизится с 25 до 20 %.

Построенные диаграммы помимо иллюстративного аспекта позволяют оценить цикличность влияния внешнего импульса применительно к каждой из компонент тензора в объеме деформируемой заготовки.

При различной частоте, как было отмечено ранее, достигается различная предельная деформация за выбранный временной интервал. Распространение упругопластических де-

формаций в объеме материала зависит от формы внешнего импульса, и конфигурации деформируемого материала. Для предварительного рассмотрения были выбраны точки на краю отверстия, в зоне наиболее интенсивного формоизменения – в осевом сечении, в поперечном сечении и на краю отверстия, под углом 45 градусов к вертикальной оси. Серьезные различия в пластической зоне для каждой из точек на диаграмме нагружения позволяют сделать вывод о различном вкладе сдвиговых компонент тензоров в общую работу по формоизменению.

Различие в диаграмме напряжений для выбранных точек позволяет сделать вывод о различном соотношении нормальных и касательных напряжений и необходимости более детального анализа компонент тензоров напряжений и деформаций, а также взаимосвязанных значений накопленной работы по формоизменению материала. Для верхней точки в осевом сечении сдвиговые деформации преобладают над нормальными, последние являются преобладающими в крайней точке поперечного сечения заготовки.

Зависимость работы деформации от частоты носит минимаксный характер. Точка минимакса работы деформации достигается при значении относительного диаметра отверстия 0.28 и рабочей частоты 9,27 кГц. Значение работы в точке минимакса 24.5 Дж. Изменение относительного диаметра отверстия от точки минимакса в обе стороны ведет к увеличению работы деформации на 30–47 %. Стоит отметить, что уменьшение относительного диаметра отверстия с 0.4 до 0.14 приводит к росту напряжений в среднем в 1.45 раза и деформаций в 2 раза вблизи края отверстия, точки 1, 3.

Предпочтительной с точки зрения минимума работы деформации является величина относительного диаметра отверстия 0.26. Увеличение работы деформации при увеличении относительного диаметра отверстия до 0.4 обусловлено увеличением объема деформируемого материала, несмотря на общее снижение показателей объемного напряженно-деформированного состояния.

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СПАЕ МЕТАЛЛА СО СТЕКЛОМ ПРИ РЕЗКОМ ОХЛАЖДЕНИИ

О. Н. Любимова, Э. П. Солоненко

Дальневосточный федеральный университет

Исследование технологических напряжений в двухслойном цилиндрическом спае связано с оптимизацией и нахождением режима изготовления стеклометаллокомпозитных стержней со стеклянным сердечником [1]. Технологические и остаточные напряжения являются следствием существенной разницы коэффициентов температурного расширения и модулей упругости. Напряжения, возникшие в стекле, пропорциональны степени расхождения температурных кривых спаиваемых материалов, на границе стекла с металлом появляются силы, действующие нормально и касательно к поверхности (срезающие). В работах, посвященных спаям различных материалов, огромное внимание уделяется режиму охлаждения [2]. После сварки, проведенной при высокой температуре, стекло находится в вязком состоянии, спай быстро остывает на воздухе и следует в своем сокращении за металлом до верхней температуры отжига, затем при медленном охлаждении стекло будет следовать за металлом до нижней температуры отжига и проявлять свои теплофизические свойства.

При резком охлаждении (температурном скачке) в стекле возможно формирование слоистой структуры с различными свойствами, что экспериментально подтверждается при испытании таких спаяв на растяжение. Отмечено характерное скопление дефектов в виде цилиндрического слоя в стекле со стороны зоны соединения с металлом и внутренний стеклянный слой без видимых трещин (рис. 1).

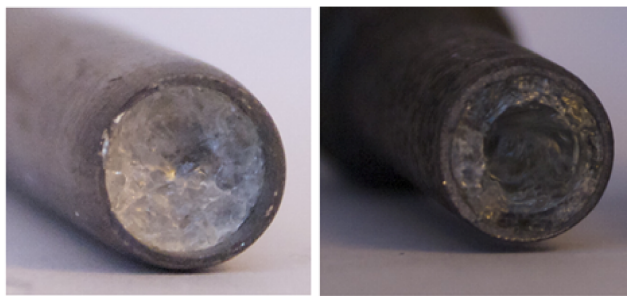


Рис. 1. Характер разрушения спая: а – медленное охлаждение; б – быстрое охлаждение

В настоящей работе технологические напряжения в цилиндрическом спае стекла с металлом предлагается исследовать в рамках модели Тула–Нарайанасвами–Мойнихана–Мазури-на [3–5] с использованием методов решения задач термоупругости для слоистых композитов. Результатом данной работы является метод расчета термических напряжений в цилиндрическом спае, с учетом изменяющейся структуры стекла, в результате резкого охлаждения.

Решается задача о деформировании осесимметричного цилиндрического спая, который можно представить как длинный многослойный цилиндр, при резком одновременном изменении температуры на $\Delta T = T_2 - T_1$. В этом случае, изменение свойств стекла Δp_e , состоит из мгновенного Δp_i и релаксационного Δp_s (рис. 2), при произвольном

температурно-временном режиме изменение p имеет аналитический вид [6]

$$p(t) = p(0) + \Delta p_i + \Delta p_s (1 - M_p(t)),$$

$$M_p(t) = \exp\left(-\left(\frac{\xi(t)}{\tau_0}\right)^b\right),$$

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\eta_0}{\eta(t')} dt',$$
(1)

где $\xi(t)$ – приведенное время, $\tau_0 = \eta_0/K'$, η_0 – вязкость сравнения, b , K' – кинетические параметры модели.

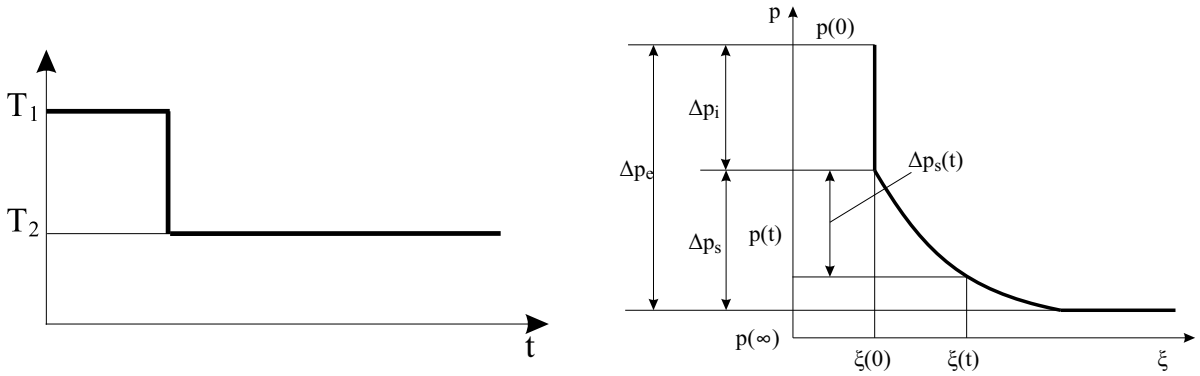


Рис. 2. Характерный отклик свойства p стекла на скачкообразное изменение температуры [6]

При определении технологических напряжений с учетом релаксационного вклада, предлагается использовать дискретный алгоритм расчета изложенный в [5]. Разбив стеклянный цилиндр на $K - 1$ слой (K -й слой – внешняя металлическая оболочка), на n -ом шаге по времени, напряжения для каждого слоя $\sigma_{res}^{(k)}(t_n)$ могут быть представлены в виде

$$\sigma_{res}^{(k)}(t_n) = \sigma^{(k)}(t_n) - \sigma_{rel}^{(k)}(t_n),$$
(2)

где $k = 1, \dots, K - 1$, $\sigma^{(k)}(t_n)$ – напряжения, получаемые на каждом шаге по времени, из решения задачи термоупругости, при условиях идеального контакта на границах сопряжения слоев и отсутствия нагрузки на торцы и внешнюю поверхность цилиндра, $\sigma_{rel}^{(k)}(t_n)$ – отрелаксированные напряжения к данному моменту времени, которые для каждого шага по времени определяются как

$$\sigma_{rel}^{(k)}(t_n) = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - M(\xi(t_n) - \xi(t_i))) \Delta\sigma^{(k)}(t_i),$$

$$\Delta\sigma^{(k)}(t_0) = 0, \quad \Delta\sigma^{(k)}(t_n) = \sigma^{(k)}(t_n) - \Delta\sigma^{(k)}(t_{n-1})$$
(3)

здесь $\xi(t)$ – приведенное время, зависит от времени релаксации τ' свойства при произвольно выбранном температурном режиме. Время релаксации может быть определено как линейно зависящее от вязкости, а изменение вязкости соответствует выражению (1)

$$\tau' = \frac{\eta(T, T_f)}{K},$$

$$\log \eta(T, T_f) = \log \eta(T_0) + (T_f^{-1} - T_0^{-1})B_e + (T^{-1} - T_f^{-1})B_m,$$

где $\eta(T_0)$, T_0 – начальные значения вязкости и температуры, при этом начальная температура должна удовлетворять условию метастабильного равновесия, B_e и B_m – параметры, характеризующие температурные зависимости вязкости в условиях равновесной и замороженной структуры стекла, $T_f(t)$ – фиктивная температура. Определение $\sigma^{(k)}(t_n)$ из термоупругой задачи характеризуется наличием констант интегрирования, которые будут присутствовать и при расчете по формулам (2)–(3) в релаксационных и технологических напряжениях. Определение этих постоянных происходит на каждом шаге по времени из выполнения граничных условий на свободной поверхности и на границе контакта ($k = 1, \dots, K - 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_{res\ r}^{(k)}(t_n)|_{r=r_k} &= \sigma_r^{(k+1)}(t_n)|_{r=r_k}, \\ \varepsilon_r^{(k)}(t_n)|_{r=r_k} &= \varepsilon_r^{(k+1)}(t_n)|_{r=r_k}, \\ \sigma_r^{(K)}(t_n)|_{r=r_K} &= f(t_n).\end{aligned}$$

Предложенный метод позволяет описать напряженно-деформируемое состояние в цилиндрическом спае, смоделировать оптимальный технологический режим изготовления спая с заданными остаточными напряжениями без решения обратной задачи. Простота алгоритма, позволит в дальнейшем ввести дополнительные условия, учитывающие особенности поведения материалов входящих в состав спая, например, зависимость модуля упругости и свойства зоны соединения от температуры.

Литература

1. Любимова О. Н. Способ изготовления стеклометаллокомпозитного стержня / О. Н. Любимова, Е. В. Любимова, Е. А. Гридасова, П. А. Никифоров // Патент РФ № 2014120249/03 (032372), заяв. 20. 05. 2014, опубл. 17. 04. 2015, бюл. – 5 с.
2. Роус Б. Стекло в электронике. – М. : Советское радио, 1969. – 356 с.
3. Narayanaswami O. S. A model of structural relaxation in glass // J. Amer. Ceram. Soc. – 1971. – Т. 54. – С. 491–498.
4. Moynihan C. T. Structural relaxation in vitreous Materials / С. Т. Moynihan, Р. В. Macedo // Ann. New York Acad.Sci. – 1976. – Т. 279, № 15. – С. 15–35.
5. Мазурин О. В. Отжиг спаев стекла с металлом. – Л. : Энергия, 1980. – 140 с.
6. Бартнев Г. М. Релаксационные процессы в стеклообразных системах / Г. М. Бартнев, Д. С. Сандитов. – Н. : Наука, 1986. – 239 с.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С ВОЗМУЩЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. Д. Москалик

Самарский государственный технический университет

В работе представлены результаты исследования нелинейной краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, на стадии установившейся ползучести с помощью конечно-элементного решения и решения методом малого параметра с учётом приближений до третьего включительно в предположении степенного закона ползучести: $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}$, где n , A — постоянные характеристики материала, S_{ij} — девиатор напряжений, σ_e — интенсивность напряжений в случае плоской деформации.

В качестве малого параметра δ принимается расстояние между центрами внутреннего несмещенного контура $r = a$ и внешнего смещенного контура $r = b$ трубы (см. рис. 1). Уравнение внешнего контура трубы с учетом возмущения δ имеет вид:

$$(r \cos \theta - \delta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = b^2.$$

Задача решается в условиях плоского деформированного состояния в предположении несжимаемости материала для скоростей деформаций ползучести.

Используется разложение тензора напряжений σ_{ij} , тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}$, вектора скоростей перемещений \dot{u}_i и уравнения внешнего контура по малому параметру δ до членов третьего порядка включительно.

Для определения последующих после нулевого приближений используются линеаризованные определяющие соотношения и линеаризованные граничные условия на внешнем контуре трубы при $r = b$.

В табл. 1 приведены результаты приближенного аналитического решения задачи на модельном примере для трубы с внутренним радиусом $a = 0,115$ м, внешним радиусом $b = 0,15$ м для сплава ЭИ698 с характеристиками материала $n = 10,96$, $A = 4,57 \cdot 10^{-33}$ под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа на внешнем контуре при $\theta = \pi$ (см. рис. 1), где введено обозначение: $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете

Таблица 1

Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из сплава ЭИ698

δ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,04	1,09	1,13	1,17	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38	1,42
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,04	1,10	1,14	1,19	1,24	1,29	1,34	1,40	1,46	1,52
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	1,04	1,10	1,14	1,19	1,24	1,29	1,34	1,39	1,46	1,50

первого приближения на внешней границе трубы при $r = b + \delta \cos \theta$; $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете двух приближений на внешней границе трубы при $r = b + \delta \cos \theta + \delta^2 (\cos 2\theta - 1) / 4b$ при $\theta = \pi$; $\sigma_{\theta\theta}^{***} = \sigma_{\theta\theta}^{(0-3)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете трех приближений на внешней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \delta \cos \theta + \delta^2 (\cos 2\theta - 1) / 4b$, вычисленные с шагом $\delta = 0,01$.

Из данных, приведенных в табл. 1, можно сделать вывод, что приближенное аналитическое решение задачи о несоосной трубе имеет тенденцию к сходимости. Также выполнено численное решение для осесимметричной и несоосной трубы, рассмотренной выше, при помощи программного комплекса ANSYS. Оценка погрешности приближенного аналитического решения до третьего приближения включительно и численного проведена на основе значений радиальных σ_{rr} и тангенциальных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений в 15 равноотстоящих точках по координате r_i : $a \leq r_i \leq b + \delta \cos \theta + \delta^2(\cos 2\theta - 1)/4b$ ($i = \overline{1, 15}$) при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (см. рис. 1) по двум нормам:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-3)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}; \quad \sigma = \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-3)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2}{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = r, \theta, \quad (1)$$

где $\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-3)} = \sigma_{\omega\omega}^{(0-3)}(r_i, \theta)$, $\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}} = \sigma_{\omega\omega}^{\text{ANS}}(r_i, \theta)$ – расчетные значения для аналитического и численного решений соответственно. В табл. 2 через дробную черту представлены погрешности решения по нормам (1):

Таблица 2

Погрешность приближенного аналитического и численного решений для сплава ЭИ698

δ	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\sigma_{rr}(r, 0)$	0,17/0,38	0,18/0,40	0,37/0,45	1,22/1,47	3,05/3,11	—
$\sigma_{rr}(r, \pi)$	0,17/0,38	0,21/0,40	0,40/0,51	1,45/1,76	4,37/4,19	4,45/4,42
$\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$	0,02/0,06	0,36/0,41	1,17/1,26	3,97/4,39	8,29/10,02	—
$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi)$	0,02/0,06	0,32/0,35	1,22/1,24	2,53/3,04	5,59/5,90	8,70/8,96

На рис. 2 приведено приближенное аналитическое и конечно-элементное решения задачи для сплава ЭИ698 при величине малого параметра $\delta = 0,04$ и угле $\theta = \pi$, который соответствует максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$. Результаты вы-

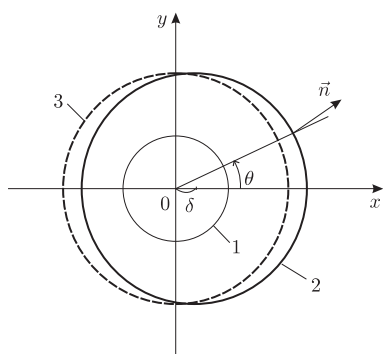


Рис. 1. Схема несоосной трубы:
1 – внутренний контур трубы;
2 – внешний контур трубы;
3 – внешний контур трубы для осесимметричного случая

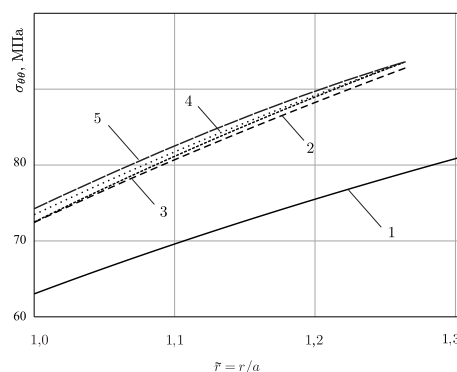


Рис. 2. Тангенциальные напряжения:
1 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 – $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$,
5 – $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$ при $\theta = \pi$, $\delta = 0,04$

полненной работы, а также исследований [1–3] позволяют сделать вывод о хорошей согласованности численного и аналитического решений с учетом трех приближений.

Литература

1. *Баикинова Е. В.* Решение краевой задачи установившейся ползучести для неосесимметричной толстостенной трубы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2002, № 16. – С. 105–110.
2. *Москалик А. Д.* Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2013, № 4(33). – С. 76–85.
3. *Радченко В. П., Москалик А. Д., Адеянов И. Е.* Сравнительный анализ приближенного аналитического и конечно-элементного решений для несоосной трубы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014, № 3(36). – С. 100–114. doi: 10.14498/vsgtu1340.

ЛУНА – ИДЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. П. Павлов

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН

Любые суждения о сейсмичности планет опираются на накопленные сведения об их внутреннем строении. В значительной степени эти сведения получены в результате обработки данных о сейсмических событиях. Прежде всего – это данные о зависимости от глубины продольной v_p и поперечной v_s скоростей звука в твердом теле планеты. Здесь следует обратить внимание на три обстоятельства. Во-первых, восстановление значений скорости проводится в рамках линейной теории упругости. Во-вторых, обычно используемая связь v_p и v_s с упругими модулями (всестороннего сжатия K и сдвига μ)

$$\mu = \varrho v_s^2, \quad K = \varrho \left(v_p^2 - \frac{4}{3} v_s^2 \right) \quad (2)$$

(ϱ – плотность планеты) имеет место лишь в ситуации, когда коэффициенты в волновом уравнении, описывающем распространение звука, – постоянны, т. е. постоянны все упомянутые выше параметры среды. В-третьих, имеется естественный критерий применимости линейной теории упругости: малость тензора деформаций u_{ik} . В этой теории след тензора деформаций $u_{ii} = p/K$, где p – давление. Возьмем в качестве критерия применимости малость следа и посмотрим, насколько он выполнен в геофизических моделях.

Заметим прежде всего, что в таких моделях (например, [1], [2], [3]) для давления используется гидростатическое приближение ($\mu = 0$), в котором давление на поверхности равно нулю. В общем случае это не так: массовые силы создают внутренние напряжения даже в отсутствии внешних сил. В частности, в задаче 3 §7 монографии [4] показано, что в модели однородного гравитирующего шара радиуса R давление

$$p(r) = p(0) \left(1 - \left(1 + \frac{8\mu}{15K} \right)^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right); \quad p(R) = p(0) \frac{8\mu}{8\mu + 15K}. \quad (3)$$

Поэтому при оценке критерия мы будем для давления пользоваться моделью (2), а для упругих модулей – формулами (1).

Общепринятые данные (см., напр., [2]) об упругих модулях Земли дают $8\mu/15K \sim 0,27$ для всей твердой мантии. Разумно нормироваться на общепринятое значение давления на нижней границе мантии. Тогда для значений u_{ii} на глубинах 60, 800, и 2878 км получим 0,19, 0,15 и 0,21. Именно с такой точностью применима линейная теория упругости, в рамках которой и оцениваются механические параметры. (Заметим, что всюду в общепринятых таблицах для них выписываются 4 значащие цифры!) Для Луны $8\mu/15K \sim 0,3$ (см., напр., [3]), а значение $p(0)$ вычислено в работе [5]:

$$p(0) = \frac{2}{3} \pi \kappa \varrho^2 R^2 \left(1 + \frac{4\mu}{3K} \right)^{-1} \left(1 + \frac{8\mu}{15K} \right) \quad (4)$$

(κ – постоянная всемирного тяготения, R – радиус Луны). Значения u_{ii} на глубинах 60, 270, 400 и 800 км таковы: 0,008, 0,011, 0,012 и 0,017 соответственно. Погрешности сделанных оценок связаны лишь с погрешностями в измерении скоростей звука. Для v_p они в пределах

3 % во всей толще Луны, а для v_s они возрастают до 11 % лишь на границе мантии и жидкого ядра. Более того, с 7 %-ной точностью плотность и упругие модули можно считать постоянными во всей толще мантии начиная с глубин 28 км вплоть до границы с жидким ядром. Таким образом, в отличие от Земли, Луна – идеальный объект для использования линейной теории упругости.

Займемся применением этой теории для описания вариаций напряженного состояния тела Луны. Мы будем работать в системе отсчета, жестко связанной с вращающейся Луной. В этой системе все механические силы (кроме упругих), действующие в теле Луны (гравитационные, силы инерции и приливные), – потенциальные: ускорение каждой из них есть минус градиент соответствующего потенциала. Поскольку полярное сжатие Луны крайне мало ($1,25 \times 10^{-3}$), для гравитационного потенциала φ_{gr} достаточно взять приближение однородного шара,

$$\varphi_{gr}(r) = \frac{2}{3}\pi\kappa\rho R^2\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\right). \quad (5)$$

Его порядок определяется коэффициентами перед скобкой в (4) и есть $1,4 \times 10^{10} \text{ см}^2 \text{сек}^{-2}$.

Движение Луны в Солнечной системе – довольно сложное. Работая в нашей системе отсчета, мы должны учесть потенциалы всех сил инерции, связанных с ускорениями этого движения.

Центробежный потенциал, связанный с собственным вращением Луны, есть

$$\varphi_{cf}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\Omega_i^2 r_k^2 - (\Omega_i r_i)^2), \quad (6)$$

где Ω_i и r_k – компоненты вектора Ω угловой скорости вращения Луны и радиус-вектора \mathbf{r} точки в теле Луны соответственно. Порядок этого потенциала оценим его значением для $r = R$ и получим $4,6 \times 10^2 \text{ см}^2 \text{сек}^{-2}$. Тот же порядок имеет центробежный потенциал $\varphi_{cf1}(\mathbf{r})$, связанный с вращением Луны вокруг Земли и описываемый аналогичной (5) формулой. Порядок центробежного потенциала $\varphi_{cf2}(\mathbf{r})$, связанного с вращением пары Земля-Луна вокруг Солнца, составляет $3,4 \text{ см}^2 \text{сек}^{-2}$. Порядок последнего из потенциалов сил инерции, связанных с прецессией оси лунной орбиты, в сотню раз меньше порядка центробежного $\varphi_{cf}(\mathbf{r})$.

Приливные потенциалы Земли и Солнца достаточно взять в приближении Лапласа

$$\varphi_{tid}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\kappa\tilde{M}\tilde{R}^{-3}R^2\left(-\frac{r^2}{R^2} + 3\frac{(r_i\tilde{R}_i)^2}{R^2\tilde{R}^2}\right), \quad (7)$$

где \tilde{M} и \tilde{R}_i – масса приливообразующего тела и его радиус-вектор в нашей системе координат. Порядки этих двух потенциалов определяются, как и для (4), коэффициентами при скобке; для Земли порядок есть $1,1 \times 10^5$, а для Солнца – $6 \times 10^3 \text{ см}^2 \text{сек}^{-2}$.

Мы видим, что среди перечисленных потенциалов имеется своеобразная иерархия: если взять гравитационный потенциал за 1, то центробежные потенциалы $\varphi_{cf}(\mathbf{r})$ и $\varphi_{cf1}(\mathbf{r})$ имеют относительный порядок 3×10^{-8} , $\varphi_{cf2}(\mathbf{r})$ – порядок $2,4 \times 10^{-10}$, земной приливный – порядок $\gamma = 0,8 \times 10^{-5}$, а солнечный приливный – порядок 4×10^{-7} .

Подчеркнем, что зависимость от времени есть только у приливных потенциалов с характерным периодом 1 месяц: в нашей системе отсчета от времени зависят только \tilde{R}_i . Поэтому только вариации приливных потенциалов могут вызвать изменения напряженного состояния в теле Луны. Поскольку собственные колебания в теле Луны затухают

за несколько часов, для оценки влияния приливных эффектов на напряженное состояние тела Луны можно пользоваться не уравнениями движения, а условием равновесия.

В линейной теории упругости условием равновесия является

$$\varrho \partial_i \varphi(\mathbf{r}) = \partial_k \sigma_{ik}(\mathbf{r}) = \left((K + \frac{1}{3}\mu) \partial_i \partial_k + \mu \delta_{ik} \partial_l^2 \right) u_k(\mathbf{r}) \equiv L_{ik} u_k, \quad (8)$$

где $\partial_i = \partial / \partial r_i$, $\varphi(\mathbf{r})$ – сумма всех потенциалов (4) – (6), а тензор напряжений σ_{ik} определен законом Гука

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) = K u_{jj} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3} u_{jj} \delta_{ik}) \quad (9)$$

и выражен через вектор смещения $u_k(\mathbf{r})$.

Рассмотрим условие равновесия (7) как дифференциальное уравнение 2 порядка для вектора смещения $u_k(\mathbf{r})$ с естественным граничным условием $u_i(0) < \infty$ и граничным условием $\sigma_{ik} \partial_k \varphi = 0$ на поверхности Луны (поверхность Луны определена эквипотенциальным условием $\varphi = const$).

Общее решение этого уравнения есть сумма частного решения u_k неоднородного уравнения $L_{ik} u_k = \varrho \partial_i \varphi$ и общего решения однородного $L_{ik} \tilde{u}_k = 0$. Частное решение u_k будем искать в виде градиента скаляра: $u(\mathbf{r})$, $u_k = \partial_k u$ (его естественно назвать потенциалом деформации), а общее решение неоднородного – в виде суммы градиента скаляра и вектора с нулевой дивергенцией: $\tilde{u}_k = \partial_k \tilde{u} + w_k$, $\partial_k w_k = 0$.

В данной работе мы ограничимся только аналитическими решениями условий равновесия. В этом случае справедлива теорема Холла-Вайтмана для группы $SO(3)$ поворотов в декартовом пространстве: скалярная функция $a(\mathbf{r})$ может зависеть только от скалярных комбинаций своих аргументов. Возьмем в качестве таких комбинаций сами потенциалы φ_a . При этом, учитывая вышеупомянутую иерархию потенциалов, оставим в сумме $\varphi = \sum_a \varphi_a$ в правой части неоднородного уравнения только гравитационный потенциал φ_{gr} и земной приливный φ_{tid} , имеющий по сравнению с гравитационным порядок $\gamma = 0,8 \times 10^{-5}$. Само же неоднородное уравнение и граничное условие на поверхности Луны будем решать по теории возмущений, оставляя только нулевой и первый порядки по γ .

В работе [5] показано, что из условий совместности системы уравнений (7) следует, что все скалярные динамические переменные зависят только от суммы потенциалов φ . В частности, давление пропорционально интегралу от плотности по сумме потенциалов. Для нашей модели Луны это дает в первых двух порядках по γ формулу

$$p(\mathbf{r}) = p(0) \left(1 - \left(1 + \frac{8\mu}{15K} \right)^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) (1 + \gamma \zeta), \quad \zeta = -1 + 3 \cos^2 \theta, \quad (10)$$

где θ – угол между \mathbf{r} и направлением на Землю, а $p(0)$ дается формулой (3).

При этом в связь между давлением и следом тензора деформации

$$p = -K \Delta(u + \tilde{u}) \quad (11)$$

дают вклад только потенциалы деформации неоднородного и однородного уравнений, а вектор w_k оказывается в первых двух порядках по γ нулем.

Уравнение Пуассона (10) для суммарного потенциала деформации с вычисленной правой частью (9) позволяет восстановить в первых двух порядках по γ сам тензор деформации. В выражении для него (см. [5]) от времени зависит только функция ζ (и ее градиент).

Функция ζ периодически (с периодом $T = 1$ месяц) меняется со временем, испытывая вариации $\delta\zeta$. Для последующих оценок определим $\delta\zeta$ как разность абсолютных значений ζ для двух «экстремальных» положений радиус-вектора приливообразующего небесного тела (в нашем приближении – Земли) в нашей системе координат. В сферических координатах $\mathbf{r} = r(\cos\vartheta \cos\phi, \cos\vartheta \sin\phi, \sin\vartheta)$, где ϑ и ϕ – широта и долгота радиус-вектора \mathbf{r} в теле Луны (ось z направлена вдоль оси собственного вращения Луны).

Поскольку собственное вращение Луны и ее движение по орбите синхронизованы, а наклонение ε вектора Ω_i к плоскости эклиптики постоянно, с точки зрения Луны экстремальным положениям Земли отвечают $\tilde{R}_{i\pm} = \tilde{R}(\cos\varepsilon, 0, \pm\sin\varepsilon)$. В итоге вызванная вариациями приливных сил

$$\delta\zeta = 3 |\sin 2\varepsilon| |\sin 2\vartheta| |\cos\phi| \quad (12)$$

В линейной теории упругости объемная плотность f свободной энергии упругих напряжений выражается через тензор напряжений:

$$f = \frac{1}{2K} p^2 + \frac{1}{4\mu} \sigma'_{ik}{}^2, \quad \sigma'_{ik} = 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{jj}). \quad (13)$$

В работе [5] вычислена вариация f , вызванная вариациями (11):

$$\delta f(\mathbf{r}) = 0,75\gamma\delta\zeta K^{-1} p^2(0) x^2 (x^2 - 1,04^2), \quad x = r/R. \quad (14)$$

Правая часть (13) как функция безразмерного радиуса x имеет 0 в центре, максимум при $x = 0,52$ и треть от максимального значения на поверхности. Грубо говоря, вариации плотности свободной энергии, обусловленные приливными эффектами, сосредоточены в сферическом слое: r – в интервале $[0, 3R, 0, 7R]$. К широтной и долготной зависимости вариаций следует относиться с осторожностью: наша модель Луны слишком груба и не учитывает деталей ее внутренней структуры.

Согласно современным представлениям механики прочности и разрушений (см., напр., [6]), периодические вариации напряженного состояния приводят (помимо обычной диссипации в тепло) к накоплению поврежденностей в твердой среде (дислокаций, трещин и т. п.). Такой процесс сопровождается концентрацией энергии в этих структурах. Когда концентрация достигает некоторого критического предела, происходит разрушение среды с высвобождением накопленной энергии.

Уже более четырех десятилетий в литературе обсуждаются данные о лунотрясениях, полученные в 1969–1977 гг. экспедициями проекта Аполло [7,8]. В настоящее время имеется каталог [9,10] более чем 12500 сейсмических событий. Большинство событий (более 7000) идентифицировано как глубокие лунотрясения, очаги которых сконцентрированы в примерно 300 «гнездах» на глубинах между 700 и 1200 км. Мы обращаем внимание на качественное сходство двух картин – распределений по глубине для глубокофокусных лунотрясений и для вариаций плотности свободной энергии, вызванных приливами. Оно наводит на предположение, что именно сконцентрированная в поврежденностях энергия высвобождается в глубокофокусных лунотрясениях.

В пользу этого предположения служит интегральная (по глубинам между 700 и 1200 км, отвечающим интервалу $[0, 3R, 0, 7R]$) оценка вариаций свободной энергии, сделать которую позволяет формула (13):

$$\Delta F = \int \delta f(\mathbf{r}) r^2 dr d\cos\vartheta d\phi \quad (15)$$

за половину периода . Для земных приливов эта оценка дает $0,9 \times 10^{29}$ эрг за время $T/2 = 1,8 \times 10^7$ сек, или 2×10^{30} эрг в год. В основном – это энергия колебаний. Однако, в неидеальной сплошной среде происходит диссипация энергии колебаний, как за счет вязкости, так и за счет накопления повреждений. Существующие оценки доли диссипирующей энергии весьма грубы, зависят от модели неидеальности среды и имеют порядок 10^{-2} . По-видимому, подавляющая часть ее идет в тепло, на разогрев тела Луны. Если все тепло уходит наружу, то мощность его потока составит $1,4 \times 10^2$ эрг сек $^{-1}$ см $^{-2} = 14 \times 10^{-6}$ вт см $^{-2}$. Имеющиеся [11] экспериментальные оценки дают величину 2×10^{-6} вт см $^{-2}$. Следовательно, теоретически почти все тепло уходит на разогрев тела Луны.

Доля энергии приливных колебаний, идущая на накопление повреждений, также оценивается грубо [6]. Данные лабораторных экспериментов формулируются в терминах количества циклов периодического нагружения, приводящего к разрушению образца. Перевод этих данных на язык энергии, запасенной в повреждениях, зависит от модели процесса разрушения и оценивается как 10^{-5} от энергии колебаний. В любом случае эта оценка на много порядков превосходит оценку [12] энерговыделения в глубокофокусных лунотрясениях, составляющую 8×10^{13} эрг за год. Мы делаем вывод, что энергии приливных колебаний «за глаза» хватает для объяснения того, откуда берется энергия, высвобождающаяся в глубокофокусных лунотрясениях.

Литература

1. *Bullen K. E.* An Introduction to the Theory of Seismology / K. E. Bullen, B. A. Bolt – Cambridge: Cambridge University Press, 1985
2. *Stacey, F. D.* Physics of the Earth / F. D. Stacey, P. M. Davis – Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
3. *Garcia R. F.* Very preliminary reference Moon model. / R. F. Garcia, G. Gagnepain-Beyneix, S. Chevrot, P. Lognonne // Physics of the Earth and Planetary Interiors – 2011. – V. 188, № 1. – P. 96–113.
4. *Ландау Л .Д.* Теория упругости // Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М. : Физматлит, 1987.
5. *Павлов В .П.* Теория возмущений для тензора напряжений в теле Луны с учетом приливных эффектов / В. П. Павлов // Труды МИАН. – М. : МАИК, 2015. – Т. 289 – С. 195–205
6. *Волков И. А.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И. А. Волков, Ю. Г. Коротких – М. : Физматлит, 2008
7. *Nakamura Y.* New seismic data on the state of the deep lunar interior. / Y. Nakamura, D. Lammlein, G. Latham, M. Ewing, J. Dorman, F. Press, N. Toksöz // Science – 1973. – V. 181. – P. 49–51.
8. *Lammlein D.* Lunar Seismicity, Structure and Tectonics. / D. Lammlein, G. Latham, J. Dorman, Y. Nakamura, M. Ewing // Rev. Geophys. Space Phys. – 1974. – V. 12. – P. 1–21.
9. *Nakamura Y.* New identification of deep moonquakes in the Apollo lunar seismic data. / Y. Nakamura // Physics of the Earth and Planetary Interiors – 2003. – V. 139. – P. 197–205.
10. *Nakamura Y.* Farside deep moonquakes and the deep interior of the Moon. / Y. Nakamura // J. Geophys. Res. –2005. – V. 110 – P. E0100.
11. *Langseth M.* Revised lunar heat-flow values. / M. Langseth, S. J. Keihm, K. Peters // Proc. Lunar Sci. Conf. 7th – 1976. – P. 3143–3171.
12. *Goins N. R.* Seismic Energy Release of the Moon. / N. R. Goins, A. M. Dainty, N. Toksöz // J. Geophys. Res. – 1981. – V. 86, № B1 – P. 378–388.

ПРОБЛЕМЫ НАНО- И МИКРОМЕХАНИКИ

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ЗАЛЕЧИВАНИЕ МИКРОТРЕЩИН В МЕТАЛЛЕ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСОВ ТОКА ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ**

**К. В. Кукуджанов, А. Л. Левитин, Е. В. Макеев,
К. Г. Койфман, П. С. Бычков**

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, г. Москва

Рассматриваются процессы деформирования и залечивания дефектов типа плоских микротрещин, протекающие в материале при обработке металлических образцов кратковременными импульсами электрического тока высокой плотности. Исследование осуществляется численно на основе модели воздействия высокоэнергетическим электромагнитным полем на предварительно поврежденный термоупругопластический материал с дефектами, которая учитывает плавление и испарение металла, а также зависимость всех его физико-механических свойств от температуры. Показано, что при определенных условиях микротрещины могут полностью залечиваться. Этот процесс происходит путем одновременного уменьшения длины микротрещины, выброса струи расплавленного металла из вершины внутрь трещины и смыкания ее берегов. Проводится сравнение с имеющимися экспериментами. Показано, что взаимное расположение и расстояние между микротрещинами не влияет на процесс их залечивания, определяющим в этом процессе является параметр поврежденности материала.

Моделируется воздействие высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микродефекты в поликристаллическом металле. Рассматриваются процессы, протекающие в материале при обработке образцов кратковременными импульсами электрического тока большой плотности $j \approx 10^8 - 10^{10}$ А/м² и временем воздействия $\tau \approx 10^{-5} - 10^{-4}$ с. Изучаются изменения электрического, температурного полей, напряженно-деформированного состояния и фазовые трансформации в окрестности микротрещины с линейными размерами 10 мкм. Подобные дефекты всегда имеются между зернами в поликристаллическом металле после отливки или возникают в нем в процессе его деформирования при технологической обработке или эксплуатации изготовленных из металлов изделий. Из такого рода дефектов плоские микротрещины являются наиболее опасными с точки зрения возможного макроразрушения изделия.

Для изучения вышеуказанных процессов предлагается связанная электротермомеханическая модель кратковременного воздействия интенсивным электромагнитным полем на предварительно поврежденный термоупругопластический материал с дефектами [1, 2]. Модель учитывает плавление и испарение металла, а также зависимость всех его физико-механических свойств от температуры. Решение получающейся системы уравнений ищется численно методом конечных элементов на подвижных сетках с использованием смешанного эйлера-лагранжева метода.

Изучаются микродефекты в форме плоских трещин с закругленными кончиками. Краевые задачи решаются для случая плоской деформации в областях интегрирования, содержащих как один представительный элемент материала с единичным микродефектом, так и несколько по-разному расположенных представительных элементов, моделирующих упорядоченное и хаотическое расположение дефектов [3].

Численное моделирование показало, что при изучении процесса залечивания микротрещин можно без потери точности ограничиться рассмотрением в качестве области интегрирования одного представительного элемента (или одной четверти осесимметричного

представительного элемента), задавая на ее границах, не являющихся осями симметрии, разность потенциалов, определенную для элемента без дефекта (в состоянии «невозмущенном» наличием микротрещины) [3, 4]. При расстояниях между трещинами, превышающих 5–6 их длин, процессы залечивания будут протекать одинаково независимо от того моделируем мы их в области интегрирования, состоящей из одного или нескольких представительных элементов.

Моделирование показывает, что наличие микротрещин приводит к неоднородности всех изучаемых физических полей в материале. В окрестности микродефектов возникают высокие значения плотности тока с большими градиентами поля. Это вызывает быстрый локальный нагрев в окрестности кончика микротрещины, сопровождаемый тепловым расширением, а в последствие и плавлением материала. Неоднородный нагрев приводит к большим сжимающим напряжениям и интенсивному пластическому течению материала в окрестности микротрещины. Возникающее при этом поле напряжений вызывает не только смыкание берегов микротрещины, но и уменьшение ее длины и выброс металла в трещину. Выброс металла происходит посредством формирования струи расплавленного материала, направленной внутрь трещины. Данные процессы могут сопровождаться не только плавлением в окрестности кончика, но и испарением металла в трещину при большой поврежденности материала. Одновременное уменьшение длины, выброс расплавленного металла внутрь трещины и смыкание берегов приводит к тому, что берега трещины начинают контактировать со струей материала, и в конце этого процесса струя оказывается полностью зажатай берегами трещины. Происходит сварка трещины и залечивание микродефекта. При этом первоначальный объем дефекта в процессе залечивания существенно уменьшается, и может уменьшиться вплоть до нуля, когда дефект полностью залечивается [1, 2].

Результаты расчетов по предлагаемой модели сравниваются с экспериментальными данными [5–10]. Сравнение показывает, что модель обеспечивает хорошее совпадение с экспериментом и правильно воспроизводит основные особенности электротермомеханических процессов в окрестности микродефектов [5, 6]. Полученный в результате численного моделирования эффект уменьшения (залечивания) микродефектов в материале согласуется с наблюдаемым в имеющихся экспериментах [7–10].

С увеличением расстояния между трещинами наблюдается уменьшение влияние взаимного расположения микротрещин на процессы их залечивания, так что при расстояниях между микротрещинами, превышающих шесть их длин, время залечивания микротрещин оказывается фактически одинаковым при любом расположении трещин друг относительно друга.

Взаимодействие между микротрещинами начинает заметно сказываться на процессе их залечивания, когда расстояния между ними сокращается до 5–6 длин микротрещин. Если же расстояние между трещинами превышает шесть и более их длин, то процессы залечивания микротрещин, становятся практически независимыми как от расстояния между дефектами, так и от расположения дефектов друг относительно друга.

Уменьшение расстояния между трещинами вплоть до 1–2 их линейных размеров (с учетом изменения их взаимного расположения) качественно не меняет описанный процесс залечивания, однако, приводит к его существенному замедлению: выброс расплавленного материала в трещину сохраняется, но уменьшение трещины особенно в поперечном направлении значительно сокращается.

В результате моделирования установлено, что залеченность микродефекта (определенная как отношение изменения объема микротрещины в процессе ее залечивания к перво-

начальному объему микротрещины) не зависит от взаимного расположения и расстояния между микродефектами, а определяется лишь интегральными параметром – «начальной» поврежденностью материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-08693).

Литература

1. *Кукуджанов К. В.* Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 4. – С. 138–158.
2. *Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.* О воздействии высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в упругопластическом проводящем материале // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – № 77. – С. 217–226.
3. *Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.* Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 2. – С. 89–110.
4. *Кукуджанов К. В.* Процессы залечивания микротрещин в металле под действием импульсов тока высокой плотности // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – № 78 (3). – С. 312–321.
5. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 848–851.
6. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* Разрушение вершины трещины силовым электромагнитным полем // Док. АН СССР. – 1977. – Т. 237, № 2. – С. 325–327.
7. *Zuev L. B., Tsellermaer V. Ya., Gromov V. E. and Murav'ev V. V.* Ultrasonic monitoring of the accumulation of aging damage and recovery of the useful lifetime of industrial parts. Tech. Phys. – 1997. – Vol. 49, No. 2. – P. 1094-1096. DOI: 10.1134/1.1258774.
8. *Zuev L. B., Sosnin O. V., Chirakadze D. Z., Gromov V. E. and Murav'ev V. V.* Acoustic evaluation of the endurance of steel specimens and recovery of their serviceability. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1998. – Vol. 39, No. 4. – P. 639–641.
9. *Троицкий О. А., Баранов Ю. В., Аврамов Ю.С., Шляпин А. Д.* Физические основы и технологии обработки современных материалов (теория, технология, структура и свойства). – Т. 1. - Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 590 с.
10. *Song Hui, Wang Zhong-jin, Gao Tie-jun.* Effect of high density electropulsing treatment on formability of TC4 titanium alloy sheet // Trans. Nonferrous Soc. China. – 2007. – V. 17. – P. 87–92.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РАЗМЯГЧЕНИЯ МАЛЛИНЗА

К. А. Мохирева, А. Л. Свистков

Институт механики сплошных сред УрО РАН

Пермский государственный национальный исследовательский университет

На сегодняшний день до сих пор встречаются работы, где поведение резин описывается с помощью упругих потенциалов. Во многом данный способ определения свойств эластомерных материалов прост и понятен, особенно при использовании в конечно-элементных расчетах. Однако эластомеры в действительности ведут себя сложным образом – проявляются различного рода эффекты, которые хорошо видны при циклическом растяжении образцов. Одним из таких ярких эффектов является размягчение (эффект Маллинза), когда происходит уменьшение уровня жесткости при повторных циклах нагружения. Не смотря на то, что для каждого эластомера степень изменения напряжений при повторных циклах растяжения зависит от многих факторов – доли наполнителя, значения приложенной нагрузки, скорости нагружения и т. д., разница в характере поведения на первом и втором циклах растяжения всегда имеет место быть и должна быть учтена при расчетах.

Усложнение математической модели для описания поведения материала чаще всего подразумевает возникновение вычислительных и иных трудностей. В данном случае, для учета эффекта Маллинза, еще Огден и Роксбург [1] предложили достаточно простую феноменологическую модель:

$$\omega = \eta\omega_0 + \Phi, \quad (1)$$

где дополнительно определялась только одна величина – параметр размягчения η ; $\omega_0 = \omega_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – удельная энергия деформации; $\Phi(\eta)$ – функция диссипации, которая определялась условием $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\omega_0$.

В своей работе авторы также предложили формулу для задания параметра размягчения, в последствие было написано еще несколько работ с использованием другой формы определения данного параметра [2, 3]. В нашей работе мы решили использовать свой вариант записи:

$$\eta = \frac{1}{1 + \alpha(\max \omega_0 - \omega_0)^n}, \quad (2)$$

где α ($\alpha > 0$), n – материальные константы; ω_0 – текущее значение удельной энергии деформации, которое можно задать любым упругим потенциалом; $0 < \eta \leq 1$.

Для учета в математической модели влияния временных эффектов (вязкоупругие свойства материала, ползучесть) использовалось мультипликативное разложение градиента деформаций \mathbf{F} на правые тензоры упругих \mathbf{U}_e , релаксирующих \mathbf{U}_r и вязких \mathbf{U}_v растяжений и тензоры поворота $\mathbf{R}_e, \mathbf{R}_r$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{R}_r \mathbf{U}_r \mathbf{U}_v. \quad (3)$$

Определяющие соотношения составлялись на основе термодинамического неравенства:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \dot{\omega}_0 \geq 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_r$ – тензорная функция, которая является суммой равновесных и релаксирующих напряжений, соответственно; \mathbf{D} – тензор скоростей деформаций.

Рассматривая связь между правым тензором деформаций Коши-Грина и деформационным градиентом среды: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ и обращаясь к формуле (3), можно получить выражение для связи правых тензоров растяжения:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_e^2 = \mathbf{U}_v \mathbf{U}_r^2 \mathbf{U}_v. \quad (5)$$

Кроме того, принимался в расчет известный факт, что тензор скоростей деформации среды имеет следующий вид: $\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T] = \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{U}^2) \bullet \mathbf{F}^{-1}$. В итоге мы получили, что тензор скоростей деформаций среды можно представить в виде суммы мер скоростей вязкого \mathbf{D}_v и релаксационного деформирования \mathbf{D}_r :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_v + \mathbf{D}_r. \quad (6)$$

Учитывая выше представленные формулы, а также выражение $\omega_0 = \omega_e + \omega_r$, были получены следующие формулы для расчетов:

$$\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{D} - \dot{\omega}_e = 0; \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{U}_x (\mathbf{U}_r^2) \bullet \mathbf{U}_x \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} - dev(\mathbf{Q}^2 \mathbf{T}_r \mathbf{Q}^2), \quad (7)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ – индифферентный тензор.

Необходимость в создании новой модели появилась в результате анализа экспериментальных данных по исследованию влияния истории нагружения вдоль разных направлений на свойства эластомеров (наведенная анизотропия). Проведение таких нестандартных экспериментов осуществлялось с помощью четырехвекторного испытательного стенда фирмы Zwick (двухосная машина). Уникальность данной установки заключается в том, что она позволяет задавать историю нагружения по каждому из двух направлений и отслеживать поле перемещений исследуемой области с помощью видеоэкстензометра. Испытания проводились на плоских крестообразных образцах для нескольких групп резин: 1) на основе бутадиен-стирольного каучука с низкой долей наполнения разными углеродными частицами (а. наналмазы, б. графеновые нанопластины, в. многослойные нанотрубки) [4] и 2) эластомеров с высокой долей наполнения техническим углеродом.

Результаты данных экспериментов показывают влияние истории нагружения на свойства материалов в зависимости от направления приложения нагрузки. Такая зависимость зачастую может наблюдаться даже при малой доли наполнителя в матрице и малых деформациях. Этот вывод говорит в пользу того, что необходимо учитывать изменение свойств в зависимости от направления нагружения при построении математической модели. Однако пока что предложенные нами соотношения не учитывают данное явление, но разработки по улучшению математической модели направлены по данному пути.

В итоге были проведены серии экспериментов, которые заключались в стандартных одноосных испытаниях и испытаниях по исследованию эффекта наведенной анизотропии, для разных групп эластомеров. В результате был сформулирован вывод о необходимости учета явления наведенной анизотропии в наполненных резинах при построении математической модели. На первоначальном этапе нашей работы были записаны соотношения для описания поведения эластомеров с учетом эффекта размягчения Маллинза и вязкоупругих свойств. Это является первым приближением на пути построения определяющих

соотношений для разумного учета всех необходимых эффектов в материале. Полученная «приближенная» модель апробировалась на экспериментальных данных для разных материалов.

Работа выполнена в рамках государственной темы (ГР № 115 030 510 005) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-00914-р_а).

Литература

1. *Ogden R. W., Roxburgh D. G.* A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber // Proceedings of the Royal Society of London. – 1999. – V. 455, N. 1988, Series A. – P. 2861–2877.

2. *Dorfmann A., Ogden R. W.* A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle reinforced rubber // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – V. 40, N. 11. – P.2699–2714.

3. *Wrubleskiand E. G. M., Marczak R. J.* A study on the inclusion of softening behavior in hyperelastic incompressible constitutive models // Constitutive Models for Rubbers IX. – 2015. – P. 81–85.

4. *Мохирева К. А., Комар Л. А.* Экспериментальная оценка влияния углеродных нанонаполнителей разной геометрической формы к проявлению анизотропии механических свойств в эластомерных композитах // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сборник материалов. – Москва, 2015. – С. 216–218.

НОВАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗОНДА АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА С МЯГКИМ МАТЕРИАЛОМ

А. Л. Свистков^{1,2}, Н. И. Ужегова¹

¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН*

²*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

В последнее десятилетие большое внимание уделяется новому типу композиционных материалов – наноккомпозитам. Особое место среди них занимают полимерные наноккомпозиты, применяемые в промышленности. Создание таких материалов с улучшенными свойствами требует знаний не только свойств наполнителя и матрицы, но и как формируются на наноуровне макроскопические свойства материала и какие процессы происходят около частиц наполнителя. Таким образом, необходимо проводить не только макроскопические испытания, но и анализировать структуру материала на наномасштабном уровне.

Наиболее перспективным методом изучения материала на наноуровне, который позволяет не только исследовать особенности структуры образца, но и получать информацию о его механических характеристиках, является атомно-силовая микроскопия. Основной деталью атомно-силового микроскопа, осуществляющей получение информации о рельефе поверхности и свойствах исследуемого образца, является кантилевер, один конец которого жестко закреплен, а на втором конце расположен зонд.

Механические свойства материала получают при работе в силовой моде, которая предполагает непосредственный контакт зонда атомно-силового микроскопа с поверхностью исследуемого материала. В этом случае регистрируется силовая кривая – зависимость отклонения свободного конца кантилевера, на котором расположен зонд, от перемещения его основания по направлению к поверхности образца и обратно. Зная значение коэффициента жесткости кантилевера, данную зависимость можно перестроить в координатах приложенная сила – глубина проникновения зонда (рис. 1а). Для расшифровки получаемой силовой кривой и определения механических свойств образца применяются различные модели контактного взаимодействия. Наиболее популярными являются модель Дерягина-Мюллера-Топорова и модель Джонсона-Кендалла-Робертса [1–2]. Важно отметить, что обе модели ДМТ и ДжКР берут за основу упругой составляющей силы контактного взаимодействия решение Герца [3] и отличаются только учетом межмолекулярной энергии взаимодействия. Модель ДМТ рассматривает энергию межмолекулярного взаимодействия за пределами контактной области, а теория ДжКР – внутри контактной области. Особенностью модели ДМТ является то, что в ней нет возможности рассчитать, как тянется прилипший к зонду материал при его отведении от поверхности. Модель ДжКР лишена этого недостатка и позволяет аппроксимировать экспериментальные данные и при подведении зонда к поверхности образца, и при его отведении. Но эта модель не учитывает жесткость используемого кантилевера атомно-силового микроскопа.

Авторами данной работы разработана более точная модель контактного взаимодействия зонда АСМ с поверхностью мягкого материала для определения его механических характеристик. Данная модель близка к теории ДжКР, но в отличие от нее учитывает жесткость кантилевера при анализе величины подъема зонда за счет действия поверхностных сил.

Модель также учитывает действие поверхностных сил, действующих на границе области S_1 и на границе поверхности контакта S_2 (рис. 2). Эти силы необходимо учитывать,

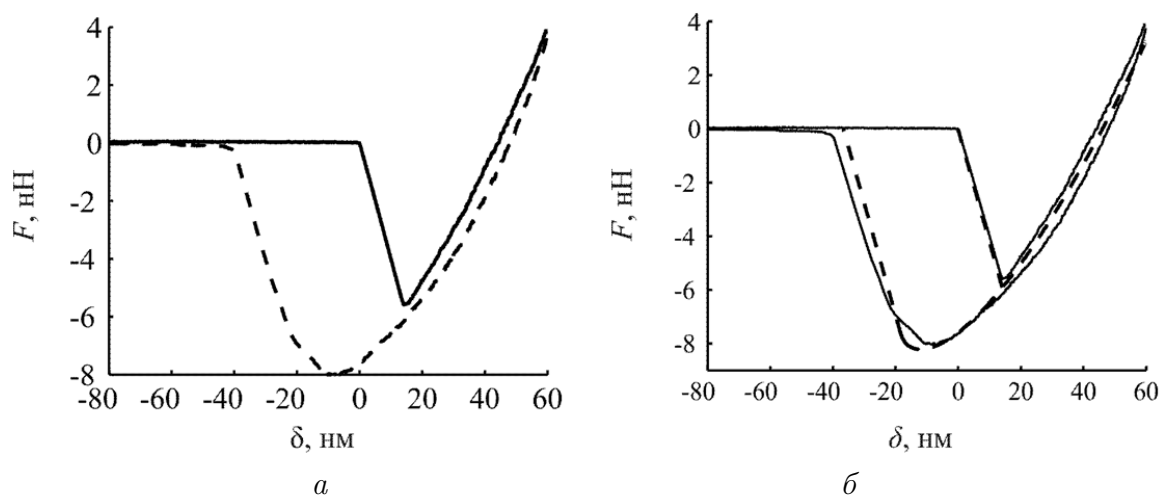


Рис. 1. а – силовая кривая, полученная для полидиметилсилоксанового образца с помощью АСМ, где сплошная линия – прямой ход движения кантилевера (приближение к поверхности образца), пунктирная линия – обратный ход движения кантилевера (отвод кантилевера от поверхности образца); б – аппроксимация экспериментальной силовой кривой по новой модели контактного взаимодействия, где сплошная линия – экспериментальные данные, пунктирная линия – теоретические данные

так как при движении зонда в материале изменяется площадь контакта зонда с образцом. В результате становится другой энергия в рассматриваемой системе, которая зависит от значений плотности поверхностной энергии контактирующих тел. Для учета этих сил вводятся два параметра γ_1 и γ_2 . Первый параметр соответствует плотности поверхностной энергии на границе исследуемого материала с воздухом. Второй параметр представляет собой разность между плотностями поверхностных энергий, действующих на границе зонда с воздухом, и действующей на границе зонда с исследуемым материалом. В первом случае речь идет о той части энергии, которую необходимо вычесть из общей энергии системы, поскольку именно на этой поверхности перестает материал взаимодействовать с воздухом, а во втором случае – об энергии, действующей на вновь появившейся поверхности контакта зонда с материалом S_2 .

Аппроксимация экспериментальных данных АСМ для полидиметилсилоксанового образца (рис. 1а) с помощью предложенной модели показана на рис. 1б. В данном случае был использован зонд типа Scan Asyst-Air с радиусом скругления 10 нм. Материал, выбранный в качестве образца для исследования, является калибровочным для АСМ с известным значением модуля упругости 2.6 МПа, который был взят за основу. Найденные параметры γ_1 и γ_2 соответственно равны -0.016 нН/нм и 0.275 нН/нм. Из рис. 1б видно, что предложенная модель качественно и количественно хорошо описывает экспериментальные данные.

Авторы выражают благодарность Морозову И.А. за предоставленные экспериментальные данные, полученные с помощью атомно-силового микроскопа.

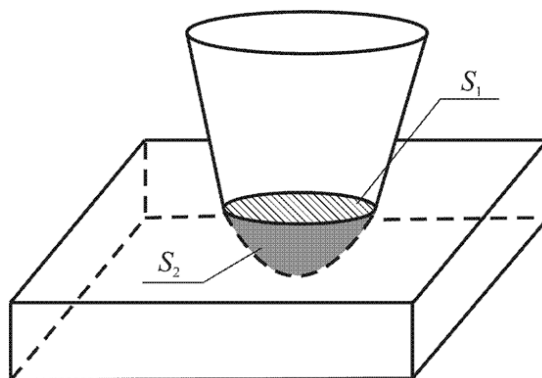


Рис. 2. Контакт параболоида вращения и плоскости, где S_1 – граница контактного взаимодействия на плоскости, ограниченная линией взаимодействия трех сред, S_2 – граница поверхности контакта, образованная при внедрении зонда на некоторую глубину

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-08-00914-р_а и 14-01-96002-р_урал_а).

Литература

1. Derjaguin B. V. Effect of contact deformations on the adhesion of particles / B. V. Derjaguin, V. M. Muller, YU. P. Toporov // Journal of Colloid and Interface Science. – 1975. – Vol. 53, No. 2. – P. 314–326.
2. Johnson K. L. Surface energy and contact of elastic solids / K. L. Johnson, K. Kendall, A. D. Roberts // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1971. – Vol. 324. – P. 301–313.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОВОЛОКОН ГЦК НИКЕЛЯ С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЗАПОЛНЕНИЯ ПОР АТОМАМИ ВОДОРОДА

М. Д. Старостенков, А. В. Яшин, О. В. Яшин

Алтайский государственный технический университет имени И.И. Ползунова

В последнее десятилетие в научной литературе большое внимание уделяется исследованием методами компьютерного моделирования процессов структурно-энергетических превращений в нановолокнах металлов и сплавов, подвергнутых высокоскоростной деформации. Ранее исследованы процессы деформации нановолокон ГЦК Ni, Al и Ni₃Al [1–7], Ni₃Fe, сплавов некубической симметрии, таких как, например ГЦТ CuAu I [8–12]. В то же время актуальным остается вопрос исследования влияния различных включений и примесей на процессы, происходящие во время высокоскоростной деформации. В представленной работе с привлечением метода молекулярной динамики проведено исследование процессов структурно-энергетических превращений, наблюдаемых во время деформации нановолокон ГЦК Ni, в октаэдрические и тетраэдрические поры которых помещены атомы водорода.

В качестве объекта исследования в работе выступают нановолокна сплава чистого ГЦК металла Ni, с ориентацией осей растяжения в направлениях $\langle 100 \rangle$. Нановолокно Ni представляло собой параллелепипед, вдоль направления $\langle 100 \rangle$ по краям нановолокна располагались атомы, составляющие абсолютно жесткие захваты, толщина каждого захвата составляла четыре атомных плоскости (100). На боковые поверхности нановолокна в направлениях $\langle 010 \rangle$ и $\langle 001 \rangle$ налагались свободные граничные условия, захваты, в свою очередь, составляли атомы жесткой границы.

В зависимости от вида эксперимента изменялись его параметры – температура, при которой производится деформирование нановолокон, и количество пор нановолокна, которые заполняются атомами водорода. В нановолокнах заполнялись водородом 20, 40, 60 и 80 % пор, по одному атому водорода в каждой поре. Соотношение количества атомов водорода в октаэдрических и тетраэдрических порах нановолокна соответствовало соотношению суммарного объема октаэдра и тетраэдров в элементарной ячейке. Температура в компьютерном эксперименте устанавливалась равной 50 К, 300 К, 600 К, 900 К и 1200 К. При деформации нановолокна производилась термостабилизация в соответствии с алгоритмом Берендсена [13], время реакции термостата при термостабилизации соответствовало значению 0,01 пс.

С целью сокращения записи авторами принято сокращенно называть нановолокна с указанием кристаллографического направления, параллельного оси растяжения, и материала нановолокна, например $\langle 100 \rangle$ Ni. Для нановолокон с заполненными порами указывается процент заполненных пор, например, «нановолокно Ni (с 40 % Н)».

Примененный в работе метод молекулярной динамики позволяет описать движение каждого атома путем решения краевой задачи Коши. Чтобы записать задачу в каноническом виде вводятся начальные условия (производится расчет начальных скоростей атомов), для обеспечения сходимости численного решения применяют термостабилизацию, для чего используется специальная процедура термостатирования. Взаимодействия между атомами производился с применением парных потенциалов Морзе заимствованных из работы [14].

Метод молекулярной динамики, таким образом, позволяет осуществлять моделирование дефектов различной размерности, а также их сочетаний. Решение задачи Коши в представленной работе осуществлялось методом Эйлера с полушагом. Шаг интегрирования при решении системы дифференциальных уравнений движения частиц составлял 0,01 пс. Структура абсолютно жестких захватов оставалась неизменной на протяжении всего эксперимента. При моделировании деформации в нановолокнах производилось периодически повторяющееся поступательное смещение атомов, составляющих абсолютно жесткие захваты вдоль оси растяжения нановолокна в противоположных направлениях друг от друга $\langle 100 \rangle$ и $\langle \bar{1}00 \rangle$. Суммарная скорость движения захватов составляла 20 м/с и соответствовала скорости деформации порядка $\cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Длительность экспериментов в настоящем исследовании не превышала 0.6 нс (600 пс).

При моделировании деформации в нановолокнах производилось периодически повторяющееся поступательное смещение атомов, составляющих абсолютно жесткие захваты вдоль оси растяжения нановолокна в противоположных направлениях друг от друга $\langle 100 \rangle$ и $\langle \bar{1}00 \rangle$. Суммарная скорость движения захватов составляла 20 м/с и соответствовала скорости деформации порядка $\cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

Особенностями структурно-энергетических превращений в нановолокнах Ni, содержащих водород, является появление на стадии пластической деформации глобулярных образований из атомов водорода. Количество таких сфер увеличивается с ростом температуры. Из полученного графика (рис. 1) зависимости значения откольной прочности от температуры эксперимента для нановолокон ГЦК Ni с различным содержанием водорода в порах видно, что присутствие водорода в нановолокне по-разному влияет на прочностные свойства нановолокна.

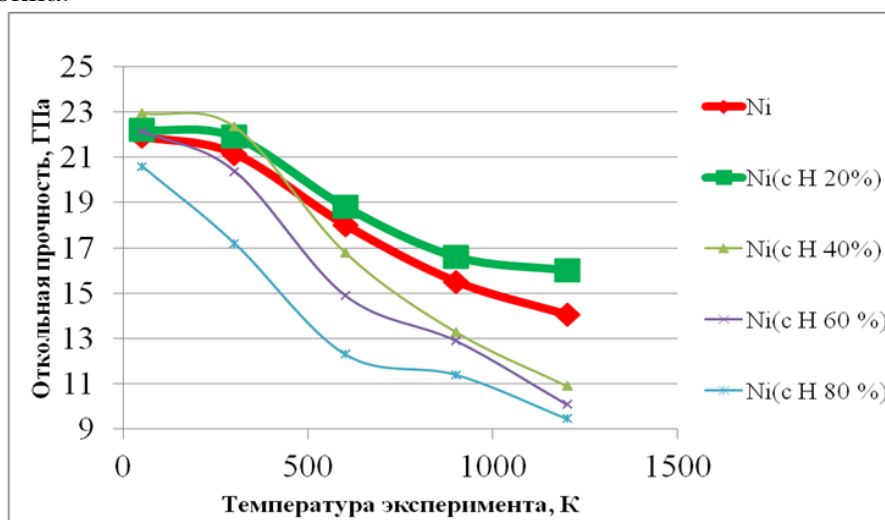


Рис. 1. График зависимости значения откольной прочности от температуры эксперимента для нановолокон $\langle 100 \rangle$ Ni, содержащих водород, и нановолокон $\langle 100 \rangle$ Ni без водорода

При заполнении 20 % пор атомами водорода наблюдается улучшение прочностных характеристик нановолокна по сравнению с волокном Ni без атомов водорода: при всех температурах увеличивается значение откольной прочности, улучшается пластичность, увеличивается длительность второй и третьей стадии деформации. При дальнейшем увеличении доли заполнения пор водородом значения характеристик падают (тонкие линии на графике): уменьшается значение откольной прочности, волокна становятся более хрупкими – разрушение происходит быстрее.

Исследование выполнено в рамках научного проекта №166 программы Министерства образования и науки РФ «Формирование государственных заданий высшим учебным заведениям в части проведения научно-исследовательских работ» и при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научных проектов №16-48-190182 р_а, №15-48-04127 р_сибирь_а, №15-58-04033 Бел_мол_а.

Литература

1. Яшин А. В., Сеница Н. В., Дудник Е. А., Старостенков М. Д. Процессы атомной перестройки при динамическом растяжении // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 16–20.
2. Старостенков М. Д., Яшин А. В., Дудник Е. А., Сеница Н. В. Исследование структурных превращений в сплаве Ni3Al под действием одноосной деформации растяжением // *Деформация и разрушение материалов*. – 2009. – № 6. – С. 28–31.
3. Старостенков М. Д., Яшин А. В., Дудник Е. А., Сеница Н. В., Хорошилов Д. Е. Структурно-энергетические превращения в металлических нановолокнах в условиях высокоскоростной динамической деформации растяжения // *Перспективные материалы*. – 2009. – № 7. – С. 383.
4. Старостенков М. Д., Яшин А. В., Дудник Е. А., Сеница Н. В., Хорошилов Д. Е. Исследование процессов атомной перестройки в нановолокне сплава Ni3Al подвергнутого одноосной деформации растяжения в направлении $\langle 110 \rangle$ // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 74–80.
5. Яшин А. В. Исследование особенностей и стадий деформации нановолокон ряда металлов и сплава Ni3Al на основе ГЦК решетки // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова. Барнаул, 2010.
6. Старостенков М. Д., Сеница Н. В., Яшин А. В. Структурная перестройка в нановолокне Ni3Al, содержащем парные неконсервативные антифазные границы, при высокоскоростной одноосной деформации растяжения // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2010. – Т. 15, № 3-1. – С. 1072–1073.
7. Старостенков М. Д., Сосков А. А., Яшин А. В., Яшин О. В. Исследование зависимости предела текучести от температуры на примере бездефектных нановолокон чистых металлов Ni и Al и интерметаллида Ni3Al // *Наноинженерия*. – 2015. – № 1 (43). – С. 30–33.
8. Яшин А. В., Старостенков М. Д., Сосков А. А., Сеница Н. В. Структурная перестройка в нановолокне CuAu I при одноосной деформации растяжения в направлении $\langle 100 \rangle$ // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2012. – Т. 9, № 4-2. – С. 640–645.
9. Яшин А. В., Чаплыгина А. А., Старостенков М. Д., Маркидонов А. В., Сеница Н. В., Мясниченко В. С., Сосков А. А. Структурная перестройка в нановолокне CuAu I при одноосной деформации растяжения в направлении $\langle 001 \rangle$ // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 93–97.
10. Яшин А. В., Романовский С. А., Старостенков М. Д. Структурная перестройка в нановолокне CuAu I при одноосной деформации растяжения // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2013. – Т. 18, № 4-2. – С. 2011–2014.
11. Старостенков М. Д., Яшин А. В., Сеница Н. В. Структурная трансформация нановолокна CuAu I со сверхструктурой L10 тетрагональной симметрии при одноосной деформации растяжения // *Письма о материалах*. – 2013. – Т. 3, № 1 (9). – С. 45–49.

12. *Starostenkov M., Yashin A., Sinica N.* Structural transformation in nanowires CuAu I with superstructure of L10 of tetragonal symmetry at uni-axial tension deformation // *Key Engineering Materials.* – 2014. – Т. 592–593. – С. 51–54.
13. *Berendsen H. J. C., et al.* Molecular-dynamics with coupling to an external bath // *J. Chem. Phys.* – 1984. – V. 81, № 8. – P. 3684–3690.
14. *Полетаев Г. М., Кулабухова Н. А., Старостенков М. Д.* Потенциалы межатомного взаимодействия в системах Pd-H и Ni-H // *Химическая физика и мезоскопия.* – 2011. – Т. 13, № 3. – С. 411–418.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОБ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Акиншин, И. И. Переяславская

Воронежский государственный университет

В приближении плоского напряженного состояния рассматривается упругопластическая задача о кольцевом диске при выборе кусочно-линейного условия пластичности общего вида. Различные подходы решения этой задачи рассматривались, например, в работах [1–4].

1. К выбору меры упрочнения

В теории упрочняющегося пластического тела вводится понятие меры упрочнения [5]. В области пластического состояния диска может реализоваться несколько режимов:

$$\begin{cases} \alpha_{i-1}(\sigma_\theta - \delta e_\theta^p) + \beta_{i-1}(\sigma_r - \delta e_r^p) - \gamma_{i-1}\delta e_z^p < 2k(1 + \eta e_{eq}^p), \\ \alpha_i(\sigma_\theta - \delta e_\theta^p) + \beta_i(\sigma_r - \delta e_r^p) - \gamma_i\delta e_z^p = 2k(1 + \eta e_{eq}^p), \\ \alpha_{i+1}(\sigma_\theta - \delta e_\theta^p) + \beta_{i+1}(\sigma_r - \delta e_r^p) - \gamma_{i+1}\delta e_z^p < 2k(1 + \eta e_{eq}^p). \end{cases} \quad (1)$$

В дальнейшем индекс i , определяющий номер режима пластичности не будем указывать.

Для кусочно-линейных условий пластичности мера изотропного упрочнения e_{eq}^p (эквивалент пластических деформаций [3]) может быть выражена через любую ненулевую компоненту тензора пластических деформаций, например, $e_{eq}^p = \chi e_\theta^p$, где χ – числовой коэффициент. Так в работе [3] для условия пластичности Треска $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$ величина e_{eq}^p определяется исходя из определения элементарной работы на приращениях пластических деформаций

$$\sigma_{ij} de_{ij}^p = \sigma_y de_{eq}^p.$$

Для кусочно-линейных условий пластичности это возможно в силу соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_\theta^p : d\varepsilon_r^p : d\varepsilon_z^p = \alpha : \beta : \gamma.$$

Однако, определение e_{eq}^p не обязательно связывать с $\sigma_{ij} de_{ij}^p$.

2. Напряженное состояние в пластической зоне

Обозначим через a , b радиусы внутренней и внешней границы кольцевой области ($a \leq r \leq b$), c – радиус упругопластической границы ($a \leq c \leq b$), p – давление на границе $r = a$, внешняя граница $r = b$ свободна от внешних воздействий.

Будем полагать, что в пластической области реализуется один из режимов (1) (это предположение не является существенным в данной работе).

Алгоритм определения напряжений и деформаций для кусочно-линейных условий пластичности излагался в работе [4]. Решение задачи в пластической зоне дает

$$\sigma_\rho = \rho^{m-1}C_1 + \rho^{-m-1}C_2 + \frac{k}{\alpha + \beta}, \quad \sigma_\theta = (\rho^{m-1}C_1 - \rho^{-m-1}C_2)m + \frac{k}{\alpha + \beta}, \dots$$

$$Ee_{\theta}^p = \frac{\alpha(\alpha\sigma_{\theta} + \beta\sigma_{\rho} - k)}{\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + k\delta\eta},$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\beta^2 + \delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + k\delta\eta}{\alpha^2 + \delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + k\delta\eta}}.$$

Величины C_1, C_2 определяются из граничного условия $\sigma_{\rho}(\rho = a) = -p$ и равенства пластических деформаций на упругопластической границе $e_{\theta}^p(\rho = c) = 0$.

3. Напряженное состояние в упругой зоне

Формулы для вычисления напряженного состояния в области упругого состояния диска можно получить, решая краевые или начальную задачу.

На упругопластической границе должны выполняться условия непрерывности напряжений (на упругопластической границе можно рассматривать не только непрерывности напряжений, но и непрерывность комбинаций напряжений), а на внешней границе задается или радиальное напряжение, или перемещения.

Вид формул для напряжений, деформаций и перемещений будет зависеть от выбранного варианта решения.

Если и на упругопластической границе учитывается непрерывности радиального напряжения и непрерывность функции пластичности то, решая начальную задачу

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \\ \sigma_r \Big|_{r=c} = k \ln \left(\frac{c}{a} \right) - p, \\ c \frac{d\sigma_r}{dr} \Big|_{r=c} = k. \end{cases} \quad (2)$$

для напряжений в упругой области имеем

$$\sigma_r = k \ln \left(\frac{c}{a} \right) - p + \frac{1}{2}k - \frac{kc^2}{2r^2}, \quad \sigma_{\theta} = k \ln \left(\frac{c}{a} \right) - p + \frac{1}{2}k + \frac{kc^2}{2r^2}. \quad (3)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы следует из (3) и граничного условия $\sigma_r \Big|_{r=b} = 0$

$$2 \ln \left(\frac{c}{a} \right) - \frac{2p}{k} + 1 - \frac{c^2}{b^2} = 0. \quad (4)$$

Если решить краевую задачу (можно рассмотреть и другие варианты)

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \\ \sigma_r \Big|_{r=b} = 0, \\ c \frac{d\sigma_r}{dr} \Big|_{r=c} = k. \end{cases} \quad (5)$$

то напряжения в упругой области

$$\sigma_r = -\frac{kc^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad \sigma_{\theta} = -\frac{kc^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} \right). \quad (6)$$

В этом случае уравнение (4) для определения радиуса этой границы следует из условия непрерывности напряжений на этой границе.

Для преобразования вида формул для напряжений (6) к виду (3) надо использовать уравнение (4).

Решение аналогичных задач в приближении плоской деформации можно найти, например, в работах [1, 4, 6–11].

Выводы

В зоне упругого состояния диска для определения напряжений можно рассматривать два алгоритма: решая начальную или краевую задачу. В зависимости от того непрерывность какой комбинации напряжений на упругопластической границе рассматривать, в рамках этих алгоритмов можем получать разные формулы. Учитывая уравнения для упругопластической границы, все формулы для напряжений переходят одна в другую.

Литература

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
2. Kollmann F. G. Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter QuerpreSverbinde. Forsch. Ing.-Wes. – 1978. – № 44. – Р. 1–11.
3. Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference. – Acta Mechanica. – 1986. – № 61. – Р. 1–14.
4. Артемов М. А., Потапов Н. С. Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле в случае плоского напряженного состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 8. – С. 25–29.
5. Kachanov K. M. Foundations of the theory of plasticity. North-Holland series in applied mathematics and mechanics, v. 12. - North-Holland publishing Co. – 1971. – 482 p.
6. Артемов М. А., Ларин И. А. Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 7. – С. 39–42.
7. Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
8. Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С. Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 9. – С. 117–119.
9. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 5. – С. 126–128.
10. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 81–90.
11. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.

К РАСЧЕТУ СЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

Ю. В. Андреева¹, А. Н. Внуков², А. В. Ковалев¹

¹Воронежский государственный университет

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Большое число задач механики и математического моделирования решено в работах [1–13]. В работе [1] определено напряженно-деформированное состояние в упрочняющейся упруговязкопластической трубе с учетом температуры. При этом материал трубы считался несжимаемым. В работе [2] с помощью метода возмущений решается задача определения напряженно-деформированного состояния в упругопластической трубе с учетом сжимаемости материала. В статье [8] определены уравнения для напряженного состояния упругопластической трубы при учете температуры и сжимаемости материала. В настоящей работе определены напряжения, перемещения и радиус пластической зоны для упругопластической трубы, находящейся в условиях плоской деформации.

Рассмотрим упругопластическое состояние круглой толстостенной трубы, поперечное сечение которой ограничено окружностями радиусов a и b ($a < b$) из сжимаемого материала, находящейся под действием равномерного внутреннего давления p . Температура трубы $T(r)$ – является известным решением уравнения теплопроводности и изменяется по логарифмическому закону [6, 7], предел текучести от температуры не зависит.

$$T(r) = P - Q \ln r,$$

где P, Q – известные постоянные.

Разрешая уравнения для определения напряжений [8], определим выражения для поля напряжений и перемещений в упругой и пластической областях трубы в форме.

$$\sigma_r^p = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right),$$

$$\sigma_\theta^p = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) + 2k,$$

$$\sigma_z^p = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) + k + \delta \frac{1}{2} \exp \left(1 - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \right) \left[\int (4\mu^{(1)} + 2\alpha^{(1)}EQ) \exp \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^2} - 1 \right) \frac{dr}{r} + \chi_e^{(1)} \right],$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)} \left(-p + 2k \ln \left(\frac{r}{a} \right) + k \right) - 2\alpha^{(1)}EP + 2\alpha^{(1)}EQ \ln r$,

$$u^p = \frac{3kr_s^{(0)2}}{2Er} + \delta \frac{k}{E} \mu^{(1)} \left[-3 \frac{r_s^{(0)2}}{b^2} r - 6r \ln \left(\frac{r}{r_s^{(0)}} \right) + 3r - 2 \frac{r_s^{(0)2}}{r} \right] +$$

$$+ \delta \alpha^{(1)} \left[\frac{3}{2} Pr - \frac{3}{2} Qr \ln r + \frac{3}{4} Qr - \frac{3}{2} Q \frac{1}{r} \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln \left(\frac{r_s^{(0)}}{b} \right) \right],$$

$$\sigma_r^e = kr_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \delta \alpha^{(1)} EQ \left[\ln \left(\frac{r}{b} \right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln \left(\frac{r_s^{(0)}}{b} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^e &= kr_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] + \delta\alpha^{(1)}EQ \left[\ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) + 1 \right], \\ \sigma_z^e &= \frac{kr_s^{(0)2}}{b^2} + \delta\alpha^{(1)}EQ \left[\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{r_s^{(0)2}}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) \left(2 - \frac{b^2}{r^2}\right) \right] + \frac{1}{2}\chi_e^{(1)}, \\ u^e &= \frac{3kr_s^{(0)2}}{2Er} + \delta\frac{k}{E}\mu^{(1)} \left[-3\frac{r_s^{(0)2}}{b^2}r + \frac{r_s^{(0)2}}{r} \right] + \\ &+ \delta\alpha^{(1)} \left[\frac{3}{2}Pr - \frac{3}{2}Qr \ln r + \frac{3}{4}Qr - \frac{3}{2}Q\frac{1}{r} \frac{r_s^{(0)2}b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

где σ_r , σ_{θ} , σ_z – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, E – модуль упругости, k – предел текучести, δ – малый параметр, α – коэффициент линейного температурного напряжения, μ – коэффициент Пуассона, u – компонента радиального перемещения, верхние индексы e , p – определяют соотношения, соответственно, в упругой и пластической областях.

Соотношение для определения радиуса упругопластической границы (r_s) имеет вид

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta\alpha^{(1)}EQ\frac{1}{4k} \left[r_s^{(0)} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) + r_s^{(0)} - r_s^{(0)} \frac{r_s^{(0)2} + b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) \right],$$

где $r_s^{(0)}$ определяется из уравнения

$$r_s^{(0)2} = b^2 + 2b^2 \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) - p.$$

Примем следующие значения постоянных [6]: $E = 2.1 \cdot 10^5 \frac{\text{даН}}{\text{см}^2}$; $\alpha = 0.000011$; $a = 1$ см; $b = 2$ см; $T = 100 - 115 \ln r^\circ\text{C}$; $k = 7000 \frac{\text{даН}}{\text{см}^2}$; $p = 3000$ атм.

Решение уравнения для радиуса упругопластической границы, при заданных значениях постоянных, дает значение $r_s = 1,015$ см.

Сравнение результатов, полученных при решении данной задачи с результатами работ [1, 6], показывает удовлетворительное совпадение этих результатов.

Литература

1. Горностаев К. К. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры / К. К. Горностаев, А. В. Ковалев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 3 (25). – С. 176–184.

2. Ковалев А. В. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью с учетом температуры. / А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). – С. 29–35.

3. Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 65–69.

4. *Ивлев Д. Д.* Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров, Ю. М. Марушкой // Изв. РАН. МТТ. – 1978. – № 4. – С. 80–87.
5. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
6. *Даниловская В. И.* Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса. Прикладная механика. – 1965. – т. I, № 6. – С. 8–13.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. – М. : Физматлит, 1963. – 253 с.
8. *Андреева Ю. В.* К определению напряженного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала / Ю. В. Андреева, А. В. Ковалев, А. Н. Внуков // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева: в 2 ч. – Чебоксары. – 2015. – ч. 1. – С. 167–172.
9. *Горностаев К. К.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды / К. К. Горностаев, А. В. Ковалев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 135–140.
10. *Огарков В. Б.* Вынужденные колебания материальной точки в среде с сопротивлением / В. Б. Огарков, Е. А. Скомарохова, А. И. Шашкин // Современные методы теории краевых задач материалы Воронежской весенней математической школы. – 2012. – С. 142–145.
11. *Гоцев Д. В.* Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – т. 42, № 3(247). – С. 146–151.
12. *Ивлев Д. Д.* О статически определимых состояниях в теории трансляционной идеальнопластичекой анизотропии / Д. Д. Ивлев, А. В. Ковалев, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 11. – С. 70–74.
13. *Ивлев Д. Д.* О статически определимых состояниях в теории трансляционной идеальнопластичекой анизотропии / Д. Д. Ивлев, А. В. Ковалев, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 11. – С. 70–74.

О КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко

Воронежский государственный университет

В работе рассматриваются вопросы, относящиеся к использованию кусочно-линейных условий пластичности.

Обобщенные условия пластичности

В статьях [1–6] рассматривались обобщенные формы записи условий пластичности, которые в частных случаях переходят в условие пластичности Мизеса или предельные условия. Наиболее известные предельные условия пластичности – это условие Треска (условие максимального касательного напряжения) и условие пластичности Шмидта (условие максимального приведенного напряжения). Условия [1–3]

$$|s_1 - s_3|^n + |s_2 - s_3|^n + |s_3 - s_1|^n = 2k^n, \quad (1)$$

$$|s_1|^n + |s_2|^n + |s_3|^n = \frac{2^n + 2}{3^n} k^n, \quad (2)$$

где s_1 – собственные значения девиатора напряжений, при $n = 2$ переходят в условие пластичности Мизеса, а при $n = 1$ и $n \rightarrow \infty$ переходят в условие пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения соответственно.

Условия (1), (2) можно также рассматривать в качестве некоторого приближения по отношению к предельным условиям пластичности, что позволяет исключить наличие сингулярных точек. При $n \neq 1$ и $n \neq \infty$ эти условия не содержат сингулярных точек.

Однако (1), (2) и их многочисленные модификации и обобщения в основном используются при рассмотрении задачи плоского напряженного состояния, поскольку для такого состояния, учитывая формулы для главных значений тензора напряжений

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2},$$

могут быть получены условия пластичности в координатах тензоров.

Альтернативные формы записи предельных условий пластичности

Альтернативные формы записи предельных условий пластичности рассматривались в работах [7–10]. Заметим, что эти формы не всегда эквивалентны исходным условиям [11–14]. Интерес к альтернативным формам предельных условий пластичности связан с возможностью записи этих условий через основные инварианты тензора напряжений.

При рассмотрении иных состояний эти условия, как и кусочно-линейные условия пластичности, приносят дополнительные трудности, поскольку представлены в терминах собственных значений тензора напряжений.

Интерес к условиям пластичности Треска и Шмидта связан также с тем, что эти условия в отличие от условия Мизеса зависят от третьего инварианта девиатора напряжений, который в девиаторной плоскости определяет отклонение кривой пластичности от окружности.

В [4–6] дана альтернативная форма записи условия

$$(s_1 - s_3)^{2n} + (s_2 - s_3)^{2n} + (s_3 - s_1)^{2n} = 2k^{2n}. \quad (3)$$

Наиболее интересны обобщения условия Мизеса, когда в (3) $n = 6$ или $n = 8$:

$$(s_1 - s_2)^6 + (s_1 - s_3)^6 + (s_2 - s_3)^6 = 66J_2^3 - 81J_3^2, \quad (4)$$

$$(s_1 - s_2)^8 + (s_1 - s_3)^8 + (s_2 - s_3)^8 = (258J_2^3 - 648J_3^2)J_2.$$

Здесь J_2 , J_3 – второй и третий инварианты девиатора напряжений. Если обратиться к равенству (4), то можно заметить аналогию с условием пластичности [15]

$$J_2^3 + cJ_3^2 = k,$$

которое было предложено для учета влияния третьего инварианта.

Обобщенный закон пластического течения

Однако использование условий (1), (2) и их обобщений порождает сложности, связанные с интегрированием соотношений ассоциированного закона пластического течения.

Известно, что при решении ряда задач использование кусочно-линейных условий пластичности общего вида, обобщающих условия Треска и Шмидта, эффективно, когда известны главные оси тензора напряжений [16].

Для определения кинематики для напряженного состояния, соответствующего сингулярным точкам кусочно-гладких условий пластичности, был предложен обобщенный закон пластического течения [17]. Этот закон позволяет принять любое направление вектора приращений пластических деформаций внутри конуса нормалей к поверхности пластичности в ее сингулярных точках и получить непрерывное поле деформаций при переходе вектора напряжений через сингулярные точки. Этот закон позволяет получить решение задачи о плоско-деформированном состоянии трубы при условии полной пластичности [18].

Тем не менее, сингулярные режимы пластичности приводят к разрыву пластических деформаций [14].

Критика условия Треска

Из всех кусочно-линейных условий пластичности наибольшие нарекания вызывает условие Треска. При решении ряда задач использование этого условия приводит к неудовлетворительным результатам. Например, при решении задачи о быстровращающемся диске на упругопластической границе можно получить ненулевые пластические деформации. Другие возражения к использованию условия Треска изложены в работе [19], в которой анализируется решение задачи о посадке сжатием (натяг, автоскрепление) дисков [20]. Суть критики в следующем. При расширении тонкого кольцевого диска только внутренним давлением в пластической зоне реализуется режим пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = k,$$

где θ , ρ – полярные координаты. На внутренней границе диска критическому натягу соответствует состояние

$$\sigma_\rho = -k, \quad \sigma_\theta = 0.$$

Сверхкритический натяг должен перевести внутреннюю границу в состояние

$$\sigma_\rho = -k, \quad \sigma_\theta = -k,$$

что возможно только в случае разрыва напряжений.

Соображения, изложенные в [19], не совсем убедительны, поскольку при попытке перехода к сверхкритическому натягу на внутренней границе диска в режиме

$$\sigma_\rho = -k, \quad \sigma_\theta = 0,$$

согласно обобщенному закону пластического течения, направление вектора пластических деформаций допускает величины

$$\varepsilon_\rho^p \neq 0, \quad \varepsilon_\theta^p = 0,$$

что будет приводить к неограниченному утолщению диска на границе. Никакого разрыва напряжений при этом нет. В отличие от гладких условий пластичности [17] при выходе на сингулярный режим

$$\sigma_\rho = -k, \quad \sigma_\theta = 0$$

получаем разрыв пластических деформаций.

Литература

1. *Hershey A. V.* The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face-Centered Cubic Crystals // Journal of Applied Mechanics. – 1954. – V. 21. – P. 241–249.
2. *Hosford W. F.* A Generalize Isotropic Yield Criterion // Journal of Applied Mechanics. – 1972. – V. 39. – P. 607–609.
3. *Karafilis A. P., Voyce M. C.* A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – V. 41. – P. 1859–1886.
4. *Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П.* Предельные условия пластичности // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 13–14.
5. *Артемов М. А., Барановский Е. С.* Альтернативная форма записи условия пластичности // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12-3. – С. 292.
6. *Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П.* Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 71–82.
7. *Reuss A.* Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfießbedingung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1933. – Bd. 13. – S. 356–360.
8. *Прагер В., Ходжс Ф. Г.* Теория идеально пластических тел. – М. : ИЛ, 1965. – 398 с.
9. *Malvern L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. - New Jersey: Prentice-Hall, Inc.: Englewood Cliffs., 1969. – 713 p.
10. *Аннин Б. Д.* Теория идеальной пластичности с сингулярной поверхностью текучести // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 2. – С. 181–188.
11. *Артемов М. А., Якубенко А. П.* О записи кусочно-линейных условий пластичности // Кибернетика и высокие технологии XXI века. Труды X Международной научно-технической конференции. – Воронеж: ВГУ, 2009. – Т. 2. – С. 823–833.

12. *Артемов М. А., Потанов Н. С.* Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 27–28.
13. *Артемов М. А., Потанов Н. С., Якубенко А. П.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 4–5.
14. *Артемов М. А., Барановский Е. С.* Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.
15. *Drucker D. C.* Relation of Experiments to Mathematical Theories of Plasticity // Journal of Applied Mechanics. – 1949. – V. 16. – P. 349–357.
16. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
17. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
18. *Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потанов Н. С.* О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
19. *Gamer U.* The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. – 1986. – V. 61. – P. 1–14.
20. *Kollmann F. G.* Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter Querpreßverbände // Forschung im Ingenieurwesen A. – 1978. – Bd. 44. – S. 1–11.

НЕЙТРАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

Г. Г. Бердзенишвили, И. И. Переяславская

Воронежский государственный университет

Математическое моделирование состояния дисков и труб, испытывающих различное внешнее воздействие, вызывает особый практический интерес в связи с определением различных технологических процессов, направленных на высокую точность изготовления различных узлов. В этом научном направлении выполнено большое количество исследований, например, [1–12].

Рассматривается кольцевой диск, на границах которого задано давление или задано радиальное смещение его границ.

1. Упругое состояние

В приближении плоского напряженного состояния напряжения, деформации и перемещения в кольцевом диске ($a \leq r \leq b$), находящегося в упругом состоянии, определяются из совместного рассмотрения

уравнения равновесия (r, θ, z – цилиндрические координаты)

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r, \quad (1)$$

соотношений закона Гука

$$Ee_r = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \quad Ee_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r, \quad Ee_z = -\nu(\sigma_\theta + \sigma_r), \quad (2)$$

условия совместности деформаций

$$r \frac{de_\theta}{dr} + e_\theta - e_r = 0, \quad (3)$$

и формул для деформаций

$$e_r = \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}. \quad (4)$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Система уравнений (1)–(3) – замкнута. Уравнение (3) тождественно выполняется при подстановке соотношений (4).

Выбор граничных условий в напряжениях или перемещениях не принципиален, поскольку всегда можно выполнить необходимую замену и преобразование формул.

Исключая из системы (1)–(3) деформации e_θ , e_r и окружное напряжение σ_θ , приходим к уравнению [1]

$$r^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) и учитывая соотношения (1), (2), (4), находим [1]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A - \frac{B}{r^2}, & \sigma_\theta &= A + \frac{B}{r^2}, \\ Ee_r &= (1 - \nu)A - \frac{(1 + \nu)B}{r^2}, \\ Ee_\theta &= (1 - \nu)A + \frac{(1 + \nu)B}{r^2}, \\ Eu &= (1 - \nu)Ar + \frac{(1 + \nu)B}{r}.\end{aligned}\tag{7}$$

Формулы для величин A и B зависят от характера внешних воздействий, задаваемых на границах области решения задачи. На границах могут быть заданы условия, которым должно удовлетворять решение задачи. Например, если на границах $r = a$, $r = b$ области решения задачи условия в напряжениях: $\sigma_r|_{r=a} = -p_a$, $\sigma_r|_{r=b} = -p_b$, то

$$A = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2},$$

если заданы граничные условия в перемещениях: $u|_{r=a} = \Delta_a$, $u|_{r=b} = \Delta_b$, то

$$A = -\frac{(a\Delta_a - b\Delta_b)E}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)}, \quad B = -\frac{ab(a\Delta_b - b\Delta_a)E}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)},$$

2. Нейтральное нагружение

Для оценки величины напряженного состояния выберем эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\}.$$

Для напряженного состояния (7) эквивалентное напряжение принимает наибольшее значение на границе $r = a$.

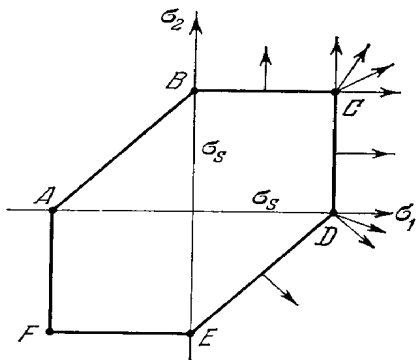


Рис. Шестиугольник Треска

Рассмотрим случай нейтрального нагружения, когда только на границе $r = a$ выполняется условие пластичности

$$\sigma_{eq} = \sigma_s, \quad \sigma_s = \text{const},\tag{8}$$

а область $a < r \leq b$ находится в упругом состоянии.

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$) в плоскости главных напряжений σ_1 , σ_2 уравнение (8) определяет шестиугольник (рис.).

На границе $r = a$ могут реализоваться различные режимы, соответствующие вершинам и сторонам шестиугольника пластичности.

Для определенности примем, что $\sigma_r = \sigma_1$, $\sigma_\theta = \sigma_2$.

Будем полагать, что давления, действующие на границы области $r = a$ и $r = b$, принимают неотрицательное значение (вариант растягивающих внешних усилий вполне аналогичен) и определим зависимость давлений для рассматриваемого случая нейтрального нагружения для каждого режима пластичности.

3. Режим E

На границе $r = a$ должны выполняться условия

$$\sigma_\theta|_{r=a} = -k, \quad \sigma_r|_{r=a} = 0, \quad (9)$$

Напряжения, деформации и перемещения в области упругого состояния ($a \leq r \leq b$) будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) k, & \sigma_\theta &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) k, \\ Ee_r &= -\frac{1}{2} \left((1 - \nu) - \frac{(1 + \nu)a^2}{r^2} \right) k, & Ee_\theta &= -\frac{1}{2} \left((1 - \nu) + \frac{(1 + \nu)a^2}{r^2} \right) k, \\ Eu &= -\frac{1}{2} \left((1 - \nu)r + \frac{(1 + \nu)a^2}{r} \right) k. \end{aligned}$$

Для выполнения условий (9) на границах $r = a$ и $r = b$ должны быть

$$p_a = 0, \quad p_b = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

4. Режим EF

При выполнении на границе $r = a$ условий

$$\sigma_\theta = k, \quad \sigma_r = -p_a, \quad -k \leq \sigma_r \leq 0,$$

из формул (7) следует зависимость между давлениями p_a и p_b

$$p_b = \frac{1}{2} \left(k + p_a - \frac{(k - p_a)a^2}{b^2} \right), \quad 0 \leq p_a \leq k. \quad (10)$$

$$p_a = \frac{(a^2 - b^2)k + 2b^2p_b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) k \leq p_b \leq k. \quad (11)$$

Если задаем давление на внешней границе p_b , то должны выполняться соотношения (11), поэтому Напряжения, деформации и перемещения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{a^2k + b^2p_b}{b^2 + a^2} + \frac{a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 + a^2)r^2}, & \sigma_\theta &= -\frac{a^2k + b^2p_b}{b^2 + a^2} - \frac{a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 + a^2)r^2}, \\ Ee_\theta &= -\frac{(1 - \nu)(a^2k + b^2p_b)}{a^2 + b^2} - \frac{(1 + \nu)a^2b^2(k - p_b)}{(a^2 + b^2)r^2}, \\ Ee_r &= -\frac{(1 - \nu)(a^2k + b^2p_b)}{a^2 + b^2} + \frac{(1 + \nu)a^2b^2(k - p_b)}{(a^2 + b^2)r^2}, \\ Eu &= -\frac{(1 - \nu)(a^2k + b^2p_b)}{a^2 + b^2}r - \frac{(1 + \nu)a^2b^2(k - p_b)}{(a^2 + b^2)r}. \end{aligned}$$

Если задаем давление на внутренней границе p_a ($0 \leq p_a \leq k$), напряжения, деформации и перемещения находятся по формулам

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \left(k + p_a + \frac{a^2(k - p_a)}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{2} \left(k + p_a + \frac{a^2(k - p_a)}{r^2} \right).$$

$$Ee_r = -\frac{(1 - \nu)(k + p_a)}{2} + \frac{(1 + \nu)(k - p_a)a^2}{2r^2},$$

$$Ee_\theta = -\frac{(1 - \nu)(k + p_a)}{2} - \frac{(1 + \nu)(k - p_a)a^2}{2r^2},$$

$$Eu = -\frac{(1 - \nu)(k + p_a)r}{2} - \frac{(1 + \nu)(k - p_a)a^2}{2r}.$$

Когда давление p_a изменяется в пределах $0 \leq p_a \leq k$ и при этом давление p_b изменяется по закону (10), то вектор напряжений в плоскости $(\sigma_r, \sigma_\theta)$ перемещается от точки E к точке F шестиугольника Треска (увеличение давления p_a приводит к движению точки, изображающей напряженное состояние на шестиугольнике Треска против хода часовой стрелки).

5. Режим F . Предельное состояние

Когда $p_a = p_b = k$, реализуется режим F . Напряжения, деформации и перемещения в области $a \leq r \leq b$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k.$$

$$Ee_r = Ee_\theta = -(1 - \nu)k, \quad Eu = -(1 - \nu)kr.$$

Режим F соответствует предельному состоянию области. Увеличение давлений p_a, p_b невозможно.

6. Режим FA

Поскольку для рассматриваемого режима

$$\sigma_r = -k, \quad -k \leq \sigma_\theta \leq 0,$$

формулы (7) ($p_a = k$) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2k - b^2p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 - a^2)r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2k + b^2p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 - a^2)r^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая, что для режима FA окружное напряжение может изменяться в пределах $-k \leq \sigma_\theta \leq 0$, из формулы (1) находим границы изменения давления p_b

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) k \leq p_b \leq k.$$

При выполнении условий $p_a = k$ и уменьшении внешнего давления p_b от значения $p_b = k$ до значения $p_b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) k$ на контуре $r = a$ будет выполняться процесс

нейтрального нагружения согласно режиму FA , а вектор напряжений в плоскости $(\sigma_r, \sigma_\theta)$ будет перемещаться от точки F к точке A .

Деформации и перемещения в области $a \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} Ee_r &= \frac{(1-\nu)(a^2k - b^2p_b)}{b^2 - a^2} - \frac{(1+\nu)a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 - a^2)r^2}, \\ Ee_\theta &= \frac{(1-\nu)(a^2k - b^2p_b)}{b^2 - a^2} + \frac{(1+\nu)a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 - a^2)r^2}, \\ Eu &= \frac{(1-\nu)(a^2k - b^2p_b)}{b^2 - a^2}r + \frac{(1+\nu)a^2b^2(k - p_b)}{(b^2 - a^2)r}. \end{aligned}$$

7. Режим A

Данный режим выполняется на границе $r = a$, когда

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a = -k, \quad \sigma_\theta|_{r=a} = 0. \quad (13)$$

При выполнении (1) решение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{1}{2}k \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{2}k \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ Ee_r &= -\frac{1}{2} \left(1 - \nu + \frac{(1+\nu)a^2}{r^2}\right)k, \quad Ee_\theta = -\frac{1}{2} \left(1 - \nu - \frac{(1+\nu)a^2}{r^2}\right)k, \\ Eu &= -\frac{1}{2} \left((1-\nu)r - \frac{(1+\nu)a^2}{r}\right)k. \end{aligned}$$

Из решения (13) следует, что давление границе должно быть

$$p_b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)k.$$

8. Режим AB

Режим реализуется, когда давление на внутренней границе

$$0 \leq p_a \leq k, \quad (14)$$

Напряженное состояние в области упругого состояния ($a \leq r \leq b$), когда задаем давление p_a , вычисляется по формулам

$$\sigma_r = -p_a + \frac{1}{2}k \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = -p_a + \frac{1}{2}k \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (15)$$

Из условия (14) и из первой формулы (15) следует, что давление на внешней границе $r = b$ должно принимать значения, определяемые по формуле

$$p_b = p_a - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)k.$$

Деформации и перемещения в области $a \leq r \leq b$

$$Ee_r = (1 - \nu) \left(\frac{1}{2}k - p_a \right) - \frac{1}{2} \frac{(1 + \nu)a^2}{r^2} k,$$

$$Ee_t = (1 - \nu) \left(\frac{1}{2}k - p_a \right) + \frac{1}{2} \frac{(1 + \nu)a^2}{r^2} k,$$

$$Eu = (1 - \nu) \left(\frac{1}{2}k - p_a \right) r + \frac{1}{2} \frac{(1 + \nu)a^2}{r} k.$$

Если задавать давление p_b на внешней границе, то равенство $(\sigma_\theta - \sigma_r = k)|_{r=a}$ будет выполняться, если

$$-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) k \leq p_b \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) k,$$

а давление на внутренней границе должно принимать значение

$$p_a = p_b + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) k.$$

Напряженное состояние в области упругого состояния ($a \leq r \leq b$), когда задаем давление p_b , можно вычислять по формулам

$$\sigma_r = -p_b + \frac{1}{2}k \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = -p_b + \frac{1}{2}k \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

$$Ee_r = (1 - \nu)p_b + \frac{1}{2}ka^2 \left(\frac{1 - \nu}{b^2} - \frac{1 + \nu}{r^2} \right),$$

$$Ee_t = -(1 - \nu)p_b + \frac{1}{2}ka^2 \left(\frac{1 - \nu}{b^2} + \frac{1 + \nu}{r^2} \right),$$

$$Eu = r \left((1 - \nu)p_b + \frac{1}{2}ka^2 \left(\frac{1 - \nu}{b^2} + \frac{1 + \nu}{r^2} \right) \right).$$

Полученные формулы позволяют построить алгоритм нейтрального нагружения на внутреннем контуре области $a \leq r \leq b$ для условия пластичности Треска, когда вектор напряжений в плоскости $(\sigma_\theta, \sigma_r)$ должен непрерывно перемещаться от точки E до точки B шестиугольника Треска.

Литература

1. Дарков А. В., Шапиро Г. С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа. – 1965. – 762 с.
2. Kachanov L. V. Applied mathematics and mechanics. – V. 12. – North-Holland publishing Co, 1971. – 482 p.
3. Kollmann F. G. Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter QuerpreSverb inde // Forsch. Ing.-Wes. – 1978. – № 44. – P. 1–11.
4. Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supercritical Interference // Acta Mechanica. – 1986. – № 61. – P. 1–14.
5. Артемов М. А. О двусосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. – 1985. – № 6. – С. 158–163.

6. *Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С.* О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
7. *Артемов М. А., Ларин И. А., Потапов Н. С.* Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 9. – С. 117–119.
8. *Артемов М. А., Ларин И. А.* Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 7. – С. 39–42.
9. *Артемов М. А., Потапов Н. С.* Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле в случае плоского напряженного состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 8. – С. 25–29.
10. *Артемов М. А., Якубенко А. П.* К задаче Ламе // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 11–13.
11. *Артемов М. А., Барановский Е. С., Шашкин А. И.* Об одной нестандартной краевой задаче // Механика предельного состояния и смежные вопросы: материалы Всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. – 2015. – С. 118–122.
12. *Артемов М. А., Барановский Е. С.* Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТОМСОНА

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Аналитически и численно найдено одно новое автомодельное решение контактной задачи Томсона. Вычисления основаны на использовании уравнений статической теории упругости, с помощью которых получено распределение напряжений внутри цилиндрического тела в точке его контакта с полубесконечной упругой средой. Задача решена в стационарном случае, когда интересующие нас времена δt значительно превышают время контакта τ . Строго аналитически показано, что радиальная деформация $u_r(r, z)$ и продольная деформация $u_z(r, z)$ подчиняются уравнениям третьего порядка, которые допускают физически правильные автомодельные решения. При определенных граничных условиях найдены численные решения полученных уравнений.

Предположим, что имеется горизонтально летящий со скоростью \mathbf{V} цилиндрический стержень, локально контактирующий с полубесконечной упругой средой. При этом вся его кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную энергию деформаций упругой среды, самого стержня и его нагрев. Будем предполагать, что теплопроводность упругой среды весьма велика, а потому, ее нагрев и охлаждение происходят практически мгновенно. По большому счету, нагревом самого стержня тоже можно пренебречь, но поскольку его размер значительно меньше линейных размеров упругой среды, то некоторое повышение температуры в области контакта все же существует. Как показывают простые оценки, тепловые деформации не слишком велики, и их можно не учитывать. Тем не менее, при локальном нагреве, который длится некоторое небольшое, но конечное время Δt , превышающее время контакта τ , всегда имеет место дополнительная термоупругая деформация. В отдельных случаях она важна, но в рассматриваемой нами задаче – не существенна. Ее, однако, можно легко учесть благодаря введению коэффициента объемного расширения $\alpha_P = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$, где V – объем, T – температура, P – давление. Сказанное означает, что закон сохранения энергии с учетом основных потерь в обоих телах мы имеем право записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{V}^2 dV = \int_{V_c} F_V dV + \int_V F'_V dV + \int_V \int_{t_0}^{t_1} \left[c_P \dot{T} + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{2T_0} \right] dt dV + \Delta F_s, \quad (1)$$

где стоящая слева величина есть не что иное, как кинетическая энергия стержня, идущая целиком на его внутренние деформации (о ней поговорим чуть ниже), ρ – его плотность, V_c – его объем, F_V – плотность термоупругой энергии стержня, которая традиционно представляет собой плотность свободной энергии при деформациях с учетом коэффициента объемного расширения (см. [1, 2], а также работу [3]), второе слагаемое представляет собой энергию упругого полупространства, о чем везде далее будет свидетельствовать «штрих» у плотности свободной энергии, а V – его объем, наконец, третье слагаемое – диссипативная функция и чистый нагрев, c_P – изобарическая теплоемкость, отнесенная к единице объема тела (заметим здесь, что часто вводимая в рассмотрение удельная теплоемкость, отнесенная к единице массы тела, отличается от введенной нами теплоемкости

ср дополнительным множителем ρ), T_0 – температура термостата. Последнее слагаемое ΔF_s представляет собой энергию звуковых колебаний. Третье слагаемое в правой части в линейном приближении по температуре после интегрирования по частям и в силу уравнения теплопроводности автоматически исчезает. В случае стержня весьма удобно перейти к цилиндрической системе координат, где элемент объема $dV = 2\pi r dr dz$. Поэтому для интересующей нас части кинетической энергии, связанной с энергией деформации, уравнение (1) с учетом сказанного можно переписать, как

$$\varepsilon(\lambda) \int_0^{h_1} \rho \mathbf{V}^2 dz = \frac{2}{R^2} \int_0^{h_1} \int_0^R F_V(r, z) r dr dz, \quad (2)$$

где R – радиус недеформированного цилиндра, а h_1 – линейный размер области контакта (см., например, задачу Герца в [1]), отсчитываемый в сторону, противоположную направлению движения и лежащий внутри стержня. Величина $\varepsilon(\lambda)$, характеризующая относительные потери энергии в стержне, будет строго вычислена далее, а параметр $\lambda = \frac{h_1}{R}$. Что касается плотности свободной энергии, то в соответствии с [1] при учете тепловых деформаций, ее можно представить в виде

$$F_V = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2 - K \alpha_P u_{ll} (T - T_0) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u},$$

где симметричный тензор деформаций $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, его след $u_{ll} = \text{div} \mathbf{u}$, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ – искомый вектор смещения внутренних точек тела, являющийся следствием силовых воздействий, приводящих к деформациям внутренней структуры, μ – модуль сдвига, а K – коэффициент сжатия (расширения). Они имеют размерность давления $\left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right)$. Их связь с модулем Юнга E и с коэффициентом Пуассона σ (которая и будет далее использоваться) можно представить в классическом виде, как $\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$, $K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$. Последнее слагаемое в плотности свободной энергии представляет собой потенциальную энергию, связанную с действием сторонних сил. Как правило, это сила тяжести и центробежная сила, для которых объемная сила определяется простой зависимостью $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \rho \frac{[\vec{\omega} \times \mathbf{r}]^2}{r}$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения. Записывая функционал $S\{\mathbf{u}\} = \int_V F_V dV$ и варьируя его по вектору деформаций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ с учетом формул (4), получим искомое уравнение

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \text{grad} \text{div} \mathbf{u} + 2\alpha_P \frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma} \nabla T = -\mathbf{f} \frac{2(1 + \sigma)}{E}.$$

При решении этого уравнения мы не будем принимать во внимание ни силу тяжести (считаем, что стержень летит горизонтально), ни его возможное вращение вокруг своей оси z , поэтому считаем, что $\mathbf{f} = 0$. В итоге на временах $\Delta t > \tau$, когда закон сохранения энергии сводится к простому уравнению (2), получаем $\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \text{grad} \text{div} \mathbf{u} = 0$. Будем искать его решение для поставленной выше контактной задачи, в цилиндрической системе координат, ось z которой направлена вдоль оси цилиндра. Ясно, что в этом случае вектор деформации имеет только две возможные проекции на оси z и r , то есть $\mathbf{u} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z))$.

Проектируя уравнение на оси z и r , приходим к следующей системе уравнений

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0, \quad \Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = 0, \quad (3)$$

где второе слагаемое в первом уравнении системы (3) появляется в результате ковариантного дифференцирования после перехода в криволинейную систему координат (см., к примеру, [4], стр. 614). Решения линейной системы уравнений (3) мы найдем в предположении, что оно является автомодельным, и должно приводить к качественно правильному результату. Полагая поэтому, что $x = \frac{z}{r}$, в результате придем к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \left[x^2 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \right] u_r'' + xu_r' - u_r + \frac{1}{2(1-\sigma)} (u_z'' - u_z') &= 0, \\ x^2 u_r'' + [2(1-\sigma) + (1-2\sigma)x^2] u_z'' + (1-2\sigma)xu_z' &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Как из них видно, эта система уравнений представляет собой линейные алгебраические уравнения по отношению к производным u_z' и u_z'' . Решая ее относительно u_z' и u_z'' , в итоге находим следующее уравнение

$$\varphi_1(x)u_r''' + \varphi_2(x)u_r'' + \varphi_3(x)u_r' - \varphi_4(x)u_r = 0, \quad (5)$$

где функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 2\sigma + 2(1-\sigma)x^2 + \frac{x^2}{s(x)}, \\ \varphi_2(x) &= 6(1-\sigma)x + [1 - 2\sigma + 2(1-\sigma)x^2] \left(1 - \frac{a'}{1+a} \right) - \frac{x^2}{s(x)} \left(1 + \frac{a'}{1+a} \right), \\ \varphi_3(x) &= 2(1-\sigma) \left(1 - \frac{a'}{1+a} \right) x, \quad \varphi_4(x) = 2(1-\sigma) \left(1 - \frac{a'}{1+a} \right), \\ s(x) &= 2(1-\sigma) + (1-2\sigma)x^2, \quad a = \frac{(1-2\sigma)x}{2(1-\sigma) + (1-2\sigma)x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вводя сокращенное безразмерное обозначение $y = \frac{u_r(x)}{R}$, где R – радиус стержня, имеем

$$\begin{aligned} &\left[1 - 2\sigma + 2(1-\sigma)x^2 + \frac{x^2}{s(x)} \right] y''' + \\ &\left\{ 2x(1-\sigma) \left[3 + \frac{2}{s^2(x)} \right] + [1 - 2\sigma + 2(1-\sigma)x^2](1 - \beta(x)) - \frac{x^2}{s(x)}(1 + \beta(x)) \right\} y'' + \\ &+ 2(1-\sigma)(1 - \beta(x))xy' - 2(1-\sigma)(1 - \beta(x))y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Численное решение уравнения (7) иллюстрируют рис. 1–6.

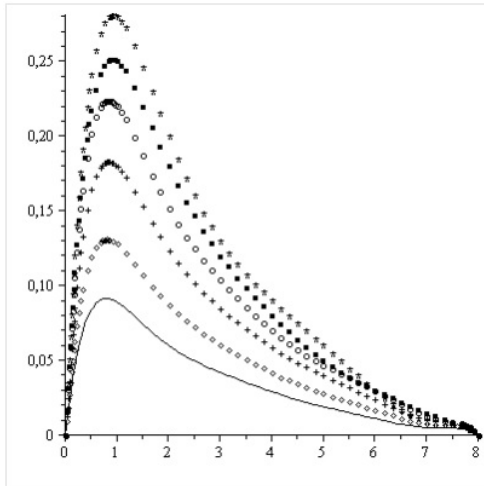


Рис. 1. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном начальном условии $y'(0) = 1$ и различных значениях коэффициента Пуассона σ . Все кривые соответствуют теоретическим значениям коэффициента Пуассона (здесь и далее). Сплошная кривая соответствует $\sigma = 0.45$, четырехугольники – $\sigma = 0.4$, крестики – $\sigma = 0.3$, кружочки – $\sigma = 0.2$, черные квадратики – $\sigma = 0.1$, звездочки – $\sigma = 0.01$

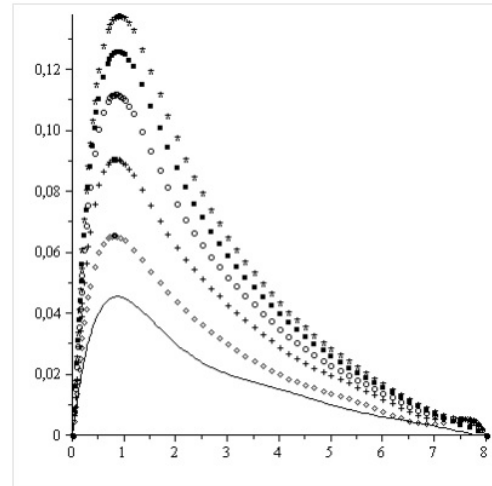


Рис. 2. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном начальном условии $y'(0) = 0.5$ и различных значениях коэффициента Пуассона σ . Сплошная кривая соответствует $\sigma = 0.45$, четырехугольники – $\sigma = 0.4$, крестики – $\sigma = 0.3$, кружочки – $\sigma = 0.2$, черные квадратики – $\sigma = 0.1$, звездочки – $\sigma = 0.01$

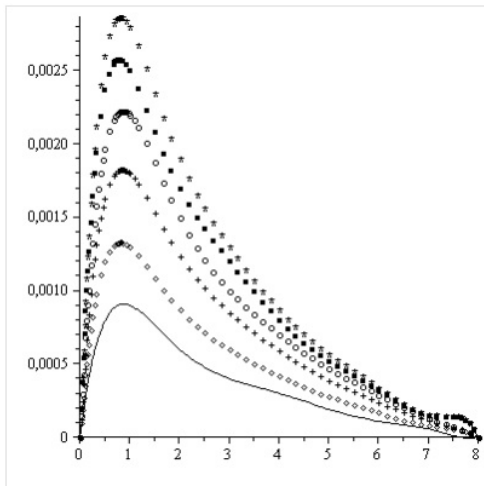


Рис. 3. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном начальном условии $y'(0) = 0.01$ и различных значениях коэффициента Пуассона σ . Сплошная кривая соответствует $\sigma = 0.45$, четырехугольники – $\sigma = 0.4$, крестики – $\sigma = 0.3$, кружочки – $\sigma = 0.2$, черные квадратики – $\sigma = 0.1$, звездочки – $\sigma = 0.01$

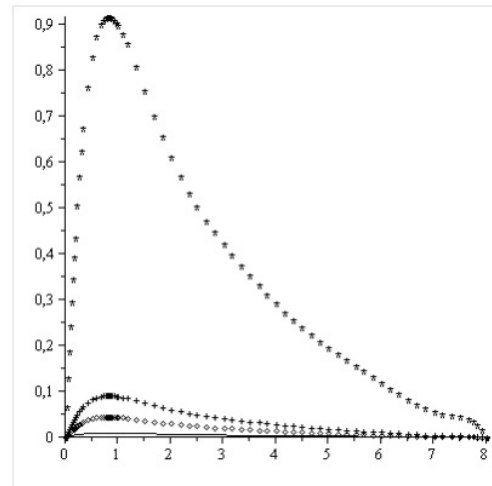


Рис. 4. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном значении коэффициента Пуассона $\sigma = 0.45$ и различных начальных условиях. Сплошная кривая, увеличенная в десять раз, соответствует $y'(0) = 0.01$, четырехугольники – $y'(0) = 0.5$, крестики – $y'(0) = 1$, звездочки – $y'(0) = 10$

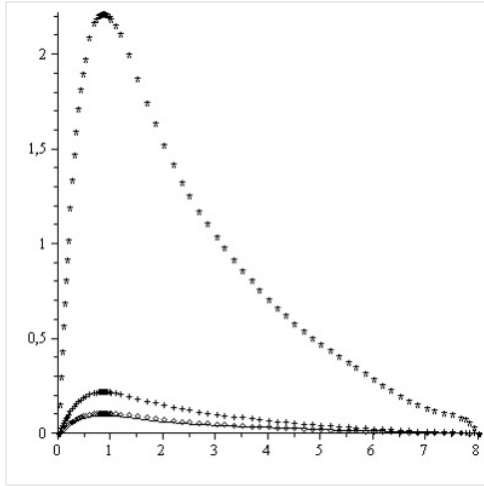


Рис. 5. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном значении коэффициента Пуассона $\sigma = 0.2$ и различных начальных условиях. Сплошная кривая, увеличенная в десять раз, соответствует $y'(0) = 0.01$, четырехугольники – $y'(0) = 0.5$, крестики – $y'(0) = 1$, звездочки – $y'(0) = 10$

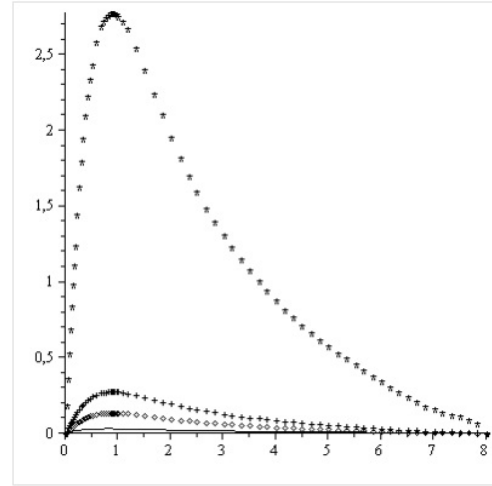


Рис. 6. Функция $y(x)$, полученная при фиксированном значении коэффициента Пуассона $\sigma = 0.01$ и различных начальных условиях. Сплошная кривая, увеличенная в десять раз, соответствует $y'(0) = 0.01$, четырехугольники – $y'(0) = 0.5$, крестики – $y'(0) = 1$, звездочки – $y'(0) = 10$

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М. : Наука, 1987. – Т. 7. – 244 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М. : Наука, 1973. – Т. 1, 2. – 536 с., 584 с.
3. Гладков С.О. Об особенностях внутренних деформационных изменений массивных тел под действием собственного гравитационного поля // ЖТФ. – 2003. – Т. 73. – № 1. – С. 131–133.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – Т. 8. – 620 с.

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДАВЛЕНИЯ

К. Н. Галимзянова¹, Л. В. Ковтанюк¹, Г. Л. Панченко^{2,3}

¹*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

²*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

³*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

Пусть сферический слой, ограниченный поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$), находится в равновесии при выполнении граничных условий

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \quad (1)$$

В (1) $p(t)$ – известная возрастающая со временем функция, σ_{rr} – компонента тензора напряжений в сферической системе координат (r, θ, φ) .

Считаем, что полные деформации d_{ij} складываются из обратимых (упругих) e_{ij} и необратимых p_{ij} деформаций [1]:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}. \quad (2)$$

Полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования. При этом необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями.

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (3)$$

в котором λ, μ – параметры Ламе.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, или, где пластическое течение происходило, но прекратилось, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортон [2]:

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений, ε_{ij}^v – скорости деформаций ползучести, B, n – заданные параметры ползучести материала.

При достижении напряженным состоянием поверхности текучести, диссипативный механизм меняется: начинается пластическое течение. В качестве такой поверхности будем использовать условие Треска

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

где ε_{ij}^p – тензор скоростей пластических деформаций, k – предел текучести.

В условиях, пока пластическое течение не началось, интегрируя уравнение равновесия (квазистатическое приближение)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0$$

с учетом соотношений (2)–(4) и использованием краевых условий (1), для определения компоненты деформации ползучести $p_{rr}(r, t) = -2p_{\varphi\varphi}$ получим уравнение

$$p_{rr} - \frac{3(\lambda + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{r_0^3 R^3}{r^3(R^3 - r_0^3)} \left(p(t) + \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_0}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right) =$$

$$= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{Bn} \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (6)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (6) при заданных параметрах B , n и $p(t)$, и начальном условии $p_{rr}(r, 0) = 0$ было получено методом конечных разностей с использованием составной формулы трапеций [3] для приближенного вычисления интеграла, входящего в это уравнение.

Уравнение (6) справедливо до момента времени $t = t_0$, в который на внутренней поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (5) в форме $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\Big|_{r=r_0} = 2k$. Начиная с этого момента времени, от поверхности $r = r_0$ развивается область пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, область $m(t) \leq r \leq R$ остается областью с деформациями упругости и ползучести. Таким образом, граница $r = m(t)$ является движущейся границей области пластического течения. Уравнение равновесия теперь необходимо проинтегрировать отдельно в области пластического течения и в области с деформациями упругости и ползучести. Из условий непрерывности компонент напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ на границе $r = m(t)$ получим систему уравнений для определения функций $m(t)$ и $p_{rr}(r, t)$ в области $m(t) \leq r \leq R$

$$p_{rr} - \frac{3(\lambda + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{m^3 R^3}{r^3(R^3 - m^3)} \left(p(t) - 4k \ln \frac{m}{r_0} + \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_m^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right) =$$

$$= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{Bn} \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{Bn} \frac{\partial p_{rr}(m, t)}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n-1}} = 2k.$$

В области $r_0 \leq r \leq m(t)$ функция $p_{rr}(r, t)$ имеет вид

$$p_{rr} = \frac{3(\lambda + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{m^3 R^3}{r^3(R^3 - m^3)} \left(p(t) - 4k \ln \frac{m}{r_0} + \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_m^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right) - \frac{2(\lambda + 2\mu)k}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Начальными значениями для компонент пластических деформаций являются накопленные к моменту начала пластического течения значения компонент деформаций ползучести.

В некоторый момент времени $t = t_1$ внешнее нагружающее давление начинает уменьшаться. В области с накопленными необратимыми деформациями $r_0 \leq r \leq m(t_1)$ при разгрузке пластические деформации не изменяются. Деформации ползучести во всем сферическом слое вычисляются из уравнения (6), в котором функция $p(t)$ заменяется на убывающую со временем функцию $p_1(t)$.

При дальнейшем уменьшении давления в некоторый момент времени $t = t_2$ возникает повторное пластическое течение, связанное с выполнением равенства $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\Big|_{r=r_0} = -2k$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-60017), программы фундаментальных научных исследований «Дальний Восток» (0262-2015-0064, 0262-2015-0065).

Литература

1. Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 145–157.
2. Norton F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y. : Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.
3. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 2001. – 382 с.

СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ТЕКУЧЕСТИ ТРЕСКА И ИВЛЕВА В ЗАДАЧЕ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРА

Е. П. Дац¹, Е. В. Мурашкин^{2,3,4}

¹*Владивостокский университет экономики и сервиса, г. Владивосток*

²*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского, РАН, г. Москва*

³*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана*

⁴*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва*

Определение температурных напряжений и деформаций, при которых может происходить необратимое деформирование материала, является одной из актуальных проблем современной механики деформированного твердого тела. Расчет температурных напряжений в условиях цилиндрической симметрии связан прежде всего с определением напряженно-деформированного состояния в трубах, валах, муфтах и других цилиндрических изделиях, подверженных интенсивному тепловому воздействию. Вычисление уровня остаточных напряжений с учетом пластических течений, например, в задачах горячей посадки цилиндрических тел [1], позволяет более точно рассчитать итоговый натяг получаемого соединения. Высокий температурный градиент способен вызывать процессы необратимого деформирования в материалах конструкций в процессах сварки [2]

Задача о необратимом деформировании нагретых цилиндрических тел ранее рассматривалась в работе [3]. При помощи критерия текучести Треска было найдено аналитическое решение для напряжений и перемещений в случае пластического течения материала. При этом было показано, что в условиях плоского деформированного состояния области необратимого деформирования состоят из нескольких частей, в каждой из которых распределения напряжений имеют собственные аналитические зависимости. В данной работе в качестве примера решена одномерная задача необратимого деформирования длинного полого цилиндра, нагретого неравномерным тепловым полем. Рассмотрены особенности напряженно-деформированного состояния материала в рамках условия пластичности Треска и Ивлева. В качестве зависимости предела текучести от температуры используется линейная функция.

Рассмотрим длинный полый упругопластический цилиндр с внешним и внутренним радиусами R_1 , R_2 . Пусть на внутренней поверхности цилиндра задано некоторое тепловое расширение Δ , медленно увеличивающееся во времени, в то время как на внешней поверхности тепловое расширение равно нулю. Изменение параметра Δ в условиях плоского деформированного состояния приводит к увеличению абсолютных значений ненулевых компонент тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , в результате чего на внутренней поверхности появляется область необратимого деформирования, определяемая выполнением условия пластичности в форме Треска:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k_0(1 - \beta\Delta) \quad (1)$$

где k_0 – значение предела текучести при $\Delta = 0$, β – константа материала, задающая степень падения предела текучести в зависимости от уровня линейного теплового расширения. Температурные напряжения в области пластического течения $R_1 < r \leq a_1$ в процессе увеличения параметра Δ изменяются таким образом, что при некотором его значении материал цилиндра переходит в состояние полной пластичности в окрестности внутреннего

радиуса:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k_0(1 - \beta\Delta) \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k_0(1 - \beta\Delta) \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, в материале цилиндра развивается две области необратимого деформирования: область полной пластичности $R_1 < r \leq a_2$ (1) и область пластичности $R_1 < r \leq a_1$ (1).

В рамках условия пластичности Ивлева решение представленной задачи имеет более простой вид. В окрестности внутренней поверхности развивается единственная область пластического течения $R_1 < r \leq a$, в которой выполняется условие пластичности в форме Ивлева:

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi} = 4k_0(1 - \beta\Delta) \quad (3)$$

На графиках (рис. 1, 2) представлены результаты расчетов температурных напряжений для каждого из условий пластичности. Уровень теплового расширения выбирался таким образом, чтобы исключить возможное появление области пластического течения на внешней поверхности цилиндра. Отметим, что разница между уровнем напряжений в области пластического течения для обоих условий становится меньше при увеличении температурного градиента на внутренней поверхности. Так как значение теплового градиента в стационарном случае прямо пропорционально отношению внешнего радиуса к внутреннему, при определенных размерах цилиндра, различие между напряжениями в областях необратимого деформирования может становиться существенным. Очевидно, что процесс вычисления напряженно-деформированного состояния материала в рамках условия пластичности Ивлева является более простым, поскольку, в отличие от условия Треска, в расчетах отсутствует необходимость учитывать возможный переход материала в состояние полной пластичности в областях предварительного необратимого деформирования, и обратный переход от состояния полной пластичности в случае разгрузки материала. Данное обстоятельство несомненно становится полезным при более сложных расчетах, например, при нестационарном тепловом воздействии, так как позволяет сократить возможное количество зон пластического течения, в каждой из которых необходимо определять границы и соотношения для напряжений и перемещений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-31-21111.

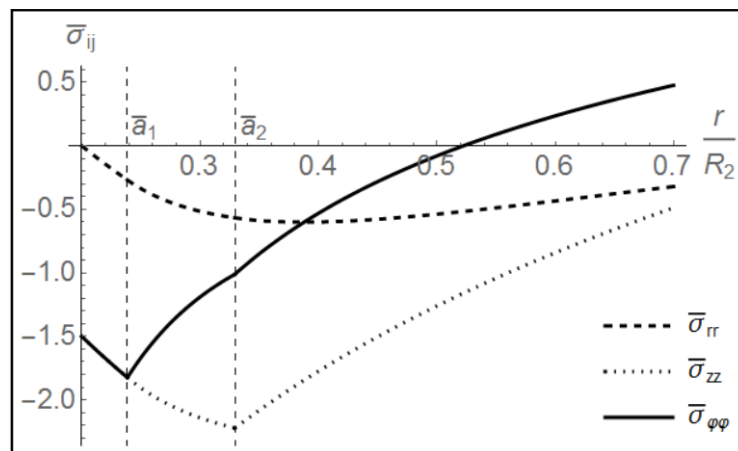


Рис. 1. Напряжения в цилиндре в рамках условия пластичности Треска:

$$\bar{a}_i = a_i/R_2, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/R_2$$

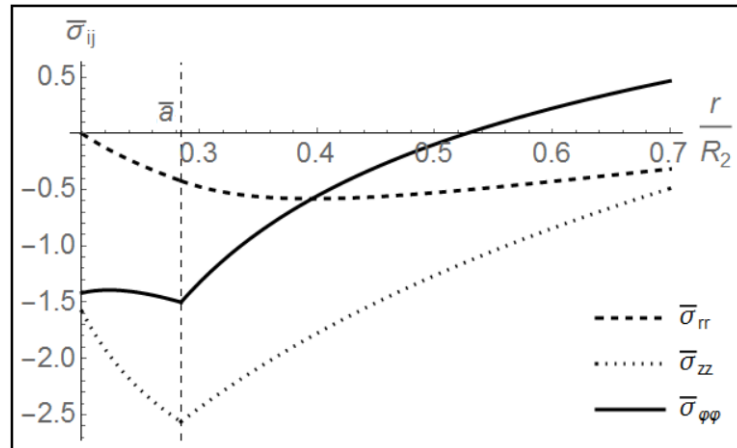


Рис. 2. Напряжения в цилиндре в рамках условия пластичности Ивлева:
 $\bar{a} = a/R_2, \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/R_2$

Литература

1. Burenin A.A., Dats E. P., Tkacheva A.A. On the modelling of the shrink fit technology // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – Т. 8. – pp. 493–499.
2. Burenin A.A., Dats E. P., Murashkin E.V. Formation of the Residual Stress Field under Local Thermal Actions // Mechanics of Solids. – 2014. – Т. 49. – pp. 124–131.
3. Y. Orcan, Thermal stresses in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends // International Journal of Engineering Science. – 1994. – Т. 32. – pp. 883–898.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

К. Г. Дмитрик, А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет

Оболочечные конструкции, в частности трехслойные сферические оболочки, находят широкое применение в различных сооружениях, например, таких, как защитные оболочки атомных электростанций, летательные аппараты, нефте- и газохранилища, и многих других.

Рассмотрим трехслойную оболочку, внутренний и внешний слой которой является упругим, а наполнитель – вязкоупругим в соответствии с моделью Кельвина-Фойгта. Оболочка нагружена с внутренней стороны равномерно распределенной нагрузкой q , с внешней стороны – p . μ_1, μ_2, μ_3 – параметры Ламэ, $\rho_0^1, \rho_0^2, \rho_0^3$ – плотность материала в недеформированном состоянии, η_3 – коэффициент вязкости, индексы при переменных приписаны соответствующим слоям оболочки. На рис. 1. представлены основные параметры задачи.

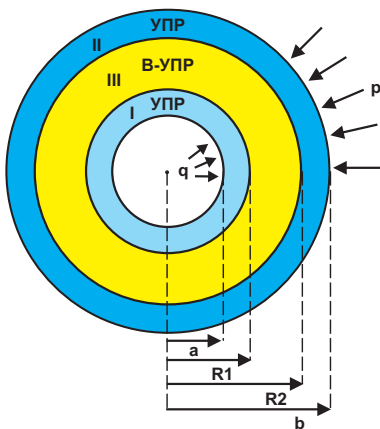


Рис. 1. Модель трехслойной оболочки

Устойчивость данной оболочки рассматривалась в работе [2], в настоящей статье проведем численно-аналитический анализ полученных решений.

Задача нахождения критических параметров, которые соответствуют потере устойчивости основного состояния, сводится к разрешимости уравнения [4]

$$\det[X_{ij}] = 0. \quad (1)$$

Анализ такого уравнения затрудняется тем, что элементы X_{ij} зависят не только от параметров, указанных в задаче, но и от произвольного комплексного числа ω (временного множителя). Поэтому для упрощения вычислений при численном анализе будем считать что $\omega = S$ – действительное число, при этом $-\infty < S < 0$ будет соответствовать затуханию амплитуд возмущений с течением времени. Тогда для определения критической нагрузки уравнение (1) можно переписать в виде

$$\Phi = \det(a, R_1, R_2, b, p, q, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \eta_3, \rho_0^1, \rho_0^2, \rho_0^3, t, S) = 0. \quad (2)$$

Приведем соотношение (2) к безразмерному виду, отнеся величины, имеющие размерность длины к внешнему радиусу b , а имеющие размерность напряжений – к модулю упругости μ_1 . Переходя к предельной системе устремив $t \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \Phi = & - \left(-\frac{5\eta_3}{R_2^6} + \frac{5\eta_3}{R_1^6} \right) (p - q) / \left(\frac{4\eta_3}{R_1^3} - \frac{4\eta_3}{R_2^3} \right) - \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{3}{a^3} \right) q - \left(3 - \frac{1}{R_2^3} \right) p + \\ & + \left(-\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} \right) \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{4\eta_3}{R_1^3} + \frac{4\eta_3}{R_2^3} \right) (p - q) / \left(\frac{4\eta_3}{R_1^3} - \frac{4\eta_3}{R_2^3} \right) - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \right) + \\ & + \frac{4}{a^3} - 4\mu_2 - \frac{-4S\eta_3 - 4\mu_3 + 4}{R_1^3} + \frac{-4S\eta_3 + 4\mu_2 - 4\mu_3}{R_2^3} + \\ & + \frac{\rho_0^1}{a} S^2 - \rho_0^2 S^2 + \frac{\rho_0^2 - \rho_0^3}{R_2} S^2 - \frac{\rho_0^1 - \rho_0^3}{R_1} S^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать зависимость между критическим давлением p и остальными параметрами задачи. Поиск критической нагрузки будем проводить следующим образом.

На первом этапе необходимо определить область в пространстве параметров p, S, λ_i , в которой происходит смена знака функции Φ . Иными словами, только в том случае, когда Φ обращается в нуль, мы ищем зависимость критического параметра от других параметров задачи.

На втором этапе вычисляется значение $p^* = \min_S p(S)$, при котором $\Phi(p, S, \lambda_i) = 0$. Иными словами, мы должны зафиксировать все переменные, кроме критического параметра, например, p , и неопределенного множителя S . В результате мы получим неявно заданную функцию Φ , для которой мы должны отыскать минимальное значение критического параметра, в нашем случае p . Ему будет соответствовать некоторое значение исследуемого параметра, например, a . Варьируя исследуемый параметр, мы получим набор значений, в нашем случае (a_i, p_i^*) .

Рассмотрим некоторое исходное состояние, основные параметры которого представим на рис. 2. Рассматривая изменение какого-либо параметра, будем получать соответствующую ему критическую нагрузку.

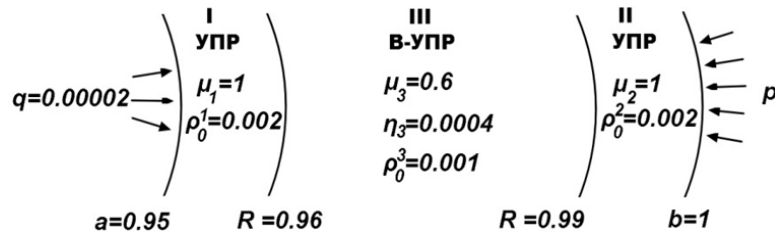


Рис. 2. Исходное значение параметров

На рис. 3 представлена зависимость безразмерного значения критической нагрузки p^* от геометрических параметров задачи. Исследовалось изменение толщины оболочки при сохранении геометрических пропорций (сплошная линия), изменение толщины внутреннего слоя при неизменных значениях толщин внешнего слоя и заполнителя (крупный пунктир), изменение толщины внешнего слоя (короткий пунктир), а также изменение толщины слоя заполнителя (точки). По оси ординат отложена критическая нагрузка, по оси абсцисс – параметр a . При этом различным значениям a отвечают соответствующие значения параметров R_1, R_2 , например, при $a = 0.8, b = 1$ для кривой изменения толщины при сохранении пропорций $R_1 = 0.84, R_2 = 0.96$, толщины внутреннего слоя – $R_1 = 0.96, R_2 = 0.99$, толщины внешнего слоя – $R_1 = 0.81, R_2 = 0.84$ толщины заполнителя – $R_1 = 0.81, R_2 = 0.99$.

На рис. 4 представлена зависимость безразмерного значения критической нагрузки p^* от физико-механических параметров задачи – μ_2 (рис. 4.а), μ_3 (рис. 4.б), η_3 (рис. 4.в) и нагрузки, приложенной к внутреннему радиусу – q (рис. 4.г).

Таким образом, анализируя изменение геометрических параметров, то есть, варьируя структуру оболочки (рис. 3), при фиксированной общей толщине оболочки, физико-механических параметрах и величине внутренней нагрузки имеем:

- при увеличении общей толщины оболочки происходит рост величины критической нагрузки, причем более быстрый, чем рост общей толщины, а при стремлении внутреннего радиуса отверстия к нулю величина критической нагрузки неограниченно возрастает;

- если имеются ограничения на толщину слоев, то в целях повышения величины критической нагрузки для данной задачи наиболее оправданно увеличивать толщину внутреннего слоя, затем внешнего слоя, а затем заполнителя.

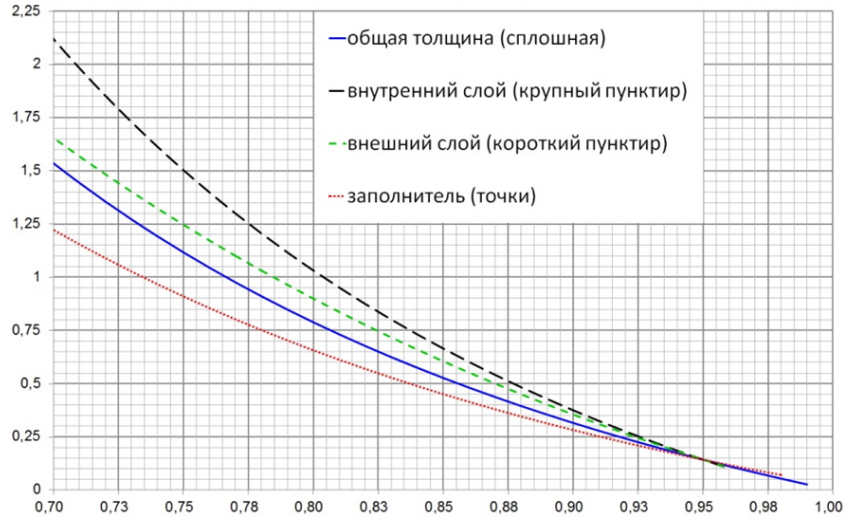


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от геометрических характеристик

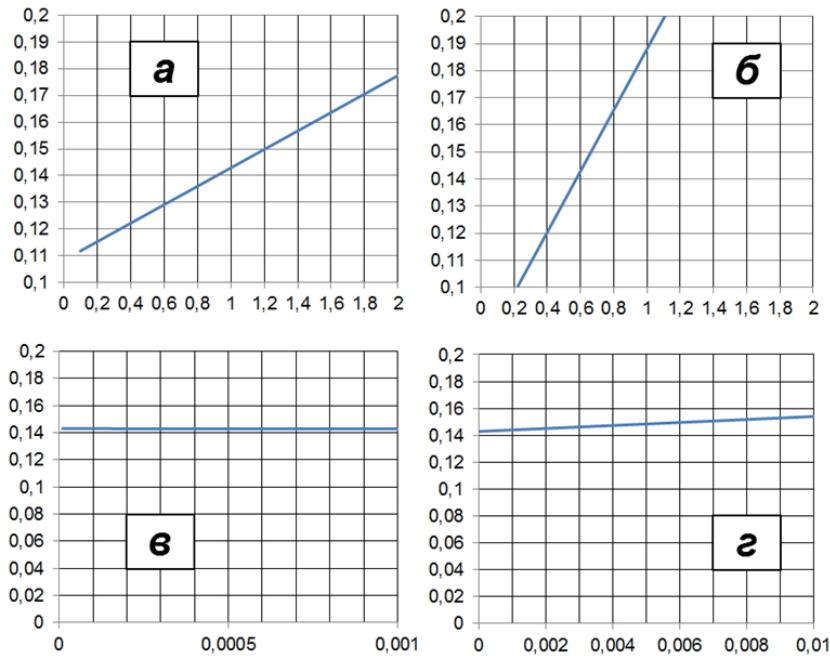


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки от физико-механических характеристик и внутреннего давления

Результаты, представленные на рис. 4, определяются следующим образом:

- применяя материал с большим параметром Ламэ для внешней оболочки, мы получим критическую нагрузку большей величины, то же справедливо для внутренней оболочки и для заполнителя;
- вязкость в данной задаче влияет на величину критической нагрузки незначительно и играет дестабилизирующую роль;
- наличие внутренне приложенной нагрузки оказывает стабилизирующее воздействие.

Полученные результаты согласуются с общими теоретическими представлениями. При этом можно подобрать материал и структуру слоев таким образом, чтобы удовлетворить требованиям по обеспечению заданной величины критической нагрузки и ограничениям на толщину слоев заполнителя.

Литература

1. *Дмитрик К. Г., Спорыхин А. Н.* Численно-аналитическое исследование устойчивости упругой сферической оболочки с упругопластическим наполнителем при / К. Г. Дмитрик, А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2(24). – С. 97–109.
2. *Спорыхин А. Н., Дмитрик К. Г.* Исследование устойчивости трехслойной сферической оболочки при статическом нагружении / А. Н. Спорыхин, К. Г. Дмитрик // Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – С. 96–100.
3. *Спорыхин А. Н.* Исследование устойчивости двухслойной кусочно-неоднородной сферической оболочки при нагружении / А. Н. Спорыхин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 3(17). – С. 46–51.
4. *Спорыхин А. Н.* Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – 372 с.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГАЯ ВОЛНА В МИКРОПОЛЯРНОМ КОНТИНУУМЕ С УЧЕТОМ ПОЛНОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗАННОСТИ

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт Проблем Механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

В последнее десятилетие быстро развиваются математические модели термоупругого поведения твердых тел (GN-термоупругость), основанные на различных модификациях закона теплопроводности Фурье. При этом ставится цель получения связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы, выполнение следующих условий: 1.) конечность скорости распространения теплового сигнала; 2.) возможность пространственного распространения теплового импульса без затухания; 3.) отсутствие искажения волны в смысле получения решений классического Даламберовского типа с сохраняющимся профилем. Одно из таких направлений связано с публикациями [1, 2]. GN-теории термоупругости можно разделить на три различных варианта: термоупругость, основанную на законе теплопроводности Фурье, с бесконечно большой скоростью распространения экспоненциально затухающего теплового сигнала (континуум первого типа, GNI/СТЕ); термоупругость с сохраняющейся энергией и конечной скоростью распространения термических волн «второго звука» (континуум второго типа, GNII, гиперболическая термоупругость); третий вариант (континуум третьего типа, GNIII) смешанный и включает первые два в качестве предельных случаев. Очевидно, что GNIII-теория охватывает более широкий круг моделируемых явлений, по сравнению с классической теорией теплопроводности Фурье. Отметим, что GNII — единственная известная в настоящее время термодинамически корректная теория, которая позволяет описать теплопроводность в твердом теле как волновой процесс, не сопровождающийся рассеянием энергии, и сформулировать математическую модель процесса теплопроводности в твердых телах с помощью системы гиперболических уравнений в частных производных, обеспечивающих (в силу своей аналитической классификации) конечную скорость распространения тепла.

Полный анализ плоских гармонических GNI/СТЕ-термоупругих волн был выполнен в статье [3]; было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно два комплексных волновых числа, вещественная и мнимая части которых строго положительны. Плоские волны в GNII-термоупругих средах исследованы в работе [4]. Плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны. В работе [5] проведен анализ волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости. Все указанные исследования [3–5] проводились в рамках линейной симметричной упругости. Они подытожены в монографии [6]. Исследования распространения гармонических термоупругих волн в полностью связанной термоупругой микрополярной среде до сих пор продолжают вызывать интерес [7].

1. Воспользуемся моделью термоупругого микрополярного континуума первого типа (см., например, [8]). В этом случае, векторы перемещений \mathbf{u} и микровращений ϕ связаны с несимметричным тензором деформации \mathbf{e} и тензором изгиба–кручения $\mathbf{\Gamma}$ соотношениями

$$\mathbf{e} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \epsilon \cdot \phi, \quad \mathbf{\Gamma} = \nabla \otimes \phi, \quad (1)$$

где ϵ — кососимметричный тензор Леви–Чивита третьего ранга, ∇ — трехмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона).

Несимметричный тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензор моментных напряжений \boldsymbol{m} вычисляются согласно определяющему закону GNI/СТЕ-термоупругости

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\mu + \eta)\mathbf{e} + (\mu - \eta)\mathbf{e}^T + (\lambda\text{tr}\mathbf{e} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \\ \boldsymbol{m} &= (\gamma + \varepsilon)\boldsymbol{\Gamma} + (\gamma - \varepsilon)\boldsymbol{\Gamma}^T + (\beta\text{tr}\boldsymbol{\Gamma} - \varsigma\theta)\mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь \mathbf{I} — единичный тензор; $\lambda, \mu, \eta, \gamma, \beta, \varepsilon$ — изотермические определяющие постоянные микрополярной термоупругой среды первого типа; α, ς — определяющие постоянные, обеспечивающие связанность уравнений движения и теплопроводности. Постоянные α, ς зависят не только от механических свойств среды, но и от термических свойств.

В этом случае, система связанных уравнений движения, микровращения и теплопроводности для линейного изотропного микрополярного термоупругого тела первого типа (GNI/СТЕ) при условии отсутствия массовых сил, моментов и источников тепла примет вид:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu - \eta)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \eta)\nabla^2\mathbf{u} + 2\eta\nabla \times \boldsymbol{\phi} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + (\gamma + \varepsilon)\nabla^2\boldsymbol{\phi} - 4\eta\boldsymbol{\phi} + 2\eta\nabla \times \mathbf{u} - \varsigma\nabla\theta - \mathfrak{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2\theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda_*}\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \frac{\varsigma}{\Lambda_*}\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь и далее приняты обозначения, в основном согласующиеся с монографией [6]. Отличные от нуля материальные постоянные α, ς обеспечивают связанность уравнений микрополярной термоупругости. В книге [8] термоупругая гармонической волна исследована в предположении о незначительности влияния определяющей постоянной ς . В статье [7] связанная термоупругая гармоническая волна в микрополярном континууме исследуется с учетом существенного влияния этой определяющей постоянной. Ради полноты анализа мы сохраним эту определяющую постоянную во всех дальнейших рассуждениях.

2. Плоская гармоническая микрополярная термоупругая волна обладает достаточно простой аналитической структурой вида (\mathbf{k} — волновой вектор; ω — циклическая частота; \mathbf{A}, \mathbf{S} — векторы поляризации волны; B — амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \theta = Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.\quad (4)$$

Волновое число k (модуль волнового вектора \mathbf{k}) может быть как вещественной, так и комплексной величиной. Подставив выражения (4) в дифференциальные уравнения (3), а также учитывая, что

$$\nabla = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

получим приведенную ниже систему уравнений, связывающую волновой вектор \mathbf{k} , циклическую частоту ω , векторы поляризации плоской волны \mathbf{A}, \mathbf{S} и амплитуду B :

$$\begin{cases} (\rho\omega^2 - (\mu + \eta)k^2)\mathbf{A} - (\lambda + \mu - \eta)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \alpha i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J}\omega^2 - (\gamma + \varepsilon)k^2)\mathbf{S} - (\beta + \gamma - \varepsilon)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - \varsigma i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\kappa}{\Lambda_*}\omega - k^2\right)B + \frac{\alpha}{\Lambda_*}i\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} + \frac{\varsigma}{\Lambda_*}i\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{S} = 0.\end{cases}\quad (5)$$

В том случае, когда волновой вектор \mathbf{k} сонаправлен с одной из координатных осей (например, с декартовой осью x_3), а этого всегда можно добиться за счет поворота координатных осей, система будет обладать достаточно простой структурой.

3. Рассмотрим сначала волновые числа поперечных волн. При проектировании системы (5) на касательное направление для определения волновых чисел можно получить биквадратное уравнение

$$\frac{k^4}{k_{\perp}^{\mu 4}} - \left(h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2 \right) \frac{k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} + (1 - h_1^2) \widetilde{k}_{\perp}^2 = 0, \quad (6)$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_{\perp}^{\mu\mu} &= \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu\mu}}, & k_{\perp}^{\mu} &= \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu}}, & h_1^2 &= \frac{4\eta}{\mathfrak{J}\omega^2}, & h_2^2 &= \frac{\eta}{\rho c_{\perp}^{\mu\mu 2}}, \\ \widetilde{k}_{\perp}^2 &= \frac{k_{\perp}^{\mu\mu 2}}{k_{\perp}^{\mu 2}} = \frac{c_{\perp}^{\mu 2}}{c_{\perp}^{\mu\mu 2}}, & h_3^2 &= 1 + \widetilde{k}_{\perp}^2 + h_1^2 h_2^2. \end{aligned}$$

Фазовые скорости продольных и поперечных волн обозначим следующим образом

$$\begin{aligned} c_{\perp}^{\mu} &= \sqrt{\frac{\mu + \eta}{\rho}}, & c_{\perp}^{\mu\mu} &= \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{J}}}, \\ c_{\parallel} &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, & c_{\parallel}^{\mu\mu} &= \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Квадраты волновых чисел поперечной плоской гармонической волны находятся из уравнения (9) в виде

$$2 \frac{k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} = h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2 \pm i\sqrt{D}, \quad D = \left(h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2 \right)^2 - 4(1 - h_1^2) \widetilde{k}_{\perp}^2. \quad (8)$$

Анализируя выражение (8), заключаем, что действительная и мнимая части волновых чисел положительны только в одном случае, когда

$$\sqrt{2} \frac{k}{k_{\perp}^{\mu}} = \frac{\sqrt{h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2} + \sqrt{\left(h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2 \right)^2 + \text{sign}(D)D} + i\sqrt{D}}{2\sqrt{h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2} + \sqrt{\left(h_3^2 - h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^2 \right)^2 + \text{sign}(D)D}}. \quad (9)$$

4. Рассмотрим далее волновые числа продольных волн. Для этого спроектируем систему (5) на нормальное направление к волновой поверхности. В итоге, получим бикубическое уравнение для определения волновых чисел

$$\frac{k^6}{k_{\parallel}^6} - (1 + \widetilde{k}_1^2 + iQ_2^2) \frac{k^4}{k_{\parallel}^4} + (\widetilde{k}_1^2 + iQ_3^2) \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} - iQ_1^2 \widetilde{k}_1^2 = 0. \quad (10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_{\parallel}^{\mu\mu} &= \frac{\omega}{c_{\parallel}^{\mu\mu}}, & k_{\parallel} &= \frac{\omega}{c_{\parallel}}, & \widetilde{k}_{\parallel} &= \frac{k_{\parallel}^{\mu\mu}}{k_{\parallel}} = \frac{c_{\parallel}}{c_{\parallel}^{\mu\mu}}, \\ Q_1^2 &= \frac{\omega}{l_*^2 k_{\parallel}^2}, & s_1^2 &= \frac{\alpha^2}{\omega \Lambda_* \rho}, & s_1^{\zeta 2} &= \frac{\zeta^2}{\omega \Lambda_* \mathfrak{J}}, & \widetilde{k}_1^2 &= \widetilde{k}_{\parallel}^2 (1 - h_1^2), \\ Q_2^2 &= Q_1^2 + \widetilde{k}_{\parallel}^2 s_1^{\zeta 2} + s_1^2, & Q_3^2 &= Q_1^2 (\widetilde{k}_1^2 + 1) + \widetilde{k}_{\parallel}^2 (s_1^{\zeta 2} + s_1^2 (1 - h_1^2)). \end{aligned}$$

Заменой

$$\frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = Y + \frac{1 + \tilde{k}_1^2 + iQ_2^2}{3}$$

можно свести бикубическое уравнение (15) к неполному кубическому уравнению

$$Y^3 + pY + q = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты уравнения

$$p = \text{Re}p + i\text{Im}p, \quad q = \text{Re}q + i\text{Im}q$$

определяются формулами

$$\begin{aligned} \text{Re}p &= \tilde{k}_1^2 - \frac{1}{3} \left((1 + \tilde{k}_1^2)^2 - Q_2^4 \right), & \text{Im}p &= Q_3^2 - \frac{1}{3} \left((1 + \tilde{k}_1^2)^2 Q_2^2 \right), \\ \text{Re}q &= \frac{2}{27} + \frac{1}{3}\tilde{k}_1^2 + \frac{1}{3}\tilde{k}_1^4 - \frac{2}{9}Q_1^4 + \frac{2}{27}\tilde{k}_1^6 - \frac{2}{9}\tilde{k}_1^2 Q_1^4 - \frac{1}{9}Q_1^2 Q_3^2, \\ \text{Im}q &= \frac{2}{9}Q_1^2 - \frac{4}{9}Q_1^2 \tilde{k}_1^2 + \frac{2}{9}\tilde{k}_1^4 Q_1^2 - \frac{2}{27}Q_1^6 + \frac{1}{9}Q_3^2 + \frac{1}{9}\tilde{k}_1^2 Q_3^2. \end{aligned}$$

Решение неполного кубического уравнения (10) можно найти согласно формулам Кардано. Возможность алгебраического определения корней оспаривается в работе [7].

Значения волновых чисел, полученные при исследовании бикубического (10) и биквадратного (6) уравнений, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \text{Re}k + i\text{Im}k$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-31-21111 «Развитие математических моделей и методов описания процессов деформирования и роста сложных сред с микроструктурой»).

Литература

1. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. – 1992. – Vol. 15. – Pp. 253–264.
2. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. – 1993. – Vol. 31. – Pp. 189–208.
3. Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2008. – №8/1(67). – С. 411–459.
4. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, Вып. 4, Ч. 2. – С. 94–128.
5. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, Вып. 3. – С. 46–53.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.

7. *Ерофеев В. И., Пеплин Ф. С.* Расчет дисперсионных зависимостей для термоупругого континуума Коссера // III Международная Школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» School-NDM 2016: Сборник трудов (Москва, 12–15 апреля 2016г.) – М. : ИМАШ РАН, 2016. – С. 146–153.

8. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. – 384 pp.

МИКРОПОЛЯРНЫЕ КОНТИНУУМЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МИКРОСТРУКТУРНЫМИ СВЯЗЯМИ

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы

²Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлунского РАН, г. Москва

Теория микрополярного континуума является важным инструментом математического моделирования механического поведения нескольких классов материалов в условиях, когда нельзя игнорировать их микроструктуру. Достаточно упомянуть, например, о жидких кристаллах, гранулированных средах и биологических тканях. Теория микрополярного континуума была предложена Э. и Ф. Коссера более ста лет назад, но до настоящего времени достаточно широко используется в механике реальных материалов. В представляемой работе теория микрополярного континуума развивается в двух основных направлениях: в плане ее распространения на теплопроводящие среды и в плане учета возможных кинематических связей (ограничений) между микроструктурными параметрами. При этом микроструктура континуума задается микроструктурными d -векторами и d -тензорами. Приоритет в настоящем исследовании отдается теоретико-полевому подходу. Возможные связи (конечные или дифференциальные) между микроструктурными переменными учтены с помощью правила множителей Лагранжа.

1. Вариационное описание физического поля предполагает, прежде всего, задание интегрального функционала, известного как действие \mathfrak{S} (см., например, монографии [1], [2]):

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1)$$

где

\mathcal{L} — „естественная“ плотность лагранжиана;

φ^k — физические полевые переменные;

X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты;

$d^4 X$ — „естественный“ элемент объема пространства—времени.

Все физические теории поля базируются на некотором вариационном принципе, который называется вариационным принципом Гамильтона—Остроградского (или принципом наименьшего действия). Согласно принципу наименьшего действия действительное поле реализуется в пространстве—времени таким образом, что функционал действия \mathfrak{S} оказывается экстремальным, т.е. первая вариация \mathfrak{S} обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах и области пространства—времени, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta \mathfrak{S} = 0. \quad (2)$$

В случае связанного нелинейного термомеханического поля, рассматривая X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) как референциальные переменные Лагранжа, эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) как физические поля, вводя контравариантные экстра-полевые микроструктурные d -переменные и температурное смещение ϑ , „естественная“ плотность действия в расчете на единицу „естественного“ объема в отсчетном состоянии принимается в следующей форме:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \quad (3)$$

Таким образом, кроме переменных x^j и ϑ и их скоростей $\partial_4 x^j = \dot{x}^j$, $\partial_4 \vartheta = \dot{\vartheta}$, к определяющим переменным микрополярного термоупругого континуума относятся [4]:

градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ ($j, \alpha = 1, 2, 3$);

d -векторы d^j ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$);

d -тензоры $d^{j_1 j_2 \dots}$ ($\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$);

референциальные градиенты d -векторов $\partial_\alpha d^j$

($\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$);

референциальные градиенты d -тензоров $\partial_\alpha d^{j_1 j_2 \dots}$

($\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$);

референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$
($\alpha = 1, 2, 3$).

2. Принцип наименьшего действия принадлежит к классу основных задач вариационного исчисления о поиске безусловного экстремума многомерного интегрального функционала [3]. Однако по существу подобная трактовка принципа наименьшего действия не в полной мере соответствует действительности, поскольку в аналитической механике и термомеханике символ вариации δ согласно исторически сложившейся традиции обозначает *виртуальную вариацию*, т.е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния механической или термомеханической системы. Виртуальные вариации определяющих состояние континуума переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае принцип наименьшего действия следует отнести к классу так называемых *связанных* задач вариационного исчисления. Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа.

Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых в данном случае на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Связанные задачи вариационного исчисления весьма часто встречаются в механике. Их решение чаще всего опирается на правило множителей Лагранжа (см., например, [3]).

В дальнейшем будем рассматривать только двусторонние связи, которые могут быть заданы либо конечными уравнениями (голономные связи), либо уравнениями, которые содержат явные вхождения первых производных от полевых переменных (дифференциальные, неголономные связи). Ограничимся только связями между экстра-полевыми d -переменными и, возможно, эйлеровыми координатами x^j .

В наиболее общей форме голономные связи между микроструктурными d -переменными d^j ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), $d^{j_1 j_2 \dots}$ ($\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются конечными уравнениями

$$\mathcal{F}(x^j, d^j, d^j, d^j, d^{j_1 j_2 \dots}, d^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \quad (4)$$

Число таких уравнений должно быть меньше, чем число независимых контравариантных полевых d -переменных и эйлеровых координат x^j

$$\begin{aligned} & x^j, \\ & d_{\mathbf{a}}^j \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ & d_{\mathbf{c}}^{j_1 j_2 \dots} \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Рассмотрим вывод дифференциальных уравнений поля в том случае, когда d -векторы подчинены конечным (голономным) ограничениям

$$\mathcal{F}(x^j, d_{\mathbf{1}}^j, d_{\mathbf{2}}^j, d_{\mathbf{3}}^j) = 0. \quad (5)$$

Воспользуемся правилом множителей Лагранжа. С этой целью введем множители Лагранжа $\lambda^{\mathfrak{h}}$ и новый лагранжиан \mathcal{L}^* согласно

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \lambda^{\mathfrak{h}} \mathcal{F}. \quad (6)$$

Заметим, что множители Лагранжа $\lambda^{\mathfrak{h}}$ представляют собой функции только пространственно-временных координат X^α .

В уравнениях поля лагранжиан \mathcal{L} подлежит замене на новый лагранжиан \mathcal{L}^* . Выполняя замену и используя принятые в [4–6] обозначения, в результате приходим к уравнениям поля

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{\cdot j}^{\alpha \cdot} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda^{\mathfrak{h}} \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F}_{\mathfrak{h}} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \mathcal{M}_{\cdot j}^{\mathbf{a} \cdot} + \mathcal{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= \lambda^{\mathfrak{h}} \frac{\partial}{\partial d_{\mathbf{a}}^j} \mathcal{F}_{\mathfrak{h}} \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_{\mathbf{R}}^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7)$$

3. Дифференциальные связи между микроструктурными d -переменными $d_{\mathbf{a}}^j$ ($\mathbf{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $d_{\mathbf{c}}^{j_1 j_2 \dots}$ ($\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots$; $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются неинтегрируемыми уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{\mathbf{n}}(x^j, d_{\mathbf{1}}^j, d_{\mathbf{2}}^j, d_{\mathbf{3}}^j, d_{\mathbf{1}}^{j_1 j_2 \dots}, d_{\mathbf{2}}^{j_1 j_2 \dots}, \dots, \partial_\alpha x^j, \\ & \partial_\alpha d_{\mathbf{1}}^j, \partial_\beta d_{\mathbf{2}}^j, \partial_\gamma d_{\mathbf{3}}^j, \partial_\alpha d_{\mathbf{1}}^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\beta d_{\mathbf{2}}^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Дифференциальные связи также могут быть учтены в уравнениях поля с помощью правила множителей. Вводя множители Лагранжа $\lambda^{\mathfrak{n}}$ и новый лагранжиан \mathcal{L}^{**} согласно

$$\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L} - \lambda^{\mathfrak{n}} \mathcal{F}, \quad (9)$$

заменяем в уравнениях поля лагранжиан \mathcal{L} на \mathcal{L}^* ; в итоге после ряда преобразований можно получить следующие уравнения [7]:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F} - \\
&- (\partial_\alpha \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha x^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha x^j)} \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F} \\
&\quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \mathcal{M}_j^\alpha + \dot{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d^j)} \mathcal{F} - \\
&- (\partial_\alpha \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha d^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha d^j)} \mathcal{F} + \lambda \frac{\partial}{\partial d^j} \mathcal{F} \\
&\quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{10}$$

Полученные уравнения принципиально отличаются от (7), поскольку множители Лагранжа входят в них также в форме частных производных первого порядка.

4. Рассмотрим далее уравнения поля для случая, когда микроструктура континуума определяется пространственной ориентацией жесткого ортогонального трехгранника, образованного d -векторами. В случае простейшей голономной связи, когда трансформация репера \mathbf{d} ($\mathbf{a} = 1, 2, 3$) сводится только к его „жестким“ поворотам в пространстве (так называемым микроповращениям), имеем следующие конечные ограничения:

$$g_{ij} d^i d^j = \delta_{ab} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} = 1, 2, 3), \tag{11}$$

где g_{ij} — компоненты внешней (эйлеровой) пространственной метрики, δ_{ab} — символ Кронекера.

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микроструктуры являются только d -векторы d^j ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), а кинематические связи задаются уравнениями (11), система дифференциальных уравнений поля подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан \mathcal{L} подлежит замене на новый лагранжиан \mathcal{L}^* :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \left(g_{kl} d^k d^l - \delta_{cb} \right) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b} = 1, 2, 3).$$

Здесь λ^{cb} — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при перестановке индексов:

$$\lambda^{bc} = \lambda^{cb} \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b} = 1, 2, 3).$$

Вычислим сначала требуемые для модификации уравнений поля полевые производные. Прежде всего нас интересует производная лагранжиана \mathcal{L}^* по полевой переменной x^j :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} d^k d^l.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание (Γ_{kj}^s — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma_{kj}^s g_{sl} + \Gamma_{lj}^s g_{ks},$$

а также симметрию множителей λ . В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \lambda \Gamma_{kj}^s d_c^k d_b^s.$$

Интерес представляет также производная лагранжиана \mathcal{L}^* по экстраполевой переменной d_a^j :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} (g_{kl} \delta_j^k d_b^l \delta_{ac} + g_{kl} \delta_j^l d_c^k \delta_{ab}).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей λ , получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} (g_{jl} d_b^l \delta_{ac} + g_{jk} d_c^k \delta_{ab})$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d_a^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \lambda d_b^j.$$

В результате дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{bc} \lambda d_s d_c^k \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, s, k = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \mathcal{M}_j^\alpha + \mathcal{A}_j^* - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\mathcal{A}_j^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} - \lambda d_b^j.$$

Сворачивая левую и правую части последнего равенства с вектором d_a^j , на основании уравнений связей

$$g_{kl} d_c^k d_b^l - \delta_{cb} = 0$$

находим

$$(\mathcal{A}_j^* - \mathcal{A}_j) d_a^j = -\lambda \delta_{ab}.$$

Уравнения поля (12) приобретают наиболее простой вид в том случае, когда внешняя (эйлерова) метрика становится евклидовой; наличие прямолинейных осей позволяет вести речь о галилеевой инвариантности лагранжиана. Первое из уравнений (12) тогда приводится к

$$\partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, s, k = 1, 2, 3);$$

множители Лагранжа будут входить только во второе уравнение

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_j^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j} - \partial_4 \mathcal{Q}_j = \lambda d_j \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3);$$

постулируя галилееву инвариантность плотности действия относительно трансляций температурного смещения ϑ , приходим к энтропийному закону сохранения:

$$\partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Литература

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.
2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с.
3. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. – М., Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. – 308 с.
4. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и d -тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 2, Ч. 1. – С. 60–68.
5. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 4, Ч. 1. – С. 96–102.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 1(34). – С. 66–85.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Модели микрополярных термоупругих континуумов со связанными параметрами микроструктуры // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15, Вып. 4. – С. 451–461.

**АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНОМ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ
ВОЛНОВОДЕ**

А. В. Моргунова

Донской государственный технический университет

В настоящей работе представлено исследование дисперсионного множества для неоднородного трансверсально-изотропного полого цилиндра со свободными границами. Задача сведена к исследованию спектральной задачи для матричного дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами которая, в свою очередь, сводится к отысканию нетривиального решения краевой задачи для канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно амплитудных значений компонент вектора $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$, где $Z_1 = U_r$, $Z_2 = iU_z$ (смещения), $Z_3 = \sigma_r$, $Z_4 = i\sigma_{rz}$ (напряжения). Определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_{11} \frac{\partial U_r}{\partial r} + C_{12} \frac{\partial U_r}{r} + C_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \sigma_\theta &= C_{12} \frac{\partial U_r}{\partial r} + C_{11} \frac{\partial U_r}{r} + C_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \sigma_{rz} &= C_{44} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= C_{13} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{r} \right) + C_{33} \frac{\partial U_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Где $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{44}$ - есть функции координаты, описывающие модули упругости. Представление задачи в виде операторного пучка:

$$\begin{aligned}Y &= Y(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4), \\ Y' &= (A_{00} - \kappa^2 A_{01} + \gamma A_1 + \gamma^2 A_2)Y, \\ Y_1 &= \frac{Z_1}{b}, Y_2 = \frac{Z_2}{b}, Y_3 = \frac{Z_3}{C_{44}^0}, Y_4 = \frac{Z_4}{C_{44}^0}.\end{aligned}\tag{1}$$

Далее вводится группа безразмерных параметров и функций:

$$\begin{aligned}\gamma &= kb, \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{C_{44}^0}, C_{44}^0 = \max_{\xi} C_{44}(\xi), \xi = \frac{r}{b}, \xi \in [\xi_0; 1], \xi_0 = \frac{a}{b} \\ g_1 &= \frac{C_{11}}{C_{44}^0}, g_2 = \frac{C_{13}}{C_{44}^0}, g_3 = \frac{C_{11}}{C_{44}^0}, g_4 = \frac{C_{12}}{C_{44}^0}, g_5 = \frac{C_{33}}{C_{44}^0}.\end{aligned}\tag{2}$$

Также введем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{g_3(\xi)}{g_1(\xi)}, a_2 = \frac{g_2(\xi)}{g_1(\xi)}, a_3 = \frac{1}{g_1(\xi)}, a_4 = \frac{1}{g_4(\xi)}, a_5 = \frac{g_1(\xi) - g_3(\xi)}{g_1(\xi)}, \\ a_6 &= \frac{g_1^2(\xi) - g_3^2(\xi)}{g_1(\xi)}, a_7 = \frac{g_2(\xi)(g_1(\xi) - g_3(\xi))}{g_1(\xi)}, a_8 = \frac{g_5(\xi)g_1(\xi) - g_2^2(\xi)}{g_1(\xi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (1)-(3) сформулирована следующая граничная задача для оператора с двумя спектральными параметрами.

$$\begin{aligned} Y_1' &= -a_1 \frac{Y_1}{\xi} - \gamma a_2 Y_2 + a_3 Y_3 \\ Y_2' &= \gamma Y_1 + a_4 Y_4 \\ Y_3' &= (a_6 \frac{1}{\xi^2} - \kappa^2) Y_1 + a_7 \frac{\gamma}{\xi} Y_2 - a_5 \frac{Y_3}{\xi} - \gamma Y_4 \\ Y_4' &= a_7 \frac{\gamma}{\xi} Y_1 + (\gamma^2 a_8 - \kappa^2) Y_2 + \gamma a_2 Y_3 - \frac{Y_4}{\xi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$Y_3(1) = Y_4(1) = Y_3(\xi_0) = Y_4(\xi_0) = 0. \quad (5)$$

Краевая задача (4)–(5) всегда имеет тривиальное решение. Соотношения между спектральными параметрами, при которых существует нетривиальное решение задачи, и составляет дисперсионное множество задачи. Отметим, что соответствующая краевая задача в общем случае исследуется численно. Дисперсионное множество строится с применением метода пристрелки, который позволяет с требуемой точностью строить решения для произвольного вида функций неоднородности, включая разрывные. Изучим некоторые особенности строения дисперсионного множества для разных видов неоднородности.

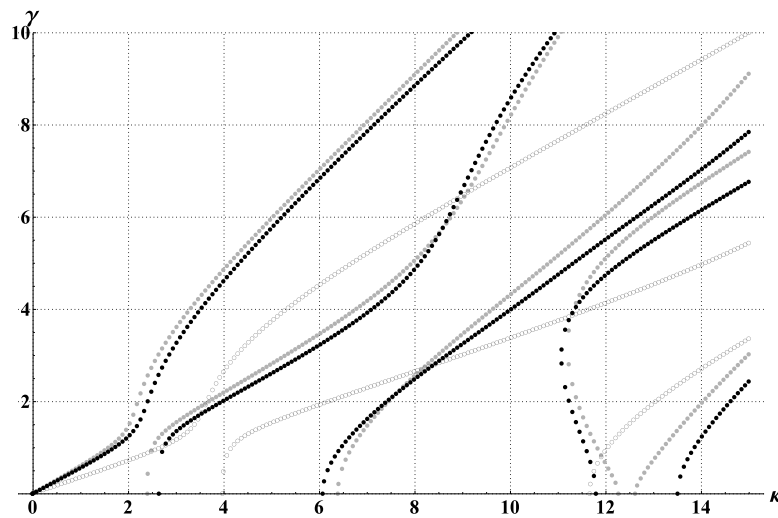


Рис. 1. Дисперсионные множества для различных типов неоднородности

На рис. 1 представлены дисперсионные множества для некоторых видов функций неоднородности, а именно: серыми точками представлено множество для однородного цилиндра (функции неоднородности есть константы), черными точками - дисперсионное множество для слоистого цилиндра (функции неоднородности есть разрывные функции), прозрачными точками представлено множество для немонотонных законов неоднородности.

Как видно из рисунка, тип неоднородности влияет на расположение точек множества, но в целом характер кривых сохраняется.

В качестве альтернативного способа построения решения задачи применялся метод Галеркина, с целью сравнения результатов, полученных методом пристрелки. Решение строилось в функциях вида:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= C_1 + C_5x, \\ Y_2(x) &= C_2 + C_6x, \\ Y_3(x) &= C_3(x - \xi_0)(x - 1) + C_7(x - \xi_0)^2(x - 1), \\ Y_4(x) &= C_4(x - \xi_0)(x - 1) + C_8(x - \xi_0)^2(x - 1), \end{aligned} \tag{6}$$

а также в более простом виде с учетом только первых четырех констант.

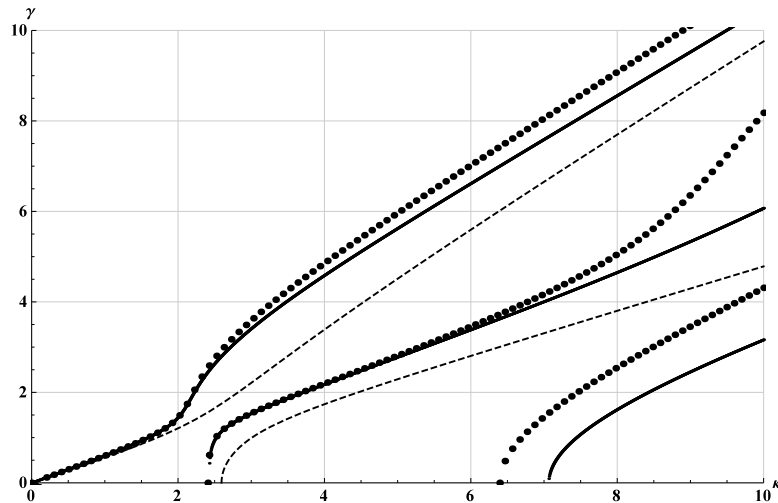


Рис. 2. Дисперсионные множества, построенные методом пристрелки и методом Галеркина для двух наборов констант

На рис. 2 представлены дисперсионные множества полученные методом пристрелки (черные точки), методом Галеркина для четырех и восьми констант соответственно (пунктир и сплошная линия). Как видно из рисунка, метод Галеркина для четырех констант дает недостаточное приближение первых двух ветвей множества, при использовании восьми констант приближение строится с достаточной точностью, причем определяется также и третья ветвь дисперсионного множества.

Литература

1. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // J. Quart. Pure Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–298.
2. Vatulyan A., Morgunova A. Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with variable properties // Ac. Phys. 2015. V.61. P. 265-271.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

И. И. Переяславская¹, М. С. Соломатин²

¹Воронежский государственный университет

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

В настоящей работе выполнено математическое моделирование упругопластического состояния цилиндрической области, нагруженной внутренним давлением, в приближении плоского напряженного состояния.

Зарождение пластической зоны

Выберем условие пластичности вида $(r, \theta, z - \text{цилиндрическая система координат})$

$$\max\{ |2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z|, |2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z|, |2\sigma_z - \sigma_\theta - \sigma_r| \} = 2k. \quad (1)$$

На внутреннюю границу области $R_i \leq r \leq R_e$ действует давление p . Поскольку радиальное напряжение в пластической области находится из решения задачи Коши, из рассмотрения шестиугольника пластичности, определяемого уравнением (1), можно заметить, что при $0 < p \leq \frac{2k}{3}$ в пластической области может реализоваться режим пластичности

$$2\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \quad (2)$$

а при $\frac{2k}{3} < p \leq \frac{4k}{3}$ могут реализоваться два режима пластичности

$$2\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \quad \text{и} \quad 2\sigma_r - \sigma_\theta = -2k. \quad (3)$$

Контактное давление p не может быть больше $\frac{4k}{3}$, что соответствовало бы выходу вектора напряжения за пределы поверхности пластичности на границе контакта дисков.

Минимальное контактное давление, при котором на границе $r = R_i$ выполняется условие пластичности (2), находится из решения задачи о цилиндрической области, находящейся в упругом состоянии [1]

$$p = \frac{k}{2} \frac{R_e^2 - R_i^2}{3R_e^2 + R_i^2}.$$

Напряжения в пластической области

Будем обозначать через c радиус упругопластической границы. Если

$$\frac{k}{2} \frac{R_e^2 - R_i^2}{3R_e^2 + R_i^2} \leq p \leq \frac{2k}{3}, \quad (4)$$

то в пластической области $R_i \leq r \leq c$ напряженное состояние определяется из решения задачи Коши

$$\begin{cases} 2\sigma_\theta - \sigma_r = 2k, \\ \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta = 0, \\ \sigma_r|_{r=R_i} = -p, \end{cases}$$

так что

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2k - (p + 2k)\sqrt{\frac{R_i}{r}}, \\ \sigma_\theta &= 2k - \frac{1}{2}(p + 2k)\sqrt{\frac{R_i}{r}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Предельное состояние в диске наступает при изменении контактного давления в диапазоне (4), если его внешний радиус второго диска

$$R_e = \frac{(p + 2k)^2 R_i}{4k^2}.\quad (6)$$

Из (6) определяется максимальный радиус R_e , для которого в пластической области может реализовываться только режим пластичности (2).

$$R_e = \frac{16}{9}R.$$

Деформации и перемещения в пластической области

В пластической области деформации включают упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}\varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p.\quad (7)$$

Упругие деформации выражаются через напряжения по закону Гука

$$E\varepsilon_r^e = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \quad E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_r.$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Учитывая соотношения (7) и формулы (16), упругие деформации

$$\begin{aligned}E\varepsilon_r^e &= 2k(1 - \nu) - \frac{(2 - \nu)(p - 2k)}{2}\sqrt{\frac{R_i}{r}}, \\ E\varepsilon_\theta^e &= 2k(1 - \nu) - \frac{(1 - 2\nu)(p - 2k)}{2}\sqrt{\frac{R_i}{r}}.\end{aligned}\quad (8)$$

В рамках гипотезы естественного состояния из ассоциированного с условием (2) закона пластического течения, следует равенство

$$\varepsilon_\theta^p - 2\varepsilon_r^p = 0.\quad (9)$$

Исключая из (7)–(9) упругие и пластические деформации и учитывая, что на упруго-пластической границе пластические деформации равны нулю ($\varepsilon_\theta^p|_{r=c} = \varepsilon_r^p|_{r=c} = 0$), перемещения в пластической области будут решением задачи

$$\begin{cases} 2\frac{dEu}{dr} + \frac{Eu}{r} = 6k(1 - \nu) + \left(2\nu - \frac{5}{2}\right)(p + 2k)\sqrt{\frac{R_i}{r}}, \\ \left(\frac{Eu}{r} - \sigma_\theta + \nu\sigma_r\right)\Big|_{r=c} = 0. \end{cases}\quad (10)$$

Решение задачи (10), имеет вид

$$Ee_r = 2k(1 - \nu)r + \sqrt{a}(p + 2k) \left(\frac{3c_2}{4r} + \nu - \frac{5}{4} \right) \sqrt{r}.$$

Согласно (7) деформации

$$Ee_r = 2k(1 - \nu) + \frac{1}{2}(p + 2k) \left(\nu - \frac{5}{4} - \frac{3c_2}{4r} \right) \sqrt{\frac{a}{r}},$$

$$Ee_\theta = 2k(1 - \nu) + (p + 2k) \left(\nu - \frac{5}{4} + \frac{3c_2}{4r} \right) \sqrt{\frac{a}{r}},$$

Пластические деформации

$$Ee_r^p = \frac{3}{8}(p + 2k) \left(1 - \frac{c_2}{r} \right) \sqrt{\frac{a}{r}},$$

$$Ee_\theta^p = \frac{3}{4}(p + 2k) \left(\frac{c_2}{r} - 1 \right) \sqrt{\frac{a}{r}},$$

Напряжения, деформации и перемещения в упругой области

На упругопластической границе напряжения непрерывны. На внешней границе второго диска $\sigma_r|_{r=R_e} = 0$. Поэтому радиальную компоненту тензора напряжений в области упругого состояния диска $c \leq r \leq R_e$ можно находить из решения или краевой или задачи Коши.

Выберем следующую краевую задачу

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \\ \sigma_r|_{r=R_e} = 0, \\ \left(2 \frac{dr\sigma_r}{dr} - \sigma_r \right) \Big|_{r=c} = 2k. \end{cases} \quad (11)$$

Условие на упругопластической границе $r = c$ – следствие непрерывности напряжений на этой границе. Решение задачи (11):

$$\sigma_r = -\frac{2kc^2}{3R_e^2 + c^2} \left(\frac{R_e^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = \frac{2kc^2}{3R_e^2 + c^2} \left(\frac{R_e^2}{r^2} + 1 \right). \quad (12)$$

В зависимости от того какие граничные условия выбираются для определения напряжений в упругой области формулы (12) могут иметь иной вид, приводимый к (12).

Из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе следует уравнение для вычисления радиуса упругопластической границы

$$(2k + p) \sqrt{\frac{R_i}{c}} - \frac{8kR_e^2}{3R_e^2 + c^2} = 0.$$

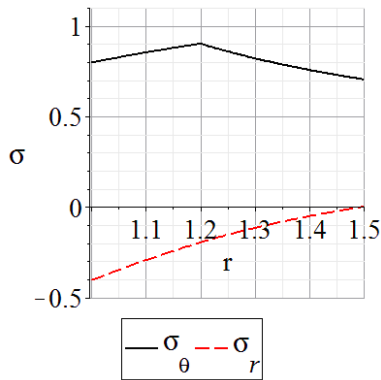


Рис. 1.

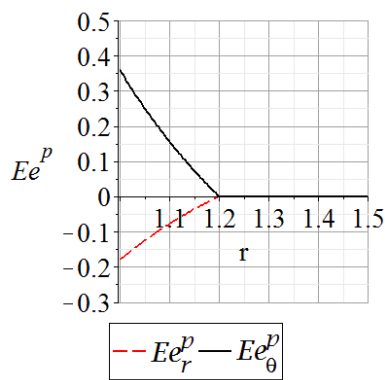


Рис. 2.

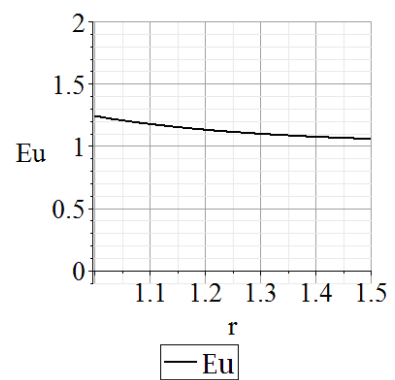


Рис. 3.

На рис. 1 – рис. 3 представлено распределение напряжений пластических деформаций и перемещений для следующих значений безразмерных параметров: $R_i = 1$, $R_e = 1.5$, $p = 0.4$, $\nu = 0.2$.

Вопросы математического моделирования упругопластического состояния цилиндрических областей при выборе кусочно-линейных условий пластичности в приближении плоского деформированного состояния рассматривались, например, в работах [2–8].

Литература

1. Дарков А. В., Шапиро Г. С. Сопrotивление материалов. – М. : Высшая школа. – 1965. – 762 с.
2. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 71–82.
3. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 81–90.
4. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 5. – С. 126–128.
5. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.
6. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 4–5.
7. Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 7–8.
8. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Предельные условия пластичности // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов, 2014. – С. 13–14.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет

Очевидно, что для описания поведения целого ряда реальных структур, состоящих из n – компонент, необходимо привлекать более общие модели тел, обобщающие известные сложные модели сред [1]. К таким средам можно отнести: суспензии одной упруговязкопластической среды в другой, краски, полимерные растворы, смеси битумов и многие другие. Для таких сред более точной является обобщённая модель тела S_p^1 [1], механическая модель которой изображена на рис. 1.

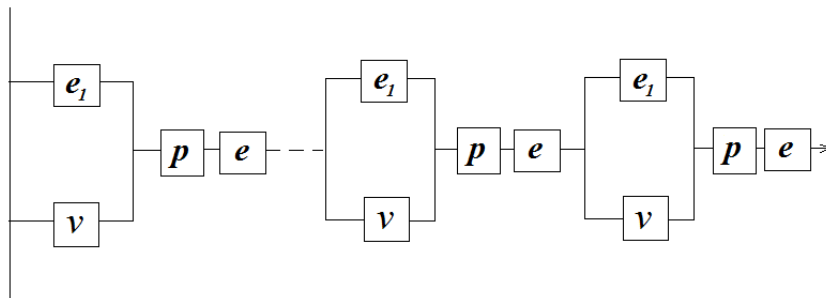


Рис. 1. Обобщенная модель тела

Индексы e , e_1 , p , v обозначают соответственно упругий, пластический и вязкий механизмы. Модель представляет собой последовательное соединение α ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) моделей тела $S_p^1 = H - Stv - K$, состоящего из последовательно соединённых тел: H – тело Гука, Stv – тело Сен-Венана, и K – тело Кельвина-Фойгта. При этом у каждой из этих моделей S_p^α свои собственные константы. Число m определяет порядок обобщенной модели тела S_p^m .

Следуя [1, 2], приведем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^m произвольного порядка.

Тело остается упругим, пока

$$S_{ij}S_{ij} < k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединённых моделей

$$S_{ij}^\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_{nn}^\alpha \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где λ_α , μ_α – параметры Ламэ.

Если $S_{ij}S_{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация складывается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \dots + \varepsilon_{ij}^m = \sum_{\alpha=1}^m \left(\varepsilon_{ij}^\alpha + \varepsilon_{ij}^{p\alpha} \right). \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \dots, \varepsilon_{ij}^m$ – деформации, соответственно, первой, второй и так далее модели S_p^α . Пластическая составляющая объемной деформации моделей S_p^α удовлетворяет условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^{p\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

Следовательно, компоненты девиатора тензора деформации тождественно равны компонентам тензора деформации.

Напряжения, приложенные к моделям, одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \dots = S_{ij}^\alpha = S_{ij}, \quad (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \dots = \sigma_{ij}^\alpha = \sigma_{ij}), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Тензоры скоростей пластической деформации $\overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha$ связаны с тензорами напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$\overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha = \psi_\alpha \left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha \right), \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

если выполняется условие пластичности

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha \right) \left(S_{ij} - c_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha - \eta_\alpha \overset{p}{\varepsilon}_{ij}^\alpha \right) = k_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Здесь η_α – коэффициент вязкости, c_α – коэффициент упрочнения, k_α – предел текучести, ψ_α – скалярные положительные множители соответственно первой ($\alpha = 1$), второй ($\alpha = 2$) и т. д. модели S_p^α .

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(8) с уравнениями равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0 \quad (9)$$

представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное состояние упруговязкопластической смеси произвольного порядка.

Литература

1. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел / А. Н. Спорыхин // ПМТФ. – 1967, №4. – С. 52–58.
2. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М. : Наука, 1971. – 231 с.

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ ЯВЛЕНИЯ «ЗАПИРАНИЯ» ОБЛАСТИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

О. Л. Швед

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

Явление «запирания» области высокого давления является необычным с точки зрения механики материалов [1]. Так при сжатии тонкого диска на наковальне Бриджмена начинающая с некоторой величины усилия, в центре тонкого круглого диска образуется и расширяется упругая область, и никаким большим давлением не удается изменить остаточную толщину.

Решение возникающей краевой задачи с моделью материала [2] вызывает значительные трудности. Поэтому предполагаем, что задано преобразование отсчетной конфигурации в актуальную конфигурацию с учетом несжимаемости и векторы места в них \mathbf{r} , \mathbf{R} имеют вид:

$$\mathbf{r} = q^i \mathbf{c}_i, \quad \mathbf{R} = (\sqrt{1-p})^{-1} (q^1 (\mathbf{c}_1 \cos \alpha + \mathbf{c}_2 \sin \alpha) + q^2 (-\mathbf{c}_1 \sin \alpha + \mathbf{c}_2 \cos \alpha)) + q^3 (1-p) \mathbf{c}_3 \quad (1)$$

$$(\alpha = \alpha_0 q, \quad q = 1 - q^3 h^{-1}, \quad (q^1)^2 + (q^2)^2 \leq 1, \quad 0 \leq q^3 \leq h, \quad 0 \leq p < 1, \quad 0 \leq q \leq 1),$$

где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр. Начальные значения $p = \alpha_0 = 0$. В силу симметрии рассматриваем изменения лагранжевых координат при $q^2 = 0, 0 \leq q^1 \leq 1$. Для упрощения полагаем триклинный материал модели идеально упругоупругим.

Запишем определяющие уравнения модели [2] при течении, два в конечном виде и три в дифференциальном. Удельная потенциальная энергия упругой деформации имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = & \sum (\delta_i (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \delta_{3+i} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{11+i} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{15+i} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i) + \\ & \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_8 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_9 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ & + \delta_{10} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{19} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{20} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{21} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2, \\ \vartheta_3 = & \sum \delta_{21+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^3 + \delta_{25} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{26} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{27} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \\ & + \delta_{28} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{29} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \delta_{30} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{31} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ & (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{31+i} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{35} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{36} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{37} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ & + \delta_{38} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{39} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{40} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{41} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ & + \delta_{42} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{40+3i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{41+3i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \\ & + \delta_{45} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{48} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{51} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{52} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \\ & + \delta_{53} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{54} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{55} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \delta_{56} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \\ & + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{56+i} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{60} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{61} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ & + \delta_{62} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{63} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{64} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta_{65}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \delta_{66}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2 + \delta_{67}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \\
& +\delta_{68}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{C}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 \sum \delta_{66+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \\
& +\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 \sum \delta_{67+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_3 \sum \delta_{68+3i}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}_i, \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши – Грина $\mathbf{C} = 2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$, c – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\varepsilon \geq 0$. Начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, 77$), и тогда с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал Мурнагана ε_0 . Из (2) получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j \\
\left(\mathbf{T}_0 &= 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}, \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \right), \quad (3)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_e$, неособенный тензор $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ заменяет деформационный градиент, \mathbf{O} – собственно ортогональный тензор поворота, сопровождающий упругую деформацию, L_3 – третий главный инвариант меры упругих искажений \mathbf{V} . Дифференциальное уравнение для тензора напряжений Коши имеет вид

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), \quad (4)$$

где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ – объективная производная по времени тензора \mathbf{T} , $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ – девиатор, определяющий критерий течения ($\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \geq 0$), \mathbf{D} – тензор скорости деформаций, K – малый положительный скаляр не зависящий от \mathbf{D} , \mathbf{N} – нормированный вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести. Его выбор осуществляется, как указано в [2, 3]. Уравнение для потенциала напряжений полагаем

$$(L_3^{-1}\varepsilon) \cdot = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad (5)$$

где α – близкая к единице относительная часть величины рассеиваемой работы деформации, определяется в базовом одноосном эксперименте с использованием модельного критерия разрушения. В уравнении для параметров анизотропии различаются два случая:

$$\dot{\delta}_j = \beta k_j \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} \left(\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geq 0, k_j = \pm 1, \|\mathbf{T}_j\| = \sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j} \right), \dot{\delta}_j = 0 \left(\mathbf{T}_j = 0 \right). \quad (6)$$

Скаляр β характеризует скорость роста анизотропии, и его можно назвать параметром ее роста. Скаляры k_j в (6) выбираются из условия минимизации β .

Из (1) находим тензоры скорости деформаций и вихря

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= 2^{-1}(1 - p)^{-1} (\dot{p}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3) + (\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3)a + (\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3)b), \\
\mathbf{W} &= (\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)\dot{\alpha}_0 q + 2^{-1}(1 - p)^{-1} ((\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)a + (\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)b) \\
a &= h^{-1} (\sqrt{1 - p})^{-1} q^1 (\dot{\alpha}_0 \sin \alpha - \alpha_0(\dot{\alpha}_0 q \cos \alpha + \dot{p}2^{-1}(1 - p)^{-1} \sin \alpha)), \\
b &= h^{-1} (\sqrt{1 - p})^{-1} q^1 (-\dot{\alpha}_0 \cos \alpha + \alpha_0(-\dot{\alpha}_0 q \sin \alpha + \dot{p}2^{-1}(1 - p)^{-1} \cos \alpha)). \quad (7)
\end{aligned}$$

Расчет упругопластического процесса производится в квазистатическом режиме. При разгрузке справедливы обычные соотношения нелинейной упругости. Из (7) известны тензор \mathbf{D} и тензор упругого спина $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O}$, использующийся при определении объективной производной [2]. Известны также все величины в соотношениях (2), (3). Дифференцируя эти уравнения и подставляя в соотношения (4), (5) с использованием (6) получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнений относительно неизвестных симметричного тензора $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ и скаляра β . Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент производной меры упругих искажений в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ и параметра β . Разработаны процедуры формирования матрицы системы и минимизации параметра роста.

Созданы программные средства на языке Фортран для численного моделирования.

Проведено численное моделирование процесса: первоначальная осадка по третьей оси и дальнейшая осадка, с кручением по первым двум осям ортонормированного базиса отсчетной конфигурации. В качестве материала выбран вольфрам. Варьировались величины толщина диска h , скорости осадки \dot{r} и кручения $\dot{\alpha}_0$.

В результате проведенных вычислительных экспериментов показано, что разгрузка в тонком круглом диске действительно имеет место. Она наблюдается особенно при больших значениях величины относительной скорости кручения и осадки. Влияние третьей лагранжевой координаты незначительно. Но разгрузка начинается не в центре диска, как указано в [1], а на его краю. Возникающая в диске упругая односвязная область кольцеобразной формы контактирует со штампами и перемещается к центру диска при уменьшении величины внешнего диаметра кольца. Разгруженный материал затем переходит потом в пластическое состояние. Точка процесса в пятимерном пространстве девиаторов напряжений практически расположена в трехмерном подпространстве. Влияние пятой ее координаты составляет доли процента, а третьей и четвертой еще на два, три порядка меньше. После разгрузки точка процесса перемещается внутри области, ограниченной поверхностью девиаторного сечения поверхности текучести. Повторный выход на поверхность текучести прослеживается с помощью траектории точки, полученной проектированием точки процесса на поверхность девиаторного сечения с учетом ее сингулярности.

Выводы

Целью проведенного исследования являлась начальная попытка описания указанного явления с использованием (1), проверка определяющих соотношений (4)–(6) и разработанных программных средств. Установлено появление и дальнейшее развитие искомой упругой области в данном эксперименте. В проведенных расчетах скаляры α и K выбирались постоянными. Для устранения недопустимого роста анизотропии важным является оптимальное сочетание этих величин, поскольку модель [2] связана с конкретным законом упругости Мурнагана.

Дальнейшее исследование также при условии (1) предполагает использование более пластичного и упрочняющегося материала. Активный процесс будет происходить путем попеременного чередования пластических и упругих состояний элементов деформируемого тела. Величина α уже не будет постоянной и для ее задания ранее были проведены вычислительные эксперименты при одноосном нагружении. Потребуется правильное определение зависимости $K = K(\alpha)$.

Литература

1. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев. : Наукова думка, 1987. – 232 с.
2. *Швед О. Л.* О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности / О. Л. Швед // Труды VII Всерос. (с международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Дону, 2013. – Т. II. – С. 219–223.
3. *Швед О. Л.* Вопросы обобщения нелинейной модели упругости на упругопластичность / О. Л. Швед // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. 16–21 июня 2014 г., г. Чебоксары, Россия. – С. 225–227.

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В. И. Штука

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Применение лучевого метода к решению существенно нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела известно с конца 1960-х годов. Метод позволяет находить решение в виде ряда за движущимися поверхностями разрывов, поэтому коэффициентами данных рядов являются разрывы искомым функций или их производных. На поверхностях разрывов выполняются следствия интегральных формулировок законов сохранения: кинематические, геометрические и динамические условия совместности, которые, связывая разрывы производных любого порядка друг с другом, позволяют получать рекуррентные зависимости для определения коэффициентов лучевых рядов. Эта возможность, однако, не распространяется на случай, когда поверхности разрывов являются ударными волнами, т. е. когда деформации и скорости испытывают скачок первого рода. Благодаря дополнительным разложениям интенсивностей разрывов на ударных волнах, предложенным в [2], используя понятие дельты-производной по Томасу [8], уже модифицированный лучевой метод стал применим и к таким проблемам. Употреблением показанных приёмов было решено немало задач нелинейной теории упругости. Распространение методики на случай нелинейной упруго-вязкопластичности представляет не меньший интерес.

В качестве примера, разрешим одномерную задачу определения деформированного состояния упруго-вязкопластической несжимаемой среды с цилиндрическим дефектом сплошности, являющуюся логическим продолжением, избранной авторами [7] работы. Аналогичные исследования, проводимые в рамках линейной теории с условием пластичности Треска, принадлежат Г. И. Быковцеву и его ученикам [1]. Модель упруго-вязкопластической несжимаемой среды в Эйлеровых пространственных координатах x_1, x_2, x_3 описывается системой

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) - p\delta_{ij}, \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{kl}e_{lj}, \\ 2d_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\varepsilon_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \\ \varepsilon_{ij}^p &= \begin{cases} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}, & f \leq 0 \\ 0, & f > 0 \end{cases}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей; σ_{ij}, d_{ij} – тензоры напряжений Коши-Эйлера и полных деформаций; $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ – тензоры скоростей обратимых и необратимых деформаций; p – функция добавочного всестороннего давления; $\rho = \text{const}$ – плотность среды; $f_k(\sigma_{ij}, p_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ – функции, определяющие поверхность нагружения; e_{ij}, p_{ij} – тензоры обратимых и необратимых деформаций. Индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате, точка над символом – по времени.

Разделение полных деформаций в (1) производится посредством модели больших упруго-гопластических деформаций [4], поскольку в рамках такой теории следует учитывать также и конечные необратимые деформации. Скорости необратимых ε_{ij}^p и обратимых деформаций ε_{ij}^e обременены сообразной (1) связью. Отметим также, что в уравнение движения входят градиенты компонент тензора напряжений, которые зависят только от обратимых деформаций, что подразумевает независимость термодинамических потенциалов от необратимых деформаций.

Благодаря дополнительной кинематической связи – условию несжимаемости, становится возможным проследить деформации изменения формы [6], а не объёма (в отличие от динамики жидкостей и газов).

В качестве условия пластичности может быть избран критерий Мизеса [5]

$$f = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p \right) \left(\sigma_{ji} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p \right) - K^2,$$

где K – предел текучести, η – коэффициент вязкости.

Динамика процесса определяется краевыми и граничными условиями. Так, перед началом нагружения считаем, что в среде присутствуют только предварительные осевые деформации e_{rz} ($e_{r\varphi} = 0$). Данное предположение является предпосылкой к возникновению и распространению именно двух ударных волн (волны нагрузки Σ_1 и волны круговой поляризации Σ_2) с чётко определённым отношением порядка следования. Подробное их исследование, аналогично произведённому в [3] и [7], может быть применено к упруго-вязкопластическим средам. Динамическое скручивающее воздействие v_φ ($v_z = 0$) оказывается на стенку дефекта и вызывает распространение Σ_1 и Σ_2 .

Так, основными уравнениями для нулевого шага метода на волне нагрузки и волне круговой поляризации являются уравнения затухания интенсивностей разрывов скоростей и алгебраические связи разрывов ускорений

$$\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \kappa_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{r} + 10 \chi_1 \frac{e_{rz}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 e_{rz,r}) \right) + C[\varepsilon_{rz}^p] + \dots, \quad \kappa_{i+1} = \left[\frac{\partial^i v_z}{\partial t^i} \right] \Big|_{\Sigma_1},$$

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta t} = \eta_1 \left(-\frac{C}{r} + 2 \chi_1 \frac{e_{rz}^3}{C} (\kappa_2 - C^2 e_{rz,r}) \right) + C[\varepsilon_{r\varphi}^p] + \dots, \quad \eta_{i+1} = \left[\frac{\partial^i v_\varphi}{\partial t^i} \right] \Big|_{\Sigma_2},$$

$$\omega_2 = -\frac{r^2 \eta_1 \eta_2}{C e_{rz}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\kappa_1}{C e_{rz}} (1 - \chi_1 e_{rz}^4) \right) + 2C[\varepsilon_{rz}^p] + \dots, \quad \omega_{i+1} = \left[\frac{\partial^i v_z}{\partial t^i} \right] \Big|_{\Sigma_2},$$

где $[f] = f^+ - f^-$ – разрыв функции; f^+ , f^- – значения функции перед и за поверхностью разрыва; $C = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость эквиволлюминальной волны; $\chi_1 = \text{const}$ определена параметрами среды.

Разрешая уравнение движения в разрывах на нулевом шаге лучевого метода, можно заключить, что итоговая система оказывается отличной от системы для нелинейно-упругой среды в том, что она учитывает необратимые эффекты, которые возникают за счёт наличия свойств вязкопластичности. Естественно, что на поверхностях разрывов будет наблюдаться скачок скоростей необратимых деформаций только в том случае, когда будет выполнено условие пластичности, что необходимо отслеживать при численном моделировании. Также возможно специальное задание таких краевых условий, чтобы среда при граничном воздействии, неминуемо подвергалась бы необратимому деформированию.

Литература

1. *Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вerveйко Н. Д.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вerveйко // ПММ. – 1973. – Т. 37, № 1. – С. 145–155.
2. *Буренин А. А.* Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А. А. Буренин // Дальневосточный математический сборник. – 1999. – Вып. 8. – С. 49–72.
3. *Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А.* К закономерностям распространения деформаций изменения формы / А. А. Буренин, О. В. Дудко, А. А. Лаптева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14, № 4. – С. 14–23.
4. *Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.
5. *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.* Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
6. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
7. *Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А.* Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя / Г. М. Севастьянов, В. И. Штука, А. А. Буренин // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 4 (26). – С. 52–60.
8. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах. – М. : Мир, 1961. – 308 с.

О ПРОТИВОРЕЧИЯХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВЫБОРОМ УСЛОВИЯ ТРЕСКА

А. П. Якубенко, М. А. Артемов, Е. С. Барановский

Воронежский государственный университет

В работе рассматривается одно известное решение упругопластической задачи о быстро вращающемся круговом диске, которое содержит результаты, противоречащие общим представлениям о распределении пластических деформаций. Обсуждаются также вопросы, возникающие при использовании кусочно-линейных условий пластичности в случае плоского напряженного состояния.

Кусочно-линейные условия пластичности позволяют в ряде случаев получить точное или приближенное аналитическое решение, в то время как при выборе гладких условий пластичности удается получить только численное решение задачи [1].

Несмотря на проблемы, обусловленные наличием сингулярных точек, кусочно-линейные условия пластичности довольно часто рассматриваются в математической теории пластичности [2–4]. Привлекательность выбора кусочно-линейных условий пластичности связана с возможностью получения аналитических решений некоторых задач [5–9].

Напряженное и деформированное состояние быстро вращающегося упругопластического диска при условии пластичности Треска

В рамках теории пластического течения в круговом быстро вращающемся диске имеют место следующие соотношения:

- напряжения в пластической зоне $0 \leq \rho \leq c$ (см. [1])

$$\sigma_\rho = 2k - \frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = 2k; \quad (1)$$

- упругие деформации в пластической зоне

$$E\varepsilon_r^e = 2k(1 - \nu) - \frac{1}{3}m\rho^2, \quad E\varepsilon_\theta^e = 2k(1 - \nu) + \frac{\nu}{3}m\rho^2, \quad E\varepsilon_z^e = \frac{\nu}{3}m\rho^2 - 4k\nu; \quad (2)$$

- пластические деформации

$$E\varepsilon_r^p = 0, \quad E\varepsilon_\theta^p = -\frac{1 + 3\nu}{9}m\rho^2, \quad E\varepsilon_z^p = \frac{1 + 3\nu}{9}m\rho^2; \quad (3)$$

- перемещения и деформации в пластической зоне

$$\begin{aligned} Eu &= 2k(1 - \nu)\rho - \frac{1}{9}m\rho^3, & E\varepsilon_r &= 2k(1 - \nu) - \frac{1}{3}m\rho^2; \\ E\varepsilon_\theta &= 2k(1 - \nu) - \frac{1}{9}m\rho^2, & E\varepsilon_z &= \frac{1 + 6\nu}{9}m\rho^2 - 4k\nu; \end{aligned} \quad (4)$$

- напряжения в упругой зоне $c \leq \rho \leq 1$ (решение получено с учетом условий непрерывности напряжений на упругопластической границе $\rho = c$)

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 2k + \frac{(1 + 3\nu)m}{24} \left(\left(2 - \frac{c^2}{\rho^2} \right) c^2 - 3 \frac{\nu + 3}{1 + 3\nu} \rho^2 \right), \\ \sigma_\theta &= 2k + \frac{(1 + 3\nu)m}{24} \left(\left(2 + \frac{c^2}{\rho^2} \right) c^2 - 3\rho^2 \right); \end{aligned} \quad (5)$$

- деформации и перемещения в упругой зоне

$$\begin{aligned}
E\varepsilon_\rho &= 2k(1-\nu) + \frac{m}{24} \left(2c^2(1+2\nu-3\nu^2) - 9(1-\nu^2)\rho^2 - \frac{(1+4\nu+3\nu^2)c^4}{\rho^2} \right), \\
E\varepsilon_\theta &= 2k(1-\nu) + \frac{m}{24} \left(2c^2(1+2\nu-3\nu^2) - 3(1-\nu^2)\rho^2 - \frac{(1+4\nu+3\nu^2)c^4}{\rho^2} \right), \\
Eu &= 2k(1-\nu)\rho + \frac{m}{24} \left(2c^2(1+2\nu-3\nu^2)\rho - 3(1-\nu^2)\rho^2 + \frac{(1+4\nu+3\nu^2)c^4}{\rho^2} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\rho = r/b$ – безразмерная радиальная координата, b – радиус внешнего контура диска, $m = \gamma\omega^2 b^2/g$ – безразмерная величина, ω – угловая скорость, γ – удельный вес, g – ускорение свободного падения, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Если определять напряжения в упругой зоне не из начальной задачи, а решать краевую задачу, выбирая условие непрерывности радиального напряжения на упругопластической границе $[\sigma_\rho(\rho = c)] = 0$ и условие на внешней границе $\sigma_\rho(\rho = 1) = -p$, то получаются иные формулы для напряжений и деформаций.

Для решения (5) из условия $\sigma_\rho(\rho = 1) = -p$ следует зависимость

$$m = \frac{24(2k-p)}{3(\nu+3)b^4 + (1+3\nu)(c^2-2b^2)c^2}, \quad m = \frac{\gamma\omega^2 b^2}{g-k} \tag{7}$$

или, находя зависимость $c = c(m)$ (знаки при решении биквадратного уравнения (7) выбираются исходя из физического смысла: с ростом угловой скорости ω вращения диска увеличивается радиус упругопластической границы)

$$c = \sqrt{b^2 - 2\sqrt{2}b\sqrt{\frac{6km + 3mp - b^2m^2}{(1+3\nu)m^2}}}. \tag{8}$$

Если давление на внешний контур диска $p = 0$, то формула (7) принимают вид, приведенный в [1].

В теории упругопластического тела, если принимается гипотеза о естественном состоянии (отсутствие необратимых деформаций в теле до нагружения), пластические деформации на упругопластической границе должны быть равны нулю. Однако окружная компонента тензора пластических деформаций (3) равна нулю только в точке $\rho = 0$, а на границе упругопластической границе $\rho = c$ имеет место

$$E\varepsilon_\theta^p = -\frac{1+3\nu}{9}mc^2 \neq 0.$$

Поэтому перемещения и все деформации (кроме радиальной компоненты) претерпевают разрыв на упругопластической границе. Непрерывность радиальной компоненты тензора деформаций на упругопластической границе обусловлена тем, что на этой границе непрерывны компоненты тензора напряжений и радиальная компонента пластических деформаций равна нулю.

Из анализа упругого решения следует, что максимальное значение функция пластичности принимает в центре диска, где $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, то есть пластическое состояние возникает в точке $\rho = 0$ для сингулярного режима пластичности Треска

$$\begin{cases} \sigma_\theta - \sigma_z = 2k, \\ \sigma_\rho - \sigma_z = 2k. \end{cases} \tag{9}$$

Однако, режим пластичности (9) не может реализоваться в некоторой области, содержащей точку $\rho = 0$, поскольку противоречит уравнению равновесия (подстановка (9) в уравнение равновесия дает $\sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0$, $\sigma_\rho, \sigma_\theta = \text{const}$).

О зарождении пластической зоны в быстровращающемся диске

Рассматривая кусочно-линейные условия пластичности как некоторую аппроксимацию «истинного» условия пластичности, в качестве «истинного» условия пластичности изотропного тела выберем условие Мизеса, что не является принципиальным моментом.

Во вращающемся диске силы инерции вызывают положительные радиальные напряжения. Наложение сжимающего давления p , действующего на внешний контур диска, приводит к изменению картины напряженного состояния во вращающемся диске. Изменение двух параметров ω и p может приводить к зарождению пластической зоны в центре диска или на его внешнем контуре.

Если $p < 1$, функция пластичности Мизеса в упругой зоне принимает наибольшее значение в точке $\rho = 0$. В этом случае пластическая зона будет зарождаться в центре диска.

Если $p = 1$ и $m = 0$, весь диск переходит в предельное состояние.

Из анализа функции пластичности Мизеса для упругого состояния следует, что пластическая зона может зародиться на границе $\rho = b$, если на внешнем контуре диска давление $p > 1$ и $m < \frac{32(1+\nu)}{(7+2\nu+7\nu^2)b^2}$. Также пластическое состояние на внешнем контуре возникает, когда

$$m = \frac{32(1+\nu)}{(7+2\nu+7\nu^2)b^2} \quad \text{и} \quad p_b = \frac{14\nu+5-3\nu^2}{7+2\nu+7\nu^2}.$$

Такой вариант ($p > 1$) возможен, если давление возникает за счет автоскрепления дисков и изменяется в процессе их вращения.

В дальнейшем рассматривается случай, когда пластическая зона зарождается в центре диска.

Напряженное и деформированное состояние быстровращающегося упругопластического диска. Кусочно-линейное условие пластичности общего вида

Из решения задачи для упругого состояния кругового диска следует, что в центре диска $\sigma_\rho = \sigma_\theta$ (этот вывод следует также из уравнения равновесия, если принять, что $\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\Big|_{\rho=0} \neq \infty$). В силу непрерывности напряжений на упругопластической границе из этого равенства следует, что в пластической зоне в точке $\rho = 0$ должен реализоваться тот режим кусочно-линейного условия пластичности, для которого соответствующая сторона многоугольника пластичности имеет общую точку с прямой $\sigma_\rho = \sigma_\theta$.

Рассмотрим кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_\rho = 2. \tag{10}$$

Для режима (10) распределение напряжений будет следующим:

$$\sigma_\rho = \frac{2k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha m \rho^2}{3\alpha + \beta} + C \rho^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}},$$

$$\sigma_\theta = \frac{2k}{\alpha + \beta} - \frac{\beta m \rho^2}{3\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha} C \rho^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}.$$

Режим пластичности, соответствующий случаю $\alpha = 0$, $\beta = 1$ не может реализоваться. При подстановке в уравнение равновесия получаем

$$\sigma_\rho = 2k, \quad \sigma_\theta = 2k + m\rho^2.$$

Это решение дает выход вектора напряжений за границу кривой пластичности ($\sigma_\theta > 2k$).

Поскольку для всех режимов пластичности, которые могут реализоваться в окрестности точки $\rho = 0$, имеет место $(\alpha + \beta)/\alpha > 0$, то должно выполняться равенство $C = 0$. Поэтому в пластической зоне

$$\sigma_\rho = \frac{2k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha m \rho^2}{3\alpha + \beta}, \quad \sigma_\theta = \frac{2k}{\alpha + \beta} - \frac{\beta m \rho^2}{3\alpha + \beta}. \quad (11)$$

В рамках теории пластического течения, если до нагружения пластические деформации равны нулю, то

$$\alpha \varepsilon_\rho^p = \beta \varepsilon_\theta^p. \quad (12)$$

Учитывая (11), (12), для определения перемещения в пластической зоне получаем уравнение

$$E \left(\alpha \frac{du_\rho}{d\rho} - \beta \frac{u_\rho}{\rho} \right) + \frac{2(1-\nu)(\beta - \alpha)k}{\alpha + \beta} + \frac{2\alpha\beta\nu + \beta^2 + \alpha^2}{3\alpha + \beta} m \rho^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$Eu = -\frac{2\alpha\beta\nu + \beta^2 + \alpha^2}{3\alpha + \beta} m \rho^3 - \frac{2(1-\nu)k}{\alpha + \beta} + C \rho^{\beta/\alpha}. \quad (13)$$

Пластические деформации, соответствующие полю перемещений (13) и полю напряжений (11), будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^p &= -\frac{\beta(3\alpha\nu + \beta\nu + 3\beta + \alpha)}{(3\alpha + \beta)(3\alpha - \beta)} m \rho^2 + \frac{\beta}{\alpha} C \rho^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}, \\ E\varepsilon_\theta^p &= -\frac{\alpha(3\alpha\nu + \beta\nu + 3\beta + \alpha)}{(3\alpha + \beta)(3\alpha - \beta)} m \rho^2 + C \rho^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Режимы пластичности, когда $\alpha < \beta$, не могут быть реализованы, поскольку приводят к выходу вектора напряжений за кривую пластичности. Если $\beta < \alpha$, то в силу ограниченности пластических деформаций в формулах (14) надо полагать $C = 0$, но тогда на упругопластической границе пластические деформации никогда не будут равны нулю.

Режим пластичности, который не приводит к противоречиям, ($\alpha = \beta = 1$) $\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k$. Для этого режима выполнено

$$E\varepsilon_\rho^p = E\varepsilon_\theta^p = -\frac{(3\nu + \nu + 4)}{8} m \rho^2 + C.$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе $\rho = c$ следует, что

$$C = \frac{(3\nu + \nu + 4)}{8} m c^2,$$

поэтому

$$E\varepsilon_{\rho}^p = E\varepsilon_{\theta}^p = -\frac{(3\nu + \nu + 4)}{8}m\rho^2.$$

Таким образом, неправильный результат относительно деформаций можно объяснить тем, что для плоского напряженного шестиугольник Треска плохо аппроксимирует «истинную» кривую пластичности, когда равны ненулевые главные напряжения. Правильный же результат получаем при выборе условия пластичности Шмидта.

Сингулярные режимы пластичности

В работах [3, 4] отмечалось, что для плоского напряженного состояния сингулярные режимы пластичности могут реализоваться вдоль некоторых линий. При этом переход вектора напряжения через сингулярную точку приводит к разрыву пластических деформаций и обобщенный закон пластического течения не реализуется.

Вопросы общего характера, связанные с использованием кусочно-линейных условий пластичности, рассматривались, например, в работах [10–12].

Выводы

Режимы пластичности, соответствующие сингулярным точкам поверхности пластичности не реализуются и, соответственно, обобщенный закон пластического течения в этих точках не выполняется.

Кусочно-линейная аппроксимация кривой пластичности должна быть такой, чтобы разрыв пластических деформаций в сингулярных точках поверхности пластичности не приводил к разрыву перемещений.

Литература

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
2. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМИТЛИТ, 2001. – 704 с.
3. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Соотношения изотропии и ассоциированный закон течения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 81–90.
4. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2 (24). – С. 72–87.
5. Артемов М. А., Бестужева Н. П., Потапов Н. С. О выполнении условия полной пластичности при плоском деформированном состоянии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 7. – С. 88–92.
6. Артемов М. А., Ларин И. А. Учет сжимаемости материала при определении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом теле в случае плоской деформации // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 7. – С. 39–42.
7. Артемов М. А., Потапов Н. С. Учет сжимаемости материала при определении напряжений и деформаций в упруго-пластическом теле в случае плоского напряженного состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 8. – С. 25–29.

8. *Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П.* Математическое моделирование равновесного состояния круговой цилиндрической трубы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 5. – С. 126–128.

9. *Артемов М. А., Якубенко А. П.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 30–38.

10. *Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П.* Условие полной пластичности и ассоциированный закон деформирования // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5, № 9. – С. 18–23.

11. *Артемов М. А., Потапов Н. С., Якубенко А. П.* О соотношениях, вытекающих из условия пластичности Треска // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 7–8.

12. *Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П.* Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. – Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 71–82.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Акиншин Виталий Вадимович – аспирант кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: nan050@mail.ru

Андреева Юлия Владимировна – преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: ymkahavren@gmail.com

Артемов Михаил Анатольевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: artemov_m_a@mail.ru

Артемьева Анастасия Анатольевна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: aranan@mail.ru

Баженов Валентин Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Баранова Мария Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: mari.baranova18@gmail.com

Барановский Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Бердзенишвили Георгий Геннадиевич – аспирант кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: gg.berdzenishvili@gmail.com

Богданова Софья Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования, Московский авиационный институт (МАИ). E-mail: Sonjaf@list.ru

Бормотин Константин Сергеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и анализа конструкций и процессов, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. E-mail: cvmi@knastu.ru, ks_x81@mail.ru

Бураго Николай Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН. E-mail: burago@ipmnet.ru

Буренин Анатолий Александрович – чл.-корр. РАН, директор Института машиноведения и металлургии ДВО РАН. E-mail: mail@imim.ru

Бычков Павел Сергеевич – младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук. E-mail: bychkov@ipmnet.ru

Ватульян Александр Ованесович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет; заведующий отделом дифференциальных уравнений, Владикавказский научный центр Российской академии наук. E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Вервейко Николай Дмитриевич – д-р техн. наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет.
E-mail: verveyko2017@yandex.ru

Вин Аунг – аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. E-mail: cvmi@knastu.ru

Внуков Алексей Николаевич – канд. техн. наук, старший научный сотрудник Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж. E-mail: vnukov-an@mail.ru

Галимзянова Ксения Наилевна – аспирант, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: gal-ksyusha@ya.ru

Гладков Сергей Октябрьнович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования, Московский авиационный институт (МАИ).
E-mail: sglad@newmail.ru, sglad51@mail.ru

Горбенко Олег Данилович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, Воронежский государственный университет.
E-mail: oleg_dan@mail.ru

Гоцев Дмитрий Викторович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет.
E-mail: rbgotsev@mail.ru

Дац Евгений Павлович – ассистент кафедры ВГУЭС, Владивостокский университет экономики и сервиса

Дежин Виктор Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет. E-mail: viktor.dezhin@mail.ru

Демарева Анастасия Вячеславовна – аспирант, Нижегородский университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: ivdemarev@mail.ru

Дмитрик Кирилл Григорьевич – аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: kiriksoft@mail.ru

Дударев Владимир Владимирович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет; старший научный сотрудник, Владикавказский научный центр Российской академии наук. E-mail: dudarev_vv@mail.ru

Егоров Михаил Валерьевич – аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: egorovmv89@mail.ru

Зарецкая Марина Валерьевна – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования, Кубанский государственный университет. E-mail: zarmv@mail.ru

Зарубин Владимир Степанович – д-р техн. наук, профессор кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана.
E-mail: zarubin@bmstu.ru

Зимин Владимир Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры космических аппаратов и ракет-носителей, первый проректор – проректор по научной работе, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана.

E-mail: zimin@bmstu.ru

Иванищева Ольга Ивановна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет.

E-mail: ivanischeva_oi@mail.ru

Казakov Кирилл Евгеньевич – канд. физ.-мат. наук, доцент научный сотрудник лаборатории моделирования в МДТТ Института проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, доцент кафедры прикладной математики МГТУ имени Н. Э. Баумана.

E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

Катрахова Алла Анатольевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМФММ, Воронежский государственный технический университет. E-mail: kafedra@vmfmm.vorstu.ru

Кибец Александр Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского.

E-mail: kibec@mech.unn.ru

Ковалев Алексей Викторович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: kovalev@amm.vsu.ru

Ковалев Владимир Александрович – д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы. E-mail: kovalev@migm.ru

Ковтаниук Лариса Валентиновна – д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Койфман Константин Георгиевич – инженер, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН; аспирант Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана. E-mail: koifman_bmstu@yandex.ru

Коржов Евгений Николаевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет.

E-mail: ken@amm.vsu.ru

Крылов Алексей Владимирович – канд. техн. наук, ассистент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: sm11@sm.bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: fn2@mail.ru

Кузмичева Татьяна Владимировна – младший научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: kuzmicheva.tata@gmail.com

Кузнецов Евгений Олегович – студент, Научный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: eokuznetsov@edu.hse.ru

Кузнецов Павел Николаевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет имени И.Я. Яковлева. E-mail: kuznetsov_pn@mail.ru

Кузнецов Сергей Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий. E-mail: sfs134@mail.ru

Кукуджанов Константин Владимирович – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук. E-mail: kconstantin@mail.ru

Купцов Валерий Семенович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМФММ, Воронежский государственный технический университет. E-mail: kafedra@vmfmm.vorstu.ru

Курдина Светлана Павловна – старший преподаватель кафедры прикладной математики, Московский государственный университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: svetlana-ka@yandex.ru

Лавит Игорь Михайлович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет. E-mail: IgorLavit@yandex.ru

Ле Тхи Тхань – аспирантка кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет. E-mail: le_thanh221@mail.ru

Левитин Александр Леонидович – младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук. E-mail: alex_lev@ipmnet.ru

Леонов Василий Михайлович – канд. техн. наук, доцент кафедры строительства строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет. E-mail: Basil.Leonov@Gmail.com

Любимова Ольга Николаевна – канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: lyubimova.on@dvfu.ru

Макеев Евгений Валентинович – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук. E-mail: makeev@rambler.ru

Малик Александр Васильевич – аспирант кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет. E-mail: runer10@mail.ru

Мамедов Халид Биннат оглы – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики и механики сплошных сред, Бакинский государственный университет

Манжиров Александр Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор, иностранный член НАН РА, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН. E-mail: manzh@inbox.ru

Мегралиев Яшар Топуш оглы – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский государственный университет. E-mail: yashar_aze@mail.ru

Минаева Надежда Витальевна – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет.
E-mail: nminaeva@yandex.ru

Мнухин Роман Михайлович – студент, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет.
E-mail: romamnuhin@yandex.ru

Моргунова Анна Вадимовна – аспирант, Донской государственный технический университет. E-mail: annmorgan2077@gmail.com

Москалик Анна Давидовна – аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет.
E-mail: annmoskalik1@gmail.com

Мохирева Ксения Александровна – аспирант, инженер лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН, инженер кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий ПГНИУ, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН); Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ). E-mail: lyadovaka@icmm.ru

Мулюков Радик Рафикович – д-р физ.-мат. наук, директор Института проблем сверхпластичности металлов РАН, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН.
E-mail: Radik@imsp.ru, imsp@imsp.ru

Мурашкин Евгений Валерьевич – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: evmurashkin@gmail.com

Никитин Илья Степанович – д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, Институт автоматизации проектирования РАН.
E-mail: evmurashkin@gmail.com i_nikitin@list.ru

Павлов Владимир Петрович – д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теор. физики МИАН, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. E-mail: evmurashkin@gmail.com pavlov@mi.ras.ru

Панченко Галина Леонидовна – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, доцент кафедры математики и моделирования, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса.
E-mail: ranchenko.21@yandex.ru

Паршин Дмитрий Александрович – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН

Переяславская Ирина Игоревна – аспирант кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: irika5319@yandex.ru

Перунов Николай Сергеевич – студент магистратуры кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет.
E-mail: perunovnikolays@gmail.com

Потапов Николай Сергеевич – директор Рексофт. E-mail: nspmail@mail.ru

Прибытков Юрий Николаевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики Воронежский государственный университет. E-mail: pribun2001@mail.ru

Радаев Юрий Николаевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН. E-mail: radayev@ipmnet.ru

Русина Елена Юрьевна – аспирант кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: rsnln@rambler.ru

Сабитова Алия Халидовна – студентка, Московский государственный университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: saveter@mail.ru

Савельева Инга Юрьевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: inga.savelyeva@gmail.com

Свиридов Илья Эдуардович – аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: synettt@gmail.com

Свистков Александр Львович – д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией микромеханики структурно-неоднородных сред, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН); заведующий кафедрой механики сплошных сред и вычислительных технологий, Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ). E-mail: svistkov@icmm.ru

Севдималиев Юсиф Мамедали оглы – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики и механики сплошных сред, Бакинский государственный университет. E-mail: yusifsev@mail.ru

Соломатин Михаил Сергеевич – аспирант, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж. E-mail: newmihei@gmail.com

Солоненко Элеонора Павловна – ассистент кафедры механики и математического моделирования, Дальневосточный федеральный университет. E-mail: el-solonenko@yandex.ru

Спорыхин Анатолий Николаевич – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: anspor@mail.ru

Старостенков Михаил Дмитриевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики, заслуженный деятель науки РФ, Алтайский государственный технический университет имени И.И. Ползунова. E-mail: genphys@mail.ru

Ткачева Анастасия Валерьевна – младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН. E-mail: 4nansi4@mail.ru

Ужегова Надежда Ивановна – инженер-исследователь лаборатории «Микромеханики структурно-неоднородных сред», Институт механики сплошных сред УрО РАН. E-mail: uzhegova@icmm.ru

Ускова Ольга Федоровна – канд. техн. наук, профессор кафедры математического обеспечения ЭВМ, Воронежский государственный университет. E-mail: sunny.uskova@list.ru

Федюшкин Алексей Иванович – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН. E-mail: fai@ipmnet.ru, fedyushkin@mail.ru

Фролова Ирина Анатольевна – младший научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: frolovai@bk.ru

Чурилин Сергей Александрович – ведущий инженер Управления научно-инновационной деятельностью, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. E-mail: sm11@sm.bmstu.ru

Шашкин Александр Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет. E-mail: dean@amm.vsu.ru

Швед Олег Лаврентьевич – канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси. E-mail: swed@newman.bas-net.by

Шевалдин Андрей Николаевич – магистрант кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: nminaeva@yandex.ru

Штука Виктор Игоревич аспирант – инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления. E-mail: onslice@mail.ru

Шушкина Юлия Александровна – магистрант, Нижегородский университет имени Н. И. Лобачевского. E-mail: julia_22_a@mail.ru

Щеглова Юлия Дмитриевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: scheglova@gmail.com

Щербатюк Галина Анатольевна – старший преподаватель кафедры механики и анализа конструкций и процессов, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. E-mail: mail@imim.ru

Яковлев Александр Юрьевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет. E-mail: yakovlev@amm.vsu.ru

Якубенко Андрей Павлович – преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет. E-mail: andrey.yakubenko@gmail.com

Яшин Александр Вячеславович – канд. физ.-мат. наук, Алтайский государственный технический университет имени И.И. Ползунова. E-mail: frs22@mail.ru

Яшин Олег Вячеславович – аспирант кафедры физики, Алтайский государственный технический университет имени И. И. Ползунова. E-mail: rubtsovsk@inbox.ru

Содержание

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И ДРУГИХ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

- Дежнин В. В.* О колебаниях двух смежных отрезков линейных дефектов в сплошной изотропной среде 4
- Мулюков Р. Р.* Физико-механические свойства ультрамелкозернистых и наноструктурных металлов и сплавов 7

МЕХАНИКА И СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

- Бормотин К. С., Вин Аунг* Метод вычисления формы оснастки реконфигурируемого устройства при формообразовании панели 9
- Шашкин А. И., Ускова О. Ф., Коржов Е. Н., Горбенко О. Д., Яковлев А. Ю.*
Основателям факультета ПММ ВГУ посвящается 12

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ, МЕХАНИКА КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ТРИБОЛОГИЯ

- Бураго Н. Г., Никитин И. С.* Континуальная теория слоистой среды с промежуточными прослойками из вязкопластического материала 15
- Казаков К. Е., Курдина С. П., Сабитова А. Х.* Контакт основания с поверхностно неоднородным покрытием и регулярной системы жестких штампов 20
- Ле Тхи Тхань, Лавит И. М.* Вариант решения задачи о краевой трещине в полуплоскости 24
- Малик А. В., Лавит И. М.* Динамическое нагружение полосы с центральной трещиной 27

МЕХАНИКА РАСТУЩИХ ТЕЛ

- Манжиров А. В., Паршин Д. А.* Об общих подходах и методах механики наращиваемых упругих и вязкоупругих тел и ее возможных приложениях 31
- Федюшкин А. И., Бураго Н. Г.* Влияние вибраций на конвекцию Марангони при выращивании кристаллов по методу Чохральского 34

МЕХАНИКА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Баженов В. Г., Артемьева А. А., Баранова М. С., Кузмичева Т. В., Фролова И. А.*
Численное моделирование неосесимметричных процессов упругопластического выпучивания оболочек вращения при комбинированных нагружениях 42

<i>Зимин В. Н., Крылов А. В., Чурилин С. А.</i> Моделирование процесса раскрытия плоских и пространственных космических крупногабаритных трансформируемых конструкций	45
<i>Минаева Н. В., Шевалдин А. Н.</i> Исследование продольно-поперечного изгиба пластины на упругом основании	48
<i>Севдималиев Ю. М., Мегралиев Я. Т., Мамедов Х. Б.</i> Об одной задаче панельного флаттера пластинки из композитного материала	49

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Зарубин В. С., Кувыржин Г. Н., Савельева И. Ю.</i> Динамические температурные напряжения с учетом эффекта нелокальности среды	52
<i>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> Неприводимые системы объективных тензоров деформации микрополярного континуума	55
<i>Койфман К. Г.</i> Собственные напряжения в задаче о наращивании упругого полушара.	60

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В СМЕЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ МЕХАНИКИ

<i>Купцов В. С., Катрахова А. А.</i> Обтекание малого эллипсоидального тела неоднородным потоком вязкой несжимаемой жидкости	64
--	----

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Артемов М. А., Барановский Е. С., Потанов Н.С., Шашкин А.И.</i> Моделирование упругопластического состояния цилиндрической области	69
<i>Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.</i> Об эволюции температурных напряжений в материалах сборки, формируемой горячей посадкой	75
<i>Ватульян А. О., Дударев В. В., Мнухин Р. М.</i> Об идентификации переменного модуля Био пороупругой трубы	78
<i>Вервейко Н. Д., Егоров М. В.</i> Лучевой метод повышенного порядка точности расчета динамического деформирования упруговязкопластических оболочек	81
<i>Гоцев Д. В., Перунов Н. С.</i> Распределение полей напряжений и перемещений в пористых осесимметричных телах с учетом упруговязкопластических свойств полностью сжатой матрицы	87
<i>Демарева А. В., Кибец А. И., Шушкина Ю. А.</i> Численное моделирование выпучивания стальной полусферической оболочки при квазистатическом вдавливании полого цилиндра	92
<i>Зарецкая М. В.</i> Разнотипные блочные элементы в задачах геоэкологии	95
<i>Иванищева О. И., Прибытков Ю. Н.</i> Оценка влияния профиля шероховатостей поверхности пластины на ее устойчивость	98

<i>Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю.</i> О математической модели механического взаимодействия тонкого упругого кольца и тонкой упругопластической пластины . .	101
<i>Ковалев А. В., Свиридов И. Э., Щеглова Ю. Д.</i> Об определении напряженного состояния анизотропного кругового полого цилиндра с переменным диаметром при упругопластическом кручении	104
<i>Кузнецов Е. О., Пузино Ю. А.</i> Сглаживание конечно-элементной сетки методом обобщённого линейного программирования	108
<i>Кузнецов П. Н.</i> Упругопластическое состояние плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эллиптическим включением, при двусосном растяжении (второе приближение)	112
<i>Кузнецов С. Ф.</i> Течение вязкопластического материала между двумя осесимметричными поверхностями	118
<i>Леонов В. М.</i> Формоизменение металлов при магнитно-импульсной обработке – характеристики процесса	121
<i>Любимова О. Н., Солоненко Э. П.</i> Метод расчета технологических напряжений в двухслойном цилиндрическом спае металла со стеклом при резком охлаждении . .	124
<i>Москалик А. Д.</i> Конечно-элементный и приближенный аналитический анализ для одной задачи установившейся ползучести с возмущенными границами	127
<i>Павлов В. П.</i> Луна – идеальный объект для применения линейной теории упругости .	130

ПРОБЛЕМЫ НАНО- И МИКРОМЕХАНИКИ

<i>Кукуджанов К. В., Левитин А. Л., Макеев Е. В., Койфман К. Г., Бычков П. С.</i> Взаимодействие и залечивание микротрещин в металле под действием импульсов тока высокой плотности	136
<i>Мохирева К. А., Свистков А. Л.</i> Моделирование поведения эластомерных материалов с учетом эффекта размягчения Маллинза	139
<i>Свистков А. Л., Ужегова Н. И.</i> Новая модель контактного взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с мягким материалом	142
<i>Старостенков М. Д., Яшин А. В., Яшин О. В.</i> Исследование процессов деформации металлических нановолокон ГЦК никеля с различной степенью заполнения пор атомами водорода	145

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Акинъшин В. В., Переяславская И. И.</i> Об алгоритмах решения осесимметрической упругопластической задачи о кольцевой области	150
<i>Андреева Ю. В., Внуков А. Н., Ковалев А. В.</i> К расчету сжимаемой упругопластической трубы	153
<i>Артемов М. А., Барановский Е. С., Потапов Н. С., Якубенко А. П.</i> О кусочно-линейных условиях пластичности	156

<i>Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И.</i> Нейтральное нагружение кольцевой области	160
<i>Богданова С. Б., Гладков С. О.</i> Об одном точном автомодельном решении контактной задачи Томсона	167
<i>Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г.Л.</i> Ползучесть и пластическое течение материала сферического слоя под действием изменяющегося давления	172
<i>Дац Е. П., Мурашкин Е. В.</i> Сравнение критериев текучести Треска и Ивлева в задаче неравномерного нагрева цилиндра	175
<i>Дмитрик К. Г., Спорыхин А. Н.</i> Численно-аналитическое исследование трехслойной сферической оболочки на устойчивость	178
<i>Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Гармоническая термоупругая волна в микрополярном континууме с учетом полной термомеханической связанности	182
<i>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> Микрополярные континуумы с дополнительными микроструктурными связями	187
<i>Моргунова А. В.</i> Анализ волновых процессов в неоднородном трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе	193
<i>Переяславская И. И., Соломатин М. С.</i> Математическое моделирование состояния кольцевой области, нагруженной внутренним давлением	196
<i>Спорыхин А. Н.</i> Об одной модели упруговязкопластических смесей	200
<i>Швед О. Л.</i> К вопросу описания явления «запирания» области высокого давления ...	202
<i>Штука В. И.</i> Лучевой метод в решении нестационарных задач деформирования упруго-вязкопластических материалов	206
<i>Якубенко А. П., Артемов М. А., Барановский Е. С.</i> О противоречиях, обусловленных выбором условия Треска	209
ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ	215

Н а у ч н о е и з д а н и е

Механика деформируемого твердого тела

*Сборник трудов
IX Всероссийской конференции*

Воронеж,
12–15 сентября 2016 г.

Минимальные системные требования:
PC не ниже класса Pentium I, 32 Mb RAM,
свободное место на HDD 16 Mb,
Windows 95/ 98, Adobe Acrobat Reader,
дисковод CD-ROM 2-х, мышь.

Подписано к использованию __.09.16.
Объем данных __, __ Мб. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
Тираж ___ экз. Заказ __.

ООО «Вэлборн»
Издательство «Научно-исследовательские публикации»
394068, г. Воронеж, Московский пр-т, 98
Тел. +7 (930) 4035-418
<http://wellborn@scirep.ru> E-mail: wellborn@scirep.ru

Изготовлено фирмой «Большой формат» (ООО «Твой выбор»)
394018, г. Воронеж, ул. Кости Стрелюка, д. 11/13, офис 6
Тел. +7 (473) 238-26-38
<http://big-format.ru> E-mail: 382638@mail.ru