

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)
Российский национальный комитет РАН по теоретической
и прикладной механике
Научный Совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российская академия естественных наук
Российский фонд фундаментальных исследований

**ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Материалы VIII Международного научного симпозиума,
посвященного 85-летию со дня рождения
заслуженного деятеля науки и техники РФ
профессора В.Г. Зубчанинова
(Тверь, 9–11 декабря 2015 года)**

Тверь 2015

УДК 539.3 (082)

ББК 22.251я43

Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения профессора В.Г. Зубчанинова (Тверь, 9–11 декабря 2015 года). Тверь: Тверской государственный технический университет, 2015. 296 с.

VIII Международный научный симпозиум «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» проводился в Твери на базе Тверского государственного технического университета с 9 по 11 декабря 2015 года. Симпозиум посвящен 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора Владимира Георгиевича Зубчанинова. Симпозиум проведен при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-20750-г) и Тверского государственного технического университета.

Сборник соответствует авторским оригинал-макетам, поступившим в оргкомитет симпозиума. Фамилии авторов доклада расположены в порядке, указанном самими авторами. Предназначен для специалистов в области прикладной математики, механики деформируемого твердого тела и математического моделирования.

Сборник издается под редакцией И.Г. Горячевой, Н.Ф. Морозова, Р.А. Васина, Д.В. Георгиевского, В.Г. Зубчанинова.

ISBN 978-5-7995-0808-1

© Тверской государственный
технический университет, 2015

**VIII МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ СИМПОЗИУМ
«ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА»,
посвященный 85-летию со дня рождения
профессора В.Г. Зубчанинова**

Тверь, 9 – 11 декабря 2015 года

Сборник включает в себя материалы VIII Международного научного симпозиума «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела», который проводится с 9 по 11 декабря 2015 года в г. Тверь на базе Тверского государственного технического университета. Симпозиум посвящен 85-летию со дня рождения профессора Владимира Георгиевича Зубчанинова.

Программа симпозиума охватывает общие теоретические, экспериментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела.

ОРГАНИЗАТОРЫ СИМПОЗИУМА

- Министерство образования и науки Российской Федерации
- Тверской государственный технический университет
- Российский национальный комитет РАН по теоретической и прикладной механике
- Научный Совет РАН по механике деформируемого твердого тела
- Российская академия естественных наук
- Российский фонд фундаментальных исследований

РАБОЧИЕ ОРГАНЫ СИМПОЗИУМА

1. Организационный комитет симпозиума

Твардовский Андрей Викторович (сопредседатель)

ректор Тверского государственного технического университета (ТвГТУ), д.ф.-м.н., профессор, заслуженный работник высшей школы РФ, Тверь, РОССИЯ

Миронов Вячеслав Александрович (сопредседатель)

президент Тверского государственного технического университета (ТвГТУ), академик РАЕН, д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ, Тверь, РОССИЯ

Зубчанинов Владимир Георгиевич (сопредседатель)

академик РАЕН, заслуженный деятель науки и техники РФ, д.т.н., профессор, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (РНК), Тверской государственный технический университет (ТвГТУ), Тверь, РОССИЯ

Горячева Ирина Георгиевна

академик РАН, профессор, председатель Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике (РНК), зав. лабораторией трибологии Института проблем механики РАН, Москва, РОССИЯ

Климов Дмитрий Михайлович

академик РАН, член президиума РАН, член президиума РНК по теоретической и прикладной механике, руководитель секции механики РАН, Институт проблем механики РАН, Москва, РОССИЯ

Морозов Никита Федорович

академик РАН, вице-председатель РНК по теоретической и прикладной механике, председатель научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, РОССИЯ

Аннин Борис Дмитриевич

академик РАН, член РНК по теоретической и прикладной механике, Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, РОССИЯ

Матвеев Валерий Павлович

академик РАН, член президиума РАН и президиума УрО РАН, член РНК, директор Института механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, РОССИЯ

Рашидов Турсунбай Рашидович

академик АН РУз, член РНК по теоретической и прикладной механике, Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, УЗБЕКИСТАН

Васин Рудольф Алексеевич

академик РАЕН, д.ф.-м.н., профессор, член РНК по теоретической и прикладной механике, Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РОССИЯ

Локощенко Александр Михайлович

академик РАЕН, д.ф.-м.н., профессор, член РНК по теоретической и прикладной механике, заместитель директора НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РОССИЯ

Георгиевский Дмитрий Владимирович

д.ф.-м.н., профессор, член РНК по теоретической и прикладной механике, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РОССИЯ

2. Программный комитет симпозиума

Зубчанинов Владимир Георгиевич (*председатель*)

д.т.н., профессор, ТвГТУ, Тверь, РОССИЯ

Васин Рудольф Алексеевич (*зам. председателя*)

д.ф.-м.н., профессор, Институт механики МГУ, Москва, РОССИЯ

Баженов Валентин Георгиевич

д.ф.-м.н., профессор, НИИ Механики ННГУ, Нижний Новгород, РОССИЯ

Быков Дмитрий Леонидович

д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РОССИЯ

Гаврюшин Сергей Сергеевич

д.т.н., профессор, МГТУ им Н.Э.Баумана, Москва, РОССИЯ

Гудрамович Вадим Сергеевич

член-корр. НАН Украины, Институт технической механики НАНУ и НКАУ, Днепрпетровск, УКРАИНА

Гольдштейн Роберт Вениаминович

член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РОССИЯ

Гордон Владимир Александрович

д.т.н., профессор, ПГУ, Орел, РОССИЯ

Ковалев Владимир Александрович

д.ф.-м.н., профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, Москва, РОССИЯ

Коротких Юрий Георгиевич

д.ф.-м.н., профессор, ОКБМ им. И.И. Африкантова, Нижний Новгород, РОССИЯ

Кудинов Алексей Никифорович

д.ф.-м.н., профессор, ТвГУ, Тверь, РОССИЯ

Кукса Лев Владимирович

д.т.н., профессор, ВГАСА, Волгоград, РОССИЯ

Ломакин Евгений Викторович

член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, РОССИЯ

Малинин Владислав Георгиевич

д.ф.-м.н., профессор, Орловский ГАУ, Орел, РОССИЯ

Маркин Алексей Александрович

д.ф.-м.н., профессор, ТулГУ, Тула, РОССИЯ

Матченко Николай Михайлович

д.ф.-м.н., профессор, ТулГУ, Тула, РОССИЯ

Мельников Борис Евгеньевич

д.т.н., профессор, СПбГПУ, Санкт-Петербург, РОССИЯ

Миронов Борис Гурьевич

д.ф.-м.н., профессор, ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, Чебоксары, РОССИЯ

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович

д.ф.-м.н., профессор, Азербайджанский технический университет, Баку, АЗЕРБАЙДЖАН

Немировский Юрий Владимирович

д.ф.-м.н., профессор, ИТПМ СО РАН, Новосибирск, РОССИЯ

Пальмов Владимир Александрович

д.ф.-м.н., профессор, СПбГПУ, Санкт-Петербург, РОССИЯ

Петров Владилен Васильевич

д.т.н., профессор, СГТУ, Саратов, РОССИЯ

Победря Борис Ефимович

д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, РОССИЯ

Поспелов Игорь Иванович

д.ф.-м.н., профессор, Университет Машиностроения, Москва, РОССИЯ

Радаев Юрий Николаевич

д.ф.-м.н., профессор, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РОССИЯ

Трещев Александр Анатольевич

д.т.н., профессор, ТулГУ, Тула, РОССИЯ

Трусов Петр Валентинович

д.ф.-м.н., профессор, ПНИПУ, Пермь, РОССИЯ

3. Секретариат и технический комитет (ТвГТУ, Тверь, РОССИЯ)

Алексеев Андрей Алексеевич (ответственный секретарь) – к.т.н., доцент

Гулятьев Вадим Иванович (ответственный секретарь) – д.т.н., доцент

Охлопков Николай Леонидович – д.т.н., профессор

Субботин Сергей Львович – д.т.н., профессор

Гараников Валерий Владимирович – д.т.н., профессор

Пашаев Фаяз Аладдинович – к.э.н., проректор по инвестиционному развитию и управлению федеральным имуществом

Алексеева Елена Геннадьевна – к.т.н., доцент

Ведерников Владимир Николаевич – к.т.н., доцент

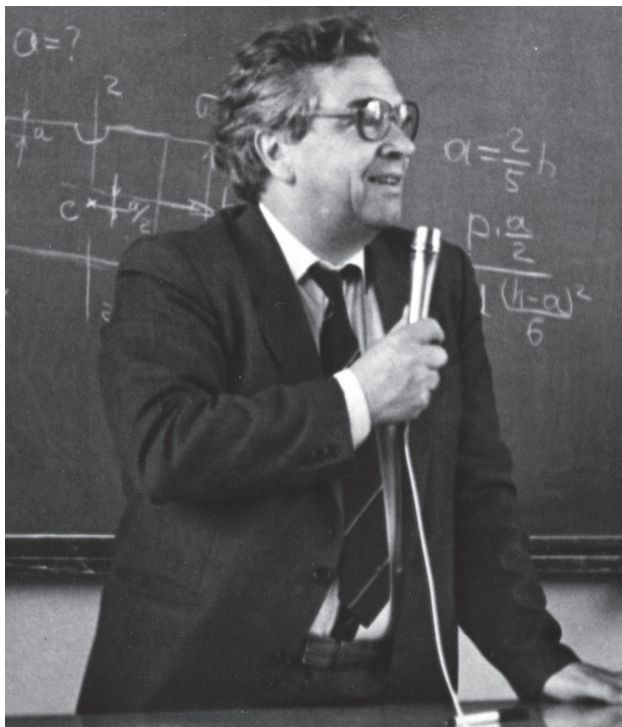
Суворов Виктор Александрович

Мальшев Николай Дмитриевич

Харичева Лариса Анатольевна

Митина Ольга Владимировна

Двужилов Антон Сергеевич



«Роль теории устойчивости и пластичности в механике деформируемого твердого тела безусловно фундаментальна, неисчерпаема и увлекательна для инженерной практики.

С древних времен в механике нашли отражение две элементарные концепции понятия устойчивости. Первая отождествляет понятие устойчивости основного невозмущенного состояния движения или равновесия со свойством возмущенных состояний возвращаться к своему исходному состоянию. Вторая отождествляет понятие устойчивости со свойством возмущенного состояния пребывать в малой ограниченной окрестности невозмущенного состояния».

В. Г. Зубчанинов.

Устойчивость и пластичность. 2008

СПРАВКА о научной и научно-педагогической деятельности профессора В. Г. Зубчанинова

Зубчанинов Владимир Георгиевич (р. 1930) — крупный выдающийся ученый в области механики деформируемого твердого тела и сплошных сред, автор фундаментальных теоретических и экспериментальных исследований в теории пластичности, прочности и устойчивости упругопластических конструкций. В. Г. Зубчанинов — заслуженный деятель науки и техники РФ, член национального комитета Российской Академии наук (РАН) по теоретической и прикладной механике, почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный профессор Тверского государственного технического университета (ТГТУ), доктор технических наук, профессор, академик ряда Российских Академий.

Работает в ТГТУ с 1959 г. С 1973 по 2013 являлся заведующим кафедрой «Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности». С 1975 по 1976 гг. — декан инженерно-строительного факультета ТГТУ, в 1977–87 гг. — ректор ТГТУ, в 1978–87 гг. — председатель Совета ректоров вузов г. Калинина (ныне г. Тверь). С 2014 г. — профессор кафедры.

В. Г. Зубчанинов закончил с отличием физико-математический факультет Ростовского на Дону государственного университета по специальности «Механика» (1954), аспирантуру института механики РАН по специальности «Теория упругости и пластичности» (1958). В 1960 г. защитил в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель член-корр. РАН А. А. Ильюшин), а в 1972 г. — в Московском инженерно-строительном институте диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, которую подготовил на кафедре теории упругости Московского государственного университета под руководством члена-корреспондента АН СССР и РАН, академика Российской Академии ракетных и артиллерийских наук, профессора А. А. Ильюшина.

В. Г. Зубчанинов своими фундаментальными исследованиями в области прочности и пластичности конструкционных материалов, устойчивости конструкций и их элементов внес выдающийся вклад в науку механику деформируемого твердого тела и техническое образование. Созданные им научные концепции, теории и математические модели, экспериментальные методы эффективно используются в различных областях науки и техники, опубликованы в энциклопедии РАН «Машиностроение» (1995), в серии его научных монографий «Устойчивость и пластичность», «Механика процессов пластических сред», изданных издательством «Физматлит» РАН (2007–10) при поддержке РФФИ, а также в известной монографии «Математическая теория пластичности» (2000).

В. Г. Зубчанинов — основатель и руководитель Тверской научной школы в области механики деформируемого твердого тела. В этой области под руководством В. Г. Зубчанинова достигнуты впечатляющие фундаментальные результаты: разработаны общая теория определяющих законов процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов при сложном нагружении, концепция устойчивости упруговязкопластических систем и конструкций, общая теория устойчивости оболочек, пластин и стержневых систем за пределом упругости при сложном нагружении, метод управляемых процессов упругопластического деформирования конструкций с целью повышения их прочности и устойчивости и уменьшения их материалоемкости, совместно с А. А. Ильюшиным разработана теория устойчивости разгружающих упругопластических систем, методы расчета конструкций на прочность и устойчивость в условиях их сложного нагружения, разработан и создан автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ на сложное нагружение материалов в лаборатории механических испытаний кафедры для исследования закономерностей механического поведения конструкционных материалов. Этот комплекс уникален по своим возможностям и полученным новым фундаментальным научным результатам мирового уровня.

В. Г. Зубчанинов является научным руководителем по подготовке магистров по направлению «Теория проектирования зданий и сооружений» в строительстве, аспирантов и докторантов по специальности «Механика деформируемого твердого тела».

В. Г. Зубчаниновым написаны для студентов и аспирантов такие известные в стране учебники и учебные пособия как «Основы теории упругости и пластичности» (М.: Высшая школа, 1990), «Устойчивость» (1995), «Механика сплошных деформируемых сред» (2000), «Сопrotивление материалов» (2005) и др. Им опубликовано более 300 научных трудов, в т.ч. — 8 научных монографий, 2 учебника и множество пособий. Под его научной редакцией вышло более 30 сборников научных трудов.

Профессор В. Г. Зубчанинов организовал и провел в Твери на базе ТГТУ 8 Всесоюзных и Международных симпозиумов по прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела (1981, 1986, 1992, 1997, 2000, 2005, 2010, 2015) многие республиканские межвузовские научные семинары, которые сыграли большую роль в развитии этих направлений в нашей стране.

С 1997 г. на кафедре СМТУиП ТГТУ под руководством В. Г. Зубчанинова ежегодно проводится межвузовский научный семинар «Тверские научные чтения в механике деформируемого твердого тела» для аспирантов и молодых ученых, который играет большую роль в подготовке кадров высшей квалификации (кандидатов и докторов наук) для ТГТУ и Верхневолжского региона. За свою многолетнюю научно-педагогическую деятельность профессор В. Г. Зубчанинов подготовил более 50 докторов и кандидатов наук. С 1982 г. он председатель кандидатского, а затем докторского диссертационных Советов по аттестации и присуждению ученых степеней при ТГТУ по специальностям 01.02.04 и 05.02.04 (технические науки). За это время диссертационный Совет присудил ученые степени кандидата и доктора наук многим десяткам сотрудников ТГТУ и других вузов и НИИ страны и региона. За большие заслуги в работе по аттестации научных и научно-педагогических кадров президиум ВАК России наградил В. Г. Зубчанинова своей почетной грамотой в 1996 году.

Профессор В. Г. Зубчанинов ведет активную общественную научно-педагогическую деятельность. Он является членом Российского национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, членом научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, председателем докторского диссертационного Совета при ТГТУ по специальностям 01.02.04, 05.02.04, президентом тверского отделения АПК РФ, долгое время (1982–2007) был членом экспертного Совета по машиностроению и курировал специальности 01.02.04 и 01.02.06. Высшей аттестационной комиссии (ВАК) Министерства науки и образования РФ по аттестации научных кадров, он избран действительным членом ряда общественных академий, таких как «Академия проблем качества РФ», «Петровская (Санкт-Петербургская) Академия наук и искусств», «Верхневолжская инженерная Академия», «Российская Академия естественных наук» (РАЕН). Он является членом НТС университета и ученого Совета ИСФ ТГТУ, членом ряда редколлегий, рецензируемых ВАК РФ научных журналов («Проблемы прочности и пластичности» при институте механики Нижегородского государственного университета, «Вестник Чебоксарского государственного университета. Механика предельных состояний» и др.). В различные годы он был членом научного Совета АН СССР и РАН по проблеме прочности и пластичности, членом научно-методического Совета по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности, строительной механики научно-методического Совета Минвуза СССР, членом НТС Госстандарта СССР, заместителем председателя секции математики, механики и астрономии НТС Минвуза СССР, членом экспертного Совета по механике Госкомвуза СССР, членом ВАК СССР и РФ более 25 лет и др. Профессор В. Г. Зубчанинов — заслуженный деятель науки и техники РФ, награжден орденом «Знак почета» (1981) за подготовку высококвалифицированных инженерных и научно-педагогических кадров, знаком Минвуза СССР «За отличные успехи в работе» (1982), знаком Минвуза РФ «Почетный работник высшего профобразования РФ» (2000), медалью академика М. Келдыша за заслуги перед отечественной космонавтикой» (2005), медалью АН СССР за развитие фундаментальных и прикладных наук (1990), почетным знаком губернатора Тверской области «Крест святого Михаила Тверского» (2000), серебряной медалью Российского общества инженеров строительства «За особые заслуги в строительстве в Тверской области» (2001), медалью «Ветеран труда» (1990), почетным знаком РАЕН «За заслуги в развитии науки и экономики России» (2005), почетными грамотами Минвуза РФ, ВАК Минвуза РФ, отраслевых Министерств, губернатора Тверской области, мэра г. Твери, ректора ТГТУ и др.

«Тензорно-векторный анализ имеет дело с объектами, не зависящими от координатной системы, и поэтому является идеальным для изучения инвариантности законов природы в механике сплошных сред и теории пластичности».

В. Г. Зубчанинов.

Механика процессов пластических сред. 2010.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ОБЩИЙ ПОСТУЛАТ ИЗОТРОПИИ А.А. ИЛЬЮШИНА

В.Г. Зубчанинов

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, vlgzub@gmail.com

Аннотация. Представлены результаты исследований по развитию общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина при сложном нагружении, получившей широкое признание в мировой науке в области механики сплошных сред.

Ключевые слова: теория упругости, теория пластичности, теория процессов деформирования, постулат изотропии, устойчивость.

1. Введение

Основы общей математической теории пластичности при сложном нагружении были разработаны и созданы выдающимся ученым-механиком России А.А. Ильюшиным [1–7]. Его теория малых упругоэластических деформаций (ТМУЭД) при простых нагружениях явилась естественным обобщением теории упругости Коши, теории течения Сен-Венана–Мизеса и деформационной теории течения Генки и др. в области теории пластичности упрочняющихся сред. Его теория пластичности для процессов простого нагружения и теория пластичности для процессов, близких к простому нагружению, представляет сегодня общую теорию пластичности для классов простого и близкого к простому нагружениям. В этих теориях А.А. Ильюшин ввел понятия простого и сложного нагружений, выделил закон природы об упругом изменении объема, закон единой универсальной кривой упругоэластического упрочнения материалов Роша и Эйхингера для начально изотропных сред, обобщил закон Одквиста для пластических сред на упрочняющиеся среды для процессов, близких к простым. Он ввел понятие о направляющих тензорах формоизменения сред и материалов, отметил, что связь между напряжениями и деформациями в теории пластичности должна описываться тензорным уравнением, а свойства материалов в этих уравнениях подразделяться на векторные и скалярные. Он поставил в соответствие тензорам и девиаторам напряжений и деформаций в линейном координатном евклидовом шестимерном и пятимерном пространствах векторы для наглядного геометрического отображения их самих и процессов, которые они описывают во времени с помощью аналитических и неаналитических траекторий. Ввел понятия образов процессов деформирования и нагружения в линейных тензорных пространствах и сформулировал общий закон связи между напряжениями и деформациями, который назвал *постулатом изотропии*. Как следствие постулата А.А. Ильюшин описал неаналитические типовые процессы с угловой точкой излома, которые имеют место в задачах устойчивости оболочек пластин и стержней. Его гипотеза компланарности была использована автором для построения общей теории устойчивости оболочек и пластин при сложном нагружении за пределом упругости. Разработка А.А. Ильюшиным основ общей математической теории пластичности в 50–90 годы явилась в теории пластичности революционным прорывом в ее развитии мирового уровня. По признанию самого автора, его идеи в развитии теории пластичности явились его основным вкладом в механику. Он писал: «Я теоретик, но всю жизнь занимался экспериментами». Это объясняет удивительную интуицию и успех А.А. Ильюшина в решении возникающих в науке механике проблем, в т.ч. оборонного значения. При этом он всегда обращал внимание на пределы применимости и достоверность своих теорий. Он внес в теорию пластичности идею инвариантности тензорно-векторного подхода при установлении связи между напряжениями и деформациями при сложном нагружении, которая не зависит от координатной системы и ее ортогональных преобразований. Тем самым А.А. Ильюшин определил новое направление в развитии механики сплошной среды — *теорию упругоэластических процессов*. Признание значимости вклада А.А. Ильюшина в развитие науки механики нашло свое выражение в присуждении ему Государственной сталинской премии 1-ой степени за цикл работ по пластичности и устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости в 1948 г., присуждении ему медали АН СССР «Автор научного открытия»

имени академика П. Л. Капицы за фундаментальный вклад в теорию пластичности по созданию теории упругопластических процессов и его постулат изотропии, присуждении ему премии имени М.В. Ломоносова 1-ой степени МГУ за цикл работ «Теория упругопластических процессов: экспериментально-теоретические исследования» в 1995 г., которую получил вместе со своими учениками В.С. Ленским и Р.А. Васиным, и многое другое.

2. Векторные и скалярные свойства материалов

Напряженно-деформированное состояние (НДС) и процессы нагружения и деформирования материалов в каждой частице тела x_k ($k = 1, 2, 3$) в физическом пространстве характеризуются заданием шести компонент σ_{ij} , ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензоров напряжений и деформаций как функций времени t . А.А. Ильюшин был первым, кто представил эти тензоры в виде [6, 7]

$$(\sigma_{ij}) = \sigma_0 (\delta_{ij}) + \sigma (S_{ij}^*), \quad (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0 (\delta_{ij}) + \mathcal{E} (\mathcal{E}_{ij}^*) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера, $S_{ij} = \sigma S_{ij}^*$, $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E} \mathcal{E}_{ij}^*$ — компоненты девиаторов; S_{ij}^* , \mathcal{E}_{ij}^* — компоненты их направляющих тензоров,

$$\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3; \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} \quad (2)$$

— модули шаровых тензоров и девиаторов соответственно.

Компоненты направляющих тензоров связаны соотношениями

$$S_{ii}^* = 0, \quad S_{ij}^* S_{ij}^* = 1; \quad \mathcal{E}_{ii}^* = 0, \quad \mathcal{E}_{ij}^* \mathcal{E}_{ij}^* = 1, \quad (3)$$

где каждый из них определяется четырьмя независимыми величинами, которые определяют три главных направления тензоров (три угла Эйлера) и параметры вида НДС формоизменения

$$\xi = \cos 3\varphi = 3\sqrt{6} |S_{ij}^*|, \quad \eta = \cos 3\psi = 3\sqrt{6} |\mathcal{E}_{ij}^*|, \quad (4)$$

φ , ψ — углы вида НДС формоизменения. При упругом изменении объема условием активности процессов упругопластического деформирования и нагружения являются положительность элементарных работ $dA = S_{ij} d\mathcal{E}_{ij}$, $dB = \mathcal{E}_{ij} dS_{ij}$, а пассивности процессов — $dA < 0$, $dB < 0$.

При повороте координатных осей x_k ($k = 1, 2, 3$) компоненты тензоров преобразуются согласно выражениям

$$\begin{aligned} \sigma'_{mn} &= \sigma_{ij} l_{im} l_{jn}, & \varepsilon'_{mn} &= \varepsilon_{ij} l_{im} l_{jn} \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3), \\ \sigma'_{mn} &= \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij} l_{im} l_{jn}, & \varepsilon'_{mn} &= \varepsilon_0 \delta_{ij} + \mathcal{E}_{ij} l_{im} l_{jn}, \end{aligned} \quad (5)$$

где (l_{ij}) — матрица преобразования осей x_k и координатных ортов \hat{e}_k ($k = 1, 2, 3$). Эти преобразования определяют тензоры как инвариантные величины, не зависящие от положения координатных осей. При этом вращении остаются неизменными инварианты тензоров [8–13]

$$\begin{cases} \sigma_0, & S = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}}, & I_3^\sigma = |\sigma_{ij}| = |S_{ij}| + \sigma_0^3 - \frac{1}{2} \sigma_0 \sigma^2, \\ \varepsilon_0, & \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}, & I_3^\varepsilon = |\varepsilon_{ij}| = |\mathcal{E}_{ij}| + \varepsilon_0^3 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathcal{E}^2, \end{cases}$$

где

$$S = \sqrt{\sigma^2 + 3\sigma_0^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{\mathcal{E}^2 + 3\varepsilon_0^2}.$$

В дальнейшем будем иметь в виду, что при этом вращении остаются неизменными σ_0 , σ , ξ и ε_0 , \mathcal{E} , η .

Поскольку полный вектор на октаэдрической площадке имеет с проекцией на эту площадку некоторый угол θ , то полезно, кроме угла вида напряженного состояния формоизменения φ , ввести угол влияния вида напряженного состояния всестороннего растяжения–сжатия по формуле

$$\sin \theta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_{окт}^2}} = \frac{\sqrt{3}\sigma_0}{\sqrt{3\sigma_0^2 + \sigma^2}}.$$

При $\sigma_0 = 0$ получаем $\theta = 0$ и третий инвариант $I_3^\sigma = J_3^\sigma = |S_{ij}|$. Компоненты главных нормальных σ_k , $s_k = \sigma_k - \sigma_0$ и касательных T_{ij} напряжений определяются формулами

$$\begin{cases} s_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sqrt{2/3} \cos \varphi, \\ s_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \sqrt{2/3} \cos(2\pi/3 - \varphi), \\ s_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \sqrt{2/3} \cos(2\pi/3 + \varphi), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \sigma \sin(2\pi/3 + \varphi)/\sqrt{2}, \\ T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2 = \sigma \sin \varphi/\sqrt{2}, \\ T_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sigma \sin(2\pi/3 - \varphi)/\sqrt{2}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_{окт} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \quad (8)$$

$\tau_{окт}$ — октаэдрическое касательное напряжение [14].

Появление пластических деформаций обычно связывают или с критерием Треска–Сен-Венана

$$T_{\max} = T_{mn} = (\sigma_m - \sigma_n)/2 = \pm k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3), \quad (9)$$

или с критерием Мизеса [1–9]

$$T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2 = 2k^2, \quad (10)$$

где k — предельное напряжение в общем случае сдвига. Л. Надаи [14] дал физически ясное и геометрически наглядное объяснение критерию (10), введя в теорию НДС понятие октаэдрических касательных напряжений. Он представил критерий Мизеса (10) в виде

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_{окт} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2} = \sigma^T, \quad (11)$$

Где $\sigma^T = \sqrt{2/3}(2k)$. При растяжении с пределом текучести σ_T ($\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) из (9) и (11) соответственно получаем два значения предельного напряжения

$$k = \sigma_T/2, \quad k = \sigma_T/\sqrt{3} = k_0. \quad (12)$$

Данное противоречие можно объяснить только тем, что предельные напряжения k зависят от вида пространственного либо плоского чистого сдвига. В дальнейшем мы будем обозначать предельные напряжения при плоском чистом сдвиге как $k = k_0 = \sigma_T/\sqrt{3}$, а при пространственном чистом сдвиге $k = \sigma_T/2$. Хилл Р. [15] считал, что в опытах Треска распределение касательных напряжений при пластическом деформировании было далеко от равномерного и поэтому его критерий $T_{\max} = k$ был достаточно грубым. Это мнение Хилла, а также введение понятия о полной и неполной пластичности Хааром и Карманом убеждает нас, что анизотропный критерий Треска–Сен-Венана зависит от вида напряженного состояния сдвига. Поэтому для начально изотропных тел для предельного упругого состояния в теории процессов используется критерий Мизеса–Надаи [14–16]. Хаар и Карман ввели в теорию пластичности фундаментальное понятие о полной и неполной пластичности [16]. При полной пластичности два из T_{ij} достигают своего максимального значения T_{\max} , а третье равно нулю.

При неполной пластичности только одно из T_{ij} достигает T_{\max} . Они представили условие (9) в виде

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \quad (13)$$

Если заменить T_{ij} их выражениями (7), то получим [8–12]

$$\sin^2 3\varphi \sigma^6 - 18k^2 \sigma^4 + 96k^4 \sigma^2 - 128k^6 = 0. \quad (14)$$

Мы назовем сложное напряженное состояние сдвига $\sigma_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$) *чистым пространственным сдвигом*, если все $|\sigma_{ij}| = \tau$. В этом состоянии имеем

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \pm\tau; \sigma_1 = \pm 2\tau, \sigma_2 = \sigma_3 = \mp\tau; \\ \quad T_{\max} = \pm T_{12} = \pm T_{13} = 3\tau/2, T_{23} = 0; \varphi = 0^\circ, 180^\circ; \\ 2. \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \pm\tau, \sigma_{13} = \mp\tau; \sigma_1 = \sigma_2 = \pm\tau, \sigma_3 = \mp 2\tau; \\ \quad T_{\max} = \pm T_{13} = \pm T_{23} = 3\tau/2, T_{12} = 0; \varphi = 60^\circ, 240^\circ; \\ 3. \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \mp\tau, \sigma_{23} = \pm\tau; \sigma_1 = \sigma_3 = \mp\tau, \sigma_2 = \pm 2\tau; \\ \quad T_{\max} = \pm T_{21} = \pm T_{23} = 3\tau/2, T_{13} = 0; \varphi = 120^\circ, 300^\circ. \end{array} \right\} \quad (15)$$

В отмеченных напряженных состояниях пространственного чистого сдвига (15), согласно критериям пластичности (9), (11) при достижении касательным напряжением предельного значения $\tau = k_*$, получаем

$$T_{\max} = 3k_*/2 = k, \quad \sigma = \sqrt{6}k_* = \sqrt{8/3}k = \sigma^T, \quad (16)$$

откуда следуют зависимости $k = \sigma_T/2$, $k_* = \sigma_T/3$. Соотношения (15) отвечают состояниям полной пластичности. В этом состоянии из (14) следует $\sin^2 3\varphi = 0$ и $\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$. Направления лучей, определяемые этими углами в пересечении с окружностью Мизеса выделяют шесть особых точек полной пластичности, для которых параметр $\xi = \cos 3\varphi = \pm 1$. Во всех других направлениях φ реализуются состояния неполной пластичности при пересечении окружности Мизеса. Если принять $\sigma = \sqrt{2}k_0$ ($k = k_0$), то из уравнения (14) получим $\sin^2 3\varphi = 1$ и $\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$. При этом в этих направлениях параметр $\xi = \cos 3\varphi = 0$. Точки при пересечении лучами в этих направлениях окружности Мизеса дают особые точки неполной пластичности. В этих точках, с другой стороны, $\sigma = \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$ и поэтому $\sigma = \sqrt{2}k_0 = \sqrt{2/3}\sigma_T$, откуда $k_0 = \sigma_T/\sqrt{3}$. Лучи, определяемые углами φ для состояний полной пластичности, выделяют на девиаторной плоскости шесть секторов с раствором в 60° . В каждом из этих шести секторов выражения (7) для T_{ij} различны и зависят от угла φ . Различны в каждом из секторов выражения для T_{\max} и параметры μ Лоде. Однако, закономерность их изменения фактически одинакова и может быть выражена формулами

$$T_{\max} = \sigma \sin \omega / \sqrt{2}, \quad \mu = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \omega \quad (60^\circ \leq \omega \leq 120^\circ). \quad (17)$$

В каждом из секторов параметры μ и $\xi = \cos 3\varphi$ изменяются в пределах $(-1 \leq \mu \leq 1)$ и $(1 \geq \xi \geq -1)$. Как видно, T_{\max} переменна в пределах каждого сектора и поэтому критерий Треска–Сен-Венана не может быть точным подобно критерию Мизеса $\sigma = \sigma^T$. В точках полной пластичности ($\omega = 60^\circ, 120^\circ$) получаем $\sin \omega = \sqrt{3}/2$ и $T_{\max} = k$. В особых точках неполной пластичности ($\omega = 90^\circ$) имеем $\sin \omega = 1$ и $T_{\max} = k_0 = 2k/\sqrt{3} = 1,155k$. Если приближенно принять, согласно критерию Треска, $T_{\max} = k$ в (17), то получим, соответственно

$$\sigma = \sqrt{2}k/\sin \omega, \quad \sigma = \sqrt{2}k_0/\sin \omega,$$

что соответствует закономерностям каждой из сторон шестиугольников критерия Треска–Сен-Венана вписанного и описанного около окружности Мизеса. Все остальные точки неполной пластичности лежат на окружности Мизеса между особыми точками [8].

Главные напряжения девиатора S_k ($k = 1, 2, 3$) можно представить в виде разложений

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos \varphi, & S_2 = -\frac{S_1}{2} + T_{23}, & S_3 = -\frac{S_1}{2} - T_{23}, \\ S_1 = -\frac{S_2}{2} + T_{13}, & S_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right), & S_3 = -\frac{S_2}{2} - T_{13}, \\ S_1 = -\frac{S_3}{2} + T_{12}, & S_2 = -\frac{S_3}{2} - T_{12}, & S_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right). \end{cases}$$

В состоянии полной пластичности одно из главных касательных напряжений $T_{ij} = 0$. В этом случае при простом нагружении имеют место законы теории ТМУПД

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = 2G_p \mathcal{E}_{ij}, \quad \sigma = \Phi(\mathcal{E}),$$

где $2G_p = \sigma/\mathcal{E}$ — удвоенный пластический модуль сдвига, $\theta = 3\varepsilon_0$ — объемная деформация.

Если одно из главных значений нормальных напряжений девиатора $S_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$), то получаем особые состояния неполной пластичности в условиях плоского чистого сдвига. В общем случае состояний неполной пластичности при простом нагружении имеет место обобщенная модель этого состояния Хаара и Кармана [8]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad T_{13} = G_p \Gamma_{13}, \quad \sigma_2 = \lambda\theta + 2G\varepsilon_2,$$

причем соотношения эти можно записать также в виде

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + G_p \Gamma_{13}, & \sigma_2 = \lambda\theta + 2G\varepsilon_2, \\ \sigma_3 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - G_p \Gamma_{13}, \end{cases}$$

либо — в виде

$$T_{12} = \frac{1}{2}G_p \Gamma_{13} - \frac{3}{2}G\mathcal{E}_2, \quad T_{23} = \frac{1}{2}G_p \Gamma_{13} + \frac{3}{2}G\mathcal{E}_2, \quad T_{13} = G_p \Gamma_{13},$$

где ε_k ($k = 1, 2, 3$) — главные удлинения, $\Gamma_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ — главные сдвиги. Из приведенных соотношений следует, что в одном из направлений материал следует закону Гука, а в другом — испытывает неполное пластическое деформирование. Как видно, полное необратимое пластическое деформирование реализуется только на одной площадке, а на двух других имеет место неполное пластическое необратимое деформирование. Таким образом, необратимое пластическое деформирование имеет место на всех площадках. Этот результат подтвержден экспериментально [8]. Таким образом, в состоянии неполной пластичности разделение деформаций на упругую и пластическую, строго говоря, невозможно. Тем более это невозможно при произвольном сложном нагружении и деформировании. Разделение деформаций ε_{ij} на упругую ε_{ij}^e и пластическую ε_{ij}^p части возможно и наглядно только при простом нагружении и последующей простой разгрузке. При сложной разгрузке с образованием нырков на диаграммах σ – S реализуется обобщенный принцип Баушингера.

3. Постулат изотропии А. А. Ильюшина

Центральное место в теории упругопластических процессов занимает постулат изотропии, в котором для начально изотропной среды принимается критерий пластичности Мизеса–Надаи, определяющий ее переход из упругого состояния в пластическое. Идея представления связи между напряжениями и деформациями для произвольных процессов при сложном НДС в виде одного тензорного уравнения принадлежит В. Прагеру и А. А. Ильюшину [4, 16]. Тензоры σ_{ij} и ε_{ij} являются физическими и геометрическими объектами, инвариантными в целом при преобразовании координатных осей x_k ($k = 1, 2, 3$). Идея их инвариантности является стержневой при тензорном анализе НДС. А. А. Ильюшин представил в 1947 г. связь между σ_{ij} и ε_{ij} с учетом их природного упругого изменения объема в виде [4]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = L(\mathcal{E}_{ij}) = A_k \frac{d^k \mathcal{E}_{ij}}{ds^k} \quad (k = 0, 1, \dots, 4; 1, 2, \dots, 5), \quad (19)$$

где $(d^k \mathcal{E}_{ij} / ds^k)$ — линейно независимый тензорный девиаторный базис, K — упругий объемный модуль. Уравнения (19) ковариантны относительно поворота координатных осей x_k в физическом пространстве при сохранении всех основных инвариантов σ_0 , σ , $J_3^\sigma = |S_{ij}^\sigma|$ и ε_0 , \mathcal{E} , $J_3^\varepsilon = |\mathcal{E}_{ij}|$ для каждого из тензоров, а также температуры T и других нетермомеханических параметров β как функций параметра $s(t)$ прослеживания процесса во времени. При простом процессе нагружения направляющие тензоры $(S_{ij}^*) = (\mathcal{E}_{ij}^*)$, что приводит к соотношениям теории ТМУПД [1–5]

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \sigma = \Phi(\mathcal{E}), \quad (20)$$

где $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$ — экспериментально устанавливаемый закон при простом нагружении Роша и Эйхингера для упрочняющихся материалов [4, 16]. Для идеальных упругопластических материалов ($\sigma = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$) из (20) следуют законы деформационной теории течения Генки. Соотношения (20) являются частным случаем (19). Проблема связи между σ_{ij} и ε_{ij} сведена в (20) к определению только скалярных свойств материалов. При простейшем сложном нагружении для процессов, близких к простому нагружению, $(S_{ij}^*) \neq (\mathcal{E}_{ij}^*)$. А. А. Ильюшин для упрочняющихся сред предложил законы

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \sigma \frac{d\mathcal{E}_{ij}}{ds} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \sigma = \Phi(s) \approx \Phi(\mathcal{E}), \quad (21)$$

где $\sigma = \Phi(s)$ — универсальная функция упрочнения материалов Одквиста–Ильюшина [4, 8]. Уравнения (21) являются обобщением теории течения Сен-Венана–Мизеса для идеальных пластических сред при $\sigma = \sigma^T$ и содержат только один параметр сложного нагружения $s(t)$, который не отражает историю этого сложного нагружения. Соотношения (20), (21) можно рассматривать как обобщенную теорию пластичности для сложных процессов, близких к простому нагружению. Определяющие соотношения (19) были позднее в 1954 г. названы А.А. Ильюшиным *тензорной формой постулата изотропии* [4, 6, 8]. В этой форме постулат (19) не имеет должной геометрической наглядности и поэтому А. А. Ильюшин сделал следующий весьма важный шаг в развитии общей математической теории пластичности. Он привлек для решения данной проблемы аппарат линейной алгебры многомерных координатных евклидовых пространств [2, 4, 5, 17–19].

Впервые идею представления тензора напряжений в виде вектора напряжений в трехмерном пространстве главных касательных напряжений T_{ij} использовал Мизес в 1913 г. для геометрического изображения своего критерия пластичности (10) на основе критерия Треска (9) [16]. Хейг в 1920 г. [8, 31] представил тензор напряжений в пространстве главных нормальных напряжений σ_k ($k = 1, 2, 3$). Он поставил тензору напряжений в соответствие вектор напряжений

$$\bar{S} = \sigma_1 \hat{e}_1 + \sigma_2 \hat{e}_2 + \sigma_3 \hat{e}_3 \quad (k = 1, 2, 3), \quad S = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

Так как главные значения девиатора напряжений $s_k = \sigma_k - \sigma_0$, то полный вектор напряжений

$$\bar{S} = \bar{S}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{S}_0 = \sqrt{3} \hat{e}_0, \quad \bar{\sigma} = S_1 \hat{e}_1 + S_2 \hat{e}_2 + S_3 \hat{e}_3,$$

где $\{\hat{e}_k\}$ — ортонормированный координатный базис, а $\hat{e}_0 = \hat{i}_0 = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) / \sqrt{3}$ — единичный вектор, направленный по оси, равнонаклоненной к координатным осям. Если этот базис повернуть относительно начала координат так, чтобы вектор \hat{e}_1 оказался направленным по гидростатической оси вдоль вектора $\hat{e}_0 = \hat{i}_0$, то две другие оси будут лежать в девиаторной D -плоскости, ортогональной \hat{i}_0 . Обозначим их новое положение \hat{i}_1 , \hat{i}_2 . Тройка ортонормированных векторов $\{\hat{i}_0, \hat{i}_1, \hat{i}_2\}$ образуют новый координатный базис в пространстве главных нормальных напряжений, который назовем базисом А.А. Ильюшина

$$\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \quad \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\hat{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}(\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3) \right], \quad \hat{i}_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{2}}.$$

В этом базисе полный вектор напряжений имеет вид

$$\bar{S} = S_k \hat{i}_k = \bar{S}_0 + \bar{\sigma} = S_0 \hat{i}_0 + S_1 \hat{i}_1 + S_2 \hat{i}_2,$$

где координаты вектора S_k ($k = 0, 1, 2$) связаны с компонентами тензора-девиатора преобразованиями

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_1 - \sigma_0) = \sigma_0 \cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}(T_{12} + T_{13}), \\ S_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}} = \sigma \sin \varphi = \sqrt{2}T_{23}. \end{cases}$$

Вектор $\bar{\sigma}$ девиаторных напряжений формоизменения лежит в D -плоскости. В этой плоскости его конец описывает кривую, которая является направляющей цилиндрической поверхности. Если $\sigma = \sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, где σ_T — предел текучести при растяжении, то эта поверхность представляет собой *круговой цилиндр радиуса $R = \sigma^T$ Мизеса–Надаи*. Критерий Треска–Сен-Венана представляет собой геометрически вписанную в этот цилиндр шестигранную призму. На девиаторной D -плоскости их следом является окружность Мизеса–Надаи и вписанный в нее правильный шестиугольник Треска–Сен-Венана для пространственного НДС. Аналогичный внешний шестиугольник, в который вписана окружность Мизеса–Надаи, соответствует критерию Треска–Сен-Венана для плоских НДС. Лучи, проведенные из начала координат, делят D -плоскость на шесть секторов и определяют направления процессов простого нагружения в условиях полной пластичности материалов. Им соответствует универсальная диаграмма деформирования Роша–Эйхингера $\sigma = \Phi(\varepsilon)$. В состояниях неполной пластичности при простых нагружениях в D -плоскости отмеченный выше закон сохраняется, что подтверждают экспериментальные исследования [8].

Впервые идею представления тензоров напряжений и деформаций в виде векторов в линейном многомерном девятимерном пространстве предложил В. Прагер. Он использовал эту идею для анализа деформирования идеального упругопластического материала по плоским двузвенным ломаным траекториям на основе теории течения Прандтля–Рейсса [16]. В общем случае НДС А.А. Ильюшин использовал векторное представление симметричных тензоров напряжений и деформаций в шестимерных E_6 и пятимерных E_5 пространствах и ввел понятия траекторий деформирования, нагружения и образов процессов [1–7]. Он поставил в соответствие тензорам (σ_{ij}) , (ε_{ij}) в совмещенном пространстве E_6 при его разложении на одномерное инвариантное подпространство E_0 и пятимерное девиаторное подпространство E_5 векторы в виде

$$\bar{S} = \bar{S}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\Theta}, \quad (22)$$

где их составляющие в ортонормированном базисе $\{\hat{i}_k\}$

$$\bar{S}_0 = S_0 \hat{i}_0, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \hat{i}_0; \quad \bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k=1, 2, \dots, 5). \quad (23)$$

Координаты векторов связаны взаимно однозначными преобразованиями [1–7]

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(\beta_0 + \frac{\pi}{6} \right) \varepsilon_{11} - \sin \beta_0 \varepsilon_{22} \right], & S_2 = \sqrt{2} \left[\sin \left(\beta_0 + \frac{\pi}{6} \right) \varepsilon_{11} + \cos \beta_0 \varepsilon_{22} \right], \\ S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \end{cases}$$

или, при $\beta_0 = 0$

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \sqrt{2} \left(\frac{S_{11}}{2} + S_{22} \right) = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}. \end{cases} \quad (24)$$

Аналогичные преобразования имеют место для $\bar{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_{ij}$. Пятимерное пространство E_5 векторов $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k$ ($k = 1, 2, \dots, 5$), как следует из преобразования (24), есть пространство девиаторов, у которых первые инварианты отсутствуют и отличны от нуля только инварианты $\sigma, J_3^\sigma = |S_{ij}|$ и $\mathcal{E}, J_3^\mathcal{E} = |\mathcal{E}_{ij}|$. Концы векторов описывают в E_5 траектории деформирования $\bar{\mathcal{E}}(s)$ и нагружения $\bar{\sigma}(\Sigma)$ с длинами дуг s и Σ . Траектория $\mathcal{E}(s)$ в E_5 при базисе $\{\hat{i}_k\}$ с построенными векторами $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$ в каждой точке и приписанными к ним скалярными параметрами ε_0, T и др. носят название *Э-образа процесса деформирования*. Аналогично вводится *S-образ процесса нагружения*. Единичные векторы $\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{E}}$ эквивалентны направляющим тензорам $(S_{ij}^*), (\mathcal{E}_{ij}^*)$, а касательные векторы в каждой точке $\hat{p}_1 = d\bar{\mathcal{E}}/ds, \hat{q}_1 = d\bar{\sigma}/d\Sigma$ эквивалентны направляющим тензорам скоростей деформаций и напряжений. В каждой точке траектории $\bar{\mathcal{E}}(s)$ в E_5 можно построить косоугольный базис из совокупности векторов $(d^k \bar{\mathcal{E}}/ds^k)$ и на его основе — ортонормированный естественный базис $\{\hat{p}_k\}$ Френе–Ильюшина, орты которого удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -\varkappa_{k-1} \hat{p}_{k-1} + \varkappa_k \hat{p}_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, 5; \varkappa_0 = \varkappa_5 = 0), \quad (25)$$

где \varkappa_m ($m = 1, 2, 3, 4$) — внутренние геометрические параметры кривизны и кручения, характеризующие сложную деформацию и нагружение. В отмеченных выше реперах векторы $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$ могут быть представлены в виде разложений

$$\bar{\sigma} = A_k \frac{d^k \bar{\mathcal{E}}}{ds^k}, \quad d\bar{\sigma} = A_k^* \frac{d^k \bar{\mathcal{E}}}{ds^k} \quad (k=0, 1, \dots, 4; 1, 2, \dots, 5), \quad (26)$$

$$\begin{cases} \sigma = P_k \hat{p}_k, & d\bar{\sigma}/ds = P_k^* \hat{p}_k \quad (k=1, 2, \dots, 5), \\ \hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma = \cos \beta_k \hat{p}_k, & P_k = \sigma \cos \beta_k, \end{cases} \quad (27)$$

где коэффициенты A_k, A_k^*, P_k, P_k^* являются функционалами процесса от s, \varkappa_m, T и др. параметров, координатный угол β_k в репере $\{\hat{p}_k\}$ характеризует векторные свойства материала, для которого можно получить дифференциальное уравнение [8–10]

$$\frac{d(\cos \beta_k)}{ds} + \varkappa_{k-1} \cos \beta_{k-1} - \varkappa_k \cos \beta_{k+1} = \frac{1}{\sigma} \left[P_k^* - \frac{d\sigma}{ds} \cos \beta_k \right]. \quad (28)$$

Выраженный в форме (26)–(28) постулат изотропии был сформулирован в виде: *определяющие соотношения для начально изотропных сред инвариантны относительно ортогональных преобразований образа процесса в E_5* [2, 4, 5]. Если тензорная форма (19) постулата изотропии ни у кого не вызвала сомнений, поскольку она инвариантна при ортогональных преобразованиях поворота координатных осей с сохранением неизменными всех трех независимых инвариантов тензоров напряжений и деформаций, то приведенная выше формулировка постулата в векторной форме вызвала бурную дискуссию 1961–62 гг. со стороны сторонников теории течения по новому развитию теории пластичности [20–25]. Дело в том, что тензор деформации в физическом пространстве имеет три независимых инварианта, а вектор деформации $\bar{\mathcal{E}}$ в E_5 , согласно постулату, только один — длину вектора \mathcal{E} , т.е. модуль девиатора. Однако, в E_5 вектор $\bar{\mathcal{E}}$ должен иметь пять инвариантов и, как утверждается в [23], они не должны зависеть ни от первого ε_0 , ни от третьего $J_3^\mathcal{E} = |\mathcal{E}_{ij}|$ инвариантов тензора деформации. Это утверждение не было доказано в [22]. На это А.А. Ильюшин отметил в [2], что большой класс задач с траекториями, которые не совпадают с трехпараметрическими вращениями в E_5 , дает для каждой такой траектории с одинаковой внутренней геометрией различные физические процессы, которые *зависят* от третьего инварианта, т.е. вида НДС. Он также отметил, что «многочисленные опыты наших и зарубежных ученых с изотропными в исходном состоянии материалами при нормальных и высоких температурах, малых и больших

временах показывают, что влияние третьего инварианта является слабым и это согласуется с ТМУПД. Поэтому в распространенных формулировках постулата изотропии мы принимаем, что от третьих инвариантов тензоров коэффициенты A_n в (26), (27)... не зависят. Это значит, что пятимерные пространства E_5 напряжений и деформаций инвариантны...» [22]. В прекрасном учебнике-монографии «Механика сплошной среды» [5] А.А. Ильюшин дал окончательную формулировку общего постулата изотропии: *выраженный в виде формул*

$$\bar{S} = P_n \hat{P}_n, \quad P_n = P_n \{s, \mathfrak{a}_m, \varepsilon_0, J_3^\varepsilon, T, \dots\}_t \quad (n=0, 1, \dots, 5) \quad (29)$$

либо

$$\bar{S}_0 = P_0 \hat{P}_0, \quad \bar{\sigma} = P_k \hat{P}_k, \quad P_n = P_n \{s, \mathfrak{a}_m, \varepsilon_0, J_3^\varepsilon, T, \dots\}_t$$

постулат изотропии для начально изотропных сред полностью отображает свойства среды в физическом пространстве, поскольку определяющие соотношения (29) ковариантны относительно преобразований системы координат x_k и тензоров (σ'_{mn}) , (ε'_{mn}) в теле. При ортогональных преобразованиях $\{\hat{i}_k\}$ матрицей (α_{ni}) в E_6 все параметры для функционалов P_n , кроме $J_3^\varepsilon = |\mathcal{E}_{ij}|$, остаются инвариантными. Таким образом, влияние третьего инварианта, т.е. вида НДС, в общем случае остается. Постулат изотропии определяет векторные (геометрические) свойства, а скалярные отражают физические свойства материалов. Экспериментальные исследования показывают, что класс поликристаллических металлов хорошо отражает достоверность постулата изотропии. Влияние третьего инварианта тензора-девиатора наблюдается в нелинейной теории упругости, при низких температурах в металлах и др. Однако, идея сохранения тензорно-векторного подхода к построению определяющих соотношений теории процессов при сложном нагружении остается физически правильной и подлежит дальнейшей разработке и уточнению постулата изотропии.

4. О размерности и инвариантности образа процесса в E_5 и E_6

Определение размерности образа процесса в E_5 и E_6 — важная задача, т.к. определяет вид определяющих соотношений. Существует обширный класс задач и процессов, для которых размерность меньше пяти либо шести. К таким задачам относится расчет пластин и оболочек, в которых реализуется плоское напряженное состояние (НС). В этих задачах третьи инварианты можно выразить через первые два

$$J_3^\sigma = |S_{ij}| = |\sigma_{ij}| + \sigma_0 \sigma^2 / 2 - \sigma_0^3, \quad |\sigma_{ij}| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (30)$$

Для плоского НС $\sigma_3 = 0$ и поэтому влияние третьего инварианта не обнаруживается. В общем случае НС при преобразовании поворота координатных осей x_k в физическом пространстве компоненты тензоров определяются формулами (5), где направляющие косинусы l_{ij} координатных осей при ортогональном повороте удовлетворяют условиям

$$l_{ik} l_{ij} = \delta_{kj}, \quad |l_{ik} l_{ij}| = 1, \quad |l_{ij}| = \pm 1 \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (31)$$

В E_6 координаты векторов при линейном преобразовании равны

$$S'_i = \alpha_{ij} S_j, \quad \mathcal{E}'_i = \alpha_{ij} \mathcal{E}_j \quad (i, j = 0, 1, \dots, 5), \quad (32)$$

где $A = (\alpha_{ij})$ — матрица преобразования. Если A ортогонально, то

$$\alpha_{ij} \alpha_{ik} = \delta_{jk}, \quad |\alpha_{ij} \alpha_{ik}| = 1, \quad |\alpha_{ij}| = \pm 1, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 6). \quad (33)$$

Представим компоненты векторов в полярных сферических координатах ω_m ($m = 1, 2, 3, 4$). Для вектора \bar{S} имеем

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3} \sigma_0, & S_1 = \sigma \cos \omega_1, & S_2 = \sigma \sin \omega_1 \cos \omega_2, & S_3 = \sigma \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cos \omega_3, \\ S_4 = \sigma \sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin \omega_3 \cos \omega_4, & S_5 = \sigma \sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin \omega_3 \sin \omega_4, \end{cases} \quad (34)$$

что позволяет в E_6 сохранить инварианты σ_0 , σ тензора напряжений. Аналогичные выражения имеют место для \mathcal{E} с сохранением инвариантов ε_0 , \mathcal{E} тензора деформаций. Третий инвариант $J_3 = |S_{ij}|$ равен [9]

$$J_3^\sigma = \sigma^3 J_3^* = \frac{S_1}{3\sqrt{6}} \left[S_1^2 - 3(S_2^2 + S_4^2) + 3(S_3^2 + S_5^2)/2 \right] - \frac{S_2}{2\sqrt{2}} (S_5^2 - S_3^2) + \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 S_4 S_5. \quad (35)$$

Для трехпараметрических задач $\omega_1 = \varphi$, $\omega_2 = \omega$, $\omega_3 = \omega_4 = 0$,

$$J_3^* = \frac{1}{3\sqrt{6}} \left[\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \omega \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin^2 \varphi \sin^2 \omega \left[\cos \varphi / \sqrt{3} + \sin \varphi \cos \omega \right]. \quad (36)$$

Для плоских траекторий в девиаторной плоскости (\hat{i}_1, \hat{i}_2) при сохранении направлений главных осей в физическом пространстве ($\omega_1 = \varphi$, $\omega = 0$) получаем $S_1 = \sigma \cos \varphi$, $S_2 = \sigma \sin \varphi$, $S_3 = S_4 = S_5 = 0$. Третий инвариант и параметр вида НС

$$J_3^* = \cos 3\varphi / 3\sqrt{6}, \quad \xi = \cos 3\varphi = 3\sqrt{6} |S_{ij}^*| \quad (37)$$

сохраняется при поворотах координатных осей x_k и поворотах вектора $\bar{\sigma}$ в девиаторной плоскости. Для плоских траекторий в (\hat{i}_1, \hat{i}_3) имеем $\omega_1 = \varphi$, $\omega_2 = \pi/2$ и получаем $S_1 = \sigma \cos \varphi$, $S_2 = 0$, $S_3 = \sigma \sin \varphi$, $S_4 = S_5 = 0$,

$$J_3^* = \left(\cos^3 \varphi + 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi / 2 \right) / 3\sqrt{6}, \quad 4 \cos^3 \varphi = 3 \cos \varphi + \cos 3\varphi. \quad (37')$$

Так как $\cos 3\varphi$ остается неизменным, то φ и J_3^* также остаются неизменными при ортогональном преобразовании координат x_k и вектора σ в (\hat{i}_1, \hat{i}_3). В трехпараметрических задачах J_3^* , определяемое формулой (36), не обнаруживает сохранения неизменным J_3^* . Заманчивая идея инвариантности тензорно-векторного подхода А. А. Ильюшина к решению проблемы связи между напряжениями и деформациями при сложном нагружении в теории пластичности была основной. Однако, физическое состояние материалов и их векторные свойства в процессах сложного напряженного состояния и нагружения вносит поправку на влияние вида НС формоизменения и объемного расширения. В общем случае линейное преобразование характеризуется матрицей $A = (\alpha_{ni})$, которая изменяет направление и величину векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\mathcal{E}}$. Новый вектор $\bar{\mathcal{E}}' = A\bar{\mathcal{E}}$ эквивалентен простым удлинениям или сокращениям координатных осей в E_5 и делает его анизотропным. Инвариантные векторы удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\mathcal{E}}' = A\bar{\mathcal{E}} = \lambda \bar{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E}'_n = \alpha_{ni} \mathcal{E}_i = \lambda \mathcal{E}_i \quad (n, i = 0, 1, \dots, 5), \quad (38)$$

где λ — собственное значение матрицы A характеристических уравнений (38). Они имеют отличные от нуля решения, если их определитель

$$|\alpha_{ni} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad (n, i = 0, 1, \dots, 5).$$

Матрицу преобразования можно построить, если разложить E_6 на одномерное инвариантное пространство E_0 с \hat{i}_0 и пятимерное девиаторное пространство E_5 с базисом $\{\hat{i}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$). Второе из них можно разложить в прямую сумму двумерного инвариантного подпространства, отвечающего девиаторной D -плоскости с базисом $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2\}$, и трехмерного сдвигового Π -подпространства с базисом $\{\hat{i}_3, \hat{i}_4, \hat{i}_5\}$. Подпространство E_5 можно разложить также на два трехмерных пересекающихся по \hat{i}_3 подпространства с базисами $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$ и $\{\hat{i}_3, \hat{i}_4, \hat{i}_5\}$. Положение вектора $\bar{\sigma}$ в E_5 при последующем разложении можно определить с помощью четырех простых вращений с помощью матрицы

$$A_m = \begin{pmatrix} \cos \omega_m & \sin \omega_m \\ -\sin \omega_m & \cos \omega_m \end{pmatrix},$$

где ω_m ($m = 1, 2, 3, 4$) — углы поворота. При ортогональных вращениях определитель матриц $|A_m| = 1$. В результате можно построить матрицу преобразования в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где компоненты матрицы

$$\begin{cases} A = D = \alpha a - \beta b, & B = -C = \alpha b + \beta a, \\ \alpha = \cos \omega_1 \cos \omega_2 - \sin \omega_1 \sin \omega_2, & a = \cos \omega_3 \cos \omega_4 - \sin \omega_3 \sin \omega_4, \\ \beta = \cos \omega_1 \sin \omega_2 + \sin \omega_1 \cos \omega_2, & b = \cos \omega_3 \sin \omega_4 + \sin \omega_3 \sin \omega_4. \end{cases}$$

Используя (38–39), находим собственные значения λ матрицы преобразования

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \sqrt{-1}, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 1.$$

Таким образом, при ортогональном преобразовании, обнаруживается неизотропность векторного пространства E_6 , т.е. противоречивый результат. Из шести собственных значений в E_6 сохраняются только 4, а в E_5 — только 3. Сохраняются инварианты ε_0 , \mathcal{E} и σ_0 , σ и не сохраняются третьи инварианты $J_3^\varepsilon = |\mathcal{E}_{ij}|$ и $J_3^\sigma = |S_{ij}|$. Замечание В.В. Новожилова [20] о том, что инварианты в E_5 должны быть инвариантами этого пространства E_5 , независимыми ни от первых ε_0 , σ_0 , ни от вторых \mathcal{E} , σ инвариантов тензоров напряжений и деформаций, не подтвердилось. Однако, постулат изотропии для начально изотропных сред (19) в тензорной форме имеет три инварианта при ортогональных преобразованиях в E_6 , а в векторной форме (26) — только два, что противоречит инвариантности связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} при векторно-тензорном ковариантно-инвариантном подходе.

Уточнение постулата изотропии, о котором говорил А.А. Ильюшин в [5], по нашему мнению, следует искать в форме преобразований (24). Эта форма обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между компонентами тензоров напряжений и деформаций и координат векторов в E_6 и E_5 . Однако, соотношения (24) в ортогональном процессе деформирования при $\mathcal{E} = \text{const}$, соответствующему ортогональному преобразованию $A = (\alpha_{ij})$, не обеспечивают в общем случае сохранение третьих инвариантов, характеризующих векторные свойства материалов. По-видимому, это — основная причина не сохранения третьих инвариантов. Заметим, что в одном и том же пространстве E_6 отнесенные к различным базисам Прагера В. $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ и Ильюшина $\{\hat{i}_k\}$ предельные поверхности по критерию Мизеса–Надаи имеют различную гипергеометрическую форму. В пространстве Прагера — это цилиндр, а в девiatorном пространстве А.А. Ильюшина — это гиперсфера.

Также отметим, что в состоянии полной пластичности ($\sigma_1 = 2\tau$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$) получаем

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma = \sqrt{6}\tau, \quad J_3^\sigma = |S_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 2\tau^3, \quad \xi = \cos 3\varphi = \pm 1,$$

а в особых состояниях неполной пластичности ($\sigma_1 = \sigma_3 = -\tau$, $\sigma_2 = 0$) имеем

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma = \sqrt{2}\tau, \quad J_3^\sigma = |S_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0, \quad \xi = \cos 3\varphi = 0,$$

т.е. третьи инварианты сохраняются. Преобразования (24) в общем случае сохраняют скалярные свойства материалов, но не сохраняют ли они вполне векторные свойства, если не сохраняется вид НС, характеризуемый углом φ и параметром $\xi = \cos 3\varphi$?

5. Общие определяющие соотношения и постулат физической определенности образа процесса

Общие определяющие соотношения теории процессов постулата изотропии были получены автором в 1989 г. и имеют вид [26–31]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_k \hat{p}_k + M \hat{\sigma}, \quad \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = (M_k + M \cos \beta_k) \hat{p}_k \quad (k=1, 2, \dots, 5), \quad (40)$$

где единичные векторы напряжений и деформаций

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma = \cos \beta_k \hat{p}_k, & \hat{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E} = \cos \alpha_k \hat{p}_k, \\ M = d\sigma/ds - M_k \cos \beta_k, & M_2 = 0, \quad M_k = \left\{ s, \mathfrak{a}_m, T, \varepsilon_0, \left| \mathcal{E}_{ij} \right| \right\}. \end{cases} \quad (41)$$

Угловые координаты β_k связаны с полярными сферическими координатами ϑ_m ($m = 1, 2, 3, 4$) формулами

$$\begin{cases} \cos \beta_1 = \cos \vartheta_1, & \cos \beta_2 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, & \cos \beta_3 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3, \\ \cos \beta_4 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4, & \cos \beta_5 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4. \end{cases} \quad (42)$$

Аналогичными формулами связаны α_k и θ_m . Единичные векторы (41) можно представить в полярных координатах в виде

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}), \\ \hat{p} = \cos \vartheta_3 \hat{p}_3 + \sin \vartheta_3 (\cos \vartheta_4 \hat{p}_4 + \sin \vartheta_4 \hat{p}_5), \\ \hat{\mathcal{E}} = \cos \theta_1 \hat{p}_1 + \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \hat{p}_2 + \sin \theta_2 \hat{p}), \end{cases} \quad (43)$$

что возможно только при $\vartheta_3 = \theta_3$, $\vartheta_4 = \theta_4$.

Для определения углов ϑ_m , θ_m получены системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \mathfrak{a}_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_0 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \mathfrak{a}_2 \cos \vartheta_3 \right) = \mathfrak{a}_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_0}{\sigma} \cos \vartheta_2, \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \left(\frac{d\vartheta_3}{ds} + \mathfrak{a}_3 \cos \vartheta_4 \right) = \mathfrak{a}_2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 + \frac{1}{\sigma} (M_* \cos \vartheta_3 - M_3 \sin \vartheta_3), \\ \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \left(\frac{d\vartheta_4}{ds} + \mathfrak{a}_4 \right) = \mathfrak{a}_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 + \frac{1}{\sigma} (M_5 \cos \vartheta_4 - M_4 \sin \vartheta_4), \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta_1}{ds} + \mathfrak{a}_1 \cos \vartheta_2 &= -\frac{1}{\mathcal{E}} \sin \theta_1, & \sin \theta_1 \left(\frac{d\theta_2}{ds} + \mathfrak{a}_2 \cos \theta_3 \right) &= \mathfrak{a}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2, \\ \sin \theta_2 \left(\frac{d\theta_3}{ds} + \mathfrak{a}_3 \cos \theta_4 \right) &= \mathfrak{a}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3, & \sin \theta_3 \left(\frac{d\theta_4}{ds} + \mathfrak{a}_4 \right) &= \mathfrak{a}_3 \cos \theta_3 \sin \theta_4, \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (44)$$

где функционалы процесса

$$\begin{cases} M = d\sigma/ds - M_1 \cos \vartheta_1 - M_0 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, & M_2 = 0, \\ M_0 = M_3 \cos \vartheta_3 + M_* \sin \vartheta_3, & M_* = M_4 \cos \vartheta_4 + M_5 \sin \vartheta_4, \end{cases} \quad (46)$$

При квазипростом процессе [8–10] $\hat{\sigma} = \hat{\mathcal{E}}$ как и при простом нагружении, но концы векторов $\bar{\sigma}$, $\bar{\mathcal{E}}$ описывают криволинейные сложные траектории в E_5 . В этом случае $M_1 = \sigma/\mathcal{E}$, $M_3 = M_4 = M_5 = 0$,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \cos \theta \right) \hat{\sigma}, \quad \sigma = \Phi(\mathcal{E}), \quad (47)$$

где $\cos \theta = d\mathcal{E}/ds$. Уравнение (47) было использовано А.А. Ильюшиным при построении им теории устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости. В трехпараметрических задачах $\vartheta_3 = \vartheta_4 = 0$, $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_4 = 0$. При малом кручении $\vartheta_2 = 0$, $\mathfrak{a}_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, & \sigma = \Phi(s), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \alpha_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, & M_3 = \sigma \alpha_2 \sin \vartheta_1 \end{cases} \quad (48)$$

Для плоских траекторий $\alpha_2 = 0$, $M_3 = 0$ и уравнения (48) описывают гипотезу компланарности. Эта гипотеза была использована автором для обобщения теории устойчивости оболочек и пластин А.А. Ильюшина при сложном докритическом нагружении и в момент бифуркации. В дополнение к постулату изотропии автор выдвинул постулат физической определенности образа процесса в E_5 . Пространство E_5 может быть разложено на два пересекающихся $Z \cap \Pi$ -подпространства с базисами $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i})$, $(\hat{i}_3, \hat{i}_4, \hat{i}_5)$, в которых

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \sigma \hat{\sigma} = S_k \hat{i}_k = S_1 \hat{i}_1 + S_2 \hat{i}_2 + \tau \hat{i}, \quad \bar{\tau} = \tau \hat{i} = S_3 \hat{i}_3 + S_4 \hat{i}_4 + S_5 \hat{i}_5, \\ \bar{\Xi} = \Xi \hat{\Xi} = \Xi_k \hat{i}_k = \Xi_1 \hat{i}_1 + \Xi_2 \hat{i}_2 + \gamma \hat{i}, \quad \bar{\gamma} = \gamma \hat{i} = \Xi_3 \hat{i}_3 + \Xi_4 \hat{i}_4 + \Xi_5 \hat{i}_5, \end{aligned}$$

где \hat{i} — единичный вектор пересечения $Z \cap \Pi$ -подпространств, где

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \cos \omega_1 \hat{i}_1 + \sin \omega_1 (\cos \omega_2 \hat{i}_2 + \sin \omega_2 \hat{i}), \\ \hat{\Xi} = \cos \varphi_1 \hat{i}_1 + \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \hat{i}_2 + \sin \varphi_2 \hat{i}), \\ \hat{i} = \cos \omega_3 \hat{i}_3 + \sin \omega_3 (\cos \omega_4 \hat{i}_4 + \sin \omega_4 \hat{i}_5), \end{cases} \quad (49)$$

что возможно только при $\omega_3 = \varphi_3$, $\omega_4 = \varphi_4$. Это означает, что в сдвиговом Π -подпространстве имеет место квазипростой процесс $\hat{i} = \hat{\tau} = \hat{\gamma}$. Вместо неподвижного базиса $\{\hat{i}_k\}$ мы можем отнести E_5 к естественному базису $\{\hat{p}_k\}$ [8]. В этом случае, аналогично (49), имеем разложение (43) при $\vartheta_3 = \theta_3$, $\vartheta_4 = \theta_4$. Рекуррентные формулы (25) принимают единственно возможный вид при $\hat{p} = \hat{p}_3$ для $Z \cap \Pi$ -подпространств

$$\begin{cases} \frac{d\hat{p}_1}{ds} = \alpha_1 \hat{p}_2, & \frac{d\hat{p}_2}{ds} = -\alpha_1 \hat{p}_1 + \alpha_2 \hat{p}_3, & \frac{d\hat{p}_3}{ds} = -\alpha_2 \hat{p}_2, \\ \frac{d\hat{p}_3}{ds} = \alpha_3 \hat{p}_4, & \frac{d\hat{p}_4}{ds} = -\alpha_3 \hat{p}_3 + \alpha_4 \hat{p}_5, & \frac{d\hat{p}_5}{ds} = -\alpha_4 \hat{p}_4, \end{cases} \quad (50)$$

что возможно только при $\vartheta_3 = \theta_3 = 0$, т.е. пересечении $Z \cap \Pi$ -подпространств по общему вектору $\hat{p} = \hat{p}_3$. Из системы общих определяющих соотношений (44), (45) следует $M_0 = M_3$, $M_4 = M_5 = 0$, $\alpha_3 = 0$, ϑ_4 и α_4 — неопределенны. Поэтому сдвиговое Π -подпространство оказывается фактически пустым и процесс сложного нагружения реализуется в изображающем Z -подпространстве как неполный квазипростой процесс при $\vartheta_3 = \theta_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Полученный результат получил название *постулата физической определенности образа процесса* для начально изотропных сред. Общие определяющие соотношения получают более простой трехпараметрический вид

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \alpha_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \alpha_2 \right) = \alpha_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2, \\ M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \end{cases} \quad (51)$$

где функционалы M_1 , M_3 , M зависят от параметров сложного нагружения s , α_1 , α_2 , а также T , ε_0 , $J_3^\varepsilon = |\Xi_{ij}|$ либо σ_0 , $J_3^\sigma = |S_{ij}|$. В качестве одной из математических моделей для

исследований предлагаются соотношения (51), в которых для определения угла ϑ_2 и M_3 используются соотношения

$$\frac{d\vartheta_2}{ds} + \alpha_2 = \alpha_1 \operatorname{ctg} \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad M_3 = \sigma \alpha_2 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_2}. \quad (52)$$

Таким образом, анализ постулата изотропии показал, что он инвариантен при ортогональных преобразованиях вращения и отражения образа процесса, т.к. сохраняются значения параметров ε_0 , \mathcal{E} либо σ_0 , σ , если влияние третьего инварианта при этом является слабым или отсутствует. При исследовании свойств различных классов материалов необходимо ставить задачу по проведению опытов на сложное нагружение по уточнению влияния вида НДС, т.е. влиянию первых ε_0 , σ_0 и третьих $J_3^\varepsilon = |\mathcal{E}_{ij}|$, $J_3^\sigma = |S_{ij}|$ инвариантов. Поэтому роль экспериментальных исследований при сложном нагружении чрезвычайно важна. Постулат физической определенности сводит задачу к трехпараметрической и сводит на нет влияние кривизны α_3 , α_4 и углов ϑ_3 , ϑ_4 .

6. Заключение

Тензорно-векторный подход (анализ) имеет дело с объектами, независимыми от координатной системы и поэтому является идеальным средством для изучения инвариантности законов природы в механике сплошной среды и теории пластичности. Спрашивается, почему эта идея инвариантности при преобразовании координат в E_5 привела в работах [2–7] к зависимости связи напряжений и деформаций от изменения третьих инвариантов тензоров?

В соответствии с (5)

$$\sigma'_{mn} = \sigma_{ij} l_{im} l_{jn}, \quad \varepsilon'_{mn} = \varepsilon_{ij} l_{im} l_{jn}, \quad (5')$$

Тензорам напряжений и деформаций в E_6 можно, вместо (24), поставить в соответствие в евклидовом координатном пространстве векторы

$$\bar{S} = Y_n \hat{\varepsilon}_n, \quad \bar{\varepsilon} = X_n \hat{\varepsilon}_n \quad (n=1, 2, \dots, 6), \quad (53)$$

где $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ — ортонормированный координатный базис,

$$\begin{cases} X_1 = \varepsilon_{11}, & X_2 = \varepsilon_{22}, & X_3 = \varepsilon_{33}, & X_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & X_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & X_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \\ Y_1 = \sigma_{11}, & Y_2 = \sigma_{22}, & Y_3 = \sigma_{33}, & Y_4 = \sqrt{2}\sigma_{12}, & Y_5 = \sqrt{2}\sigma_{23}, & Y_6 = \sqrt{2}\sigma_{13}. \end{cases} \quad (54)$$

В этом случае, в отличие от (24), в разложении E_6 в прямую сумму двух трехмерных подпространств нормальных и сдвиговых напряжений и деформаций, гиперпрямые координатные оси сохраняют свои направления. Все три инварианта каждого из тензоров также сохраняются

$$\begin{cases} \sigma_{ii} = 3\sigma_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3, & \varepsilon_{ii} = 3\varepsilon_0 = X_1 + X_2 + X_3, \\ \sigma_{ij}\sigma_{ij} = s^2 = Y_n Y_n, & \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon^2 = X_n X_n, \\ J_3^\sigma = |\sigma_{ij}| = Y_1 Y_2 Y_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_4 Y_5 Y_6 - \frac{1}{2} (Y_1 Y_5 + Y_2 Y_6 + Y_3 Y_4), \\ J_3^\varepsilon = |\varepsilon_{ij}| = X_1 X_2 X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_4 X_5 X_6 - \frac{1}{2} (X_1 X_5 + X_2 X_6 + X_3 X_4). \end{cases} \quad (55)$$

Для инвариантности E_6 необходимо и достаточно, чтобы преобразованные векторы

$$\bar{S}' = A\bar{S} = \lambda\bar{S}, \quad \bar{\varepsilon}' = A\bar{\varepsilon} = \lambda\bar{\varepsilon} \quad (56)$$

лежали в E_6 и были кратны векторам \bar{S} , $\bar{\varepsilon}$, где матрица линейного преобразования

$$A = (\alpha_{mn}^{ij}), \quad \alpha_{mn}^{ij} = l_{mi} l_{nj}. \quad (57)$$

На уравнения (56) можно смотреть как на наглядное описание деформации пространства E_6 . Векторы (56) называют собственными векторами, а соответствующие им числа λ — собственными или характеристическими числами матрицы A в координатном базисе $\{\hat{\varepsilon}_i\}$. Уравнения (56) можно записать в виде системы однородных алгебраических уравнений

$$(\alpha_{mn} - \delta_{mn}\lambda)Y_n = 0, \quad (\alpha_{mn} - \delta_{mn}\lambda)X_n = 0. \quad (58)$$

Уравнения (58) имеют отличные от нуля решения, если их определитель равен нулю:

$$|\alpha_{mn} - \delta_{mn}\lambda| = 0. \quad (59)$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение шестой степени для определения значений λ , т.е.

$$\lambda^6 - J_1\lambda^5 + J_2\lambda^4 - J_3\lambda^3 + J_4\lambda^2 - J_5\lambda + J_6 = 0, \quad (60)$$

где

$$J_1 = a_{ii}, \quad \dots, \quad J_6 = |A| = |\alpha_{mn}|. \quad (61)$$

При переходе от базиса $\{\hat{\varepsilon}_i\}$ к $\{\hat{\varepsilon}'_i\}$, где $\hat{\varepsilon}'_i = C_{ij}\hat{\varepsilon}_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$), (C_{ij}) — матрица такого перехода, получаем подобную матрицу $\tilde{A}(\tilde{\alpha}_{ij}) = C^{-1}AC$ [17–19]. Среди \tilde{A} простейшей является диагональная матрица, для которой $\tilde{A}\hat{\varepsilon}_i = \lambda\hat{\varepsilon}_i$. В этом случае для коэффициентов имеем

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad J_2 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j, \quad J_3 = \sum_{i,j,k=1}^n \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad \dots, \quad J_n = (-1)^n = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (62)$$

Согласно правилу Декарта, уравнение (60) имеет столько положительных корней, сколько имеет место перемена знаков в ряду его коэффициентов. В данном случае их шесть. При тензорно-векторном подходе важное место имеют ортогональные преобразования, при которых длина векторов остается неизменной. Для их реализации необходимо выполнение условий

$$\alpha_{mn}\alpha_{mk} = \delta_{nk} \quad (m, n, k = 1, 2, \dots, 6), \quad (63)$$

при которых определитель

$$|\alpha_{mn}\alpha_{mk}| = |\alpha_{mn}| \cdot |\alpha_{mk}| = 1, \quad |\alpha_{mn}| = \pm 1, \quad (64)$$

где знак плюс отвечает вращению, а минус — отражению. Полагая все $\lambda_i = 1$, легко убедиться, что уравнение (60) тождественно удовлетворяется. Это означает, что при ортогональном преобразовании шестимерное пространство остается изотропным при сохранении всех трех инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Образ процесса при тензорно-векторном подходе остается инвариантным при линейных преобразованиях вращения и отражения в E_6 . Поэтому формулировка постулата изотропии А.А. Ильюшина: *образ физического процесса в E_6 сохраняется при всех ортогональных вращениях и отражениях, если только в соответствующих точках траекторий сохраняются параметры $T(t)$, $\beta(t)$* [5], остается верной. Определяющие соотношения теории процессов для начально изотропных сред при сравнительно малых деформациях согласуются с постулатом изотропии.

Литература

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Уруго-пластические деформации. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1948. — 376 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: Изд. АН СССР, 1963. — 272 с.
3. Ильюшин А. А. Труды (1935–1945). Т. 1. — М.: Физматлит, 2003. — 352 с.
4. Ильюшин А. А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. — М.: Физматлит, 2004. — 480 с.
5. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. — М.: Изд. московского ун-та, 1990. — 310 с.
6. Ильюшин А. А. Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением. // ПММ, 1947, №2. — С. 293–296.
7. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ, 1954. Т. 18. №6. — С. 641–666.
8. Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. — М.: Физматлит, 2010. — 352 с.
9. Зубчанинов В. Г. Математическая теория пластичности. — Тверь: Изд. ТвГТУ, 2002. — 300 с.
10. Зубчанинов В. Г. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990. — 368 с.
11. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость. — М.: Физматлит, 2007. — 448 с.
12. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. — М.: Физматлит, 2008. — 336 с.

13. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т. 3. Доклады. – Тверь: Изд-во ТвГТУ, 2006. – 400 с.
14. Надаи. Л. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: ИИЛ, 1954. – 647 с.
15. Хилл. Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
16. Теория пластичности. Сб. статей / Пер. под ред. Ю. Н. Работнова. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 452 с.
17. Сокольников И. С. Тензорный анализ. – М.: Изд-во Наука, 1971. – 374.
18. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 204 с.
19. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2002. – 317 с.
20. Ивлев Д. Д. О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр., 1960, №2. – С. 125–127.
21. Новожилов В. В. Об одном направлении в теории пластичности (замечания по поводу полемики Д. Д. Ивлева с В. С. Ленским) // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр., 1961, №2. – С. 176–181.
22. Ильюшин А. А. Еще о постулате изотропии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр., 1962, №1. – С. 201–204.
23. Новожилов В. В. И еще о постулате изотропии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр., 1962. – С. 205–208.
24. Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд. АН СССР, 1961. – С. 3–29.
25. Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
26. Зубчанинов В. Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика, 1989. Т. 25. №5. – С. 3–13.
27. Зубчанинов В. Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика, 1991. Т. 27. №12. – С. 3–12.
28. Зубчанинов В. Г. Постулат локальной размерности образа процесса и определяющие соотношения в теории пластичности // Прикладная механика, 1998. Т. 34. № 5. – С. 86–97.
29. Зубчанинов В. Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия РАН. МТТ, 2011. №1. – С. 27–37.
30. Зубчанинов В. Г. Теория процессов и постулат изотропии А. А. Ильюшина // Упругость и неупругость. – М.: Изд. московского ун-та, 2011. С. 73–79.
31. Зубчанинов В. Г. Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А. А. Ильюшина // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в МДТТ. Межвузовский сб. – Тверь: Изд. ТвГТУ, 2011. – С. 30–49.
32. Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гулятьев В. И. Моделирование сложного деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности, 2015. Т. 77. №2. – С. 113–123.
33. Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories // Materials Physics and Mechanics (MPM). № 2, Vol. 24, 2015, pp. 107-118.

УДК 539.3

ОБОБЩЕНИЕ ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ А.А. ИЛЬЮШИНА НА КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

А.В. Муравлёв

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,
a.v.muravlev@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен подход к обобщению теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина на случай конечных деформаций вязкопластического материала, основанный на использовании двух разных тензоров конечных деформаций для построения (на базе полярного репера) образа процесса нагружения, разделенного на скалярную и векторную части. В рамках данного подхода проанализировано обобщение постулата изотропии теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина на конечные деформации, использующее разделение образа процесса нагружения на скалярную и векторную части. Проанализировано влияние скорости деформаций на законы изменения модуля и угла сближения вектора напряжений в процессах простого сдвига эвтектика олова и свинца.

Ключевые слова: пластичность, теория упругопластических процессов, постулат изотропии, вектор напряжений, траектория деформаций, конечные деформации, простой сдвиг.

1. Разделение образа процесса нагружения на скалярную и векторную части

Подход к обобщению теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина [1] на случай конечных деформаций вязкопластического материала, основанный на использовании двух разных тензоров конечных деформаций для построения (на базе полярного репера) образа процесса нагружения, разделенного на скалярную и векторную части, предложен в работе [2]. Обобщенные пятимерные евклидовы пространства напряжений и деформаций А.А. Ильюшина аналогично [1] могут быть построены по компонентам девиатора \mathbf{S} тензора истинных напряжений Коши и девиаторов тензоров конечных деформаций \mathbf{H} и \mathbf{E}^N во вращающемся полярном ортонормированном репере. Вращение этого репера отождествляется с поворотом частицы деформируемого тела как жесткого целого и задается ортогональной матрицей поворота из полярного разложения аффинора деформации. Движение частицы деформируемого тела относительно полярного репера отождествляется с процессом чистой деформации, который может быть описан разными тензорами конечных деформаций, в том числе и упомянутыми выше левым пространственным голономным тензором логарифмических деформаций Генки \mathbf{H} и неголономным тензором конечных деформаций \mathbf{E}^N , порожденным нейтральной объективной коротационной производной. Следует отметить, что внутренняя геометрия траектории логарифмических деформаций, построенной на основе компонент левого пространственного тензора Генки в полярном репере, всегда совпадает с внутренней геометрией траектории логарифмических деформаций, построенной на основе компонент правого материального тензора Генки в начальном базисе.

В теории упругопластических процессов физическому процессу нагружения (деформирования) малой окрестности материальной точки твердого деформируемого тела ставится в соответствие образ процесса нагружения, полностью задающий свойства связи напряжений с деформациями. Физическому процессу нагружения (деформирования) малой окрестности материальной точки твердого деформируемого тела при конечных деформациях будем ставить в соответствие образ процесса нагружения, разделенный на скалярную и векторную части, задающие скалярные и векторные свойства связи напряжений с деформациями (будем называть их скалярным и векторным образами процесса нагружения). Определены они в упомянутых выше пятимерных евклидовых пространствах напряжений и деформаций. *Скалярный образ процесса нагружения* включает в себя траекторию деформаций (построенную по голономному тензору логарифмических деформаций Генки \mathbf{H}) с заданными в каждой ее точке значениями $t, \bar{s}, \dot{\bar{s}}, p$ (t – время, \bar{s} – длина дуги этой траектории деформаций, $\dot{\bar{s}} \equiv d\bar{s}/dt$ – скорость изменения \bar{s} , p – гидростатическое давление), а также включает в себя

величины модуля σ_u вектора напряжений, получаемые в каждой точке траектории деформаций в результате физического процесса деформирования по этой траектории. *Векторный образ процесса нагружения* включает в себя траекторию деформаций (построенную по неголономному тензору конечных деформаций E^N) с заданными в каждой ее точке значениями t, s, \dot{s}, p (s – длина дуги этой траектории деформаций, $\dot{s} \equiv ds/dt$ – скорость изменения s), а также включает в себя величины углов сближения ϑ_k ($k = 1, \dots, 5$), которые в каждой точке траектории деформаций задают ориентацию вектора напряжений относительно сопровождающего репера Френе этой траектории деформаций и получаются в результате физического процесса деформирования по этой траектории.

2. Постулат изотропии

Использование введенных понятий скалярного и векторного образов процесса нагружения позволяет сформулировать постулат изотропии для начально-изотропного твердого деформируемого тела при конечных деформациях (по аналогии с теорией упругопластических процессов А.А.Ильюшина): *независимо друг от друга скалярный и векторный образы процесса нагружения инвариантны относительно ортогональных преобразований в своих пятимерных евклидовых пространствах напряжений и деформаций*. Данная формулировка допускает ситуацию, когда у двух разных физических процессов деформирования образы процесса нагружения одного вида (скалярные или векторные) совпадают (с точностью до ортогонального преобразования), а другого вида - нет. Например, для процесса простого сдвига (при котором происходит поворот главных осей тензоров деформаций относительно материальных волокон), траектории деформаций из скалярного и векторного образов процесса нагружения различны (рис. 1). Напротив, для процессов деформирования без поворота главных осей относительно материальных волокон обе траектории деформаций из скалярного и векторного образов процесса нагружения всегда совпадают друг с другом. Сформулированный постулат изотропии (так же, как и постулат изотропии в теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина) следует считать гипотезой, требующей дальнейшей экспериментальной проверки.

3. Полярное представление функционалов пластичности

Аналогично теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина, из сформулированного для конечных деформаций постулата изотропии следует, что функционалы пластичности σ_u и ϑ_k ($k = 1, \dots, 5$) (которые задают скалярные и векторные свойства связи напряжений с деформациями), являются функционалами от параметров внутренней геометрии предшествующих участков соответствующих траекторий деформаций, скоростей деформаций и гидростатического давления p . При этом скалярные свойства определяются по траектории логарифмических деформаций (например, по ее длине дуги \bar{s}). Векторные свойства (а также степень сложности процесса нагружения и величина следа запаздывания) определяются по траектории деформаций, построенной с использованием неголономного тензора деформаций E^N . Для этой же траектории деформаций может быть использовано полярное представление вектора напряжений в сопровождающем ортонормированном репере Френе, в котором в качестве функционалов пластичности, описывающих векторные свойства процесса нагружения, используются четыре угла пятимерной сферической системы координат (полярные функционалы пластичности). Представление полярных функционалов пластичности в виде функциональных рядов по параметрам кривизны траектории деформаций обладает определенной структурой и свойствами четности. Для этих функционалов доказана теорема четности [3], в соответствии с которой каждый полярный функционал является нечетным по соответствующему ему по номеру параметру кривизны и четным по всем остальным параметрам кривизны. Это позволяет упрощать варианты разложения полярных функционалов пластичности в окрестности произвольного сложного процесса деформирования и дает возможность использования таких разложений в конкретных приложениях.

Следует отметить, что при учете деформационного и скоростного упрочнения для разных типов материалов можно использовать разную структуру зависимости модуля σ_u вектора напряжений от деформаций и скорости деформаций. В частности, четыре простых основных типа такой зависимости имеют вид: $\sigma_u = \sigma_u(s, \dot{s})$, $\sigma_u = \sigma_u(s, \bar{s})$, $\sigma_u = \sigma_u(\bar{s}, \dot{s})$, $\sigma_u = \sigma_u(\bar{s}, \bar{s})$.

4. Анализ влияния скорости деформаций на законы изменения модуля и угла сближения вектора напряжений в процессах простого сдвига эвтектика олова и свинца

В работе [4] приведены экспериментальные данные (показаны на рис.2) серии опытов по кручению сплошных цилиндрических образцов из эвтектика олова и свинца (с рабочей базой равной 1 дюйму и диаметром 0.18 дюйма). Скорости деформаций в наружном цилиндрическом слое образца были постоянными для каждого опыта и равны 0.000052, 0.0006, 0.0008, 0.005 обратных секунд. В ходе эксперимента регистрировались крутящий момент и осевая сила как функции сдвиговой деформации γ в наружном цилиндрическом слое образца, при этом осевая деформация поддерживалась равной нулю. Сдвиговые напряжения τ в наружном цилиндрическом слое образца в работе [4] были вычислены по формуле Людвига [5] (с учетом деформационного упрочнения), осевые напряжения σ_{zz} – как средние по сечению образца (осевая сила, деленная на площадь поперечного сечения) – без учета упрочнения.

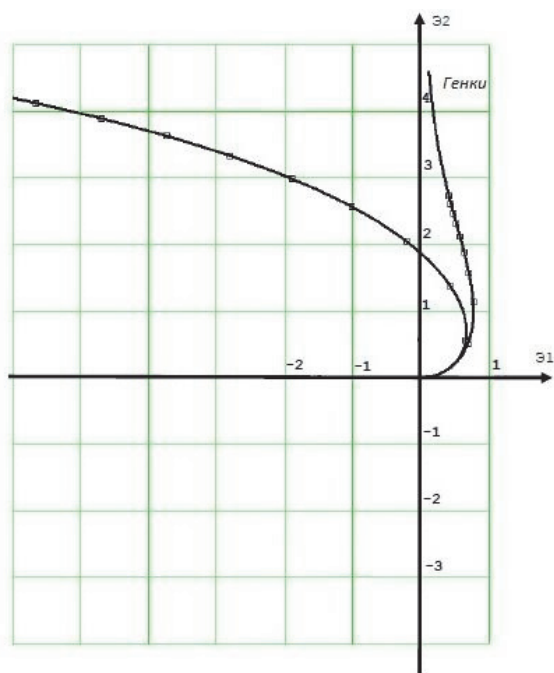


Рис. 1. Траектории деформаций, соответствующие простому сдвигу

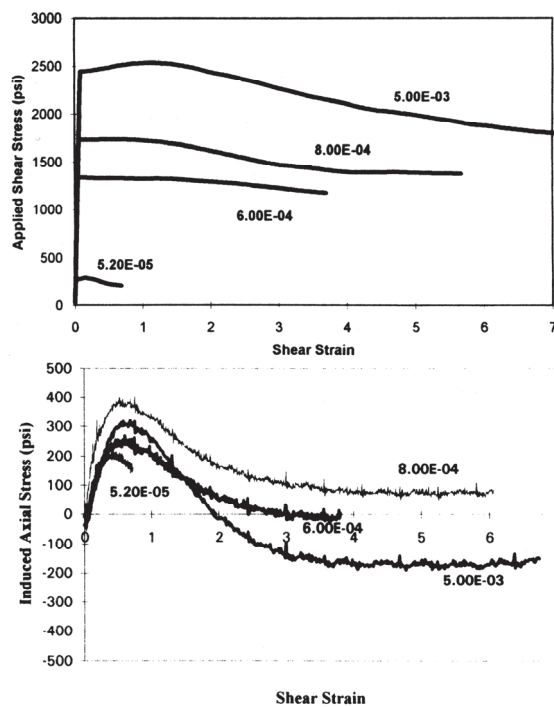


Рис. 2. Сдвиговые и осевые напряжения в опытах по кручению из работы [4]

Для анализа результатов опытов по кручению сплошных цилиндрических образцов (из работы [4]), дополнительная обработка экспериментальных данных была проведена с использованием специальных методик, учитывающих неоднородность напряженно-деформированного состояния по радиусу образца (так же как и формула Людвига). Сдвиговые напряжения τ в наружном цилиндрическом слое образца были вычислены по формуле Бэкофена-Филдса [6] (с учетом деформационного и скоростного упрочнения). При получении и обосновании указанных выше двух формул предполагается, что при кручении сплошного цилиндрического образца отсутствуют осевая сила и осевая деформация, а в каждом цилиндрическом слое происходит простой сдвиг. В работе [7] получены формулы, позволяющие найти истинное осевое напряжение σ_{zz} в наружном цилиндрическом слое образца (с учетом деформационного и скоростного упрочнения), если при кручении сплошного цилиндрического образца осевая деформация равна нулю, но при этом возникает осевая сила. По найденным законам изменения сдвигового напряжения τ и осевого напряжения σ_{zz} , затем также были найдены законы изменения модуля σ_u и угла сближения $\vartheta \equiv \vartheta_1$ вектора напряжений А.А. Ильюшина в процессах простого сдвига с учетом деформационного упрочнения (рис. 3–4) и одновременным учетом скоростного упрочнения (рис. 5–6).

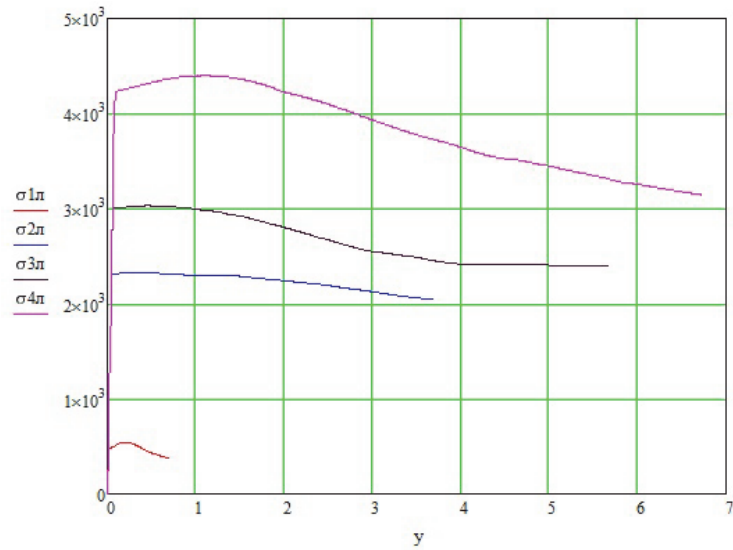


Рис. 3. Зависимости $\sigma_u \sim \gamma$, полученные с учетом деформационного упрочнения

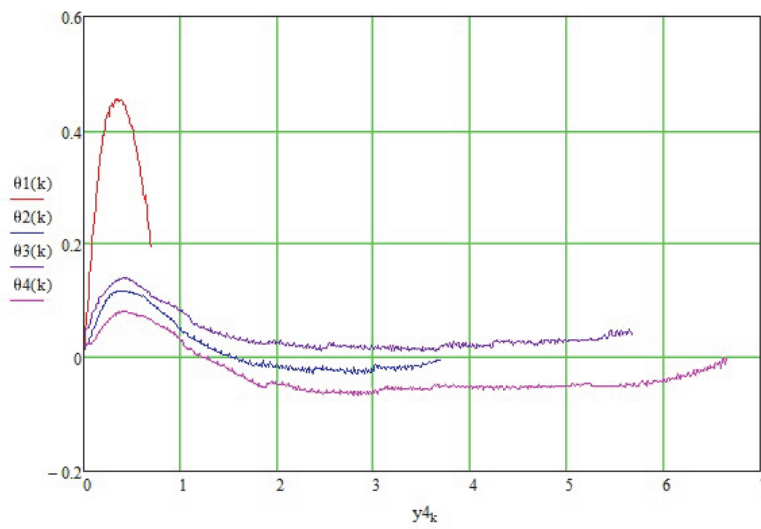


Рис. 4. Зависимости $\theta \sim \gamma$, полученные с учетом деформационного упрочнения

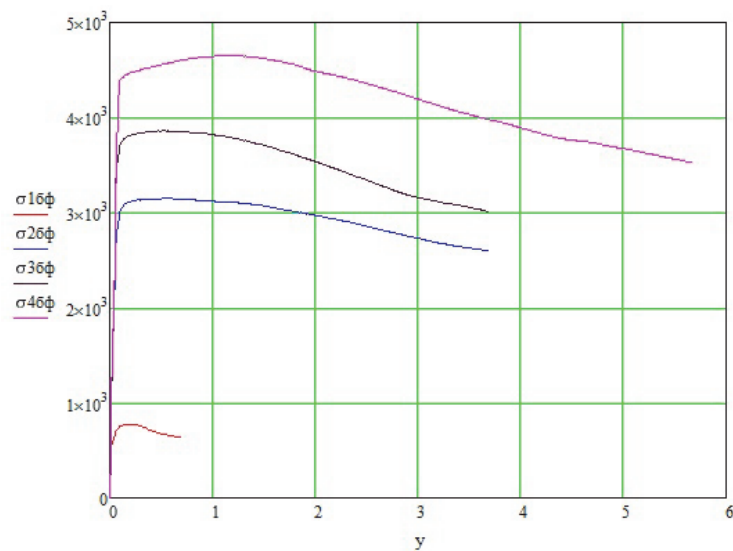


Рис. 5. Зависимости $\sigma_u \sim \gamma$, полученные с учетом деформационного и скоростного упрочнения

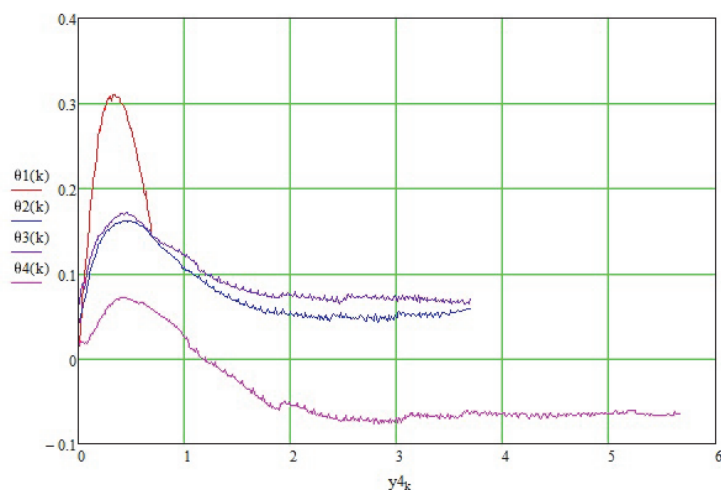


Рис. 6. Зависимости $\vartheta \sim \gamma$, полученные с учетом деформационного и скоростного упрочнения

Анализ представленных на рис. 5–6 результатов показывает, что в процессах простого сдвига в диапазоне оптимальных скоростей сверхпластического деформирования 0.0006–0.0008 1/с закон изменения угла сближения ϑ вектора напряжений обладает на порядок меньшей зависимостью от скорости деформаций по сравнению с законом изменения модуля σ_u этого вектора напряжений.

В качестве обобщения этого вывода можно сформулировать следующие определяющие соотношения для материалов в состоянии сверхпластичности: законы изменения углов сближения ϑ_k ($k = 1, \dots, 5$) вектора напряжений не зависят от скорости деформаций, а зависят только от параметров внутренней геометрии предшествующего участка неголономной траектории деформаций; закон изменения модуля σ_u вектора напряжений зависит как от скорости деформаций, так и от параметров внутренней геометрии предшествующего участка траектории деформаций (голономной или неголономной). Заметим, что в классической модели нелинейной вязкой жидкости угол сближения ϑ вектора напряжений тождественно равен нулю, то есть не зависит от скорости деформаций.

Анализ представленных на рис. 5–6 результатов также показывает, что при скорости деформаций 0.000052 1/с свойства данного сплава могут обладать как анизотропией, так и разносопротивляемостью, а при скорости деформаций 0.005 1/с наиболее близки к поведению изотропного по А.А. Ильюшину материала на траекториях малой кривизны. Фактически это означает, что в разных диапазонах скоростей деформаций данный сплав может быть отнесен к разным типам материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-08-04281).

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
2. Муравлёв А.В. Обобщение теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина на случай конечных деформаций // Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 1642-1644.
3. Муравлёв А.В. Об одном варианте обобщения теории процессов малой кривизны на случай конечных деформаций термовязкопластического материала // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во URSS, 2006. – С. 211-217.
4. Zhang K., Khraisheh M.K., Bayoumi A.E., Hamilton C.H., Zbib H.M. Anisotropy and transient effects in superplastic deformation // Proceedings ICSAM-94. – 1994. – Vol. 170-172 – pp. 583-588.
5. Ludwik P., Scheu R. Vergleichende Zug-, Druck-, Dreh- und Walzversuche // Stahl und Eisen, 12, Marz. – 1925. – pp. 373-381.
6. Fields D.S., Backofen W.A. Determination of strain-hardening characteristics by torsion testing // Proceedings ASTM. – 1957. – Vol. 57 – pp. 1259-1271.
7. Муравлёв А.В. Экспериментальные методики исследования механических свойств термовязкопластических материалов при сложном нагружении и конечных деформациях // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – С. 216-220.

УДК 539.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН В АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ

А.М. Локощенко, Л.В. Фомин

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, НИИ механики,
Москва, Россия, loco@imec.msu.ru*

Аннотация. Влияние агрессивной среды определяется ее диффузионным проникновением в материал стержней и пластин. Предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта. Рассматриваются задачи о чистом изгибе стержня при ползучести с учетом различия свойств материала при растяжении и сжатии, накопления поврежденности и влияния агрессивной среды. Определяющие и кинетические уравнения приняты в виде дробно-степенных зависимостей скорости деформации ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения. Исследуется длительное разрушение прямоугольной пластины при последовательном ступенчатом изгибе пластины в различных плоскостях с учетом влияния агрессивной среды.

Ключевые слова: ползучесть, длительное разрушение, агрессивная среда, дробно-степенная модель, поврежденность, стержень, пластина.

1. Приближенный метод решения уравнения диффузии

Актуальность решения задач прогнозирования долговечности работы материалов и элементов конструкций, находящихся в условиях длительного высокотемпературного нагружения в присутствии агрессивной окружающей среды, несомненна. В данной работе влияние агрессивной среды определяется ее диффузионным проникновением внутрь материала рассматриваемых типовых элементов конструкций, таких, как стержень и пластина. Для анализа процесса диффузии агрессивной окружающей среды внутрь материала используется приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта [1, 2]. Такой подход позволяет разделить весь материал поперечного сечения стержня или пластины на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную области (где еще нет проникновения среды) и затем отслеживать во времени движение границы между этими областями. В предлагаемом решении граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем поперечном сечении стержня.

При решении задач об изгибе стержней и пластин в присутствии агрессивной окружающей среды используется выражение интегрально средней концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$ агрессивной среды в объеме стержня, полученное с использованием указанного приближенного метода [1,2]:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \begin{cases} \sqrt{\bar{t}}/3, & \bar{t} < 1, \\ 1 - (2/3)\exp(-(\bar{t}-1)/4), & \bar{t} \geq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{c} = c/c_0$, $\bar{t} = 48Dt/H^2$, H - толщина поперечного сечения стержня или пластины, c - концентрация агрессивной среды, $c_0 = \text{const}$ - концентрация на поверхности стержня или пластины, D - коэффициент диффузии, t - время.

2. Ползучесть и длительное разрушение стержней при изгибе с учетом влияния агрессивной среды

В отличие от многих работ, в данном исследовании для моделирования ползучести и длительной прочности стержней при изгибе используются сингулярные дробно-степенные определяющие и кинетические соотношения, в которых уровень напряжений ограничен пределами кратковременной прочности при соответствующей температуре испытания. Рассматриваются 3 варианта постановки задач с учетом разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию (во всех вариантах упругопластическими деформациями пренебрегается по сравнению с деформациями ползучести p):

Установившаяся ползучесть. Определяющее соотношение имеет вид [3]:

$$dp/dt = AG^n, \quad G = \sigma / \sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma)(\sigma - \sigma_{b2})}, \quad (2)$$

где σ - напряжение, $\sigma_{b1} > 0$ - предел кратковременной прочности при растяжении, $\sigma_{b2} < 0$ - сжимающее напряжение, равное по абсолютной величине пределу кратковременной прочности при сжатии, A, n - материальные константы.

На основе гипотезы плоских сечений и уравнений равновесия получено распределение не зависящих от времени безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_{+,-} = (\sigma_{+,-})/\sigma_{b1}$ по безразмерной поперечной координате сечения стержня \bar{y} в растянутых и сжатых областях соответственно.

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \left[-C(\alpha - 1) \pm \sqrt{C^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C)\alpha C} \right] / [2(1 + C)], \quad (3)$$

$$C = C(\bar{y}) = [(\bar{y} - \bar{y}_0)d\bar{\chi}/d\bar{t}]^{2/n}.$$

где $\bar{y} = 2y/H$, \bar{y}_0 - координата нейтральной линии по напряжениям $\bar{\sigma}_{+,-}(\bar{y}_0) = 0$, $\bar{\chi} = 0.5H\chi$ - безразмерная кривизна, $\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}$ - коэффициент разносопротивляемости.

Построены зависимости $\bar{\sigma}_{+,-}(\bar{y})$ для различных значений n , проведено сравнение решений для стержней круглого и квадратного поперечных сечений.

Ползучесть с учетом накопления поврежденности. Системы определяющих и кинетических соотношений принимаются в следующем виде:

$$\begin{cases} dp/dt = A_1 [G/(1 - \omega)]^n, & \sigma > 0, & dp/dt = A_1 G^n, & \sigma \leq 0 \\ d\omega/dt = B_1 [G/(1 - \omega)]^m, & \sigma > 0, & d\omega/dt = 0, & \sigma \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

где ω - поврежденность, A_1, B_1, m, n - материальные константы.

На первом этапе ползучести стержня расчет проводится до достижения критерия разрушения $\omega(\bar{t}^*) = 1$ на растянутой поверхности, далее появляется фронт разрушения $\bar{\xi}(\bar{t})$, который движется вглубь от поверхности стержня. Напряжения перераспределяются во времени. Численный расчет проводится до достижения пределов прочности $\sigma_+ = \sigma_{b1}$, $\sigma_- = \sigma_{b2}$ при $\bar{t} = \bar{t}^{**}$. В результате численного расчета получены распределения напряжения и поврежденности по поперечной координате стержня в зависимости от времени. При использовании конкретных значений материальных констант получено отношение времен $\delta = (\bar{t}^{**} - \bar{t}^*)/\bar{t}^* = 5.3 \cdot 10^{-3}$, т.е. отношение времени распространения фронта до полного разрушения стержня $(\bar{t} = \bar{t}^{**} - \bar{t}^*)$ к времени разрушения поверхности стержня $(\bar{t} = \bar{t}^*)$ очень мало, оно составляет 0.5 процента.

Ползучесть с учетом накопления поврежденности и влияния агрессивной окружающей среды. Системы определяющих и кинетических соотношений принимаются в следующем виде:

$$\begin{cases} dp/dt = A_2 [G/(1 - \omega)]^n \cdot f_1(\bar{c}_m(\bar{t})), & \sigma > 0, & dp/dt = A_1 G^n \cdot f_1(\bar{c}_m(\bar{t})), & \sigma \leq 0 \\ d\omega/dt = B_2 [G/(1 - \omega)]^m \cdot f_2(\bar{c}_m(\bar{t})), & \sigma > 0, & d\omega/dt = 0, & \sigma \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f_1(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t}); \quad f_2(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})$$

где $f_1(\bar{c}_m(\bar{t}))$ и $f_2(\bar{c}_m(\bar{t}))$ - функции от интегрально средней концентрации, удовлетворяющие условию $f_1(0) = f_2(0) = 1$, A_2, B_2 - материальные константы.

В результате численного расчета получены распределения напряжения и поврежденности по поперечной координате стержня в зависимости от времени. Проведено сравнение решений с учетом и без учета влияния агрессивной окружающей среды. Агрессивная среда при рассмотренных материальных константах приводит к уменьшению времени до разрушения \bar{t}^{**} на 18 %.

3. Длительное разрушение пластин при изгибе в агрессивной среде в условии нестационарного сложного напряженного состояния

Исследуется длительное разрушение прямоугольной пластины при чистом изгибе в условиях нестационарного плоского напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды. Влияние агрессивной среды моделируется с помощью введения в определяющие и кинетические соотношения функции от интегрально средней концентрации элементов среды в материале пластины $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$. В качестве определяющих соотношений ползучести (при малых деформациях) используются степенная и дробно-линейная зависимости интенсивности скоростей деформаций ползучести $\dot{\rho}_u$ от интенсивности напряжений σ_u . Эти зависимости имеют вид (6) и (7) соответственно:

$$\dot{\rho}_u = A_3 \cdot (\sigma_u)^n \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (6)$$

$$\dot{\rho}_u = A_3 \cdot \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})). \quad (7)$$

Точка над символом обозначает производную по времени t .

Рассматривается ступенчатое по времени нагружение пластины изгибающими моментами M_1 и M_2 , приложенными по её краям (рис. 1).

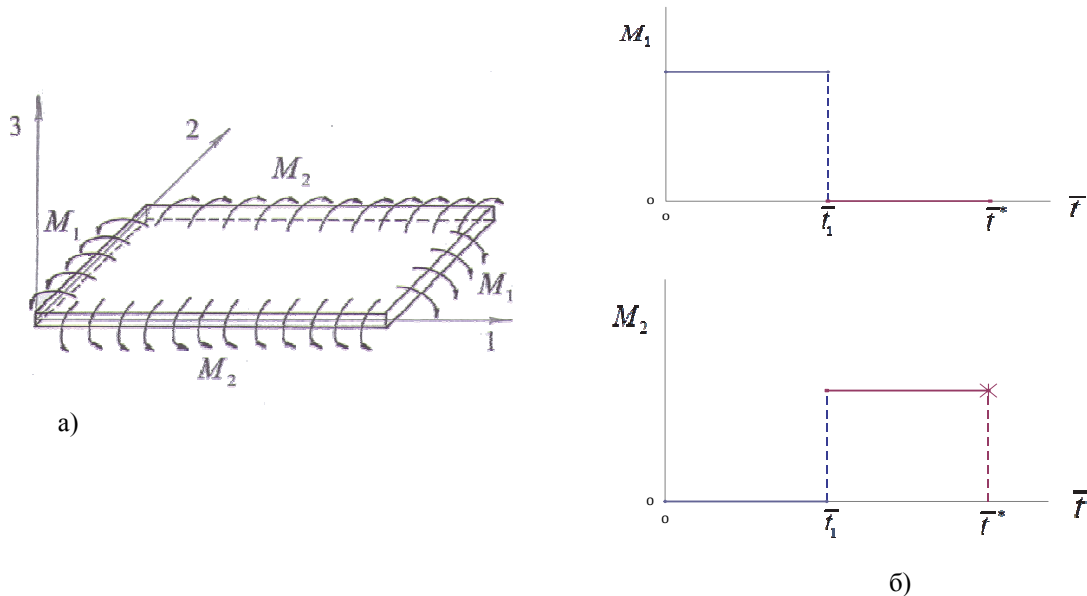


Рис. 1. Схема (а) и программа (б) нагружения пластины

С помощью кинетической теории Ю.Н. Работнова определяются времена до разрушения такой пластины при последовательном приложении изгибающих моментов в различных плоскостях. Время до разрушения при использовании кинетического уравнения со скалярным параметром поврежденности ω определяется следующим образом:

$$d\omega/dt = K\sigma_u^n f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(\bar{t}_\omega^*) = 1, \quad (8)$$

где \bar{t}_ω^* - безразмерное время до разрушения при использовании скалярного параметра поврежденности.

Для исследования длительного разрушения пластины с использованием векторного параметра поврежденности Ω рассмотрим следующую систему кинетических уравнений:

$$d\Omega_i/d\bar{t} = \begin{cases} K\sigma_i^n f(\bar{c}_m(\bar{t})), & \sigma_i > 0 \\ 0, & \sigma_i \leq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Omega(\bar{t}) = \sqrt{(\Omega_1(\bar{t}))^2 + (\Omega_2(\bar{t}))^2}, \quad \Omega(0) = 0, \quad \Omega(\bar{t}_\Omega^*) = 1.$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 - проекции вектора поврежденности на оси 1 и 2 соответственно, \bar{t}_Ω^* - безразмерное время до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности.

Следует отметить, что здесь используется подход, при котором проекции вектора поврежденности связаны с главными осями напряженно-деформированного состояния [4].

В результате расчета получены времена до разрушения для различных соотношений изгибающих моментов $b = M_2/M_1$.

Анализ показывает, что времена до разрушения \bar{t}_ω^* и \bar{t}_Ω^* удовлетворяют неравенству $\bar{t}_\omega^* < \bar{t}_\Omega^*$ при различных значениях b .

Дополнительно исследованы суммы парциальных времен

$$S = \bar{t}_1/\bar{t}_1^* + \bar{t}_2/\bar{t}_2^* = \bar{t}_1/\bar{t}_1^* + (\bar{t} - \bar{t}_1)/\bar{t}_2^*,$$

где \bar{t}_1 и \bar{t}_2 - длительности действия моментов M_1 и M_2 соответственно, \bar{t}_1^* и \bar{t}_2^* - времена до разрушения при действии на пластину только момента M_1 или M_2 соответственно.

Это исследование проведено как при $b > 1$, так и при $0 < b \leq 1$.

Показано, что эти суммы S удовлетворяют следующим неравенствам: $S > 1$ при $M_1 > M_2$ и $0 < S \leq 1$ при $M_1 \leq M_2$. Проведена аналогия с результатами испытаний на длительную прочность стержней при кусочно-постоянном растягивающем напряжении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 14-08-00528-а).

Литература

1. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 178 с.
2. Локощенко А.М. Моделирование ползучести и длительной прочности металлов: Монография. – М.: Моск. гос. индустр. ун-т, 2007. – 264 с.
3. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР, Механика твердого тела. 1984 г. №1. С. 86–92.
4. И.В. Наместникова, С.А. Шестериков. Векторное представление параметра поврежденности // Деформирование и разрушение твердых тел. Труды Института механики. Издательство Московского университета, 1985. С. 43–52.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

В.Г. Баженов, А.А. Артемьева, А.И. Кибец, Е.В. Нагорных, Т.В. Кузмичева

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, bazhenov@tech.unn.ru

Аннотация. Излагается метод численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения при больших деформациях и комбинированных сложных нагружениях растяжением, внутренним давлением и кручением.

Ключевые слова: численное моделирование, большие упругопластические деформации, динамический подход, осесимметричные оболочки, сложное нагружение, кручение – внутреннее давление - растяжение.

1. Введение

Большой вклад в постановку и решение задач устойчивости упругопластических оболочек при простых и сложных нагружениях внесли работы А.А. Ильюшина и В.Г. Зубчанинова. Анализ этой проблемы, теоретические и экспериментальные результаты исследований весьма полно изложены в [1]. Задачи устойчивости решались в бифуркационной постановке «по Эйлеру» в предположении однородности и безмоментности докритического напряженного состояния. При этом применялись соотношения теории деформаций А.А. Ильюшина в вариациях, а в дальнейшем – варианты общей теории пластичности А.А. Ильюшина, развитые В.Г. Зубчаниновым [1]. Решение бифуркационных задач устойчивости упругопластических оболочек на основе теории деформаций А.А. Ильюшина давало значительно лучшие результаты, чем по теории течения, т.к. теория деформаций сформулированная в вариациях учитывает излом траекторий деформирования в момент бифуркации. Этот кажущийся парадокс привел к формированию мнения, что теория течения мало пригодна для решения упругопластических задач устойчивости.

В связи с развитием математических моделей, вычислительной техники, численных методов и программных систем появились новые возможности решения задач устойчивости упругопластических конструкций в геометрически нелинейной постановке как неидеальных систем с начальными несовершенствами формы при сложных нагружениях. При этом вместо критических бифуркационных нагрузок определяются предельные нагрузки и соответствующие формоизменения конструкций. Для численного решения подобных квазистатических задач в теории упругости хорошо разработан метод продолжения по обобщенному параметру нагружения [2], в который включаются и формоизменения конструкций. Для упругопластических задач этот метод неэффективен и мало пригоден, ввиду зависимости решения от истории нагружения, которое фактически не представляет свободы выбора оптимального параметра нагружения с целью регуляризации задачи в предельных точках интегральной зависимости нагрузка-перемещение.

Весьма перспективным для исследования процессов деформирования и оценки предельных состояний упругопластических тел при неоднородных напряженно-деформированных состояниях, сложных нагружениях и немалых формоизменениях является применение динамической формулировки задачи с использованием в качестве параметра нагружения модифицированного времени. В квазистатических задачах роль регуляризатора численного решения выполняют инерционные члены, вклад которых регулируется выбором соответствующей скорости нагружения и ее реверсом при разгрузках. Отметим, что только динамическая постановка задачи позволяет моделировать закритическое поведение упругопластических конструкций – перескок к новым устойчивым равновесным состояниям. Обзор работ, посвященных численным решениям осесимметричных геометрически нелинейных задач упругопластического деформирования и устойчивости оболочек при статических и динамических нагружениях представлен в [1-8]. Эти публикации в основном

посвящены решению задач с малыми деформациями и немалыми перемещениями металлических оболочек.

В связи с актуальностью исследования деформационных и прочностных характеристик упругопластических материалов на трубчатых образцах [9], а также других подобных инженерных задач Баженовым В.Г. и его учениками была осуществлена разработка математических моделей и компьютерных кодов численного решения обобщенных осесимметрических задач (с кручением) для массивных тел и оболочек вращения. Проведены теоретические и экспериментальные исследования процессов потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при больших деформациях цилиндрических оболочек при динамических и квазистатических сложных нагружениях – растяжением, кручением, внутреннем давлении.

2. Определяющая система уравнений

Обобщенная осесимметричная задача с кручением формулируется в цилиндрической системе эйлеровых координат Orz, Oz – ось вращения. Для каждого оболочечного элемента вводится местная лагранжева система координат $Os\xi$ связанная с общей соотношениями:

$$s = r\psi_z - z\psi_r, \quad \xi = r\psi_r + z\psi_z$$

где $\psi_z = -r_{,s}, \psi_r = -z_{,s}$ – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности.

Оболочечные элементы полагаются тонкими, метрика по толщине не меняется. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния:

$$\tilde{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{u}_\phi(s, t), \quad \tilde{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t), \quad \tilde{u}_\beta(s, \xi, t) = r \dot{u}_\beta(s, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{ii}^0 + \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^B, \quad \dot{\varepsilon}_{s\xi} = \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 \left(1 - \left(\frac{2\xi}{h} \right)^2 \right), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta} = \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{ss}^0 = \dot{u}_{r,s} \psi_z - \dot{u}_{z,s} \psi_r, \quad \dot{\varepsilon}_{ss}^B = \dot{u}_{\phi,s}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^0 = \dot{u}_r r^{-1}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^B = \dot{u}_\phi \psi_z r^{-1},$$

$$\dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 = \frac{1}{2} (\dot{u}_\phi + \dot{u}_{r,s} \psi_r + \dot{u}_{z,s} \psi_z), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0 = \frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}, \quad \dot{\omega}_{s\beta} = -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}.$$

Здесь $\dot{u}_s(s, t), \dot{u}_\xi(s, t)$ – скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали; $\dot{u}_\phi(s, t), \dot{u}_\beta(s, t)$ – угловые скорости поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения и относительно оси вращения; $\dot{\varepsilon}_{ij}^0, \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^B$ – компоненты скоростей деформаций срединной поверхности и изгиба; $\dot{\omega}_{s\beta}$ – скорость вращения элемента.

Компоненты тензоров скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений σ_{ij} определяются через скорости упругих компонент деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$:

$$\dot{\sigma}_{ss} = \frac{E}{1-\mu^2} (\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{E}{1-\mu^2} (\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{ss}^e), \quad \dot{\sigma}_{s\beta} = \frac{E}{1+\mu} \dot{\varepsilon}_{s\beta}^e,$$

$$\dot{\sigma}_{s\xi} = \frac{E}{1+\mu} \dot{\varepsilon}_{s\xi}^e, \quad \sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\beta\xi} = 0, \quad D_J \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{jk} \dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj}, \quad i, j, k = s, \beta,$$

$$\sigma_{ij} = \int_0^t D_J \sigma_{ij} dt \quad i, j = s, \beta, \quad \sigma_{s\xi} = \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi} dt,$$

где D_J – производная по Яуманну, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к её срединной поверхности при кручении. Причем местная сопутствующая система координат $Os\xi$ обуславливается формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, т.е. она является лагранжевой только в случае осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Металлические трубки при чистом кручении, как

показывают эксперименты, теряют устойчивость при углах закручивания порядка $\frac{\pi}{12}$ с образованием неосесимметричных форм. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи с кручением, т.к. за базовую берется лагранжева система координат осесимметричной задачи.

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением [10]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} n_{ij}, \quad n_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}}, \\ \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} &= \sigma_T^2(\kappa), \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} - \rho_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta}), \\ \dot{\rho}_{ij} &= g_1\dot{\varepsilon}_{ij}^p - g_2\rho_{ij}\dot{\kappa}, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_T(\kappa)$ – радиус поверхности текучести; κ – параметр Одквиста, δ_{ij} – символ Кронекера; ρ_{ij} – тензор микронапряжений; g_1, g_2 – модули анизотропного упрочнения; параметр $\dot{\lambda}$ определяется из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. При сложном нагружении память материала, обусловленная кинематическим упрочнением, ограничена областью малых изменений деформаций текущего состояния. При больших сдвиговых деформациях осцилляций компонент тензора напряжений не возникает, т.к. тензор микронапряжений ρ_{ij} определяется не тензором пластических деформаций, а интегро-дифференциальными соотношениями с затухающей памятью.

Вариационное уравнение движения оболочки выводится из уравнения баланса мощностей виртуальных работ:

$$\int_0^L \left\{ (Q\psi_r + N_S\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_S\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + M_S\delta\dot{u}_{\phi,s} + rT\delta\dot{u}_{\beta,s} + (M_\rho\ddot{u}_z - p_z)\delta\dot{u}_z + \right. \\ \left. + \left[r^{-1}N_\beta + M_\rho(\ddot{u}_r - r\dot{u}_\beta^2) - p_r \right] \delta\dot{u}_r + (Q + r^{-1}M_\beta\psi_z + J_\rho\ddot{u}_\phi)\delta\dot{u}_\phi + r^2M_\rho\ddot{u}_\beta\delta\dot{u}_\beta \right\} rds - \\ - \left[r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z + M^B\delta\dot{u}_\phi + P_\beta\delta\dot{u}_\beta) \right]_{S=0,L} = 0.$$

Здесь ρ – плотность материала; P_r, P_z, P_β, M^B – внешние усилия и изгибающий момент, приложенные к контуру оболочки; p_r, p_z – поверхностные нагрузки; $N_s, N_\beta, T, Q, M_s, M_\beta$ – внутренние усилия и моменты; M_ρ, J_ρ – масса и момент инерции.

Решение полученной системы уравнений строится по явной конечно-разностной схеме «крест» второго порядка точности [13] и сводится к рекуррентной схеме счета скоростей перемещений, координат узлов сетки и толщин оболочки на каждом временном шаге по времени.

3. Численное и экспериментальное исследование осесимметричной потери устойчивости

При численном моделировании используется диаграмма деформирования [11], полученная экспериментально-расчетным методом [12] при растяжении трубчатых образцов из стали 12X18H10T ($L=92$ мм, $R=14,5$ мм, $h=1$ мм) до момента разрушения. При квазистатическом нагружении начальное распределение скоростей перемещений вдоль оболочки полагается линейным, а скорость перемещения торца оболочки – постоянной, чтобы вклад сил инерции в решении задачи был пренебрежимо мал.

Исследуется упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки при совместном кинематическом действии растяжения и кручения. Один торец оболочки жестко защемляется, второй – перемещается с постоянными осевой \dot{u}_z и угловой \dot{u}_β скоростями.

Мощность суммарной работы \dot{A} осевой силы F и крутящего момента M можно выразить через обобщенную силу W :

$$\dot{A} = F\dot{u}_z + M\dot{u}_\beta = LW\dot{\varepsilon}_I, \quad \dot{\varepsilon}_I = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{zz}^2 + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{z\beta}^2}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\dot{u}_z}{L}, \quad \dot{\varepsilon}_{z\beta} = R\frac{\dot{u}_\beta}{L},$$

$$W = \frac{\left(F + \sqrt{3}q\frac{M}{R}\right)}{\sqrt{1+q^2}}, \quad q = R\frac{\dot{u}_\beta}{\sqrt{3}\dot{u}_z}, \quad F^* = \frac{F}{F_T}, \quad M^* = \frac{M}{M_T}, \quad W^* = \frac{W}{W_T},$$

$$F_T = W_T = 2\pi Rh\sigma_T, \quad M_T = \frac{2\pi hR^2\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

Кинематический параметр q характеризует «соотношение кручения и растяжения» (при чистом кручении $q = \infty$, при одноосном растяжении $q = 0$, при комбинированном нагружении $0 < q < \infty$).

За критерий потери устойчивости процесса пластического деформирования с локализацией деформаций в виде шейки принимается условие $\frac{dW}{d\varepsilon_I} = 0$. Этот критерий является обобщением условия Консидера для сложных процессов нагружения.

На рис. 1 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений безразмерного крутящего момента M^* (а) и осевой силы F^* (б) при кинематическом параметре $q = 0,1$. Расхождение в приведенных данных составляет менее 10%.

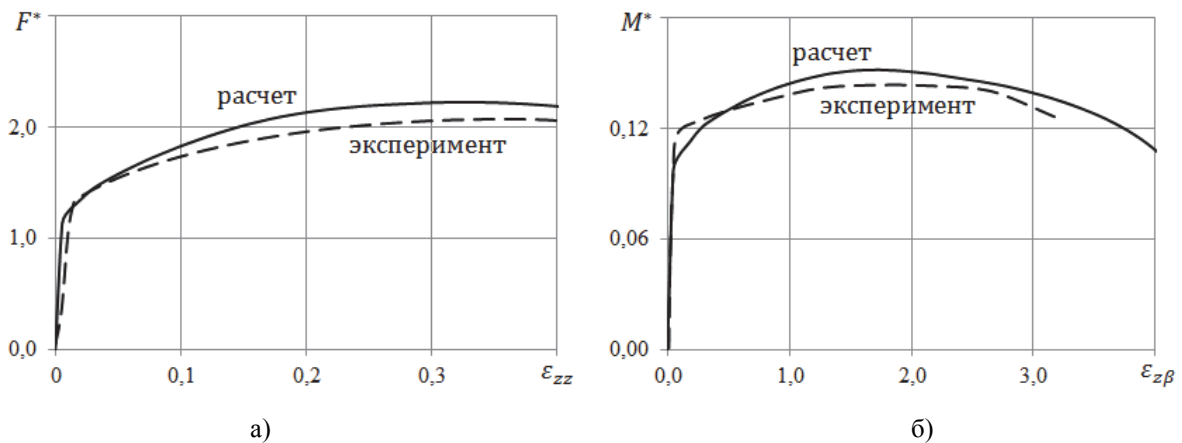


Рис. 1.

На рис. 2 приведены зависимости безразмерных силовых параметров от относительного удлинения образца ε_{zz} (а) и параметра Одквиста κ в шейке (б) при разных значениях кинематического параметра q . Светлыми маркерами на кривых отмечены моменты достижения обобщенной силой W^* максимальных значений, после прохождения через которые наблюдается потеря устойчивости оболочки.

Потеря устойчивости пластического деформирования с увеличением доли кручения (параметра q) происходит при меньшем относительном удлинении ε_{zz} и больших значениях накопленной пластической деформации κ , а зависимость $\varepsilon_{zz}(q)$ и $\kappa(q)$ стремится к линейной. До момента потери устойчивости форма оболочки определяется только ее относительным удлинением ε_{zz} и не зависит от доли кручения [12].

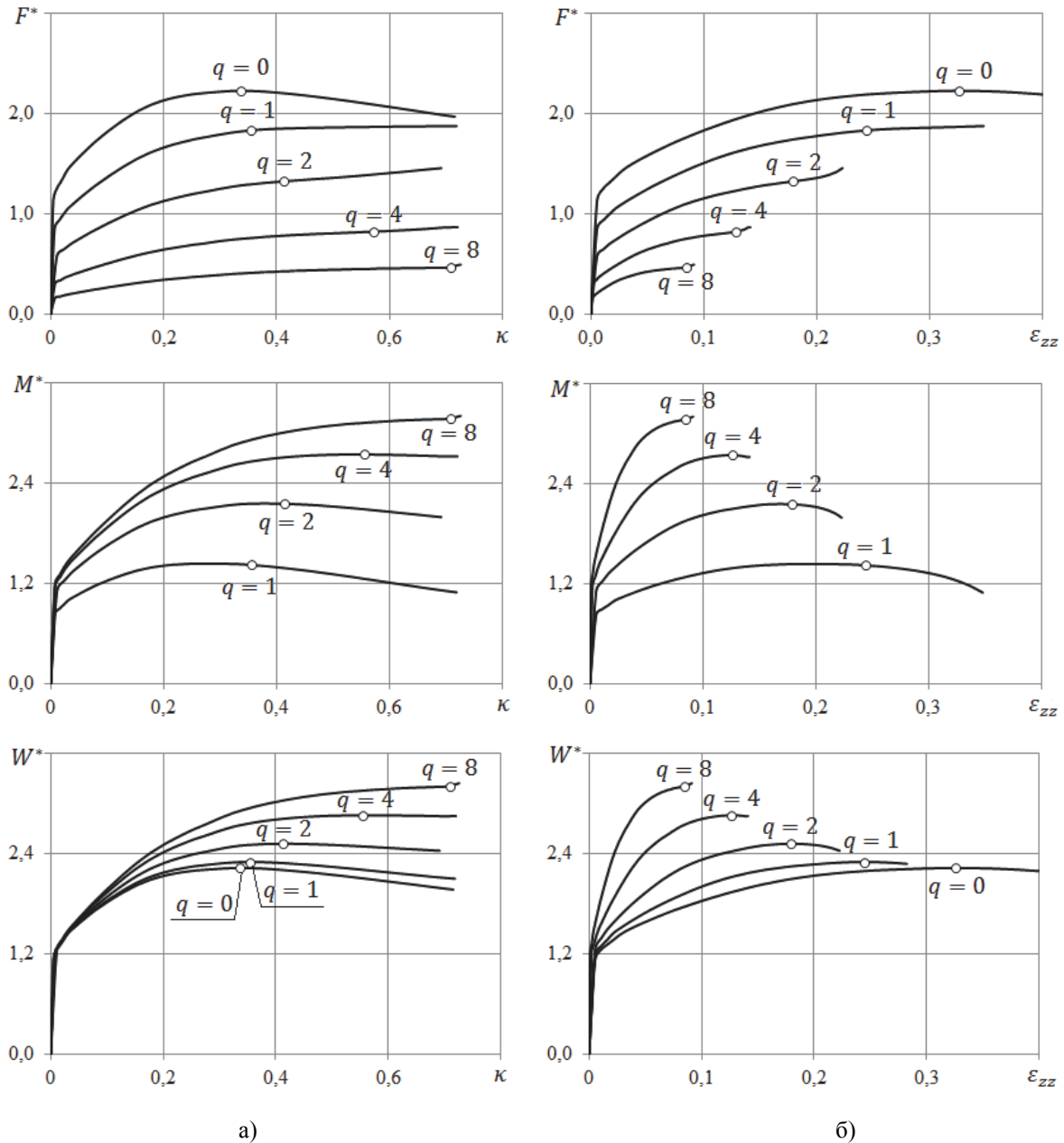


Рис. 2.

Исследуется задача цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении давлением-кручением по четырехзвенным ломанным OABCD (рис. 3). На участке OA задается линейный рост внутреннего давления Q до 30 МПа при отсутствии кручения; на участке АВ – падение давления до 20 МПа с одновременным кручением торца до угла $u_B = 14$ град; на участке ВС происходит рост давления до 28 МПа при неизменном угле закручивания; на участке CD – падение давления до 18 МПа с одновременным кручением до 28 град. На рис. 4 представлены значения безразмерного крутящего момента M^* в зависимости от условной сдвиговой деформации $\varepsilon_{z\varphi}$, полученные в расчете и эксперименте. Участки АВ, CD характеризуются ростом крутящего момента при падении давления, участок ВС – падением крутящего момента при увеличении давления.

Решение задачи показывает увеличение прогиба оболочки при наложении кручения на предварительно нагруженную давлением оболочку. Таким образом, в зависимости от предварительно заданного уровня давления при наложении кручения могут быть достигнуты предельные состояния оболочки.

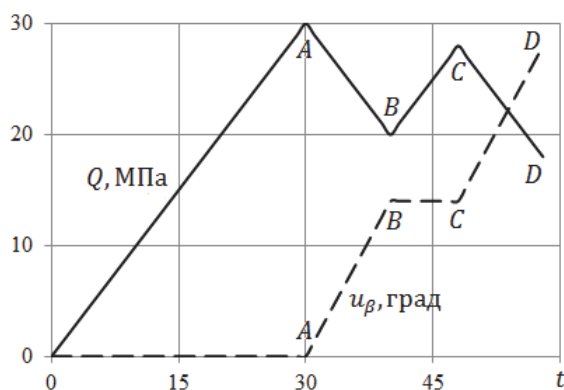


Рис. 3.

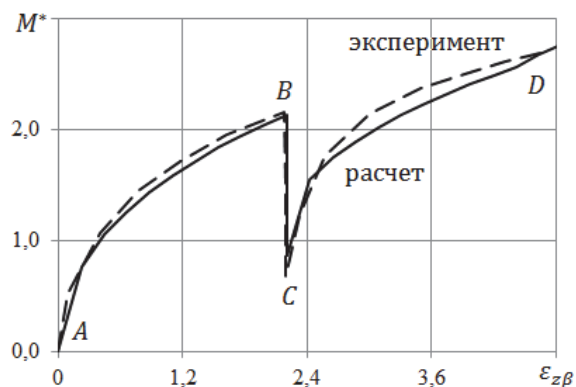


Рис. 4.

4. Исследование неосесимметричной потери устойчивости

Исследование неосесимметричной потери устойчивости оболочек вращения с учётом сложного нагружения, начальных несовершенств формы, волновых и краевых эффектов осуществляется на базе вычислительного комплекса «Динамика-3» [14].

При численном решении задачи с применением моментной схемы метода конечных элементов в трехмерной постановке для инициирования потери устойчивости задается начальное несовершенство формы оболочки в виде погиба ΔR , который определяется по следующей формуле:

$$\Delta R = A \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin(2\varphi),$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$ – угол поворота вокруг оси симметрии.

Для определения критической нагрузки применяется метод продолжения по параметру-времени при последовательном увеличении нагрузки во времени. Критической считается нагрузка, начиная с которой резко возрастают перемещения оболочки, ее кинетическая энергия или некоторый интегральный параметр, характеризующий ее формоизменение в целом.

Исследуется потеря устойчивости цилиндрической оболочки по неосесимметричной форме при чистом кручении. Один торец оболочки жестко зашпелен, второй – закручивается с постоянной угловой скоростью $\dot{i}_\beta = 0,3$ град/с до достижения угла закручивания 30 град. Неосесимметричная потеря устойчивости оболочки в расчете и эксперименте наблюдается по второй форме в окружном направлении, т.е. в зоне потери устойчивости поперечное сечение оболочки приобретает форму эллипса.

На рис. 5 приведены расчетные и экспериментальные зависимости безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\epsilon_{z\beta}$ при кручении.

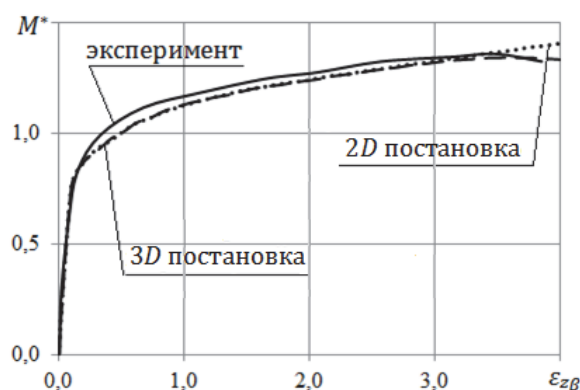


Рис. 5.

До момента потери устойчивости ($\varepsilon_{z\beta} < 3,2$) результаты расчетов по двумерной и трехмерной методикам совпадают. Потеря устойчивости по неосесимметричной форме и закритическое поведение оболочки хорошо описывается трехмерной моделью (расхождение с экспериментом составляет менее 8 %). Следует отметить, что возникающие при чистом кручении кольцевые напряжения остаются малыми и составляют менее 0,1 % от сдвиговых.

Исследуется потеря устойчивости и закритическое поведение цилиндрической оболочки при последовательном нагружении растяжением-кручением. Один торец оболочки жестко защемляется, второй – перемещается с постоянной осевой скоростью $\dot{u}_z = 0,0005$ м/с до достижения удлинения оболочки $\varepsilon_{zz} = 15\%$, затем растягивающая нагрузка снимается, и свободный торец закручивается с постоянной угловой скоростью $\dot{u}_\beta = 0,3$ град/с до потери устойчивости.

На рис. 6 приведены расчетные и экспериментальные зависимости безразмерной осевой силы F^* от относительного удлинения образца ε_{zz} (а) и крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\varepsilon_{z\beta}$ (б) при последовательном нагружении растяжением-кручением.

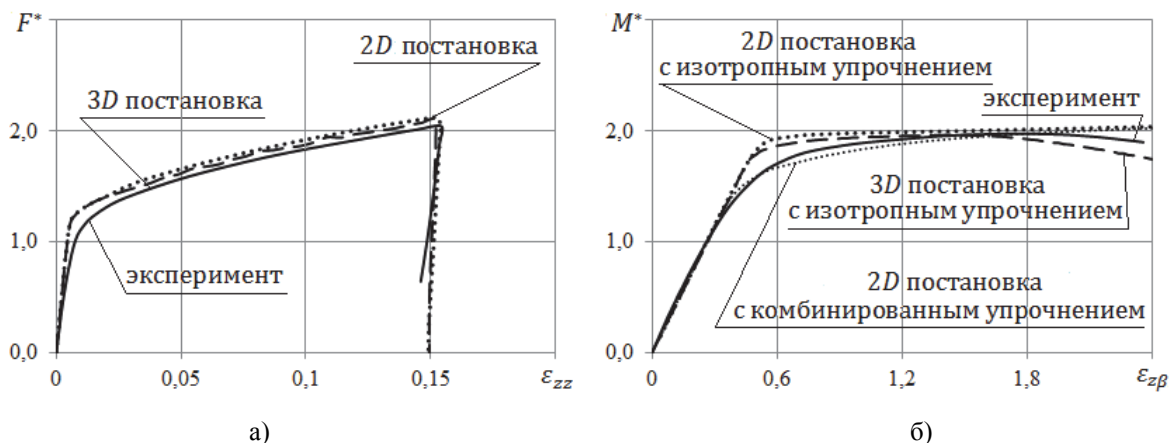


Рис. 6.

При одноосном растяжении образца (простом нагружении) параметры НДС, полученные с учетом изотропного и кинематического упрочнения в двумерной и трехмерной постановках, совпадают и хорошо согласуются с экспериментальной кривой (погрешность в определении F^* составляет менее 6 %). При наложении кручения на предварительно нагруженную оболочку в начале процесса наблюдается расхождение между результатами расчета – погрешность в вычислении безразмерного крутящего момента M^* при изотропном упрочнении составляет 12%, а при комбинированном – менее 3%. Учет комбинированного упрочнения позволяет точнее описать начало процесса сложного упругопластического деформирования при малых деформациях кручения ($\varepsilon_{z\beta} < 1\%$).

При развитых деформациях кручения расчетные кривые сближаются, т.к. память материала ограничена областью малых деформаций [11]. Потеря устойчивости по неосесимметричной форме описывается с использованием трехмерной модели. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Предварительное нагружение образца вызывает потерю устойчивости на более ранней стадии деформирования – критическое значение условной сдвиговой деформации $\varepsilon_{z\beta}$ уменьшается примерно в 2 раза, а крутящего момента M^* – возрастает на 30%. При комбинированном нагружении разрушение происходит по винтовой поверхности с максимальными сдвиговыми деформациями в зависимости от соотношения растяжения и кручения.

5. Заключение

Разработанная методика позволяет проводить численное моделирование обобщенных осесимметричных упругопластических процессов деформирования и оценивать предельные состояния оболочек вращения в широком диапазоне скоростей нагружения от квазистатических до динамических.

Проведенные исследования показывают, что при монотонном комбинированном нагружении могут быть достигнуты предельные состояния в рамках осесимметричной постановки задачи без потери устойчивости по неосесимметричным формам. При кручении и последовательном нагружении растяжением-кручением и внутренним давлением-кручением происходит потеря устойчивости осесимметричного процесса деформирования по неосесимметричным формам при малых деформациях кручения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-48-02126 p_поволжье_a).

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т.1. Устойчивость. - М. ФИЗМАТЛИТ. 2007. – 448 с.
2. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация // Эдиториал УРСС Москва, 1999 — 224 с.
3. Коробейников, С. Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения / С. Н. Коробейников // Вычисл. технологии. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 39-59.
4. Аннин, Б. Д. Поведение материалов в условиях сложного нагружения / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. – Новосибирск.: Изд-во СО РАН. – 1999. – 341 с.
5. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении / В. Г. Баженов, М. С. Баранова, А. И. Кибец и др. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 86-105.
6. Баженов, В. Г. Устойчивость и критическое состояние оболочек вращения при осевом ударе / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 28-33.
7. Баженов, В. Г. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев // Механика твердого тела. – 2001. – № 5. – С. 156-173.
8. Моделирование процессов деформирования и локализации пластических деформаций при кручении-растяжении тел вращения / В. Г. Баженов, С. В. Зефирова, Л. Н. Крамарев, Е. В. Павленкова // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 2. – С. 342-350.
9. Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах / Р. А. Васин, А. А. Ильющин, П. А. Моссаковский // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 2. – С. 177-184.
10. Chaboche, J. L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity / J. L. Chaboche // Inter. J. of Plasticity. – 1989. – Vol. 5, № 3. – P. 247-302.
11. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях / В. Г. Баженов, Д. В. Жегалов, Е. В. Павленкова // Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С. 57-66.
12. Пат. 2324162 РФ, МПК G01N003/00. Способ определения деформационных и прочностных свойств материалов при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии / Баженов В.Г. и др.; заявитель и патентообладатель НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. – № 2006115805/28; опубл. 10.05.2008, Бюл. № 13.
13. Артемьева А. А., Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // ПММ, 2015. Т.79, вып.4. С.558-569.
14. Программный продукт «Пакет прикладных программ для решения трехмерных задач нестационарного деформирования конструкций, включающих массивные тела и оболочки Динамика-3» (ППП «Динамика-3»). Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU. ME20. H00338.

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДЁННОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕСУРСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ ПРИ МЕХАНИЗМАХ ИСЧЕРПАНИЯ, СОЧЕТАЮЩИХ УСТАЛОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТЕРИАЛА

И.А. Волков, Ю.Г. Коротких, И.С. Тарасов, И.В. Сметанин

*ФГБОУ ВО Волжский государственный университет водного транспорта,
Нижний Новгород, Россия, ptptmvgavt@yandex.ru*

Аннотация. С позиции механики повреждённой среды (МПС) развита математическая модель, описывающая процессы накопления повреждений в конструкционных сталях при механизмах деградации, сочетающих усталость и ползучесть материала. Проведены численные исследования процессов вязкоупругопластического деформирования стали 12Х18Н9 и выполнено сравнение полученных численных результатов с данными натуральных экспериментов. Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных позволяют сделать вывод о достоверности определяющих соотношений МПС и методики определения материальных параметров при совместном действии механизмов усталости и ползучести.

Ключевые слова: пластичность, ползучесть, малоцикловая усталость, многоцикловая усталость, механика повреждённой среды, базовый эксперимент, повреждённость, материальные параметры.

1. Введение

В течение длительного срока службы материал конструктивных элементов оборудования и систем ответственных инженерных объектов (ОИО) срок службы которых составляет несколько десятков лет (атомные энергетические установки, нефтехимическое оборудование, резервуары для хранения газообразных и сжиженных химических продуктов и др.), работающих в условиях нестационарного термосилового нагружения, накапливает усталостные повреждения, приводящие к ухудшению начальных прочностных характеристик, образованию и развитию трещин. Процессы накопления повреждений являются многомасштабными и многостадийными эволюционными процессами. Они развиваются одновременно на разных масштабных уровнях: атомных, дислокационных, субструктурных и структурных, что означает необходимость совмещения микроскопических, мезоскопических и макроскопических моделей [1,2]. Значительное время эти изменения происходят скрытно. Кроме того наиболее опасные зоны, определяющие ресурс элемента, как правило, недоступны для средств неразрушающего контроля. Для гарантированной безопасной эксплуатации ОИО и обоснованного продления их службы сверх нормативных сроков, необходимо контролировать темпы развития повреждённости в наиболее опасных зонах конструктивных элементов (определять выработанный ресурс), а также прогнозировать развитие этих процессов до предельных состояний (определять остаточный ресурс).

Ресурс элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур T ($T > 0,5 T_{пл}$, $T_{пл}$ – температура плавления) и циклических механических воздействий, определяется в основном физическими процессами деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов процессами малоцикловой усталости и накопления повреждений в результате ползучести, которые приводят к одному из наиболее опасных типов разрушения – хрупкому разрушению конструкций, изготовленных из пластичных материалов.

Особенностью разрушения элементов конструкций в результате действия малоцикловой усталости (МЦУ) является постепенный характер накопления повреждений от циклического действия пластических деформаций в зонах конструктивной концентрации повреждений при большом общем запасе прочности [1, 2, 11, 15–17].

Зависимость долговечности материала от длительности (частоты) цикла и от наличия выдержек напряжения в цикле, протекающих на фоне повышенных постоянных или меняющихся температур T ($T = 0,35 - 0,7 T_{пл}$), обусловлена накоплением повреждений от развивающихся деформаций ползучести.

Существующие на сегодняшний день нормативные методы оценки ресурса элементов конструкций не учитывают реальных процессов, протекающих в материале. В связи с этим

становится необходимой разработка новых методов оценки ресурса элементов конструкции на базе соответствующих уравнений термовязкопластичности, уравнений накопления повреждений и критериев разрушения со всесторонним их обоснованием посредством проведения соответствующих натуральных и численных экспериментов на лабораторных образцах и численного анализа процессов деформирования и разрушения элементов конструкций в эксплуатационных условиях.

2. Определяющие соотношения механики повреждённой среды

Модель повреждённой среды состоит из трёх взаимосвязанных частей:

- соотношений, определяющих вязкопластическое поведение материала с учётом зависимости от процесса разрушения;
- уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- критерия прочности повреждённого материала.

2.1. Соотношения термовязкопластичности. Определяющие соотношения термовязкопластичности базируются на следующих основных положениях:

– тензоры деформаций e_{ij} и скоростей деформаций \dot{e}_{ij} представляют сумму «мгновенной» и «временной» составляющих. «Мгновенная» составляющая тензора деформаций включает упругие деформации e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e (не зависящие от истории нагружения и определяющиеся конечным состоянием процесса) и пластические – e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p (зависящие от истории процесса нагружения). Приращения пластических компонент тензора деформаций не зависят от «временной» истории изменения температуры и внешних нагрузок в отличие от деформаций ползучести e_{ij}^c, \dot{e}_{ij}^c ;

– начальная поверхность текучести для различных температур описывается поверхностью в форме Мизеса; эволюция изменения поверхности текучести описывается изменением ее радиуса C_p и перемещением ее центра ρ_{ij}^p ;

– справедлив принцип градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения;

– изменение объема тела упруго $e_{ii}^p = e_{ii}^c \equiv 0$;

– в пространстве напряжений существует поверхность ползучести радиуса C_c , вектор скорости деформации ползучести к которой направлен по нормали;

– рассматриваются начально изотропные среды;

– учитывается только анизотропия, вызванная процессами необратимого деформирования.

В упругой области связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций устанавливается с помощью закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma &= 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij}, \quad e'_{ij}{}^e = e'_{ij}{}^e - e'_{ij}{}^p - e'_{ij}{}^c, \\ \dot{\sigma} &= 3K[\dot{e} - (\dot{\alpha}T)] + \dot{K}\sigma/K, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \dot{G}\sigma'_{ij}/G, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\sigma, \dot{\sigma}, e, \dot{e}$ – шаровые, а $\sigma'_{ij}, \dot{\sigma}'_{ij}, e'_{ij}, \dot{e}'_{ij}$ – девиаторные составляющие тензоров напряжений σ_{ij} , деформаций e_{ij} и их скоростей $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{e}_{ij}$ соответственно; T – температура; T_0 – начальная температура; $K(T)$ – модуль объемного сжатия; $G(T)$ – модуль сдвига; $\alpha(T)$ – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Эффекты монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений учитываются с помощью поверхности текучести, уравнение которой имеет вид:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^p. \quad (2)$$

Для описания сложных циклических режимов деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность циклической «памяти». Уравнение поверхности «памяти», позволяющее при расчетах отделить монотонные процессы деформирования от циклических, имеет вид:

$$F_p = \rho_{ij}^p \rho_{ij}^p - \rho_{\max}^2 = 0 \quad (3)$$

где ρ_{\max} – максимальный за историю нагружения модуль переменной ρ_{ij}^p .

Принимается эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести вида [2]:

$$\dot{C}_p = \left[q_\chi H(F_p) + a(Q_s - C_p) \Gamma(F_p) \right] \dot{\chi} + q_3 \dot{T} \quad (4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_p) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt \quad (5)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1-A) q_1}{A \psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1-A) Q_1}{A \psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \quad (i=1, 2), \quad (6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^e}{(\dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e)^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}}, \quad (7)$$

$$H(F_p) = \begin{cases} 1, & F_p = 0 \wedge \rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p > 0 \\ 0, & F_p < 0 \vee \rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_p) = 1 - H(F_p). \quad (8)$$

Здесь q_1, q_2, q_3 – модули изотропного упрочнения, соответствующие монотонным лучевым путям нагружения (q_1), излому траектории деформирования на 90° (q_2), температурному изменению радиуса поверхности текучести (q_3); a – постоянная, определяющая скорость процесса стабилизации формы петли гистерезиса циклического деформирования материала; Q_s – стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных ρ_{\max} и T ; χ и χ_m – длины траекторий пластического деформирования материала при циклическом и монотонном нагружениях; C_p^0 – начальное значение радиуса поверхности текучести.

Первый член уравнения (4) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования ($H(F_p)=1$ и $\Gamma(F_p)=0$), второй член – циклическое упрочнение материала ($H(F_p)=0$ и $\Gamma(F_p)=1$), а третий – изменение радиуса поверхности текучести при изменении температуры. В целом уравнение (4) описывает локальную анизотропию пластического упрочнения в зависимости от параметра A , характеризующего отклонение вектора догрузки от нормали к поверхности текучести в точке нагружения. Операторы $H(F_p)$ и $\Gamma(F_p)$ позволяют автоматически провести разделение процессов монотонного и циклического деформирования.

Уравнение для смещения поверхности текучести основано на гипотезе А.А. Ильюшина, заключающейся в том, что упрочнение зависит от истории деформирования лишь на некоторой ближайшей части траектории (запаздывание векторных свойств). Внутренняя переменная ρ_{ij}^p , учитывающая анизотропию упрочнения пластического деформирования, удовлетворяет эволюционному уравнению [2, 24]:

$$\dot{\rho}_{ij}^p = g_1^p \dot{\epsilon}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} - g_3^p \rho_{ij}^p \dot{T}, \quad \rho_{ij}^p = \int_0^t \dot{\rho}_{ij}^p dt, \quad (9)$$

где $g_1^p > 0, g_2^p > 0$ и $g_3^p > 0$ – модули анизотропного упрочнения. Первый и второй члены этого уравнения отвечают за анизотропную часть деформационного упрочнения, а третий – за изменение ρ_{ij} в результате воздействия температуры T .

Уравнение (9) описывает известный пространственный эффект Баушингера и анизотропию векторных свойств при изменении направления деформирования (изломе траектории деформирования). Введение второго члена в это соотношение моделирует исчезающую память внутренней переменной ρ_{ij}^p (скорость изменения ρ_{ij} является разностью между двумя составляющими $g_1^p \dot{\epsilon}_{ij}^p$ и $g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi}$).

Для характеристики поведения поверхности «памяти» необходимо сформулировать эволюционное уравнение для ρ_{\max} :

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{(\rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p) H(F_p)}{(\rho_{mn}^p \rho_{mn}^p)^{1/2}} - g_2 \rho_{\max} \dot{\lambda} - g_3 \rho_{\max} \dot{T}. \quad (10)$$

Здесь и далее для любой величины \dot{B} , заключенной в угловые скобки $\langle \dot{B} \rangle$, выполняются условия $\langle \dot{B} \rangle = \begin{cases} \dot{B} & \text{при } \dot{B} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{B} \leq 0 \end{cases}$.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций подчиняются закону градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda S_{ij}, \quad (11)$$

где λ – коэффициент пропорциональности, определяемый из условия прохождения новой поверхности текучести через конец вектора девиатора напряжений в конце этапа нагружения.

Материальные параметры, входящие в выражения (4)–(10), находятся из различных экспериментов: q_1 , q_3 , g_1^p, g_2^p и g_3^p – из опытов на одноосное растяжение-сжатие цилиндрических трубчатых образцов по специальным циклическим программам испытаний [2]; Q_1 – из испытаний на блочное циклическое симметричное нагружение с заданной амплитудой деформаций в каждом блоке до стабилизации петли гистерезиса на каждом уровне амплитуд деформаций; параметр a – из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных закономерностей стремления C_p к установившемуся состоянию; q_2 – из эксперимента на сложное нагружение: растяжение до некоторого значения e_{11}^{p*} и последующее кручение с построением траектории напряжений в пространстве $\sigma_{11}-\sigma_{12}$; Q_2 – из эксперимента на двухблочное циклическое деформирование с одинаковой заданной интенсивностью амплитуды деформаций до стабилизации петли гистерезиса в каждом блоке: первый блок – это симметричное циклическое растяжение-сжатие, второй – последующее циклическое симметричное нагружение образца кручением.

Если величина напряжений, температура и скорость нагружения таковы, что эффекты ползучести существенны, параметры процесса деформирования материала должны определяться с учетом процесса ползучести на этапе нагружения. Это влияние учитывается при определении χ_p с учетом средней скорости деформации ползучести \dot{e}_{ij}^c на этапе нагружения Δt . Для установления связи между тензором скорости деформации ползучести \dot{e}_{ij}^c и девиатором напряжений σ'_{ij} предполагается, что уравнение потенциальной функции ползучести

$$F_c = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - C_c^2 = 0, \quad (12)$$

где σ'_{ij} – совокупность напряжённых состояний, отвечающих (с определённым допуском) начальной скорости ползучести (см. рис. 1), а $C_c = C_c(\chi_c, T)$ – экспериментально определяемая скалярная функция переменных χ_c и T .

Из условия градиентальности вектора скорости деформации ползучести к поверхности (12), имеем:

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_u}, \quad (13)$$

где $\sigma_u = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2}$ – интенсивность тензора напряжений, λ_c – коэффициент пропорциональности (является функцией температуры и параметром), k – экспериментально определяемый параметр материала.

Интенсивность тензора скорости деформации ползучести имеет вид:

$$\dot{e}_u^c = \sqrt{(\dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c)} = \lambda_c \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k. \quad (14)$$

С учётом этого длина траектории деформации ползучести примет вид:

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_u^c = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_c \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k, \quad \chi_c = \int_0^t \dot{\chi}_c dt. \quad (15)$$

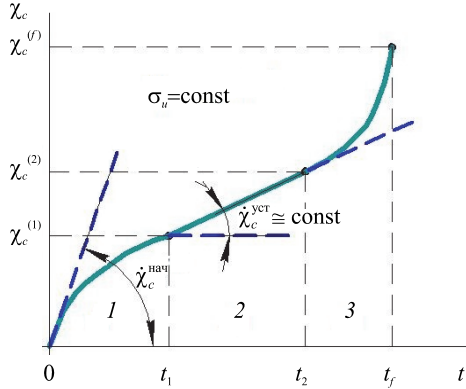


Рис. 1.

Зависимость χ_c от времени процесса t при постоянной интенсивности тензора напряжений $\sigma_u = const$ при многоосном деформировании по лучевой траектории имеет вид представленный на рис. 1.

На кривой $\chi_c \sim t$ (рис. 1) с определённой долей условности можно выделить три участка:

- 1) участок неустановившейся ползучести ($0 - \chi_c^{(1)}$) – скорость деформации ползучести убывает;
- 2) участок установившейся ползучести ($\chi_c^{(1)} - \chi_c^{(2)}$) – скорость деформации ползучести приблизительно постоянна $\dot{\chi}_c \cong const$;
- 3) участок неустановившейся ползучести ($\chi_c > \chi_c^{(2)}$) – скорость деформации ползучести резко возрастает (предшествует разрушению).

Длина участков 1) – 3) зависит от величины σ_u .

При одноосном растяжении–сжатии лабораторного образца имеем:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}; \quad C_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_c; \quad \frac{\sigma_u - C_c}{C_c} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_c}{\sigma_c}, \quad (16)$$

$$\dot{e}_{11}^c = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda_c \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_c}{\sigma_c} \right)^k; \quad \chi_c^{(1)} = e_{11}^{c(1)}; \quad \chi_c^{(2)} = e_{11}^{c(2)}; \quad \dot{\chi}_c = \dot{e}_{11}^c,$$

где σ_c – минимальное значение напряжения σ_{11} ниже которого процессом ползучести можно пренебречь (функция температуры T), и диаграмма $\chi_c \sim t$ эквивалентна диаграмме $e_{11}^c \sim t$.

На участке 2) – ($e_{11}^{c(1)} \leq e_{11}^c \leq e_{11}^{c(2)}$) имеем

$$\lambda_c^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{e}_{11}^{уст}}{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_c}{\sigma_c} \right)^k}. \quad (17)$$

На участке 1) – ($0 \leq e_{11}^c \leq e_{11}^{c(1)}$):

$$\dot{e}_{11}^c = \dot{e}_{11}^{нач}, \quad \text{при } e_{11}^c = 0; \quad \dot{e}_{11}^c = \dot{e}_{11}^{уст}, \quad \text{при } e_{11}^c = e_{11}^{c(1)}.$$

Из этих условий получаем

$$\lambda_c^{(1)} = \lambda_c^{(2)} \left(\frac{\dot{e}_{11}^{нач}}{\dot{e}_{11}^{уст}} \right)^{\frac{e_{11}^c - e_{11}^{c(1)}}{e_{11}^{c(1)}}}. \quad (18)$$

Обобщая полученные соотношения на неодномерный случай, будем иметь

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_u}, \quad (19)$$

$$\text{где } \lambda_c = \begin{cases} 0, & \sigma_u \leq C_c \vee \chi_c = 0, \\ \lambda_c^{(1)}, & 0 \leq \chi_c \leq \chi_c^{(1)}, \\ \lambda_c^{(2)}, & \chi_c^{(1)} \leq \chi_c \leq \chi_c^{(2)}. \end{cases}$$

На участке 3) – (начало разрушения):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{\lambda_c^{(2)}}{(1-\omega)} r_c \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_u}, \quad (20)$$

где ω – поврежденность материала, а r_c – параметр материала.

Уравнения (12) – (20) описывают неустановившиеся и установившиеся участки кривой ползучести при разных уровнях напряжений и основные эффекты процесса ползучести при знакопеременном напряжении. Связь уравнений ползучести (12) – (20) с уравнениями (1) – (11), описывающими «мгновенные» пластические деформации, осуществляется на этапе нагружения через девиатор напряжений σ'_{ij} и соответствующий алгоритм определения $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ на этапе нагружения путем определенных соотношений между «временными» и «мгновенными» скалярными и тензорными величинами.

2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Экспериментальный и теоретический анализ процессов поврежденности материала позволяет представить эволюционное уравнение накопления повреждений в элементарном объеме материалов в следующем общем виде [2–6, 12, 13, 21, 23–26]:

$$\dot{\omega} = f_1(\theta) f_2(\beta) f_3(\omega) f_4(Z) \langle \dot{Z} \rangle,$$

где функция $f_1(\theta)$ описывает влияние кривизны траектории деформирования, $f_2(\beta)$ – вид (объемность) напряженного состояния, $f_3(\omega)$ – уровень накопленной поврежденности, $f_4(Z)$ – накопленную относительную энергию, затраченную на образование дефектов.

Конкретизация данного соотношения при усталости приводит к следующему виду уравнения накопления повреждений [2]:

$$\dot{\omega}_p = \frac{\alpha_p + 1}{r_p + 1} f_p(\beta) Z_p^{\alpha_p} (1 - \omega_p)^{-r_p} \langle \dot{Z}_p \rangle, \quad (21)$$

где

$$Z_p = \frac{W_p - W_a}{(W_p^f - W_a)}; \quad (22)$$

$$\langle \dot{Z}_p \rangle = \frac{\langle \dot{W}_p \rangle}{(W_p^f - W_a)}; \quad \dot{W}_p = \rho_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p; \quad (23)$$

$$f_p(\beta) = \exp(k_p \beta). \quad (24)$$

Учитывая тот факт, что к настоящему времени не имеется достаточно надежных систематизированных экспериментальных данных, характеризующих ползучесть материалов вплоть до разрушения в необходимом диапазоне рабочих нагрузок и температур и значительный разброс экспериментальных данных, эволюционное уравнение при ползучести необходимо формулировать в наиболее «простой» форме [23–26]:

$$\dot{\omega}_c = \frac{\alpha_c + 1}{r_c + 1} f_c(\beta) Z_c^{\alpha_c} (1 - \omega_c)^{-r_c} \langle \dot{Z}_c \rangle, \quad (25)$$

где

$$Z_c = \frac{W_c}{W_c^f}; \quad (26)$$

$$\langle \dot{Z}_c \rangle = \frac{\langle \dot{W}_c \rangle}{W_c^f}; \quad \dot{W}_c = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c; \quad (27)$$

$$f_c(\beta) = \exp(k_c \beta), \quad (28)$$

где ω_c и ω_p – величины поврежденности при ползучести и малоциклового (МЦУ) усталости соответственно; W_c^f и W_p^f – значения энергий, соответствующих образованию макроскопической

трещины при ползучести и усталости соответственно; $f_m(\beta)$, $m = c, p$ – функция параметра объёмности напряжённого состояния $\beta = \sigma/\sigma_u$; $W_p = \int_0^t \dot{W}_p dt$ и $W_c = \int_0^t \dot{W}_c dt$ – энергии, идущие на образование рассеянных усталостных повреждений при МЦУ и ползучести соответственно; W_a – значение W_p в конце фаз зарождения микродефектов при МЦУ; $k_c, k_p, k, \alpha_c, \alpha_p, r_c, r_p$ – материальные параметры, зависящие от температуры T .

С учетом того факта, что суммирование повреждений при малоциклового усталости начинается только после фазы зарождения ($W_p \geq W_a$), то процесс суммирования повреждений можно записать в виде:

$$\dot{\omega} = H \left(\frac{W_p}{W_a} - 1 \right) \dot{\omega}_p + \dot{\omega}_c, \quad (29)$$

где H – функция Хевисайда.

2.3. Критерий прочности повреждённого материала. В качестве критерия окончания фазы развития рассеянных микроповреждений (стадии образования макротрещины) принимается условие достижения величины повреждённости своего критического значения:

$$\omega = \omega_f \leq 1. \quad (30)$$

Интегрируя эволюционное уравнение накопления повреждений (21) – (30) совместно с определяющими соотношениями термовязкопластичности (1) – (20) и критерием разрушения (28) по известной истории термомеханического нагружения в данном элементарном объёме материала можно определить момент образования макроскопической трещины при механизме деградации, сочетающем усталость и ползучесть материала.

Определение основных характеристик процесса вязкопластического деформирования повреждённых материалов (параметров состояния), которые в общем случае описываются тензорами $\sigma_{ij}, e_{ij}, e_{ij}^p, \rho_{ij}^p, e_{ij}^c$ и скалярами $\chi, C_p, C_c, T, \omega$ и осуществляется при соответствующей формулировке определяющих соотношений МПС и линеаризации алгоритма определения λ сводится к написанию определяющих соотношений МПС в приращениях, которые зависят от выбранного шага Δt . Шаг по времени Δt может корректироваться при прохождении сложных участков траектории деформирования течения всего расчетного времени при условии устойчивости вычислений. Такой подход [1, 2] наиболее удобен при решении краевых задач механики деформируемого твердого тела и используется в данной работе.

В общем случае напряжения, пластические деформации и деформации ползучести определяются интегрированием уравнений термоползучести (12) – (20) четырёхточечным методом Рунге-Кутты с коррекцией девиатора напряжений и последующим определением напряжений согласно уравнений термопластичности (1) – (11) с учётом средней скорости деформации ползучести в момент времени: $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

3. Результаты исследований

Ниже проведена оценка достоверности вышеописанных определяющих соотношений МПС при механизмах деградации, сочетающих усталость и ползучесть материала. Суть данной проверки заключается в проведении численного моделирования кинетики НДС рабочей части цилиндрических сплошных лабораторных образцов и численного моделирования кинетики НДС и накопления повреждений с использованием экспериментально полученных материальных параметров и скалярных функций при механизмах деградации, сочетающих усталость и ползучесть материала. Полученные численные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными при аналогичных режимах деформирования.

Характерным режимом работы элементов конструкций энергетического оборудования является такой, при котором материал испытывает циклические нагрузки в результате достаточно быстрого изменения внешних нагрузок и температуры, сопровождающихся выдержками различной длительности на стационарных участках. Такой характер нагружения приводит к тому, что на участках быстрого изменения внешних нагрузок и температур основную роль играет эффект пластичности, а на стационарных участках – эффекты

ползучести. Взаимодействие данных эффектов влияет, как на кинетику НДС, так и на процессы деградации начальных прочностных свойств материалов (малоцикловую усталость, длительную прочность и их взаимодействие).

На рис. 2–4 представлены результаты расчёта по циклическому растяжению–сжатию цилиндрического образца из стали 12X18Н9 при температуре $T = 650^\circ\text{C}$ (см. табл. 1–4) для различных скоростных режимов деформирования. Заданной являлась история изменения деформаций («жёсткое нагружение» – рис. 2а, 3а, 4а). Для наглядности во всех трёх примерах была выбрана одна и та же история изменения амплитудных значений компонента тензора деформации ϵ_{11} изменения деформаций и её различная скоростная история.

Таблица 1. Значения модуля изотропного упрочнения $q_1^p(\chi_p, T)$ (МПа) стали 12X18Н9 при монотонных лучевых путях нагружения в зависимости от температуры T

χ_p	$T = 20^\circ\text{C}$	$T = 650^\circ\text{C}$
0	5660	2700
0,0005	5300	2700
0,001	5200	2700
0,002	4850	2650
0,003	4300	2600
0,004	3300	2450
0,005	2700	2300
0,006	2170	2100
0,007	1800	1870
0,008	1500	1700
0,01	1150	1400
0,015	820	1000
0,04	430	500
0,2	0	0

Таблица 2. Зависимость модуля температурного изменения радиуса поверхности текучести $q_3^p(\chi_p, T)$, (МПа) стали 12X18Н9 от температуры T

χ_p	$T = 20^\circ\text{C}$	$T = 650^\circ\text{C}$
0	0,3093	0,123
0,1	0,3093	0,104
0,3	0,3093	0,0756
0,6	0,3093	0,0756
0,9	0,3093	0,0756
1,2	0,2517	0,0756
10	0,2517	0,0756

Таблица 3. Зависимость радиуса поверхности ползучести $C_c(\chi_c, T)$, (МПа) для стали 12X18Н9 от температуры T

χ_c	$T = 400^\circ\text{C}$	$T = 650^\circ\text{C}$
0	78	53
0,0002	84,2	54
0,0004	89	54,8
0,0006	94,5	55,5
0,0008	96,5	56
0,001	99	56,4
0,0012	100	56,8
0,002	100,2	59,4
0,005	101	67
0,007	101,5	70,6
0,01	102,5	73,8

Таблица 4. Зависимость коэффициента пропорциональности $\lambda_c \cdot 10^5$, (МПа·с) стали 12Х18Н9 от параметра ψ и температуры T

$\psi = \left(\frac{\sigma_u - C_c}{C_c} \right)^k$	$T = 400^\circ \text{C}$	$T = 650^\circ \text{C}$
0	0	0
0,3	0	0,5
0,5	0,3	0,8
0,6	0,4	0,9
0,7	1	1,1
0,8	2,2	1,4
0,9	3,3	1,9
1	4,4	2,1
1,1	4,8	2,7
1,15	4,9	3,6
1,25	5,1	6,6
1,45	5,1	19,5
1,55	5,1	23,5
1,65	5,1	25,9
2	5,1	26,2

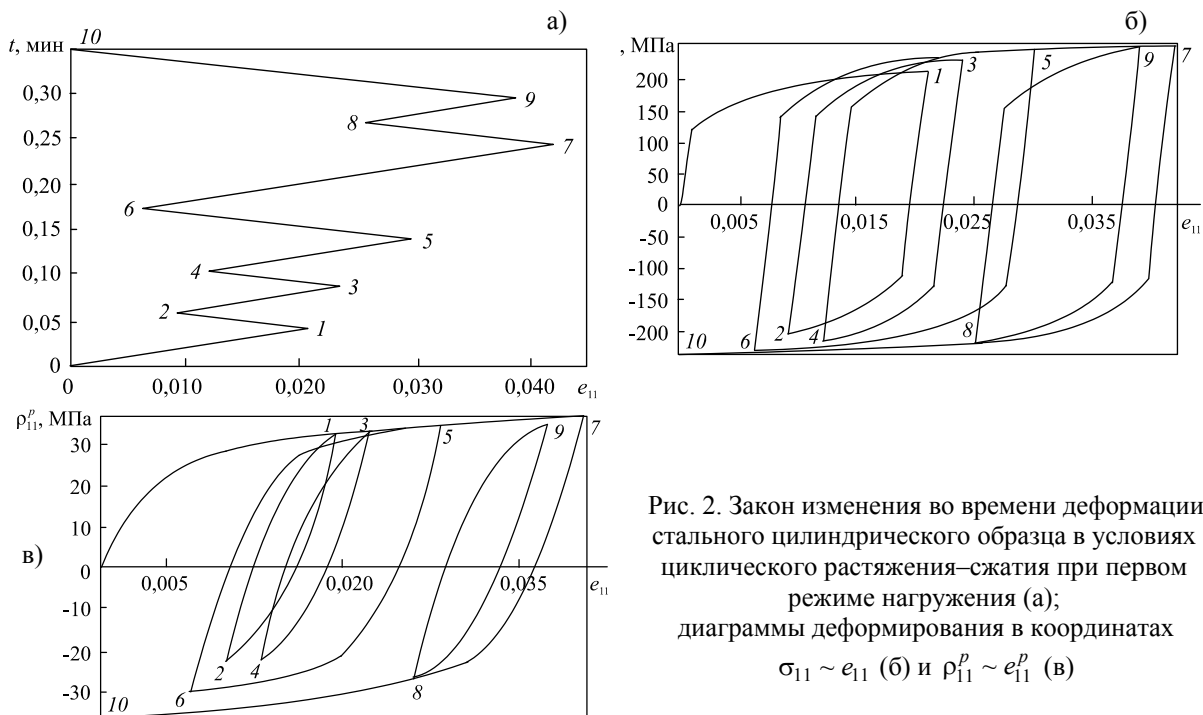


Рис. 2. Закон изменения во времени деформации стального цилиндрического образца в условиях циклического растяжения–сжатия при первом режиме нагружения (а); диаграммы деформирования в координатах $\sigma_{11} \sim e_{11}$ (б) и $\rho_{11}^p \sim e_{11}^p$ (в)

В первом (рис. 2а) и втором (рис. 3а) примерах скорость деформирования на всех этапах была постоянной, а в третьем (рис. 4а) – на участках 1–2, 6–7, 8–9, 10–11 скорость нагружения соответствовала второму режиму нагружения (рис. 3а), на остальных участках – первому (рис. 2а). На рис. 2 представлены результаты расчёта по первому режиму нагружения. Реализуется «быстрый» процесс – общее время нагружения $t = 0,35 \text{ мин}$, скорость деформации $\dot{e}_{11} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ мин}^{-1}$. На рис. 2б, 2в представлены соответствующие циклические диаграммы деформирования $\sigma_{11} - e_{11}$ и $\rho_{11}^p - e_{11}^p$. На диаграмме $\rho_{11}^p - e_{11}^p$ (рис. 2в) видно, что при реверсе нагрузки в точке 2 и дальнейшем монотонном нагружении, траектория 2–3 проходит через точку 1, дальнейшая траектория 1–3 проходит таким образом, как будто бы реализовывалось

нагружение по траектории 0–1–3. Аналогичное поведение наблюдается в циклах 3–4–5, 5–6–7 и 8–9–10 соответственно. На этих диаграммах видно проявление памяти материала на историю предварительного циклического нагружения.

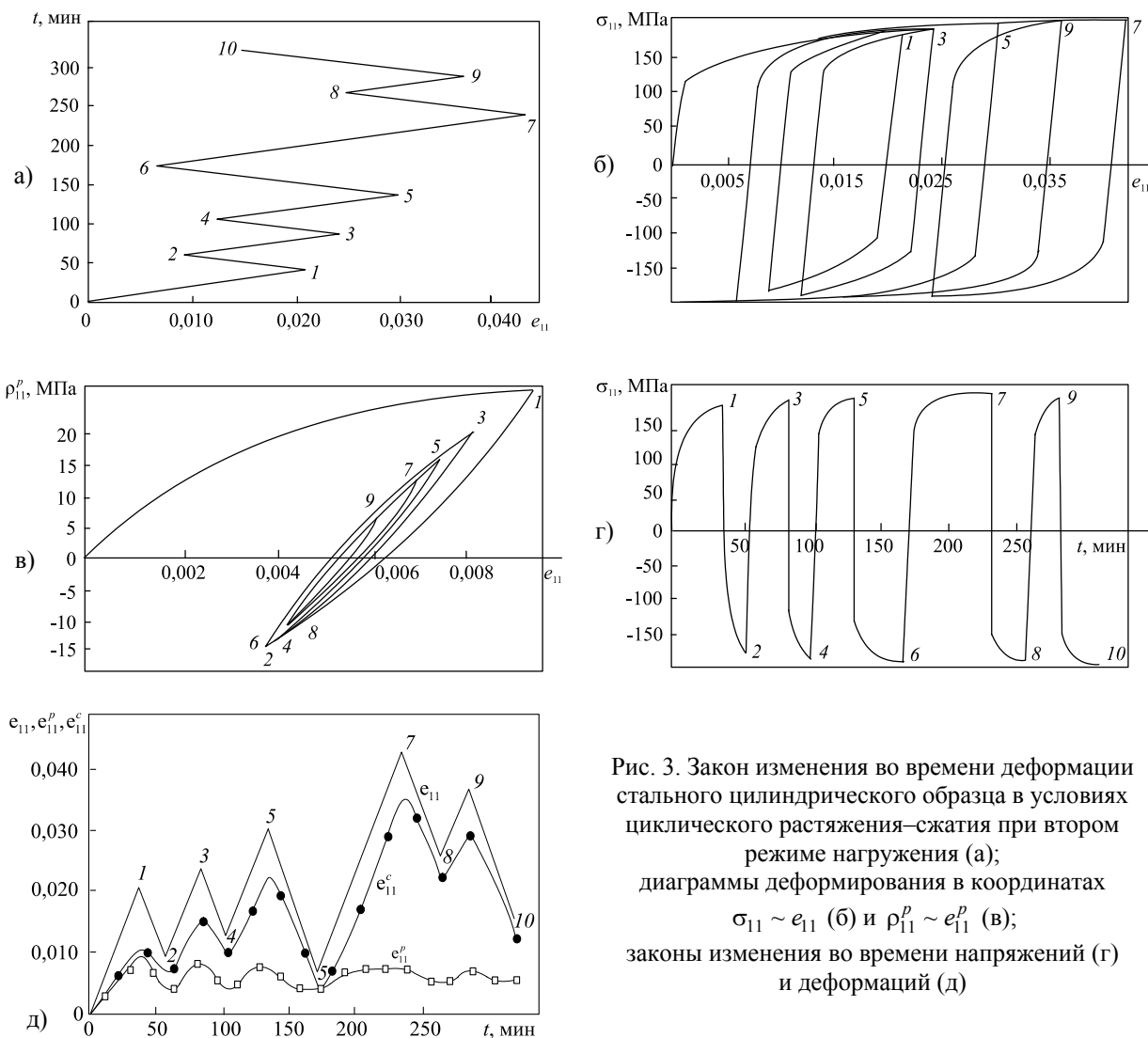


Рис. 3. Закон изменения во времени деформации стального цилиндрического образца в условиях циклического растяжения–сжатия при втором режиме нагружения (а); диаграммы деформирования в координатах $\sigma_{11} \sim e_{11}$ (б) и $\rho_{11}^p \sim e_{11}^p$ (в); законы изменения во времени напряжений (г) и деформаций (д)

На рис. 3 представлены результаты расчёта по второму режиму нагружения. Реализуется «медленный» процесс – общее время нагружения $t = 300$ мин, скорость деформации $\dot{e}_{11} = 6 \cdot 10^{-4}$ мин⁻¹. Видно, что в данном случае пластические деформации малы (точки на рис. 3д), а деформации ползучести (крестики на рис. 3д) значительные. Во втором примере с уменьшением скорости деформации \dot{e}_{11} возрастает роль реологических эффектов, что меняет картину циклического упругопластического деформирования рис. 2в и рис. 3в.

На рис. 4 представлены результаты расчёта по третьему режиму нагружения. Резкое уменьшение скорости деформации в точках 1, 6, 8 и 10 (рис. 4д) приводит к тому, что в первые моменты времени скорость деформации ползучести превышает полную скорость деформации материала, в результате чего на некоторых участках траекторий (1–2, 6–7, 8–9, 10–11) наблюдается релаксации напряжений (рис. 4б, 4г).

Сравнение численных результатов по различным режимам нагружения показывает, что различная история изменения скорости деформаций при одной и той же истории изменения амплитудного значения компоненты тензора деформации e_{11} приводит к различным вкладам пластической деформации и деформации ползучести в общий процесс деформирования материала.

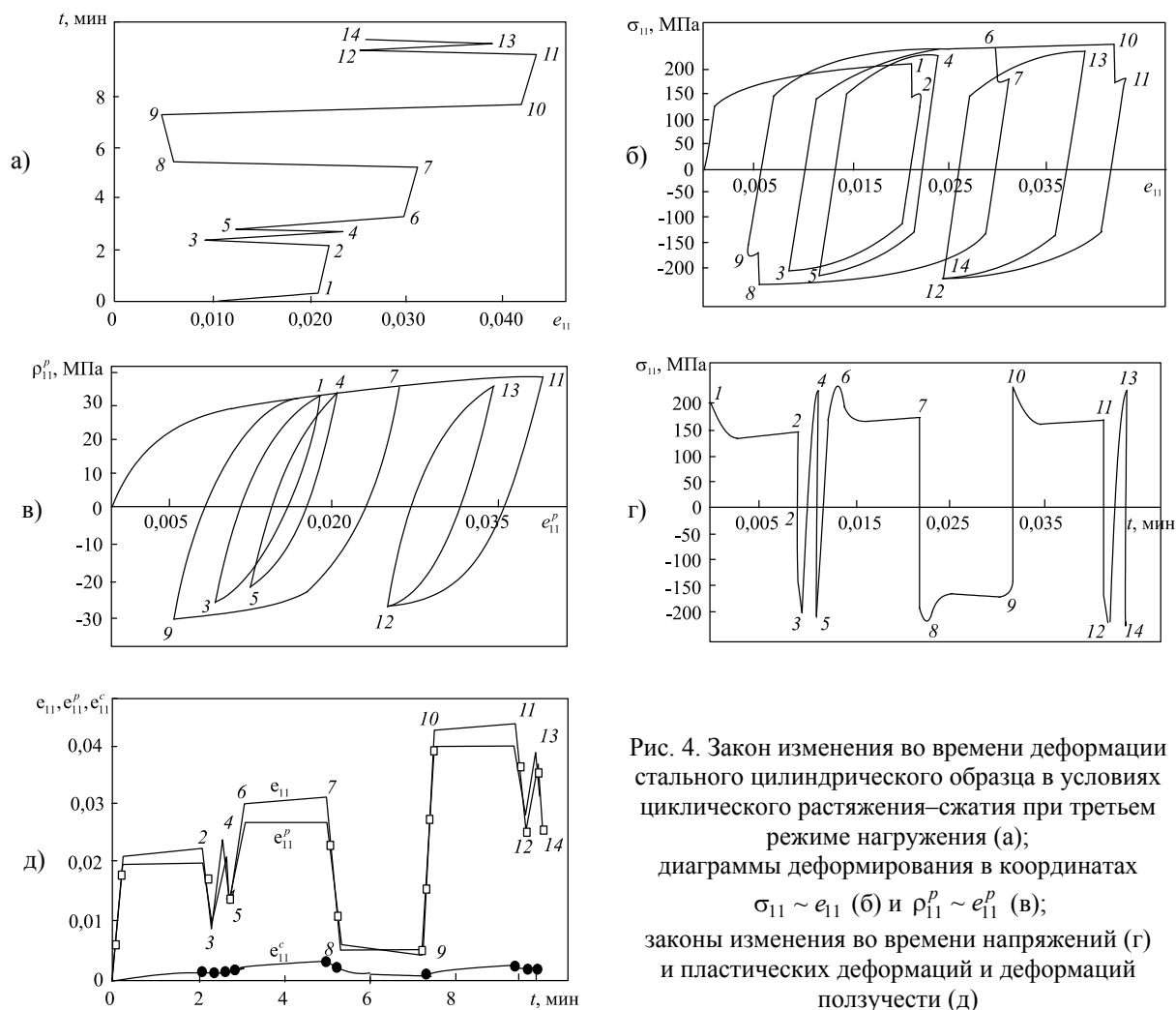


Рис. 4. Закон изменения во времени деформации стального цилиндрического образца в условиях циклического растяжения–сжатия при третьем режиме нагружения (а); диаграммы деформирования в координатах $\sigma_{11} \sim e_{11}$ (б) и $\rho_{11}^p \sim e_{11}^p$ (в); законы изменения во времени напряжений (г) и пластических деформаций и деформаций ползучести (д)

Анализируя полученные результаты сравнения численного моделирования и опытных данных, можно сделать вывод о достоверности определяющих соотношений МПС и разработанной методики определения материальных параметров, входящих в указанные соотношения при одноосных монотонных и циклических процессах деформирования, учитывающих механизмы деградации, сочетающие усталость и ползучесть материала.

4. Заключение

Развита математическая модель механики повреждённой среды, описывающая процессы вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сталях при механизмах деградации, сочетающих усталость и ползучесть материала. Методом численного моделирования на ЭВМ и сравнения полученных результатов с опытными данными проведена оценка адекватности методики получения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений МПС при усталости и ползучести, которая позволяет сделать вывод о достоверности определяющих соотношений МПС и точности разработанной методики определения материальных параметров, входящих в указанные соотношения.

Литература

1. Митенков Ф.М., Кайдалов В.Ф., Коротких Ю.Г. и др. Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2007. – 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424с.
3. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Моделирование сложного пластического деформирования и разрушения металлов при многоосном непропорциональном нагружении // Журнал ПМТФ. Новосибирск: Изд-во Наука. – 2009, №5. С. 193–205.

4. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Обоснование применимости эволюционного уравнения накопления повреждений для оценки малоциклового усталости металлов // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. Вып. 72. С. 46–57.
5. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании / И.А. Волков, Ю.Г. Коротких, И.С. Тарасов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. Т. 2, №1. С. 5–19.
6. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С., Фомин М.Н. Обоснование применимости эволюционного уравнения накопления повреждений для оценки малоциклового усталости металлов // Проблемы прочности и пластичности, 2010. Вып. 72. С. 46–57.
7. Охаси И. Неупругое поведение стали 316 при многоосных непропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, № 2. – С. 6-15.
8. Охаси И. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, №4. – С. 61-73.
9. Лэмба Г.С., Сайдботтом О.М. Пластичность при циклическом деформировании по непропорциональным траекториям. Ч. I. Эксперименты с циклическим упрочнением, приспособляемостью и последующим деформационным упрочнением // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1978. – Т. 100, № 1. – С. 108-117.
10. Макдауэлл Д.Л. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, №4. – С. 98-111.
11. Бернард – Конноли М., Бью-Куок Т., Бирон А. Усталость коррозионностойкой стали 304 при испытаниях в условиях многоступенчатой контролируемой деформации // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1983. – Т. 105, №3. – С. 47-53.
12. Боднер С.Р., Линдхолм У.С. Критерий приращения повреждения для зависящего от времени разрушения материалов // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1976. – Т. 100, №2. – С. 51-58.
13. Леметр Ж. Континуальная модель повреждения, используемая для расчёта разрушения пластичных материалов // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, № 1. – С. 90-98.
14. Гомюк, Бью Куок. Расчет долговечности коррозионностойкой стали 304 в условиях взаимодействия усталости и ползучести с использованием теории непрерывного повреждения // Теоретические основы инженерных расчетов. 1986, №3. С. 111 - 136.
15. Гомюк, Бью Куок, Бирон. Изучение поведения стали 316 при нагружениях по схемам усталости, ползучести и совместного действия усталости и ползучести // Современное машиноведение. 1991, №1. С. 14 - 23.
16. Казанцев А. Г. Исследование взаимодействия малоциклового усталости и ползучести при неизотермическом нагружении // Проблемы прочности. 1983, №7. С. 3-8.
17. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение. – М.: Мир, 1984.
18. Ле Мэй. Развитие параметрических методов обработки результатов испытаний на ползучесть и длительную прочность // Теоретические основы инженерных расчетов. 1979. Т.101, №4. С. 19 - 24.
19. Мэнсон, Энсайн. Успехи за последнюю четверть века в развитии методов корреляции и экстраполяции результатов испытаний на длительную прочность // Теоретические основы инженерных расчетов. 1979. Т.101, №4. С. 9 - 18.
20. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Шишулин Д.Н. Принципы и методы определения скалярных материальных параметров теории пластического течения с кинематическим и изотропным упрочнением. / И.А. Волков, Ю.Г. Коротких, Д.Н. Шишулин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. Т. 3, №3. С. 46–57
21. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G., Tarasov I.S., Shishulin D.N. Numerical modeling of elastoplastic deformation and damage accumulation in metals under low-cycle fatigue conditions, / I.A. Volkov, Yu.G. Korotkikh, I.S. Tarasov and D.N. Shishulin // J. Strength of Materials, 2011, Vol. 43, Number 4, Pages 471-485.
22. Можаровская Т.Н. Программа и методика исследования ползучести и длительной прочности материалов с учётом вида девиатора напряжений и истории нагружения // Проблемы прочности, 1984. №11. С. 83-88.
23. Benallal, A. Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto-Viscoplasticity / A. Benallal, D. Marquis // Journal of Engineering Materials and Technology. – 1987. – V. 109. – P. 326–337.
24. Chaboche, J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity / J.L. Chaboche // Inter. J. of Plasticity. – Vol. 5. – No. 3. – 1989. – P. 247–302.
25. Lemaitre, J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures / J. Lemaitre // Trans. 5th Int. Conf. SMRiT, North Holland, 1979, paper No. L5/1b.
26. Murakami, S. Mechanical description of creep damage and its experimental verification / S. Murakami, T. Imaizumi // J. Mec. Theor. Appl., no 1, 1982 , P.743 – 761.

УДК 539.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ЭФФЕКТЫ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ

В.Г. Малинин, Ю.Ю. Муссауи, Д.В. Ефремов

Орловский государственный аграрный университет, Орёл, Россия, malinin.mvg@yandex.ru

Аннотация. Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований механических свойств сплава Ti-50%Ni при изотермических траекториях деформирования постоянной кривизны. Сформулирована математическая модель и методами структурно-аналитической мезомеханики выполнены расчёты для изучаемого класса траекторий.

Ключевые слова: мартенситная неупругость, экспериментальные данные, математическая модель, сплавы с памятью формы, сложные траектории деформирования, структурно-аналитическая мезомеханика.

1. Введение

Известно, что материалы, обладающие способностью к обратимым мартенситным превращениям, такие как эквиатомный никелид титана и другие аналогичные сплавы, находясь в мартенситном состоянии при изотермическом нагружении способны деформироваться путём сложных переориентаций кристаллической решётки через промежуточное аустенитное состояние. В этом случае образующийся под действием напряжений механоаустенит либо немедленно, либо на поздних стадиях нагружения при больших напряжениях оказывается неустойчивым и вновь трансформируется в мартенсит, но уже отличной от исходной кристаллографической ориентации. Экспериментальное исследование и расчёт таких явлений, особенно с участием виртуального аустенита [1], аналитическими методами механики выполнялись, как правило, для простых программ деформирования: чистым растяжением, чистым кручением или пропорциональными траекториями [1]. В то же время отсутствуют экспериментальные и аналитические исследования механического поведения материалов, деформирующихся по мартенситному механизму, при сложных траекториях в пространстве деформаций. Среди широкого спектра программ по сложным траекториям деформирования особое место занимают плоские траектории постоянной кривизны, в виде спирали Архимеда, траектории с ортогональным изломом. Обозначенному классу траекторий деформирования для материалов с дислокационным механизмом массопереноса посвящены фундаментальные работы школы В.Г. Зубчанинова [2]. Имеются исследования мартенситной неупругости при сложных траекториях изотермического нагружения в пространстве напряжений [3]. Для обозначенных материалов экспериментальных и теоретических исследований механического поведения при вышеназванных траекториях в пространстве деформаций до сих пор не производили. Между тем, методы структурно-аналитической мезомеханики допускают подобный анализ.

2. Результаты экспериментального и аналитического моделирования

В настоящем разделе приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований мартенситной неупругости [1], выполненных на тонкостенных цилиндрических оболочках из эквиатомного никелида титана при изотермических траекториях постоянной кривизны в пространстве деформаций. Программа исследований состоит из двух режимов, которые включают пропорциональное деформирование до заданного значения интенсивности деформаций, в данном случае чистом растяжением (ε) и собственно сложное деформирование с постоянной кривизной в пространстве деформаций $\varepsilon = f(\gamma/\sqrt{3})$, где γ – угловая деформация. Схема программы представлена на рисунке 1.

Переход ко второму этапу деформирования осуществлялся при достижении значением интенсивности деформаций ε_i на пропорциональном участке траектории величины 0,5%.

Второй этап траектории включает непрерывное изменение вида деформированного состояния при постоянном значении интенсивности деформаций $\varepsilon_i = 0,5\%$, что фактически

соответствует движению по окружности в пространстве деформаций (рис. 1). Деформирование по траектории постоянной кривизны ограничивалось одним оборотом по окружности в пространстве деформаций на угол 2π .

Опыты проводились при комнатной температуре ($T_d = 20^0C$), когда материал находится полностью в мартенситном состоянии.

На основании полученных эмпирических данных выполнено построение экспериментальных точек в координатах $\sigma_i = f(\varphi)$, где σ_i – интенсивность напряжений; φ – параметр, характеризующий вид деформированного состояния и определяемый выражением: $tg\varphi = (\gamma/\sqrt{3})/\varepsilon$.

На рис. 2 представлены результаты построения экспериментальных точек (обозначены Δ) в координатах $\sigma_i = f(\varphi)$ и теоретических кривых (сплошная линия). В ходе выполнения экспериментальных исследований контролировалась исходная изотропность материала, из которого изготовлен образец (Ti-50%Ni).

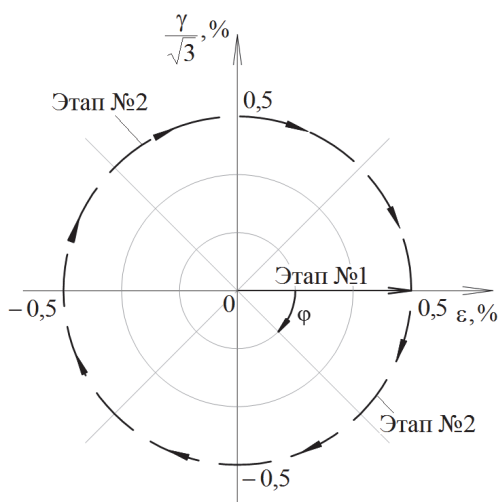


Рис. 1. Схема испытаний тонкостенного образца при траекториях деформирования постоянной кривизны

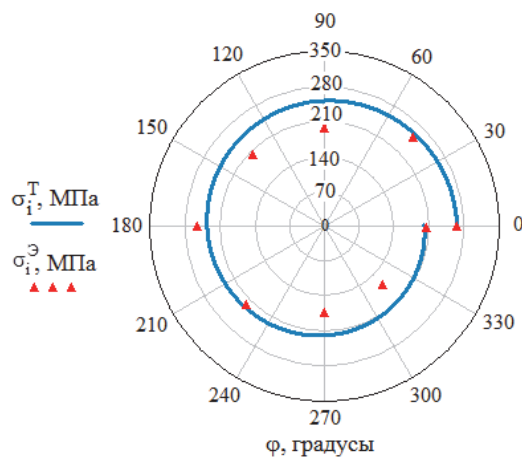


Рис. 2. Сопоставление экспериментальных и теоретических результатов

Основываясь на методике, изложенной в [1,3], предполагается, что поликристаллическое тело макроскопически изотропно и подвергается траекториям деформирования постоянной кривизны (см. рисунок 1) и, что имеет место мартенситная реакция только первого рода.

Уравнение Клаузиуса-Клапейрона, по аналогии с [1], записывается в виде:

$$\dot{T}^* = \dot{T} - \left(\frac{T_0}{q_0} \cdot D_i \right) \cdot \dot{\sigma}_i; \quad \dot{T}^* = - \left(\frac{T_0}{q_0} \cdot D_i \right) \cdot \dot{\sigma}_i = -k \cdot \dot{\sigma}_i, \quad (1)$$

где T_0 – температура термодинамического равновесия; q_0 – тепловой эффект реакции; D_i – дисторсия превращения; $\dot{\sigma}_i$ – скорость изменения интенсивности напряжений. Здесь и далее точка над символом означает производную по времени.

Согласно методике, приведённой в [1, 3], рассмотрим основные этапы моделирования процесса деформирования в условиях мартенситных превращений при траекториях деформирования постоянной кривизны.

После ориентационного усреднения (по методике, изложенной в [1]) компонент тензора деформаций, возникающих на мезомасштабном уровне в результате процессов структурных превращений: мартенсит охлаждения \rightarrow виртуальный аустенит напряжений \rightarrow мартенсит напряжений, на макроскопическом уровне получим дифференциальное уравнение для расчёта деформации мартенситной неупругости при изотермическом нагружении в интервале температур ниже температуры конца мартенситной реакции в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = 2 \cdot B_{\phi} \cdot \dot{\Phi} \cdot Dev(\sigma_{ik}) \cdot H(-\dot{T}^*), \quad (2)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ik}$ – тензор скоростей деформаций; B_{ϕ} – коэффициент структурно-механической податливости; $\dot{\Phi}$ – скорость изменения фазового состава; $Dev(\sigma_{ik})$ – дивiator напряжений; $H(-\dot{T}^*)$ – функция Хевисайда.

Кинетика образования и исчезновения мартенсита представляется уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = & -\dot{T}^* \cdot \left(H(T^* - M_{\kappa}) \cdot H(-\dot{T}^*) \cdot H(M_{\eta} - \Phi(M_{\eta} - M_{\kappa}) - T^*) \cdot (M_{\eta} - M_{\kappa})^{-1} + \right. \\ & \left. + H(\Phi) \cdot H(\dot{T}^*) \cdot H(T^* + \Phi \cdot (A_{\kappa} - A_{\eta}) - A_{\kappa}) \cdot (A_{\kappa} - A_{\eta})^{-1} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где \dot{T}^* – скорость изменения эффективной температуры [1]; M_{η} , M_{κ} , A_{η} , A_{κ} – температуры соответственно начала и конца прямой и обратной мартенситной реакции.

Вариант моделирования при $B_{\phi} = const$. После выполнения математических преобразований с учётом записанных выше исходных уравнений, получаем дифференциальные уравнения, решениями которых являются функции искомых нормальных и касательных напряжений для плоских траекторий произвольной кривизны:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_i \cdot \sigma_{11} = A_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t), \\ \dot{\sigma}_i \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma_{12} = A_1 \cdot \dot{\gamma}^*(t), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$A_1 = \left(\frac{B_{\phi 1}^* \cdot k}{M_{\eta} - M_{\kappa}} \right)^{-1}; \quad B_{\phi 1}^* = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot B_{\phi 1}; \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3}}.$$

Решениями записанных выше дифференциальных уравнений являются следующие функции нормальных и касательных напряжений для траекторий деформирования произвольной кривизны:

$$\sigma_{11} = \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\dot{\varepsilon}_i(t)} \cdot \sqrt{2 \cdot A_1 \cdot \int |\dot{\varepsilon}_i(t)| dt + C_1}; \quad (5)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\dot{\gamma}^*(t)}{\dot{\varepsilon}_i(t)} \cdot \sqrt{2 \cdot A_1 \cdot \int |\dot{\varepsilon}_i(t)| dt + C_2}, \quad (6)$$

где C_1 , C_2 – константы интегрирования, которые определяются из начальных условий.

После интегрирования и определения постоянных интегрирования, получаем следующие выражения для расчёта нормальных и касательных напряжений при траекториях деформирования постоянной кривизны при температуре ниже M_{κ} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \cos \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot \left(A_1 \cdot \varepsilon_i \cdot |\varphi - \varphi_0| + A_0 \cdot |\varepsilon_i - \varepsilon_{i,ny}| \right) + \sigma_{i,ny}^2}; \\ \sqrt{3} \cdot \sigma_{12} = & \sin \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot \left(A_1 \cdot \varepsilon_i \cdot |\varphi - \varphi_0| + A_0 \cdot |\varepsilon_i - \varepsilon_{i,ny}| \right) + \sigma_{i,ny}^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon_{i,ny}$ – интенсивность деформаций, соответствующая напряжению равному пределу пропорциональности; $\sigma_{i,ny}$ – интенсивность напряжений на пределе пропорциональности.

Константы A_1 и A_0 определяются в соответствии с формулой (4), при этом, индекс «1» означает, что при вычислении константы A используется значение коэффициента структурно-механической податливости $B_{\phi 1}$, вычисленное для траектории деформирования постоянной кривизны; индекс «0» – используется значение коэффициента $B_{\phi 0}$, вычисленное для пропорциональной траектории деформирования.

Выражение для расчёта интенсивности напряжений записывается в следующем виде:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3 \cdot \sigma_{12}^2} = \sqrt{2 \cdot \left(A_1 \cdot \varepsilon_i \cdot |\varphi - \varphi_0| + A_0 \cdot |\varepsilon_i - \varepsilon_{i,ny}| \right) + \sigma_{i,ny}^2}. \quad (8)$$

На рис. 2 в координатах $\sigma_i = f(\varphi)$ приведено сопоставление результатов экспериментальных исследований в виде точек (Δ) и аналитических расчётов (сплошная линия). При расчётах использовались следующие характеристики материала: $M_n = 333 \text{ К}$, $M_k = 311 \text{ К}$, $A_n = 353 \text{ К}$; $A_k = 375 \text{ К}$; $T_0 = 293 \text{ К}$, $\sigma_{i,ny} = 114 \text{ МПа}$, $\varepsilon_{i,ny} = 0,168 \%$, $k = 5,263 \cdot 10^{-7} \text{ К} \cdot \text{Дж}^{-1} \cdot \text{м}^3$, $\varphi_0 = 0$, $B_{\varphi 1} = 6,5 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$; $B_{\varphi 0} = 7,71 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$.

Среднее значение отклонения теоретической кривой от экспериментальных точек составляет 13,1%. Для более близкого соответствия результатов экспериментальных исследований и теоретических расчётов достаточно B_{φ}^* представить в виде материальной функции от параметра φ . В этом случае максимальное отклонение теоретического прогноза от экспериментальных данных не превышает 5%.

Вариант моделирования при $B_{\varphi} = B_{\varphi}(\varphi)$. Рассмотрим вариант моделирования, когда $B_{\varphi}^*(\varphi) = B_{\varphi 0} \cdot f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – искомая функция, характеризующая изменение структурно-механической податливости материала в процессе деформирования:

Следует отметить, что в приведённом варианте теории структурно-механическая податливость материала B_{φ} рассматривается как функция параметра вида деформированного состояния φ .

Данное обобщение позволяет учесть процесс разупрочнения материала при переходе от чистого растяжения к чистому кручению при деформировании по траекториям постоянной кривизны (см. рис. 3). Таким образом, одной из основных целей решения задач для рассматриваемого класса траекторий является подбор универсальной функции $B_{\varphi}(\varphi)$, служащей физической характеристикой материала.

После выполнения некоторых математических преобразований, а также решения системы дифференциальных уравнений, вытекающих из выражений (1) – (3), получим следующие функции, характеризующие изменение нормальных и касательных напряжений для изучаемого класса траекторий:

$$\sigma_{11} = \cos \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot A_0 \cdot (\varepsilon_i \cdot (g(\varphi) - g(\varphi_0)) + |\varepsilon_i - \varepsilon_{i,ny}|) + \sigma_{i,ny}^2}; \quad (9)$$

$$\sqrt{3} \cdot \sigma_{12} = \sin \varphi \cdot \sqrt{2 \cdot A_0 \cdot (\varepsilon_i \cdot (g(\varphi) - g(\varphi_0)) + |\varepsilon_i - \varepsilon_{i,ny}|) + \sigma_{i,ny}^2}; \quad (10)$$

где $A_0 = \frac{M_n - M_k}{k \cdot B_{\varphi 0}}$; $B_{\varphi 0}$ – структурно-механическая податливость материала для

пропорционального участка траектории деформирования (этап №1).

Функция $g(\varphi) - g(\varphi_0)$ определяется выражением:

$$g(\varphi) - g(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)}, \quad (11)$$

где $\varphi_0 = 0$ – для случая чистого растяжения на пропорциональном участке траектории деформирования; $f(\varphi)$ – искомая функция, характеризующая изменение структурно-механической податливости материала в процессе деформирования:

Заметим, что из результатов экспериментальных исследований определяется именно функция $g(\varphi) - g(\varphi_0)$; затем, дифференцируя найденную функцию в соответствии с (11), получаем искомую функцию $f(\varphi)$.

Таким образом, получаем функцию $g(\varphi) - g(\varphi_0)$ в следующем виде:

$$g(\varphi) - g(\varphi_0) = a \cdot \varphi^3 + b \cdot \varphi^2 + c \cdot \varphi + d \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - d,$$

где a, b, c, d – коэффициенты, определяемые из уравнений:

$$\sigma_i(-\pi/2) = \sigma_i^3(-\pi/2); \quad \sigma_i(-\pi) = \sigma_i^3(-\pi);$$

$$\sigma_i(-3\pi/2) = \sigma_i^3(-3\pi/2); \quad \sigma_i(-2\pi) = \sigma_i^3(-2\pi),$$

где σ_i^3 – экспериментальные значения интенсивности напряжений при соответствующих значениях параметра φ .

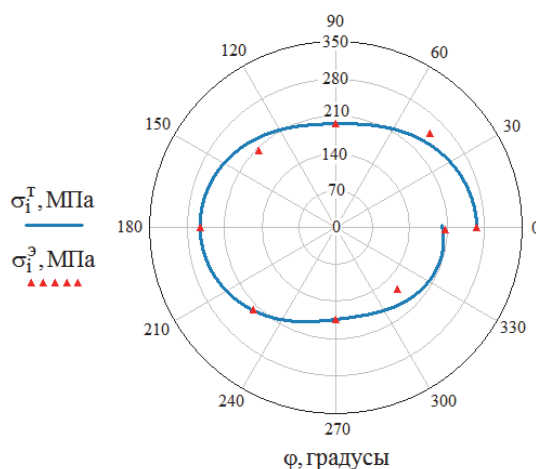


Рис. 3. Сопоставление экспериментальных и теоретических результатов

На рисунке 3 в координатах $\sigma_i = f(\varphi)$ приведено сопоставление результатов экспериментальных исследований в виде точек (Δ) и аналитических расчётов (сплошная линия). При расчётах использовались следующие характеристики материала: $M_n = 333 \text{ K}$, $M_k = 311 \text{ K}$, $T_0 = 293 \text{ K}$, $\sigma_{i,nc} = 114 \text{ МПа}$, $\varepsilon_{i,nc} = 0,168 \%$, $\varepsilon_i = 0,5 \%$, $\varphi_0 = 0$, $k = 5,263 \cdot 10^{-7} \text{ K} \cdot \text{Дж}^{-1} \cdot \text{м}^3$, $B_{\varphi_0} = 7,71 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $a = 0,007422$, $b = 0,09466$, $c = 0,42$, $d = -0,3513$.

Среднее значение отклонения теоретической кривой от экспериментальных точек составляет 4,33 %.

Анализируя результаты экспериментальных и теоретических исследований, полученных для Ti-50%Ni, в которых доминирует фазовый канал деформации и данные, приведённые в монографии [2] для различных конструкционных материалов с дислокационным механизмом массопереноса, можно увидеть качественное соответствие, которое проявляется в появлении эффекта упрочнения при деформировании по замкнутой траектории постоянной кривизны. Отличительным элементом можно считать тот факт, что величина упрочнения в сплаве Ti-50%Ni (25-30%) превышает упрочнение в материалах с дислокационным механизмом (15-20%).

Таким образом, методы структурно-аналитической мезомеханики позволяют естественным образом рассчитывать сложные свойства мартенситной неупругости при плоских траекториях деформирования постоянной кривизны.

Литература

1. Лихачёв, В. А. Структурно-аналитическая теория прочности / В. А. Лихачёв, В. Г. Малинин. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
2. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальная пластичность. Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
3. Малинин, Г.В. Деформация мартенситной неупругости при сложных траекториях изотермического нагружения в материалах с эффектом памяти формы / Г.В. Малинин. – Орёл: «Строительство и реконструкция». ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК», 2012. – С. 88 – 96.

УДК 539.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ЭФФЕКТЫ МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ МЕТОДАМИ СТРУКТУРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕЗОМЕХАНИКИ

В.Г. Малинин, Н.А. Малинина, Г.В. Малинин, А.И. Перельгин

Орловский государственный аграрный университет, Орёл, Россия, malinin.mvg@yeandex.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментально-компьютерных исследований влияния фазового состава на диаграммы изотермического растяжения, деформационных эффектов мартенситной неупругости тонкостенных трубчатых образцов из эквИАТ никелида титана при сложных траекториях нагружения содержащих ортогональные изломы, циклическое знакопеременное нагружение в условиях плоского напряженного состояния. Выполнен анализ особенностей формирования циклической памяти формы при сложном напряженном состоянии. Результаты опытов сопоставлены с данными теоретического прогноза методами структурно-аналитической мезомеханики, получено хорошее согласование.

Ключевые слова: мартенситная неупругость, циклическая память формы, влияние вида напряжённого состояния, никелид титана, сложные траектории нагружения в пространстве напряжений.

1. Объект исследования и методика проведения опытов

В качестве объекта исследования был выбран эквИАТ никелид титана в виде тонкостенных цилиндрических образцов, удовлетворяющих принятым в экспериментальной механике требованиям однородности напряженно-деформированного состояния.

Следуя [1] методика проведения опытов содержала два этапа. На первом этапе, для заданной программы испытаний, разрабатывался подробный маршрут компьютерного эксперимента на модельном объекте с параметрами примерно соответствующими эквИАТ никелиду титана. Используя оболочку iXSAT [2,3], выполнялся компьютерный эксперимент с выводом графиков отображающих эволюцию исследуемых параметров на макро, мезо и микромасштабных уровнях. С целью анализа эволюции микроструктуры строились стереографические проекции распределения по микрообъемам математического ожидания мартенситной фазы Φ_n и среднестатистических отклонений $\sigma_{2\phi}$ и $\sigma_{3\phi}$.

На втором этапе, по результатам компьютерного эксперимента, для соответствующего экспериментального стенда разрабатывалась подробная программа и методика натуральных испытаний тонкостенных цилиндрических образцов из эквИАТ никелида титана, и затем, выполнялись опыты. Возможность совместного анализа результатов компьютерного эксперимента и данных натуральных испытаний позволяла с большей достоверностью и глубиной понимания физической природы оценивать сложные функционально-механические проявления мартенситной неупругости. В данном сообщении основное внимание уделяется результатам экспериментальных исследований.

2. Влияние фазового состава на диаграммы изотермического растяжения

Выполнено исследование поведение сплава Ni-50%Ti (% по массе) при изотермическом деформировании чистым растяжением в условиях реализации фазовых превращений мартенситного типа. Использовались образцы в виде тонкостенных оболочек, имеющих длину рабочей части 50 мм, наружный \varnothing 16 мм, и внутренний \varnothing 14 мм. Головки образцов имели \varnothing 22 мм, длину 30 мм и внутреннюю резьбу для соединения с захватом испытательной машины. После изготовления образцы нагревали до 500 °С и после 60 минут выдержки в печи охлаждали на воздухе. В результате сплав имел следующие характеристические температуры: $M_s = 45$ °С, $M_n = 60$ °С, $A_c = 94$ °С, $A_n = 79$ °С. Испытания проводили по 5 программам растяжения образцов, отличающимся исходным фазовым составом. С целью создания необходимого фазового состава в свободном состоянии производилась термообработка образца, при которой добивались заданного структурного состояния. Схематично температуры испытания и исходный фазовый состав представлены на рис. 1 в координатах: удельное количество мартенситной фазы – Φ и температуры – T , °С. Результаты испытания

представлены на рис. 2, на котором показана диаграмма растяжения в координатах нормальное напряжение (σ) и относительная деформация (ϵ) в зависимости от фазового состава и температуры деформирования. В таблице 1 представлено влияние фазового состава на предел пропорциональности $\sigma_{0,05}$, и предел текучести $\sigma_{0,2}$. Полученные результаты позволяют оценить влияние фазового состава и температуры испытаний на диаграммы деформаций никелида титана.

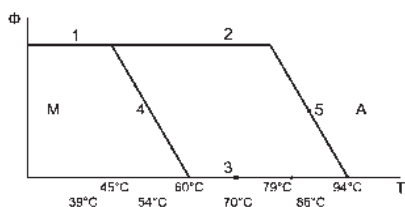


Рис. 1

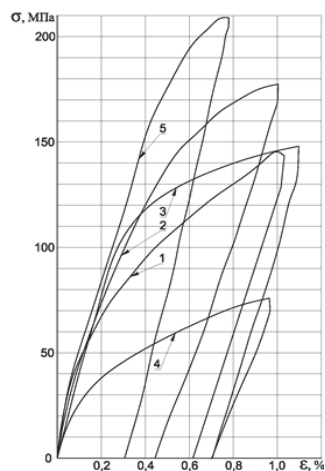


Рис. 2

Таблица 1

№ точки	Температура деформирования, °С	Фазовый состав	$\sigma_{0,05}$, МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа
1	39	М	92±7	116±6
2	70	М	146±2	168±2
3	70	А	126±9	139±9
4	54	А→М	44±6	57±5
5	86	М→А	125±33	199±7

3. Циклическая память формы

Выполнено исследование поведения сплава Ni-50%Ti (% по массе) в условиях реализации циклической памяти формы. Использовались тонкостенные цилиндрические образцы длиной 50 мм, наружный \varnothing 16 мм, внутренний \varnothing 14 мм. Перед испытанием образцы подвергались термообработке в специальной изложнице при 500°C в течении одного часа, с последующим остыванием на воздухе. Во всех опытах образцы в аустенитном состоянии при температуре 160 °С нагружались изотермически до заданной комбинации нормального σ и касательного τ напряжений до значения интенсивности напряжения $\sigma_i = 44$ МПа. Далее выполнялось термоциклирование в интервале 30 °С ↔ 160 °С при постоянном значении σ_i . Использовались следующие режимы нагружения: 1 – растяжение $\sigma = 44$ МПа; 2 – сжатие $\sigma = 44$ МПа; 3, 4 – кручение $\sqrt{3}\tau = 44$ МПа; 5, 8 – растяжение + кручение $\sigma = \sqrt{3}\tau = 31,2$ МПа; 6, 7 – сжатие + кручение $\sigma = \sqrt{3}\tau = 31,2$ МПа.

Основные результаты эксперимента представлены на рис. 3 и рис. 4. На рис. 3 приведены графики термомеханических гистерезисов в координатах интенсивность деформации $\epsilon_i \sim T$, при постоянных значениях $\sigma_i = 44$ МПа. На рис. 4 приведена лепестковая диаграмма максимальных деформаций ϵ_i в зависимости от вида напряженного состояния. Как видно из рис. 2 максимальные деформации ϵ_i зависят от вида напряженного состояния. Самые большие деформации возникают при чистом растяжении $\epsilon_i = 2,5\%$, а самые маленькие при чистом сжатии $\epsilon_i = 1,5\%$, при чистом сдвиге $\epsilon_i = 2,2\%$. Обнаруженное явление ярко выражено и

отражает проявление эффекта различной сопротивляемости растяжению-сжатию при мартенситных превращениях в условиях циклической памяти формы. Полученные экспериментальные данные являются основой для формулировки определяющих соотношений при прогнозировании циклической памяти формы сплава Ni-50%Ti.

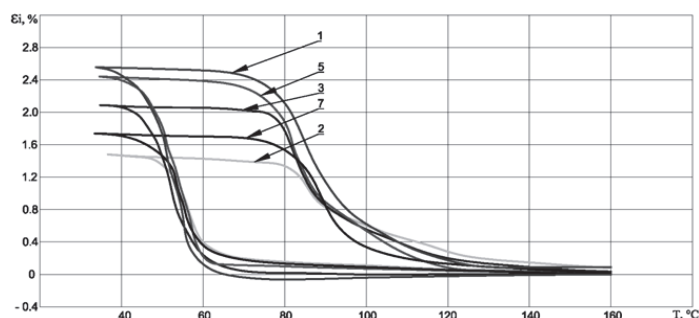


Рис. 3

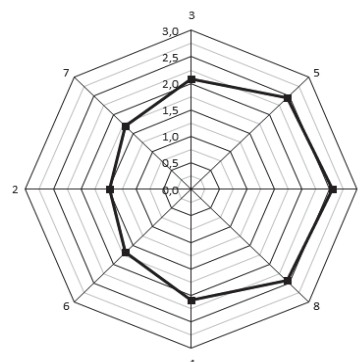


Рис. 4

4. Программа изотермического нагружения по сложным траекториям

Опыты проводились по программе состоящей из восьми режимов. На первом этапе каждого режима осуществляли нагрев образца в свободном от напряжений состоянии до температуры $T_n=383$ К, превышающей значение характеристической температуры конца обратного мартенситного превращения A_k , т.е. материал переводился полностью в аустенитное состояние, после чего осуществляли охлаждение образца до необходимой температуры и далее поддерживали ее постоянной. Для оценки влияния структурного состояния эксперименты выполняли при двух температурах $T_1=298$ К и $T_2=321$ К. Опыты при T_1 относились к случаю, когда исходная структура материала была мартенситной, т.е. $T_1 < M_k$. При температуре T_2 , в интервале между M_n и M_k исходная структура представляла двухфазный объект с примерно равновеликими значениями мартенситной и аустенитной фаз. После каждого испытания выполняли термоциклирование (3-4 цикла) через интервал температур мартенситных превращений в свободном состоянии образца, добиваясь восстановления структурно-механических характеристик материала. Показателем такого восстановления служило возвращение дилатационной диаграммы $\epsilon=\epsilon(T)$ и диаграммы $\gamma=\gamma(T)$ к их изначальному виду.

Экспериментальные исследования на тонкостенных трубках из никелида титана были выполнены для восьми программ, включающих следующие режимы:

- 1) Пульсирующее сдвиговое нагружение с переменной амплитудой;
- 2) Симметричное сдвиговое нагружение с периодически изменяющейся амплитудой;
- 3) Симметричное знакопеременное сдвиговое нагружение при одновременном действии постоянного растягивающего напряжения;
- 4) Симметричное знакопеременное сдвиговое нагружение при одновременном действии постоянного сжимающего напряжения;
- 5) Симметричное растяжение-сжатие при одновременном действии постоянного касательного напряжения;
- 6) Синхронное нагружение пульсирующим нормальным и знакопеременным сдвиговым напряжениями;
- 7) Синхронное нагружение пульсирующим сдвиговым и знакопеременным нормальным напряжениями;
- 8) Синхронное воздействие нормальным и касательным напряжениями по "нейтральным" траекториям нагружения.

В дальнейшем при анализе экспериментальных результатов использовались следующие обозначения для компонент напряжений и деформаций: нормальное напряжение $\sigma_{33} = \sigma$, касательное напряжение $\sigma_{31} = \tau$, компонента относительной линейной деформации $\epsilon_{33} = \epsilon$, а сдвиговая деформация $\gamma = 2\epsilon_{31}$. Приведём результаты испытаний при плоском напряженном состоянии.

5. Циклическое нагружение по многозвенным траекториям, содержащие участки с ортогональным изломом и комбинацию симметричного знакопеременного воздействия

В данном разделе приведены результаты экспериментальных исследований циклических свойств эквиатомного никелида титана по двум программам нагружения при сложном напряженном состоянии.

Согласно первой программе осуществляли изотермическое симметричное знакопеременное сдвиговое нагружение касательным напряжением τ при одновременном действии постоянного нормального растягивающего напряжения σ . Опыты проводили для двух типов тонкостенных образцов: в мартенситном состоянии при $T = T_1 = 298 \text{ K}$ и в двухфазном при $T = T_2 = 320 \text{ K}$. Варьировались как величина растягивающего напряжения σ так и амплитуда касательного напряжения τ . Результаты экспериментальных исследований представлены в виде соответствующих графиков на рис. 5. Здесь, на рис. 5а, приведены схемы многозвенных траекторий нагружения в координатах $\sqrt{3}\tau - \sigma$. Цифры на всех графиках характеризуют соответствующие номера звеньев нагружения. Графики, представленные на рис. 5б, в относятся к мартенситному состоянию, а графики, изображенные на рис. 5г, д отражают деформационные свойства эквиатомного никелида титана в двухфазном состоянии.

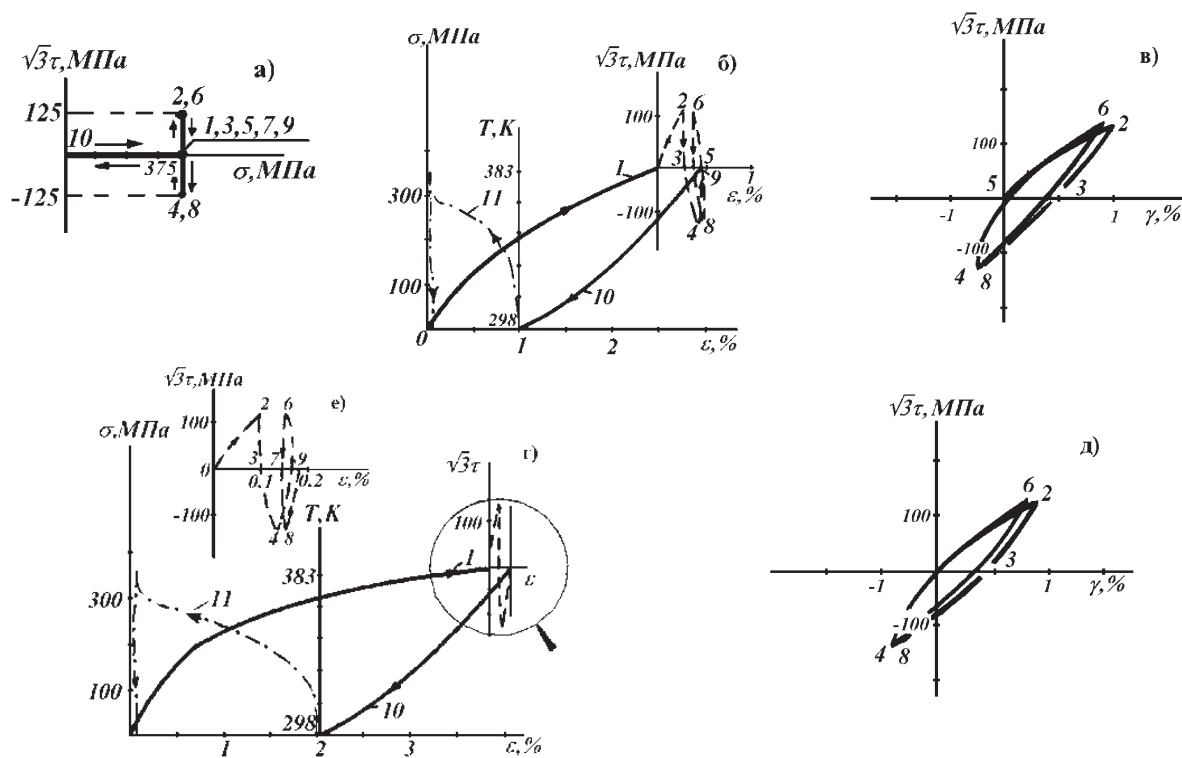


Рис. 5. Диаграммы механического поведения сплава Ti-50%Ni в мартенситном состоянии ($T=298 \text{ K}$) - (б,в) и двухфазном состоянии ($T=320\text{K}$) - (г,д,е) при многозвенных ортогональных траекториях нагружения: а - схема траектории нагружения; б,г - сплошная линия (1,10) - зависимость $\sigma \sim \epsilon$; пунктирная (2-9) - зависимость $\sqrt{3} \tau \sim \epsilon$ при $\sigma=375 \text{ МПа}=\text{const}$; штрихпунктирная (11) - зависимость $\epsilon \sim T$ при $\sigma = \sqrt{3} \tau = 0$ (ЭПФ); в,д - зависимость $\sqrt{3} \tau \sim \gamma$ при $\sigma=375 \text{ МПа} = \text{const}$; е - зависимость $\sqrt{3} \tau \sim \epsilon$ в увеличенном масштабе по ϵ

Вторая программа экспериментальных исследований была направлена на изучение циклических диаграмм одноосного растяжения-сжатия в условиях фиксированного значения действующего касательного напряжения. Как и в первой программе испытаний испытывались образцы в мартенситном и в двухфазном состоянии. В процессе опытов варьировались амплитуда циклической компоненты нормального напряжения σ и величина постоянно действующего сдвигового напряжения τ . Результаты экспериментальных исследований

представлены на рис. 6. Схемы, изображенные на рис. 6а, представляют программу нагружения в координатах $\sqrt{3}\tau - \sigma$, цифры обозначают номера звеньев траектории нагружения. Компьютерный эксперимент, выполненный по методике [2,3] на модельном объекте с параметрами, близкими по свойствам к эквиацному никелиду титана, с хорошим качественным и количественным соответствием выявил также деформационные проявления, которые изображены на рис. 5 и рис. 6.

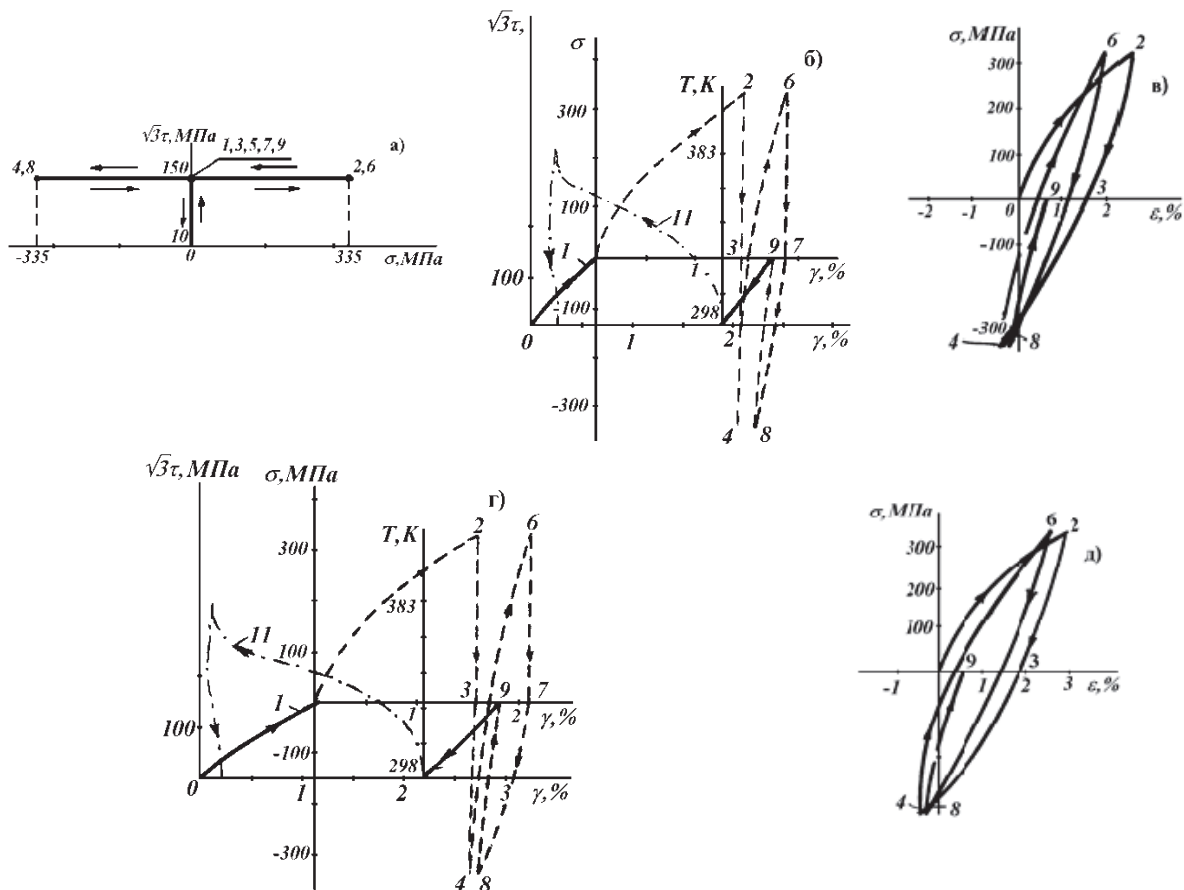


Рис. 6. Диаграммы механического поведения сплава Ti-50%Ni в мартенситном состоянии ($T=298$ K) - (б,в) и двухфазном состоянии ($T=320$ K) - (г,д) - при многозвенных ортогональных траекториях нагружения: а - схема траектории нагружения; б,г - сплошная линия (1,10) - зависимость $\sqrt{3} \tau \sim \gamma$; пунктирная (2-9) - зависимость $\sigma \sim \gamma$, $\sqrt{3} \tau = 150 \text{ МПа} = \text{const}$; штрихпунктирная (11) - зависимость $\gamma \sim T$ при $\sqrt{3} \tau = \sigma = 0$ (ЭПФ); в,д - зависимость $\sigma \sim \epsilon$ при $\sqrt{3} \tau = 150 \text{ МПа} = \text{const}$.

По итогам натурного и компьютерного экспериментов можно отметить следующие основные моменты. В процессе циклического нагружения наблюдается формирование циклически анизотропного упрочняющегося состояния с ярко выраженным эффектом стабилизации циклической диаграммы деформации. Во всех опытах после 2-3 механоциклов диаграммы деформации демонстрируют циклически замкнутый гистерезис, который сохранялся при длительном количестве циклов. Анализируя диаграммы циклических деформаций для двух выполненных программ испытаний, можно отметить существенное влияние вида напряженного состояния на диаграммы деформаций мартенситной неупругости. Сравнивая диаграммы для первой программы (рис. 5) с графиками, полученными для второй программы (рис. 6) видим, что циклические диаграммы деформаций, полученные по второй программе имеют большую степень циклической анизотропии, чем графики, полученные по первой программе. Необходимо также отметить наличие эффекта псевдоупругости [3]. Представляет интерес весьма сложная кинетика формирования перекрестного эффекта

деформации, т.е. изменение той компоненты деформации, которая соответствовала фиксированной компоненте напряжения и инициировалась изменением другой компоненты напряжения. Обозначенное явление изображается пунктирной линией на рис. 5 для относительной деформации ε , и на рис. 6 для угловой деформации γ .

6. Исследование диаграмм деформации при многозвенных траекториях нагружения содержащих резкие изломы

В настоящем параграфе приведены результаты экспериментальных исследований эффектов мартенситной неупругости у эквиатомного никелида титана при сложных многозвенных траекториях циклического нагружения. Испытания проводились по пяти программам. В каждой из них образцы на первом звене подвергались пропорциональному растяжению (сжатию) и сдвигу (нагружение по линии 0-1 см. рис. 7а, б), затем производили разгрузку и последующее нагружение по линии 1-2, а далее осуществляли циклическое воздействие по траектории 2-3 и 3-4.

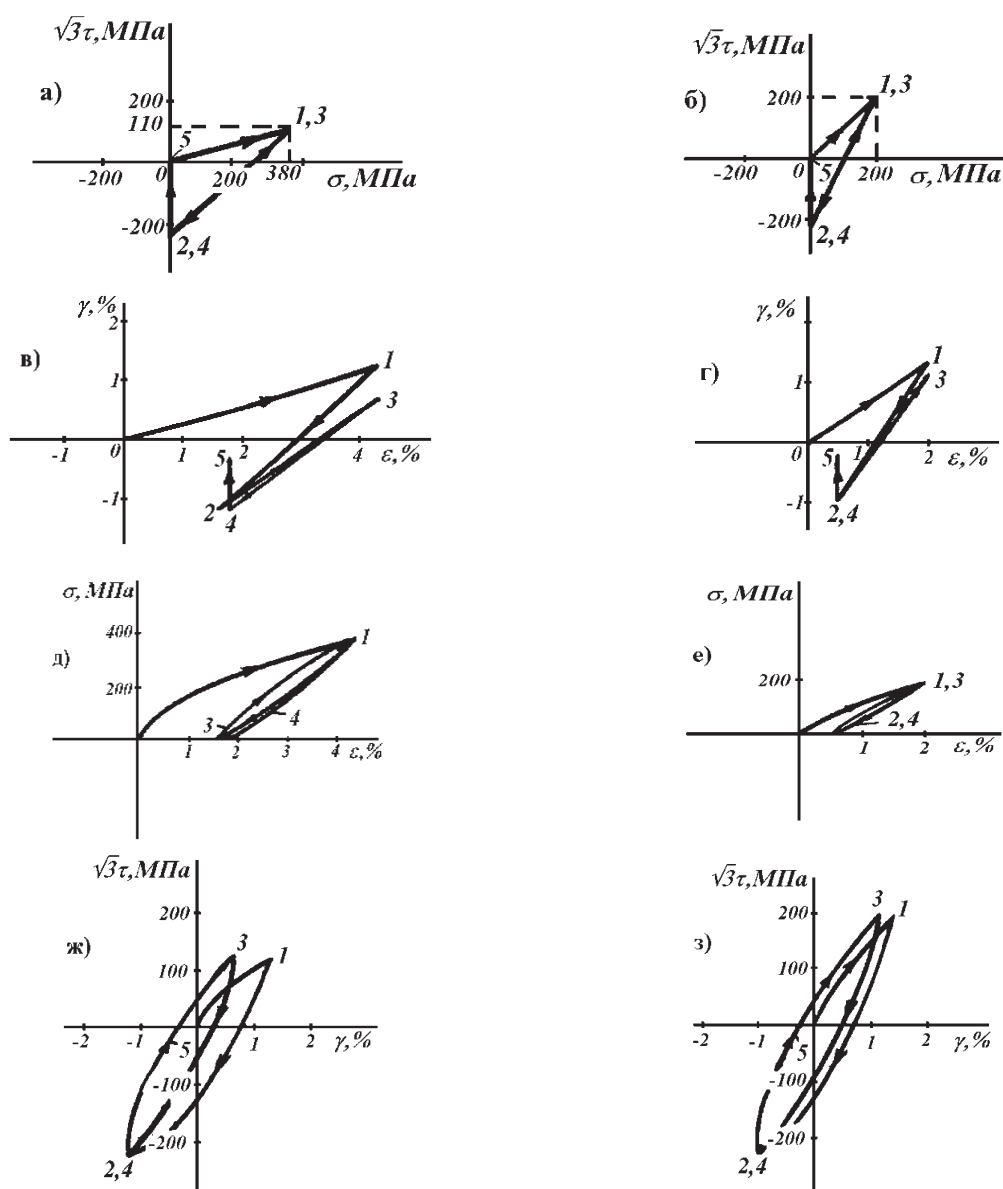


Рис. 7. Диаграммы механического поведения сплава Ti-50%Ni в мартенситном состоянии ($T=298$ К) при сложном нагружении: а,б - траектории нагружения; в,г - траектории деформаций; д,е,ж,з - зависимости напряжение деформация: для $\sigma \sim \varepsilon$ (д,е), для $\sqrt{3} \tau \sim \gamma$ (ж,з).

На последнем этапе производили разгрузку по линии 4-5. Программы отличались значением угла наклона луча 0-1 и направлением лучевой траектории 1-2. В первой программе (см. рис. 7а) угол наклона луча 0-1 был малым (нагружение, близкое к растяжению), во второй (рис. 7б) – большим (нагружение в координатах $\sigma = \sqrt{3}\tau$ изображено равнонаклонным лучом).

В третьей программе проводили испытания по режиму второй программы, однако объект исследования – тонкостенный трубчатый образец из никелида титана – был предварительно термообработан таким образом, чтобы исходное состояние материала было двухфазным, примерно с равновеликими долями аустенита и мартенсита.

В целом, независимо от траектории изотермического нагружения и исходной фазовой структуры, наблюдается формирование циклически анизотропного упрочняющегося состояния, с ярко выраженной тенденцией к стабилизации циклической диаграммы деформации. Во всех проведенных опытах уже после двух-трех механоциклов диаграммы деформаций имели циклически замкнутую конфигурацию, которая затем практически не изменялась при многочисленных повторениях.

Характерной для рассматриваемых испытаний является кинетика деформационного отклика в координатах γ - ε (рис. 7г). Анализируя полученные графики γ - ε можно отметить, что на стадии циклически стабильного состояния, траектория деформации представляет прямую линию, наклон которой к координатным осям γ - ε зависит от режима нагружения. Во всех опытах как в мартенситном так и в двухфазном состояниях при разгрузке по соответствующей компоненте напряжений наблюдалось интенсивное уменьшение накопленной деформации, т.е. эффект псевдоупругости. Анализ экспериментальных данных позволяет отметить нетривиальные особенности влияния конкретной траектории нагружения. Так, коэффициент циклического упрочнения КЦУ τ , измеренный по диаграмме $\sqrt{3}\tau$ - γ в первой программе на 57% больше аналогичного коэффициента во второй программе. В то же время стабильная циклическая диаграмма в опытах по первой программе носит практически изотропный характер (КЦА τ =1), а в случае второй программы испытаний КЦА τ =0,6

В заключении, можно отметить, что вид напряженного состояния, история термомеханического воздействия и траектория нагружения существенно и сложным образом влияют на кинетику формирования мартенситных реакций, что создает физические предпосылки нетривиального влияния названных факторов на деформационные эффекты мартенситной неупругости.

Литература

1. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 2. Процессы сложного нагружения. Тверь: ТГТУ 2004. 184 с.
2. Малинин, Г.В. Деформация мартенситной неупругости при сложных траекториях изотермического нагружения в материалах с эффектом памяти формы // Строительство и реконструкция №6 (44) 2012, изд-во ФГБОУ ВПО Госуниверситет – УНПК, с.88-96.
3. Лихачёв В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: 1993. - 471 с.

УДК 539.3, 699.841+624.159.14

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ СЕЙСМОДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Т.Р. Рашидов, Т. Юлдашев, Д.А. Бекмирзаев, Н.А. Нишинов

*Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
tur.rashidov@list.ru*

Аннотация. Рассматривается общая постановка проблем решения сейсродинамических задач подземных трубопроводов. Здесь математическая модель подземного трубопровода выводится на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, определяющая колебания линейного трубопровода, взаимодействующего с окружающей его грунтовой средой, при пространственном направлении сейсмического воздействия. В качестве алгоритма решения задач используется метод конечных разностей второго порядка точности. Программа составляется на основе объектно – ориентированного языка Borland Delphi 7. Выполнена численная реализация задач при конкретном законе сейсмического движения грунта.

Ключевые слова: подземный трубопровод, сейсродинамика, сейсмическое воздействие, взаимодействие в системе «труба – грунт», метод конечных разностей.

1. Введение

Динамическая теория подземных трубопроводов при пространственном нагружении, как впрочем, и любая другая теория или информационная система больше не поддаются в необходимой полноте и точности исследованию обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент дорог либо попросту невозможен, поэтому математическое

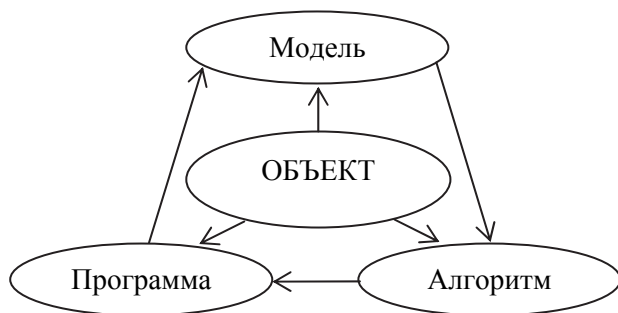


Рис.1. Три этапа математического моделирования

моделирование является неизбежной составляющей сложной теории любого объекта. Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно разбить на три этапа: Модель – алгоритм – программа (рис.1) [1].

В качестве объекта в работе рассматривается подземный трубопровод при пространственном сейсмическом нагружении, для которой разрабатывается так называемый «образ», отражающий в математической форме все его важнейшие составы, которым он подчиняется и связи,

присущие его составляющим. Математическая модель подземных трубопроводов представляется в виде, удобном для применения численных методов.

Необходимо отметить, математическая модель не просто расчеты на ЭВМ, это в первую очередь изучение основных закономерностей рассматриваемых процессов. Однако на этом работа не кончается. Ведь математическая модель-это не абсолютно точное описание явления, процессов и объектов, а приближенное: все внутренние и внешние факторы, которые действуют, учесть невозможно. Поэтому приходится отбрасывать второстепенные факторы, иначе математическая модель процесса окажется чрезмерно сложной и, тем самым практически нереализуемой и малозначительной. Но здесь не надо забывать, что при этом могут быть отброшены и достаточно существенные свойства изучаемых процессов чтобы проверить это, надо провести численные расчеты на ЭВМ, сопоставить их с хорошо спланированными контрольными экспериментами и анализировать результаты проведенных вычислительных экспериментов (ВЭ). Если получено согласие, то математическая модель считается приближенно адекватной и описывает основные закономерности исследуемых процессов или объектов. Если полученные результаты ВЭ не согласуются с контрольными,

экспериментальными данными, надо снова и снова уточнять математическую модель, проводить ВЭ и так до тех пор, пока не будет достигнута совпадение результатов численного расчета с экспериментальными (рис.2) [2].

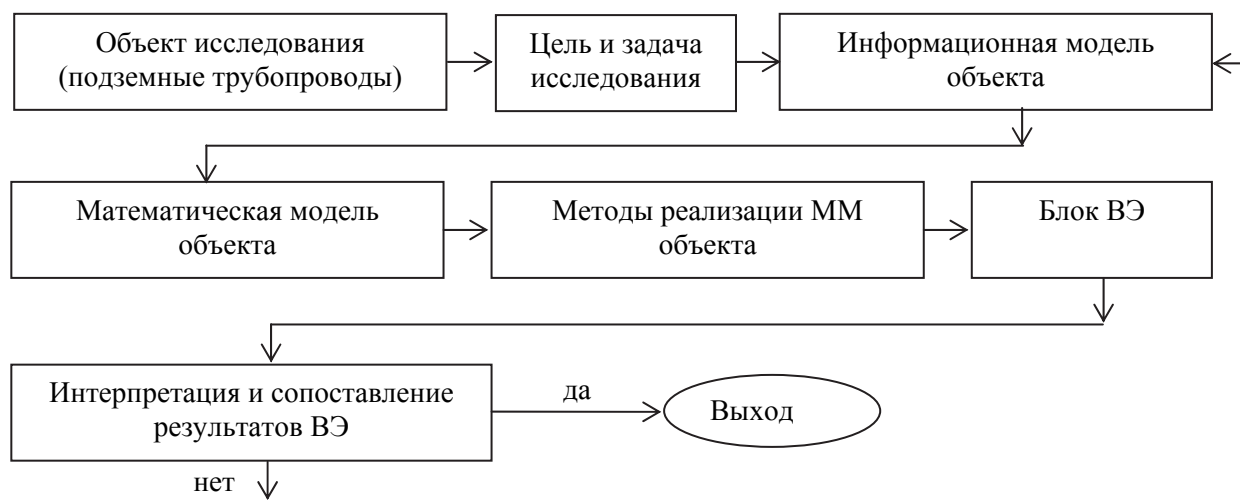


Рис.2. Схематическое представление этапов математического моделирования и ВЭ

На основе математической модели разрабатывается вычислительный алгоритм, который реализует построенную модель на компьютере. Разработанный алгоритм должен быть экономичным и устойчивым, не искажая основные свойства построенной модели. Кроме того он должен быть адаптирующимся к особенностям решаемых задач и к постоянно изменяющимся потребностям современного рынка информационных технологий.

Создается комплекс программных средств или информационные системы, автоматизирующие процесс решения задачи. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности.

Создав триаду «модель – алгоритм – программа», мы получаем универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные характеристики объекта (в нашем случае подземные трубопроводы). Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости всех звеньев триады [1].

Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы - от качественного анализа моделей до современных языков программирования. Полная система дифференциальных уравнений колебания и граничных условий подземных трубопроводов настолько сложна, что решение краевых задач без применения численных методов и современных языков программирования практически невозможно.

При решении проблемы автоматизации полного расчета подземных трубопроводов с помощью персонального компьютера возникает ряд вопросов связанных с выбором и реализацией алгоритмов счета и получением численных результатов при минимальных затратах ручного труда и машинного времени. Для этого следуют разрешить такие проблемы вычислительной математики, как устойчивость, сходимости и скорость сходимости вычислительных алгоритмов, получение расчетных величин с точностью до 3-4 знаков.

Процесс решения конкретной задачи разбивается на следующие этапы:

- Содержательная постановка задачи на языке конкретной дисциплины;
- Постановка краевой задачи;
- Анализ операторов и выбор подходящих методов решения;
- Разработка вычислительных алгоритмов и построение разрешающих уравнений;
- Решение разрешающих уравнений;

- Вычисление значений расчетных величин и оформление их в виде документов;
- Анализ результатов и выработка конкретных выводов или рекомендации.

Каждый из вышеперечисленных этапов рассматривается автономно. В большинстве случаев специалисты ограничиваются промежуточными результатами. В конечных результатах заинтересованы отдельные организации, и или приходится тратить много времени на согласование разрозненных результатов отдельных этапов.

Благодаря техническому прогрессу вопросы недостатка памяти и скорости выполнения расчетов уже не затрагиваются, так как современная техника позволяет использовать большие объемы памяти и высокую скорость. Однако вопрос точности вычислений остается актуальным и в настоящее время.

2. Постановка задачи

На основе допущений, приведенных в работах [3, 4], трубопровод моделируется в виде стержня, а перемещения выбираются следующим образом

$$u_1 = u - y\alpha_1 - z\alpha_2, \quad u_2 = v + z\theta, \quad u_3 = w - y\theta. \quad (1)$$

где u_1, u_2, u_3 – перемещения любой точки трубопровода, u – продольные перемещения, v, w – поперечные перемещения, α_1, α_2 – угол поворота сечения трубы, θ – кручения оси трубопровода.

Вариации кинетической энергии трубопровода. При этом вариации кинетической энергии можно представить в виде

$$\int_t \delta T dt = \int \int_V \left[\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right] dV dt. \quad (2)$$

Выполним операции интегрирования по частям. Тогда вариации кинетической энергии (2) получает вид

$$\begin{aligned} \int_t \delta T dt = & \int_V \left[\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta u_1 + \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta u_2 + \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta u_3 \right] dV \Big|_t - \\ & - \int \int_V \left[\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \delta u_2 + \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right] dV dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Вариации потенциальной энергии трубопровода. Рассмотрим вариации потенциальной энергии

$$\int_t \delta \Pi dt = \int \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV dt. \quad (4)$$

На основе соотношения Коши деформации ε_{ij} выражаем через перемещения трубопровода u_i

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_1, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Металлические трубопроводы деформируются в пределах упругости. Поэтому для трубопровода из металла рассматривается закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \varepsilon_{11} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right), \\ \sigma_{12} &= G \varepsilon_{12} = G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_1 \right), \\ \sigma_{13} &= G \varepsilon_{13} = G \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

А для подземных полимерных трубопроводов связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E \left[\varepsilon_{11}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau \right] = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right) \left(1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\varepsilon_{12}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{12}(\tau) d\tau \right] = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_1 \right) \left(1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\varepsilon_{13}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{13}(\tau) d\tau \right] = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \alpha_2 \right) \left(1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau \right).\end{aligned}\quad (7)$$

На основе напряжения σ_{ij} (6) и (7) вычисляем продольные и поперечные усилия N_x и Q_{ij} , а также изгибающих и крутящих моментов M_{ij} .

Вариации работы внешних сил трубопровода. Вариации работы внешних сил трубопровода в общем виде представляется так

$$\begin{aligned}\int_t \delta A dt &= \int_t \int_V [P_1 \delta u_1 + P_2 \delta u_2 + P_3 \delta u_3] dV dt + \int_t \int_S [q_1 \delta u_1 + \\ &+ q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3] dS dt + \int_t \int_{S_1} [\varphi_1 \delta u_1 + \varphi_2 \delta u_2 + \varphi_3 \delta u_3] dS_1 dt \Big|_x.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь P_1, P_2, P_3 – объемные силы, q_1, q_2, q_3 – поверхностные силы, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – торцевые силы – воздействующие на трубопровод [5, 6].

Вариационный принцип Гамильтона–Остроградского для подземных трубопроводов. Вариационный принцип Гамильтона–Остроградского для подземного трубопровода имеет вид:

$$\int_t (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (9)$$

где $\delta T, \delta \Pi$ – вариации кинетической и потенциальной энергии, δA – вариации работы внешних сил, t – время. После постановки вариации кинетической (3), потенциальной (4) энергии и работы внешних сил (8) на вариационный принцип Гамильтона – Остроградского (9) и выполнения операции приведения подобных слагаемых получаем вариационное уравнение подземных трубопроводов. Вариации неизвестных функции не равняются нулю. Исходя из этого положения, из вариационного уравнения получаем систему дифференциальных уравнений, естественных граничных и начальных условий. Полученные системы дифференциальных уравнений и естественные граничные и начальные условия можно представить в векторной форме. Поэтому вводим следующие вектора

$$\begin{aligned}U &= (\bar{u}, \alpha_1, \alpha_2, \bar{v}, \bar{w}, \theta)^T, \\ U_0 &= \left(l^2 b^2 \frac{\bar{u}_{0x}}{a_T^2}, \frac{q}{EF} \frac{\partial \bar{u}_{0y}}{\partial x}, \frac{q}{EF} \frac{\partial \bar{u}_{0z}}{\partial x}, \frac{2pl^2 b^2}{a_T^2} \bar{u}_{0y}, \frac{2pl^2 b^2}{a_T^2} \bar{u}_{0z}, \frac{2D_H l^2}{\beta EF} k_x (\bar{u}_{0y} - \bar{u}_{0z}) \right)^T.\end{aligned}\quad (10)$$

При этом система дифференциальных уравнений и естественные граничные и начальные условия с учетом введенных векторов (10) имеют вид:

$$M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial U}{\partial x} + CU = U_0, \quad (11)$$

$$\left[\bar{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{B} U \right] \delta U \Big|_x = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \delta U \Big|_t = 0, \quad (13)$$

где $M, A, B, C, \bar{A}, \bar{B}$ матрицы шестого порядка.

Интенсивность нормального и касательного напряжения вычисляются по формулам подземного трубопровода при пространственном нагружении [7]

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{11}^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}, \quad \tau_u = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{2\sigma_{11}^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}.$$

Для решения краевой задачи (11), (12) и (13) используем метод конечных разностей второго порядка точности.

Задача. В качестве примера рассмотрим следующую задачу: защемленный левым концом и свободный правым концом подземный трубопровод. На основе алгоритма компьютерной реализации решается поставленная задача. Механические и геометрические параметры выбираются в следующем виде:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad F = \frac{\pi(D_H^2 - D_B^2)}{4} \text{ м}^2; \quad I_y = I_z = \frac{\pi(D_H^4 - D_B^4)}{64} \text{ м}^4;$$

$$I_p = \frac{\pi(D_H^4 - D_B^4)}{32} \text{ м}^4; \quad D_H = 0,3 \text{ м}; \quad D_B = 0,29 \text{ м}; \quad l = 50 \text{ м}; \quad u_0 = a_0 e^{-\varepsilon \left(t - \frac{x}{C_p} \right)} \sin \omega \left(t - \frac{x}{C_p} \right);$$

$$a_0 = 0,002 \text{ м}; \quad \varepsilon = 0,3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 0,3 \text{ с}; \quad C_p = 1500 \text{ м/с}; \quad \mu_{\text{грунт}} = 0,2; \quad \mu_{\text{труба}} = 0,3;$$

$$k_x = 2,78 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^3; \quad u_{0x} = u_0 \cos \alpha; \quad u_{0y} = u_0 \sin \alpha \cos \beta; \quad u_{0z} = u_0 \sin \alpha \sin \beta; \quad \alpha = 30^0; \quad \beta = 60^0;$$

$y = R_H \cos \gamma; \quad z = R_H \sin \gamma; \quad R_H = 0,15 \text{ м}; \quad \gamma = 45^0.$ α, β – углы падения сейсмической волны, перемещения и напряжения трубопровода вычисляются в любой точке поперечного сечения трубопровода. Поэтому координаты поперечного сечения вычисляются по формулам: $y = r \cos \gamma; \quad z = r \sin \gamma; \quad R_B \leq r \leq R_H; \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi.$

Параметры a_0 – максимальная амплитуда колебания грунта, k_x – коэффициент равномерного сдвига трубопровода относительно грунта и C_p – скорость распространения продольной сейсмической волны, u_0 – закон движения грунта выбираются согласно балльности землетрясений [6, 8].

3. Анализ численных результатов

Результаты решения задачи представляются в виде графиков. На рис. 3 приводятся изменения значения продольного и поперечных перемещений соответственно u, v, w вдоль оси трубопровода в заданных временах и по времени в сечениях трубопровода $x = 5 \text{ м}$ и $x = 50 \text{ м}$.

Если рассуждать по рисункам значения продольного перемещения до $x = 20 \text{ м}$ изменяются интенсивно, а далее в сечениях трубопровода значения продольного перемещения изменяется очень медленно. Значения поперечных смещений v, w до $x = 10 \text{ м}$ изменяются интенсивно, а далее значения поперечных смещений по длине трубопровода в заданных временах остаются почти постоянно. Этот эффект видно и в продольных, поперечных колебаниях трубопровода на расстояниях $x = 5 \text{ м}$ и $x = 50 \text{ м}$. Колебания имеют гармонический характер, соответствующие законам движения грунта с гасящими параметрами.

На рис. 4 приводятся изменения значения углов поворота поперечного сечения при чистом изгибах и угла кручения вдоль оси трубопровода при заданных временах соответственно α_1, α_2 и θ , а также изменения значения угла кручения трубопровода по времени.

Значения углов наклона поперечного сечения трубопровода от защемленного конца не равномерно увеличиваются до свободного конца трубопровода, а значения угла кручения оси трубопровода от защемленного конца равномерно увеличиваются до свободного конца трубопровода при заданных временах (см. рис.4). Колебания угла кручения оси трубопровода имеет сложный характер с всплесками. С удалением от защемленного конца трубопровода амплитуды колебаний увеличиваются. Между прочим фазы колебаний в заданных точках сечения трубопровода ($x = 5 \text{ м}, x = 50 \text{ м}$) совпадают.

На рис. 5 приводятся изменения значения нормального и касательных напряжений вдоль оси трубопровода по заданным временам и в заданной точке поперечного сечения трубопровода ($y = R_H \cos \gamma, z = R_H \sin \gamma, R_H = 0,15 \text{ м}, \gamma = 45^0$).

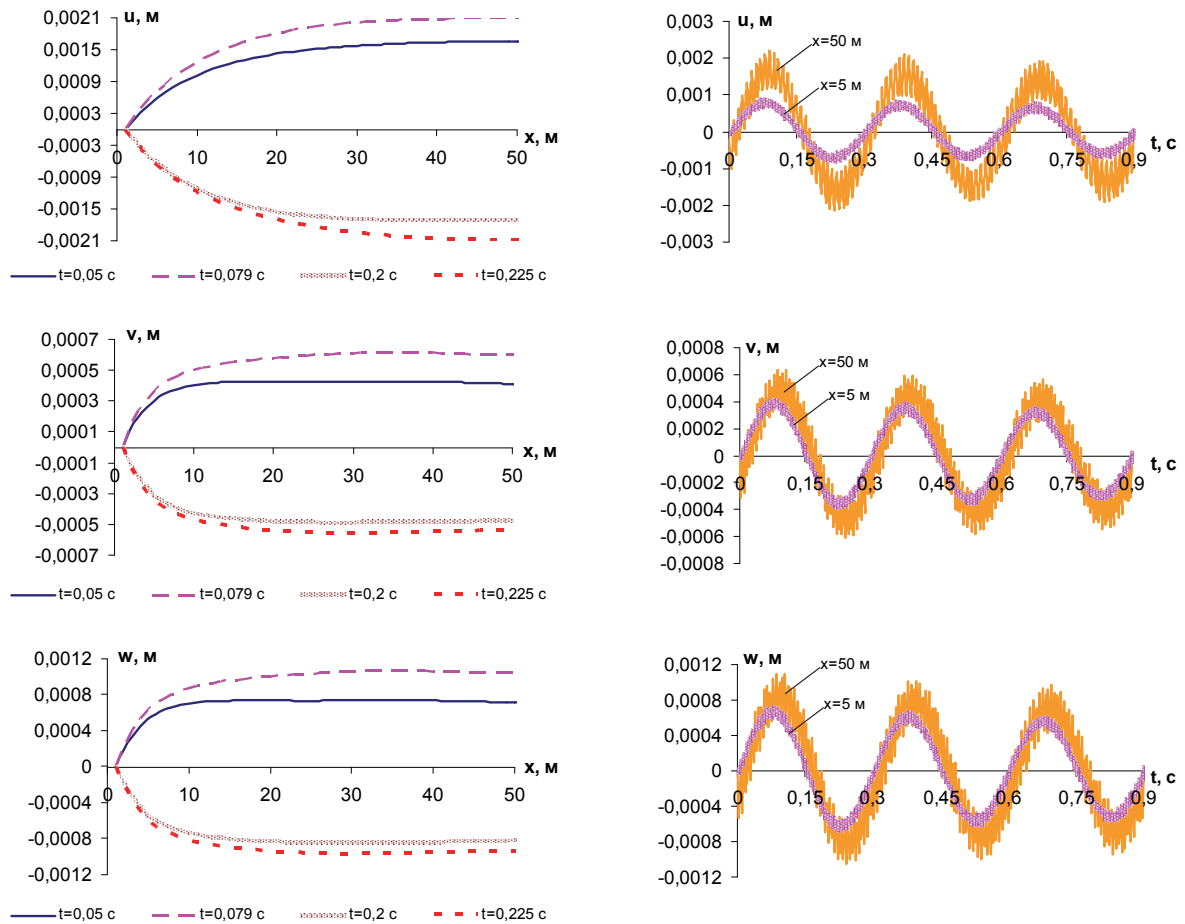


Рис. 3. Изменения значения продольного и поперечных перемещения вдоль оси трубопровода и продольного, поперечного колебания трубопровода в сечениях ($x = 5$ м, $x = 50$ м)

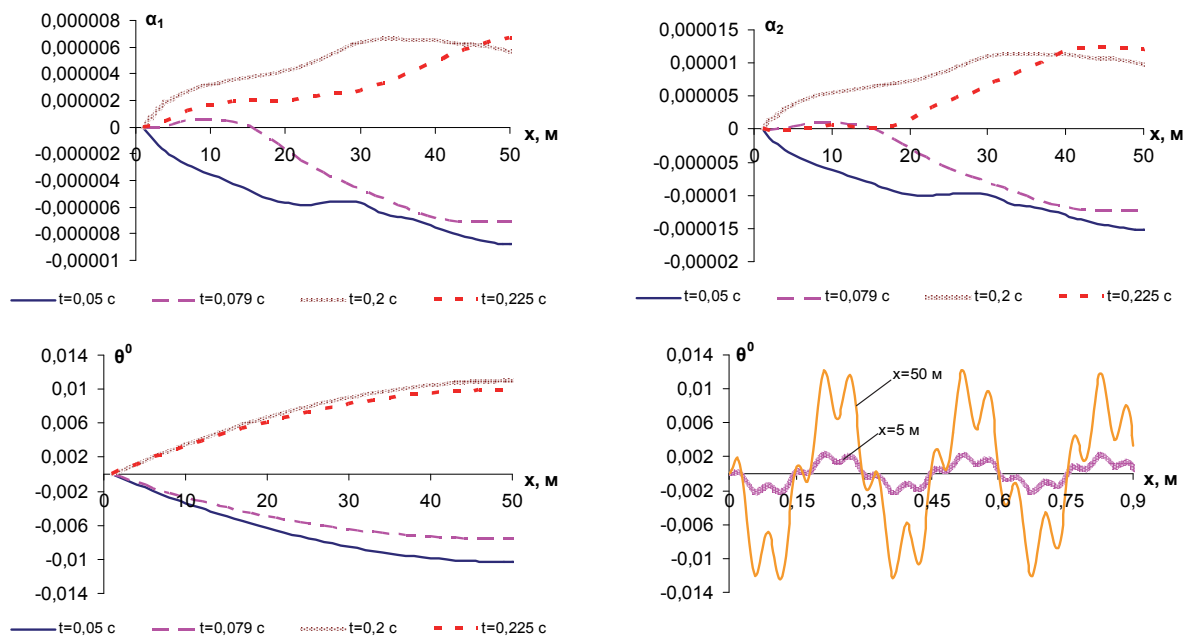


Рис. 4. Изменения значения углов поворота поперечного сечения трубопровода и кручения оси трубопровода при заданных временах. Изменения значения угла кручения оси трубопровода по времени при заданных сечениях трубопровода

Приводятся изменения значения нормального и касательных напряжений по времени в заданных точках поперечного сечения трубопровода ($x = 5$ м, $x = 50$ м, $y = R_H \cos \gamma$, $z = R_H \sin \gamma$, $R_H = 0,15$ м, $\gamma = 45^\circ$). Характерно, что интенсивность изменения значения продольного перемещения высоко на интервале $0 \leq x \leq 20$ м (рис. 3) на этом же интервале значения нормального напряжения резко изменяется (рис. 5) значения поперечных перемещений v, w изменяются резко на интервале $0 \leq x \leq 10$ м (рис. 3), соответственно значения касательных напряжений в данном интервале резко изменяются.

Далее градиент продольного и поперечных перемещений близко к нулю, аналогично на этих интервалах ($20 \leq x \leq 50, 10 \leq x \leq 50$) значения нормального и касательных напряжений близко к нулю (см. рис. 5). Изменения значения нормального и касательных напряжений по времени в заданных точках и сечениях трубопровода имеют гармонический характер, фазы колебания в разных сечениях совпадают, но отличаются с амплитудами колебаний в разных сечениях трубопровода (рис. 5).

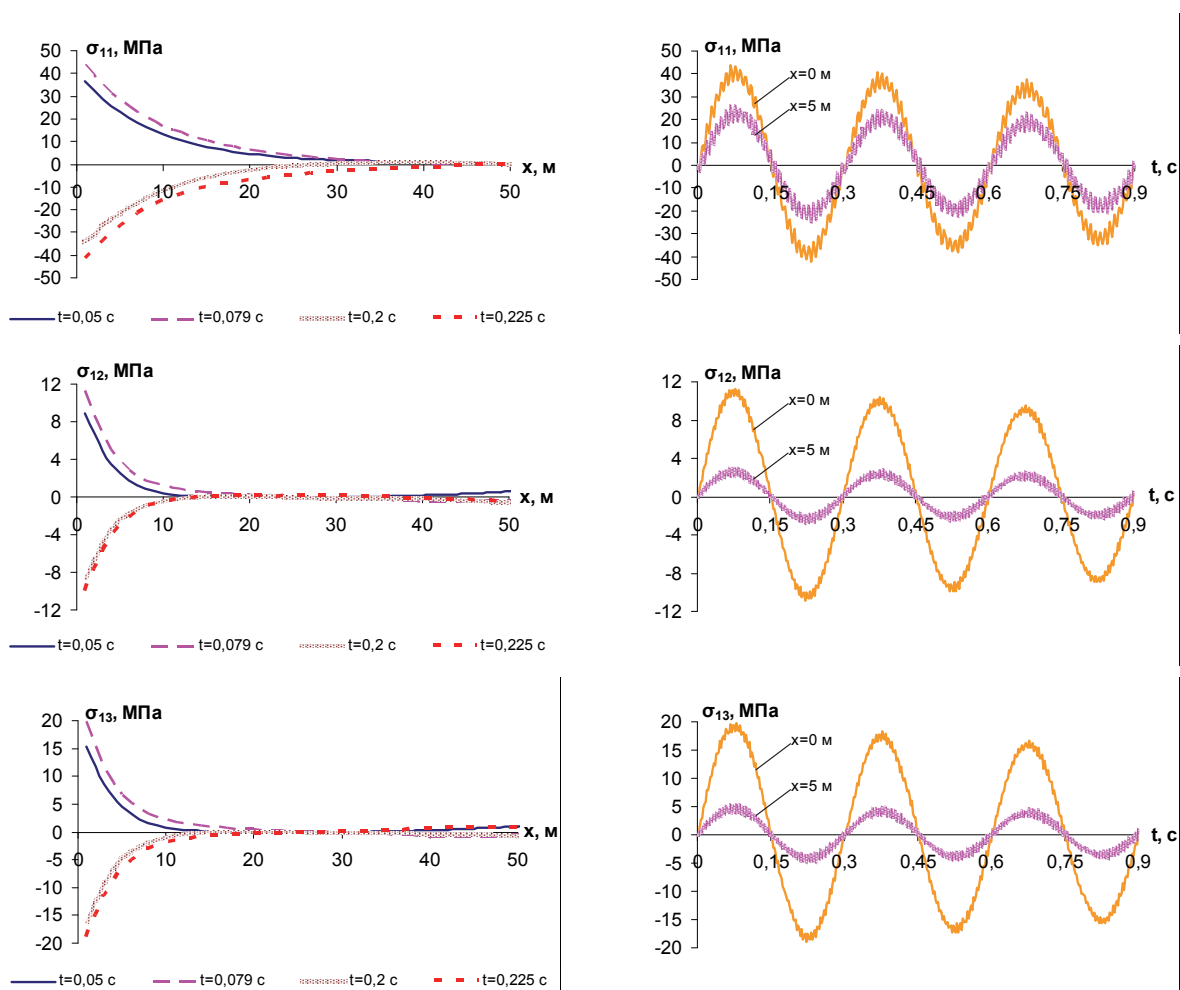


Рис. 5. Изменения значения нормального и касательного напряжений вдоль оси трубопровода в заданных точках поперечного сечения и времени. Изменения значения нормального и касательных напряжений в заданных точках поперечного сечения трубопровода по времени

Изменения значения интенсивности нормального и касательного напряжений по времени в заданных сечениях трубопровода приводятся на рис. 6. Из рисунка видно, что максимальные значения интенсивности нормальных и касательных напряжений достигаются на заземленном конце трубопровода. С течением времени амплитуды колебаний интенсивности нормального и касательного напряжений уменьшаются. Этот процесс соответствует закону движения грунта.

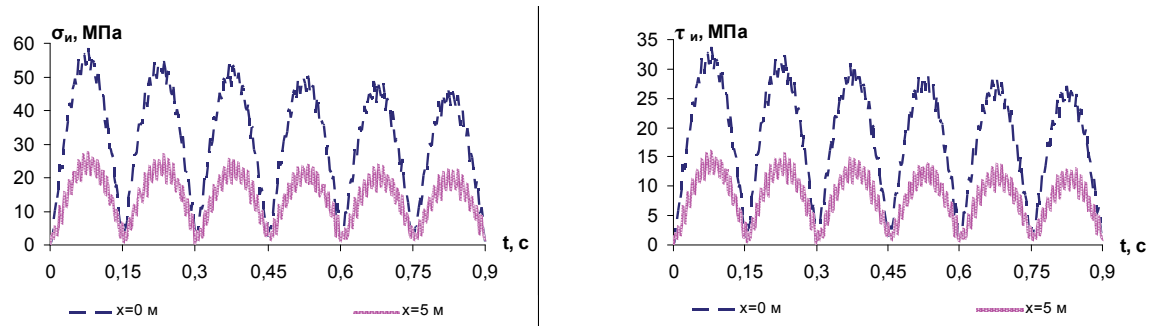


Рис. 6. Изменения значения интенсивности нормального и касательного напряжения по времени в заданных точках поперечного сечения ($y = R_H \cos \gamma$, $z = R_H \sin \gamma$, $R_H = 0,15$ м, $\gamma = 45^\circ$) и в заданных сечениях ($x = 5$ м, $x = 50$ м)

Все это позволяет не только совершенствовать нормативный документ по сейсмостойкому строительству подземных систем жизнеобеспечения, но предложить реальные алгоритмы, программы расчета и проектирования подземных трубопроводных систем жизнеобеспечения в сейсмических районах.

Для полимерных трубопроводов с заземленными концами в случае плоско – напряженного состояния, имеем следующие результаты.

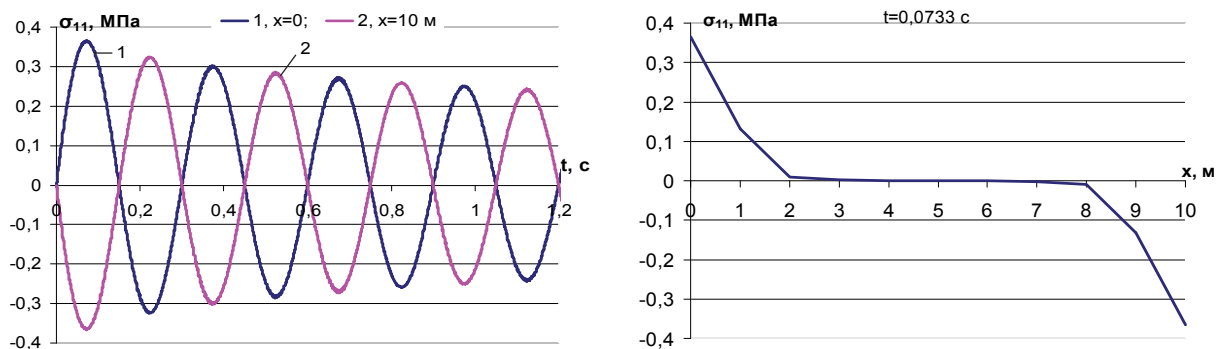


Рис. 7. Изменение нормального напряжения трубопровода по времени на расстоянии $x = 0$, $x = 10$ м и вдоль трубопровода в заданном времени при $\alpha = 30^\circ$

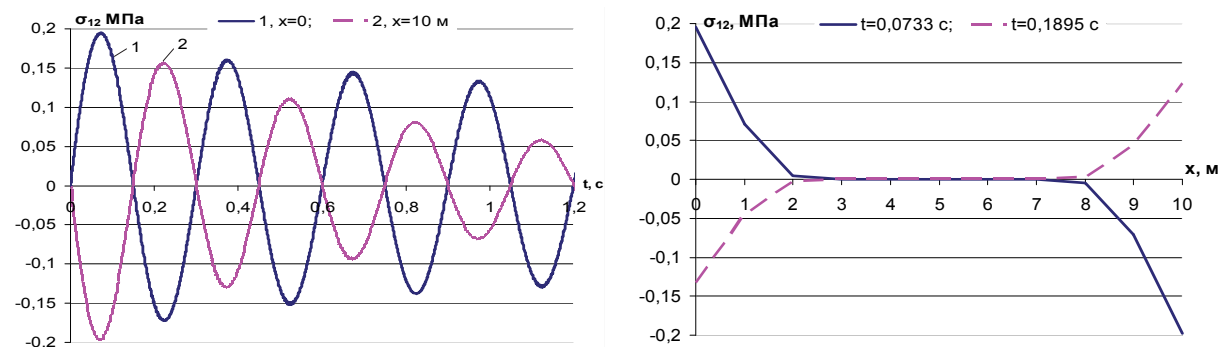


Рис. 8. Изменение касательного напряжения трубопровода по времени на расстоянии $x = 0$, $x = 10$ м и вдоль трубопровода в заданном времени при $\alpha = 30^\circ$

Заключение

Вариационное уравнение подземного трубопровода при пространственном сейсмическом нагружении выводится на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Система дифференциальных уравнений подземного трубопровода при пространственном

сейсмическом нагружении с естественными граничными и начальными условиями сформулируются из полученного вариационного уравнения.

Полученная система дифференциальных уравнений может быть решена с различными граничными и начальными условиями при различных пространственных сейсмических нагружениях подземного трубопровода. Здесь система дифференциальных уравнений колебаний подземных трубопроводов с заданными граничными и начальными условиями и пространственной сейсмической нагрузки решается методом конечных разностей второго порядка точности. Разработанный компьютерный алгоритм реализуется на основе объектно – ориентированного языка Borland Delphi 7.

Анализ результатов показывают, что интенсивные изменения значения продольного и поперечных перемещений, нормального и касательных напряжений, продольного и поперечных усилий происходят около заземленного конца подземного трубопровода, что совпадает данными последствий Ташкентскими Землетрясениями 1966 г о поведении подземных трубопроводов [9]. Также самые явления имеют крутящий и изгибающие моменты. Это подтверждаются и в интенсивностях напряжений σ_u и τ_u . Все эти процессы дают основания, что опасной зоной нагружения подземного трубопровода является около заземленного края.

Разработанные алгоритмы и программы расчета позволяют рассматривать колебания трубопровода при различных видах нагружения, закрепления концов и параметров грунта, тем самым все эти процедуры позволяют определить реально возникающие перемещения и нагружения в сечениях трубопровода при различных сейсмических нагружениях.

Работа поддержана грантом фундаментальных исследований АН РУз в частности Ф4-ФА-Ф047 по теме «Сейсмодинамика подземных трубопроводных систем сложной конфигурации, расположенных в грунтах с нарушенной структурой».

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.
2. Равшанов Н. Математические модели нестационарных технологических процессов сепарирования многокомпонентных смесей. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – Ташкент. – 2010. С. 25
3. Т.Р. Рашидов., Т. Юлдашев. Математические модели сейсмодинамики сложных систем подземных сооружений // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Тверь: ТГТУ, 2007. С. 272–277.
4. T.R. Rashidov and D.A. Bekmirzaev. Seismodynamics of Pipelines Interacting with the Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. New York, USA, July 2015, Volume 52, Issue 3, pp 149-154.
5. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. – Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
6. Рашидов Т., Хожметов Г. Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. – Ташкент: Фан, 1985.–152 с.
7. Ильюшин А.А. Пластичность. -М: Гостехиздат, 1948.-376 с.
8. Строительные нормы и правила. «Строительство в сейсмических районах», КМК 2.01.03-96, Ташкент, 1996 г. –88 с.
9. Рашидов Т., Крыженков В.А. Воздействия Ташкентского землетрясения и его афтершоков на подземные сооружения различного назначения. В сб. «Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 года». Ташкент. Фан. 1971.

УДК 539.3:681.06

К РАСЧЕТУ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

А. Абдусаттаров, Т. Юлдашев, А.И. Исомиддинов

*Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта (ТашИИТ),
Ташкент, Узбекистан, nematilla81@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрены математические модели расчета тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении с учетом пластичности и повреждаемости. Приведены геометрические, статические и смешанные граничные условия. Для решения поставленных задач используется метод конечных разностей по модификации А.А. Самарского-И.В. Фрязинова. Получена система нелинейных алгебраических уравнений, которая решается комбинацией матричной прогонки и методом упругих решений А.А. Ильюшина.

Ключевые слова: тонкостенные стержни, нагружения, пластичность, повреждаемость, дифференциальные уравнения, краевая задача, метод конечных разностей, аппроксимация.

На основе теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина [1] и уточненной теории стержней, предложенной В.З. Власовым и Г.Ю. Джанелидзе разработаны расчетные модели стержней, описываемые системами нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с естественными граничными условиями, которые учитывают возникновение вторичных пластических деформаций, накопление повреждений, свойства циклического упрочнения и разупрочнения материалов при переменных нагружениях.

1. Постановка задачи

На основе вариационного принципа Лагранжа [2] с использованием соотношения Коши и связи между напряжениями и деформациями [3] выводится система нелинейных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями в векторной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\left(A^u - A^{p(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + \left(B^u - B^{p(k)} \right) \vec{V}^{(k)} \right] + \left(C^u - C^{p(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + \left(D^u - D^{p(k)} \right) \vec{V}^{(k)} = \vec{F}^{(k)} + \\ & \frac{d}{dx} \left(A^{p(k)} \frac{d\vec{V}^{0(k-1)}}{dx} + B^{p(k)} \vec{V}^{0(k-1)} \right) + C^{p(k)} \frac{d\vec{V}^{0(k-1)}}{dx} + D^{p(k)} \vec{V}^{0(k-1)} + \\ & + \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{d}{dx} \left[A^{po(k-m)} \frac{d}{dx} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) + B^{po(k-m)} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + C^{po(k-m)} \frac{d}{dx} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) + D^{po(k-m)} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) \right\}, \\ & \left\{ \left(A^u - A^{p(k)} \right) \frac{d\vec{V}^{(k)}}{dx} + \left(B^u - B^{p(k)} \right) \vec{V}^{(k)} - \vec{Q}^{(k)} - B^{po(k)} \vec{V}^{0(k-1)} - A^{po(k)} \frac{d\vec{V}^{0(k-1)}}{dx} - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{k-1} \left[A^{po(k-m)} \frac{d}{dx} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) + B^{po(k-m)} \left(\vec{V}^{0(k-m)} - \vec{V}^{0(k-m-1)} \right) \right] \right\} \delta \vec{V}^{(k)} \Big|_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где A^u, B^u, C^u, D^u – матрицы с постоянными коэффициентами; $A^{p(k)}, B^{p(k)}, C^{p(k)}$ и $D^{p(k)}$ – матрицы с переменными коэффициентами; $\vec{F}^{(k)}, \vec{Q}^{(k)}$ – векторы девятого порядка.

Для иллюстрации представим элементы a_{11} и a_{18} в виде:

$$a_{11} = \frac{l^2}{3I_0} \left(F - F_{\omega}^{(k)} \right); \quad a_{18} = -\frac{l^2}{3h_0 I_0} \left(S_z - S_{z\omega}^{(k)} \right),$$

где интегралы $F_{\omega}^{(k)} = \iint_{F} \omega^{(k)} dF$; $S_{z\omega}^{(k)} = \iint_{F} y\omega^{(k)} dF$ содержат функции пластичности и зависят от числа нагружения k .

При построении краевых задач использованы безразмерные величины:

$$x = l\bar{x}, \quad y = b_0\bar{y}, \quad z = h_0\bar{z}, \quad U = h_0\bar{U}, \quad V = h_0\bar{V}, \quad W = h_0\bar{W},$$

$$\alpha_1 = \frac{h_0}{l}\bar{\alpha}_1, \quad \beta_1 = \frac{h_0}{l}\bar{\beta}_1, \quad \alpha_2 = \frac{h_0}{l}\bar{\alpha}_2, \quad \beta_2 = \frac{h_0}{l}\bar{\beta}_2, \quad \nu = \frac{1}{l}\bar{\nu}.$$

Выражения внутренних усилий и моментов в векторной форме представим в виде:

$$\bar{P}^{(k)} = \frac{l^3}{3Gh_0J_0} \left\{ \left(\tilde{A}^u - \tilde{A}^{p(k)} \right) \frac{d\tilde{V}^{(k)}}{dx} + \left(\tilde{B}^u - \tilde{B}^{p(k)} \right) \tilde{V}^{(k)} + \tilde{A}^{p(k)} \frac{d\tilde{V}^{0(k-1)}}{dx} + \tilde{B}^{p(k)} \tilde{V}^{0(k-1)} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{k-1} \left[\tilde{A}^{p(k-m)} \frac{d}{dx} \left(\tilde{V}^{0(k-m)} - \tilde{V}^{0(k-m-1)} \right) + \tilde{B}^{p(k-m)} \left(\tilde{V}^{0(k-m)} - \tilde{V}^{0(k-m-1)} \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

Здесь $\bar{P}^{(k)} = \left\{ Q_1^{(k)}, M_y^{(k)}, M_{a_1}^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_z^{(k)}, M_{a_2}^{(k)}, N^{(k)}, M_x^{(k)}, M_\phi^{(k)}, Q_{a_1}^{(k)}, Q_{a_2}^{(k)}, M_\phi^{(k)} \right\}$,

$\tilde{V}^{(k)} = \left\{ W^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}, V^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}, U^{(k)}, \theta^{(k)}, \nu^{(k)}, 0, 0, 0 \right\}$ - вектор функции двенадцатого

порядка; $\tilde{A}^u, \tilde{A}^{p(k)}, \tilde{B}^u, \tilde{B}^{p(k)}$ - квадратные матрицы двенадцатого порядка.

При линейном упрочнении функции пластичности $\omega^{(n)}$ определяются по формуле:

$$\omega^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} \leq \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \\ \lambda_n \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(n)}} \right], & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} > \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta). \end{cases} \quad (4)$$

В случае обобщенного принципа Мазинга – Москвитина $\lambda_n = \lambda, \bar{\varepsilon}_u^{(n)} = \alpha_n \varepsilon_s$; при использовании диаграмм деформирования Гусенкова-Шнейдеровича $\bar{\varepsilon}_s^{(n)} = 2\varepsilon_s, \lambda_n = 1 - g_n$; при учете накопления повреждений

$$\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) = \alpha_1^{n-z} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s + (3G)^{-1} B^{1/\alpha} \cdot \left[1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2} \right] \left[1 - (1 - \eta)^{1+\alpha} \right]^{1/\alpha} (n-1)^{-1/\alpha}.$$

Функция повреждаемости η определяется из кинетического уравнения [4]:

$$\frac{d\eta}{dn} = f\left(\bar{\sigma}_u^{(n)}, \eta_n\right) \quad (5)$$

при условиях $\eta(0)=0, \eta(N)=1$, где N – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

2. Формирования граничных условий

Обычно существуют геометрические, статические и смешанные граничные условия, рассмотрим некоторые из них:

1. Оба конца стержня жестко защемлены (геометрические граничные условия). В данном случае на торцах стержня вектор перемещений равняется нулю:

$$\tilde{V}^{(k)} \Big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{V}^{(k)} \Big|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

2. Оба конца стержня шарнирно закреплены (смешанные граничные условия). В этом случае перемещения $W \Big|_{x=0} = 0, V \Big|_{x=0} = 0, U \Big|_{x=0} = 0$. Остальные элементы вектора

перемещений:

$$\tilde{V}^{(k)} \Big|_{x=0} \neq 0; \quad \tilde{V}^{(k)} \Big|_{x=l} \neq 0. \quad (7)$$

3. Один конец стержня жестко защемлен, а другой шарнирно закреплен (геометрические и смешанные граничные условия). В этом случае: для жестко защемленного конца формулу (6), а для шарнирно закрепленного конца $W = V \Big|_{x=N} = 0$ и остальные элементы вектора перемещений $\tilde{V}^{(k)} \Big|_{x=N} \neq 0$.

4. Один конец стержня жестко зашпемлен, а другой свободный (*геометрические и статические граничные условия*). В данном случае для зашпемленного конца стержня формируется формула (6), а для свободного конца выражение в фигурной скобке в граничном условии (2) равняется нулю.

3. Метод решения краевой задачи

На основе метода конечных разностей приведем построение вычислительной схемы для решения краевой задачи (1), (2). Для этого используем модификации А.А. Самарского - И.В. Фрязинова [5], аппроксимирующие производные с точностью до второго порядка в области $G_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, n-1\}$; ($h = 1/n$), тогда краевая задача (1), (2) после аппроксимации получает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left(A_{i+1/2} \frac{\vec{v}_{i+1}^{(1)} - \vec{v}_i^{(1)}}{h} - A_{i-1/2} \frac{\vec{v}_i^{(1)} - \vec{v}_{i-1}^{(1)}}{h} \right) + \frac{B_{i+1} \vec{v}_{i+1}^{(2)} - B_i \vec{v}_i^{(2)}}{h} + \frac{C_i \vec{v}_{i+1}^{(2)} - C_i \vec{v}_i^{(2)}}{h} + D_i \vec{v}_i^{(1)} = \vec{F}_i, \\ \frac{1}{h} \left(A_{i+1/2} \frac{\vec{v}_{i+1}^{(2)} - \vec{v}_i^{(2)}}{h} - A_{i-1/2} \frac{\vec{v}_i^{(2)} - \vec{v}_{i-1}^{(2)}}{h} \right) + \frac{B_i \vec{v}_i^{(1)} - B_{i-1} \vec{v}_{i-1}^{(1)}}{h} + \frac{C_i \vec{v}_i^{(1)} - C_i \vec{v}_{i-1}^{(1)}}{h} + D_i \vec{v}_i^{(2)} = \vec{F}_i. \end{cases} \quad (8)$$

Введем клеточный вектор $\vec{U}_i = [\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}]^T$, тогда систему уравнений (8) с соответствующими граничными условиями (зашпемленный) представим в виде:

$$\vec{A}_i \vec{U}_{i+1} - \vec{B}_i \vec{U}_i + \vec{C}_i \vec{U}_{i-1} = \vec{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

$$\vec{U}_0 = 0, \quad \vec{U}_N = 0, \quad (10)$$

здесь \vec{A}_i , \vec{B}_i и \vec{C}_i - клеточные матрицы, а \vec{F}_i - клеточный вектор, которые имеют вид:

$$\vec{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i+1/2} & B_{i+1} + C_i \\ \theta & \frac{1}{h} A_{i+1/2} \end{bmatrix}, \quad \vec{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i+1/2} + \frac{1}{h} A_{i-1/2} - hD & B_i + C_i \\ -B_i - C_i & \frac{1}{h} A_{i+1/2} + \frac{1}{h} A_{i-1/2} - hD \end{bmatrix}, \quad \vec{C}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} A_{i-1/2} & \theta \\ -B_{i-1} - C_i & \frac{1}{h} A_{i-1/2} \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{bmatrix} h\vec{F}_i \\ h\vec{F}_i \end{bmatrix}.$$

Для решения сформулированных краевых задач (9) - (10) используется метод матричной прогонки, в котором на прямом ходе вычисляются прогоночные коэффициенты, а на обратном находятся решения системы нелинейных алгебраических уравнений. При этом должно обеспечиваться следующее условие итерации:

$$\max_i \left| \vec{v}_i^{(k, \gamma+1)} - \vec{v}_i^{(k, \gamma)} \right| < \varepsilon_{\text{перемещения}} \max_i \left| \vec{v}_i^{(k, \gamma+1)} \right|; \quad (11)$$

где γ - число итераций, $\varepsilon_{\text{перемещения}}$ - точность вычисления, k - число повторно - переменного нагружения. При каждом нагружении определяется вектор перемещений $\vec{v}_i^{(k)}$ из уравнения (1) с соответствующими граничными условиями (2). После определения вектора $\vec{v}_i^{(k)}$ вычисляется вектор внутренних усилий стержня $\vec{P}_i^{(k)}$ по формуле (3).

На основе разработанного алгоритма составлена модифицированная комплексная программа на объектно-ориентированном языке Delphi. Программный комплекс реализован с помощью модулей, оформленных в виде процедур и функций. Созданный интерфейс позволяет получить результаты расчета в виде таблиц и графиков, записав их в индивидуальные файлы, для дальнейшего их анализа. На основе программного обеспечения можно провести исследование напряженно-деформированного состояния стержня в различных плоскостях с геометрическими, смешанными и статическими граничными условиями при переменных нагружениях. В качестве примера произведен расчет тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения, зашпемленного по торцам при повторно - переменном нагружении.

Задача решена при следующих исходных данных: материальные константы кинетического уравнения $A = 1.2 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = \beta = 5$; $\gamma_1 = 0.8$; $\alpha_1 = 0.97$; $B = 1.4 \cdot 10^3$; $\varepsilon_s = 0.0015$; геометрические и механические характеристики стержня $l = 250 \text{ см}$; $h_0 = 10 \text{ см}$; $b_0 = 10 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma_s = 3210 \text{ кг/см}^2$; равномерно распределенные внешние нагрузки $f_0^+ = 25$; $f_0^- = 50$; $f_0^+ = 10$; $f_0^- = 5 \text{ (кг/см}^2\text{)}$.

Проанализирован характер сходимости метода конечных разностей и метода упругих решений (явная и неявная схема). Расчеты показывают, что для обеспечения необходимой точности решения задач следует выбрать число узлов сетки $N_1 = 60$, количество итераций находятся в интервале $2 \leq \gamma \leq 6$. Результаты расчета приводятся ($y = 0; z = b_0$) в точках поперечного сечения стержня $x = 0.5$ при циклическом нагружении ($k = 2, 4, 6, 8, 10$).

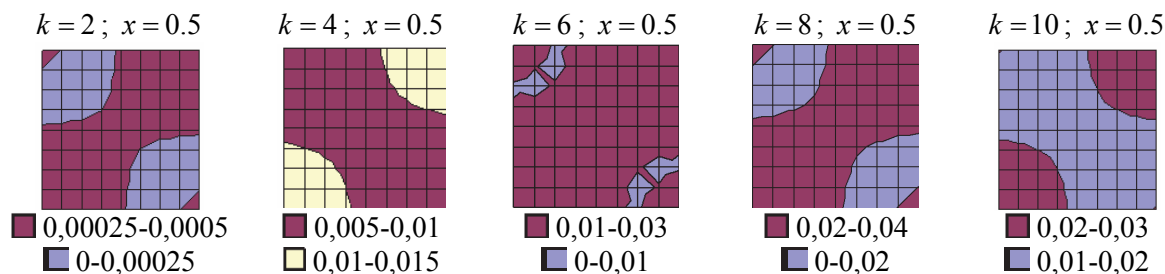


Рис.1. Кинетика изменения зоны поврежденности

Из рис. 1 видно, что с удалением от левого торца стержня поврежденные зоны в сечениях вытягиваются к правым верхним и левым нижним углам. Торцевая часть стержня полностью переходит в пластическую область.

Исследовано НДС стержня при переменном нагружении (в точках $y = 0; z = b_0; x = 0.5$) при следующих равномерно распределенных внешних нагрузках:

- $f_0^+ = 25 \text{ кг/см}^2, f_0^- = 50 \text{ кг/см}^2, \bar{f}_0^+ = 10 \text{ кг/см}^2, \bar{f}_0^- = 5 \text{ кг/см}^2;$
- $f_0^+ = 50 \text{ кг/см}^2, f_0^- = 100 \text{ кг/см}^2, \bar{f}_0^+ = 20 \text{ кг/см}^2, \bar{f}_0^- = 10 \text{ кг/см}^2.$

На рис. 2. представлен характер изменения функции пластичности (а) и функции повреждаемости (б). Результаты численного эксперимента показывают, что с увеличением числа циклов нагружения увеличиваются значения функций пластичности и повреждаемости, а это в свою очередь влияет на кинетику НДС стержня.

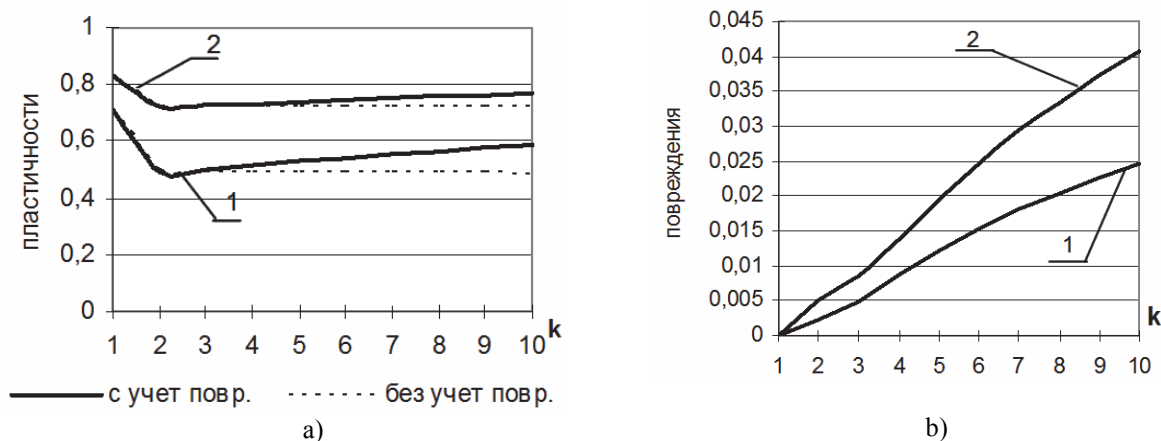


Рис.2. Кинетика функции пластичности и повреждаемости

Литература

- Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Т.: Фан, 1966. – 394 с.
- Буриев Т. Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций. – Т.: Изд-во. Фан, 1986. – 244с.
- Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций – М.: Изд-во Наука, 1981. – 344 с.
- Самарский А.А., Фрязинов И.В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики. // Журнал. Успехи математических наук. – М.: Наука, Том 31, Выпуск 6(192), 1978г., с. 167-197.

УДК 539.3

К МЕТОДУ РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ В ПЛАСТИЧНОСТИ

Р.А. Абиров

*Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
rustam_abirov@mail.ru*

Аннотация. В работе на основе метода разрывных смещений рассмотрены задачи о нагружении пластины с одной краевой трещиной и нагружение стального образца в состоянии плоского напряженного состояния по различным теориям пластичности. По построенным траекториям деформирования проведены эксперименты и оценена степень физической достоверности полученных решений.

Ключевые слова: напряжение, деформация, пластичность, метод разрывных смещений, трещина, пластина.

1. Процедура учета пластичности в методе разрывных смещений

Особенности и детали пластического течения у конца разреза определяют условия превращения его в трещину и законы ее дальнейшего развития. Ясно, что развитие пластической зоны у конца разреза зависит от многих факторов, из которых основными можно считать свойства материала, форму детали и условия нагружения.

Одним из подходов при рассмотрении задач с одной или несколькими узкими щелеподобными вырезами и щелями удобно использовать метод граничных элементов в форме разрывных смещений [1]. Подобные задачи вызывают повышенный интерес в геомеханике и в связи с новыми определяющими соотношениями для различных видов новых материалов. Метод разрывных смещений основан на аналитическом решении задачи о бесконечной плоскости, смещения в которой терпят постоянный разрыв. Физически разрыв смещений представляется как трещина, противоположные берега которой смещены друг относительно друга. Так как ориентация трещин может быть произвольная в плоскости, то удобнее пользоваться локальной системой координат на каждом граничном элементе. Общая формула для расчета напряжений и перемещений (в приращениях) на границе имеет вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} dD_n^j - d\sigma_s^{i(pl)} \\ d\sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} dD_n^j - d\sigma_n^{i(pl)} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} du_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} dD_n^j + du_s^{i(pl)} \\ du_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} dD_n^j + du_n^{i(pl)} \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Здесь использовалось положение, что $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{pl}$ и $u_i^e = u_i - u_i^{pl}$.

Используя граничные условия для n узлов выберем из уравнений (1) и (2) систему из $2n$ уравнений для определения фиктивных граничных условий:

$$AD = Y + p^0, \quad (3)$$

где A – матрица значений при неизвестных разрывах смещений, Y – вектор известных граничных условий, p^0 – вектор начальных значений.

Формулы для вычисления внутренних значений напряжений и перемещений имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{kl}^i &= \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ss}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{sn}^{ij} dD_n^j - d\sigma_{kl}^{i(pl)} \\ du_k^i &= \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ss}^{ij} dD_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{sn}^{ij} dD_n^j + du_k^{i(pl)} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Весовые коэффициенты \tilde{B}_{ss}^{ij} , \tilde{A}_{ss}^{ij} , \tilde{B}_{sn}^{ij} , \tilde{A}_{sn}^{ij} , B_{ss}^{ij} , A_{ss}^{ij} , B_{sn}^{ij} , A_{sn}^{ij} вычисляются единожды для каждого внутреннего и граничного узла.

Для вычислительных целей реальный контакт рассматривается как длинная узкая трещина со сжимаемым заполнителем или как трещина со свободными берегами. В первом случае, если таковой имеет место при рассмотрении задачи отрезок контакта можно моделировать механической моделью, когда на контакте есть пружина с нормальной и касательной составляющей жесткости. Конечно, в этом случае можно рассматривать только плоский случай. В случае задачи, когда трещины рассматриваются как вырезы со свободной от усилий поверхностью, метод разрывных смещений заключается в отыскании фиктивных разрывов смещений по всей границе рассматриваемого тела.

Таким образом, уравнения (1) и (2) образуют систему для нахождения всех неизвестных на границе (включая оба берега трещины) фиктивных разрывов смещений и неизвестных граничных значений напряжений и смещений.

Процедура решения задачи является итерационной, где требуется отыскать величины начальных (пластических) напряжений и смещений. Величины напряжений на каждом шаге определялись путем сложения всех приращений, полученных на предыдущих итерациях. На начальном этапе решения задачи теории пластичности следует определить нагрузку F_0 , при которой возникают первые пластические деформации. Для этого решается задача теории упругости, при заданной внешней нагрузке F . Определяем узел с максимальным напряжением и определяем величину:

$$w_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma_i^{\max}}.$$

Далее определяем $F_0 = F \cdot w_0$. На последующем шаге внешняя нагрузка, определяется как $F_j = F(i - w_0 i + w_0)$ ($0 \leq I \leq 1$), где приращение нагрузки есть $\Delta F_j = F_{j+1} - F_j$. Количество приращений для нагрузки можно определять произвольно. На данном этапе имеем $\sigma_i^{[1]} = \sigma_s$ (для максимального значения напряжений), $d\sigma_{ij}^{pl} = du_i^{pl} = 0$. Давая приращение внешней нагрузке ΔF_j , на основе (3) и (4) находим напряжения и ячейки, превысившие текущий предел упругости (для каждой ячейки он на данном этапе приращения свой). На основе определенных смещений по всему телу определяем приращения деформаций ($d\varepsilon = Mdu$ - соотношения Коши в матричной форме).

1. На их основе определяем приращения напряжений на основе

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta\varepsilon_{ij} - \frac{2\nu G}{1-2\nu}\Delta\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \equiv D^e\Delta\varepsilon_{ij}; \quad \sigma_{ij}^{[2]} = \sigma_{ij}^{[1]} + \Delta\sigma_{ij};$$

если $\sigma_{ij}^{[2]} > \sigma_s^{[j]}$ ($\sigma_s^{[j]}$ - текущий предел текучести), то $\Delta\sigma_{ij}^{ep} = N\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij} - (N-P)\frac{\sigma\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}}{\sigma^2} \equiv D^{ep}\Delta\varepsilon_{ij}$

$$[2], \quad d\sigma_{ij}^{pl} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij}^{ep}, \quad \sigma_{ij}^{[2]} = \sigma_{ij}^{[1]} + \Delta\sigma_{ij}^{ep}, \quad \sigma_{ij}^{[1]} = \sigma_{ij}^{[2]}.$$

2. При данном приращении внешней нагрузки находим во всех узлах начальные значения перемещений и напряжений итерационным путем. Принимаем в соотношениях (1-4) величины $dD_s^j = dD_n^j = 0$ решаем эти уравнения при найденных значениях $d\sigma_{ij}^{pl}$. Далее $\Delta\sigma_{ij} = D^e\Delta\varepsilon_{ij}$, $\sigma_{ij}^{[2]} = \sigma_{ij}^{[1]} + \Delta\sigma_{ij}$, $\Delta\sigma_{ij}^{ep} = D^{ep}\Delta\varepsilon_{ij}$ (для пластических ячеек), $d\sigma_{ij}^{pl} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij}^{ep}$, модифицируем историю нагружения $\sigma_{ij}^{[2]} = \sigma_{ij}^{[1]} + \Delta\sigma_{ij}^{ep}$ и положим $\sigma_{ij}^{[1]} = \sigma_{ij}^{[2]}$.

Если $d\sigma_{ij}^{pl} \leq \delta$, то даем следующее приращение внешней нагрузке, если нет, то переходим к пункту 2.

В рамках алгоритма требуется находить значения перемещений во всех узлах, включая граничные, чтобы найти путем разностных схем значение деформаций. При более густой

разбивке точность нахождения деформаций увеличивается, что ведет к точности вычисления начальных напряжений.

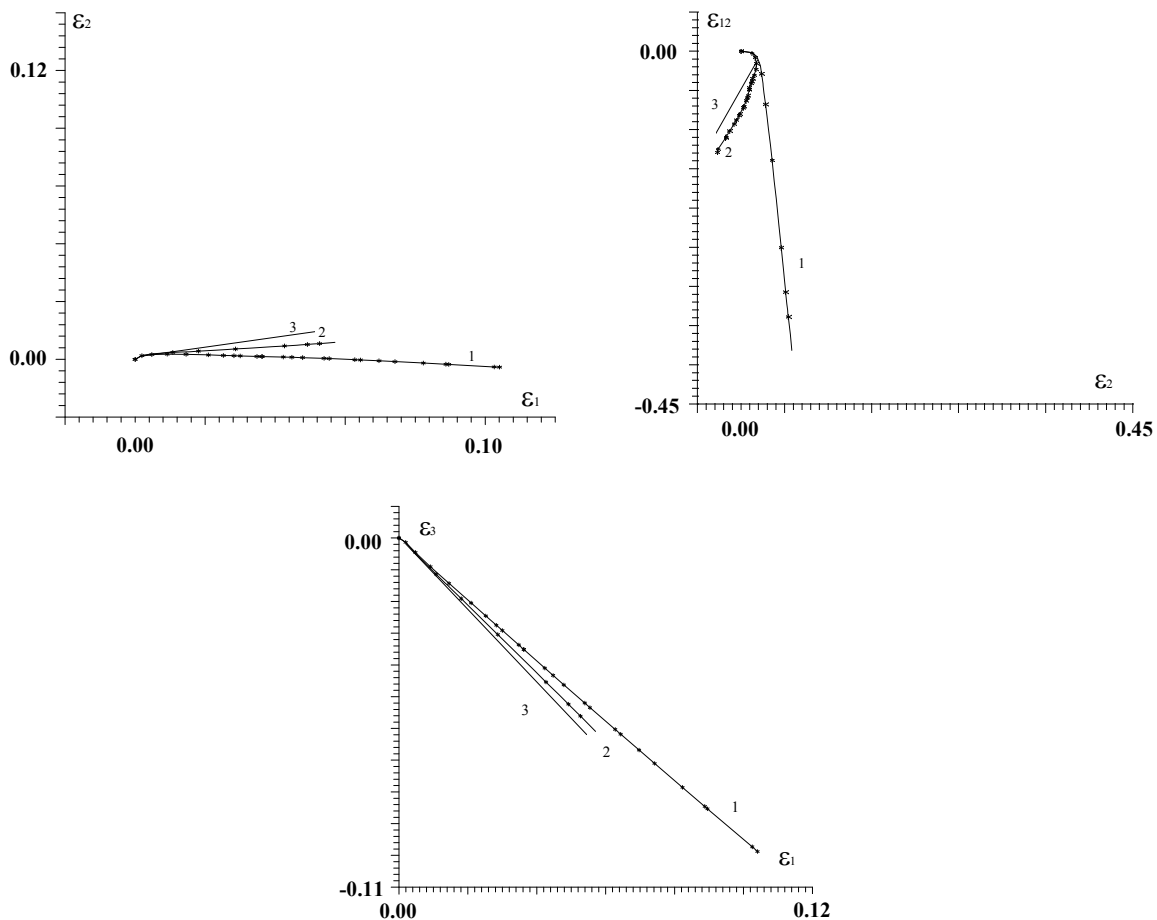
2. Приложение метода

Рассмотрим задачу о растяжении образца с одной краевой трещиной при действии равномерно распределённой нагрузки с диаграммой материала вида:

$$\sigma = \frac{E \cdot \sigma_s (\varepsilon + C)}{\sigma_s + E \cdot C},$$

где $C = 0.2333$, $E = 206 \text{ GPa}$ ($2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$), $\nu = 0.3$, $\sigma_s = 480 \text{ МПа}$ (4900 кг/см^2).

Расчёт проводился по теории Прандтля-Рейсса, Прагера и по деформационной теории пластичности Ильюшина [3]. Как показали расчеты, траектории деформации получаются сложными (средней кривизны). Это отражается на величинах деформаций вычисленных по деформационной теории, которые также имеют завышенные значения (до 30%) по сравнению с результатами расчетов по теории течения. По векторным свойствам (рис. 1) эта разница достигает 60%.



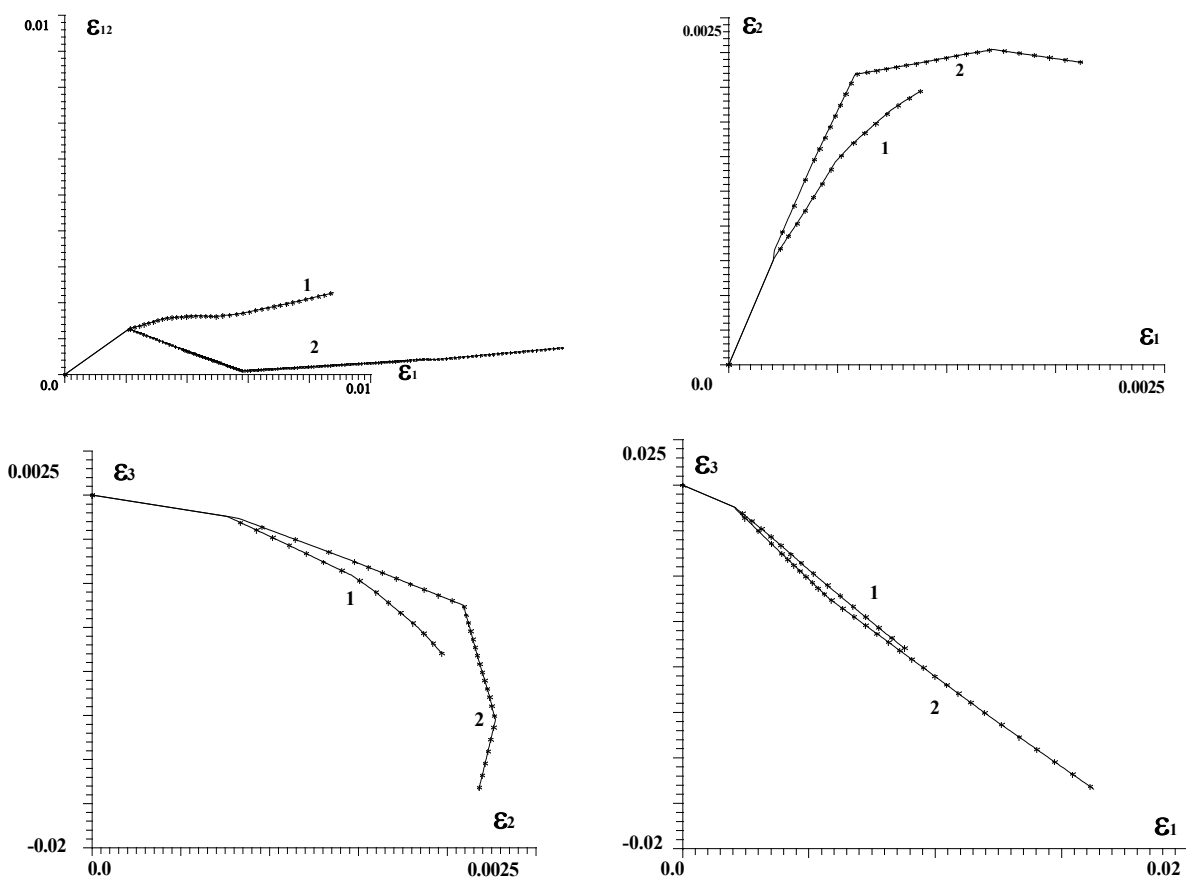
1 – теория Ильюшина, 2 – теория Прандтля, 3 – теория Прагера

Рис. 1. Траектории деформирования

В качестве следующего примера рассмотрим нагружение стального образца в состоянии плоского напряженного состояния. Образец с вырезом под действием сосредоточенной силы $F = 300 \text{ МПа}$. Механические характеристики: $\sigma_s = 461 \text{ МПа}$, $E = 206010 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, $E_k = 0.2E$. Условия на части нижней границы – шарнирное опирание.

Из анализа решения можно сделать следующие выводы: результаты вычислений, выполненные по двум различным вариантам определяющих соотношений, дают несовпадающие между собой числовые характеристики деформированного состояния

пластины. Это особенно характерно для зоны вблизи трещины, где имеет место наибольшая концентрация напряжений. На рис. 2 показаны проекции траектории деформирования на соответствующие оси. Из них можно судить о различии решений полученных по различным теориям (траектории, полученные по деформационной теории больше чем по теории течения).



1 – теория Прандтля-Рейсса, 2 – теория Ильюшина

Рис. 2. Проекция деформаций на плоскости

Как показывают решения приведенных выше задач, для более полного учета распределения напряжений в теле следует учитывать сложное нагружение. Возможен вариант проведения оценки физической достоверности решений и учет погрешностей в коэффициенте запаса. Для более полного учета свойств материалов при решении задач может быть использован метод СН-ЭВМ. Это позволит решить задачи с использованием экспериментов на сложное нагружение с максимальной точностью, которая достижима в экспериментах.

Литература

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. – 328 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
3. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа. 1990. -368с.

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

А.А. Алексеев, В.Г. Зубчанинов, В.И. Гульятев

*Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия,
alexeew@bk.ru, vlgzub@gmail.com*

Аннотация. Приводятся результаты численного моделирования и экспериментальных исследований по верификации математической модели В.Г. Зубчанинова теории процессов упругопластического деформирования материалов А.А. Ильюшина на сложных плоских траекториях деформирования с прямолинейными и криволинейными участками постоянной кривизны. Представлены расчеты по некоторым частным вариантам модели, в которых аппроксимации функционалов пластичности не учитывали влияния ряда параметров сложного нагружения, что приводило к существенному отклонению от опытных данных.

Ключевые слова: пластичность, математическая модель, численное моделирование, верификация, сложное нагружение, криволинейная траектория, векторные и скалярные свойства материалов, испытательный комплекс СН-ЭВМ.

1. Основные соотношения и уравнения теории процессов упругопластического деформирования А. А. Ильюшина

В теории процессов упругопластического деформирования компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + S_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \mathcal{E}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $S_{ij} = \sigma S_{ij}^*$, $\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon \mathcal{E}_{ij}^*$ – компоненты их девiatorов; S_{ij}^* , \mathcal{E}_{ij}^* – компоненты направляющих тензоров;

$$\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров и тензоров-девиаторов соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера. При простом (пропорциональном) нагружении направляющие тензоры напряжений и деформаций $(S_{ij}^*) = (\mathcal{E}_{ij}^*)$ и соотношения теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина [1, 2] имеют вид

$$\sigma_0 = 3K \varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где

$$\sigma = \Phi(\mathcal{E}) \quad (4)$$

– универсальная функция единой диаграммы упрочнения материалов Роша и Эйхингера, определяющая скалярные свойства материалов для произвольного напряженно-деформированного состояния (НДС); K – упругий модуль объемной деформации; $\sigma/\mathcal{E} = 2G_p$ – удвоенный пластический модуль сдвига.

При сложном (непропорциональном) нагружении направляющие тензоры не равны между собой $(S_{ij}^*) \neq (\mathcal{E}_{ij}^*)$, и учет в определяющих соотношениях (3), (4) скалярных свойств материалов недостаточен. Поэтому, А. А. Ильюшин в работах [1, 3, 4] предложил векторное представление деформаций и напряжений в линейном координатном шестимерном евклидовом пространстве с ортонормированным неподвижным базисом $\{\hat{i}_k\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, 5$. Тензорам напряжений и деформаций E_6 ставятся в соответствие векторы напряжений \bar{S} и деформаций $\bar{\varepsilon}$, представляемые в виде суммы векторов объемного растяжения-сжатия и формоизменения

$$\bar{S} = S_0 \hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_0 \hat{i}_0 + \bar{\mathcal{E}}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k=1,2,\dots,5) \quad (6)$$

– векторы напряжений и деформаций в совмещенном пятимерном девиаторном пространстве формоизменения E_5 . Их координаты связаны с компонентами тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и девиаторов S_{ij}, \mathcal{E}_{ij} взаимно-однозначными преобразованиями [1–5]

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, & S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \mathcal{E}_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathcal{E}_{11}, & \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33}}{\sqrt{2}}, & \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{12}, & \mathcal{E}_4 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{23}, & \mathcal{E}_5 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{13}. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно постулату изотропии А.А.Ильюшина [1], векторы формоизменения напряжений и деформаций связаны определяющими соотношениями [1, 4–7]

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1. \end{cases} \quad (8)$$

учитывающими векторные и скалярные свойства материалов. Здесь ϑ_1 – угол сближения который характеризует отклонение вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования в каждой ее точке и отражающий влияние векторных свойств материала на процесс деформирования; $\sigma = \Phi(s, \vartheta_1^0, \kappa_1)$ – функционал процесса скалярных свойств материала, характеризующий изменение длины вектора напряжений; s – длина дуги траектории деформирования; ϑ_1 – угол излома траектории; κ_1 – ее кривизна; $M_1, \frac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса, которые также должны зависеть от $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$.

При сложном нагружении по траекториям малой и средней кривизны, близкому к простому, может быть использован приближенный закон упрочнения Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (9)$$

где $s \geq \mathcal{E}$ и явном виде не учитывается история сложного нагружения (кривизна траектории κ_1 , углы ее излома ϑ_1^0) и векторные свойства материалов. При практических расчетах это может приводить к недостоверным результатам. Поэтому построение новых более точных аппроксимаций функционалов пластического деформирования при создании новых математических моделей, является актуальной и важной задачей.

2. Математическая модель В.Г. Зубчанинова теории процессов в плоских задачах

К основным уравнениям математической модели теории процессов в плоских задачах относятся уравнения (8) и универсальные аппроксимации функционалов упругопластических процессов В.Г. Зубчанинова [5], зависящие от всех параметров сложного нагружения для плоских криволинейных траекторий

$$\sigma(s) = \Phi(s, \vartheta_1^0, \kappa_1) = \Phi(s) + Af^p(\vartheta_1^0)\Omega(\Delta s) - B\Delta s\kappa_1, \quad (10)$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + Af_0^p \frac{d\Omega}{ds} - B \frac{d}{ds}(\Delta s\kappa_1), \quad M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q(\vartheta_1),$$

$\Delta s = s - s_K^T$ – приращение дуги траектории деформирования; s_K^T – длина дуги в точке ее излома;

$$\Omega(\Delta s) = -\left[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s}) \right] \quad (11)$$

– функция, описывающая «нырок» напряжений и обобщенный эффект Баушингера при сложной разгрузке и последующим вторичном пластическом деформировании;

$$f = f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (12)$$

– функция сложного нагружения, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома траектории; A, B, b, γ, p, q – материальные параметры для каждого конструкционного материала, экспериментально определяемые из базовых опытов. Эффект Баушингера при простом знакопеременном нагружении-разгрузке рассматривается при сложном нагружении-разгрузке как проявление общего свойства запаздывания скалярных свойств материалов [3, 5]. При заданных начальных условиях в точке излома траектории и компонентах вектора деформаций основные уравнения математической модели (8) с учетом (10)-(12) приводятся к задаче Коши, для численного решения которой использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

3. Экспериментальное обоснование достоверности модели

Экспериментальные исследования проводились на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопrotивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета на тонкостенных трубчатых образцах из стали 45 с механическими характеристиками $\sigma^T = 285$ МПа, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Трубчатые образцы имели толщину стенки $h = 1$ мм, диаметр срединной поверхности $d = 31$ мм, длину рабочей части $l = 110$ мм. Программы деформирования реализовывались с постоянной скоростью $\dot{\epsilon} = 10^{-6}$ сек $^{-1}$ в плоскости $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$ девиаторного подпространства деформаций E_5 при комбинированном непропорциональном воздействии осевой силы и крутящего момента. В серии проведенных испытаний криволинейные траектории имели различную постоянную кривизну [8]. На рис. 1. представлена двузвенная неаналитическая траектория деформирования, состоящая из первого прямолинейного участка OK и второго окружного участка радиуса $R = 1,75$ % и кривизны $\kappa_1 \approx 57,1$, который можно отнести к траекториям малой кривизны [9]. В точке K траектория претерпевает излом на угол $\vartheta_1^0 = 90^\circ$. Материальные параметры, входящие в функционалы процесса, определялись на основе базовых опытов по типу веера двузвенных траекторий при соответствующем угле излома 90 градусов. Их значения: $b = 0,125$, $A = 370,2$ МПа, $B = 23$ МПа, $\gamma = 386,8$, $p = 1,8$, $q = 0,5$.

На рис. 2 приведен отклик на реализованную траекторию деформирования в плоскости (S_1, S_3) совмещенного девиаторного подпространства напряжений E_5 , а на рис. 3, 4 приведены диаграммы $\sigma - s$ и $\vartheta_1 - \Delta s$, характеризующие скалярные и векторные свойства материалов соответственно. На рис. 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига $S_3 - \mathcal{E}_3$. Экспериментальные результаты на рис. 2-6 представлены кружочками. Кривые 1 на рис. 2-6 соответствуют расчетным данным согласно изложенной выше математической модели теории процессов в плоских задачах, учитывающей в аппроксимациях функционалов процесса (10) все параметры сложного нагружения $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$ для плоских траекторий и обобщенный эффект Баушингера, реализуемый на рынке напряжений при разгрузке. Кривые 2 на рис. 2-6 получены в предположении $B = 0$, то есть без учета кривизны в (10). В таком виде функционалы используются для процессов деформирования материалов вида кусочно-ломаных прямолинейных траекторий и хорошо зарекомендовали себя для траекторий с большими углами излома, например при $\vartheta_1^0 = 135^\circ$ [10].

Кривые 3 на рис. 2-6 отражают результат по теории процессов для траекторий средней кривизны В.С. Ленского, А.С. Кравчука и В.И. Малого, в которой принимается [5]

$$\sigma = \Phi(s), \quad M_1 = \alpha 2G \quad (0 < \alpha < 1), \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 2G_\kappa, \quad (13)$$

где G_κ – касательный модуль сдвига. Здесь предполагается, что кривизна мала ($\kappa_1 \approx 0$), а угол сближения невелик, то есть $\cos \vartheta_1 \approx 1$, $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$, и для отражения скалярных свойств материалов в активных процессах упругопластического деформирования используется закон упрочнения Одквиста-Ильюшина (9). В то же время в определяющих соотношениях (8) сохраняется дифференциальное уравнение для определения угла сближения ϑ_1 и, как следствие этого имеется его влияние на величину вектора напряжений $\bar{\sigma}$.

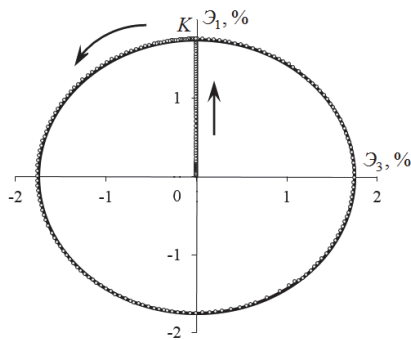


Рис. 1

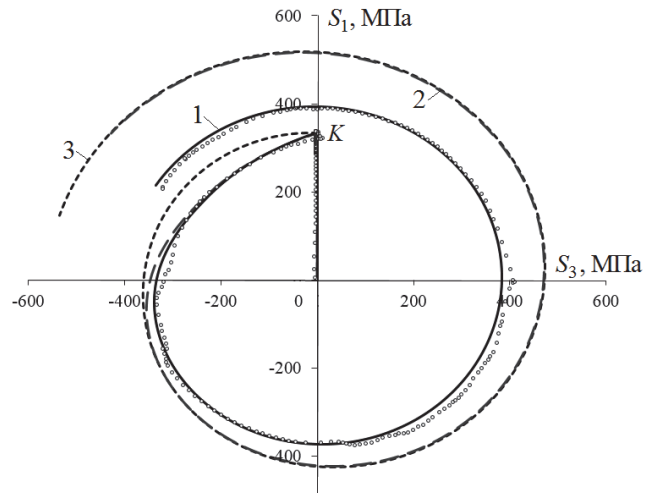


Рис. 2

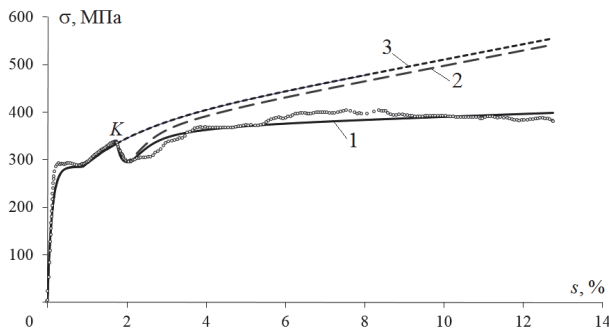


Рис. 3

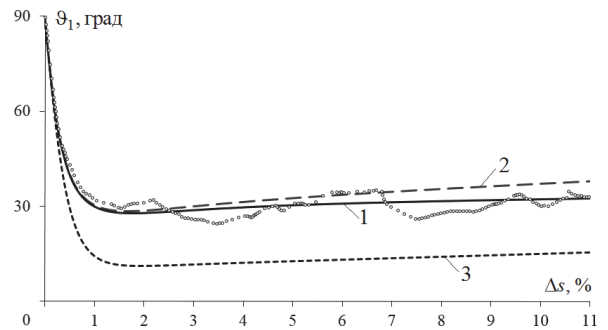


Рис. 4

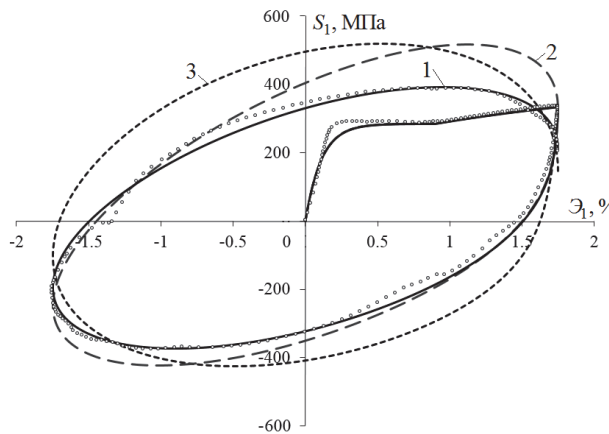


Рис. 5

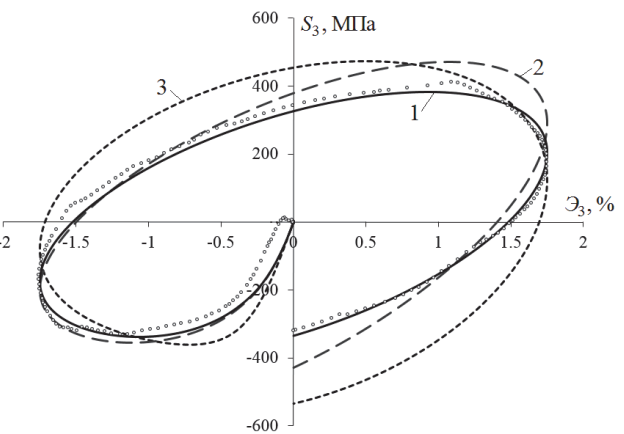


Рис. 6

Кривые 3 на рис. 2-6 получены при начальном условии $\vartheta_1^0 = 90^\circ$, соответствующем реализованной в опыте траектории с этим углом излома. В (13) принималось $\alpha = 0,75$. Похожие результаты [11] получены по теории течения Прандтля-Рейсса-Хилла для материалов с упрочнением, но без учета эффекта Баушингера, в которой принималось $M_1 = 2G$ и $\sigma = \Phi(s)$.

На рис. 7, 8 приведены расчетные диаграммы изменения функционалов $d\sigma/ds$ и M_1 в зависимости от изменения длины дуги Δs траектории деформирования s . Кривые на этих рисунках имеют ту же нумерацию, что и на рис. 2-6.

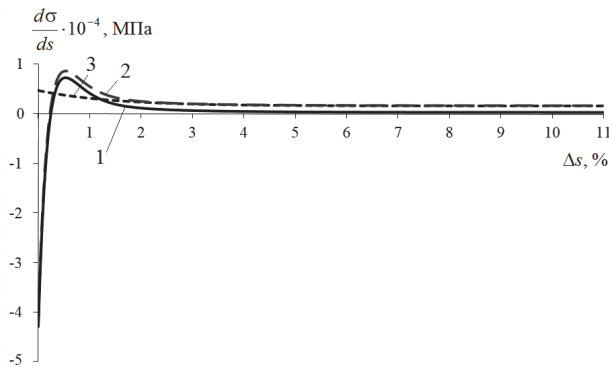


Рис. 7

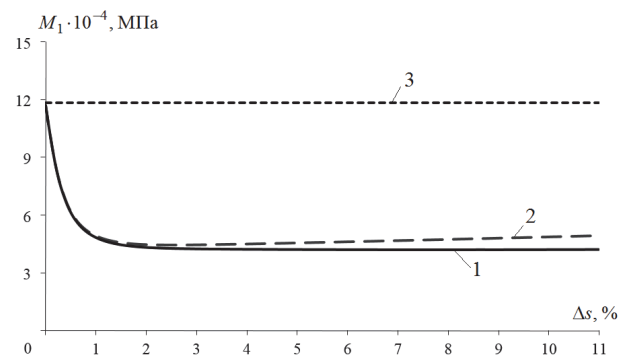


Рис. 8

Проведенные вычисления показали, что для рассмотренной траектории деформирования отклонение расчетных данных по математической модели (кривые 1) от экспериментальных данных не превышает 7–8 % по скалярным и 10 % по векторным свойствам, что отражает достоверность изложенной математической модели теории процессов.

Выводы

1. Верификация истинности теоретических положений математической модели теории процессов в плоских задачах для процессов деформирования по траекториям постоянной кривизны при сравнении с опытными данными достоверно установлена (кривые 1).

2. Степень точности той или иной теории пластичности можно адекватно установить только при учете в функционалах процессов всех основных параметров сложного нагружения: s , κ_1 , ϑ_1^0 . Неучет параметра кривизны κ_1 в аппроксимации функционала $\sigma = \Phi(s, \kappa_1, \vartheta_1^0)$ приводит к существенному отклонению от экспериментальных данных по скалярным свойствам (кривые 2, 3 на рис 2-6).

3. Использование закона упрочнения $\sigma = \Phi(s)$ и неучет влияния векторных свойств материалов, дает расчетные результаты для угла ϑ_1 (кривая 3 на рис. 4), которые заметно отличаются от эксперимента и теорий, в которых это влияние учитывается (кривые 1, 2 на рис. 4).

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. Уругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т.2 Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
6. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Известия АН СССР, ОТН. 1962, № 5. С. 154–158.
7. Васин Р.А., Ильюшин А.А. Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах // Известия АН СССР. МТТ. 1983, №4. С. 114-118.
8. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультаев В.И. Моделирование процессов сложного уругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. Ч 2. С. 113-123.
9. Зубчанинов В.Г., Алексеева Е.Г. О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 78-87.
10. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультаев В.И. Численное моделирование процессов сложного уругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18-25.
11. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г.. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). № 2, Vol. 24, 2015, pp. 107-118.

УДК 539.3

К ВОПРОСУ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Е.Г. Алексеева, В.Г. Зубчанинов

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия,
super_aeg@mail.ru, vlgzub@gmail.com

Аннотация. Рассматривается общее свойство запаздывания векторных свойств материалов и предлагается методика определения следа запаздывания векторных свойств материалов на криволинейных траекториях различной постоянной кривизны. На таких траекториях с достаточной для практических расчетов точностью устанавливается стационарный режим процесса деформирования материала с постоянным углом сближения. Для определения следа запаздывания вводится допуск на угол сближения при его приближении к асимптоте с ростом длины дуги траектории деформирования. Рассматривается классификация криволинейных траекторий по отношению к сложности нагружения.

Ключевые слова: пластичность, траектория деформирования, векторные свойства материалов, сложное нагружение, след запаздывания, кривизна траекторий.

Определяющие соотношения теории упругопластических процессов сложного нагружения материалов в плоских задачах [1, 2] имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + M \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (1)$$

где $M_1, M, d\sigma/ds$ – функционалы процесса;

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k, \quad (k=1, 2, 3) \quad (2)$$

– векторы напряжений и деформаций в девятимерном подпространстве формоизменения А.А. Ильюшина; $\{\hat{i}_k\}$ – ортонормированный базис, к которому это пространство отнесено;

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_2 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, \quad S_4 = S_5 = 0, \\ \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

– компоненты векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\mathcal{E}}$; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$) – компоненты тензоров напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij});

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (4)$$

– компоненты девятимерных тензоров напряжений и деформаций; δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{S_k S_k}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{ij}} = \sqrt{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_k} \quad (5)$$

– модули шаровых тензоров и девятимерных тензоров напряжений и деформаций соответственно.

В качестве закон упрочнения для траекторий малой и средней кривизны принимается универсальная кривая Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$ для любого сложного НДС при простом нагружении. При сложном нагружении по траекториям малой и средней кривизны в большинстве теорий пластичности принимается закон Одквиста-Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ [1, 2], где s – длина дуги траектории деформирования, причем $s \geq \mathcal{E}$.

Закон Одквиста-Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ не отражает собой влияние векторных свойств материалов, которое характеризуется углом сближения $\vartheta_1(s, \kappa_1)$ вектора напряжений $\bar{\sigma}$ с касательной к траектории деформирования. Отсюда возникает вопрос о диапазоне $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_1^*$

изменения кривизны траектории деформирования, в котором это изменение не оказывает заметного влияния на процессы сложного нагружения.

Для линеаризованного варианта ($\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$, $\cos \vartheta_1 \approx 1$) модели [1, 3] второе уравнение соотношений (1) имеет вид

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + n(s)\vartheta_1 = -\kappa_1, \quad (6)$$

где

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma} = \frac{\alpha 2G}{\sigma_k^T} = k; \quad (7)$$

G – упругий модуль сдвига; σ_k^T – новый предел текучести на диаграмме простого нагружения в точке K излома траектории деформирования; в теории средних кривизн $\alpha \approx 0,7$ [1]. Решение уравнения (6)

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*)e^{-k\Delta s}, \quad (8)$$

где ϑ_1^0 – угол излома траектории деформирования; k – экспериментально определяемая константа;

$$\vartheta_1^* = -\frac{\kappa_1}{k} = \text{const}. \quad (9)$$

Обычно след запаздывания векторных свойств материалов λ определяется в опытах на двузвенных ломаных траекториях или на прямолинейных участках после деформирования по какому либо криволинейному участку траектории. Здесь предлагается определять след запаздывания для гладких траекторий на участке постоянной кривизны κ_1 , где с достаточной для практических расчетов точностью устанавливается стационарный режим процесса деформирования материала с постоянным углом сближения ϑ_1^* .

Если траектория деформирования является гладкой по определению А.А. Ильюшина [2], то на ней отсутствуют точки излома, а вектор деформаций $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(s)$, описывающий эту траекторию в линейном пространстве, имеет только первую непрерывную производную. На рис. 1 в качестве примера в девятимерном подпространстве деформаций $\vartheta_1 - \vartheta_3$ приведена гладкая траектория в виде прямолинейного участка OK , который плавно без излома ($\vartheta_1^0 = 0$) переходит в окружность радиуса R , имеющую кривизну $\kappa_1 = 1/R$. Первая производная в точке K стыковки участков непрерывна, а вторая производная претерпевает разрыв. Для гладкой траектории при $\vartheta_1^0 = 0$ из (8) получаем

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* (1 - e^{-k\Delta s}). \quad (10)$$

Видно, что при $\Delta s \rightarrow \infty$ имеем $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1^*$. Поэтому, для определения следа запаздывания векторных свойств материала λ можно ввести допуск $\varepsilon = 0,122$ (7°) на угол сближения ϑ_1 при его приближении к асимптоте ϑ_1^* , так что

$$\vartheta_1 - \vartheta_1^* = \vartheta_1^* e^{-k\lambda} \leq \varepsilon, \quad (11)$$

откуда находим длину следа запаздывания

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\vartheta_1^*}{\varepsilon} \right|. \quad (12)$$

Для материала сталь 45 в расчетах было принято: $\sigma_k^T = 300$ МПа, $2G = 1,54 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 0,7$. Тогда, согласно (7) получаем $k = 400$. На рис. 2 представлены расчетные в соответствии с формулой (10) значения углов сближения $\vartheta_1(s)$ для различных значений кривизны κ_1 криволинейных траекторий. Как видно, величина λ оказывается различной для различных значений κ_1 .

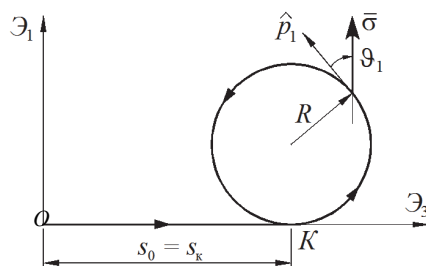


Рис. 1. Траектория деформирования

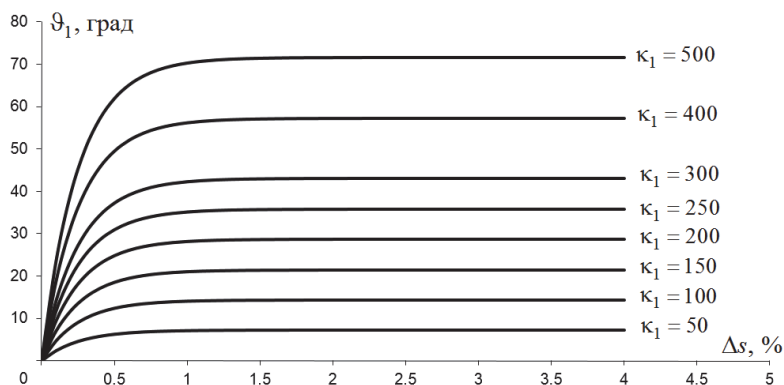


Рис. 2. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

При достижении приращением дуги Δs после точки K значения следа запаздывания λ по (12), устанавливался режим деформирования с практически постоянным углом сближения ϑ_1^* по допуску $\vartheta_1 \leq \varepsilon = 0,122$. Расчеты показали, что данному условию соответствует зависимость угла сближения для окружности с $\kappa_1 = 50$. Поэтому, можно сделать вывод о том, что все траектории с кривизной из интервала $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa^* = 50$ можно отнести к траекториям малой кривизны, для которых закон упрочнения Одквиста-Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ приемлем для выполнения в расчетной практике определяющего соотношения А.А. Ильюшина в теории пластичности для траекторий малой кривизны

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\vartheta}}{ds}. \quad (13)$$

На основании зависимостей ϑ_1 от Δs для различных кривизн на рис. 3 приведена зависимость следа запаздывания λ от кривизны κ_1 . Видно, что величина λ не является стабильной характеристикой материала.

По рекомендации В.С. Ленского [2] траекториями средней кривизны были названы такие, для которых след запаздывания имеет порядок радиуса кривизны $\lambda \sim R$ или $\lambda \kappa_1 = 1$. Если принять эту рекомендацию, то из представленной на рис. 4 зависимости следует, что граничное значение $\kappa_1^{**} \approx 250$. Следовательно, можно рекомендовать считать траекториями средней кривизны такие, для которых кривизна траектории κ_1 лежит в диапазоне $\kappa_1^* = 50 \leq \kappa_1 \leq \kappa_1^{**} = 250$. В этом случае приемлемые результаты для практических расчетов дает теория пластичности для траекторий средних кривизн А.С. Кравчука и В.И. Малого [1]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \alpha 2G \frac{d\bar{\vartheta}}{ds} + \left(\frac{d\Phi}{ds} - \alpha 2G \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}. \quad (14)$$

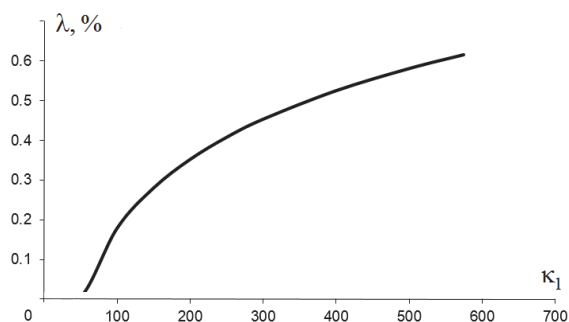


Рис. 3. Диаграмма $\lambda - \kappa_1$

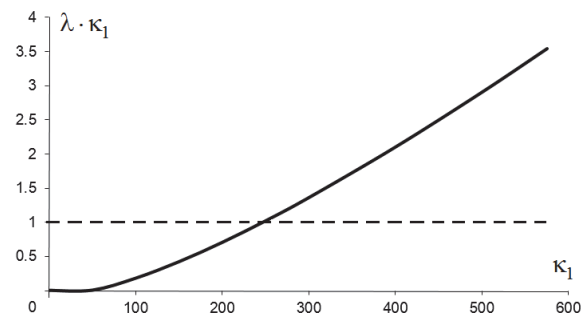


Рис. 4. Диаграмма $\lambda \cdot \kappa_1 - \kappa_1$

Более точная оценка по классификации траекторий деформирования была предложена В.Г. Зубчаниновым [1] при использовании функции сложного нагружения

$$f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad (15)$$

Она непосредственно учитывает влияние угла сближения $\vartheta_1(s, \kappa_1)$, характеризующего векторные свойства материалов. Так как угол ϑ_1 зависит от кривизны и длины дуги траектории деформирования, то отклонение ϑ_1 от нуля, не сразу начинает влиять на процессы сложного нагружения. Существует некоторый диапазон изменения угла сближения $0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_1^{**}$, в котором процессы сложного нагружения близки к процессам простого нагружения, что подтверждается экспериментально [1].

На рис. 5 представлено изменение функции сложного нагружения $f^p(\vartheta_1)$ при различных показателях степени $p > 0$ в зависимости от угла сближения ϑ_1 . Параметр p определяется для каждого материала из базовых опытов по типу верха двузвенных траекторий. Для многих материалов, в т.ч. стали 45, влияние сложного нагружения начинается при значениях $\vartheta_1^0 \geq 60^\circ$. Для стали 45 хорошие результаты дает $p = 1,6$. Оценивая ошибку численного решения задачи в 10° , из рис. 5 находим, что влияние сложного нагружения начинается при $\vartheta_1^0 = 60^\circ$.

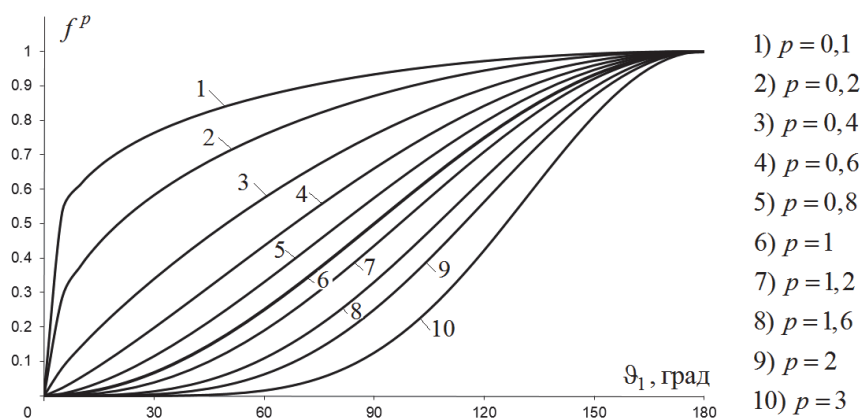


Рис. 5.

Для других материалов влияние сложного нагружения может начать проявляться и при других углах излома ϑ_1^0 [4]. Например, если $p = 3$, то при той же погрешности в 10% влияние кривизны при сложном нагружении начинается при углах $\vartheta_1^0 \approx 90^\circ$ и кривизне $\kappa_1^{**} \approx 600$.

Если $\kappa_1 > \kappa_1^{**}$, то траектории деформирования относятся к траекториям большой кривизны и закон упрочнения Одквиста-Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$ теряет свою силу, так как он должен явно зависеть от параметра сложного нагружения κ_1 , то есть $\sigma = \Phi(s, \kappa_1)$. В настоящее время это учитывается только в основных соотношениях теории процессов [1]. Использование математической модели В.Г. Зубчанинова теории процессов при численном моделировании сложного упругопластического деформирования стали дает хорошее соответствие опытными данным для плоских траекторий, содержащих прямолинейные и криволинейные участки постоянной кривизны [5-8].

Предложенная оценка классификации траекторий деформирования необходима при верификации различных вариантов теории пластичности с упрочнением, использующих закон упрочнения $\sigma = \Phi(s)$, не учитывающий векторные свойства материалов в явном виде.

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
2. Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
3. Зубчанинов В.Г., Алексеева Е.Г. О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. №1(19). С. 78-87.
4. Зубчанинов В.Г., Алексеева Е.Г. Свойство запаздывания векторных свойств материалов для гладких траекторий при сложном нагружении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2(20). С. 21-28.
5. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18-25.
6. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А. Применение модифицированной модели теории процессов к расчетам упругопластического деформирования стали по ломаным траекториям // Успехи механики сплошных сред: сборник докладов Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина. 2014. С. 200-203.
7. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А. Численное исследование процессов сложного упругопластического деформирования стали по криволинейным траекториям // Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 8-12.
8. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г.. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). № 2, Vol. 24, 2015, pp. 107-118.

УДК 539.3

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, РАСПОЛОЖЕННОГО В РАЗЖИЖЕННОМ ГРУНТЕ

Е.В. Ан

*Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент,
Узбекистан, ekaterinaan@mail.ru*

Аннотация. Исследуется устойчивость трубопроводов, расположенных в водонасыщенном грунте, с учетом геометрической нелинейности. Построены графики, анализ, которых позволил выявить возможные эффекты выпучивания трубопровода при действии осевой нагрузки, а также влияние окружающего грунта, геометрических и механических характеристик трубопровода на его устойчивость.

Ключевые слова: подземный трубопровод, устойчивость трубопроводов, взаимодействие в системе трубопровод – разжиженный грунт.

1. Введение

Последние 10 лет наше внимание акцентировано на анализе Международных материалов по последствиям сильных землетрясений на подземные сооружения, это связано с сильной активизацией стихийных бедствий, как природного, так и техногенного характера. Выявили, что в основном трубопроводы разрушаются при прохождении через активные разломы, территории с обвалами, трещинами и водонасыщенные грунты, которые являются последствиями землетрясений. Обнаружены случаи подъема участков трубопровода из-под земли при землетрясениях. Исследования показали, что главной причиной подъема является разжижение окружающей среды. Появилась потребность в изучении динамической устойчивости труб, так как оценка подъема является одним из важных фактором, который следует учитывать при проектировании трубопроводов. Данная проблема является актуальной для всех областей, расположенных в сейсмически опасной зоне в разжиженных грунтовых условиях.

2. Постановка задачи и методы

Колебания геометрически нелинейных систем являются сложной проблемой механики деформируемого твердого тела и теории колебаний. Учет совместных продольных и поперечных перемещений трубопровода представляет сложную задачу, которую невозможно решить аналитически, поэтому для исследования колебательных процессов будем использовать численный метод (МКЭ).

Подземный трубопровод моделируется как однородный стержень, шарнирно закреплённый по концам. Разделим его на конечные элементы, их размеры полагаем одинаковыми и равными a . Перемещения узловых точек примем за обобщенные координаты. Полагаем, что в сечении $x = 0$ действует осевая сила сжатия P . Любой подземный трубопровод имеет начальное искривление, составим выражения потенциальной энергии для i -ого элемента, учитывая геометрическую нелинейность

$$A_u^i = \frac{1}{2} EF \int_0^a \left[\frac{\partial U^i}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_1^i}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx + \frac{1}{2} EJ \int_0^a \left(\frac{\partial^2 (W_1^i - W_0^i)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (1)$$

и кинетической энергии трубы

$$E_k^i = \frac{1}{2} \mu \int_0^a \left[\left(\frac{\partial U^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1^i}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

где U^i – продольное перемещение i -того элемента стержня; $W_0^i = W_0^i(x)$, $W_1^i = W_1^i(x, t)$ – начальный и полный прогибы i -того элемента; E – модуль Юнга; F , J – площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

Потенциал силы сжатия вычисляется по формуле

$$V_p^i = -\frac{P}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial W_1^i}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

Применяется гипотеза Кирхгофа в пределах элемента трубы [1].

$$A_u^i = \frac{1}{2a} EF \left[U^i[a,t] - U^i[0,t] + \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial W_1^i}{\partial x} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2} EJ \int_0^a \left(\frac{\partial^2 (W_1^i - W_0^i)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (4)$$

При решении используется модель взаимодействия трубопровода с водонасыщенным грунтом [2]. Взаимодействие элемента трубопровода с грунтом представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{D1}^i &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[k_1 (U^i)^2 + k_2 (W_1^i - W_0^i)^2 \right] dx; \\ A_{D2}^i &= \frac{1}{2} \int_0^a \left[\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} (U^i)^2 + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} (W_1^i)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5)$$

Для i элемента продольное перемещение представим в виде:

$$U^i = r_i \frac{a-x}{a} + r_{i+1} \frac{x}{a} = r_i (1-\xi) + r_{i+1} \xi, \text{ где } \xi = \frac{x}{a}.$$

Выражение потенциальной энергии (4) с учетом деформации упругих элементов записываем в виде

$$A_u^i = \frac{EJ}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 (W_1^i - W_0^i)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EF}{2a} \left[U_{i+1} - U_i + \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial W_1^i}{\partial x} \right)^2 dx \right]^2. \quad (6)$$

Рассмотрим граничные условия следующие:

$$W_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0; l. \quad (7)$$

Формы трубопровода в поперечном направлении представим через полиномы Эрмита кубической степени. Для i -ого элемента полный прогиб трубопровода представим в следующем виде [3]:

$$W_1^{i,j} = \mathfrak{A}_1 q_i + \mathfrak{A}_2 q_{i+1} + \mathfrak{A}_3 q_j + \mathfrak{A}_4 q_{j+1},$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= 1 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^3, \quad \mathfrak{A}_2 = a \left(\xi - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^3 \right), \\ \mathfrak{A}_3 &= \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} \xi^3, \quad \mathfrak{A}_4 = a \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^3}{2} \right), \end{aligned}$$

$\xi = \frac{x}{a}$; q_i, q_j – прогибы; q_{i+1}, q_{j+1} – углы поворота в узлах элементов. В дальнейшем их принимаем в качестве обобщенных координат.

Общая потенциальная и кинетическая энергии будут равны

$$\Pi = \sum_{i=1}^n A_u^i + \sum_{i=1}^n V_p^i, \quad E_k = \sum_{i=1}^n E_k^i.$$

Определим функцию Лагранжа $L = E_k - \Pi$, $q_i = q_i(t)$ примем за обобщенные координаты.

Согласно методу конечных элементов, учитывая граничные условия (7), например, для трубопровода, разделенного на два элемента ($n = 2$) с тремя узлами имеем:

$$\begin{aligned} W_1^{1,2} &= \mathfrak{A}_3 q_3 + \mathfrak{A}_4 q_4, \quad W_1^{2,3} = \mathfrak{A}_1 q_3 + \mathfrak{A}_2 q_4, \\ U_{1,2} &= r_1 (1-\xi) + r_2 \xi, \quad U_{2,3} = r_2 (1-\xi) + r_3 \xi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы (2), (3), (5) и (6) после несложных вычислений интегралов, полученные выражения подставим в уравнение Лагранжа II – рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial A_{D1}}{\partial q_i} - \frac{\partial A_{D2}}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = - \frac{\partial A_{D1}}{\partial r_i} - \frac{\partial A_{D2}}{\partial \dot{r}_i},$$

где $L = E_k - A_{U1} - A_{U2} - V_p$.

Получаем систему из трех нелинейных дифференциальных уравнений, которая интегрируется при начальных условиях

$$q_j = q_{j0}, \quad \dot{q}_j = 0 \quad \text{при } t = 0$$

и решается численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Шаг интегрирования принимался равным (0,001 с), что позволяет обеспечить необходимую точность вычисления. В ходе решения определялись максимальные значения амплитуды нелинейного трубопровода, критическое время и критическая сила.

3. Результаты и обсуждение

На рисунке представлены кривые зависимостей максимальной амплитуды поперечных колебаний трубопровода q_3/a от времени $t_1 = t/T_0$ при действии на трубопровод постоянной осевой силы $P(t) = mP_3$ ($P_3 = 4\pi^2 EJ / L^2$ – Эйлера критическая сила).

Коэффициенты продольного и поперечного взаимодействия трубопровода с окружающим грунтом должны определяться экспериментально. Если полагать, что трубопровод является балкой на упругом основании, то полагая $k_1 = kb$, где b – ширина балки, k можно рассматривать как коэффициент податливости основания или коэффициент постели [4, 5]. В работе [5] исследованы продольный и поперечный коэффициенты упругого взаимодействия трубопровода с окружающим грунтом, их значения определены экспериментально.

Решена модельная задача, принимаем, что трубопровод совершает поперечные колебания в водонасыщенном грунте (который предположительно обладает свойствами вязкой жидкости) с частотой ω , тогда коэффициент β можно представить в виде [6]:

$$\beta = \alpha' \cdot \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\rho_r \mu \omega F}}{R}.$$

Зависимость изменения этого коэффициента вязкости продольного взаимодействия не была исследовано, поэтому его влияние не было исследовано.

Расчеты проводились для различных значениях параметра m , коэффициентов упругого и вязкого взаимодействий, начальных скоростях (рис. 1 – 4).

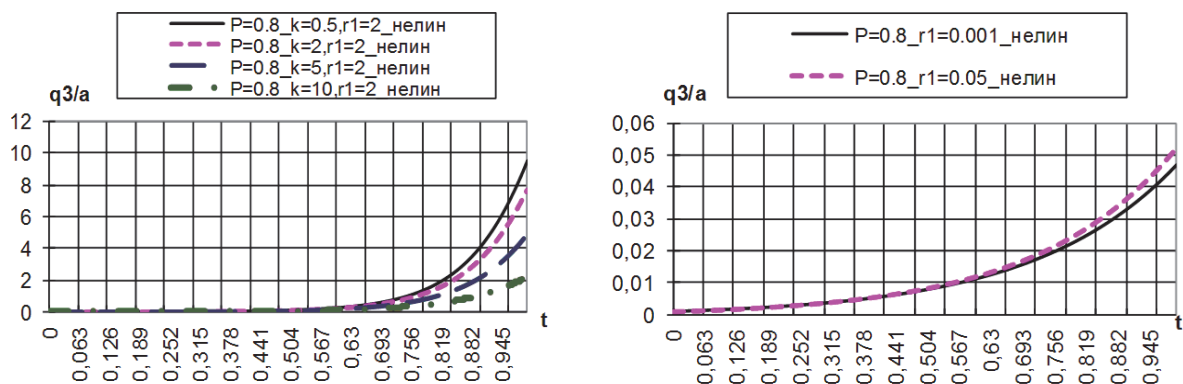


Рис. 1. Максимальная амплитуда поперечных колебаний трубопровода в зависимости от времени при разных значениях упругого коэффициента взаимодействия (а) и начального продольного перемещения (б)

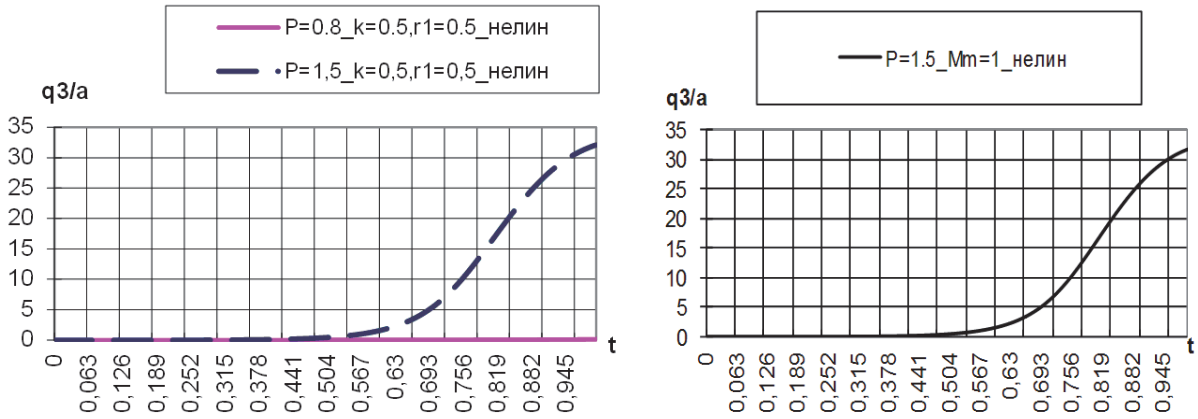


Рис. 2. Максимальная амплитуда поперечных колебаний трубопровода в зависимости от времени при разных значениях продольной сжимающей силы, действующей вдоль оси трубопровода (а) при изменении вязкого коэффициента взаимодействия (б)

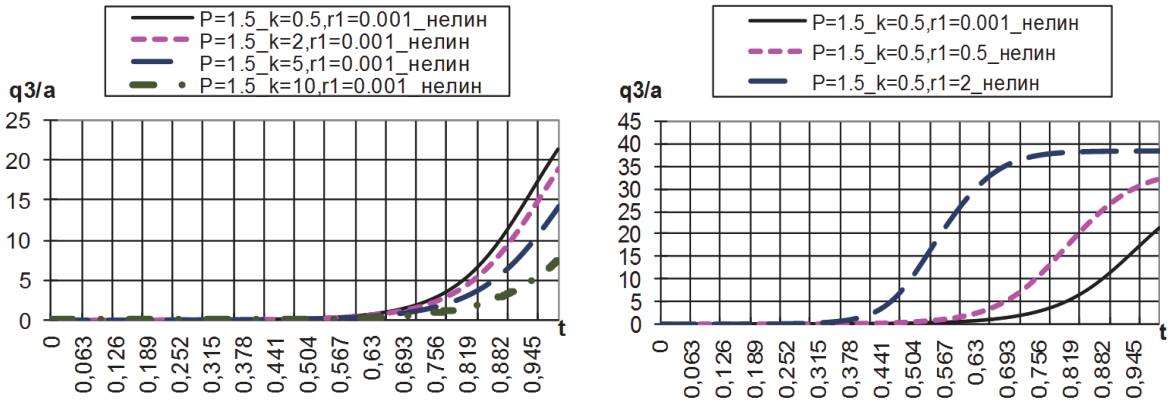


Рис. 3. Максимальная амплитуда поперечных колебаний трубопровода в зависимости от времени при разных значениях упругого коэффициента взаимодействия (а) и начального продольного перемещения (б) при действии сжимающей силы $P = 1,5P_{\text{Э}}$

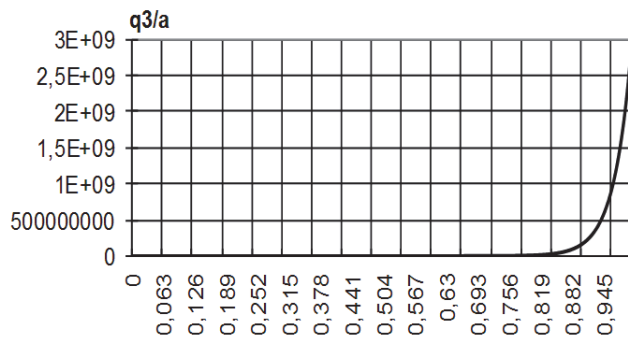


Рис. 4. Максимальная амплитуда поперечных колебаний трубопровода в зависимости от времени когда отсутствует геометрическая нелинейность и окружающий грунт, а также не учитывается продольное перемещение

Из анализа полученных кривых (рис. 1–3) видно, что при постоянной внешней сжимающей силе, действующей на трубопровод, сначала совершаются незначительные колебания, а достигая критическое время, значение максимальной амплитуды резко возрастает, т.е. трубопровод теряет устойчивость. Чем больше продольная сжимающая сила, действующая вдоль оси трубопровода, тем прогиб трубопровода больше (рис. 2, а). Коэффициент упругого

взаимодействия трубопровода с грунтом значительно влияет на устойчивость трубопровода, с увеличением упругого коэффициента значения максимального поперечного перемещения трубопровода уменьшаются, т.е. чем твёрже грунт, тем трубопровод устойчивее (рис. 1, а, рис. 2,а). При действии постоянной нагрузки ($P = 0,8Pэ$ и $P = 1,5Pэ$) чем больше начальное перемещение r_1 , тем быстрее трубопровод выходит из зоны устойчивости, причем значения максимальной амплитуды растут непропорционально увеличению r_1 (рис. 1, б, рис. 3, б). При постоянной нагрузке ($P = 0,8Pэ$), действующей на трубопровод, с увеличением коэффициента вязкости значения максимальной амплитуды уменьшаются, т.е. колебания подавляются демпфированием (рис. 2, б).

Когда отсутствует геометрическая нелинейность и окружающий грунт, а также не учитывается продольное перемещение, значения максимальной амплитуды в несколько раз больше, и соответственно значение критической силы в несколько раз больше (рис. 4).

3. Заключение

Исследована устойчивость подземного трубопровода с учетом его геометрической нелинейности и взаимодействующего с водонасыщенным грунтом. Установлено, что исследование динамической устойчивости подземного трубопровода зависит от геометрических характеристик, материала, геометрической нелинейности трубы, от грунтовых условий и конечно от величины внешнего действующего усилия. При малых значениях внешней силы колебания трубопровода подавляются демпфированием и трубопровод остается в зоне устойчивости, а при больших усилиях наступает момент, при котором он выходит из зоны устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке АН РУз Фундаментальных исследований (грант №Ф4-ФА-Ф047 по теме: “Сейсмодинамика подземных трубопроводных систем сложной конфигурации, расположенных в грунтах с нарушенной структурой”).

Литература

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1961. – 778 с.
2. Ан Е.В., Рашидов Т.Р. Сейсмодинамика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // Механика твердого тела. – 2015. – №3. – С.89-104.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 408 с.
4. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. – Ташкент: Фан, 1973. –180 с.
5. Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. – Ташкент: Фан, 1985. –153 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.

УДК 539.3, 699.841+624.159.14

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИЙ

Д.А. Бекмирзаев, Т. Юлдашев

Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
diyorbek_84@mail.ru

Аннотация. Дифференциальные уравнения и соответствующие граничные и начальные условия Г-образного трубопровода выводятся на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Полученная система уравнений решается методом конечных разностей второго порядка точности. Программа составлена на основе алгоритма компьютерной реализации на ориентированном языке «Borland Delphi 7» при задании конкретного закона сейсмического движения грунта, направленного к продольной оси под углом, в виде сейсмической нагрузки, затухающей синусоиды. Результаты решения динамических задач подземных Г-образных трубопроводов приводятся в виде графиков.

Ключевые слова: подземный трубопровод, сейсродинамика, сейсмическое воздействие, взаимодействие в системе «труба – грунт», метод конечных разностей.

1. Введение

В работе [1] разработаны основы динамической теории сейсмостойкости сложных систем подземных трубопроводов. Предполагается, что любое рассматриваемое сооружение является удлиненным, разветвляющимся как по простиранию, так и по глубине, со сложными как жесткими, так и податливыми соединениями труб в сложном узле.

Позже появился ряд работ, описывающих повреждения подземных трубопроводов при происшедших землетрясениях: установлена повреждаемость и удельная аварийность подземных трубопроводов в зависимости от глубины заложения, грунтовых условий, геометрических размеров, вида стыковок, влияния напора содержимого и качества строительства. Имеются материалы о разрушениях подземных трубопроводов, когда они проходили через активные разломы, разрывы в грунтах, территории с обвалами, трещинами и водонасыщенными грунтами [2, 3].

Главным апробированным моментом в задачах сейсродинамики подземных трубопроводов стал вопрос моделирования взаимодействия в системе «труба–грунт». В данной работе предлагаем подход определения НДС трубопровода, подвергающегося воздействию произвольно направленной сейсмической волны по отношению к оси трубопровода. Проведенные нами теоретические и вычислительные–экспериментальные исследования, решают проблемы оценки напряженно–деформируемого состояния Г-образных трубопроводов при сейсмических нагружениях, направленных произвольно относительно главных осей конструкции (рис. 1) [4].

В последнее время больше уделяется внимание расчету трубопроводов различной конфигурации (Г-, Т-, П- и V-образные) [5].

В сейсродинамике подземных сооружений на первый план выходит, с одной стороны, – конструктивная особенность сооружения, а с другой – оценка характера взаимодействия в системе «сооружение–грунт». В последнее время этот вопрос принимает острую актуальность. Накопился достаточный материал, связанный с последствиями сильных землетрясений на эти

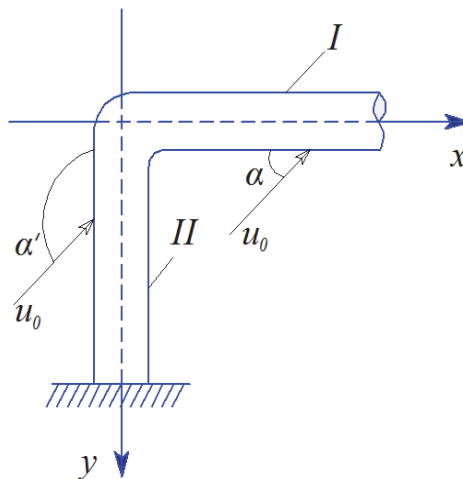


Рис.1. Участок трубопровода Г-образной конфигурации в плоскости. I-трубопровод; II-трубопровод.

системы, расположенные в грунтах с разными свойствами. В связи с этим проанализированы отечественные и зарубежные работы, в частности материалы XIV (Пекин, 2008) и XV (Лиссабон, 2012) Всемирных конференций по сейсмостойкому строительству и Международной конференции по проектированию в геотехнической инженерии (Токио, 2009), связанные с исследованием систем жизнеобеспечения типа подземных газо-, водо- и нефтепроводов, с целью дополнить разработанную теорию новыми данными и оценить ее результативность и установить уровень настоящей работы [6, 7, 8].

2. Постановка задача

Для вывода системы дифференциальных уравнений движения с граничными и начальными условиями используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского

$$\int_t (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (1)$$

где δT , $\delta \Pi$ – вариации кинетической и потенциальной энергии, δA – вариации работы внешних сил, t – время.

В работе [4] выводится система дифференциальных уравнений с естественными граничными и начальными условиями для трубопроводов вида рис.1. Система дифференциальных уравнений в векторном безразмерном виде представится так [4]:

$$M \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{t}^2} + A \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} + B \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} + CU = U_0, \quad \left(\begin{matrix} I \rightarrow II \\ \bar{x} \rightarrow \bar{y} \end{matrix} \right), \quad (2)$$

где M , A , B , C матрицы третьего порядка (рис.1, $I \rightarrow x$ для первого трубопровода, $II \rightarrow y$ для второго трубопровода уравнения записываются повторно)

$$U = (\bar{u}, \alpha_1, \bar{v}), \quad U_0 = \left(\frac{l^2 b^2}{a_T^2} \bar{u}_{0x}, \frac{l q D_H}{EI_z} \frac{\partial \bar{u}_{0y}}{\partial \bar{x}}, \frac{2 p l^2 b^2}{a_T^2} \bar{u}_{0y} \right),$$

где \bar{u} – продольные перемещения, \bar{v} – поперечные перемещения, α_1 – угол поворота сечения трубы, \bar{u}_{0x} и \bar{u}_{0y} – проекции на оси координат закона движения грунта.

Граничные условия в векторном безразмерном виде для трубы I :

$$\left[\bar{A} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} + \bar{B} U + \bar{C} \right]_{\bar{x}=0} = 0, \quad \left[\bar{A}_1 \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} + \bar{B}_1 U \right]_{\bar{x}=1} = 0, \quad (3)$$

для трубы II

$$\left[\bar{A} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} + \bar{B} U + \bar{C} \right]_{\bar{y}=0} = 0, \quad U|_{\bar{y}=1} = 0, \quad (4)$$

где $\bar{A}, \bar{A}_1, \bar{B}, \bar{B}_1, \bar{C}, \bar{C}_1$ матрицы третьего порядка.

Начальные условия в векторной безразмерной форме запишем в виде [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \delta U \Big|_{\bar{t}} = 0. \quad (5)$$

Для решения краевой задачи (2) и (3), (4) и (5) используем метод конечных разностей второго порядка точности.

Исходные данные: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $D_B = 0,392$ м; $D_H = 0,40$ м;
 $F = \frac{\pi(D_H^2 - D_B^2)}{4}$ м²; $I_z = \frac{\pi(D_H^4 - D_B^4)}{64}$ м⁴; $l^I = l^{II} = 100$ м; $k_x = 3 \cdot 10^4$ кН/м³;

$u_0(x, t) = a e^{-\varepsilon \left(t - \frac{x}{C_p} \right)} \sin \omega \left(t - \frac{x}{C_p} \right)$; $a = 0,004$ м; $\varepsilon = 0,3$ с⁻¹; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $T = 0,3$ с; $\mu_{грунт} = 0,2$;

$\mu_{труба} = 0,3$; $C_p = 1500$ м/с; $\alpha' = \alpha + 90$.

3. Анализ численных результатов

Параметры a – максимальная амплитуда колебания грунта, k_x – коэффициент равномерного сдвига трубопровода относительно грунта и C_p – распространения сейсмической

волны выбираются согласно балльности землетрясений, глубины заложения трубопровода, состояния грунта, механических и геометрических характеристик трубопровода [4].

На рис. 2 приводятся изменения значения продольного u смещения подземных трубопроводов на пересечении трубопроводов ($x = 0, y = 0$) при разных значениях угла падения сейсмической нагрузки, по времени.

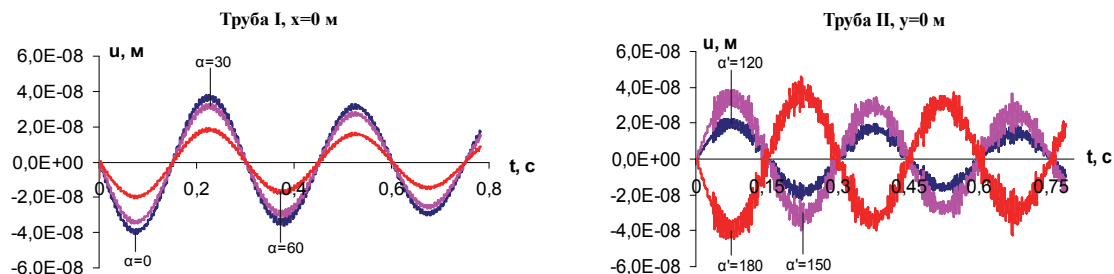


Рис.2. Изменения значения продольного перемещения трубопроводов по времени в точке пересечения трубопроводов при разных углах падения сейсмических нагрузок

Из анализа рисунков выходит, что в трубопроводе I с уменьшением значения угла падения сейсмической нагрузки значения продольного смещения увеличивается ($0 \leq \alpha \leq 90$) и фазы колебаний совпадают, при увеличении значения угла падения сейсмической нагрузки на трубопроводе II значения продольного перемещения увеличивается, но фазы колебаний трубопровода при $\alpha' = 180$ не совпадают ($90 \leq \alpha' \leq 180$). На трубопроводе II местные всплески больше чем в трубопроводе I (см. рис. 2).

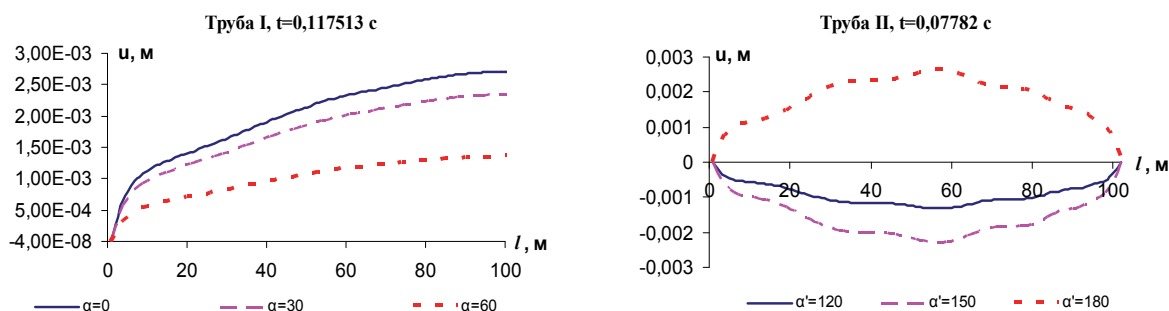


Рис. 3. Изменения значения продольного перемещения вдоль осей трубопроводов в заданных временах при воздействии сейсмической нагрузки с разными углами падения

В трубопроводе II значения продольного перемещения в интервале изменения значения угла падения сейсмической нагрузки $90 \leq \alpha' \leq 150$ имеют отрицательный знак, а на интервале $150 \leq \alpha' \leq 180$ положительный знак (см. рис. 3).

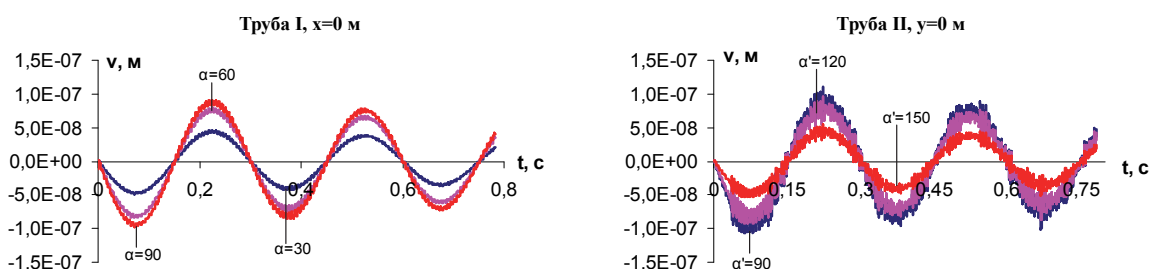


Рис. 4. Изменения значения поперечного смещения трубопроводов по времени в точке пересечения трубопроводов при разных углах падения сейсмической нагрузки

Здесь фазы поперечного колебания при изменении угла падения сейсмической нагрузки трубы *I* и *II* совпадают (см. рис. 4). Значения поперечного смещения в трубопроводе *I* с увеличением значения угла падения сейсмической нагрузки увеличиваются ($0 \leq \alpha \leq 90$), а в трубопроводе *II* наоборот, с уменьшением значения угла падения сейсмической нагрузки увеличиваются значения поперечного смещения ($90 \leq \alpha' \leq 180$, см. рис. 4).

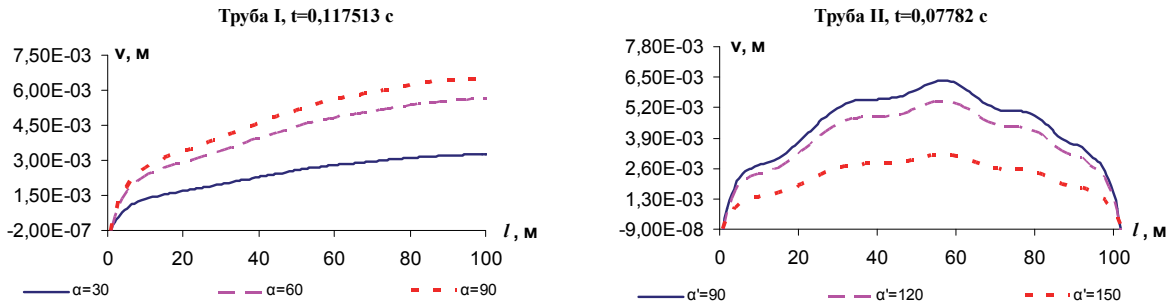


Рис. 5. Изменения значения поперечного перемещения вдоль осей трубопроводов при заданных временах при воздействии сейсмической нагрузки с разными углами падения

Значения поперечного смещения трубопровода *I* с увеличением значения угла падения сейсмической нагрузки, увеличиваются ($0 \leq \alpha \leq 90$). Максимальные значения поперечного и продольного смещения достигаются на свободном конце трубопровода *I* (см. рис. 5). На трубопроводе *II* максимальные значения поперечного смещения достигаются в середине трубопровода (см. рис. 5). Значения углов падения сейсмической нагрузки изменяются в интервале $90 \leq \alpha' \leq 180$ для трубопровода *II*, для трубопровода *I* $0 \leq \alpha \leq 90$.

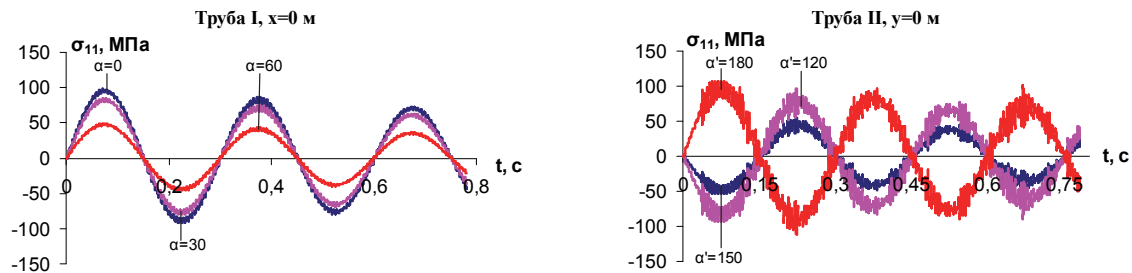


Рис. 6. Изменения значения продольного напряжения по времени в точке пересечения трубопроводов при воздействии сейсмической нагрузки под разным углом падения

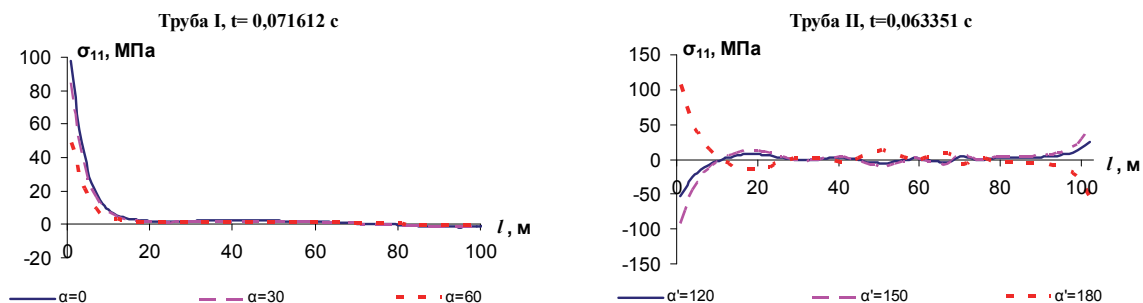


Рис. 7. Изменения значения продольного напряжения трубопроводов вдоль осей трубопроводов в заданных временах при воздействии сейсмической нагрузки под разными углами падения

На рис. 6, рис. 8 приводятся изменения значения продольного σ_{11} и касательного σ_{12} напряжения в разных значениях углов падения сейсмической нагрузки, по времени на точке пересечения подземных трубопроводов *I* и *II* ($x = 0, y = 0$). На трубе *I* с уменьшением значения

угла падения сейсмической нагрузки, значения продольного напряжения увеличивается, фазы колебаний совпадают $0 \leq \alpha \leq 90$ (рис. 6). На трубопроводе II с увеличением значения угла падения сейсмической нагрузки значения продольного напряжения увеличиваются и фазы колебаний продольного напряжения изменяются при $90 \leq \alpha' \leq 180$ (см. рис. 6). Здесь местные всплески колебания больше чем трубопровода I.

На рис. 7 и рис. 9 приведены изменения значения продольного σ_{11} и касательного σ_{12} напряжения вдоль оси трубопроводов при заданных временах и заданных значениях углов падения сейсмической нагрузки. Если рассуждать по рисункам, на узле пересечения трубопроводов I и II на заземленном конце трубопровода II продольное и касательное напряжения достигают свои абсолютные максимальные значения. Продольное напряжение достигает своего максимального значения на трубопроводе I при $\alpha = 0$, на трубопроводе II при $\alpha' = 180$.

На рис. 8 приводится изменения касательного напряжения трубопроводов I и II по времени в точке пересечения труб при воздействии сейсмической нагрузки под разным углом падения. Из рисунков видно, что касательное напряжение в обеих трубах максимальное значение имеет при $\alpha' = 90$. С изменением угла падения сейсмической нагрузки фазы колебания касательного напряжения в обеих трубах не изменяются.

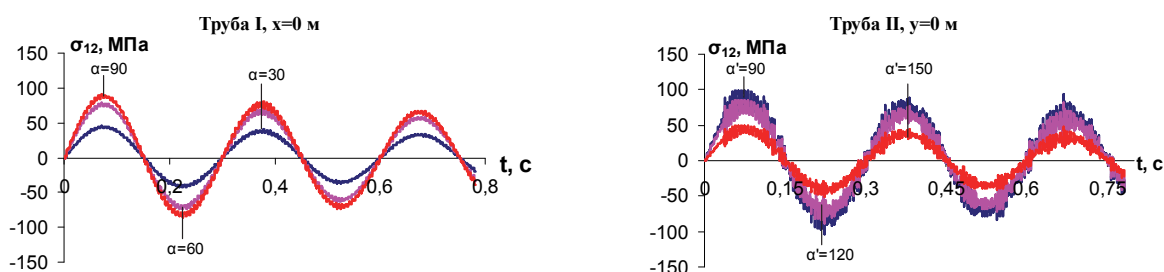


Рис. 8. Изменения значения касательного напряжения трубопроводов по времени в точке пересечения трубопроводов при воздействии сейсмической нагрузки под разным углом падения

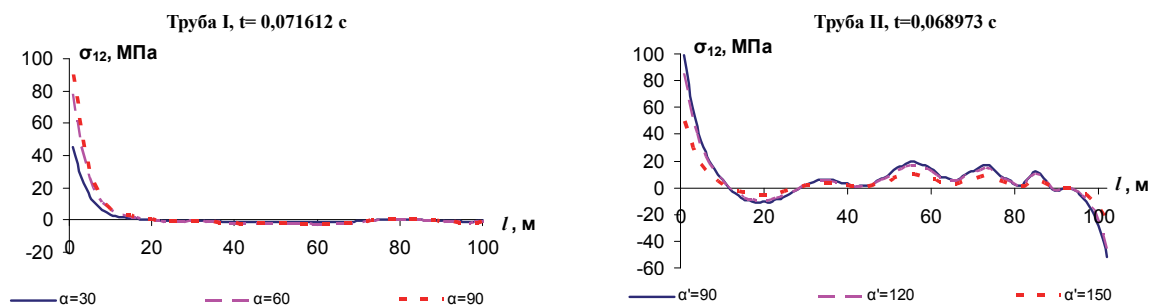


Рис.9. Изменения значения касательных напряжений трубопроводов при заданных временах вдоль осей трубопроводов при воздействии сейсмической нагрузки под разными углами падения

На трубопроводах I и II значения касательных напряжений при падении сейсмической нагрузки под градусом 90 достигают на максимум (см. рис. 9). На остальных значениях падения сейсмической нагрузки значения касательных напряжений уменьшаются (см. рис. 9). Касательное напряжение достигает своего максимального значения в обоих трубопровода при $\alpha = 90$ (см. рис. 9).

4. Выводы

- Решены новые задачи, связанные с исследованием НДС трубопроводных систем сложной конфигурации при воздействии сейсмической нагрузки в произвольном направлении;

- На основе разработанных алгоритмов созданы универсальные программы расчета НДС трубопроводных систем сложной конфигурации на воздействие сейсмической нагрузки при различных углах к оси трубопровода;

- Сделаны конкретные расчеты, построены графики изменения перемещений и напряжений в разных сечениях трубопроводов и узлах пересечения;

- Получены результаты по исследованию НДС трубопроводных систем для значений интенсивности, нормальных и касательных напряжений, что позволяет рекомендовать их для конкретных расчетов и проектирования подземных систем жизнеобеспечения в сейсмических условиях;

- Разработанные программные средства позволяют провести комплексный анализ прочности подземных трубопроводов при сейсмических воздействиях и реализуют системный подход к определению последствий землетрясения на НДС трубопровода и к планированию инженерных мероприятий по обеспечению безопасной и надежной эксплуатации подземного трубопровода на сейсмоопасных участках.

Работа поддержана грантом фундаментальных исследований АН РУз в частности Ф4-ФА-Ф047 по теме «Сейсмодинамика подземных трубопроводных систем сложной конфигурации, расположенных в грунтах с нарушенной структурой».

Литература

1. Т.Р. Рашидов. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент.: Фан, 1973. –180 с.
2. T.R. Rashidov and D.A. Bekmirzaev. Seismodynamics of Pipelines Interacting with the Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. New York, USA, July 2015, Volume 52, Issue 3, pp 149-154.
3. Bekmirzaev, D. Design of Underground Pipelines under Arbitrary Seismic Loading // Open Journal of Applied Sciences, 2015, Vol 5, USA, 226-232.
4. Т.Р. Рашидов., Д.А. Бекмирзаев. Сейсмодинамические задачи подземных трубопроводов сложной конфигурации // Журнал «Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений», № 3, 2015 г, Москва. С. 33-37.
5. American Lifelines Alliance. Guidelines for the Design of Buried Steel Pipe. 2001. P. –76.
6. The 14th World Conference on Earthquake Engineering. 2008. Beijing.
7. Proceeding of International conference on performance-based design in earthquake geotechnical engineering: Performance-based design in earthquake geotechnical engineering. 2009. Tokyo.
8. The 15th World Conference on Earthquake Engineering. 2012. Lisbon.

УДК 539.214

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ТЕЛ БОЛЬШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ В ПРОЦЕССЕ ГОРЯЧЕГО ИЗОСТАТИЧЕСКОГО ПРЕССОВАНИЯ

А.В. Бочков¹, В.А. Головешкин², А.В. Пономарев¹, Н.Н. Холин¹

¹Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники (МИРЭА), Москва, Россия

²Институт прикладной механики (ИПРИМ) РАН, Москва, Россия, nikshevolog@yandex.ru

Аннотация. Современная порошковая металлургия позволяет изготавливать изделия больших геометрических размеров. Исследование показывает, что в ходе производства подобных изделий методами горячего изостатического прессования (ГИП) становится существенным влияние на конечную форму изделия неоднородного нестационарного температурного поля (коэффициент теплопроводности значительно возрастает с ростом относительной плотности, а предел текучести существенно уменьшается с ростом температуры) и неоднородности исходной плотности порошковой засыпки. В частности, это приводит к существенным особенностям начального этапа процесса ГИП, когда деформируется только приграничный слой порошка.

Ключевые слова: порошковый материал, горячее изостатическое прессование, условие Грина, неоднородное нестационарное температурное поле.

Традиционным процессом производства изделий из порошковых материалов является процесс горячего изостатического прессования (ГИП) – процесс высокотемпературного уплотнения порошковых материалов (температуры порядка 1000°C) под действием высокого внешнего давления (порядка 1000 атмосфер).

Задача математического моделирования процесса ГИП состоит в проектировании такой капсулы, чтобы конечная форма порошкового монолита имела проектную геометрию.

Особенность поведения тел больших геометрических размеров в процессе ГИП является существенное влияние неоднородного нестационарного температурного поля. Это вызвано тем, что коэффициент теплопроводности порошковых материалов, при изменении относительной плотности ρ от начальной $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 \approx 0,6$) до конечной $\rho = 1$, меняется примерно на 2 порядка. Предел текучести для монолита порошкового материала также меняется на порядок в интервале температур от 20° до 1000°, который характерен для процесса горячего изостатического прессования.

Общая математическая постановка задачи моделирования процесса ГИП включает:

1. Уравнение равновесия:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0,$$

где $\bar{\sigma}$ – тензор напряжений.

2. Уравнение поверхности текучести в общем случае задается в виде:

$$\Phi(\sigma_{ij}, \rho, T) = 0,$$

где ρ – относительная плотность; T – температура.

3. Связь тензора напряжений σ_{ij} и тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяется ассоциированным законом течения:

$$\varepsilon_{ij} = \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

4. Для описания поведения материала капсулы и закладного элемента используется условие идеальной пластичности:

$$S^2 = \sigma_s^2,$$

где σ_s – предел текучести, который предполагается известной функцией температуры.

5. Также используется условие несжимаемости:

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

где \bar{u} – скорость перемещений.

6. Для определения температуры используется уравнение теплопроводности:

$$C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda(\rho) \operatorname{grad} T - C_v \rho \bar{u} \operatorname{grad} T.$$

7. Для определения плотности используется уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

где \bar{u} – скорость перемещений.

Для качественного исследования процесса рассмотрим одномерную осадку пластически сжимаемого материала. Для описания механических свойств порошкового материала используется условие текучести Грина [1-2]:

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{S^2}{f_1^2} = \sigma_s^2, \quad (1)$$

где σ – среднее напряжение; S^2 – интенсивность девиатора тензора напряжений; f_2 и f_1 – экспериментальные функции относительной плотности ρ ; σ_s – предел текучести монолита, предполагается известной функцией температуры.

В одномерной постановке, предполагая, что все скорости перемещений, кроме $U_x = U$ равны нулю, уравнение (1) принимает вид:

$$\sigma_{xx}^2 = \sigma_s^2 \frac{(9f_2^2 + 4f_1^2)}{9}. \quad (2)$$

Для определения температуры T используется уравнение теплопроводности:

$$C_m \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(\rho) \frac{\partial T}{\partial x} - C_m \rho U \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3)$$

где C_m – коэффициент теплоёмкости единицы массы монолита; λ – коэффициент теплопроводности, зависящий от плотности ρ ; U – скорость перемещений; t – время.

Для определения плотности используется закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) = 0. \quad (4)$$

Данная система уравнений (2-4) при соответствующих начальных и граничных условиях полностью определяет математическую постановку задачи. Необходимо отметить, что традиционно начальная температура и плотность считаются постоянными по объёму.

Исследуем сжатие холодного слоя постоянным давлением с нагревом на концах. Будем считать, что толщина слоя равна $2h$, а нагрев и сжатие происходят с обоих концов. Поведение слоя будем исследовать в Лагранжевой системе координат. Уравнение теплопроводности, согласно (3), примет вид:

$$C_m \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(\rho) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

где $0 \leq x \leq h$.

С начальными условиями ($t = 0$): $T = T_0$ при $0 \leq x \leq h$; и граничными условиями: $T = T_1$ при $x = h$; $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ при $x = 0$.

Предполагаем, что на торцах приложены напряжения $\sigma_{xx} = -F$. Следовательно, уравнение (2) определяет плотность порошкового материала, при этом $\rho = \rho_0$, если:

$$F^2 < \sigma_s(T) \frac{9f_2^2(\rho_0) + f_1^2(\rho_0)}{9}.$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда:

$$\sigma_s^2(T_1) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9} < F^2 < \sigma_s^2(T_0) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9}.$$

Это означает, что на начальном этапе часть слоя остаётся недеформированной.

Обозначим T_U , величину, определяемую соотношением:

$$\sigma_s^2(T_U) \frac{9f_2^2(\rho_0) + 4f_1^2(\rho_0)}{9} = F^2. \quad (6)$$

Границу деформированного слоя $\eta(t)$ определяем соотношением:

$$T(\eta, t) = T_U, \quad (7)$$

тогда $\rho = \rho_0$ при $x < \eta$, и ρ определяется уравнением (2) как функция температуры при $\eta < x < h$.

Приведём пример численного расчета задачи (5-7). Согласно [3], для качественного анализа примем приближённо:

$$\frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{9} \approx \frac{1}{6(1-\rho)}.$$

Введём безразмерные переменные: $hy = x$, $\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$, $\tau = \frac{\lambda_0 t}{C_m h^2}$.

Для численного расчета примем [4-5]:

$$\lambda(\rho) = \lambda_0 \left[\frac{1}{\beta} + \left(\frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} \right) \right], \quad \sigma_s(T) = \sigma_0 e^{-\gamma\theta},$$

где λ_0 – коэффициент теплопроводности монолита.

Для расчета были выбраны следующие параметры: $\gamma = 3,47$, $\frac{\sigma_0}{F} = 13,87$, $\beta = 100$. Это соответствует плотности $\rho = 0,9$ при $\theta = 1$ и начальной плотности $\rho_0 = 0,6$ при $\theta = 0,6$. На рис. 1 показано распределение плотности для различных значений безразмерного τ .

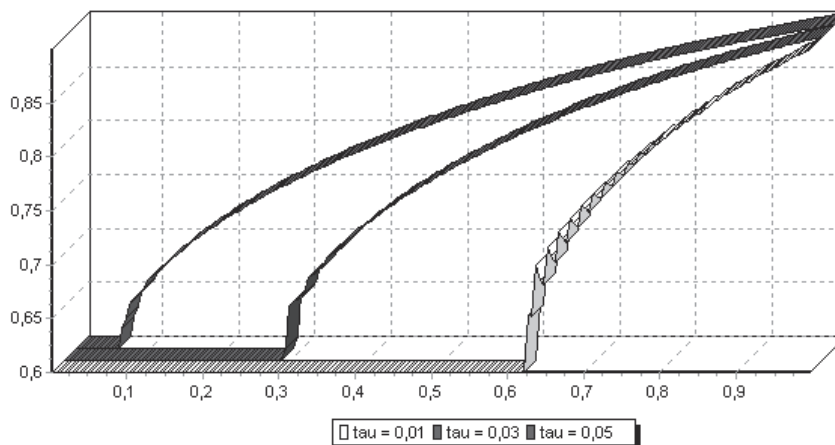


Рис. 1. Распределение плотности по толщине слоя

Отметим, что результаты расчёта показывают наличие области с высоким градиентом плотности. Это связано с тем, что при повышении температуры происходит уменьшение предела текучести, что приводит к уплотнению материала. Это в свою очередь увеличивает коэффициент теплопроводности. В итоге мы наблюдаем аналог движения фронта уплотнения материала. Закон движения зоны уплотнения близок к зависимости $\sqrt{\tau}$. Существование данного фронта предсказано в работе [6].

Особенность влияния неоднородного температурного поля на процесс ГИП состоит в том, что недостаточно нагретая часть порошкового материала не деформируется и работает как жесткое тело. Для тел больших геометрических размеров на начальном этапе процесса ГИП

деформируется только приграничный слой, примыкающий к капсуле, и деформация носит характер, близкий к одномерному процессу. Это существенно влияет на конечные размеры изделия. Приведем примеры некоторых расчетов. Для расчетов брались следующие параметры процесса ГИП. Давление в течение 5 часов равномерно возрастало до 100 МПа, а потом еще в течение 4 часов держалось постоянным, внешняя температура в течение 1 часа была 20⁰С, потом в течение 4 часов равномерно возрастала до 1100⁰С, далее была постоянной. Предел текучести монолита порошкового материала в данном интервале температур изменялся от 1000 до 20 МПа. Для капсулы изменение составляло от 480 до 5 МПа. Зависимость коэффициента теплопроводности от плотности принималась в виде:

$$\lambda(\rho) = \lambda_0 * \left(\frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} \right)^{1,46 * (1 - \rho_0)}$$

Экспериментальные значения функций представлены в таблице 1.

Таблица 1. Экспериментальные функции f_1 и f_2

Плотность ρ	f_1	f_2
0,63	0,0036	0,054
0,656	0,0071	0,093
0,701	0,12	0,124
0,8	0,47	0,305
0,88	0,66	0,48
0,982	0,86	1,221
0,995	0,95	3

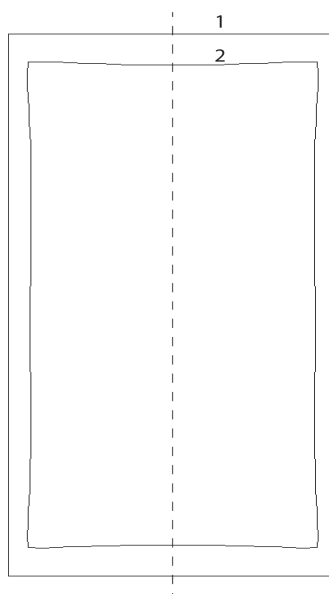


Рис. 2. Исходная геометрия (1) и результаты расчета (2)

Приведем пример расчета цилиндра без капсулы. Результаты расчета представлены на рис 1. В расчетах принято $R = 250$ мм, $H = 1000$ мм. В приведенном случае усадки (отношение начальных размеров к конечным) по радиусу и по высоте получились равными соответственно 1,154 и 1,115. В случае однородного температурного поля усадки были бы равны. Разница в 4% обусловлена влиянием нестационарного неоднородного температурного поля.

На рисунках 3-5 представлены результаты моделирования процесса ГИП кольца и их сравнение с экспериментом.

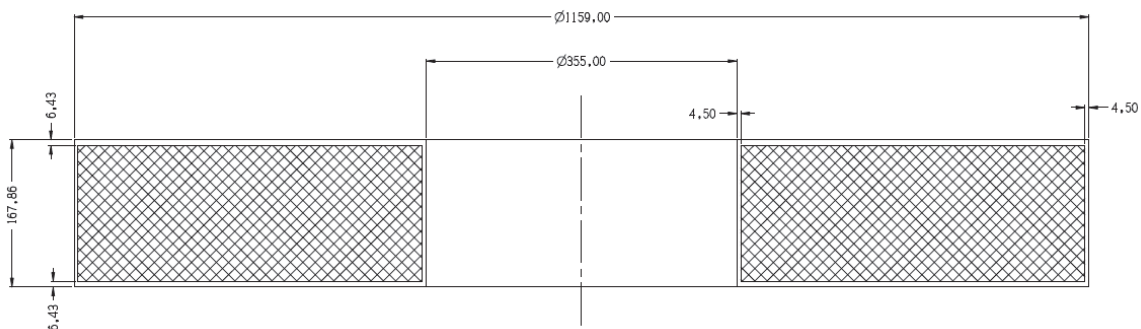


Рис. 3. Исходная геометрия

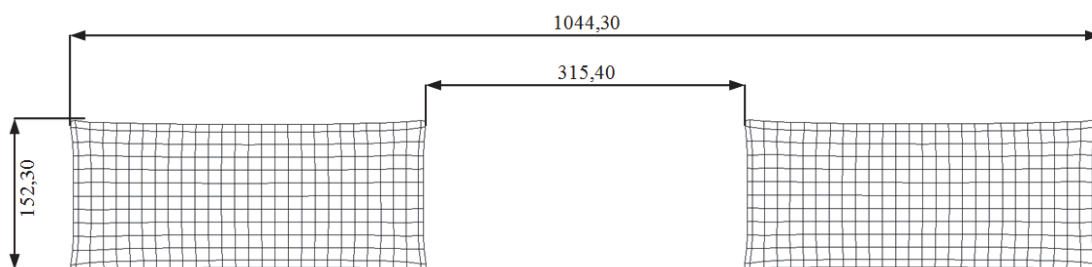


Рис. 4. Расчетная геометрия

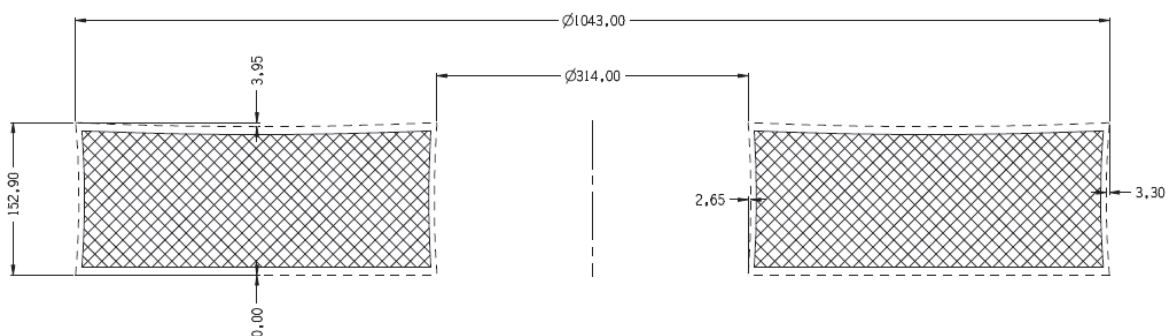


Рис. 5. Экспериментальная геометрия

Как видно из приведенных рисунков, моделирование процесса ГИП с учетом влияния существенной зависимости коэффициента теплопроводности от плотности, а предела текучести от температуры, позволяет осуществить гораздо более точный расчет формы конечного изделия.

Литература

1. Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел. М.:Машиностроение, 1989.
2. Грин Р.Дж. Теория пластичности пористых тел. //Сб. переводов, «Механика», 1973, №4.
3. Semilatin S.L., R.E. Dutton and R.L. Goetz, (Wright Laboratory Materials Directorate, W.L/ MLLN, Wright-Patterson AFB OH 45433 UES, Inc. 4) "A simple Analysis of the Hot Consolidation of Metal-Matrix Composite Panels from Tape-cast Monotape Layups". Scripta Materialia. Vol. 35. No 7. pp. 855-560. 1996.
4. А.Е. Шелест, В.А. Головешкин. Напряженное состояние при осадке нагретого металла. АН СССР Институт металлургии имени Байкова. Пластическая обработка металлов и сплавов. М: Наука, 1979. с. 39-48.
5. Gholamreza Aryanpour «Characterization of viscoplastic modeling for HIPing of stainless steel 316LN powder». Proceedings of the 2005 international conference on hot isostatic pressing. Paris, May 22-25, 2005. p. 153-160.
6. Друянов Б.А., Самаров В.Н. Уплотнение порошкового материала в неоднородном температурном поле. «Порошковая металлургия». 1989. №3.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИРАЛЬНЫХ И АУКСЕТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

А.А. Васильев

Тверской государственной университет, Тверь, Россия, alvasiliev@yandex.ru

Аннотация. Представлены модели хиральных и ауксетических решеток, аналитические решения для простейших ячеек, результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие особенности поведения решеток под действием сжимающих нагрузок, моделирующих, в частности, внедрение частиц.

Ключевые слова: модель, ауксетик, хиральная структура, особые свойства, метаматериал.

В настоящее время нарастающий интерес привлекает разработка теории метаматериалов - материалов, которые в силу их структурных особенностей проявляют не характерные для природных материалов свойства. Разработка структурных и математических моделей, изучение особых свойств, технологических применений материалов с необычными свойствами представляются актуальными. Примерами материалов с особыми свойствами являются ауксетические структуры, редуцированные среды Коссера, хиральные структуры, демонстрирующие свойство фильтров частот, структуры с необычными динамическими и жесткостными свойствами, реакцией на температурные воздействия, др. [1-10]. Развитие механики метаматериалов, поскольку особые свойства обусловлены, как правило, усложнением структуры и неклассическим характером эффектов, помимо практической значимости, как видится, ценно и интересно также тем, что оно станет практически важной областью применения и даст толчок развитию обобщенной механики [6, 10-17].

Решетки Коссера, составленные из частиц конечного размера с симметричными соединениями (рис. 1а), решетки с простыми балочными соединениями использовались как исходные структурные модели для построения обобщенных континуальных микрополярных моделей сред с учетом микровращений частиц [15-17]. Усложнение структуры соединений частиц и балочных элементов позволяет строить модели решеток и сред с новыми интересными свойствами [1, 2, 7-10, 14].

Решетка Коссера с ауксетическими свойствами. Структурная, дискретная и континуальные модели ауксетической решетки, представленной на рис. 1б, введены в [7-9]. В этой статье, как и в ряде других изучались параметры и некоторые свойства таких структур. В целом известны ряд направлений использования ауксетических свойств, однако дальнейшие исследования в этой области, как в общетеоретическом плане, так и для конкретных структур представляют интерес.

Рассмотрим деформирование простейшей ячейки такой решетки (рис. 2а). В этом случае могут быть получены аналитические решения. С использованием потенциалов соединений частиц конечного размера строятся уравнения для ячейки. Задав перемещения V в вертикальном направлении, находим соответствующие им перемещения U в горизонтальном направлении и выражения для поворотов частиц φ

$$V = -\nu U, \quad \nu = \frac{C_2 - C_3}{2C_1 + C_2 + C_3}, \quad \varphi = -\frac{C_1 + C_3}{2C_1 + C_2 + C_3} \frac{U}{a}, \quad (1)$$

где введен аналог коэффициента Пуассона ν континуальной теории.

Из второго равенства в (1) следует, что при $C_2 > C_3$ коэффициент Пуассона положителен $\nu > 0$. Материал обладает обычным свойством сжиматься в поперечном направлении при растяжении в продольном. При $C_2 < C_3$, коэффициент Пуассона отрицателен $\nu < 0$. В этом случае при растяжении в горизонтальном направлении система частиц расширяется в поперечном вертикальном направлении, то есть материал проявляет ауксетические свойства. В случае $C_3 = C_2$ или при $C_1 \rightarrow \infty$ коэффициент Пуассона равен нулю и при растяжении система не изменяет толщину. Отметим, что $\nu \rightarrow +1$ при $C_2 \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow -1$ при $C_3 \rightarrow \infty$. Таким образом, коэффициент Пуассона системы изменяется в пределах $-1 < \nu < 1$, допустимых для плоской упругой изотропной среды (в трехмерном случае действуют ограничения $-1 < \nu < 0.5$).

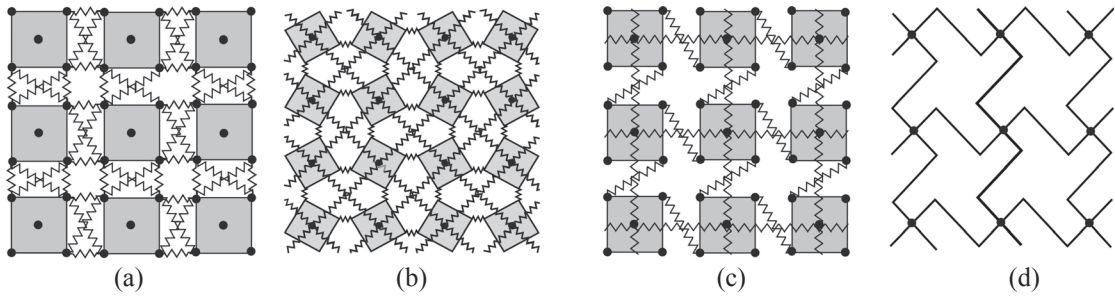


Рис. 1. Решетки Коссера с различной микроструктурой

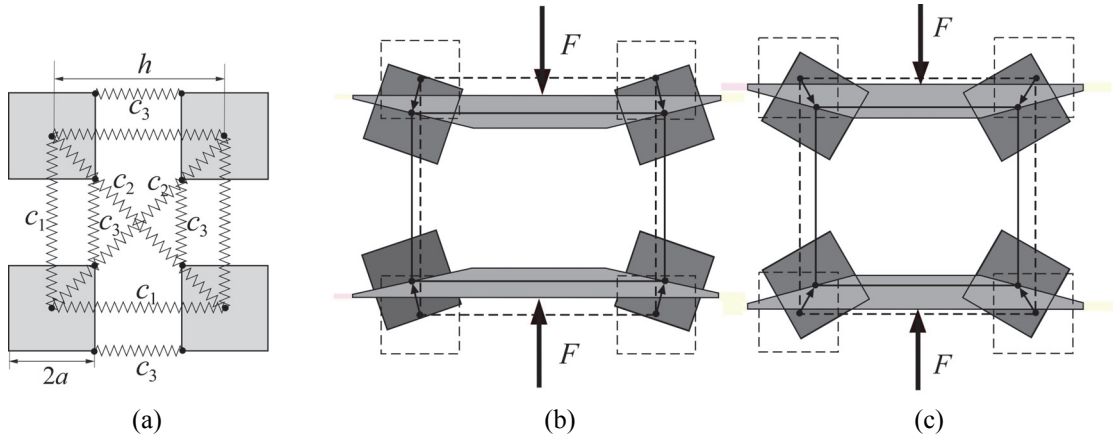


Рис. 2. Ячейка решетки с ауксетическими свойствами (а). Деформирование ячейки с обычными (b) и с ауксетическими свойствами (с) при внедрении клиновидной частицы.

Приведенное рассмотрение для ячейки интересно, поскольку является базовым, но в целом представляет уже ставший стандартным эксперимент однородного растяжения. Представляет интерес рассмотрение более общей задачи внедрения клиновидной частицы.

Рассмотрим внедрение в ячейку сжимающими силами F симметрично расположенных частиц клиновидной формы (рис. 2b, 2c). На рис. 2b, 2c частицы недеформированной ячейки и фрагмент сжимающей частицы нарисованы пунктирными линиями. Считаем, что грани частицы наклонены под одинаковым углом α . Рассматриваем малые внедрения, такие что при их анализе может быть использована линейная модель. Система в деформированном состоянии нарисована сплошными линиями. Для наглядности центры частиц ячейки в недеформированном и деформированном состояниях также соединены пунктирными и сплошными линиями.

Считается, что грани внедряемой частицы действуют на центры частиц ячейки, которые скользят по граням. Учитывая симметрию, для такой задачи может быть построено аналитическое решение. Для компоненты U перемещения частиц вдоль клина получается выражение

$$U = \frac{F}{8} \frac{2 \sin \alpha C_1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) C_2 + (\sin \alpha - \cos \alpha) C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3) \cos \alpha}.$$

Отметим, что, если как в рассмотренном ранее случае грани горизонтальны ($\alpha = 0$), то центры частиц ячейки смещаются вдоль них на величину

$$U = \frac{F}{8} \frac{C_2 - C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_3)}.$$

Из этого соотношения видно, что при параметрах $C_3 > C_2$, сжимаемая ячейка сжимается в поперечном направлении под частицей ($U < 0$), то есть демонстрирует свойство

ауксетичности, и расширяется ($U > 0$) в случае, если $C_3 < C_2$. Такой результат согласуется с приведенным ранее анализом.

Для внедряющихся частиц с малым наклоном граней $\alpha < \pi/4$ существуют параметры, при которых ячейка обладает обычным свойством расширяться под внедряющейся частицей (рис. 2b), однако ячейки, у которых

$$C_3 > \frac{2 \sin \alpha C_1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) C_2}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

обладают ауксетическим свойством сжиматься под внедряемыми частицами (рис. 2c).

При увеличении угла наклона граней достичь ауксетического поведения ячейки становится все сложнее. При $\alpha \rightarrow \pi/4$ жесткость соединения C_3 необходимо бесконечно увеличивать. Интересно отметить, что для острого клина с углом наклона граней $\alpha > \pi/4$ компоненты $U > 0$, то есть острый клин раздвигает частицы при любых жесткостях.

Анализ деформирования решеток с большим количеством частиц проводится численно. Рассматриваем деформирование решетки на гладкой плоскости под действием сжимающих сил (рис. 3a, 3b). На рис. 3a представлен результат расчета для обычного материала, у которого $C_3 = 0$. В этом случае вращение частиц отсутствует. Частицы решетки раздвигаются под нагрузкой. На рис. 3b представлен результат расчета для материала с ауксетическими свойствами. Вращение частиц имеет коротковолновый характер. Материал уплотняется, сгущаясь под нагрузкой. Такой эффект может представлять интерес при проектировании материалов, противодействующих внедрениям и улавливающих частицы.

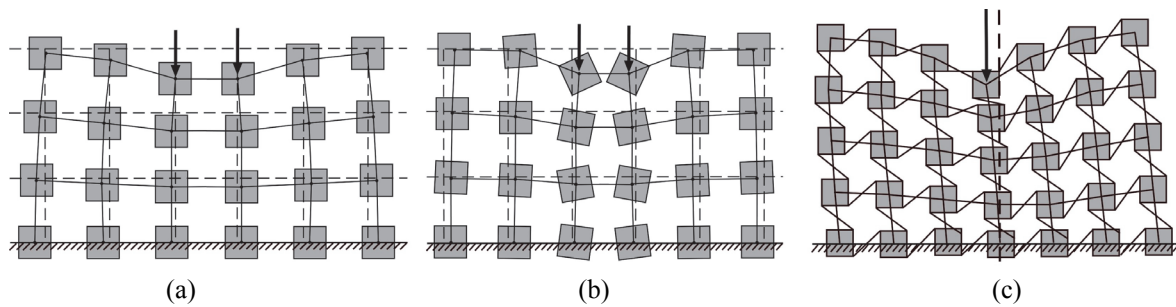


Рис. 3. Деформирование обычной (a), ауксетической (b), хиральной (c) решеток при воздействии сжимающих концентрированных сил

Материал с хиральной микроструктурой. Решетки на рис. 1c, 1d интересны тем, что получаются модификацией хорошо изученных и показавших свою полезность для развития теории, моделей, практического применения симметричной (рис. 1a) и простой квадратной балочной решеток. Моделирование и изучение структур такого типа привлекает в последнее время возрастающий интерес.

Для решеток с частицами конечного размера и несимметричными соединениями пружинного типа (рис. 1c) суммированием потенциальных энергий составляющих пружин для зигзагообразного балочного соединения (рис. 1d) и исключением перемещений и поворотов внутренних узлов для описания взаимодействия соединяемых частиц m и n может быть получен потенциал взаимодействия

$$E_p = \frac{1}{2} C_{11} \Delta u^2 + \frac{1}{2} C_{22} \gamma^2 + \frac{1}{2} C_{33} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} C_{12} \gamma \Delta u, \quad (2)$$

где использованы обозначения $\Delta u = u_n - u_m$, $\gamma = v_n - v_m - h(\varphi_n + \varphi_m)/2$, $\Delta \varphi = \varphi_n - \varphi_m$, h – расстояние между частицами. Такой потенциал отличается от стандартного потенциала микрополярированной упругости для материала с простейшей балочной микроструктурой и с симметричными соединениями (рис. 1a) наличием последней составляющей.

Для случая соединения двух частиц (рис. 4) с потенциалом (2) могут быть получены аналитические решения и изучены особенности такого соединения при сжатии и растяжении. Первая особенность состоит в несимметричности реакции. Вторая более интересная особенность состоит в том, что отклонения происходят в разных направлениях при растяжении и сжатии.

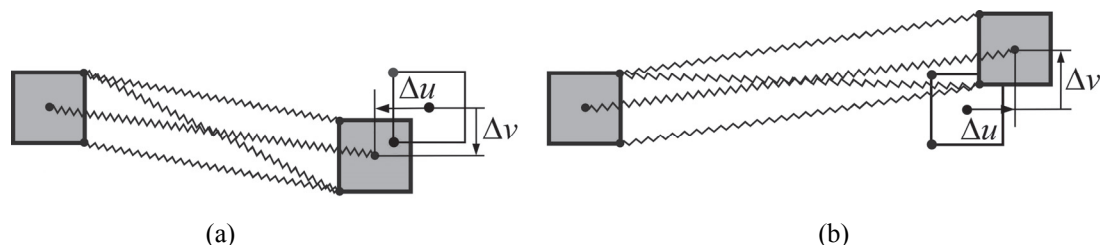


Рис. 4. Деформирование ячейки хиральной решетки (рис. 1с) при сжатии (а) и растяжении (б)

Численный анализ решеток с большим количеством частиц под действием сжимающих нагрузок проводится численно. Отметим, что деформированное состояние не симметрично, наибольшее давление на основание оказывается не под нагрузкой, а в смещенной точке.

Работа выполнялась в рамках базовой части государственного задания № 2014/220 Минобрнауки РФ в сфере научной деятельности (НИР № 1153).

Литература

1. Конек Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона // Механика композитных материалов и конструкций. - 2004. - Т.10, № 1. - С. 35-69.
2. Yang W., Li Z.-M., Shi W., Xie B.-H., Yang, M.-B. Review on auxetic materials // J. Mater. Sci., 2004, 39, 3269-3279.
3. Banerjee B. An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites. Taylor & Francis, 2011. 375 pp.
4. Bigoni D., Guenneau S., Movchan A.B., and Brun M. Elastic metamaterials with inertial locally resonant structures: Application to lensing and localization // Phys. Rev. B, 2013, 87 (17). P. 174303.
5. Ruzzene M., Scarpa F. Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices // Phys. Status Solidi B, 2005, 242(3), 665-680.
6. Грекова Е.Ф. Об одном классе единожды отрицательных акустических метаматериалов // Доклады академии наук, 2015, том 462, № 3, с. 295–298.
7. Grima J.N., Evans K.E. Auxetic behavior from rotating squares // J. Mater. Sci. Lett., 2000, 19, 1563-1565.
8. Ishibashi, Y., Iwata, M. A microscopic model of a negative Poisson's ratio in some crystals // J. Phys. Soc. Jpn., 2000, 69, 2702-2703.
9. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Ishibashi Y., Shigenari T. Elastic properties of a two-dimensional model of crystals containing particles with rotational degrees of freedom // Physical Review B, 2002, 65, 094101.
10. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // Int. J. Solids Struct., 2005, 42 (24-25), 6245-6260.
11. Porubov A.V., Berinskii I.E. Nonlinear plane waves in materials having hexagonal internal structure // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014. V. 67. Pp. 27–33.
12. Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Dmitriev S.V. Multi-field modelling of a Cosserat lattice: models, wave filtering, and boundary effects // European Journal of Mechanics – A/Solids, 2014. V. 46. Pp. 96-105
13. Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. Multi-field model for Cosserat media. J. Mech. Mater. Struct., 2008, 3 (7), 1365-1382.
14. Васильев А.А., Дмитриев С.В., Павлов И.С. Структурное и континуальное моделирование материалов с учетом конечности размера частиц // Перспективные материалы, 2011. № 12. С. 87 - 91.
15. Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // Int. J. Solids Struct., 2001, 38, 1563-1583
16. Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. A 2D granular medium with rotating particles. Int. J. Solids Struct, 2006, 43, 6194-6207.
17. Павлов И.С., Потапов А.И. Двумерная модель зернистой среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 98-109.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАГРУЖЕНИЯ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В.П. Володин, Э.Р. Надиров

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, n-emin@mail.ru

Аннотация. Получены уравнения связи между напряжениями, деформациями и внутренними усилиями для прямоугольных в плане пологих оболочек, удобные для численного расчета процесса их нагружения. Задача решается с учетом геометрической и физической нелинейностей.

Ключевые слова: пологая оболочка, напряжения, деформации, тензор, девиатор.

1. Введение

Рассматривается пологая цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием двустороннего сжатия. Оболочка имеет в плане прямоугольную форму. Задача решается в перемещениях с учетом геометрической и физической нелинейностей.

В работе дается единая форма связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями e_{ij} для трех рассматриваемых случаев материала оболочки. Материал оболочки будем считать: упругим, нелинейно-упругим, упруго-пластическим. Рассматривается квазипростое нагружение оболочки. В соответствии с теорией квазипростых процессов принимаем [3-5]:

1. Закон упругого изменения объема:

$$e_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}; \quad (1)$$

где $e_0 = \frac{1}{3}e_{ii}$ – средняя деформация; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение; K – модуль объемной деформации Бриджмена; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона. Используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

2. Закон упругопластического формоизменения:

$$S_{ij} = N_p \mathcal{E}_{ij}, \quad (2)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}e_0$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций. Для упругих панелей

$$N_p = 2G = \frac{E}{1+\mu};$$

если материал панели нелинейно-упругий [4], то

$$N_p = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} = 2G_p = \frac{E_p}{1+\mu_p};$$

в теории квазипростых процессов

$$N_p = 2G_p + (2G - 2G_p)f^q, \quad f = \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta_1), \quad 2G_p = \frac{\sigma}{\mathcal{E}},$$

здесь E_p , G_p , μ_p – пластические характеристики материала; q – экспериментально определяемый параметр [3, 4].

3. Закон упругопластического упрочнения.

Модуль тензора-девиатора напряжений есть универсальная функция модуля тензора-девиатора деформаций $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$, определяемая из опытов на простое растяжение [3].

2. Связь между напряжениями и деформациями

Запишем общую зависимость (2) в обратной форме

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{N_p} S_{ij},$$

или в развернутом виде (в технических обозначениях)

$$\begin{cases} e_x - e_0 = (\sigma_x - \sigma_0)/N_p, & e_{xy} = \tau_{xy}/N_p, \\ e_y - e_0 = (\sigma_y - \sigma_0)/N_p, & e_{yz} = \tau_{yz}/N_p, \\ e_z - e_0 = (\sigma_z - \sigma_0)/N_p, & e_{zx} = \tau_{zx}/N_p. \end{cases} \quad (3)$$

Вследствие гипотезы прямых нормалей $e_{xz} = e_{yz} = 0$, а поэтому

$$\tau_{xz}, \tau_{yz} \ll \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}.$$

Вследствие гипотезы о ненадавливании слоев

$$\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}. \quad (4)$$

Таким образом, можно считать, что в оболочке возникает плоское напряженное состояние. На основании (4) запишем

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (5)$$

Из третьего выражения (3) с учетом (1) получим

$$e_z - e_0 = -\frac{1}{N_p}\sigma_0; \quad e_z = \frac{1-3K/N_p}{2+3K/N_p}(e_x + e_y); \quad e_0 = \frac{1}{2+3K/N_p}(e_x + e_y). \quad (6)$$

В частном случае нелинейно-упругого тела

$$K = \frac{E_p}{3(1-2\mu_p)}; \quad N_p = 2G_p = \frac{E_p}{1+\mu_p}; \quad (7)$$

$$1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu_p}{1-2\mu_p}; \quad 2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1-\mu_p)}{1-2\mu_p}. \quad (8)$$

В результате получим

$$e_z = -\frac{\mu_p}{1-\mu_p}(e_x + e_y); \quad e_0 = \frac{1-2\mu_p}{3(1-\mu_p)}(e_x + e_y).$$

Это совпадает с имеющимися результатами. Для упругой оболочки $\mu_p = \mu$.

Предположим, что

$$N_p = 2G\bar{N}_p; \quad (9)$$

где \bar{N}_p – безразмерная величина: для упругой оболочки $\bar{N}_p = 1$; для оболочки из нелинейно-упругого материала

$$\bar{N}_p = \frac{2G_p}{2G} = \frac{1+\mu}{1+\mu_p} \cdot \frac{E_p}{E};$$

при квазипростом нагружении

$$\bar{N}_p = \frac{N_p}{2G} = \frac{2G_p}{2G} + \left(1 - \frac{2G_p}{2G}\right) f^q.$$

При условии (9) имеем

$$1 - \frac{3K}{N_p} = \frac{\bar{N}_p - 1 - (2\bar{N}_p + 1)\mu}{(1-2\mu)\bar{N}_p}; \quad 2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{2\bar{N}_p + 1 + (1-4\bar{N}_p)\mu}{(1-2\mu)\bar{N}_p}.$$

При $\bar{N}_p = 1$

$$1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu}{1-2\mu}; \quad 2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1-\mu)}{1-2\mu}.$$

Это совпадает с (8) при $\mu_p = \mu$.

$$\text{При } \bar{N}_p = \frac{2G_p}{2G} = \frac{1+\mu}{1+\mu_p} \cdot \frac{E_p}{E}$$

$$1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu_p}{1-2\mu_p}; \quad 2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1-\mu_p)}{1-2\mu_p}.$$

Это совпадает с (8) т.к. из (1) и (7)

$$(1-2\mu)\frac{E_p}{E} = 1-2\mu_p; \quad \mu_p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{E_p}{E}.$$

Последнее выражение служит для определения пластического коэффициента Пуассона μ_p .

В дальнейшем в практических расчетах будем принимать следующие выражения для функционалов \bar{N}_p : для упругих оболочек $\bar{N}_p = 1$; для оболочек из нелинейно-упругого материала

$$\bar{N}_p = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad (10)$$

при квазипростом нагружении

$$\bar{N}_p = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}\right) f^q. \quad (11)$$

Для вычисления этих функционалов необходимо знать диаграмму зависимости $\sigma = \Phi(\varepsilon)$. Замечательным свойством последнего функционала является то, что он справедлив и при разгрузке.

При условии (9) имеем

$$\frac{1-3K/N_p}{2+3K/N_p} = \frac{\mu_0 \bar{N}_p - 1}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}; \quad \frac{1}{2+3K/N_p} = \frac{\mu_0 \bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}; \quad (12)$$

где введено обозначение

$$\mu_0 = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}.$$

На основании (12) вместо (6) получим

$$e_z = \frac{\mu_0 \bar{N}_p - 1}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1} (e_x + e_y); \quad e_0 = \frac{\mu_0 \bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1} (e_x + e_y). \quad (13)$$

Для несжимаемого материала $\mu = 0,5$, $\mu_0 = 0$

$$e_z = -(e_x + e_y); \quad e_0 = 0.$$

Это согласуется с известными результатами.

На основании вышеизложенного, связь между напряжениями и деформациями для упруго-пластических панелей можно записать в виде (в технических обозначениях)

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_0 = 2G\bar{N}_p (e_x - e_0), \\ \sigma_y - \sigma_0 = 2G\bar{N}_p (e_y - e_0), \\ \tau_{xy} = 2G\bar{N}_p e_{xy}. \end{cases} \quad (14)$$

В этих выражениях: σ_0 определяется по формуле (5), e_0 определяется по формуле (13), параметры пластичности \bar{N}_p определяются по формулам (10), (11). Исключим из первых двух выражений (14) σ_0 и e_0

$$\begin{cases} 2\sigma_x - \sigma_y = 6G\bar{N}_p (e_x - e_0), \\ -\sigma_x + 2\sigma_y = 6G\bar{N}_p (e_y - e_0). \end{cases}$$

Решение этой системы

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\bar{N}_p (2e_x + e_y - 3e_0), \\ \sigma_y = 2G\bar{N}_p (e_x + 2e_y - 3e_0). \end{cases} \quad (15)$$

С учетом (13), решение (15) запишется так

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2G\bar{N}_p}{2\mu_0\bar{N}_p + 1} \left[(2 + \mu_0\bar{N}_p)e_x + (1 - \mu_0\bar{N}_p)e_y \right], \\ \sigma_y = \frac{2G\bar{N}_p}{2\mu_0\bar{N}_p + 1} \left[(1 - \mu_0\bar{N}_p)e_x + (2 + \mu_0\bar{N}_p)e_y \right]. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти выражения, а также введя полусуммы и полуразности напряжений и деформаций

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y); \quad \sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y); \quad e_s = \frac{1}{2}(e_x + e_y); \quad e_r = \frac{1}{2}(e_x - e_y); \quad (16)$$

получим связь между напряжениями и деформациями в виде

$$\begin{cases} \sigma_s = 2G\bar{H}_p e_s, \\ \sigma_r = 2G\bar{N}_p e_r, \\ \tau_{xy} = 2G\bar{N}_p e_{xy}, \end{cases}$$

где

$$\bar{H}_p = \frac{3\bar{N}_p}{2\mu_0\bar{N}_p + 1}. \quad (17)$$

3. Внутренние усилия в оболочке

Внутренние усилия в оболочке определяются таким образом

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} dz; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} z dz.$$

Имеем

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s + \sigma_r) dz; & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s - \sigma_r) dz; \\ M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s + \sigma_r) z dz; & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s - \sigma_r) z dz. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$N_x = N_s + N_r; \quad N_y = N_s - N_r; \quad M_x = M_s + M_r; \quad M_y = M_s - M_r, \quad (18)$$

где

$$N_s = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s dz; \quad N_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r dz; \quad M_s = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s z dz; \quad M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz. \quad (19)$$

Вводим безразмерную координату (h – толщина оболочки)

$$\bar{z} = \frac{2z}{h}, \quad -1 \leq \bar{z} \leq +1, \quad z = \frac{h}{2} \bar{z}, \quad dz = \frac{h}{2} d\bar{z}.$$

В силу гипотезы прямых нормалей

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\alpha_{ij}, \quad (20)$$

где ε_{ij} – деформации растяжения-сжатия и сдвига срединной поверхности оболочки; α_{ij} – кривизны изгиба и кручения этой поверхности.

На основании (20) можем записать

$$\begin{cases} e_s = \varepsilon_s + z\alpha_s, \\ e_r = \varepsilon_r + z\alpha_r, \\ e_{xy} = \varepsilon_{xy} + z\alpha_{xy}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad \alpha_s = \frac{1}{2}(\alpha_x + \alpha_y), \quad \alpha_r = \frac{1}{2}(\alpha_x - \alpha_y). \quad (22)$$

Вводим обозначения

$$\bar{H}_{pk} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \int_{-1}^{+1} \bar{H}_p \bar{z}^{k-1} d\bar{z}; \quad \bar{N}_{pk} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \int_{-1}^{+1} \bar{N}_p \bar{z}^{k-1} d\bar{z}.$$

Тогда на основании (16), (19) и (21) получим

$$N_s = 2G(\bar{H}_{p1} h \varepsilon_s + \bar{H}_{p2} h^2 \varepsilon_s); \quad N_r = 2G(\bar{N}_{p1} h \varepsilon_r + \bar{N}_{p2} h^2 \varepsilon_r); \quad N_{xy} = 2G(\bar{N}_{p1} h \varepsilon_{xy} + \bar{N}_{p2} h^2 \varepsilon_{xy});$$

$$M_s = 2G(\bar{H}_{p2} h^2 \varepsilon_s + \bar{H}_{p3} h^3 \varepsilon_s); \quad M_r = 2G(\bar{N}_{p2} h^2 \varepsilon_r + \bar{N}_{p3} h^3 \varepsilon_r);$$

$$M_{xy} = 2G(\bar{N}_{p2} h^2 \varepsilon_{xy} + \bar{N}_{p3} h^3 \varepsilon_{xy}).$$

Определив N_s , N_r , M_s , M_r из (18) можно найти сами усилия.

Для оболочки из несжимаемого материала $\mu = 0,5$, $\mu_0 = 0$; тогда из (17) следует

$$\bar{H}_p = 3\bar{N}_p, \quad \bar{H}_{pk} = 3\bar{N}_{pk}.$$

Для упругой оболочки $\bar{N}_p = 1$, значит

$$\bar{H}_p = \frac{3}{2\mu_0 + 1}, \quad \bar{H}_{p1} = \frac{3}{2\mu_0 + 1}, \quad \bar{H}_{p2} = 0, \quad \bar{H}_{p3} = \frac{1}{4(2\mu_0 + 1)},$$

$$\bar{N}_{p1} = 1, \quad \bar{N}_{p2} = 0, \quad \bar{N}_{p3} = \frac{1}{12}.$$

Таким образом, в этом случае

$$N_s = 2G \frac{3}{2\mu_0 + 1} h \varepsilon_s; \quad N_r = 2G h \varepsilon_r; \quad N_{xy} = 2G h \varepsilon_{xy};$$

$$M_s = 2G \frac{1}{4(2\mu_0 + 1)} h^3 \varepsilon_s; \quad M_r = 2G \frac{1}{12} h^3 \varepsilon_r; \quad M_{xy} = 2G \frac{1}{12} h^3 \varepsilon_{xy}.$$

Для определения параметров пластичности \bar{H}_{pk} и \bar{N}_{pk} используем диаграмму зависимости $\sigma = \Phi(\varepsilon)$. Поэтому нужна формула для вычисления модуля ε девиатора деформаций. В общем случае имеем [5]

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} [(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)].$$

Для пологих оболочек

$$e_{yz} = e_{zx} = 0; \quad e_z = \frac{2(\mu_0 \bar{N}_p - 1)}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1} e_s.$$

Учитывая зависимости (22), окончательно получаем

$$\varepsilon = \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{(2\mu_0 \bar{N}_p + 1)^2} e_s^2 + e_r^2 + e_{xy}^2}.$$

4. Заключение

Полученные зависимости между напряжениями, деформациями и внутренними усилиями удобны тем, что являются едиными при использовании в расчётах линейной и нелинейной теории упругости и частного варианта теории пластичности.

Литература

1. Володин В.П., Надиров Э.Р. Определение аппроксимирующих функций в выражениях для перемещений при расчете пологих оболочек // Вестник Тверского государственного университета: научный журнал. Серия «Прикладная математика» – Тверь: ТвГУ, 2012. №17. Вып. 2 (25). С. 41 – 51.
2. Володин В.П., Надиров Э.Р. Уравнения процесса нагружения пологих цилиндрических оболочек при двустороннем сжатии // Известия МГТУ «МАМИ»: научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2013. № 1(15). Т. 3. С. 30 – 36.
3. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. 352 с.
4. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: Чудо, 2000. 703 с.
5. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. 368 с.

УДК 538.951; 666.762.38

ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ КЕРАМИКИ НА ОСНОВЕ ДИАТОМИТА

С.С. Гаврюшин¹, А.А. Скворцов², В.С. Надеждин², М.Н. Лукьянов²,
А.С. Груздев², П.А. Скворцов²

¹ МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия

² Московский государственный машиностроительный университет, Москва, Россия,
SkvortsovAA2009@ya.ru

Аннотация. Работа посвящена изучению механических свойств пенодиатомитовой керамики. Экспериментально изучено поведение высокопористой (до 70%) диатомитовой керамики в условиях сжатия, а также проанализирована динамика изменения динамических модулей упругости от времени отжига в диапазоне температур 800 – 1000 °С. Измерены значения энергий активации изменения модуля упругости ($W_a=0,22-0,24$ эВ) при высокотемпературном отжиге (800 – 1000 °С). Продемонстрировано изменение фазового состава образцов под воздействием отжига.

Ключевые слова: пористая кварцевая керамика, модуль упругости, теплопроводящие свойства.

1. Введение

Пористая керамика в настоящее время приобретает все большее значение в различных областях техники и технологии. Ее применение осуществляется в двух главных направлениях. Первым является теплоизоляция, при этом решающим являются теплоизоляционные свойства (значение коэффициента теплопроводности и плотности). Вторым направлением являются области, где решающее свойство материала - это его пористая структура и связанные с ней свойства. В широком ассортименте теплоизоляционных материалов (более 100 видов) значительное место занимают керамические материалы, преимуществом которых является возможность применения при температуре изолируемых поверхностей до 1000 °С [1].

Одним из таких материалов является новая, ещё практически не изученная пенодиатомитовая керамика. Основу этого материала составляет диатомит - осадочная горная порода, состоящая преимущественно из раковин диатомовых водорослей. Химически диатомит на 96% состоит из водного кремнезема (опала). Он обладает большой пористостью, способностью к адсорбции, слабой тепло- и звукопроводностью, тугоплавкостью и кислотостойкостью [2,3].

Однако активному использованию данной керамики препятствует несколько проблем, а именно: практически не исследованы физико-химические свойства диатомита на микро- и наноуровне, отсутствует информация о процессах спекания диатомовой «пене» при температурах до 1100 °С, а также отсутствуют данные по модулям упругости рассматриваемого материала.

Поэтому основной задачей работы является исследование модулей упругости диатомовой керамики, а также влияние термообработки на её физико-механические свойства.

2. Объекты исследования

В качестве объектов исследования использовались образцы пенодиатомитовой керамики, изображенные на рис.1. После чего измерялись масса, и вычислялась плотность образцов. Далее на подготовленных образцах проводилось измерение динамических модулей упругости с последующим отжигом на воздухе. Для отжига образцов использовалась стандартная резистивная печь (СНОЛ 1,6) с вертикальной загрузкой с максимальной температурой отжига до 1250 °С. После установления рабочей температуры образец в специальном контейнере помещался в нагретую



Рис. 1. Исходные образцы пенодиатомитовой керамики размером 25×30×120 мм³.

печь в изотермическую область. Время нагрева-охлаждения образцов составляло 5-7 минут. Отжиг производился при температуре 800 °С, 900 °С, 950 °С и 1000 °С в течение 1, 2 и 3 часов. После отжига проводилось измерение механических свойств образцов.

3. Методика проведения экспериментов и анализ полученных результатов

В данной работе исследовано поведение высокопористой (до 70%) диатомитовой керамики в условиях сжатия. Основу этого материала составляет диатомит - осадочная горная порода, состоящая преимущественно из раковин диатомовых водорослей. Химически диатомит на 96% состоит из водного кремнезема (опала). Известно, что пористая структура диатомитовой керамики (при пористости более 65%) представлена как закрытыми, так и сообщающимися порами. Фазовый состав материала представлен кристаллами SiO₂ в виде альфа-кварца с сильно искаженной кристаллической решеткой.

Деформационное поведение керамических материалов, под действием внешней нагрузки вплоть до разрушения можно охарактеризовать как линейно-упругое. Однако наличие пористой структуры приводит к изменению характера деформационного поведения. Для таких материалов свойственны нелинейные законы связи между напряжением и деформацией.

В качестве объектов исследования нами использовались образцы 19×19×19 мм. Эксперимент осуществлялся на испытательной машине МИ-40-КУ. Диаграмма сжатия исследуемых образцов приведена на рис.2. Результаты исследований показали, что наряду с упругой деформацией происходит накопление микрповреждений в виде локальных напряжений керамического каркаса. Выявлено, что на характер деформационного поведения керамики оказывает влияние морфология пористой структуры.

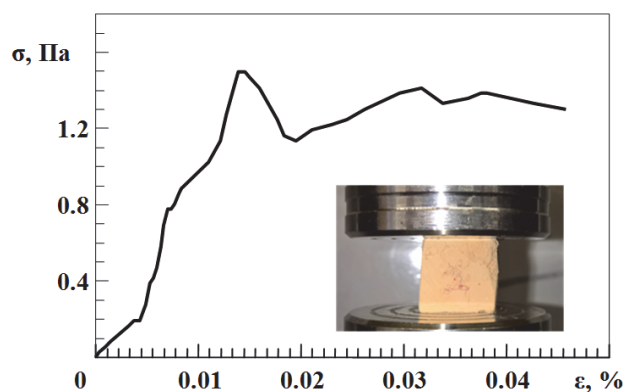


Рис. 2. Диаграмма сжатия образца диатомитовой керамики при комнатной температуре

Сущность резонансного метода с применением изгибных колебаний состоит в следующем: в образце, лежащем на опорах, с помощью электронного генератора и электроакустического преобразователя возбуждаются колебания изгиба переменной частоты. Эти колебания воспринимаются другим преобразователем (приемником) и подводятся к индикатору. Частота генератора изменяется. Когда частота собственных основных колебаний образца совпадает с частотой возбуждающих колебаний, происходит резкое увеличение амплитуды колебаний, или резонанс. Измеряя собственную резонансную частоту установившихся колебаний образца твердого тела с ненарушенной структурой, можно количественно определить значение модуля упругости материала данного образца $E=4 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \cdot L^2 \cdot \rho_k \cdot f^2$, где L – длина образца; ρ_k – плотность; f – резонансная частота.

Результаты серии опытов приведены на рис. 3. Численные значения E согласуются с известными литературными данными по кварцевой керамике.

Дальнейшие исследования материала касались вопросов спекания керамики. На рис. 4 приведены типичные результаты зависимости изменения модуля упругости от времени и температуры отжига образцов. Нетрудно видеть, что с увеличением времени отжига модуль упругости возрастает во всем диапазоне температур. Это связано с развивающимися в керамике процессами спекания, что приводит к уменьшению доли пор и увеличению плотности материала.

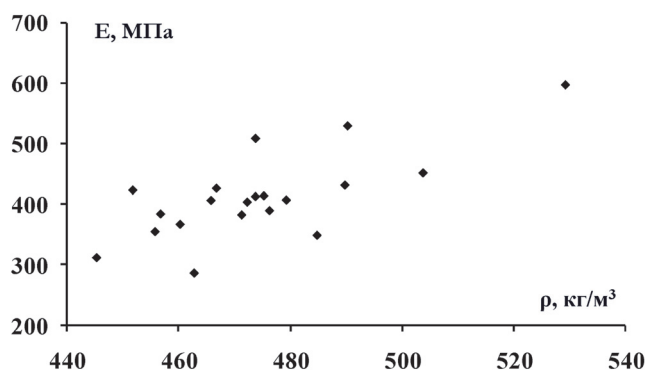


Рис. 3. Зависимость динамического модуля упругости материала от плотности

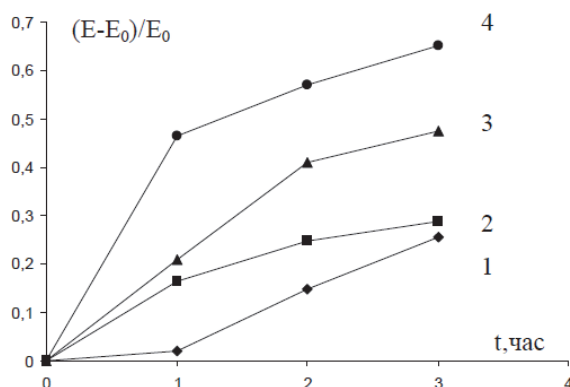


Рис. 4. Динамика изменения модуля упругости от времени отжига образцов:
1 – 800 °С; 2 - 900 °С; 3 – 950 °С; 4 – 1000 °С.
(E_0 – модуль упругости до отжига, E – модуль упругости после отжига)

Результаты влияния отжига на основные физико-механические характеристики материала сведены в таблицу.

Следует подчеркнуть, что увеличение модуля упругости образцов вследствие отжига объясняется не только спеканием и уменьшением пористости. Под воздействием температуры в образце происходят фазовые изменения. Для анализа фазовых превращений использовался дифрактометр ДРОН 4 – 07, напряжение 30 кВ, анодный ток 20 мА, Си-излучение. Исследовались образцы до и после отжига при температуре 1000 °С, в течение трех часов.

Таблица

Влияние отжига на характеристики керамики

Т отжига, °С	$\Delta m/m$, %	$\Delta l/l$, %	ρ , кг/м ³	χ , Вт/(мК)	Е, ГПа	V, м/с
До отжига	0	0	447	0,12	0,32	846
800	2	1	456	0,14	0,33	850
900	3	2	477	0,16	0,41	923
950	3	6	535	0,19	0,53	992
1000	3	10	577	0,25	0,61	1031

Результаты исследований показали, что до отжига основу материала составлял SiO₂ в виде альфа-кварца с сильно искаженной кристаллической решеткой. После отжига при 1000 °С в течение трех часов проявился SiO₂ в виде бета-квисталлита. Альфа-кварц представляет собой модификацию SiO₂ с тригональной сингонией (рис. 5а) бета-квисталлит это

модификация SiO_2 с кубической сингонией (рис. 5б). По литературным данным температура перехода из альфа-кварца в бета-кварц $T_{\alpha\beta}=575$ °С (энтальпия перехода 0,41 кДж/моль), бета-кварц в бета-кристобалит $T_{\beta\gamma}=927$ °С (энтальпия перехода 2,26 кДж/моль).

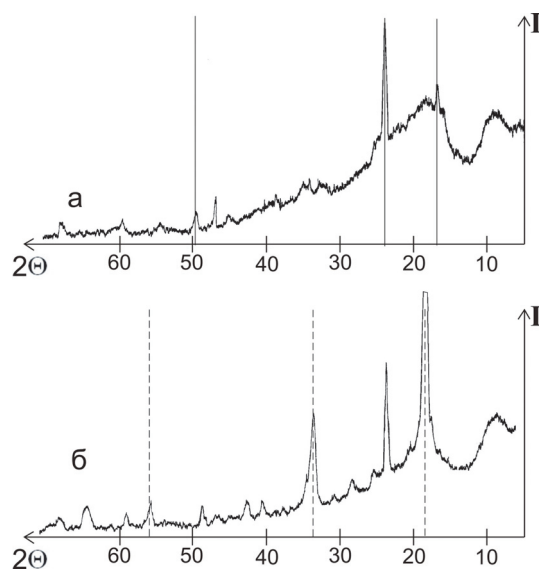


Рис. 5. Рентгенограммы образцов: а – до отжига, б – после отжига.
(линиями показаны пики, соответствующие — альфа-кварцу, и - - - - - бета-кристобалиту)

4. Выводы

Таким образом, в работе проведены измерения механических характеристик пенодиатомитовой керамики, экспериментально измерены значение динамического модуля упругости ($E \sim 0,3$ ГПа), скорости звуковых колебаний ($V \sim 846$ м/с) плотности ($\rho \sim 450$ кг/м³) и пористости ($P \sim 80$ %) образцов. Изучена динамика изменения модуля упругости образцов пенодиатомитовой керамики от времени отжига при температурах 800 – 1000 °С. Обнаружено изменение фазового состава образцов под воздействием высокотемпературного отжига: до отжига основу материала составлял SiO_2 в виде альфа-кварца, после отжига при 1000 °С в течение трех часов проявился SiO_2 в виде бета-кристобаллита.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-07-00869).

Литература

1. Jang Dongchan, Meza Lucas R., Greer, Frank. Fabrication and deformation of three-dimensional hollowceramic nanostructures. //Nature materials. –2013. – Vol. 12.– Iss.10. –pp. 893-898.
2. Noemie van Garderen, Frank J.Clemens, Matheus Mezzomo, Carlos Perez Bergmann, Thomas Graule Investigation of clay content and sintering temperature on attrition resistance of highly porous diatomite based material. // Applied clay science. –2011. Vol.52.–Iss.1-2.–pp.115-121.
3. П'ина V. P., Shelekhova T. S. Diatomites of Karelia for glass production. //Glass and ceramics. –2009. Vol.66.–Iss.3-4.–pp.109-112.

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОЙ РАЗГРУЗКИ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВИДА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ И АСТРОИДЫ

В.В. Гараников

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, texanika06@mail.ru

Аннотация: В данной статье экспериментально исследовано поведение предельных поверхностей текучести и нагружения на плоских траекториях переменной кривизны типа логарифмической спирали, астроида при простых процессах. Обнаружена существенно большая кинематическая подвижность поверхности текучести (деформирования) в сравнении с поверхностью нагружения. Изменение начальной формы предельных поверхностей незначительно.

Ключевые слова: траектория, эксперимент, предельная поверхность, текучесть, логарифмическая спираль, астроида.

В данной работе приведены систематические экспериментальные исследования закономерностей изменения скалярных и векторных свойств металлов на плоских криволинейных траекториях напряжений и деформаций. Исследования выполнены на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе [1]. Данный комплекс разработан группой авторов в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов Тверского государственного технического университета под руководством профессора Зубчанинова В.Г.

Комплекс состоит из нагружающей установки, реализующей трехпараметрическое воздействие на образец (осевая сила, кручение и внутреннее давление), датчиков усилий и деформаций, управляющей ЭВМ типа IBM PC и устройства связи с объектом (УСО). Механическая часть выполнена на базе испытательной машины ЦДМУ-30 и включает замкнутую силовую раму с размещенными на ней элементами крепления образца и приводами реализуемых усилий. В процессе автоматизации установки регулятор давления (РД) гидросистемы был дополнен приводом, управление которым осуществлялось программно с блока задающего параметры нагружения. Аналогично была проведена модернизация гидростанции внутреннего давления подводимого в образец. Механическая часть привода кручения была взята за основу. Более подробное описание комплекса представлено в монографиях [2,3].

Образцы имели толщину стенки $h = 1$ мм, радиус срединной поверхности $R = 15,5$ мм, длину рабочей части $L = 6R$ и были изготовлены точением из одного прутка стали 9Х2. Методика испытаний подробно описана в работе [2]. Эксперименты по сложному деформированию материала осуществлены в плоскости \mathcal{E}_1 – \mathcal{E}_3 девиаторного подпространства деформаций А.А. Ильюшина по траекториям в виде логарифмической спирали и астроида в соответствии с зависимостями:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cdot \cos \Theta, \quad \mathcal{E}_3 = -\mathcal{E} \cdot \sin \Theta, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cdot \exp(-k \Theta), \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \cdot \cos^3 \Theta, \quad \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \cdot \sin^3 \Theta, \quad (2)$$

где \mathcal{E}_0 – уровень предварительной деформации, \mathcal{E} – переменный радиус спирали, θ – угол, отсчитываемый от положительного направления оси \mathcal{E}_1 против хода часовой стрелки; $k = \operatorname{tg} \beta = 1 / \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$; α – угол между касательной к траектории деформаций и ее радиус-вектором. На рис.1 представлены реализованные траектории деформаций по логарифмическим спиральям. Предварительное простое нагружение осуществлялось до заданного уровня $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 = 0.02$ (кружки с точками), простой полной разгрузки (треугольники) и затем следовала простая полная разгрузка (треугольники) и повторное нагружение до прежнего уровня (кружки с внешними крестиками).

После этого реализовывались программы сложного деформирования по логарифмическим спиральям с уменьшением модуля вектора деформаций \mathcal{E} (кружки с внутренними крестиками). Точка, отмеченная цифрой 1 в кружке, отвечает началу процесса сложной разгрузки ($dA < 0$) с углами излома траектории $\beta_0 = 166^\circ; 135^\circ; 112,4^\circ$ и началу протыкания поверхности текучести.

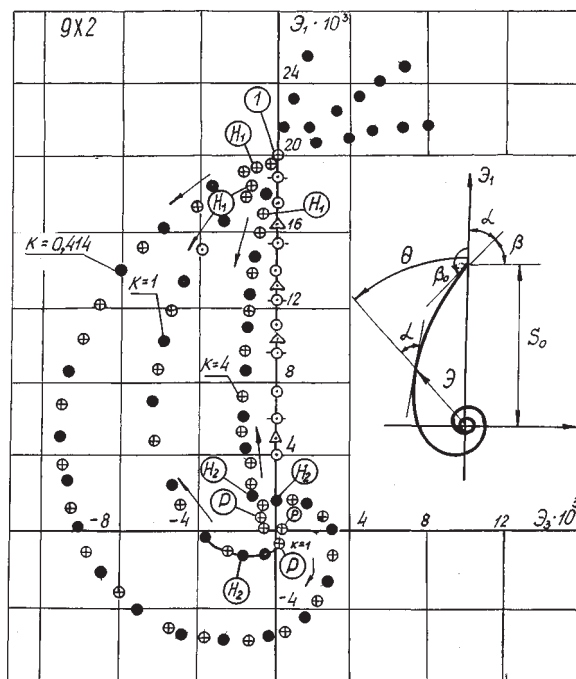


Рис. 1. Траектории по типу логарифмических спиралей

В работе условием активного деформирования приняты

$$dA = \sigma \cdot dS \cdot \cos \nu_1 > 0, \quad (3)$$

где σ – модуль вектора напряжений, S – длина дуги траектории деформаций, ν_1 – угол сближения (угол между вектором напряжений и касательной к траектории деформаций). Так как $\sigma > 0$, $dS > 0$, то при угле сближения $\nu_1 < 90^\circ$ элементарная работа $dA > 0$.

После завершения скрутки спиралей к началу координат ($\Xi = 0$) происходила раскрутка траектории в обратном направлении, что отмечено на рисунке темными кружками. В последнем случае модуль вектора деформации Ξ монотонно возрастал.

На рис. 2 отражены скалярные свойства материала для одной из реализованных траекторий сложного деформирования.

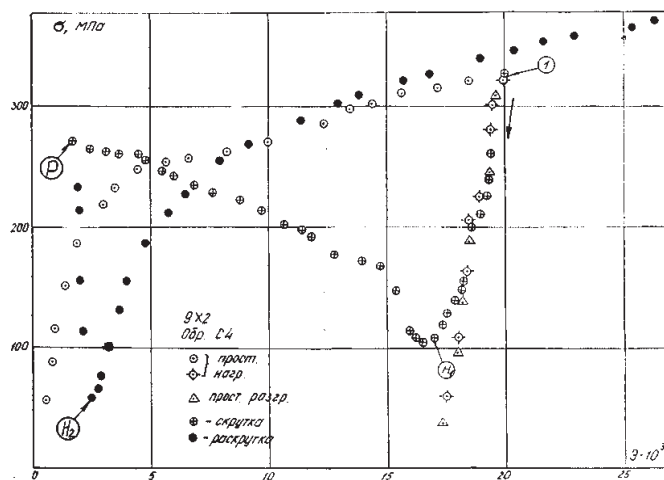


Рис. 2. Диаграмма деформирования ($k = 4$)

После простого деформирования до уровня $\varepsilon = 0,02$ (кружочки), простой разгрузки (треугольники) и последующей простой догрузки (кружки с внешним крестиком) производилась сложная разгрузка по траектории в виде логарифмической спирали (кружки с внутренним крестиком). Буквой H_1 отмечен момент завершения пассивного процесса сложной разгрузки и начало нового активного процесса деформирования при продолжающейся скрутке траектории по логарифмической спирали. Как видим, экспериментальные точки, отвечающие сложной разгрузке (кружочки с внутренним крестиком) и простой разгрузке (треугольники) практически совпадают. Это позволяет сделать важный вывод о том, что процессы разгрузки при сложном и простом деформировании практически друг от друга не отличаются вплоть до момента окончания "протыкания" поверхности текучести. После точки H_1 с началом активного процесса деформирования происходит резкое изменение характера зависимости модулей векторов напряжений σ и деформаций ε . При уменьшении модуля вектора деформаций ε происходит увеличение модуля вектора напряжений σ , т.е. происходит процесс упрочнения материала, и последующей упругой разгрузки при несколько увеличивающемся значении ε , что также необычно. Затем при раскрутке траектории процесс деформирования снова становится активным.

На рис. 3 представлена реализованная траектория деформаций вида астроида. После простого нагружения (кружки с точкой), разгрузки (треугольники) и повторной нагрузки (кружки с внешними крестиками) до прежнего уровня $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0,02$, осуществлялось сложное деформирование по траектории в виде астроида.

Точка отмеченная буквой "А" в кружке соответствует началу сложного процесса деформирования и сложной разгрузки. Стрелка указывает направление процесса. Условные символы в виде кружков с крестиком, полу-затемненных и полностью темных отвечают соответственно первому, второму и третьему витку. Буквами " H_k " ($k = 1,2,3,4$) отмечены точки начала активного процесса деформирования ($dA > 0$), который продолжается вплоть до очередной угловой точки.

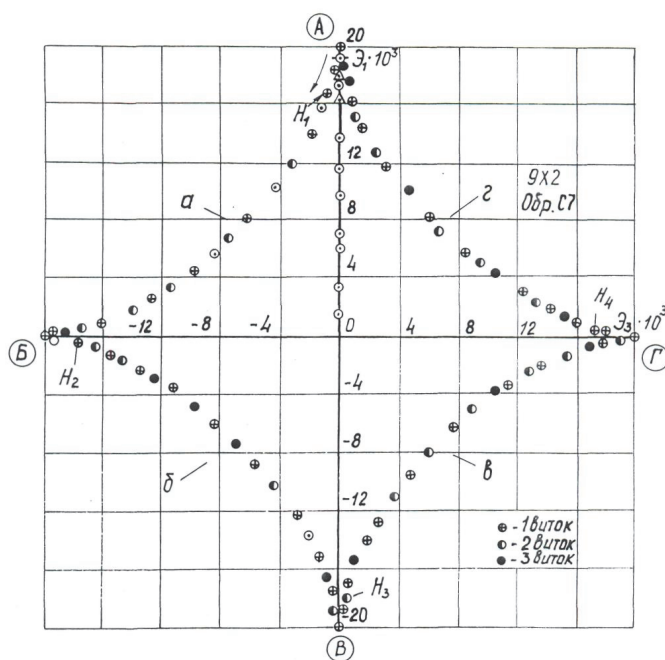


Рис. 3. Траектория деформаций типа астроида

На рис. 4 представлен отклик на данную траекторию деформаций в виде траектории напряжения. На данном рисунке показаны экспериментальные точки для первых двух витков астроида (первый виток - кружки с крестиком; второй - полутемный кружок). Цифры 1 и 2 в кружках отвечают соответственно началу первого и второго витка.

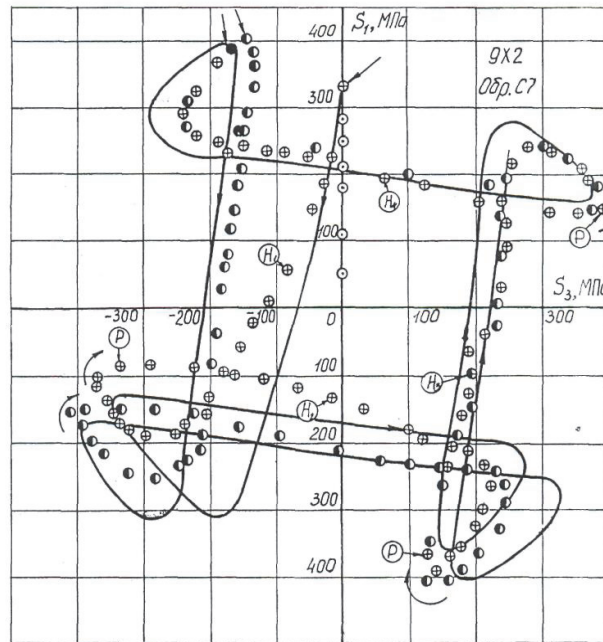


Рис. 4. Траектория напряжения

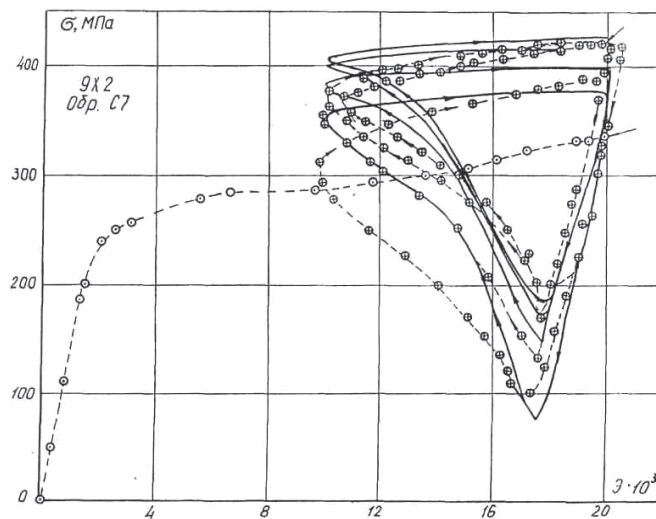


Рис. 5. Диаграмма деформирования материалов

В первой и второй четверти диаграммы деформирования (рис. 5) для первого и второго витка различаются, затем это различие уменьшается и в конце второго витка они практически совпадают. Как видно из данного рисунка экспериментальные точки, отвечающие участкам сложной и простой разгрузки практически совпадают, что позволяет распространить ранее сделанный вывод о совпадении законов сложной и простой разгрузки для логарифмической спирали также и на траекторию в виде астроиды. Данные петли для первого витка в процессе деформирования по участкам астроиды несколько смещаются в направлении оси σ , что связано с упрочнением материала.

По результатам, проведенных экспериментальных исследований сложной разгрузки на траекториях вида логарифмической спирали, астроиды, а также опытов при простых процессах, экспериментально построены предельные поверхности текучести и нагружения, которые представлены на рис.6.

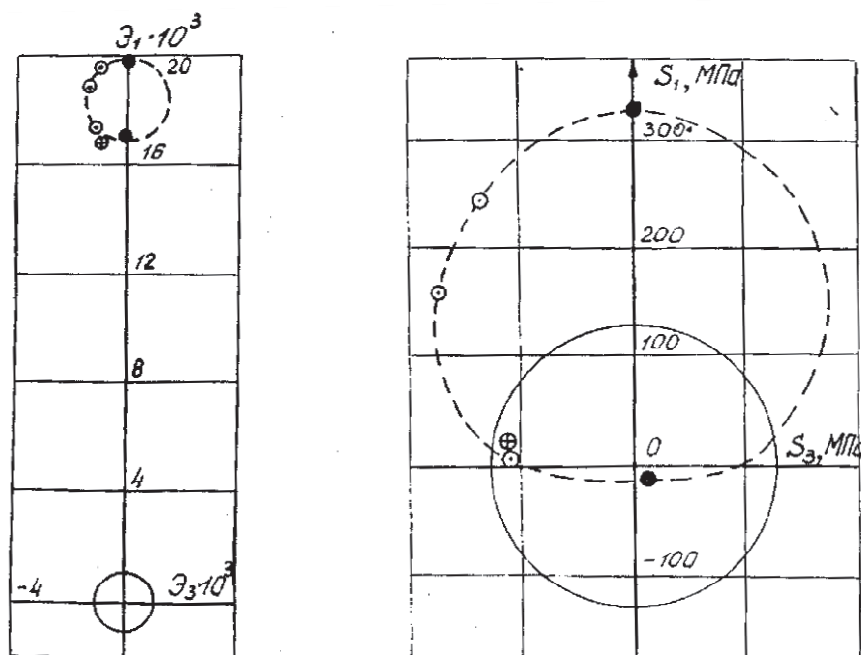


Рис. 6. Поверхности текучести и нагружения

Сплошными линиями показаны начальные поверхности текучести и нагружения при допуске на остаточную деформацию при растяжении $\epsilon = 0.005\%$. Условные символы отвечают испытаниям по траекториям типа логарифмической спирали (кружки с точкой), астроида – кружок с крестиком. Темные кружки соответствуют испытаниям на простое растяжение, сжатие до возникновения активного упругопластического процесса. Пунктирная линия является огибающей экспериментальных точек и представляет новое положение поверхностей нагружения и текучести. Обнаружена существенно большая кинематическая подвижность поверхности текучести (деформирования) в сравнении с поверхностью нагружения, а также незначительное изменение начальной формы предельных поверхностей.

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Автоматизированный комплекс для исследования упруговязкопластичных свойств материалов при сложном нагружении. Решение о выдаче свидетельства на полезную модель. / В.Г.Зубчанинов, А.В.Акимов, Н.Л.Охлопков. М.:ВНИИГПЭ, 1997. №97108023/20 (008702).
2. Гараников В.В., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Экспериментальная пластичность. Книга 2: Процессы сложного нагружения. Тверь: ТГТУ, 2004, 184 с.

УДК 624.04: 624.072.2

ДИНАМИЧЕСКИЕ ДОГРУЖЕНИЯ БАЛКИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ПОВРЕЖДЕНИИ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

В.А. Гордон, О.В. Пилипенко

Приокский государственный университет, Орел, Россия, Gordon@ostu.ru

Аннотация. Дано точное решение задачи о вынужденных колебаниях нагруженной балки, лежащей на упругом основании, вызванных внезапным полным или частичным разрушением основания. Решения строятся методами Фурье разделения переменных и начальных параметров, разложением динамических перемещений и нагрузки по модам собственных колебаний поврежденной балки.

Ключевые слова: балка, основание Винклера, частичное повреждение основания, вынужденные колебания, динамические догружения.

Введение

В работе поставлена задача построения математической модели переходных динамических процессов в балке на упругом основании при внезапном частичном или полном разрушении основания. До образования дефекта реакция конструкции определяется статическим воздействием. Внезапное образование дефекта приводит к снижению общей жесткости конструкции, которая не обеспечивает статическое равновесие системы. Возникшие инерционные усилия вызывают динамическую реакцию, перераспределение и рост деформаций и напряжений.

В результате возможно нарушение штатного функционирования конструкции либо потеря несущей способности и разрушение. С позиции строительной механики при этом возникает необходимость расчета таких систем как конструктивно нелинейных, т.е. изменяющих расчетную схему под нагрузкой с динамическими догружениями, вызванными внезапными выключениями из работы различных конструктивных элементов [1, 2].

К настоящему времени в научной литературе, относящейся к проблемам динамики систем «балка – основание», имеется множество решенных задач. Укажем лишь несколько работ [3-10], посвященных изгибным колебаниям балок, полностью или частично поддерживаемых упругим основанием. В этих работах изучаются собственные колебания, анализируются зависимости форм частот от механических свойств балки, от соотношения длин балки и основания. При этом подразумевается, что частичная поддержка балки основанием либо запроектирована, либо образовалась квазистатически, без учета инерционных сил.

Учитывая практическую значимость проблемы обеспечения прочности и живучести конструкций на упругих основаниях и отсутствие в известных источниках работ, посвященных исследованию колебаний конструктивно-нелинейных балок на упругом основании, поставленная в работе задача является актуальной.

Постановка и решение задачи

Упругая балка с изгибной жесткостью EI покоится на упругом винклеровском основании с коэффициентом жесткости k . На внешние слои балки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и реакция основания. Для конкретности задачи принимаем жесткое защемление концов балки. Решение задачи проводится в декартовых координатах, связанных с осью балки: ось x направлена вдоль оси балки, ось y – вверх. Все линейные размеры перемещения отнесены к длине балки L . Предполагается, что в некоторый момент времени часть статически нагруженной балки длиной $L-L_1$ внезапно лишается упругого основания. Искомыми величинами являются: прогибы статические и динамические, частоты и формы собственных изгибных колебаний, внутренние изгибающие моменты.

1. Статический изгиб балки, полностью поддерживаемой упругим основанием

На рис. 1 изображена балка на упругом основании с равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . В безразмерных переменных и параметрах,

$$w_{cm} = \frac{v_{cm}}{L}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{4EI}}; \quad \bar{q} = \frac{qL^3}{EI},$$

где $v_{cm} = v_{cm}(\xi)$ – статический прогиб балки полностью поддерживаемой упругим основанием, уравнение прогибов имеет вид [11]

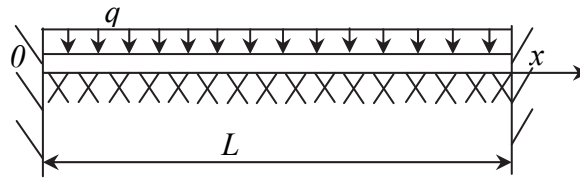


Рис. 1. Балка на упругом основании

$$\frac{d^4 w_{cm}}{d\xi^4} + 4\alpha^4 w_{cm} = \bar{q}. \quad (1.1)$$

Общее решение уравнения (1.1) в случае защемления концов балки [11]

$$w_{cm}(\xi) = \bar{q} \left\{ \frac{1 - R_4(\alpha\xi)}{4\alpha^4} + C_1(\alpha)R_2(\alpha\xi) + C_2(\alpha)R_1(\alpha\xi) \right\}, \quad (1.2)$$

где $C_1(\alpha) = \frac{(R_4(\alpha) - 1)R_2(\alpha) + 4\alpha^4 R_1^2(\alpha)}{R_5(\alpha)}$; $C_2(\alpha) = \frac{(R_4(\alpha) - 1)R_3(\alpha) + 4\alpha^4 R_1(\alpha)R_2(\alpha)}{R_5(\alpha)}$

$$R_1(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi - \cos \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{4\alpha^3}; \quad R_2(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{2\alpha^2}; \quad R_3(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi + \cos \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{2\alpha};$$

$$R_4(\alpha\xi) = \cos \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi; \quad R_5(\alpha\xi) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha\xi - \sin^2 \alpha\xi}{2}.$$

Безразмерный изгибающий момент

$$w_{cm}'' = \bar{q} \{ R_2(\alpha\xi) + C_1(\alpha)R_4(\alpha\xi) + C_2(\alpha)R_3(\alpha\xi) \}. \quad (1.3)$$

Функция (1.2) используется далее как начальное условие динамического процесса, инициированного в системе внезапным частичным или полным разрушением основания.

2. Собственные изгибные колебания балки, частично поддерживаемой упругим основанием.

Рассмотрим собственные изгибные колебания балки, состоящей из двух участков (рис. 2).

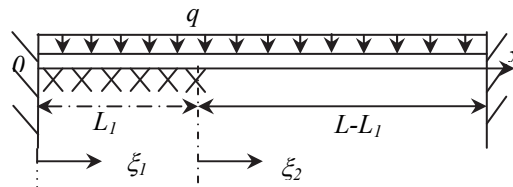


Рис. 2. Балка, частично опертая на упругое основание

Участок, поддерживаемый упругим основанием ($0 \leq \xi_1 \leq v$).

Уравнение собственных изгибных колебаний балки на упругом основании в безразмерных переменных и параметрах имеет вид [11]

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi_1^4} + 4\alpha^4 w_1 + \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

где $w_1 = w_1(\xi_1, \tau)$ – динамический прогиб участка, $\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ – безразмерное время, $v = \frac{L_1}{L}$ – относительная длина поддерживаемого участка балки.

Предполагая колебания гармоническими с частотой $\bar{\omega}$, разделим переменные в уравнении (2.1) представлением

$$w_1(\xi_1, \tau) = W_1(\xi_1) \sin \bar{\omega} \tau, \quad (2.2)$$

где $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ – безразмерная частота.

Подстановкой (2.2) в (2.1) получаем уравнение для форм колебаний данного участка

$$W_1^{IV}(\xi_1) - \beta_1^4 W_1(\xi_1) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\beta_1^4 = \bar{\omega}^2 - 4\alpha^4. \quad (2.4)$$

Введем параметр $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho A}}$, имеющий размерность частоты, названный условной частотой, с которым сравнивается частота ω колебаний исследуемой балки. Тогда возможны следующие 3 случая:

1) Пусть $\omega > \omega_0$, тогда $\beta_1^4 > 0$ и решение уравнения (2.3) принимает вид

$$W_{11} = w_{10}K_{11}(\beta_1\xi) + w'_{10}K_{21}(\beta_1\xi) + w''_{10}K_{31}(\beta_1\xi) + w'''_{10}K_{41}(\beta_1\xi), \quad (2.5)$$

где $w_{10} = w_1(0)$, $w'_{10} = w'_1(0)$, $w''_{10} = w''_1(0)$ и $w'''_{10} = w'''_1(0)$ – начальные параметры 1-го участка;

$$K_{11}(\beta_1\xi) = \frac{sh\beta_1\xi - \sin\beta_1\xi}{2\beta_1^3}; \quad K_{12}(\beta_1\xi) = \frac{ch\beta_1\xi - \cos\beta_1\xi}{2\beta_1^2};$$

$$K_{13}(\beta_1\xi) = \frac{sh\beta_1\xi + \sin\beta_1\xi}{2\beta_1}; \quad K_{14}(\alpha\xi) = \frac{ch\beta_1\xi + \cos\beta_1\xi}{2}.$$

2) Пусть $\omega < \omega_0$, тогда $\beta_1^4 < 0$ и решение уравнения (2.3) принимает вид

$$W_{12} = w_{10}K_{12}(\beta_3\xi) + w'_{10}K_{22}(\beta_3\xi) + w''_{10}K_{32}(\beta_3\xi) + w'''_{10}K_{42}(\beta_3\xi), \quad (2.6)$$

где

$$K_{12}(\beta_3\xi) = \frac{ch\beta_3\xi \sin\beta_3\xi - sh\beta_3\xi \cos\beta_3\xi}{4\beta_3^3}; \quad K_{22}(\beta_3\xi) = \frac{sh\beta_3\xi \sin\beta_3\xi}{2\beta_3^2};$$

$$K_{32}(\beta_3\xi) = \frac{ch\beta_3\xi \sin\beta_3\xi + sh\beta_3\xi \cos\beta_3\xi}{2\beta_3}; \quad K_{42}(\beta_3\xi) = ch\beta_3\xi \cos ch\beta_3\xi;$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{4\alpha^4 - \bar{\omega}^2}.$$

3) Пусть $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho A}}$, тогда $\bar{\omega} = 2\alpha^2$. В этом случае прогибы участка описываются функцией

$$W_{13} = w_{10} + w'_{10}\xi + w''_{10}\frac{\xi^2}{2} + w'''_{10}\frac{\xi^3}{6} \quad (2.7)$$

Участок, оставшийся без поддерживающего основания ($0 \leq \xi_2 \leq 1 - \nu$).

Уравнение собственных колебаний этого участка [12]

$$\frac{d^4 w_2}{d\xi_2^4} + \frac{d^2 w_2}{d\tau^2} = 0. \quad (2.8)$$

Общее решение уравнения

$$W_2^{IV}(\xi_2) - \beta_2^4 W_2(\xi_2) = 0, \quad \beta_2 = \sqrt{\bar{\omega}}, \quad (2.9)$$

полученного из уравнения (2.8) после разделения переменных с помощью представления

$$w_2(\xi_2, \tau) = W_2(\xi_2) \sin \bar{\omega} \tau, \quad (2.10)$$

имеет вид

$$W_2(\xi_2) = w_{20}K_{11}(\beta_2\xi_2) + w'_{20}K_{21}(\beta_2\xi_2) + w''_{20}K_{31}(\beta_2\xi_2) + w'''_{20}K_{41}(\beta_2\xi_2), \quad (2.11)$$

где $w_{20} = w_2(0)$, $w'_{20} = w'_2(0)$, $w''_{20} = w''_2(0)$, $w'''_{20} = w'''_2(0)$ – начальные параметры 2-го участка.

Дальнейшие построения выполним для случая 1) (2.5).

Введем:

– векторы состояния $\bar{W}_i(\xi_i)$ в произвольном сечении i -го ($i = 1, 2$) участка:

$$\bar{W}_i = \{w_i(\xi_i) \ w'_i(\xi_i) \ w''_i(\xi_i) \ w'''_i(\xi_i)\}$$

– функциональные матрицы влияния $\bar{V}_i(\xi_i)$

$$\bar{V}_i(\xi_i) = \begin{pmatrix} K_{41}(\beta_i \xi_i) & K_{31}(\beta_i \xi_i) & K_{21}(\beta_i \xi_i) & K_{11}(\beta_i \xi_i) \\ -4\beta_i^4 K_{11}(\beta_i \xi_i) & K_{41}(\beta_i \xi_i) & K_{31}(\beta_i \xi_i) & K_{21}(\beta_i \xi_i) \\ -4\beta_i^4 K_{21}(\beta_i \xi_i) & -4\beta_i^4 K_{11}(\beta_i \xi_i) & K_{41}(\beta_i \xi_i) & K_{31}(\beta_i \xi_i) \\ -4\beta_i^4 K_{31}(\beta_i \xi_i) & -4\beta_i^4 K_{21}(\beta_i \xi_i) & -4\beta_i^4 K_{11}(\beta_i \xi_i) & K_{41}(\beta_i \xi_i) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

– вектор начальных параметров i -го участка \bar{W}_{i0} : $\bar{W}_{i0} = \{w_{i0} \ w'_{i0} \ w''_{i0} \ w'''_{i0}\}$, тогда состояние на i -м участке описывается матричным уравнением

$$\bar{W}_i(\xi_i) = V_i(\xi_i) \bar{W}_{i0}. \quad (2.13)$$

Из условий сопряжения участков следует $\bar{W}_2(0) = \bar{W}_1(v)$ или, учитывая (2.13), получаем связь между начальными параметрами участков $W_{20} = V_1(v)W_{10}$. Теперь векторы состояния на обоих участках выражаются через одни и те же начальные параметры

$$\bar{W}_1(\xi_1) = V_1(\xi_1) \bar{W}_{10} \text{ и } \bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2) V_1(v) \bar{W}_{10}. \quad (2.14)$$

Для построения частотного уравнения используем граничные условия задачи: защемление концов балки

$$w_{10} = w'_{10} = w_2(1-v, \tau) = w'_2(1-v, \tau) = 0 \text{ или } W_{10} = W'_{10} = W_2(1-v) = W'_2(1-v) = 0 \quad (2.15)$$

Обозначая $v_{mn}(\xi_2, v)$, ($m, n = 1, 2, 3, 4$) элементы матрицы $V_2(\xi_2) V_1(v)$, получим частотное уравнение в виде равного нулю определителя

$$\begin{vmatrix} v_{13}(1-v, v) & v_{14}(1-v, v) \\ v_{23}(1-v, v) & v_{24}(1-v, v) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

На рис. 3 приведены значения первых двух частот в зависимости от параметров: $\bar{\lambda} = 4\alpha^4$

– характеризующего отношение жесткостей балки и основания; $v = \frac{L_1}{L}$ – относительной длины сохранившейся части основания. На рис/ 4 приведены первые две формы собственных колебаний.

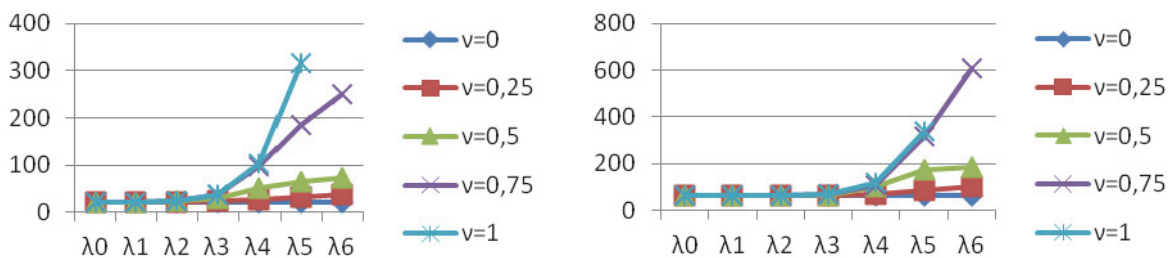


Рис. 3. Первая и вторая частоты изгибных колебаний балки, частично поддерживаемой упругим основанием

3. Вынужденные колебания балки, частично поддерживаемой упругим основанием.

Вынужденные колебания балки, состоящей из двух участков, образовавшихся после частичного разрушения основания, описываются соответствующими неоднородными уравнениями

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi_1^4} + 4\alpha^4 w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = q' \text{ и } \frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi_2^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} = \bar{q}. \quad (3.1)$$

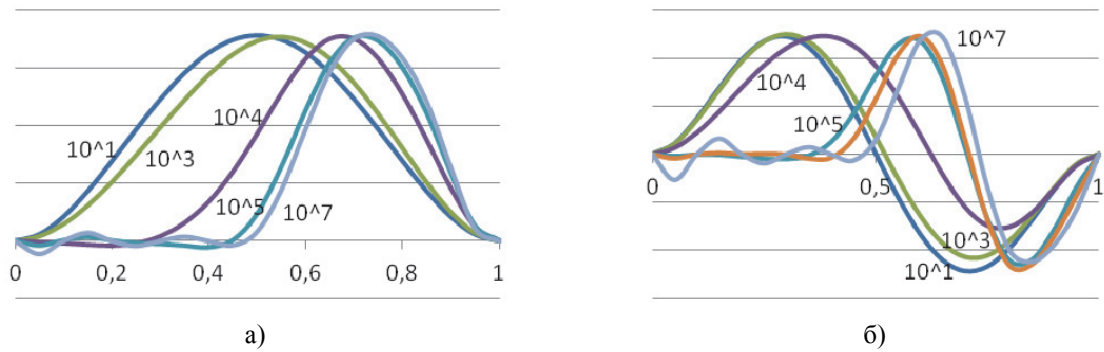


Рис. 4. Формы собственных колебаний балки: а) первая, б) вторая

Раскладываем перемещения $w_i(\xi_i, \tau)$ ($i = 1, 2$) по формам собственных колебаний (2.5) и (2.11) соответственно, с коэффициентами в виде известных функций времени, используя ортогональность форм собственных колебаний, удовлетворяя начальным условиям

$$w_i(\xi_i, 0) = w_{cm}(\xi_i), \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial \tau} \right|_{\xi_i, 0} = 0, \quad (3.2)$$

Получим функции прогибов по участкам [11]

$$w_i(\xi_i, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\int_0^{v_i} w_{cm}(\xi) W_{in}(\xi) d\xi}{\int_0^{v_i} W_{in}^2(\xi) d\xi} \cos \omega_n \tau + \frac{2\bar{q} \int_0^{v_i} (\xi) W_{in}(\xi) d\xi}{\bar{\omega}_n^2 \int_0^{v_i} W_{in}^2(\xi) d\xi} \sin^2 \frac{\omega_n \tau}{2} \right] W_{in}(\xi), \quad (3.3)$$

где $v_1 = v$, $v_2 = 1 - v$.

Числовой пример

Железобетонная балка длиной $L = 6,7$ м, прямоугольного поперечного сечения со сторонами: ширина $b = 0,25$ м, высота $h = 0,18$ м. Момент инерции поперечного сечения $I = 1,215 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$. Модуль Юнга материала балки $E = 3,05 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Материал основания – балластный слой щебня с модулем $K_1 = 75$ МПа. Коэффициент постели $K = K_1 b = 18,75 \cdot 10^6$ Па. Параметр $\bar{\lambda} = \frac{KL^4}{EI} \approx 10^4$. Концы балки жестко защемлены. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = 13,5$ кН/м (кирпичная стена высотой 3 м, длиной 6,7 м, толщиной 0,25 м, удельный вес материала 18 кН/м^3).

В исходном (неповрежденном) состоянии максимальный изгибающий момент $\bar{M}_{\max 0} = 0,099\bar{q}$, $\bar{M} = \frac{ML}{EI}$, $\bar{q} = \frac{qL^3}{EI}$. Нормальное напряжение $\sigma_0 = 39 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. В таблице 1 содержатся коэффициенты $K_{\text{кв.ст.}} = \frac{M_{\text{кв.ст.}}}{M_{\text{ст.}}}$ и $K_{\text{дин.ст.}} = \frac{M_{\text{дин.ст.}}}{M_{\text{ст.}}}$ возрастания максимального изгибающего момента в балке при разной степени соответственно квазистатического и внезапного повреждения основания.

Таблица 1

степень повреждения $1 - v$	1	0,75	0,5	0,25	0
квазистатическое, $K_{\text{кв.ст.}}$	1	1,41	3,53	6,56	8,33
внезапное, $K_{\text{дин.ст.}}$	1	1,57	4,52	11,29	14,53

Заключение

Получены зависимости между параметрами повреждения основания и уровнями приращений деформаций и внутренних силовых факторов балки в характерных точках рассматриваемой конструкции при трех состояниях: исходном неповрежденном, поврежденном квазистатически и поврежденном мгновенно.

Результаты расчетов показывают многократные увеличения развивающихся напряжений при внезапном разрушении основания, что необходимо учитывать при проектировании подобных конструкций.

Работа выполнена в рамках госзаказа НИИР №283.

Литература

1. Гордон В.А. К анализу динамических явлений в стержнях, инициируемых внезапными структурными перестройками / Успехи строит. мех. и теор. сооружений Сб. научн. ст. к 75-летию В.В. Петрова, Саратов: 2010, С. 51-57.
2. Гордон В.А. Математическое моделирование динамических процессов в стержневых системах при внезапных изменениях их структуры / В.А. Гордон, В.И. Бруслова, Э.А. Кравцова, Т.В. Потураева // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2010, № 5(283), с. 3-9.
3. Doyle, P.E. Vibration of beams on partial elastic foundation / P.E. Doyle, M.N. Pavlovic // Earthquake engineering and structural dynamic. Vol. 10. – 1982. – p.p. 663-674.
4. Eisenberger, M. Vibration of beams fully or partially supported on elastic foundation / M. Eisenberger, D.Z. Yankelensky, M.A. Adin // Earthquake engineering and structural dynamic. Vol. 13. – 1985. – p.p. 651-660.
5. Valsangkar, A.J. Free vibration on partially supported piles / A.J. Valsangkar, R.B. Pradhanang // journal of engineering mechanics, V. 113, N 8, pp 1244-1247, 1987.
6. Lee B.K. Free vibrations on tapered piles embedded partially in Winkeer type foundation / B.K. Lee, J.S. Jeong, L.G. Fan, T.K. Jin// KSCE journal of civil engineering, v.3, N2, pp, 195-203, 1999.
7. Catal, H.H. Free vibration of partially supported piles with the effects of bending moment, axial, and shear force / H.H. Catal // Engineering structures, 24, pp. 1615-1622, 2002.
8. Sapountzakis, E.J. Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-column partially supported on tensionless Winkler foundation/ E.J. Sapountzakis, A.E. Kampitis // Computer and structures, 88. Pp 1206-1219, 2010.
9. Motaghian, S.E. Exact solution to free vibration of beams partially supported by an elastic foundation / S.E. Motaghian, M. Mofid, P. Alanjari // Scientia Iranica A, 18(4), 2011, p.p. 861-866.
10. Cassani, A On the dynamics of a beam partially supported by an elastic foundation: an exact solution-set /A. Cassani // International Journal of structural stability and dynamics. V.13, N8, 1350045 (30 pages), 2013.
11. Гордон, В.А. Динамические догружения балки при повреждении упругого основания / В.А. Гордон, Т.В. Потураева, Е.В. Брума // Строительство и восстановление искусственных сооружений: Материалы международной научно-практической конференции. В 2 ч. Ч.1. – Гомель: БелГУТ, 2015. – С. 9-20.
12. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3-х томах. – Т.3. – М.: Изд-во «Машиностроение», 1968. – 568 с.

УДК 375

ПОВЫШЕНИЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС МЕТОДОМ АМОРФИЗАЦИИ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.И. Гультяев, И.Л. Абрамов

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, vig0@mail.ru

Аннотация. Широкое распространение зубчатых передач, используемых практически во всех машинах и механизмах, в условиях повышения эксплуатационных нагрузок и скоростей выдвигает на первый план требование необходимости повышения механических характеристик прочности и пластичности материалов, применяемых при изготовлении зубчатых колес.

Ключевые слова: Прочность, пластичность, предел текучести, технологический и производственный процесс, структура поверхности, микротвердость

Требование об одновременном повышении характеристик прочности и пластичности может быть выполнено только при использовании широкого спектра конструкторско-технологических мероприятий следующих видов:

- увеличением стабильности структуры материала;
- повышением характеристик статической и циклической прочности;
- снижением шероховатости контактных поверхностей;
- повышением твердости поверхностных слоев;
- способностью выравнивать давление по пятну контакта.

Следует сказать, что и производственный, и технологический процессы изготовления зубчатых колес весьма глубоко проработаны и поэтому даже незначительные изменения в существующих технологических процессах изготовления зубчатых колес потребуют материально-технических затрат. По этой причине модернизация рассматриваемых технологических процессов возможна лишь на уровне дополнения их некоторыми инновационными операциями, которые не требуют серьезной перестройки производства.

Известно [1-3], что механические характеристики материалов можно повысить, используя следующие методы: термическая обработка; термомеханическая обработка; поверхностное упрочнение. С появлением технологических лазерных методов (лазерная закалка и лазерная обработка с оплавлением и последующим сверхбыстрым охлаждением) стало возможным одновременное существенное повышение и характеристик прочности, и характеристик пластичности материалов (стали 40X и 12ХН3А), используемых для изготовления зубчатых колес. Особенно важным фактором при эксплуатации зубчатых зацеплений является то, чтобы при контакте колес в случае достижения контактным давлением величин, превышающих предел текучести материала поверхностного слоя, в зонах пластических деформаций не образовывались микротрещины, а в работу бы включались соседние зоны пятна контакта. Тогда эпюра напряжений принимает вид сглаженной кривой по всей поверхности контактной зоны.

Такой материал не должен быть кристаллической структуры, то есть должен быть аморфным, либо иметь аморфное поверхностное покрытие, полученное описанным ниже методом обработки на рабочей поверхности зубчатого колеса [4].

Исходя из сказанного, был предложен (Патент РФ № 2113506 от 20 июня 1998 г) способ получения аморфного покрытия, который заключался в предварительном охлаждении обрабатываемой детали, обработке ее поверхности лазерным лучом в режиме оплавления в воздушной среде и последующего охлаждения со сверхвысокой скоростью в среде жидкого азота. На рис.1 представлен общий схематический вид полупромышленной установки для получения аморфного композиционного слоя на наружных рабочих поверхностях зубчатых колес, изготовленных из сталей 12ХН3А и 40X с модулем 2 мм, количеством зубьев 24 шт. и шириной зубчатого венца 11 мм.

Установка для реализации предложенного способа состоит из лазерного устройства, включающего источник излучения 1, фокусирующую головку 2, обрабатываемую деталь 3, устройство для закрепления и вращения детали 4 и ванну с технологической средой 5.

Основная сложность заключалась в обеспечении работы системы управления несколькими факторами (скорость вращения обрабатываемого объекта, синхронное движение фокусирующей головки и постоянство затрагиваемой поверхности операцией обработки). Это потребовало создания привода с тремя степенями свободы, что в реализуемых условиях обеспечения нужной скорости охлаждения представляло сложную инженерную задачу.

Работа установки заключалась в следующем. Обрабатываемую деталь устанавливали в ванне, заполненной технологической средой (в качестве таковой использовали жидкий азот) так, чтобы часть заготовки (поверхность А на рис. 1) находилась над жидкостью. Заготовке придавали вращательное движение ($n = 1$ об/мин) при помощи устройства 4.

После включения источника лазерного излучения фокусирующей головке 2 обеспечивали поступательное перемещение вдоль поверхности зуба колеса. Таким образом, зона оплавления, создаваемая лазерным лучом, практически мгновенно переходит в зону охлаждения жидким азотом, стабилизируя аморфное состояние материала зубчатого колеса при низкой и нормальной температурах.

Экспериментально было установлено, что при толщине покрытия 0,15...0,20 мм сопротивляемость пластическим деформациям аморфизированного слоя уже достаточно велика. Это является следствием того, что касательные напряжения, возникающие в процессе контактного трения, не превышают в рассматриваемом случае предельно допустимых значений предела текучести при сдвиге [5].

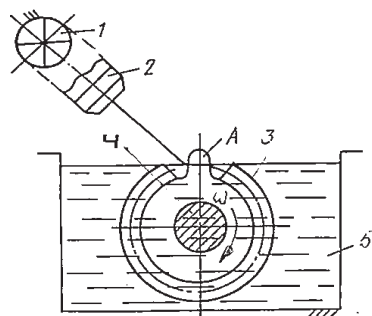


Рис. 1. Конструктивная схема полупромышленной установки для получения аморфного слоя на наружной поверхности зубчатого колеса

Основные параметры обработки и одна из основных эксплуатационных характеристик (микротвердость) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Марка стали	Способ термической обработки	Технологические параметры обработки	Микротвердость обработанных поверхностей, МПа
12ХН3А ГОСТ 7574-88	Закалка +отпуск	$T = 840\text{ }^{\circ}\text{C}$, среда масло МГА-10А ГОСТ 14280-68 $T_{\text{отп}} = 120-150\text{ }^{\circ}\text{C}$	4500...4600
12ХН3А ГОСТ 7574-88	Лазерная обработка с оплавлением	$P = 10^9\text{ Вт/м}^2$, $V = 1,0\text{ см/с}$, среда – жидкий азот	5400...5600
40Х ГОСТ 1050-88	Закалка +отпуск	$T = 1050\text{ }^{\circ}\text{C}$, среда масло МГА-10А ГОСТ 14280-68 $T_{\text{отп}} = 120-150\text{ }^{\circ}\text{C}$	8200...8500
40Х ГОСТ 1050-88	Лазерная обработка с оплавлением	$P = 10^9\text{ Вт/м}^2$, $V = 0,9\text{ см/с}$, среда – жидкий азот	10100...11200

Микрофотографии структур поверхностей, обработанных по различным технологическим схемам приведены на рис. 2.

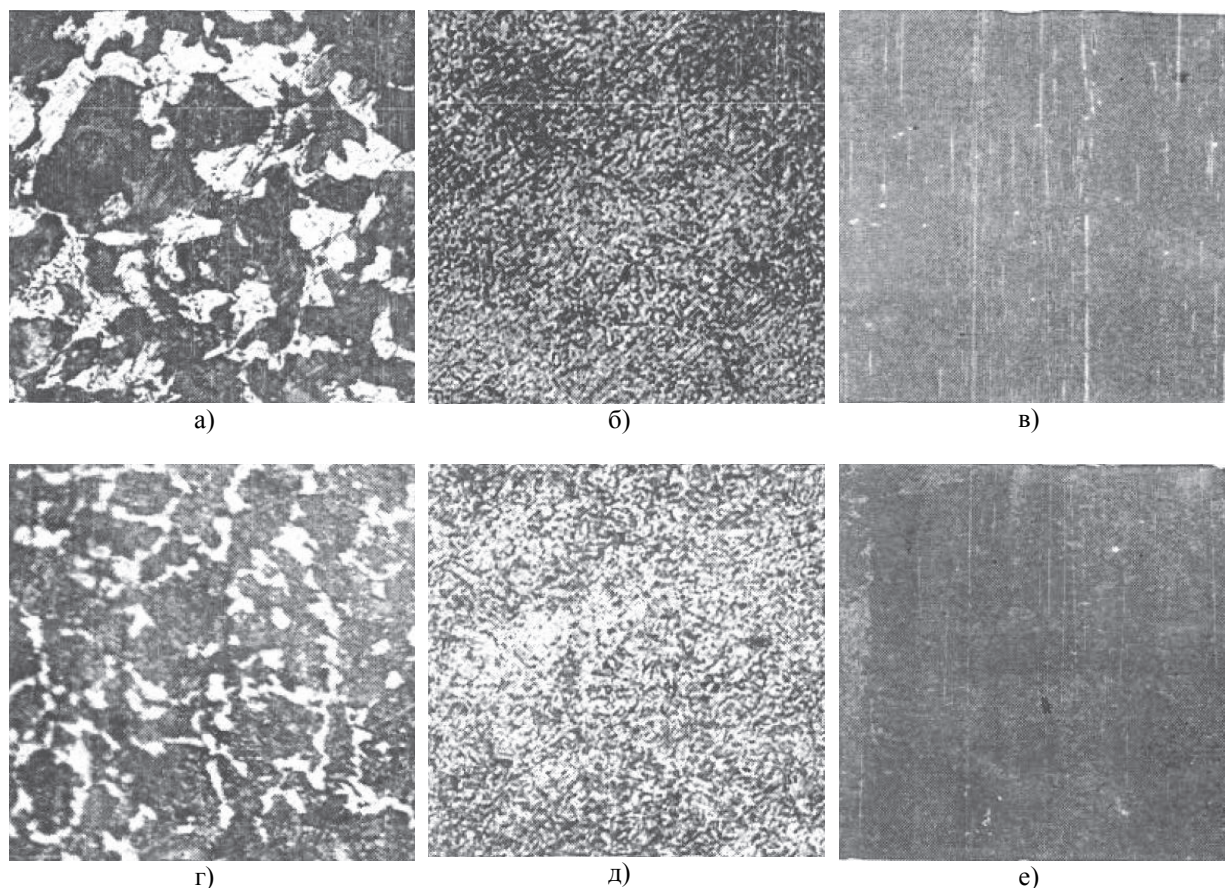


Рис. 2. Микроструктура поверхности стали 12ХН3А: (а) – необработанная, б) – закалка+отпуск, в) – аморфизированная); микроструктура поверхности стали 40Х: (г) – необработанная, д)– закалка+отпуск, е) – аморфизированная); масштаб 1: 20000

Таким образом, на основании данных микрофотографий и измерений микротвердости поверхности обработанных шестерен, можно сделать вывод о том, что на поверхности детали создан слой аморфного материала.

Для проверки эксплуатационных свойств покрытия, полученного по описанной выше методике, обработке были подвергнуты рабочие поверхности шестерен второй передачи мотоцикла «Сова». Стендовые и эксплуатационные испытания показали, что долговечности шестерни возросла почти в 2 раза [6].

Литература

1. З.М. Левина, Д.И. Решетов. Контактная жесткость машин // М.: Машиностроение, 1971, – 264 с.
2. И.В. Крагельский, И.Э. Виноградова. Коэффициенты трения // М.: Машгиз, 1962, – 220 с.
3. В.И. Гольдфарб и др. Спироидные редукторы трубопроводной арматуры // М.: Вече, 2011. – 222 с.
4. В.М. Александров, Б.Л. Ромалис. Контактные задачи в машиностроении // М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
5. К. Судзуки, Х. Фудзимори, К. Хасимото. Аморфные материалы // Пер. с яп., М.: Металлургия, 1987. – 328 с.
6. Л.М. Абрамов, Ф.Л. Хмурович, И.Л. Абрамов. Исследование механических свойств аморфных композиционных материалов при объемных напряженных состояниях // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета, 2010. №1. С. 29-30.

УДК 620.666.97

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОУПРУГОСТИ НА ДЕФОРМАТИВНОСТЬ БЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИЗГИБЕ

В.И. Гультяев¹, И.Л. Абрамов², М.А. Галкина³

¹Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, vig0@mail.ru,

²ООО «Принтбокс», Тверь, Россия, vadimabratov30@mail.ru,

³Костромская государственная сельскохозяйственная академия,

Кострома, Россия, aviapetra@mail.ru

Аннотация. За базовую величину для расчетов принимается величина E_b (начальный модуль упругости, определяемый по ГОСТ 24452-81). Однако при изгибе балок картина деформирования существенно отличается от картины деформирования элемента, формально нагруженного как при одноосном сжатии. Для установления необходимых деформационных критериев следует определять модули упругости при растяжении, что требует постановки точного эксперимента. Выполненный анализ схем разрушения строительных элементов при различных видах нагружения (растяжение, сжатие, изгиб) позволил сделать вывод, что для количественной оценки явления образования трещин следует использовать линейные растягивающие деформации, как основные критерии трещинообразования.

Ключевые слова: испытание, сопротивление, сжатие, перемещение, напряжение, анализ.

Нормативные документы [1] рекомендуют при расчете по 2-ой группе предельных состояний (расчеты на раскрытие трещин и на деформативность) в качестве одной из упругих характеристик бетона использовать модуль деформации (E_{bl}), определяемый по формулам:

– при непродолжительном действии нагрузки

$$E_{bl} = 0,85E_b; \quad (1)$$

– при продолжительном действии нагрузки

$$E_{bl} = \frac{E_b}{1 + \phi_{b,cr}}. \quad (2)$$

В каждом из рассмотренных вариантов базовой величиной для расчетов является величина E_b (начальный модуль упругости, определяемый по ГОСТ 24452-81). Однако при изгибе балок картина деформирования существенно отличается от картины деформирования элемента, формально нагруженного как при одноосном сжатии (рис. 1, а, б).

При чистом одноосном сжатии (рис. 1, а) поперечное сечение стержня деформируется, практически мало изменяя форму, то есть квадратное сечение остается квадратным.

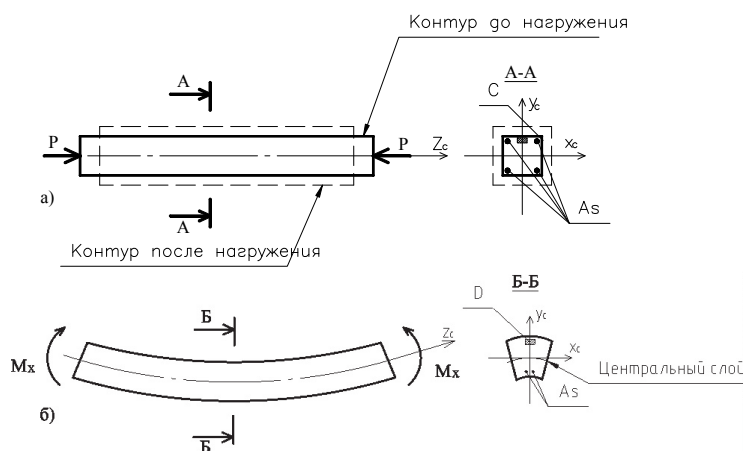


Рис. 1. Схема деформирования бетонного элемента при сжатии (а) и при изгибе (б)

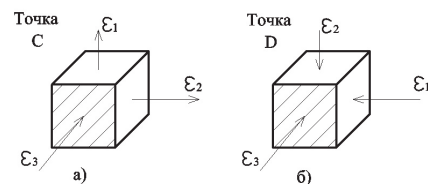


Рис. 2. Схемы деформированных состояний в опасных точках произвольных сечений

При чистом и плоском изгибе (рис. 1б) форма поперечного сечения изменяется существенно. Так в сжатой зоне поперечное сечение увеличивает свои размеры, а в растянутой - размеры уменьшаются. Если рассмотреть деформированное состояние в точках С и D элементов (рис. 1 а, б) то в точке С (рис. 2а) будет иметь место одноосное сжатие и двухосное растяжение (без учета сил трения по торцам бесконечно малого элемента, т. е. без учета сдвиговых деформаций). В точке D будет иметь место двухосное сжатие с одноосным растяжением (рис. 2б), за счет которого и происходит увеличение поперечного размера в зоне сжатия.

Известно, что бетон плохо сопротивляется растягивающим деформациям. В частности, СП 52-101-2003 приводит следующие данные для предельных линейных деформаций: $\varepsilon_{b0} = 0,002$ – для осевого сжатия; $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$ – для осевого растяжения. Данные величины характеризуют предельные деформации бетона при непродолжительном действии нагрузки. При продолжительном воздействии разница в значениях также существенна.

Принимая в расчете среднее значение коэффициента Пуассона ($\mu_{b,p} = 0,2$ независимо от класса бетона), несложно подсчитать, что при одноосном сжатии разрушение материала будет происходить по плоскостям, перпендикулярным направлению деформации ε_1 . Такая картина разрушения особенно ярко проявляется при испытаниях на сжатие только тогда, когда усилия трения по торцам испытываемых образцов незначительны. При изгибе трещины должны распространяться также по плоскостям, перпендикулярным направлению ε_1 . По-видимому, именно этим и можно объяснить наличие этих двух видов трещин при рассмотрении внешнего вида зоны разрушения в верхней зоне изгибаемого элемента (рис. 3). Следовательно, наиболее опасным видом нагружения будет такой, при котором имеют место наибольшие линейные деформации (но не напряжения) растяжения.

Поскольку именно деформации растяжения являются определяющими с точки зрения прочности и деформативности, то, соответственно, второй определяющей деформационной характеристикой следует считать начальный модуль упругости бетона при растяжении, поскольку для расчета деформации он необходим.

Строительные правила СП 52-101-2003 рекомендуют принимать равными величины начальных модулей упругости при сжатии и растяжении, полагая их зависимыми только от класса бетона. Начальный модуль упругости при сжатии определяют при текущих значениях напряжений в виде [2]:

$$E_{\sigma} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_{1y}}, \quad (3)$$

где $\sigma_1 = P_1 / F$ – приращение напряжения от условного нуля до уровня внешней нагрузки, равной 30% от разрушающей; P_1 – соответственно нагрузка при напряжении σ_1 ; ε_{1y} – мгновенная упругая деформация при напряжении σ_1 ; F – площадь поперечного сечения испытываемого образца.

Если определить деформацию для бетона В30 на уровне напряжения $\sigma_1 = 0,3R_{b,n}$, то полученное значение будет равно $\varepsilon_1 = 0,0003$ (при модуле упругости $E_b = 32,5 \cdot 10^{-3}$ МПа), что примерно в 3 раза больше, чем предельная деформация при растяжении ε_{bt0} . То есть начальные модули упругости при растяжении и сжатии могут быть определены только на существенно различных уровнях линейной деформации, причем величины этих уровней имеет разный порядок. Если же говорить об условных начальных модулях, т. е. определенных в начале координат, то можно предположить, что кривые деформирования бетона не имеют особых точек на границе “растяжение - сжатие” (рис. 4).

При рассмотрении рис. 4 следует отметить, во-первых, что касательная 1-1 к обеим функциям, определяющим диаграммы деформирования при растяжении и сжатии, проведенная в начале координат, является общей. Во-вторых, углы α_b и α_{bt} , как исходные величины для подсчета E_b и E_{bt} , различны. Наконец, в-третьих, модуль упругости при растяжении, который согласно ГОСТ 24452-81 следует определять на том же уровне деформаций, что и при сжатии, практически найти невозможно, так как нахождение его должно быть выполнено в рамках упругих деформаций.

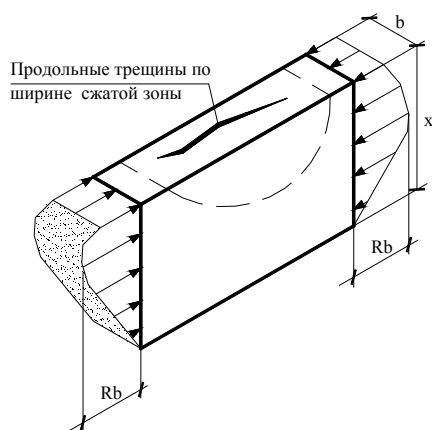


Рис. 3. Сжатая зона бетона при чистом изгибе железобетонного элемента

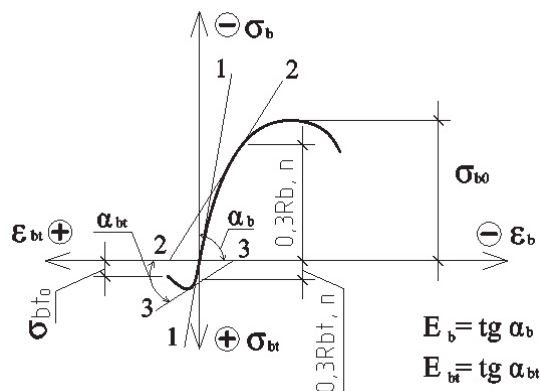


Рис. 4. Схема определения модулей продольной упругости бетона при сжатии и растяжении

Таким образом, модули упругости при растяжении и сжатии (E_b и E_{bt}) существенно различны, причем, $E_{bt} \ll E_b$, что собственно и определяет значительную разницу в величинах E_{bt0} и E_{b0} . По этой причине при экспериментальном определении модулей упругости для E_{bt} следует использовать измерительную аппаратуру, позволяющую измерять перемещения с большей точностью, чем при сжатии, вследствие малости деформаций растяжения. Аппаратура для измерения таких величин основана на оптических эффектах (дифракция, интерференция) и потому достаточно сложна. В настоящее время существуют лазерные дифрактометры, позволяющие с достаточной точностью определять весьма малые размеры.

Однако принятие условного равенства модулей, вследствие сложности постановки эксперимента, едва ли можно считать обоснованным. Следовательно, для установления необходимых, с точки зрения расчета на деформативность, деформационных критериев следует определять модули упругости при растяжении, что требует постановки точного эксперимента.

Таким образом, выполненный анализ схем разрушения строительных элементов при различных видах нагружения (растяжение, сжатие, изгиб) позволил сделать следующие выводы:

- 1) для количественной оценки явления образования трещин следует использовать линейные растягивающие деформации, как основные критерии трещинообразования;
- 2) необходимые для расчетов величины модулей начальной упругости при растяжении нерационально считать равными модулями при сжатии;
- 3) эксперименты по определению модулей упругости при растяжении требуют дополнительной детальной отработки.

Исходя из сказанного, постановку определяющего эксперимента для решения поставленной задачи следует считать необходимой и актуальной.

Литература

1. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Актуализированная редакция. М.: Росстандарт. – 2011. – 241 с.
2. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методы определения призмочной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона. М.: Стандартинформ. – 2005. – с. 12.
3. Абрамов, Л. М. Анализ напряженно-деформированного состояния в области трещины при хрупком разрушении бетона / Л. М. Абрамов [и др.] // Бетон и железобетон. – 2012. - №5. – с. 6-8.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ СОВРЕМЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ИСПЫТАТЕЛЬНОМ КОМПЛЕКСЕ СЧ-ЭВМ

В.И. Гультяев, О.Г. Лазарев, В.Н. Ведерников

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, vig0@mail.ru

Аннотация. Исследование закономерностей упруго-пластического деформирования и прочности материалов, их механических свойств при сложном напряженном состоянии и нагружении является важнейшей актуальной задачей механики деформируемого твердого тела. Для проведения испытаний на сложное нагружение на цилиндрических образцах использовался испытательный комплекс СЧ-ЭВМ.

Ключевые слова: испытательный комплекс СЧ-ЭВМ, деформации, напряжения, сложное нагружение, цилиндрические образцы, внутреннее давление.

1. Введение

Многие конструкции работают в условиях сложного нагружения, в связи с чем, в конструкциях возникают напряжения, превосходящие предел текучести. В настоящее время в строительстве и машиностроении характерным является увеличение интенсивности нагрузок на конструкции, и соответственно, появление упругопластических деформаций. Применение оболочечных конструкций в авиации, космонавтике, строительных сооружениях и машиностроении ставит задачу исследования упругопластического поведения материалов в ряд наиболее важных [1].

2. Оборудование испытательного комплекса

Для проведения экспериментальных исследований пластичности при сложном нагружении на испытательном комплексе СЧ-ЭВМ (рис. 1) [4] используются цилиндрические трубчатые образцы (рис. 2). Они подвергались экспериментальному исследованию напряженно-деформированного состояния при растяжении с кручением и внутренним давлением в пространстве деформаций и напряжений. Обмен образцов производится при помощи микрометра МК-50 ГОСТ 6507-78 (допускаемая погрешность 0,004мм). Имеется также специальное приспособление для замера толщины стенки образца.



Рис.1

Автоматизированный экспериментальный комплекс состоит из нагружающей установки, реализующей трехпараметрическое воздействие на образец (осевое нагружение, кручение и внутреннее давление), датчиков усилий и деформаций, измерительных преобразователей

сигналов датчиков, аналого-цифрового комплекса (АЦК), система графического отображения информации (монитор ЭВМ), управляющей ЭВМ с устройством связи и блока управления.

3. Тензометр для измерения деформаций и образцы

В качестве средства для измерения деформаций служит дифференциальный тензометр, состоящий из двух параллельных частей: базы и вращающейся части, крепящихся иглами на образце; гибких элементов, с наклеенными на них тензорезисторами, упоров. Дифференциальный тензометр [2] относится к приборам повышенной сложности и позволяет измерять продольные, угловые и окружные деформации с использованием датчика перемещений трансформаторного типа (рис. 3). Взаимное перемещение двух сечений образца относительно друг друга фиксируется тензометрическими преобразователями через упругие элементы, что позволяет производить измерения продольной деформации независимо от угловой. Результаты тарировочных испытаний показывают, что тензометр обладает высокой чувствительностью, отсутствием ложного сигнала при сезонных колебаниях температуры, достаточной точностью. Соосность внутренней и наружной поверхностей дифференциального тензометра и образца достигается за счет шести секторов, которые перед испытанием удаляются. Точность по осевым перемещениям составляет 1/10 мм и углу поворота 1/10 рад.



Рис. 2

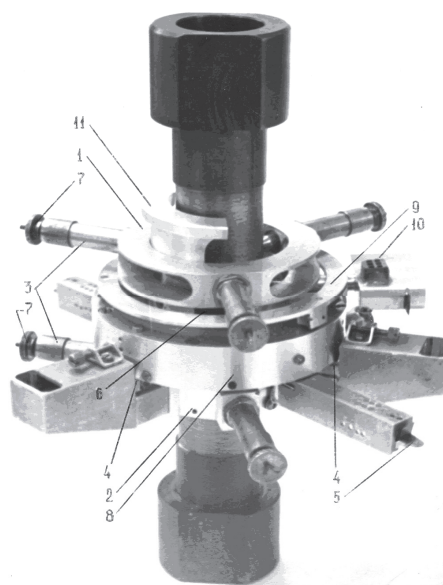


Рис. 3

При нагружении образца внутренним давлением обычно герметизируют его торцы пробками. При этом возникает дополнительное усилие растяжения, которое усложняет управление экспериментом и снижает точность. Для исключения этого явления на установке СН применяется приспособление в виде сплошного цилиндрического сердечника с герметизирующими элементами на концах (рис. 4).



Рис. 4

При помощи дифференциального тензометра осевое удлинение образца на базе $50 \pm 0,1$ мм измеряется с погрешностью не более $\pm 8-10$ мкм, угла поворота $\pm 9-10$ рад, изменение радиуса оболочки 3–10 мм. Диапазон работы устройства: осевое перемещение ± 2 мм, угол поворота 0,25 рад, радиальное перемещение 0,6 мм. Единица цифровой регистрации деформации 4 - 10 на всей шкале и 10% начала диапазона 4 - 10. Погрешности измерения являются следствием линейной аппроксимации собственных характеристик тензометров.

Включение в систему управления экспериментом ЭВМ с устройством сопряжения с СН-ЭВМ достаточно упрощает подготовку и проведение опыта. На первом этапе определяются размеры трубки, устанавливается на образец тензометр и датчик поперечных деформаций. На втором - вводится в ЭВМ исследуемая траектория и скорость нагружения или деформирования, которая в процессе эксперимента может изменяться. Далее контролируется правильность ввода исходных данных: для этого на мониторе ЭВМ вычерчивается заданная траектория при подготовке программы управления с увеличенной скоростью нагружения. Образец устанавливается в захваты приспособления машины и осуществляется старт программы испытания. По окончании опыта получают распечатку на ЭВМ в редакторе EXCEL в виде таблиц данных.

Программная часть ЭВМ обеспечивает выполнение функций формирования исходных данных для управления и условий реализации алгоритма задания траектории нагружения, сбор и обработку измерительной информации о ходе эксперимента, реализацию функций регулятора системы автоматического управления, обработку внешнего изменения условий и параметров процесса нагружения, тактирование работы во времени (функция таймера) [3].

Результаты экспериментальных исследований открывают возможность для построения новых и проверки достоверности существующих математических моделей теории пластичности [5, 6].

Литература

1. Закономерности пластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении: диссертация ... доктора технических наук: 01.02.04 / Гуляев Вадим Иванович; ГОУ ВПО "Тверской государственный технический университет" - Тверь, 2012 - 357 с.
2. Патент на полезную модель №13092 от 27.09.1999. Гараников В.В., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Устройство для измерения деформаций при сложном нагружении. МПК: G01B 7/16.
3. Зубчанинов, В.Г. Механика сплошных деформируемых сред / В.Г.Зубчанинов// Тверь: ТГТУ, 2000. – 703с.
4. Зубчанинов, В.Г. Автоматизированный комплекс для исследования упруговязкопластических свойств материалов при сложном нагружении / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, А.В. Акимов // Решение о выдаче свидетельства на полезную модель. М.: ВНИИГПЭ, 1997.- №97108023/20(008702).
5. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 2. С. 113-123.
6. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гуляев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18-25.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛАТУНИ ДЛЯ ДВУЗВЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

А.С. Двужилов, В.Г. Зубчанинов, В.И. Гультяев*Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, vig0@mail.ru*

Аннотация. Использована математическая модель пластического деформирования материалов для плоских двухзвенных траекторий. Получены численные решения основных уравнений задачи Коши с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Показана достоверность полученных решений теории процессов путем сравнения с экспериментальными данными для латуни Л63.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, деформирование, процессы, модель, автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ.

1. Основные уравнения математической модели в плоских задачах

Используется математическая модель теории процессов в форме, предложенной в [1] для плоских задач. Основные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} &= M_1 \frac{d\vartheta}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cdot \cos \vartheta_1 \right), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} &= -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где s – длина дуги траектории деформирования в девятиорном векторном пространстве А.А. Ильюшина [2];

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\vartheta} = \vartheta_k \hat{i}_k \quad (k=1,2,3), \quad (1.2)$$

где S_k, ϑ_k – их координаты, ϑ_1 – угол сближения вектора $\bar{\sigma}$ с касательной траектории деформирования. Для определения функционалов процесса M_1, σ для гладких траекторий использованы аппроксимации [1]:

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p)f^q, \quad f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad (1.3)$$

$$\sigma = \Phi(s) = \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_* (1 - e^{-\beta \Delta s}), \quad (1.4)$$

где G, G_p – модули упругого и пластического сдвига.

После излома в некоторой точке K на диаграмме деформирования прослеживаются «нырки» напряжений. Для описания процессов частичной разгрузки и последующего активного процесса используются аппроксимации [1]:

$$\sigma = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s), \quad (1.5)$$

где

$$\Omega(\Delta s) = -\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s}). \quad (1.6)$$

Параметры $q, \sigma^T, G_*, \sigma_*, \beta, \Omega(\Delta s)$ определяются из базовых опытов по типу центрального веера из лучевых траекторий и траекторий типа веера.

Использование данной математической модели дало достоверные результаты при описании процессов упругопластического деформирования малоуглеродистой стали по ломаным траекториям с большими углами излома [3, 4]. При дополнительном учете кривизны траектории деформирования в (1.5) расчетные результаты хорошо согласуются с данными экспериментов при описании участков криволинейных траекторий постоянной кривизны [5, 6].

2. Экспериментальное исследование на испытательном комплексе СН-ЭВМ

Экспериментальное исследование проводилось на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Трубчатый образец из латуни Л63 испытывался по двухзвенной траектории в пространстве деформаций, представленной на рис. 1. На первом звене образец подвергался

растяжению до точки K_1 , где компоненты вектора деформаций $\varepsilon_1 = 3\%$, $\varepsilon_3 = 0$. Затем производился излом траектории на угол 135° . На втором звене ломанной траектории наблюдалось свойство запаздывания векторных свойств материала.

После излома траектории при напряжении σ_k^T имели место «нырки» на диаграмме $\sigma - S$ и $\sigma - \varepsilon$ (рис. 3, 4). Ниспадающая часть «нырка» соответствует частичной упругой сложной разгрузке до минимального значения напряжения σ_{BT}^T , при котором происходит «протыкание» предельной поверхности и возникают вторичные пластические деформации. Напряжение σ_{BT}^T может быть названо *вторичным пределом текучести* [1].

Соответствующий отклик на программу испытаний представлен в плоскости S_1S_3 векторного пространства напряжений (рис. 2). Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - \varepsilon$ представлена на рис. 3 с указанием характерных точек. На этом рисунке ясно видно образование обратных нырков сложной разгрузки.

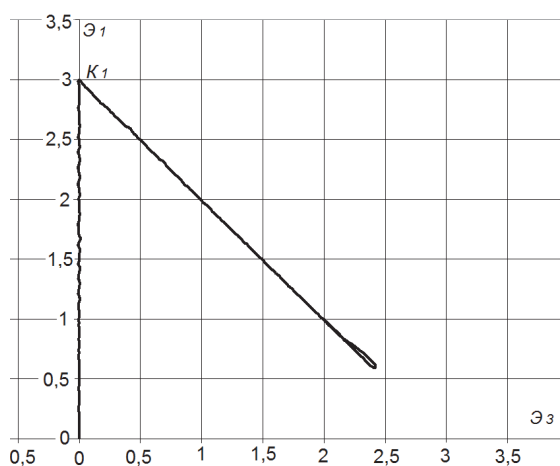


Рис. 1. Двухзвенная траектория деформирования

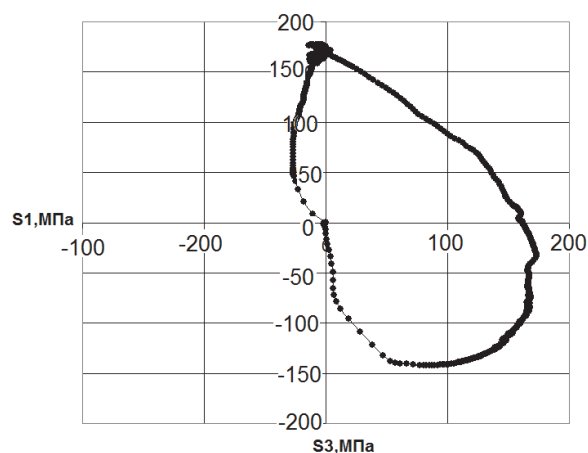


Рис. 2. Отклик на программу испытаний

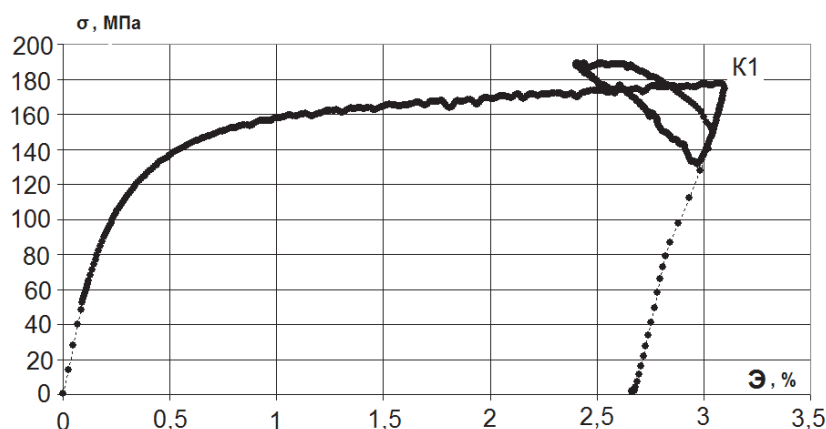


Рис. 3. Глобальная диаграмма деформирования

Основные уравнения модели при заданных начальных условиях представляют собой задачу Коши. Для ее решения использован численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

На рис. 4 представлены расчетные и экспериментальные результаты испытания образцов на растяжение и по представленной на рис. 1 двухзвенной траектории.

На рис. 5 представлены кривые изменения угла излома ϑ_1 от приращения $\Delta s = s - s_0$ длины дуги траектории s .

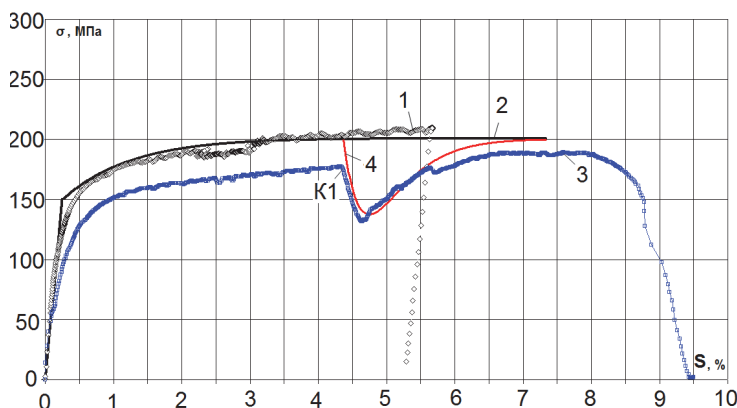


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные результаты: 1 – экспериментальная диаграмма растяжения; 2 – ее аппроксимация; 3 – экспериментальная диаграмма прослеживания процесса $\sigma = \sigma(\vartheta) \approx \Phi(s)$; 4 – расчетная кривая для математической модели без учета ползучести

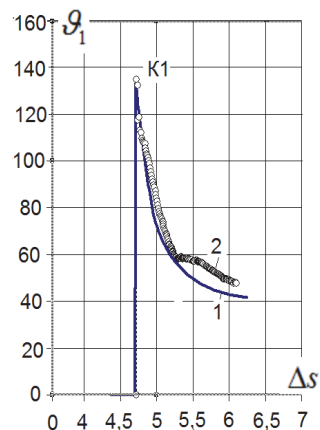


Рис.5. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$: 1 – расчет угла сближения двухзвенной ломаной траектории 2 – эксперимент

Как видно, сравнение расчетных данных для модели с экспериментом обнаружило их существенную зависимость от ползучести материала.

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
2. Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.
3. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2014. Вып. 76. Ч. 1. С. 18-25.
4. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Математическое моделирование упругопластического деформирования стали по прямолинейным ломаным траекториям // Математическое моделирование в естественных науках. 2014. Т. 1. С. 9-12.
5. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Алексеева Е.Г.. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Materials Physics and Mechanics (MPM). № 2, Vol. 24, 2015, pp. 107-118.
6. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. Ч 2. С. 113-123.

УДК 620.173.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ВИНТОВОМ ОБЖАТИИ С ПОМОЩЬЮ ОБЪЕМНОЙ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ

В.Б. Дементьев

*Институт механики Уральского отделения РАН, Ижевск, Россия,
deten@udman.ru*

Аннотация. Разработана методика на основе образцов с объемной координатной сеткой, выполненной из конструкционных материалов Ст 30ХГСА и Ст 15 с чередованием через 60° по диаметру по каждому слою, что позволяет деформировать их как сплошной образец. Проведенные эксперименты позволили определить численные значения деформаций по объему очага деформации, главные и предельные деформации процесса винтового обжатия при ВТМО.

Ключевые слова: конструкционные материалы, технология, деформированное состояние, структура материала, цилиндрические заготовки.

Распространенные методы исследования объемно-деформированного состояния с помощью координатных сеток [1] имеют следующие существенные недостатки: невысокую точность изготовления и сборки элементов сетки (из-за прогиба пластин, достигающего больших значений при использовании модельных материалов, а также перекосов при сборке отдельных элементов в образец) [2]; трудоемкость в сборе и изготовлении элементов сетки [3].

Для исключения этих недостатков были разработаны новые методики исследования деформированного состояния методом стержней [4] и с помощью объемной координатной сетки, выполненной из конструкционных материалов [5].

Технология получения образцов с объемной координатной сеткой заключается в следующем. Цилиндры разных диаметров, выполненные из металлов близких по своим физико-механическим свойствам, но различным по травимости, собирают в пакет, а в продольные канавки, нанесенные на наружной поверхности каждого цилиндра, укладывается проволока, отличающаяся по физико-механическим свойствам от материалов цилиндров. После этого сборный пакет подвергался экструдированию на горизонтальном гидравлическом прессе (усилие 20 МН) при температуре 1320... 1370 К со степенью вытяжки 8...18, с целью прочного диффузионного соединения элементов координатной сетки [6].

Максимальное отклонение размеров элементов полученной координатной сетки, после математической обработки результатов измерений по методике подбора закона распределения по экспериментальным данным [7], с вероятностью 0,95 не превышает 6 %.

Качество соединения слоев прессованного прутка проверялось испытаниями на срез (рис. 1), которые показали, что прочность соединения слоев составила 224... 300 МПа, а прочность сплошных образцов из стали 30ХГСА составила 270... 320 МПа. Это говорит о том, что многослойные образцы, полученные по данной технологии, можно подвергать горячей пластической обработке со сложными схемами нагружения. Сами образцы деформируются, как сплошные (монокристаллические) заготовки.

Схема обмера геометрических параметров образца с объемной координатной сеткой представлена на рис. 2.

После измерения координатной сетки на шлифах для каждого i -го слоя определяли следующие деформации [6]: радиальную $\varepsilon_{ri} = \ln \frac{d_{ri}}{d_{0roi}}$; тангенциальную $\varepsilon_{ti} = \ln \frac{r_i}{r_{oi}}$; осевую

$\varepsilon_{li} = -(\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{ti})$; деформацию кручением $\varepsilon_K = \ln \left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma_k^2}{4}} \right)$; степень деформации сдвига

$\varepsilon_{сд} = \ln \left(1 + \frac{\psi}{2\pi} \right)$, где ψ - угол сдвига металла на коническом участке очага деформации.

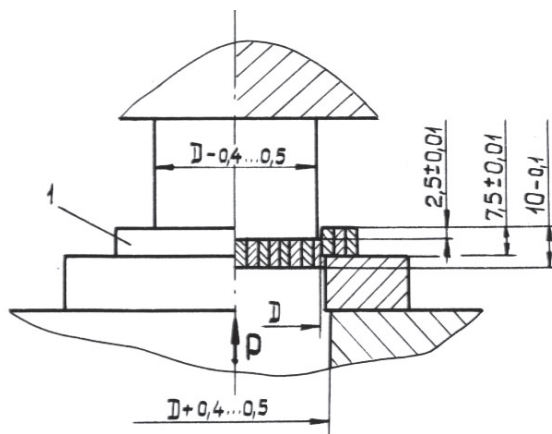


Рис. 1. Схема испытаний на прочность соединения слоев

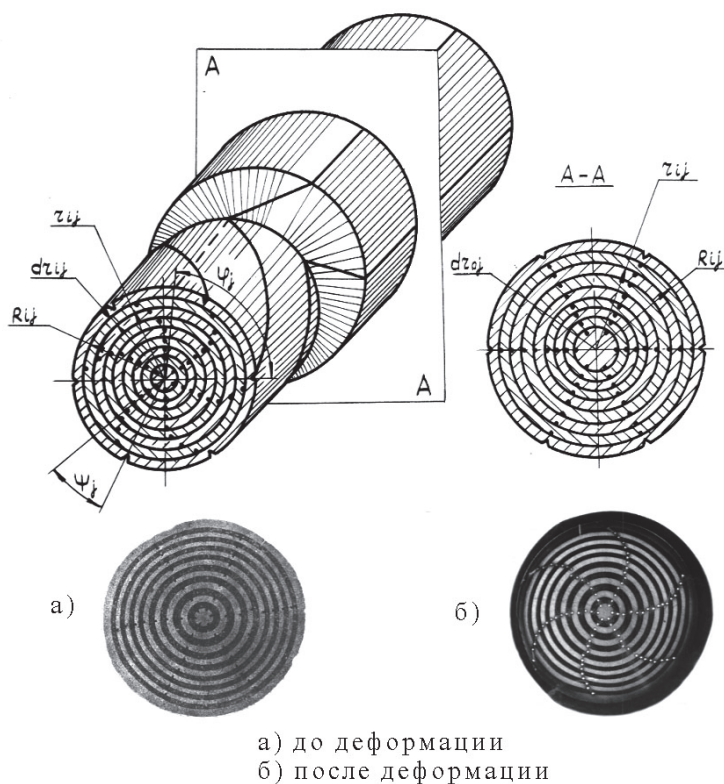


Рис. 2. Схема измерения элементов координатной сетки в образце

По вычисленным главным деформациям по объему заготовки ($\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_l$) рассчитывалась накопленная деформация по сечению очага деформации по формуле [7]:

$$\Lambda = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sum_{k=1}^i \sqrt{(\Delta\varepsilon_{rk} - \Delta\varepsilon_{tk})^2 + (\Delta\varepsilon_{tk} - \Delta\varepsilon_{lk})^2 + (\Delta\varepsilon_{lk} - \Delta\varepsilon_{rk})^2},$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$ – приращение каждой из компонент деформаций на каждом этапе единичного обжатия.

По приведенным формулам рассчитывались все виды деформаций и после математической обработки построены зависимости их от технологических параметров процесса ВТМО ВО.

По проведенным исследованиям на сплошных и трубчатых образцах по ранее описанным методикам по определению деформаций получаемых заготовкой и математической обработке

полученных результатов получены регрессионные уравнения для деформаций кручения (ϵ_K) и сдвига (ϵ_{cd}), а также для радиальной (ϵ_r), тангенциальной (ϵ_t) и осевой (ϵ_o) деформаций по объему изделий.

На рис. 3 показано изменение деформации кручения и деформации сдвига от исследуемых технологических параметров процесса. Как видно из рис. 3 и уравнений описывающих деформации, изменение их происходит в пределах $0 \div 28\%$ и главным образом от технологических параметров n_1 , $\epsilon_{обж}$, S , D_p/d . Параметр n_2 практически не влияет на изменение степени деформации кручением, а получаемые заготовкой деформации изменяются от технологических режимов обработки очень неравномерно. Так, ϵ_K достигает 25% , а ϵ_{cd} достигает 11% на поверхности заготовки от фактора n_1' и убывает до нуля по экспоненциальному закону до половины радиуса изделия. Глубина проникновения зависит наиболее сильно от угла разворота деформирующих роликов. При ($\beta' = \beta'_p$) $\epsilon_{cd} = 6\%$, а глубина ее проникновения достигает $1/3$ радиуса. Это связано, прежде всего, с тем, что при этих же режимах обработки скольжение по очагу деформации минимальное.

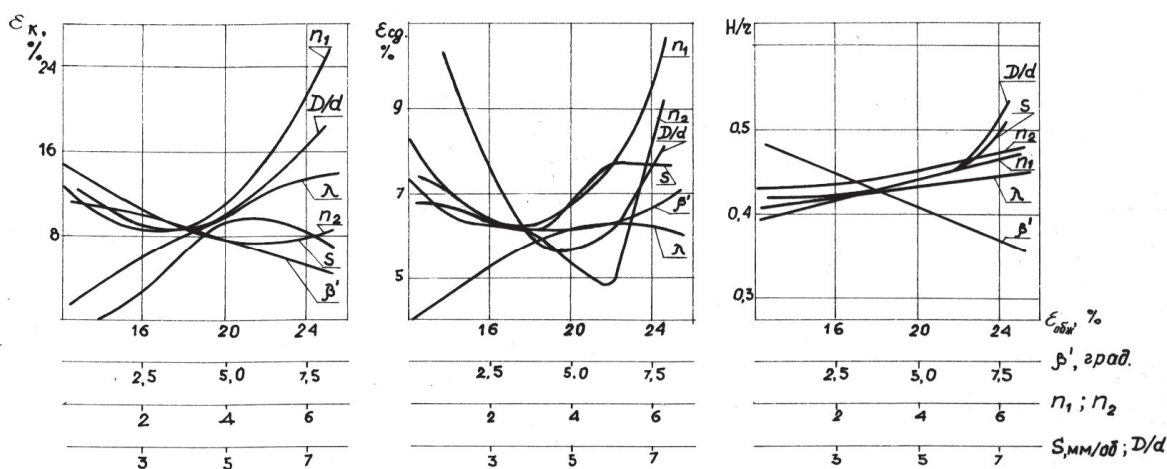


Рис. 3. Изменение степени деформации кручения, степени деформации сдвига на поверхности заготовки и глубины ее проникновения от технологических режимов ВО

Графические зависимости изменения деформации от технологических параметров процесса приведены на рис. 4. Как видно из рис. 4, максимальной по величине деформацией из исследуемых в поверхностных слоях заготовки является ϵ_r , которая изменяется от 32 до 380% от наиболее сильно влияющего фактора $\epsilon_{обж}$ с интенсивным ростом при $\epsilon_{обж} > 19\%$. Максимальная величина осевой деформации в поверхностном слое ($0,95r$) достигает 90% при $\epsilon_{обж} = 26\%$ и $n_1' < 1$. Изменение величин деформаций от поверхности по сечению заготовки происходит с интенсивным убыванием до слоя с радиусом $0,8r$, в котором максимальные деформации имеют следующие значения $\epsilon_r = 48\%$, $\epsilon_t = 29\%$, $\epsilon_o = 80\%$. Далее к центру заготовок изменение деформаций по сечению происходит не одинаково. Так, ϵ_r с увеличением значений факторов $\epsilon_{обж}$ и β' увеличивается по всему сечению заготовки. Для других факторов (n_1' , n_2' , S , D/d) ϵ_r меняется по величине либо понижаясь, либо повышаясь для разных сечений.

Для тангенциальной степени деформации (ϵ_t) технологические параметры процесса оказывают интенсивное влияние в основном только в поверхностном слое заготовки, где ϵ_t изменяется от 16 до 29% . Для остальных слоев заготовки, более глубоких, изменение технологических параметров практически мало изменяет величину ϵ_t за исключением $\epsilon_{обж}$, при увеличении которой тангенциальная степень деформации увеличивается по всему сечению.

Осевая деформация изменяется неравномерно по сечению заготовки. С увеличением степени деформации по обжатию осевая деформация увеличивается по всему сечению заготовки и изменяется в разных пределах по сечению. В центре заготовки ϵ_o увеличивается с 26 до 34% , а в поверхностном слое увеличивается с 40 до 95% в исследуемом диапазоне $\epsilon_{обж}$.

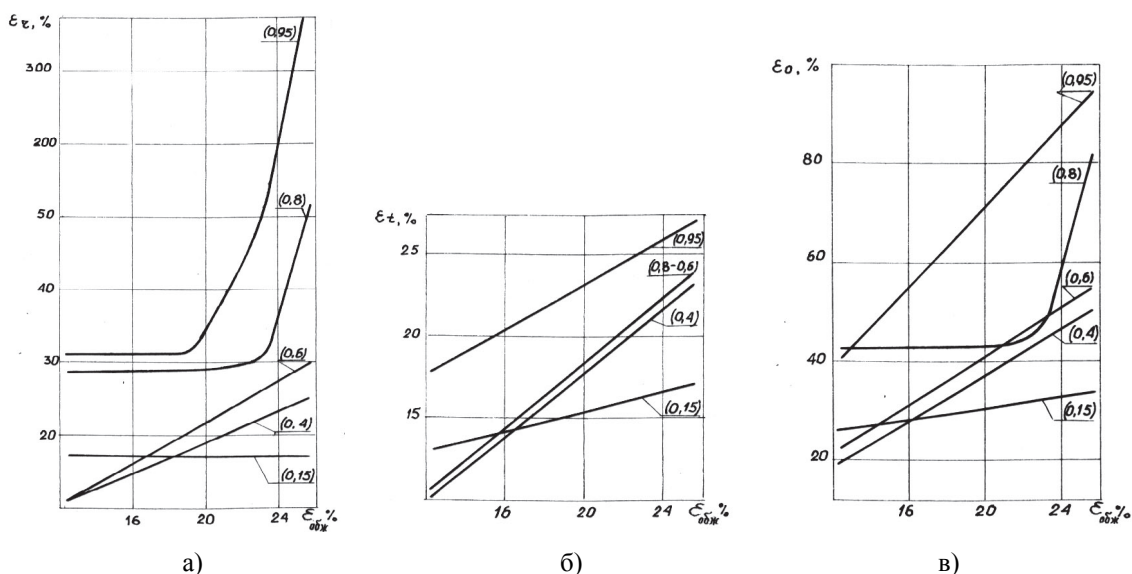


Рис. 4. Изменение радиальной (а), тангенциальной (б) и осевой (в) деформаций по сечению сплошного изделия

Увеличение угла разворота деформирующих роликов мало влияет на изменение осевой деформации по сечению заготовки, за исключением поверхностного слоя, где ε_o уменьшается с 78 до 58 %. Это говорит о том, что при изменении схемы деформирования, т.е. при смене знака действующей осевой силы с тянущей на толкающую вытяжка поверхностного слоя уменьшается, а по сечению заготовки до центра ε_o уменьшается неравномерно. Это подтверждается и формой утяжки конца заготовки после винтового обжатия. От увеличения количества единичных обжатий конуса заготовки заходным конусом ролика осевая деформация в поверхностных слоях уменьшается и увеличивается для центральной части заготовки. Подача изделия неравномерно изменяет величину осевой деформации по сечению изделия, уменьшая ее в поверхностном и центральном слоях, увеличивая для слоя $r_i/r = 0,6 - 0,8$ и практически не изменяя ε_o в слое равном $r_i/r = 0,4$ для всех исследуемых значений S .

По результатам исследований деформированного состояния можно сделать выводы: деформирование цилиндрических заготовок винтовым обжатием позволяет изменять деформированное состояние по объему заготовки и формировать анизотропию структуры, благоприятную для работы изделий. С учетом распределения деформаций по объему заготовки и изменения структуры при ВО установлена область действия каждой деформации и их величины, по которым можно назначать соответствующие оптимальные технологические режимы обработки для получения заготовкой требуемого деформированного состояния, которое позволит в сочетании с ВТМО существенно повысить механические свойства материала и эксплуатационные свойства деталей при различных условиях нагружения.

Литература

1. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов / в трех томах / Т. I. Физико-механические основы пластической деформации. - М.: Metallurgizdat, 1961. - 375 с.
2. Воронцов В.К., Полухин П.И., Белевитин В.А., Бринза В.В. К постановке и решению объемной задачи пластического течения методами экспериментальной механики // Известия вузов. Черная металлургия. - 1976. - № 4. - С. 75-80.
3. Воронцов В.К., Полухин П.И., Белевитин В.А., Бринза В.В. К решению объемной задачи стационарного пластического течения металла методом координатной сетки // Известия вузов. Черная металлургия. - 1976. - № 9. - С. 77-80.
4. Драпкин Л.Г. Исследование поведения свойств многослойных металлов и сплавов в условиях высокоскоростного пластического деформирования // Высокоскоростная деформация. - 1971. - С. 47-50.
5. Шаврин О.И., Дементьев В.Б., Кокорин Н.А. Технология получения объемной координатной сетки // Известия вузов. Черная металлургия. 1984. № 3. С. 86-88.
6. А.С. 1551967 (СССР) МКИ G04B 5/30. Способ изготовления образца для исследования деформаций. В.Б. Дементьев. Заявл. 16.06.1987, № 4263582. Бюл. № 11, 1990.
7. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / пер. с англ. - М.: Металлургия, 1982. - 548 с.

УДК 539.3

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ РЯДА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев

*Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия,
vlgzub@gmail.com, alexeew@bk.ru*

Аннотация. Дается анализ опытных результатов по исследованию эффекта Баушингера при упругопластическом деформировании ряда конструкционных сталей (стали 3, 20, 45, У8). Рассматривается эволюция поверхности текучести: изменение ее радиуса и смещение центра при знакопеременных пропорциональных нагружениях, в том числе с повторными разгрузками и догрузками.

Ключевые слова: знакопеременное нагружение, пластичность, эффект Баушингера, поверхность текучести, физический эксперимент, упрочнение металлов.

Для моделирования процессов деформирования конструкционных материалов в условиях сложного нагружения необходимы исследования их механических свойств за пределом упругости и создание на их основе математических моделей, достоверно описывающих закономерности их упругопластического деформирования. Ряд математических моделей теории пластичности, в частности варианты теории пластического течения, учитывают эффект Баушингера через смещение центра (трансляционное упрочнение) и изменение радиуса (изотропное упрочнение) поверхности текучести, которая разделяет области активного пластического и упругого деформирования в пространстве напряжений. Для записи в математических моделях эволюционных уравнений поверхности текучести необходимы тщательные экспериментальные исследования при различных видах напряженных состояний по изучению как начальных размеров и положения этой поверхности, так и последующих изменений в зависимости от истории нагружения.

В данной статье приводится сопоставление результатов опытов по изучению эффекта Баушингера, проведенных под руководством Г.Б. Талыпова [1] в лаборатории сопротивления материалов НИИ математики и механики СПбГУ, и группой авторов [2, 3], проведенных под руководством В.Г. Зубчанинова в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности ТвГТУ.

Эффект Баушингера в [1] исследовался на сплошных образцах из достаточно начально-изотропных металлов при разных уровнях простого пропорционального нагружения при больших деформациях. Образцы при однородном напряженно-деформированном состоянии подвергались нагружению, превышающему начальный предел текучести σ_T до некоторого нового значения предела текучести σ_T^K , после чего разгружались до нуля и имели остаточную деформацию ε_{11}^P . Затем проводилось повторное нагружение противоположного знака и значение вторичного предела текучести σ_T^M , взятое по модулю, оказывалось меньше σ_T^K . Этот эффект оценивался в [1] безразмерным параметром

$$\gamma = \sigma_T^M / \sigma_T^K \quad (1)$$

при соответствующей величине пластической деформации ε_{11}^P . Для определения пределов текучести σ_T^M использовался стандартный технический допуск на остаточную деформацию $\varepsilon_p^* = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$. На основании табличных экспериментальных значений [1] для стали 3 и стали 20 на рис. 1 приведены графики зависимостей параметра γ , от величины накопленной пластической деформации ε_{11}^P . Из рис. 1 видно, что при пластических деформациях $\varepsilon_{11}^P > 3,5\%$ параметр γ стабилизируется и стремится к стационарному значению, которое соответствует уменьшению предела текучести σ_T^M в среднем на 0,8 от величины σ_T^K в зависимости от материала.

Для построения поверхности текучести необходимо знать ее первоначальную форму. Считается, что на основании постулата изотропии А.А. Ильюшина [4] для начально-изотропных сред при техническом допуске $\varepsilon_p^* = 0,2\%$ начальная поверхность текучести имеет форму сферы (окружности) Мизеса. В предположении сохранения формы поверхности текучести при ее эволюции можно определить координаты ее центра a и радиус r только из опытов на знакопеременное нагружение по двум экспериментальным точкам. В этом случае, ее радиус, изменяющийся в процессе активного нагружения с учетом (1)

$$r = \frac{\sigma_T^K + \sigma_T^M}{2} = \frac{\sigma_T^K}{2}(1 + \gamma), \quad (2)$$

а координата центра при смещении (трансляции) поверхности текучести

$$a = \sigma_T^K - r = \frac{\sigma_T^K}{2}(1 - \gamma). \quad (3)$$

На рис. 2 приведены построенные графики зависимостей от величины ε_{11}^p радиуса r поверхности текучести и положения ее центра a , определенные по формулам (2), (3) соответственно для экспериментальных значений [1].

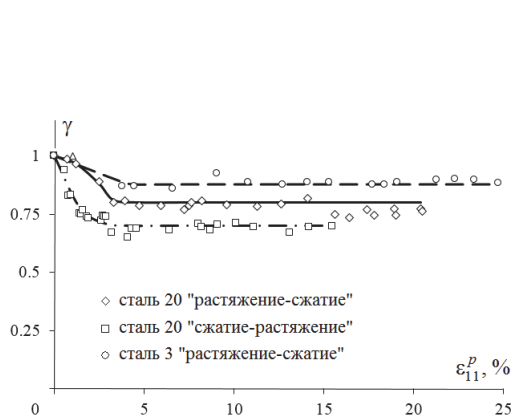


Рис. 1

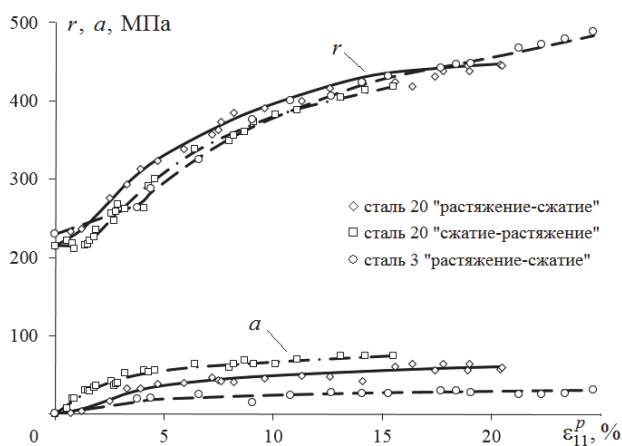


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что смещение центра поверхности текучести с ростом пластических деформаций монотонно увеличивается, стремясь к какому-то пределу для данного материала и вида напряженного состояния. Это увеличение в среднем составило 20 % от первоначальных значений пределов текучести σ_T при развитых пластических деформациях. Изменение радиуса поверхности текучести при малых деформациях незначительно. С ростом деформаций при $\varepsilon_{11}^p > 3,5\%$ его значение резко увеличивается, и превышает при максимально достигнутых уровнях пластической деформации значения начального предела текучести σ_T более чем в два раза. Таким образом, изотропное расширение поверхности текучести в этих экспериментах со сплошными образцами значительно превышает ее смещение.

Эволюция поверхности текучести при малых пластических деформациях менее 3 % требует дополнительного изучения. Например, при исследовании эффекта Баушингера на путях нагружения «чистый сдвиг – чистый сдвиг» на тонкостенных цилиндрических оболочках из стали 3 и стали 45 [1] на начальном этапе пластического деформирования наблюдалось небольшое уменьшение и последующее возрастание радиуса поверхности текучести.

Похожие результаты получены на расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ имени А.А. Ильюшина при испытаниях тонкостенных цилиндрических образцов на знакопеременное нагружение при растяжении-сжатии (стали 45 и У8) и кручение (сталь 45) с повторными разгрузками и догрузками при различных уровнях накопленной пластической деформации [2, 3]. На рис. 3 и 4 представлены полученные после обработки данных

экспериментов зависимости параметра γ , изменение радиуса r и смещение центра a поверхности текучести от величины накопленной пластической деформации ε_{11}^p . При обработке диаграмм и определении пределов текучести также принимался допуск на остаточную деформацию $\varepsilon_p^* = 0,2\%$.

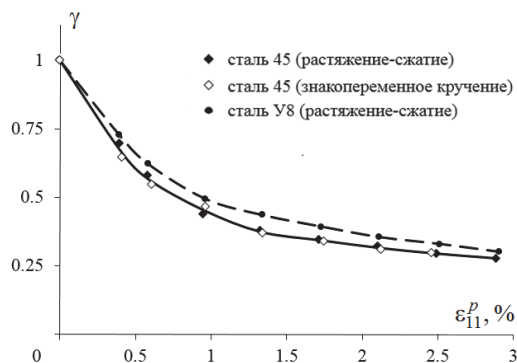


Рис. 3

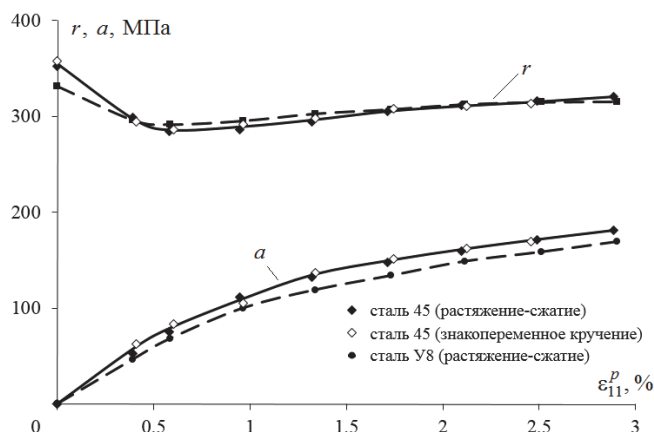


Рис. 4

Из анализа полученных результатов, установлено, что эффект Баушингера имеет тенденцию к уменьшению по модулю вторичного предела текучести σ_T^M и безразмерного параметра γ , характеризующего эффект Баушингера. При достижении накопленной пластической деформации порядка 3–3,5% параметр γ стремится к некоторому стационарному значению $\gamma_* \approx \text{const}$ (рис. 1, 3). Радиус поверхности текучести r при малых значениях ε_{11}^p испытывает небольшое понижение типа «нырка» порядка 20% по сравнению с первоначальным. Его временное уменьшение может быть связано с изменением внутренней структуры материала на мезоуровне и изменением ориентированных микронапряжений с ростом деформаций [2]. В дальнейшем с ростом ε_{11}^p величина радиуса поверхности текучести увеличивается. В опытах с образцами сплошного поперечного сечения при развитых пластических деформациях более 5% это увеличение было очень значительным (рис. 2). Смещение центра поверхности текучести увеличивается с ростом пластических деформаций. Для образцов сплошного поперечного сечения оно достаточно незначительно и в среднем составляет порядка 20% (рис. 2), а для тонкостенных образцов – 50% (рис. 4) от начального предела текучести σ_T при достигнутых уровнях пластической деформации. При этом во всех обработанных экспериментах величины смещения центра a при максимально достигнутых уровнях пластической деформации не превосходили значения начальных пределов текучести σ_T . Таким образом, в процессе эволюции поверхностей текучести их центры находились внутри первоначальных поверхностей.

Литература

1. Талыпов Г.Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1968. 135 с.
2. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гульятев В.И. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2014. № 3. С. 71–88. DOI:10.15593/pern.mech/2014.3.05
3. Зубчанинов В.Г., Гульятев В.И., Алексеев А.А., Ведерников В.Н. Об экспериментальном исследовании эффекта Баушингера и поверхности текучести стали У8 // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2013. № 2 (16). С. 55-62.
4. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 273 с.

УДК 6297.036.54

МЕТОДИКА РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВЕРХСЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ПОДМОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ ЖРД

О.В. Короткая, С.С. Гаврюшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, korotkaya_olga@mail.ru, gss@bmstu.ru

Аннотация. Описана методика расчета и проектирования сверхсложных конструкций, основанная на математическом моделировании методом конечных элементов, на примере камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя. Для существенного снижения размерности задачи и отказа от использования суперкомпьютеров предлагается использовать метод подмоделей совместно с учетом циклической симметрии конструкции. Методика предлагается для существенного сокращения количества огневых испытаний, используемых на данный момент в качестве основного способа оценки прочности камер сгорания. Показана актуальность проблемы.

Ключевые слова: математическое моделирование, жидкостный ракетный двигатель, камера сгорания, прочность, термпрочностной расчет, напряженно-деформированное состояние, метод подмоделей, циклическая симметрия.

1. Актуальность и научная новизна

На сегодняшний день актуальным является создание методики, позволяющей провести прочностной расчет и проектирование геометрически сложных конструкций в ответственных отраслях машиностроения, таких как ракетостроение, повышение надежности конструкций с одновременным снижением финансовых затрат на проектирование. Сегодня часто происходят аварии в космической отрасли. Одной из причин неудач эксперты называют отказ ракетного двигателя. Поэтому проблемы прочности и надежности двигателей становятся актуальными как никогда. Спроектированные еще при С.П. Королеве двигатели хорошо зарекомендовали себя, но сегодня требуется их модернизировать, чтобы они соответствовали современным требованиям. Опыт показывает, что проблемы возникают именно с модифицированными версиями старых двигателей. В настоящее время оценку прочности камер сгорания проводят посредством огневых испытаний [1-3]. Они являются экономически невыгодными ввиду больших затрат времени и материальных ресурсов на конструирование и производство все новых и новых прототипов до тех пор, пока проводимые испытания не покажут удовлетворительные результаты. В данной статье описана методика математического моделирования, которая позволит значительно сократить затраты на стендовые испытания и повысить надежность ракетных двигателей. Рассматривается проблема расчета напряженно-деформированного состояния камеры сгорания и сопловой части нового маршевого ЖРД с кислородным охлаждением камеры сгорания. Данный вид охлаждения никогда прежде не был реализован, хотя работы по созданию подобных ЖРД велись как в РКК «Энергия» в 1960-х годах, так и в NASA в 1980-х годах.

Детальный прочностной анализ сложной трехмерной конструкции приводит к громоздким конечно-элементным моделям [4] и требует использования суперкомпьютеров. Прямая конечно-элементная аппроксимация становится практически нереальной в силу большой размерности задачи и необходимости учета физически нелинейных свойств материала. Существенную трудность представляет проблема численной реализации циклического процесса нагружения с учетом трех режимов работы ЖРД в пределах каждого цикла. Актуальной становится необходимость разработки методики, позволяющей свести анализ к решению задач с существенно меньшей размерностью. Для этой цели в данной работе предлагается применение метода подмоделей (подконструкций) в комплексе с учетом циклической симметрии [5-6].

В данном исследовании разработана новая методика, позволяющая, путем создания точных трехмерных моделей подконструкций, полностью отражающих реальную геометрию изделия, точно оценить НДС двигателя и предсказать возможное разрушение, точное место разрушения и его причины, без проведения огневых испытаний. Такая методика также

позволит проводить анализ двигателя в постановке задачи малоциклового усталости, т.е. ракетного двигателя многоразового использования, где в рамках каждого цикла нагружения предполагается несколько режимов работы двигателя. Основной особенностью рассматриваемого в проекте двигателя является использование жидкого кислорода в качестве охладителя камеры сгорания и отказ от системы завесного охлаждения керосином, что приводит к значительному повышению удельного импульса тяги и улучшению энергомассовых характеристик.

2. Описание методики

В данной работе по договору с РКК «Энергия» им. С.П. Королева проводится прочностной анализ напряженно-деформированного состояния камеры сгорания и сопловой части перспективного ЖРД с кислородным беззавесным охлаждением.

Ввиду многоразового использования двигателя (до 7 циклов нагружения) рассматривается задача в постановке малоциклового усталости, на каждом цикле нагружения - 3 режима: газогенераторный (захоленная камера), стационарный режим и режим останова. Для каждого режима задаются свои граничные условия: тепловая нагрузка и давление, полученные из газодинамического расчета.

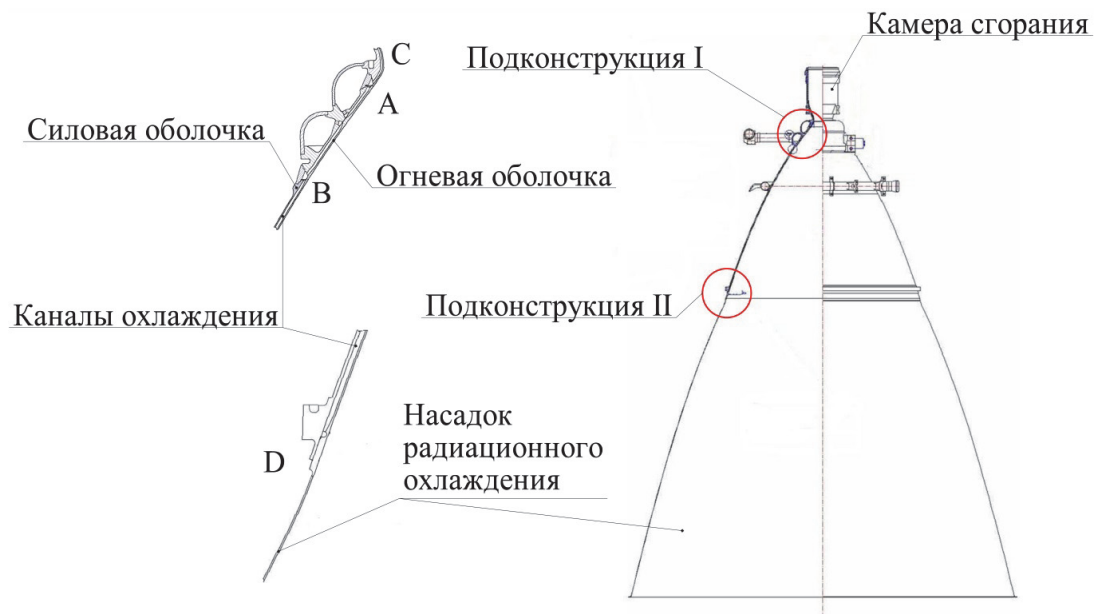


Рис. 1. Общий вид конструкции и подмоделей (подконструкций)

Задача решается в два этапа. На первом этапе проводится анализ конструкции в целом по упрощенной схеме осесимметричной оболочки (рис. 1), которая позволяет с требуемой точностью оценить величину перемещений. Определены 4 опасные зоны А, В, С, D (рис. 1). На втором этапе по трехмерной схеме рассчитываются 2 подконструкции. Подконструкция 1 охватывает одну опасную зону – стык охлаждаемой части с насадком радиационного охлаждения. Подконструкция 2 охватывает три опасных зоны. Граничные условия - узловые перемещения, найденные по осесимметричной модели; температура, давление. Для описания материалов при анализе подконструкции используется билинейная модель кинематического упрочнения.

3. Расчет по осесимметричной модели

Наличие охлаждающих спиральных каналов с переменным углом закручивания в стенке изделия, по которым протекает охладитель, нарушает осевую симметрию конструкции. В связи с этим используется прием замены реальной конструкции на конструктивно-анизотропную сплошную модель. Коэффициенты анизотропии рассчитываются из условия эквивалентной жесткости оболочки на растяжение – сжатие и изгиб. В дальнейшем планируется написание компьютерной программы, встроенной в ANSYS, для расчета коэффициентов анизотропии. Эта программа позволит значительно сократить время подготовки исходных данных.

Предположение о несвязности стационарной задачи теплопроводности и теплопрочностной задачи позволяет проводить решение последовательно. Результат расчета - распределение температур по всей конструкции, которое далее используется при решении прочностной задачи. Найденные при расчете по осесимметричной модели на каждом из 3 режимов перемещения в конструкции используются при решении трехмерных задач анализа двух подконструкций.

4. Расчет подмоделей (подконструкций)

Следующий этап – расчет двух подконструкций. Использование условия циклической симметрии позволяет для каждой из двух подконструкций создать трехмерную модель (сектор), полностью отражающую реальную геометрию изделия. Перемещения узлов элементов на границах подконструкций получаются при решении осесимметричной задачи. Далее значения этих перемещений прикладываются к границам трехмерной модели. Поскольку узлов в трехмерной модели больше, чем в осесимметричной, то для промежуточных узлов значения перемещений получаются интерполяцией. Для каждой подконструкции также решаются две задачи: стационарная задача теплопроводности и расчет напряженно-деформированного состояния. В итоге получается распределение перемещений, пластических деформаций и напряжений на каждом из трех режимов для обеих подконструкций.

5. Оптимизация конструкции камеры сгорания

Разработанная методика позволяет провести математическое моделирование и выполнить термопрочностные расчеты геометрически сложных конструкций, повысить их надежность с одновременным снижением финансовых затрат на проектирование.

Однако, кроме прямой задачи, существует необходимость в решении и обратной задачи, т.е. надо создать оптимальную модель конструкции, отвечающую заданным критериям и еще более повышающую надежность и долговечность конструкции.

Задача создания оптимальной модели камеры сгорания, отвечающей заданным параметрам ЖРД, решается методом математической оптимизации. Методика позволяет создать двумерную параметрическую расчетную модель-сектор одного канала охлаждения и ребра [7], уменьшив при этом расходы на вычисления. Опасным является наличие пластических деформаций [8], т.к. в процессе циклической работы они накапливаются, что может привести к разрушению конструкции, поэтому максимальная эквивалентная пластическая деформация выбрана в качестве целевой функции. Далее оптимизация сводится к минимизации целевой функции. В результате оптимизируется геометрия ребер и каналов охлаждения.

6. Заключение

Несмотря на некоторые успехи зарубежных коллег в применении метода конечных элементов для расчетов камер сгорания ЖРД, следует отметить, что точность таких расчетов зачастую оставляет желать лучшего. Хотя идеи трехмерных расчетов высказывались еще в 1970-х годах, из-за недостаточных мощностей вычислительной техники сегодня используются простейшие двумерные модели или сильно упрощенные трехмерные модели, не позволяющие достаточно точно оценить напряженно-деформированное состояние конструкции, что и приводит к необходимости многочисленных стендовых испытаний.

Данное исследование посвящено повышению надежности ракетных двигателей и сокращению финансовых расходов на модернизацию старых и создание новых двигателей, описана методика математического моделирования с использованием принципов компактизации информации, направленная на значительное сокращение многочисленных дорогостоящих стендовых экспериментальных испытаний, определение уточненного напряженно-деформированного состояния конструкции со сложной геометрией, прогнозирование и выявление причин возможного разрушения конструкции на примере проектирования и оптимизации инновационного ЖРД многократного использования с кислородным беззавесным охлаждением камеры сгорания (применяется впервые) с улучшенными энергомассовыми и экологическими характеристиками.

Литература

1. Hemsell M. Progress on the SKYLON and SABRE. 64th International Astronautical Congress, Beijing, China, IAC-13,D2.4,6x19609, – 2013. – 14 p.
2. Смоленцев А.А., Стриженко П.П. Анализ огневых испытаний экспериментальных камер сгорания ЖРД для РБ типа ДМ с кислородным охлаждением // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2011. – №3(27). – С. 191-198.
3. Аверин И.Н., Егоров А.М., Тупицын Н.Н. Особенности построения, экспериментальной обработки и эксплуатации двигательной установки разгонного блока ДМ-SL комплекса «Морской Старт» и пути ее дальнейшего совершенствования // Космическая техника и технологии. – 2014. – №2(5). – С. 62-73.
4. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численные методы в динамике и прочности машин. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 492 с.
5. Гаврюшин С.С., Красновский Е.Е., Короткая О.В., Стриженко П.П., Катков Р.Э. Использование метода подконструкций для термпрочностного расчета камеры жидкостного ракетного двигателя. // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/705.html>
6. Korotkaya O.V. Substructure Method for Thermal-Stress Analysis of Liquid-Propellant Rocket Engine Combustion Chamber. World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 88, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering, – 2014. – no. 8(4), – pp. 734 - 737.
7. Detlef Kuhl, Jorg Riccius, Oskar J. Haidn Thermomechanical Analysis and Optimization of Cryogenic Liquid Rocket Engines// Journal of propulsion and power, Vol. 18, No. 4, July–August 2002. – pp. 835-846.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ЖАРОПРОЧНЫХ СПЛАВОВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Ю.Г. Коротких, И.А. Волков, М.А. Гусева, И.С. Тарасов

*ФГБОУ ВО «Волжский государственный университет водного транспорта»,
Нижний Новгород, Российская Федерация, trptmvgavi@yandex.ru*

Аннотация. Рассматриваются основные закономерности накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при различных режимах комбинированного термомеханического нагружения и математические модели указанных процессов. Приводятся результаты численного моделирования процессов термоциклического деформирования и накопления повреждений в жаропрочных сплавах при синфазных и противофазных термомеханических воздействиях. Результаты расчётов сравниваются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: моделирование, термоциклическая прочность, сложное деформирование, синфазное и противофазное нагружение, механика повреждённой среды, долговечность, разрушение.

1. Введение

Эффекты деформирования при термомеханическом нагружении определяются зависимостью физико-механических характеристик конструкционных материалов от температуры, наличием ограничений температурных деформаций и соотношением скоростей механической и температурной деформаций. В связи с тем, что частоты и фазы циклов изменения температуры и компонент тензора механической деформации, как правило не совпадают, неизотермическое циклическое нагружение как правило является нерегулярным, непропорциональным, многоосным и сопровождается вращением главных площадок тензоров напряжений и деформаций.

Объемная температурная деформация приводит как правило к многоосному процессу деформирования, сопровождающемуся при сочетании с механическим деформированием вращением главных площадок тензоров напряжений и деформаций за счет непропорциональности процесса деформирования. Это приводит к новым источникам дисбаланса: напряженно-деформированное состояние в любой точке цикла отлично от других точек. Фазирование изменением температуры и механической деформации является одним из важнейших факторов, связанных и с температурной усталостью.

По исследованию закономерностей усталости при повышенных температурах в изотермических условиях выполнен достаточно большой объем работ [1–7, 13, 17], в то время как термоусталость изучена недостаточно. Основная проблема заключается в том, что физико-механические характеристики конструкционного материала существенно зависят от температуры, в то время как экспериментальные исследования усталости в основном проводятся в изотермических условиях при ожидаемой максимальной температуре цикла.

Неизотермическое деформирование конструкционных материалов по сравнению с изотермическим характеризуется рядом специфических особенностей [1]:

- нелинейной зависимостью напряжение – деформация даже в упругой области вследствие зависимости модулей упругости от температуры;

- неуравновешенностью диаграмм при симметричных циклах изменения механической деформации и сильной зависимостью формы петли гистерезиса напряжение – деформация от сочетания фаз изменения температуры и механической деформации.

Многоосность напряженно-деформированного состояния также является источником дисбалансов в термомеханических нагружениях. При одновременном действии механического и температурного воздействия возникает, как правило, значительное вращение главных площадок тензоров напряжений и деформаций (непропорциональное нагружение), которое при наличии пластического деформирования приводит к несоосности тензоров напряжений, полных и пластических деформаций. Для моделирования данных процессов необходимо иметь соответствующие модели циклической термопластичности, учитывающие вращение главных

площадок и несоосность тензоров напряжений, полных и пластических деформаций (непропорциональное, сложное нагружение).

Важным выводом из сравнительного анализа экспериментальных результатов по термомеханической усталости и изотермическим усталостным испытаниям является то, что оценка долговечности по результатам изотермических испытаний при максимальной температуре цикла не является консервативной.

Изучение влияния фазности изменения температурной и механической деформации [7] показывает, что наименьшая долговечность наблюдается как правило, когда максимальная температура температурного цикла достигается в полцикле растяжения по механической деформации, а минимальная – в полцикле сжатия, хотя отдельные материалы (например, сталь 15Х2МФА при $T \leq 350^{\circ}C$) демонстрируют нечувствительность к фазности изменения температуры и механической деформации. Таким образом несмотря на большое внешнее сходство явлений изотермической и неизотермической усталости, использовать результаты изотермической малоциклового усталости для оценки неизотермической усталостной долговечности следует с большой осторожностью.

В работах [8–11] с современных позиций МПС развита математическая модель, описывающая процессы циклического вязкопластического деформирования и накопления усталостных повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при многоосных непропорциональных путях комбинированного термомеханического нагружения. Ниже в целях качественной и количественной оценки модели проведено исследование влияния законов изменения механической деформации и температуры (вида траектории деформирования) на усталостную долговечность жаропрочных сталей при непропорциональных режимах термомеханического нагружения. Аттестация проводилась путём сопоставления результатов расчёта с экспериментальными данными и численными результатами полученными другими авторами [12, 13] по изотермическому и неизотермическому (синфазному и противофазному) циклическому деформированию лабораторных образцов.

2. Определяющие соотношения механики повреждённой среды

Модель повреждённой среды [8–11] состоит из трёх взаимосвязанных частей:

- соотношений, определяющих циклическое термопластическое поведение материала с учётом зависимости от процесса разрушения;
- уравнений, описывающих кинетику накопления усталостных повреждений;
- критерия прочности повреждённого материала.

2.1. Соотношения циклической термопластичности. В упругой области связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций устанавливается с помощью закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma &= 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij}, \quad e'_{ij} = e'_{ij} - e'_{ij}{}^p, \\ \dot{\sigma} &= 3K[\dot{e} - (\alpha\dot{T})] + \dot{K}\sigma/K, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \dot{G}\sigma'_{ij}/G, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma, \dot{\sigma}, e, \dot{e}$ – шаровые, а $\sigma'_{ij}, \dot{\sigma}'_{ij}, e'_{ij}, \dot{e}'_{ij}$ – девиаторные составляющие тензоров напряжений σ_{ij} , деформаций e_{ij} и их скоростей $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{e}_{ij}$ соответственно; T – температура; T_0 – начальная температура; $K(T)$ – модуль объёмного сжатия; $G(T)$ – модуль сдвига; $\alpha(T)$ – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Эффекты монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений учитываются с помощью поверхности текучести, уравнение которой имеет вид:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^p. \quad (2)$$

Для описания сложных циклических режимов деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность циклической «памяти». Уравнение поверхности «памяти», позволяющее при расчётах отделить монотонные процессы деформирования от циклических:

$$F_p = \rho_{ij}^p \rho_{ij}^p - \rho_{\max}^2 = 0 \quad (3)$$

где ρ_{\max} – максимальный за историю нагружения модуль переменной ρ_{ij}^p .

Принимается эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести вида [8]:

$$\dot{C}_p = \left[q_\chi H(F_p) + a(Q_s - C_p) \Gamma(F_p) \right] \dot{\chi} + q_3 \dot{T} \quad (4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left(\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_p) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt \quad (5)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1-A) q_1}{A \psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1-A) Q_1}{A \psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \quad (i=1, 2), \quad (6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}_{ij}^p}{(\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p)^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}}, \quad (7)$$

$$H(F_p) = \begin{cases} 1, F_p = 0 \wedge \rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p > 0 \\ 0, F_p < 0 \vee \rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_p) = 1 - H(F_p). \quad (8)$$

Здесь q_1, q_2, q_3 – модули изотропного упрочнения, соответствующие монотонным лучевым путям нагружения (q_1), излому траектории деформирования на 90° (q_2) и температурному изменению радиуса поверхности текучести (q_3); a – постоянная, определяющая скорость процесса стабилизации формы петли гистерезиса циклического деформирования материала; Q_s – стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных ρ_{\max} и T ; χ и χ_m – длины траекторий пластического деформирования материала при циклическом и монотонном нагружениях; C_p^0 – начальное значение радиуса поверхности текучести.

Уравнение для смещения поверхности текучести основано на гипотезе А.А. Ильюшина, заключающейся в том, что упрочнение зависит от истории деформирования лишь на некоторой ближайшей части траектории (запаздывание векторных свойств). Внутренняя переменная ρ_{ij}^p , учитывающая анизотропию упрочнения пластического деформирования, удовлетворяет эволюционному уравнению [4, 8]:

$$\dot{\rho}_{ij}^p = g_1^p \dot{e}_{ij}^p - g_2^p \rho_{ij}^p \dot{\chi} - g_3^p \rho_{ij}^p \dot{T}, \quad \rho_{ij}^p = \int_0^t \dot{\rho}_{ij}^p dt, \quad (9)$$

где $g_1^p > 0, g_2^p > 0$ и $g_3^p > 0$ – модули анизотропного упрочнения. Первый и второй члены этого уравнения отвечают за анизотропную часть деформационного упрочнения, а третий – за изменение ρ_{ij} в результате воздействия температуры T . Для характеристики поведения поверхности «памяти» необходимо сформулировать эволюционное уравнение для ρ_{\max} :

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{(\rho_{ij}^p \dot{\rho}_{ij}^p) H(F_p)}{(\rho_{mn}^p \rho_{mn}^p)^{1/2}} - g_2^p \rho_{\max} \dot{\chi} - g_3^p \rho_{\max} \dot{T}. \quad (10)$$

Здесь и далее для любой величины \dot{B} , заключенной в угловые скобки $\langle \dot{B} \rangle$, выполняются условия

$$\langle \dot{B} \rangle = \begin{cases} \dot{B} & \text{при } \dot{B} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{B} \leq 0 \end{cases}.$$

2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Экспериментальный и теоретический анализ процессов поврежденности материала позволяет представить эволюционное уравнение накопления усталостных повреждений в элементарном объеме материалов в следующем общем виде [4, 8, 14–16]:

$$\dot{\omega}_p = \frac{\alpha_p + 1}{r_p + 1} f_p(\beta) Z_p^{\alpha_p} (1 - \omega_p)^{-r_p} \langle \dot{Z}_p \rangle, \quad (11)$$

где

$$Z_p = \frac{W_p - W_a}{(W_p^f - W_a)}; \quad (12)$$

$$\langle \dot{Z}_p \rangle = \frac{\langle \dot{W}_p \rangle}{(W_p^f - W_a)}; \dot{W}_p = \rho_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p; \quad (13)$$

$$f_p(\beta) = \exp(k_p \beta). \quad (14)$$

2.3. Критерий прочности повреждённого материала. В качестве критерия окончания фазы развития рассеянных микрповреждений (стадии образования макротрещины) принимается условие достижения величины повреждённости своего критического значения:

$$\omega_p = \omega_p^f \leq 1. \quad (15)$$

Интегрируя эволюционное уравнение накопления повреждений (11) – (14) совместно с определяющими соотношениями термовязкопластичности (1) – (10) и критерием разрушения (15) по известной истории термомеханического нагружения в данном элементарном объёме материала можно определить момент образования макроскопической трещины при механизме деградации, сочетающем усталость и ползучесть материала.

3. Численные результаты

В работе [17] представлены экспериментальные результаты по термоциклическому деформированию жаропрочного никелевого сплава Nimonic 80A с добавлением ниобия. Все испытания образцов, как изотермические, так и неизотермические, проводились с частотой 0,0025 Гц (400 с на цикл) в интервале температур T от 571 до 823 °С. Изотермические (рис. 1а) и неизотермические (рис. 1б, 1в) испытания проводились при жестком нагружении, амплитуда деформации e_{11} в экспериментах с постоянной температурой T составляла 1%. При переменных температурах приведены результаты эксперимента с амплитудами от 0,45 до 1%. Температура в неизотермических испытаниях изменялась как синфазно (рис. 1б), так и противофазно (рис. 1в) по отношению к изменению деформаций. Физико-механические характеристики жаропрочного никелевого сплава Nimonic 80A и материальные параметры модели повреждённой среды [8–11] приведены в табл. 1–3.

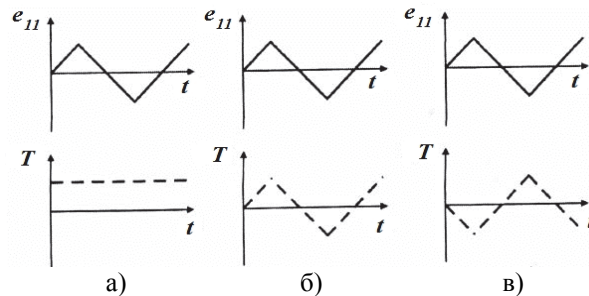


Рис. 1.

Таблица 1. Физико-механические характеристики и параметры модели

Характеристики	Температура $T(^{\circ}C)$		
	571	700	823
K (МПа)	150500	139666	106000
G (МПа)	70450	64461	48333
α (1/град)	0,0000148	0,0000155	0,0000164
C_p^o (МПа)	384	363	340
g_1 (МПа)	70850	56300	15500
g_2	308	290	271
a	65	58	45
W_p^f (МДж/м ³)	41,5	39	35,5

Таблица 2. Модуль монотонного изотропного упрочнения q_1 (МПа)

$T=571^\circ\text{C}$									
χ_m	0	0,0005	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,0075	0,01
q_1	-1981	-5362	-8255	-11002	-8321	-7006	-8243	-14420	-20600
$T=700^\circ\text{C}$									
χ_m	0	0,0005	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,0075	0,01
q_1	2666	-3667	-4202	-3847	-3049	-8346	-8112	3072	14260
$T=823^\circ\text{C}$									
χ_m	0	0,0005	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,0075	0,01
q_1	-4974	-4405	-3692	-2124	-3716	-3463	-2890	-1722	-553

Таблица 3. Модуль циклического упрочнения Q_1 (ρ_{\max}) (МПа)

$T=571^\circ\text{C}$				
ρ_{\max}	266,6	232,7	160,9	88,5
Q_1	384	395	420	450
$T=700^\circ\text{C}$				
ρ_{\max}	160,5	140,9	106,6	63,2
Q_1	303	309	281	278
$T=823^\circ\text{C}$				
ρ_{\max}	68,7	65,8	57,86	45,9
Q_1	230	219	125	120

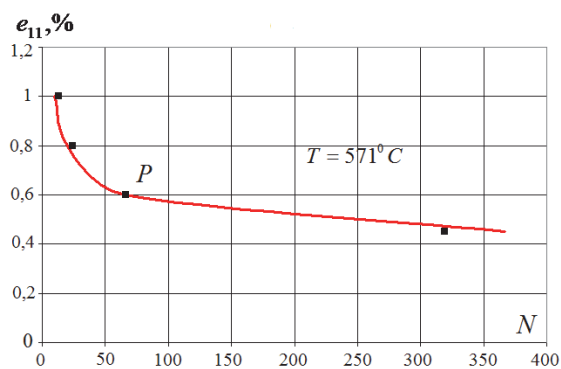
Расчёт процесса термоциклического деформирования и накопления повреждений проводился по программе «EXPMODEL», предназначенной для расчётного моделирования неизо термического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при произвольном нерегулярном нестационарном термомеханическом нагружении.

Для оценки применимости предложенного эволюционного уравнения накопления усталостных повреждений (11) и исследования влияния траектории деформирования на малоцикловую усталость жаропрочных сплавов были проведены расчёты процессов термоциклического деформирования и усталостной долговечности образцов, выполненных из жаропрочного сплава Nimonic 80A, при различных заданных законах изменения осевой деформации ϵ_{11} и температуры T (см. рис. 1) [17]. Расчётные результаты сравнивались с имеющимися опытными данными [17], отмеченными квадратными маркерами на рис. 2. Для определения материальных параметров эволюционного уравнения накопления повреждений использовалась точка P на усталостной кривой при изотермическом циклическом деформировании (рис. 2). Материальные параметры эволюционного уравнения накопления повреждений (11) жаропрочного сплава Nimonic 80A приведены в таблице 1.

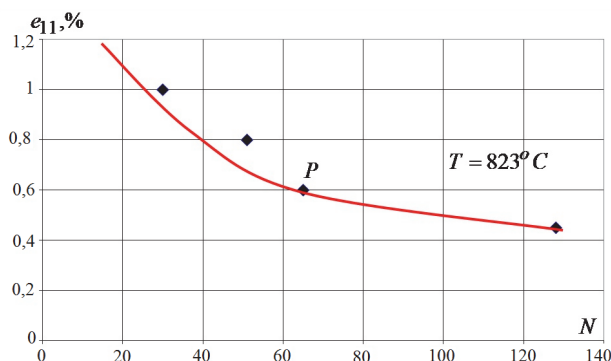
Результаты расчётов, их сравнение с имеющимися опытными данными приведены на рис. 2–6 и в табл. 4. На рис. 2 представлены изотермические кривые усталости, а на рис. 3а, б – неизо термические кривые усталости для синфазного и противофазного режимов нагружения. Изотермические испытания для различных температур $T = 571^\circ\text{C}$ и 823°C (рис. 2а, 2б соответственно) и неизо термические – синфазные (рис. 3а) и противофазные (рис. 3б). Сплошными красными линиями отмечены соответствующие расчётные кривые усталостной долговечности. Квадратными маркерами отмечены результаты опытов. На рис. 4–6 показана зависимость величины повреждённости ω от числа циклов нагружения N соответственно для двух вариантов нагружения соответственно (см. рис. 1б и 1в).

Таблица 4. Результаты расчётов и сравнение с экспериментальными данными для изотермических и неизотермических режимов деформирования

Режим нагружения		Амплитуда деформаций, $e_{11}, \%$	Число циклов до разрушения, N_f	
			экспериментальное	расчётное
Изотермический	$T = 571^\circ C$	0,45	319	367
		0,6	66	66
		0,8	24	20
		1	13	10
	$T = 823^\circ C$	0,45	128	140
		0,6	65	64
		0,8	51	42
Неизотермический синфазный		1	30	25
	0,45	230	255	
	0,6	73	65	
	0,8	32	31	
Неизотермический противофазный		1	20	17
	0,45	325	255	
	0,6	60	64	
	0,8	35	30	

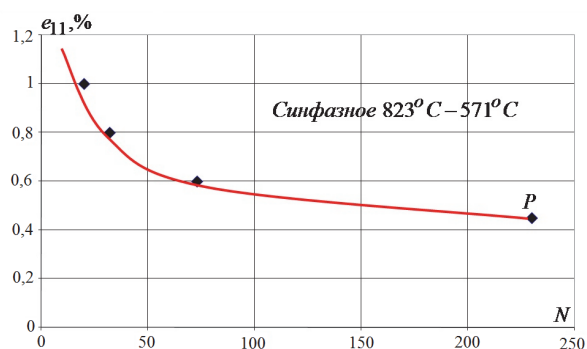


а)

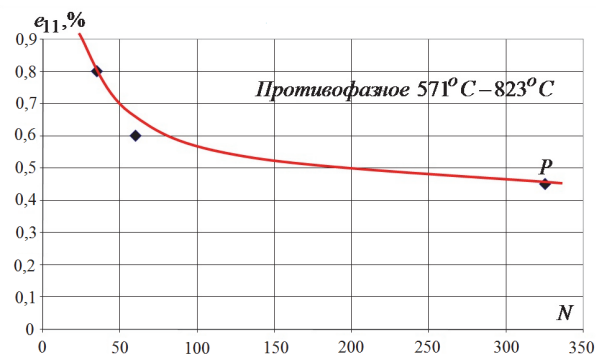


б)

Рис. 2. Изотермические кривые усталости жаропрочного сплава Nimonic 80A при температурах $T = 571^\circ C$ (а) и $T = 823^\circ C$ (б)



а)



б)

Рис. 3. Кривые усталости жаропрочного сплава Nimonic 80A для синфазного (а) и противофазного (б) режимов термомеханического деформирования

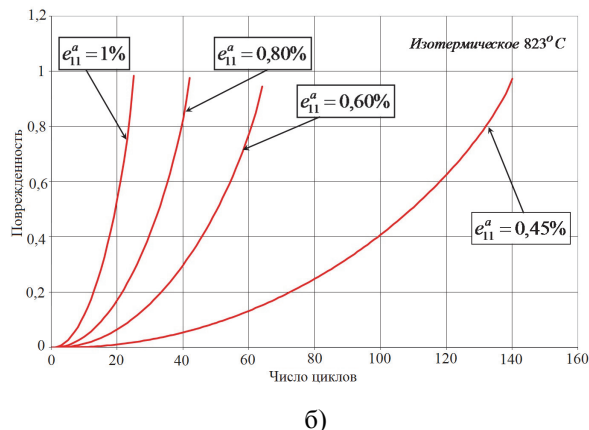
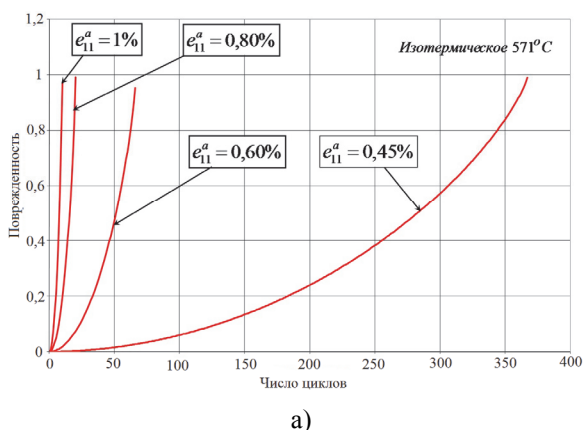


Рис. 4. Зависимость величины поврежденности ω от числа циклов нагружения N при изотермических режимах деформирования: при $T = 571^\circ\text{C}$ (а), при $T = 823^\circ\text{C}$ (б)

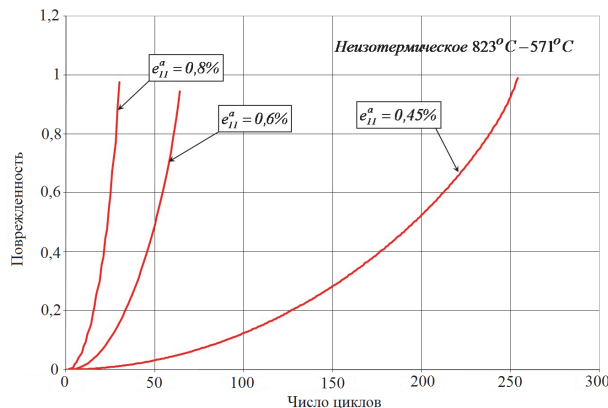
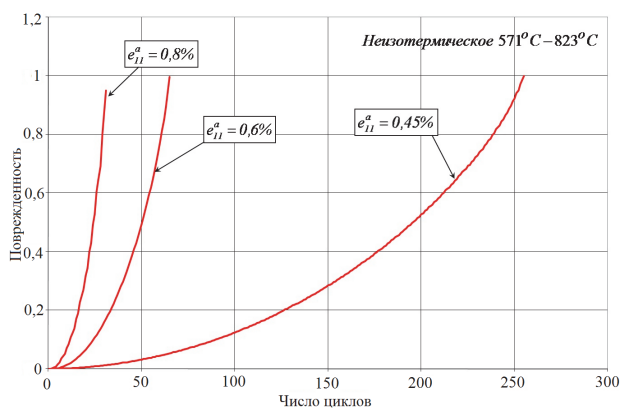


Рис. 5. Зависимость ω от N при неизотермическом режиме синфазного деформирования

Рис. 6. Зависимость ω от N при неизотермическом режиме противофазного деформирования

Результаты расчётной и экспериментальной информации показывают, что:

- при известных параметрах уравнений циклической термопластичности по одной экспериментальной точке P на усталостной кривой (см. рис. 2) определяются материальные параметры эволюционных уравнений накопления повреждений (11–14), с помощью которых кривые малоциклового усталости для различных траекторий деформирования восстанавливается расчётным путём с высокой точностью;

- развитая в работах [8–11] модель поврежденной среды с достаточной для инженерных расчётов точностью описывает процессы изотермического и неизотермического деформирования и накопления усталостных напряжений при комбинированном термомеханическом нагружении и позволяет рассчитывать малоцикловую усталостную долговечность жаропрочных сплавов при произвольных траекториях деформирования;

- для изотермических режимов деформирования при амплитуде деформаций $e_{11} = 0,45\%$ наблюдается существенное влияние температуры на усталостную долговечность сплава: с ростом температуры усталостная долговечность снижается (так при $T = 571^\circ\text{C}$ число циклов до разрушения $N_f = 367$, в то время как при $T = 823^\circ\text{C}$ – $N_f = 140$). С ростом амплитуды деформации эта тенденция исчезает (см. табл. 4);

- для неизотермических режимов деформирования в данном диапазоне изменения температур ($571^\circ\text{C} - 823^\circ\text{C}$) жаропрочный сплав Nimonic 80А демонстрирует нечувствительность к фазности изменения температуры и механической деформации (табл. 4).

Заключение

Проведена оценка адекватности модели повреждённой среды путём сопоставления результатов численных расчётов с известными из литературы опытными данными по малоцикловой усталостной долговечности при изотермических и неизотермических режимах комбинированного термомеханического деформирования, которые подтверждают правильность моделирования процессов сложного циклического термомеханического деформирования и усталостной долговечности жаропрочных сплавов.

Литература

1. Hulford G. R. Low cycle thermal fatigue. Mechanics and Mathematical Methods / F Thermal stress II. Chapter 6. Elsevier Science Publishers B.V., 1987, p. 329 – 428.
2. Исследование малоцикловой прочности при высоких температурах: Под. ред. С. В. Серенсена. – М.: Наука, 1975.
3. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
4. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Int. J. Plasticity. – 1989. – V. 5, N. 3. – P. 247-302.
5. Корум. Оценка современной методологии проектирования высокотемпературных элементов конструкций на основе экспериментов по их разрушению / Корум, Сартори // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. - № 1. – С. 104 - 118.
6. Bernard-Connelly M. Low-cycle fatigue behaviour and cumulative damage effect of SA-516-70 steel at room and high temperature / M. Bernard-Connelly, A. Biron, T. Bue-Quic // Journal Random Fatigue Life Predictions Asme Publ. – 1980. – p. 297-302.
7. Гусенков А. П. Прочность при малоцикловом и длительном циклическом нагружении и нагреве / А. П. Гусенков, А. Г. Казанцев // М.:Машиноведение. – 1979. - № 3. – С. 59 – 65.
8. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
9. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Моделирование сложного пластического деформирования и разрушения металлов при многоосном непропорциональном нагружении // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, № 5. – С. 193-205.
10. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 5-18.
11. Волков И.А., Шишулин Д.Н., Казаков Д.А., Пичков С.Н. Моделирование основных закономерностей процесса деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах на базе концепции механики повреждённой среды // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – № 74. – С. 16-27.
12. Темис Ю.М. Модель кривой неизотермического циклического деформирования / Ю.М. Темис, А.И. Факеев// Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – № 75. – Ч. 1 – С. 5–10.
13. Темис Ю.М. Моделирование малоцикловой усталости при неизотермическом нагружении / Ю.М. Темис, Х.Х. Азметов, А.И. Факеев // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4.– С. 1–13 URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/674.html>
14. Боднер С.Р., Линдхолм У.С. Критерий приращения повреждения для зависящего от времени разрушения материалов // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1976. – Т. 100, № 2. – С. 51-58.
15. Леметр Ж. Континуальная модель повреждения, используемая для расчёта разрушения пластичных материалов // Труды Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, № 1. – С. 90-98.
16. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage and its experimental verification // J. Méc. Théor. Appl. – 1982. – V. 1. – P. 743-761.
17. Liang Jin, Pellox R.M., Xie Xishan Thermomechanical fatigue behavior of a nickel base superalloy // Chin. J. Met. Sci. Technol. 1989. V. 5. P. 1–7.

УДК: 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А.Н. Кудинов

Тверской государственный университет, Тверь, Россия, tanctu@mail.ru

Аннотация. На основе вариационного соотношения анизотропного тела и энергетического критерия формы Брайана построена математическая модель процесса потери устойчивости. С использованием вариационного разностного метода построения численной модели позволяющий проводить анализ устойчивости композиционных тонкостенных систем с позиции теории упругости.

Ключевые слова: устойчивость, анизотропия, нелинейность, трехмерность, вариационный разностный метод критические параметры.

1. Исходные соотношения

Для описания основного до критического процесса деформирования неоднородных тонкостенных систем положен в основу вариационной соотношения упругости анизотропного тела [1], [2] с учетом геометрической нелинейности.

Тензор конечных деформаций в системе координат α, β, γ тела вращения представлен в наших работах. Закон Гука, в предположении, что в каждой точке тела плоскостью упругости метре аппендикулярные к соответствующим ортогональным координатам направлением α, β, γ принимаем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= a_{11}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{12}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{13}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= a_{12}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{22}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{23}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= a_{13}\varepsilon_{\alpha\alpha} + a_{23}\varepsilon_{\beta\beta} + a_{33}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_{\gamma\alpha} &= a_{44}\varepsilon_{\gamma\alpha}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = a_{55}\varepsilon_{\beta\gamma}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = a_{66}\varepsilon_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{1}$$

где коэффициенты σ_{ij} соответствующим образом выражаются через упругие физико-механические характеристики (модуль упругости - $E_\gamma, E_\alpha, E_\beta$ и модуль сдвига - $\zeta_{\beta\gamma}, \zeta_{\alpha\gamma}, \zeta_{\alpha\beta}$, коэффициент Пуассона $\nu_{\beta\alpha}, \nu_{\beta\gamma}, \nu_{\gamma\alpha}, \nu_{\gamma\beta}$) [5].

Для упругого тела при действии консервативных нагрузок, когда смещение тела как жестко целого исключено, используем следующее выражение полной потенциальной энергии

$$\mathcal{E} = U + \Pi,\tag{2}$$

где U – внутренняя потенциальная энергия упругой деформации, Π – потенциал внешних сил.

Внутренняя потенциальная энергия упругой деформации U определяется выражением

$$U = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (i, j = \gamma, \beta, \alpha),\tag{3}$$

где V – объем тела.

Потенциал внешних сил вычисляется по формуле:

$$\Pi = - \int_V (\varphi_\gamma u + \varphi_\beta v + \varphi_\alpha w) - \int_S (p_\gamma u + p_\beta v + p_\alpha w)\tag{4}$$

где $\varphi_\gamma, \varphi_\beta, \varphi_\alpha$ – заданные в объеме тела V , а $p_\gamma, p_\beta, p_\alpha$ заданные на поверхности S функции, определяющие проекции нагрузок по направлению осей координат γ, α, β .

Исходя из вариационной постановки задачи [3], при нахождении перемещений, сообщающих минимум функционалу (2), следует удовлетворить условиям Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial w} = 0.\tag{5}$$

Окончательный вид этих уравнений с учетом геометрической нелинейности представлен в наших работах [4, 5]. Граничные условия, исходя из вариационного принципа, учитываются естественным образом.

2. Математическая модель процесса потери устойчивости деформированных систем

В качестве критерия устойчивости консервативных систем используем энергетический критерий в форме Брайана, позволяющий учитывать докритическое НДС деформируемых систем.

Исходя из представления о возможности появления смежных форм равновесия упругой системы при действии консервативных нагрузок, когда исходное состояние системы перестает быть устойчивым, перемещение точек этой системы представляем в виде:

$$u = u^0 + \mu u', \quad v = v^0 - \mu v', \quad w = w^0 + \mu w', \quad (6)$$

где $u^0 = u^0(\alpha, \beta, \gamma)$, $v^0 = v^0(\alpha, \beta, \gamma)$, $w^0 = w^0(\alpha, \beta, \gamma)$ – смещения характеризующие докритическое НДС системы; $u' = u'(\alpha, \beta, \gamma)$, $v' = v'(\alpha, \beta, \gamma)$, $w' = w'(\alpha, \beta, \gamma)$ – дополнительные перемещения, описывающие появление смежной формы равновесия; μ – бесконечно малая величина.

Тогда компоненты конечного тензора деформаций могут быть представлены с точностью до слагаемых с множителем μ^2 включительно в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \mu \varepsilon_{ij}' + \mu^2 \varepsilon_{ij}'', \quad (i, j = \alpha, \beta, \gamma) \quad (7)$$

Выражения для величин ε_{ij}^0 , ε_{ij}' , ε_{ij}'' представлены в наших работах [6,7].

Функционал полной потенциальной энергии упругой деформации (2) с учетом (7) представим в виде:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 + \mu \mathcal{E}^2 + \mu^2 \mathcal{E}^1, \quad (8)$$

где $\mathcal{E}^0 = U^0 + \Pi^0$ – энергия деформации в исходном состоянии равновесия, $\mathcal{E}^2 = U^2 + \Pi^1$, $\mathcal{E}^1 = U'$.

Величины U^0 , U' представляют собой квадратичные функционалы относительно неизвестных перемещений u^0, v^0, w^0 и u', v', w' .

На основании теоремы Лагранжа условие существования смежной формы равновесия тела приводит к уравнению

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (9)$$

В предположении об устойчивости исходного состояния равновесия, описываемого перемещениями u^0, v^0, w^0 , из уравнения (9) следует вариационное уравнение

$$\delta \mathcal{E}^0 = 0, \quad (10)$$

а также уравнение, являющееся критерием устойчивости в форме Брайана:

$$\delta \mathcal{E}^1 = 0. \quad (11)$$

На основании уравнения (10) определяется докритическое НДС, соответствующее переменным u^0, v^0, w^0 . Уравнение (11), при известном докритическом НДС, позволяет определить критические значения параметров, при которых появляется смежная форма равновесия.

3. Численная модель

В соответствии с общими положениями вариационно-разностного метода функционалы \mathcal{E}^q ($q = 0, 1$) в (10) и (11) заменяются их дискретными аналогами. Для этого область V , занимаемая телом, разбивается на элементарные ячейки, образованные, например, координатными поверхностями:

$$\gamma = \gamma_l, \quad \beta = \beta_m, \quad \alpha = \alpha_k \quad (l = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1 \dots K).$$

После введения усредненных по ячейкам значений, входящих в функционалы $\mathcal{E}^q(u, v, w)$ функций, и аппроксимации производных от непрерывных значений перемещений через узловые перемещения $u_{klm}^q, v_{klm}^q, w_{klm}^q$, необходимые условия выполнения вариационных множеств (10) и (11) приводят к системе сеточных уравнений вида:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^q(u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk})}{\partial u_{lmk}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^q(u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk})}{\partial v_{lmk}} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^q(u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk})}{\partial w_{lmk}} = 0.$$

Здесь индекс $q = 0$ соответствует задаче определения докритического НДС, индекс $q = 1$ – задачи устойчивости. Как показано в наших работах [4, 5] обычные аппроксимации оказались непригодными для расчета НДС тонких протяженных оболочек с позиций трехмерной теории упругости вследствие значительных различий в размерах ячеек сетки в направлении нормали срединной поверхности и других координатных линий. Естественно, что использовать ячейки, все размеры которых были бы сопоставимы с толщиной, для тонких оболочек практически либо невозможно, либо нецелесообразно в связи с ограничением на быстродействие и оперативную память ЭВМ.

С учетом этих ограничений, весьма эффективным оказалось использование соотношений, введенных в наших работах [4, 6, 7]. Некоторые из этих соотношений можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_i = \frac{\left\{\sum_{j=1}^Q (\Psi_j^e + \Psi_{j+1}^e)(\beta_j^e + \beta_{j+1}^e)\right\}}{2A^e},$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\right)_i = \frac{\left\{\sum_{j=1}^Q (\Psi_j^e + \Psi_{j+1}^e)(s_j^e + s_{j+1}^e)\right\}}{2A^e}, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\right)_i = \frac{1}{2Q} \sum_{j=1}^Q (\Psi_j^{e-1} + \Psi_{j+1}^e) \frac{1}{\gamma_j^{e-1} - \gamma_{j+1}^e} + \frac{1}{2Q} \sum_{j=1}^Q (\Psi_j^e + \Psi_{j+1}^{e+1}) \frac{1}{\gamma_j^e - \gamma_{j+1}^{e+1}}.$$

Здесь введем обозначения: $\Psi = u^q, v^q, w^q$, ($q = 0, 1$); индекс l – указывает на номер слоя по толщине оболочки, к которому относится смещение или перемещение; γ_i^e – координата центра тяжести i -ой ячейки в слое l сетки; A^e – площадь сечения поверхностью $\gamma = \gamma_i^e$; Q – число узлов i -ой ячейки сетки.

Таким образом, для производных $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}$ используется аппроксимации производных,

обычно принимаемые, а для $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}$ вводится элементная аппроксимация.

Таким образом, использование аппроксимирующего соотношения вида (13) сводит задачи расчета НДС и задачи устойчивости оболочечных конструкций к решению систем сеточных уравнений, получаемых из уравнений (12). Эта система характеризуется ленточными, симметричными относительно главной диагонали матрицы коэффициентов. При этом с характеристикой характерной особенностью этих уравнений является то, что они приводят к Матрица коэффициентов с превалирующим и диагональными элементами независимо от толщины оболочек и соответствующих относительных размеров ячеек конечно разностной сетки по всем координатным направлениям. Все это позволяет успешно использовать для расчета алгоритмы стандартного Гауссова исключения.

4. Определение критических параметров

Система линеаризованных уравнений (12) для решения статической задачи устойчивости равно единице формируется по описанному выше алгоритму после определения параметров критического НДС в предположении что внешние силы и параметры НДС изменяются пропорционально одному параметру, это система очевидным образом может быть представлена в виде

$$B\bar{X} = (A - PM)\bar{X}, \quad (14)$$

где A – положительного определения матрица коэффициентов системы (12) для определения докритического НДС; M – в общем случае не определенная матрица, коэффициент которой зависит от параметров докритического НДС; X – вектор, компонентами которого являются перемещения u, v, w в узлах конечно разностной сетки, описывающие форму равновесия тела. Условие существования нетривиального решения системы (14) приводит к уравнению относительно неизвестного критического параметра – P

$$\det(A - PM) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, задача расчета оболочки на устойчивость сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений, причем требуется определить наименьшее собственное число несоответствующих собственным вектор, описывающий формы потери устойчивости оболочки из уравнений (14) и (15).

Алгоритм поиска критического параметра уравнение (15) для конкретных задач устойчивости представлен в наших работах [4, 6–7]. Сравнительный анализ с известными решениями и экспериментальными данными подтверждает достоверность и работоспособность представленного подхода и численной модели анализа процесс устойчивости неоднородных деформируемых сложных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзаказ № 2014/220, НИРН № 1153).

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука, 1974г. -446с.
2. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. М. ВШ, 1990г. – 368с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. Мир, 1987г. -542.
4. Кудинов А.Н., Колдунов В.А. Численные модели и алгоритмы расчета оболочечных конструкций с пространственных позиций. //Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике. Ижевск: ИПГИ УрО РАН, 1997, с. 74-80.
5. Кудинов А.Н., Колдунов В.А., Черепанов О.Н. Численные модели расчета оболочечных конструкций с трехмерных позиций. Ч.1, г.Тверь, Изд-во ТвГУ, 2006 г. Стр. 87.
6. Кудинов А.Н. Математическое моделирование в механике неоднородных оболочек. // Материалы международного семинара «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек». Изд-во КГУ, г.Казань, 2006, стр.86-88.
7. Кудинов А.Н. Численные модели для расчета НДС и устойчивости оболочечных конструкций с трёхмерных позиций.// Сб.трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики», Изд-во ВГУ, г.Воронеж, 2010г., с. 216-219.

УДК 539.4.015/019

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЫШЕНИЯ СОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ПОВЫШЕНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Л.В. Кукса, В.И. Клименко

*Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет,
Волгоград, Россия, lvk-1967@yandex.ru, vasa_klim@mail.ru*

Аннотация. Работа направлена на исследование критического напряжения и сопротивляемости потере устойчивости сжатых стальных стержней после применения различных способов повышения физико-механических свойств.

Ключевые слова: критическая сила, устойчивость, физико-механические свойства.

Проблема устойчивости элементов конструкций и деталей машин является одной из наиболее актуальных проблем сопротивления материалов, строительной механики, механики деформируемого твердого тела, она тесно связана с дальнейшим развитием техники и строительства. Несущая способность конструкций, повышение их прочности, надежности, снижение материалоемкости во многих случаях определяются их устойчивостью [1]. Учитывая зависимость критического напряжения от физико-механических свойств и гибкости стержня, приведены результаты исследования устойчивости сжатых стальных стержней с разной гибкостью путем применения различных способов упрочнения конструкционных материалов. Выполнены исследования устойчивости упрочненных сжатых стержней на основе разработки экспериментальной установки, позволяющей испытывать стержни большой гибкости на сжатие, разработки метода упрочнения с помощью механико-термической обработки и применения различных способов упрочнения.

В настоящее время, существующее экспериментальное оборудование для испытаний на устойчивость с целью определения критической силы имеет не только различные конструктивные особенности, но и различную точность определения экспериментальных значений критической нагрузки. Для экспериментальных установок, которые широко используются в учебных и заводских лабораториях, основным вопросом является сложность обеспечения центрального приложения сжимающей силы, невозможность использования испытываемых образцов различного поперечного сечения при различных закреплениях концов стержня. В разработанном устройстве для испытания на устойчивость металлических образцов были, по возможности, устранены значимые недостатки существующих приспособлений.

Для испытания на устойчивость, с использованием стандартных испытательных машин, с записью диаграмм деформации для определения критической силы, на кафедре «Сопротивление материалов» (ВолгГАСУ) разработано устройство, защищенное Патентом РФ [2]. Устройство имеет простую конструкцию и повышенную точность приложения нагрузки, а также обеспечивается возможность проводить испытания с различными способами закрепления концов стержня. Для концов стержня реализуются шарнирные закрепления и закрепления в виде жесткой заделки. Использование экспериментальной установки, описанной выше, не позволяет производить деформирование образцов большой гибкости до больших степеней деформации без потери устойчивости путем приложения статических сжимающих нагрузок. Для решения этого вопроса на основе указанной выше экспериментальной установки, использованной в качестве прототипа, на кафедре «Сопротивление материалов» ВолгГАСУ разработана усовершенствованная экспериментальная установка для испытания на устойчивость [3], позволяющая производить сжатие образцов большой гибкости путем приложения сжимающей нагрузки до больших степеней деформации без потери устойчивости, что достигается за счет повышения жесткости системы и существенного уменьшения гибкости образцов. Для этого используются концевые закрепления образца в виде жесткой заделки, а также промежуточные опоры. Установка также позволяет значительно расширить варианты закреплений стержня при испытаниях на устойчивость.

Для повышения сопротивляемости потере устойчивости применена разработанная на кафедре «Сопротивление материалов» ВолгГАСУ многократная механико-термическая обработка (ММТО), основанная на деформационном старении [4]. ММТО состоит из нескольких циклов и может быть применена для металлов, деформирующихся с образованием площадки текучести. При проведении каждого цикла ММТО производится деформирование образцов на величину полной площадки текучести с помощью сжимающей нагрузки. Затем производится искусственное старение, заключающееся в нагреве и выдержке при определенной температуре. Старение предварительно наклепанного материала приводит к появлению площадки текучести при повторном нагружении, что позволяет провести следующий цикл упрочнения - еще раз деформировать образец на величину полной площадки текучести, нагреть до заданной температуры и произвести выдержку при этой температуре. С каждым последующим циклом упрочнения происходит повышение прочностных свойств материала – предела текучести при сжатии. Количество циклов деформационного старения обуславливается требованием к прочностным свойствам материала, которые необходимо получить.

Результаты исследования влияния температуры и количества циклов деформационного старения на прочностные свойства материала – предел текучести, показаны на образцах из стали 20 на рис. 1. Кривые упрочнения пластичных материалов при растяжении и сжатии имеют одинаковый вид [5], поэтому при упрочнении образцов пластическое деформирование производилось с помощью приложения растягивающей нагрузки.

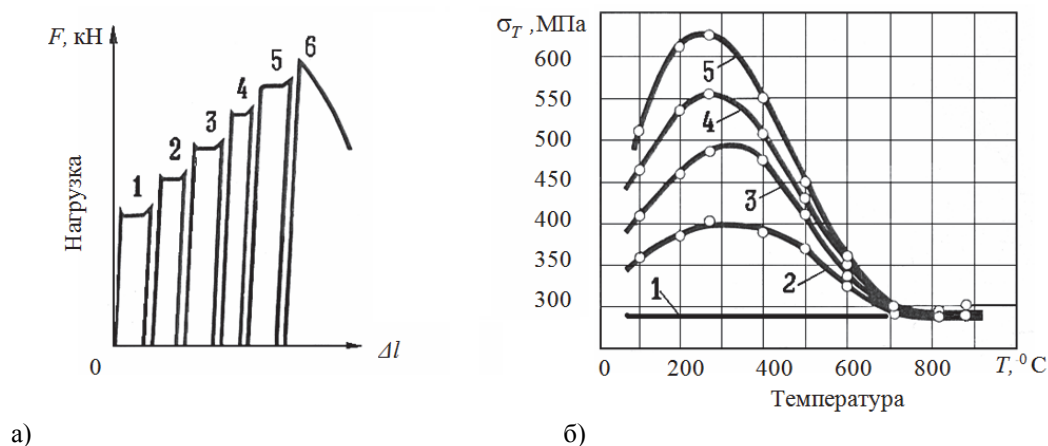


Рис. 1. Повышение предела текучести после многократной механико-термической обработки стали 20:
 а – ступени нагружения при пластическом деформировании образца;
 б – зависимости предела текучести от температуры старения при различных ступенях нагружения

При повышении температуры старения происходит увеличение эффекта упрочнения, и наибольшее повышение значения предела текучести при растяжении при различном количестве циклов упрочнения наблюдается в диапазоне температур 250–300⁰ С.

Исследование устойчивости сжатых стержней проводится на основе определения значения силы, при которой центрально сжатый стержень отклоняется от своего исходного вертикального состояния и увеличения силы не происходит, а отклонение от исходного состояния резко увеличивается. По полученному значению силы, называемому критической, определяется значение критического напряжения, которое и определяет сопротивляемость стержня потере устойчивости.

Применение ММТО на основе деформационного старения для стальных стержней с гибкостью $\lambda < \lambda_0$ приводит к повышению критического напряжения и сопротивляемости потере устойчивости. Получены зависимости критических напряжений $\sigma_{кр}$ от гибкости λ для металлических образцов из стали 20 (рис. 2а) в следующих состояниях: в исходном (неупрочненном) состоянии, после упрочнения с помощью одного, двух, трех и четырех циклов деформационного старения [6]. После четырех циклов упрочнения с помощью ММТО критическое напряжение повышается более чем на 50 %.

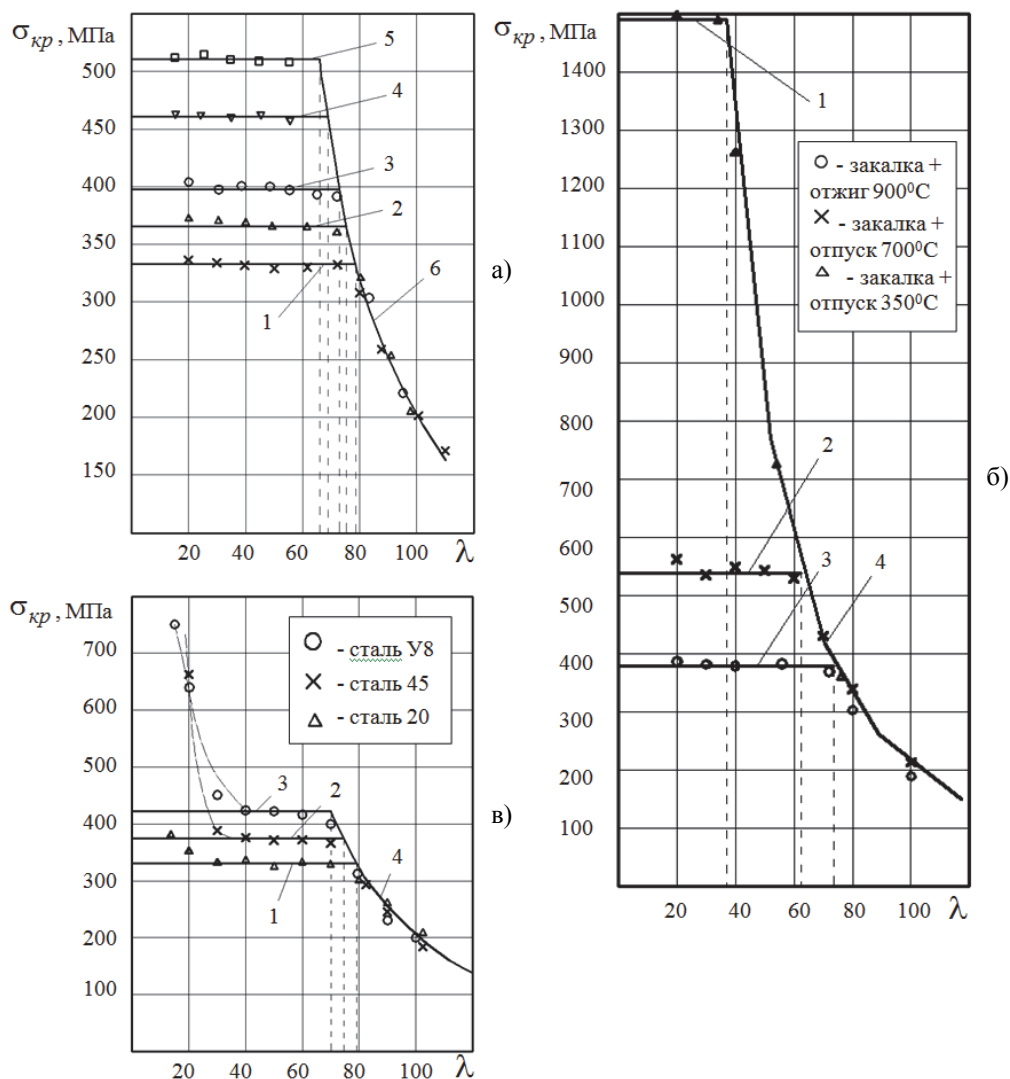


Рис. 2. Зависимости критических напряжений $\sigma_{кр}$ от гибкости λ :

- а) для стали 20 в зависимости от количества циклов упрочнения: 1 – прямая $\sigma_{кр} = \sigma_T$ без упрочнения; 2, 3, 4, 5 – один, два, три, четыре цикла упрочнения соответственно; 6 – кривая Эйлера $\sigma_{кр} = (\pi^2 \cdot E) / \lambda^2$;
- б) для стали 45 в зависимости от термической обработки: 1 – прямая $\sigma_{кр} = \sigma_T$ для закалка + отпуск 350⁰С; 2 - прямая $\sigma_{кр} = \sigma_T$ для закалка + отпуск 700⁰ С (структура сорбит); 3 – прямая $\sigma_{кр} = \sigma_T$ для закалка + отжиг 900⁰ С (структура феррит+перлит) ; 4 – кривая Эйлера $\sigma_{кр} = (\pi^2 \cdot E) / \lambda^2$;
- в) в зависимости от марки стали: 1, 2, 3 – прямые $\sigma_{кр} = \sigma_T$ для стали 20 , стали 45, стали У8 соответственно; 4 – кривая Эйлера $\sigma_{кр} = (\pi^2 \cdot E) / \lambda^2$; \times , Δ , \circ , ∇ , \square – экспериментальные точки;
- штриховой линией на рисунках показано значение $\lambda_0 = \sqrt{(\pi^2 \cdot E) / \sigma_T}$

Проведение термической обработки приводит к увеличению критического напряжения для стержней с гибкостью $\lambda < \lambda_0$. Влияние термообработки на критическое напряжение рассматривалось на примере стали 45 (рис. 2 б) [6]. Выбирая различные режимы термообработки можно получить значительный прирост критического напряжения и сопротивляемости потере устойчивости.

Увеличения значения критического напряжения можно добиться изменением процентного содержания структурных составляющих стали – феррита и перлита. На рис. 3 в представлены зависимости критического напряжения от гибкости для стержней, изготовленных из различных марок стали – стали 20, стали 45, стали У8 [6]. Увеличение процентного

содержания углерода для стержней с гибкостью $\lambda < \lambda_0$ приводит к повышению критического напряжения и сопротивляемости потере устойчивости.

Повышения критического напряжения и сопротивления потере устойчивости также можно добиться с помощью наклепа. Под наклепом понимают изменение структуры и свойств металла, вызванное холодной пластической деформацией или же фазовыми превращениями. В процессе холодной пластической деформации происходит скольжение отдельных частей зерен относительно друг друга в направлениях, наиболее густо заполненных атомами. Процесс скольжения является следствием перемещения в зернах дислокаций – несовершенств кристаллической структуры материала. Упрочнение при наклепе связано с измельчением структуры, увеличением угла разориентировки зерен и созданием упругих неоднородных микронапряжений, что приводит к увеличению препятствий для перемещения дислокаций. Влияние наклепа на механические свойства стали отражается в увеличении прочностных и уменьшении пластических свойств [7, 8]. Испытания на устойчивость стальных образцов, упрочненных с помощью наклепа, с применением разработанной экспериментальной установки показывают (табл. 1), что с увеличением степени пластической деформации и напряжения, достигнутых при наклепе, происходит повышение критического напряжения. Однако при больших степенях деформации значение критического напряжения меньше, чем напряжение, достигнутое при предварительном сжатии.

Таблица 1. Упрочнение стержней с помощью наклепа

Предел текучести в исходном состоянии, МПа	Напряжение, достигнутое при наклепе, МПа	Прирост напряжения по сравнению с пределом текучести в исходном состоянии, %	Критическое напряжение $\sigma_{кр}$, МПа	Прирост критического напряжения по сравнению с пределом текучести в исходном состоянии, %
330	380	15,2	382	15,8
	430	30,3	400	21,2
	480	45,4	409	23,9
	530	60,6	418	26,7

Разработка метода упрочнения и установление зависимости критического напряжения от гибкости для стальных стержней, после применение различных способов повышения физико-механических свойств, вносят вклад в развитие общих принципов расчета сооружений и их элементов на устойчивость. Разработка экспериментальной установки для исследования устойчивости сжатых стержней при различных условиях закрепления концевых и промежуточных сечений способствует дальнейшему развитию экспериментальных методов исследования сооружений и их элементов. Полученные данные по методу упрочнения и разработке способа сжатия стержней большой гибкости позволяют производить упрочнение реальных элементов конструкций и, следовательно, повысить значение критической силы для сжатых стержней.

Литература

1. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т.1. М: ФИЗМАТЛИТ. – 2007. – 448 с.
2. Пат. 2289804 Рос. Федерация, Устройство для испытания на устойчивость металлических образцов : МПК[51] G01N 3/02 / Л. В. Кукса, А. В. Черепенников ; - № 2005120925/28 ; заявл. 04.07.2005 ; опублик. 20.12.2006. - Бюл. № 35.
3. Пат. 2492445 Рос. Федерация. Устройство для испытания на устойчивость : МПК[51] G01N 3/02 / Л. В. Кукса, В. И. Клименко ; - № 2012115009/28 ; заявл. 16.04.2012 ; опублик. 10.09.2013 Бюл. № 25.
4. Пат. 2512677 Рос. Федерация. Способ повышения прочностных свойств стали и сопротивления потере устойчивости : МПК[51] C21B 8/00 / Л. В. Кукса, В. И. Клименко ; - № 2011122107/28 ; заявл. 31.05.2011 ; опублик. 10.04.2014 Бюл. № 10.
5. Гурьев А.В., Кукса Л.В. О построении действительной кривой упрочнения металлов по испытаниям на растяжение и сжатие // Заводская лаборатория. – 1964. - Т. 30. - Вып. 10. - С. 1258-1259.
6. Кукса Л.В., Клименко В.И. Устойчивость упрочненных сжатых стержней в зависимости от их структуры и физико-механических свойств: науч. монография. Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — 176 с.
7. Металловедение и термическая обработка стали Т. 1. М.: Металлургия. 1961. – 747 с.
8. Металловедение и термическая обработка стали Т. 2. М.: Металлургия. 1983. – 368 с.

УДК 539.4

РАЗВИТИЕ СТРУКТУРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕЗОМЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ СТАЛЬНЫХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Н.А. Малинина, В.Г. Малинин, В.В. Малинин, А.А. Димов

Орловский государственный аграрный университет, Орёл, Россия, malinin.mvg@yandex.ru

Аннотация. В данной статье приведены результаты работы направленной на создание методов построения критериев разрушения для тел имеющих макроскопические концентраторы напряжений. На основе методов структурно-аналитической мезомеханики сформулирован двухуровневый критерий разрушения. Особое внимание уделено формулировке уравнений для расчета критического максимального локального растягивающего напряжения в материалах испытывающих высокие градиенты макронапряжений.

Ключевые слова: структурно-аналитическая мезомеханика, критерий квазихрупкого разрушения, структурные концентраторы напряжений, собственное магнитное поле рассеяния.

Введение

Значительные успехи в изучении процесса квазихрупкого разрушения возникли в результате плодотворного синтеза достижений механики разрушения, металловедения, физики твердого тела и методов неразрушающего контроля. Органическое объединение указанных дисциплин позволила развивать новое научное направление – структурно-аналитическую мезомеханику разрушения [1-3]. Большой вклад в изучение физики и механики хрупкого разрушения внесен в работах В.А. Лихачева, В.Е. Панина, В.И. Трефилова, Н.А. Махутова, Л.Р. Ботвиной, Е.М. Морозова, В.И. Саррака, Г.А. Филиппова, Ю.Я. Мешкова, М.Я. Леонова, К.Н. Русинко, М.А. Легана, А.А. Дубова, Д.Ф. Нотта и других ученых [1-4].

Для хрупкого разрушения ключевым вопросом является вопрос о локальном критерии предельного состояния материала. Именно такой критерий определяет переход металла в некоторой критической области (в окрестности вершины трещины или надреза) из устойчивого состояния к разрушению. Такой критерий должен учитывать конкретный микро механизм разрушения и структурное состояние стали. В то же время, рассматриваемый критерий существенно зависит от напряженно деформируемого состояния материала и истории нагружения в зоне локального разрушения.

Известен критерий максимального растягивающего напряжения, предложенный Орованом [5, 17]. Г.В. Ужиком, Л.А. Копельманом, Ю.Я. Мешковым были обоснованы и развиты с позиций физики и механики его основные положения [4-6]. В отличие от критериев классической механики разрушения, рассматривающих критическое состояние образца или детали с уже имеющейся трещиной, вышеуказанный критерий рассматривает критическое состояние материала без исходной трещины. Он основан на решении задачи о критической концентрации напряжений и не связан с необходимостью введения параметра длины, фиксирующей место начала разрушения стали. Зона локального разрушения в этом случае совпадает с положением локального пика растягивающих напряжений. Причем в случае реального материала наличие различного рода структурных дефектов вносит свой вклад в снижение прочности и место начала разрушения не обязательно совпадает с положением пика напряжений, однако можно выделить характерную "зону" протекания процесса локального разрушения, ограниченную критическим напряжением.

В работах, развиваемых под руководством В.И. Саррака, Г.А. Филиппова, Ю.А. Мешкова [4-6, 8], полагали, что силовой критерий локального разрушения может быть положен в основу критериев хрупкого разрушения, как при кратковременном нагружении, связанного с понижением температуры испытаний, так и длительном приложении нагрузки - замедленном разрушении. В связи с выше изложенным, значительный научный и практический интерес представляет дальнейшее развитие силового критерия локального разрушения, не зависящего от внешних условий нагружения, дающего возможность физически обоснованно прогнозировать конструктивную прочность стальных деталей.

Двухуровневый структурно-аналитический критерий разрушения

Критерий основан на методах структурно-аналитической мезомеханики, магнитной памяти металла [9, 10, 17], результатах обстоятельных исследованиях на различных марках сталей критерия критического максимального растягивающего напряжения [4-6, 16]. В обозначенных работах представлены экспериментальное обоснование инвариантности обсуждаемого критерия к таким внешним факторам как геометрия концентраторов напряжений и образцов, вид напряженного состояния, скорость нагружения и температура испытаний [4-6, 16].

Учет масштабного фактора в очаге разрушения достигается использованием основных наработок полученных при формулировке градиентного подхода в механике разрушения [11, 12].

Объединяющей основой вышеприведенных результатов при формулировке критерия разрушения являются методы структурно-аналитической мезомеханики, использующие представления о ориентационном пространстве структурных элементов деформаций и разрушений, эффективных напряжениях и принципе эквивалентности [1, 2, 17, 18]. Следуя [17, 18] будем считать, что разрушение наступит, когда максимальная повреждаемость в наиболее нагруженном структурном элементе достигнет критической величины.

Сформулируем вариант двухуровневого критерия разрушения, предполагая, что для образования и развития трещины в окрестности макро концентратора необходимо выполнение критерия разрушения, как на макромасштабном, так и на структурном (микро- и мезомасштабном) уровнях [1-3].

Рассмотрим случай разрушения детали с макро концентратором по механизму отрыва. Будем считать, что разрушение отрывом в окрестности, рассматриваемой локальной макро точки произойдет, когда выполняются два условия: достижение максимальным локальным растягивающим напряжением σ_{11}^{\max} критического максимального локального растягивающего напряжения σ_F [4, 5, 6] и обязательное выполнение критерия разрушения на структурном уровне, т.е. при достижении структурным параметром q_1 значения q_{np} [17]. Последнее означает, согласно [9, 10], возникновение в данном структурном элементе критической дефектной структуры, характеризуемой предельным состоянием зон структурных концентраторов. Тогда, принимая во внимание условие, согласно которому первоначальное распространение макротрещины будет происходить по площадке действия максимального нормального напряжения σ_{11}^{\max} , т.е. первого главного напряжения и наступит только при выполнении двух названных условий, сформулируем окончательный макроскопический критерий разрушения отрывом Π_0^M в виде:

$$\Pi_0^M = X(\sigma_{11}^{\max} - \sigma_F)X(q_1 - q_{np}) = 1, \quad (1)$$

$$\sigma_F = \sigma_e \left(1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + Lq_1q_2} \right); \quad \beta = \frac{L}{d}, \quad (2)$$

$$q_1 = S_i^{\max} / S_i^{cp}, \quad (3)$$

$$q_2 = (\text{grad}\sigma_{11} \cdot \text{Sign grad}\sigma_{11}) / \sigma_{11}, \quad (4)$$

$$L = [2 / (\pi q_{np})] (K_{1c} / \sigma_B)^2. \quad (5)$$

В формулах (1-5) $X(x)$ – функция Хэвисайда, q_1 – относительный инвариант векторной интенсивности S_i тензора магнитной дисторсии собственного магнитного поля рассеяния [17], характеризует на структурном уровне повреждаемость металла на стадии упрочнения; q_2 – относительный градиент первого главного напряжения, находится из упругого-пластического решения соответствующей краевой задачи. Из формулы (5) следует, что эмпирический параметр L в предложенном критерии разрушения имеет размерность длины, выражен через известные характеристики материала: предел прочности σ_B , критический коэффициент интенсивности напряжений K_{1c} и структурный параметр q_{np} . Обозначения «max» и «cp» в (3)

указывают на максимальное и среднее значения S_i в окрестности макро концентратора; d – характерный размер макро концентратора напряжений.

Сформулированный вариант структурно-аналитического критерия разрушения принципиально отличается от существующих критериев разрушения. Основное отличие состоит в том, что структурно-аналитический критерий содержит два необходимых условия для окончательного разрушения, а именно, кинетический критерий разрушения на структурном уровне, т.е. требование достижения параметром q_1 предельного значения q_{np} , что отражает создание критической дефектной структуры, и силовой критерий на макромасштабном уровне по механизму отрывом.

Важным моментом при таком подходе является естественное объединение методов механики разрушения и методов технической диагностики структурно-механического состояния материала, которое позволяет создать модели, учитывающие взаимовлияние внутренних структурных напряжений в зонах структурных концентраторов и макронапряжений в окрестности макро концентратора на прочностные свойства материалов. Характерно, что для описания прочностных свойств материала около макро концентраторов необходимо введение двух комплексных параметров: структурно-механического (Lq_1q_2) и структурно-геометрического ($\beta = L/d$) содержания. Введенные комплексы отражают взаимное влияние структурных концентраторов и макро концентраторов напряжений на прочностные свойства материала.

В структурно-механическом комплексе Lq_1q_2 один из параметров является характеристикой представительных размеров структурной неоднородности материалов (L). Второй отражает влияние градиентов структурных напряжений (q_1). Третий параметр характеризует влияние градиентов макронапряжений (q_2). Структурно-геометрический комплекс β - представляет собой отношение параметра отражающего характерные размера структурной неоднородности L к представительному размеру макро концентратора d .

Важным элементом сформулированного критерия является также то, что благодаря введенному принципу эквивалентности в нем используются стандартные прочностные характеристики, а именно, предел прочности при одноосном растяжении σ_e , а также инвариантный структурный параметр q_{np} тензора магнитной дисторсии [17].

Заметим, что в общем случае, максимальные значения локального напряжения σ_{11}^{\max} и структурного параметра q_1 могут достигаться в точке, не совпадающей с точкой максимального значения первого главного напряжения. Поэтому при расчете на прочность с использованием критерия (1) - (5), необходимо проверять критерий (1) не только в вершине концентратора, но и в других точках тела.

В соответствие с уравнением (1), если $\Pi_0^M = 1$, то тело разрушится, и оно не будет разрушено, если $\Pi_0^M = 0$. Таким образом, макроскопическое разрушение тела с макро концентраторами напряжений произойдет тогда, когда критического уровня достигнут максимальное локальное растягивающее напряжение σ_{11}^{\max} (в этом случае отражается силовой характер разрушения) и параметр q_1 , что характеризует кинетическую природу разрушения. Отметим, что параметр q_{np} является константой материала и характеризует степень структурной неоднородности и предельную деформационную способность металла в зонах структурных концентраторов напряжений определяемый методом магнитной памяти.

Сопоставление экспериментальных и теоретических исследований

В данном разделе выполнен анализ адекватности критериев разрушения для расчета предельного состояния тонких стальных пластин с концентраторами напряжений. Обосновано преимущество структурно – аналитического градиентного критерия разрушения.

На рис. 1 представлены гистограммы сравнения результатов расчета предельного состояния стальных пластин с различными типами концентраторов с экспериментальными значениями. Расчёт напряженного состояния выполнен в упруго-пластической постановке с использованием ПО ANSYS.

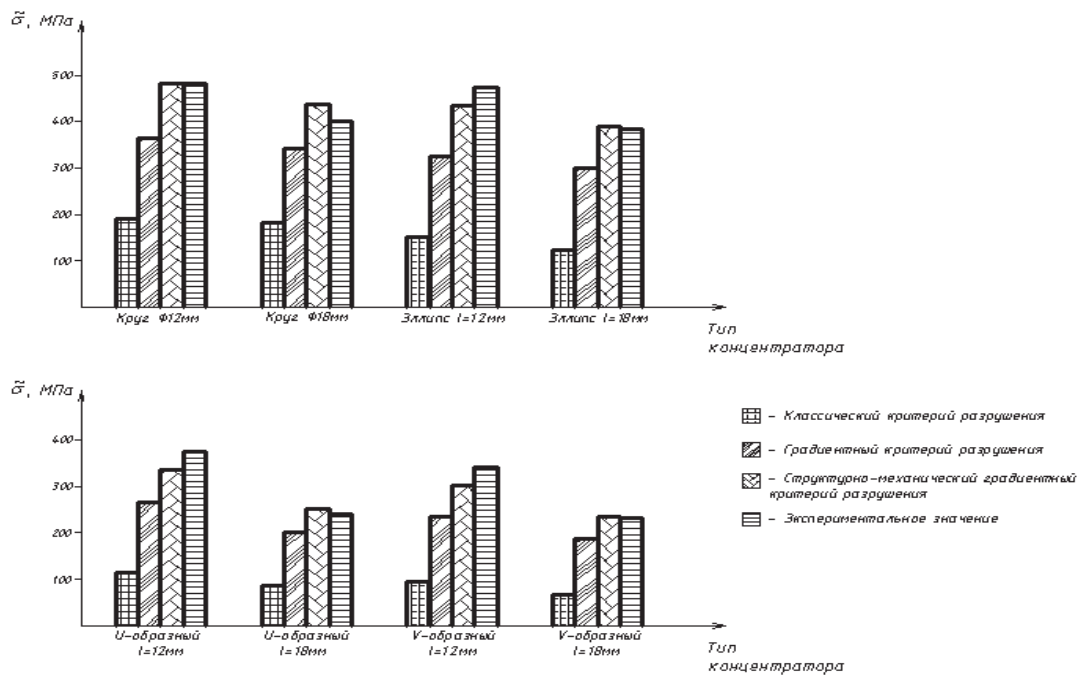


Рис. 1. Сравнение результатов расчета пластин с различными типами концентраторов с экспериментальными данными

Анализируя полученные результаты расчета по классическому (критерий максимальных нормальных напряжений), градиентному [11] и структурно-аналитическому критериям разрушения в сравнении с экспериментальными данными можно отметить, что результаты расчета по классическому критерию разрушения дают значения среднего номинального напряжения $\bar{\sigma}$ на 50–75 % ниже экспериментальных данных. Расчет по градиентному критерию разрушения приводит к значению $\bar{\sigma}$ на 14,6–30 % ниже экспериментальных данных.

Таким образом, учет фактора не локальности свойств, связанного с неравномерным характером напряженного состояния улучшил прогноз почти в три раза. Прогноз выполненный по структурно-аналитическому градиентному критерию разрушения согласуется с экспериментальными данными более полно. Отклонение результатов расчета от данных полученных при испытаниях находится в пределах от 0,5 до 5 %, что практически совпадает с разбросом в экспериментальных исследованиях.

Основные результаты и выводы

Используя междисциплинарный подход, объединяющий основные достижения градиентной механики разрушения, физико-механических моделей максимальных локальных растягивающих напряжений, моделей неразрушающего контроля на основе магнито-механического эффекта и тензорных характеристик собственного магнитного поля метода магнитной памяти металла, развит структурно-аналитический критерий локального разрушения стальных изделий инвариантный к внешним условиям эксплуатации включающих: масштабный и температурных фактор, вид напряженного состояния, размеры изделия и геометрических концентраторов напряжений.

Основные результаты заключаются в следующем:

1. Сформулирован структурно-аналитический градиентный критерий разрушения.
2. Созданы новые математические модели для оценки структурно-механических свойств материала виде тензора магнитной дисторсии и векторной интенсивности собственного магнитного поля рассеяния, дано соответствующее экспериментальное обоснование.
3. Сформулированы уравнения для критического максимального локального растягивающего напряжения, содержащего инвариантные структурно-механические параметры, характеризующие взаимовлияние структурных и макроскопических концентраторов на прочность материалов в окрестности концентраторов напряжений.

4. Определены границы применимости структурно-аналитического градиентного критерия и развит метод определения критических размеров макро концентраторов в виде одиночных отверстий различной формы с учетом структурной неоднородности материала.

5. Установлена связь структурно-аналитического градиентного критерия разрушения с линейной механикой разрушения.

6. Выполнены экспериментальные исследования по растяжению стальных пластин (сталь 45) с различными макро концентраторами, проведено сравнение с теоретическими расчетами по структурно-аналитическому градиентному критерию разрушения, которые убедительно показали хорошее соответствие.

Литература

1. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. Санкт-Петербург: Наука, 1993. - 471с.
2. Голенков В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. – Структурно-аналитическая мезомеханика и ее приложения. – Москва: Машиностроение, 2009, - 635с.
3. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: в 2-х томах// под редакцией академика В.Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. Т.1.298с, Т.2.320с.
4. Мешков Ю.Я., Пахаренко Г.А. Структура металла и хрупкость стальных изделий. - Киев: Наукова думка, 1985.- 268 с.
5. Нотт Д.Ф. Основы механики разрушения / Пер. с англ. / - М.:Металлургия, 1978. - 256 с.
6. Мешков Ю.Я. Физические основы разрушения стальных конструкций. -Киев: Наукова думка, 1981. - 238 с.
7. Трефилов В.И., Мильман Ю.В., Фирстов С.А. Физические основы прочности тугоплавких металлов. - Киев: Наукова думка, 1975. - 315 с.
8. Саррак В.И., Филиппов Г.А. Хрупкость мартенсита // МиТОМ.-1978. - №4.-С 21-26.
9. Дубов А.А., Дубов Ал. А., Колокольников С.М. Метод магнитной памяти металла и приборы контроля. Уч. Пособие. М.: ЗАО «Тиссо», 2006, 332с.
10. Власов В.Т., Дубов А.А., Физическая теория процесса «деформация-разрушение». Ч.1. Физические критерии предельных состояний. М.: ЗАО «Тиссо», 2007, 517 с.
- 11.Леган М.А. К вопросу начало пластического течения в зоне концентрации напряжений. // ПМТФ, № 3, 1991, с. 141-152.
12. Новопашин М.Д., Сукнев С.В., Иванов А.М. Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений. /Под. ред. Новопашина М.Д. Новосибирск.: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. 112с.
13. Griffiths J.R., Owen D.R. An Elastic-plastic stress analysis for a Notched Bar in plaine strain Bending // J. Mech. Phys. Solids. -1971. - № 19. - P. 419
14. Русинко К.Н., Малинин В.Г. Деформация твердого тела с учетом времени // Прикладная механика, 1975, Т. 11, вып. 2, с. 15-21.
15. Orowan E. Brittle fracture of notched specimens // Repts. progr. Phys.-1948. -№ 11.-P. 185-199.
16. Мишин В.М., Саррак В.И. Оценка влияния остаточных внутренних микронапряжений на напряжение разрушения стали 18X2H4BA с помощью критерия растягивающих напряжений // Проблемы прочности. -1986. - № 4. –С.57.
17. Малинин В.Г., Малинин В.В. Двухуровневый структурно-механический градиентный критерий разрушения // Фундаментальные и прикладные проблемы техники – 2008., № 4. – с. 8-13.
18. Малинин В.В. Структурно-механический подход в мезомеханике разрушения. / В.В.Малинин // Справочник. Инженерный журнал. №6 - 2011, С. 52-56.

УДК 539.3

АНАЛИЗ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА СЖАТИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСНОСТИ

А.А. Маркин, А.А. Юдаева

*Тульский государственный университет, Тула, Россия,
markin.nikram@yandex.ru, judaevaanastasia@mail.ru*

Аннотация. В работах А.А.Ильюшина, В.Г.Зубчанинова [1-3] подчеркивается возможность несовпадения условий достижения внешней нагрузкой, действующей на упругопластическое тело, моментов неединственности и неустойчивости основного процесса нагружения. В статье [4] предложен подход, позволяющий с единых позиций на основе вариационных условий равновесности определить критические значения внешних нагрузок, соответствующих устойчивым, нейтральным и неустойчивым бифуркациям. В данном докладе предлагаемый подход иллюстрируется рассмотрением задачи об условиях перехода основного процесса сжатия упругопластической полосы к изгибу. В зависимости от "скорости" основного процесса в момент бифуркации получены известные критические значения сжимающей силы: Шенли, Кармана, Эйлера.

Ключевые слова: неединственность, устойчивость, бифуркация процесса нагружения, пластичность, равновесность, принцип Журдена.

1. Кинематика и условия равновесности процесса деформирования полосы

Рассмотрим тело в форме полосы, отнесенной к материальной декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 . Точки полосы занимают в начальном состоянии область: $0 < X_1 < l_0$, $-\frac{h_0}{2} \leq X_2 \leq \frac{h_0}{2}$, $-\frac{b_0}{2} \leq X_3 \leq \frac{b_0}{2}$. Здесь l_0, h_0, b_0 – начальные длина, толщина и ширина полосы.

Движение точек полосы полагаем ограниченным условием гипотезы плоских сечений. В этом случае компоненты поля перемещений представляются через относительное удлинение срединной линии $\lambda_1(x_1)$ и углы поворота φ поперечных сечений, $x_1 = const$, по формулам:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \lambda_1 \cos \varphi dx_1 - x_1 - x_2 \sin \varphi, \\ u_2(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \lambda_1 \sin \varphi dx_1 + x_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Полагаем, что в процессе деформирования относительные удлинения и углы поворота являются функциями лагранжевой координаты x_1 и параметра t . Тогда поле скоростей материальных точек V_1, V_2 определяются дифференцированием по времени перемещений (1):

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2, t) &= \int_0^{x_1} \left(\dot{\lambda}_1 \cos \varphi - \lambda_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \right) dx_1 - x_2 \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ V_2(x_1, x_2, t) &= \int_0^{x_1} \left(\lambda_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\lambda}_1 \varphi \cos \varphi \right) dx_1 - x_2 \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя формулы (1), получим следующее диадное представление тензора аффинора деформации

$$\Phi = (\lambda_1 - \varphi_{,1} x_2) \vec{e}_1 \vec{t}_1 + \vec{e}_2 \vec{t}_2, \quad (3)$$

где \vec{t}_1, \vec{t}_2 – единичные векторы, касательный и нормальный к срединной линии в деформированном состоянии. Используя определение градиента поля скоростей:

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \Phi^{-1} \cdot \dot{\Phi},$$

из выражения (3) получим:

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\left(\lambda_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} x_2 \right)}{\left(\lambda_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} x_2 \right)} \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_2 \vec{\tau}_1) \dot{\varphi}. \quad (4)$$

Из выражения (4) находим тензор деформации скорости:

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \vec{\nabla}) = \frac{\left(\lambda_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} x_2 \right)}{\left(\lambda_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} x_2 \right)} \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_1. \quad (5)$$

Для записи условия равновесия используем принцип Журдена в соответствии с которым мощность внутренних и внешних напряжений на возможных скоростях равна нулю:

$$-\int_v \tilde{\sigma} \cdot \delta \tilde{W} dv + \int_{\Sigma} \vec{P} \cdot \delta \vec{V} d\Sigma = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{\sigma}$ - тензор истинных напряжений, \vec{P} - вектор поверхностной нагрузки.

Получим условие равновесия полосы, варьируя $\lambda_1, \dot{\varphi}$ в выражениях полей скоростей (2) и деформаций (5). Полагаем, что граничные условия на левом торце ($X_1 = 0$) однородные, а боковые плоскости не нагружаются, тогда условие равновесия (6) принимает следующий вид:

$$\int_0^{l_0} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi - T) \delta \lambda_1 dx_1 + \int_0^{l_0} M \delta \frac{d\varphi}{dx_1} dx_1 + \int_0^{l_0} (N_2 \cos \varphi - N_1 \sin \varphi) \lambda_1 \delta \varphi dx_1 - M^{(e)} \cdot \delta \dot{\varphi} = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$T = \int_{\Sigma} \sigma_{11} d\Sigma, \quad M = \int_{\Sigma} \sigma_{11} x_2 d\Sigma$$

– внутренние осевая сила и момент, компоненты тензора напряжений отнесены к диаде $\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_1$. Внешние обобщенные силы N_1, N_2 и момент $M^{(e)}$ действуют на правый торец $X_1 = l_0$ и связаны с распределенной нагрузкой формулами:

$$\vec{N} = \int_{\Sigma} \vec{P} d\Sigma; \quad M^{(e)} = \int_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{\tau}_2 x_2 d\Sigma.$$

Следуя работе [4], полагаем процесс нагружения полосы равновесным. Потребуем, чтобы условию (7) удовлетворяли скорости обобщенных сил и моментов. Данные условия должны выполняться в любой момент времени. В частности, запишем условия равновесия и равновесности в момент перехода полосы из состояния одноосного сжатия к процессу, сопровождаемому изгибом под действием только сжимающей осевой внешней нагрузки $\vec{P} = -|N_1| \vec{e}_1$. В рассматриваемый момент выполняются условия:

$$M = 0, N_2 = 0, M^{(e)} = 0; \quad \varphi = 0, \dot{\varphi} \neq 0, \lambda \neq 0, \dot{M}^{(e)} = 0. \quad (8)$$

С учетом (8) условие равновесия принимает вид:

$$\int_0^{l_0} (-|N_1| - T) \delta \lambda dx_1 = 0; \quad (9)$$

условие равновесности принимает вид:

$$\int_0^{l_0} \left(-|N_1| - T \right) \delta \lambda dx_1 + \int_0^{l_0} M \delta \frac{d\varphi}{dx_1} dx_1 + \int_0^{l_0} \lambda |N_1| \delta \varphi dx_1 = 0. \quad (10)$$

В дальнейшем деформации считаем малыми по сравнению с единицей, тогда $\lambda \approx 1, b \approx b_0, h \approx h_0$.

Для выполнения вариационного условия равновесности (10) необходимо и достаточно, чтобы:

$$-\left| \dot{N}_1 \right| - \dot{T} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dM}{dx_1} + |N_1| \dot{\varphi} = 0. \quad (12)$$

В случае шарнирного опирания торца $x_1 = l_0$ должно выполняться граничное условие:

$$\dot{M} \Big|_{x_1=l_0} = 0. \quad (13)$$

Если же торец заделан, то:

$$\dot{\varphi} \Big|_{x_1=l_0} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (11-14) позволяет определить условия перехода полосы от процесса одноосного сжатия к сжатию с изгибом при различных соотношениях, определяющих свойства материала.

2. Условия перехода упругопластической полосы в смежное состояние

Рассмотрим переход полосы в смежное состояние при выполнении условий (8) в рамках модели упругопластического материала с линейным упрочнением. Связь между скоростями напряжений и деформаций зависит от распределения зон догрузки и разгрузки в момент бифуркации.

Учитывая, что продольные волокна полосы близки к состоянию растяжения-сжатия, соотношения определяющие скорости напряжений в пластическом состоянии принимаем в виде:

$$\dot{\sigma}_{11} = E' W_{11} \dot{\sigma}_{11} > 0, \quad (\text{догрузка}), \quad (15)$$

$$\dot{\sigma}_{11} = E W_{11} \dot{\sigma}_{11} < 0, \quad (\text{разгрузка}), \quad (16)$$

где E' - касательный модуль, E - модуль Юнга.

С учетом малости деформаций, полагаем, что $\lambda_1 - x_2 \frac{d\varphi}{dx_1} \sim 1$, тогда компонента тензора деформаций скорости (5) принимает вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = W_{11} = \lambda_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} x_2. \quad (17)$$

Пусть основной процесс, как было показано выше является сжатием в пластической области, тогда из условия (11) с учетом выражений (15)-(17) получим связь между "скоростью" внешней сжимающей силы $-\left| \dot{N}_1 \right|$ и "скоростью" деформирования $\dot{\varepsilon}_{11}$:

$$\dot{T} = bhE' \dot{\varepsilon}_{11} = -\left| \dot{N}_1 \right|. \quad (18)$$

Так как основной процесс является сжатием, то $\dot{\varepsilon}_{11} < 0, N_1 < 0$. Поэтому условие (8) соответствует росту внешней нагрузки сжатия по абсолютной величине.

Рассмотрим различные распределения зон догрузки и разгрузки в момент перехода к смежному процессу (бифуркации). Пусть в момент перехода в смежное состояние часть поперечного сечения $-\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{a(x_1)}{2}$ разгружается, а часть $\frac{a(x_1)}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2}$ - догружается.

Цилиндрическая поверхность $\frac{a(x_1)}{2} = x_2$ определяется из условия равенства нулю скорости напряжения $\dot{\sigma}_{11}^{(+)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=\frac{a(x_1)}{2}} = \dot{\sigma}_{11}^{(-)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=\frac{a(x_1)}{2}}$.

С учетом законов (15),(16) получим:

$$\dot{\lambda}_1 - \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{a(x_1)}{2} = 0. \quad (19)$$

Используя распределение скоростей напряжений из выражений (15)-(17), получим следующее представление скоростей внутренних сил и моментов:

$$\dot{T} = b\dot{\lambda}_1 \left[E \left(\frac{a(x_1)}{2} + \frac{h}{2} \right) + E' \left(\frac{h}{2} - \frac{a(x_1)}{2} \right) \right] - \frac{b}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} \left[\left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{a(x_1)}{2} \right)^2 \right) (E' - E) \right], \quad (20)$$

$$\dot{M} = \frac{b\dot{\lambda}_1}{2} \left[\left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{a(x_1)}{2} \right)^2 \right) (E' - E) - \frac{b}{3} \frac{d\varphi}{dx_1} \left[E \left(\left(\frac{h}{2} \right)^3 + \left(\frac{a(x_1)}{2} \right)^3 \right) + E' \left(\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{a(x_1)}{2} \right)^3 \right) \right] \right] \quad (21)$$

Рассмотрим условия, при которых скорость внутренней силы (20) не зависит от положения границы между зонами. Положим в выражении (20) $E = E'$. В результате, независимо от закона $a(x_1)$, получим из (20) и условия равновесности (11) следующее значение скорости силы сжатия:

$$-\dot{N}_1 = bhE'\dot{\lambda}_1. \quad (22)$$

Из выражения (22) следует, что скорость в момент возникновения бифуркации совпадает со скоростью основного процесса сжатия (18). Скорость внутреннего момента при подстановке в выражение (21) условия $E = E'$ принимает вид:

$$\dot{M} = -\frac{bh^3}{12} E' \frac{d\varphi}{dx_1}. \quad (23)$$

Уравнение (12) с учетом соотношения (23) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx_1^2} + k_{III}^2\varphi = 0, \quad (24)$$

где

$$k_{III}^2 = \frac{|N_1|}{D_{III}}, \quad D_{III} = \frac{bh^3}{12} E'.$$

Из условия заделки полосы $\dot{\varphi} \Big|_{x_1=l_0} = 0$ решение (24) получает вид:

$$\dot{\varphi} = c_1 \sin k_{III} x_1. \quad (25)$$

Решение (25) должно удовлетворять требованию равенства нулю внешнего момента на правом торце, тогда

$$\frac{d\varphi}{dx_1} \Big|_{x_1=l_0} = 0. \quad (26)$$

Подставим решение (25) в условие (26):

$$c_1 k_{III} \cos(k_{III} l_0) = 0. \quad (27)$$

Полагая $k_{III}l_0 = \frac{\pi}{2}$, получим минимальное значение критической сжимающей силы:

$$N_{III} = \frac{\pi^2}{4l_0} D_{III} . \quad (28)$$

Потребуем, чтобы за счет дополнительных связей бифуркация при значении критической силы (28) не произошла. Рассмотрим возможность бифуркации при условии разгрузки поперечных сечений, когда выполняется условие (16). В этом случае сжимающая сила убывает $\frac{d|N_1|}{dt} < 0$, и

$$\left| \dot{N}_1 \right| = bh^3 E \dot{\lambda}_1 < 0 . \quad (29)$$

Критическая сила, соответствующая скорости (29) определяется по формуле (28) с заменой изгибной жесткости на $D_{\mathcal{E}} = \frac{bh^3}{12} E$. Полученная критическая сила называется Эйлеровой

$$N_{\mathcal{E}} = \frac{\pi^2}{4l_0} D_{\mathcal{E}} .$$

Так как в силу условия (29) критическая сила убывает в момент бифуркации, то данная бифуркация является неустойчивой. Для определения "скоростей" устойчивой и неустойчивой бифуркаций можно в качестве "времени" использовать модуль деформации срединной линии $|\lambda_1|$. Однако, это не имеет смысла, когда деформация сжатия неоднородна, а зависит от координаты x_1 . Такая ситуация имеет место при наличии зон разгрузок и догрузок в момент бифуркации. Установление существования решений системы уравнений (11), (12), (19)-(21) в общем случае представляется сложной проблемой. Вместе с тем, решение при условии равенства нулю скорости сжимающей силы в момент бифуркации может быть получено.

На границе между зонами должно выполняться условие

$$\dot{\sigma}_{11} = E \left(\dot{\lambda}_1 - \frac{d\dot{\varphi}}{dx_1} a(x_1) \right) = E' \left(\dot{\lambda}_1 - \frac{d\dot{\varphi}}{dx_1} a(x_1) \right) = 0 . \quad (30)$$

Следовательно, скорость деформации $\dot{\lambda}_1$ в этом случае может зависеть от координаты x_1 и связана с законом изменением кривизны выражением:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{d\dot{\varphi}}{dx_1} a(x_1) . \quad (31)$$

Исключим из закона распределения внутренних сил (20) "скорость" изменения кривизны. Используя связь (31), получим:

$$-\dot{N}_1 = \frac{b\dot{\lambda}_1}{2} \left((a+h)E + (h-a)E' + \frac{(h^2 - a^2)}{a}(E' - E) \right) . \quad (32)$$

Из связи (32), между распределением скоростей $\dot{\lambda}_1(x_1)$ и скоростью изменения внешней силы $|\dot{N}_1|$, можно найти распределение зон догрузки и разгрузки при нулевой скорости внешнего нагружения. Полагая в (32) $|\dot{N}_1| = 0$, получим квадратное уравнение относительно параметра a :

$$a(a+h)E + a(h-a)E' - (h^2 - a^2)(E' - E) = 0 .$$

Корни данного уравнения имеют вид:

$$a_1 = h \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E'}}{\sqrt{E} + \sqrt{E'}}, \quad a_2 = h \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E'}}{\sqrt{E} - \sqrt{E'}}. \quad (33)$$

Так как по определению $a < h$, то из решений (33) выбираем $a_1 = a$. Подставляя это решение в выражение (21), с учетом условия (31), получим связь скорости внутреннего момента со скоростью кривизны в виде:

$$\dot{M} = -D_K \frac{d\dot{\varphi}}{dx_1}, \quad (34)$$

где

$$D_K = \frac{bh^3}{12} \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}$$

– изгибная жесткость по Карману.

После подстановки связи (34) в уравнение (12), приходим к определению критической силы перехода от устойчивых бифуркаций к неустойчивым в виде аналогичном выражению (28) с заменой D_{III} на D_K :

$$N_K = \frac{\pi^2}{4l_0} D_K. \quad (35)$$

Однако, в отличие от случаев устойчивой (28) и неустойчивой (34) бифуркаций, условие (35) выполняется при неоднородном распределении деформации сжатия срединной линии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-01875 а).

Литература

1. Зубчанинов В.Г., Ильюшин А.А. Пластичность и устойчивость // Механика деформируемого твердого тела. - Тула: ТПИ, 1983. С. 8-20.
2. Зубчанинов В.Г. Устойчивость: Учебное пособие. Ч. I. Тверь:ТвеПИ, 1995.
3. Зубчанинов В.Г. Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: Материалы V Международного симпозиума. - Тверь: ТГТУ, 2000. С. 3-18.
4. Маркин А.А. Вариационные условия единственности и устойчивости равновесных состояний и процессов упругопластического деформирования // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. С. 179-193.

УДК 531.01

КРАТНОСТЬ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ГЛАВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Н.М. Матченко

Тульский государственный университет, Тула, Россия, екс_05@mail.ru

Аннотация. Показано, что при формулировке определяющих соотношений механики деформируемого твердого тела необходимо учитывать особенность деформированного состояния связанностью с кратностью промежуточного главного напряжения.

Ключевые слова: ранжированные главные напряжения, неупорядоченные главные напряжения, векторное пространство ранжированных главных напряжений, локальный векторный базис.

1. Напряженное состояние в точке сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжений σ_{ij} , $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Главные собственные значения тензора напряжений находятся посредством решения характеристического уравнения

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (1.1)$$

где $I_1 = \sigma_{ii}$, $I_2 = 0.5(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})$, $I_3 = |\sigma_{ij}|$ - первый, второй и третий инварианты тензора напряжений.

Решение кубического уравнения (1.1) дает три ранжированных собственных значения: σ_{\max} , σ_{int} , σ_{\min} - максимальное, промежуточное и минимальное главные напряжения. Неравенство $\sigma_{\max} \geq \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\min}$ является условием ранжирования главных напряжений.

Введем векторное пространство неупорядоченных главных напряжений $\bar{\sigma}_i$, ($i=1,2,3$). Трех ранжированным главным напряжениям σ_{\max} , σ_{int} , σ_{\min} соответствует шесть различные сочетания неупорядоченных главных напряжений σ_i

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3, \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1, \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1, \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2, \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2. \quad (1.2)$$

в соответствии номером сочетания неупорядоченных значений σ_i в неравенствах (1.2) введем индекс n , который изменяется от 1 до 6.

Таким образом, трехмерное векторное пространство неупорядоченных главных напряжений представляется в виде шести независимых сегментов, которых может быть представлен вектор тензора напряжений σ_{ij} .

2. В трехмерном пространстве неупорядоченных главных напряжений $\bar{\sigma}_i$ выделим девиаторную плоскость, проходящую через начало координат и имеющую одинаковые наклоны к координатным осям $\bar{\sigma}_i$.

Если через ось гидростатического давления и направления $\bar{\sigma}_i$ провести три плоскости, векторное пространство неупорядоченных главных напряжений разделится на шесть сегментов, в каждом из которых вектор тензора напряжений может быть представлен независимым образом.

Введем единичный вектор \bar{m}_0 , являющийся нормалью к девиаторной плоскости. Направляющие косинусы вектора \bar{m}_0 по отношению к координатным осям одинаковы. Проекция главных напряжений на девиаторную плоскость определяются как $\sigma'_i = \sqrt{2/3}\sigma_i$. Положительно направленные проекции главных осей σ'_i расположены на девиаторной плоскости под углом $2\pi/3$.

Если через направления \bar{m}_0 и $\bar{\sigma}_i$ провести три плоскости, то векторное пространство неупорядоченных собственных напряжений разделится на шесть равных сегментов с раствором угла $\pi/3$, а девиаторная плоскость, соответственно, на шесть секторов.

Арабскими цифрами ($n=1, \dots, 6$) введем нумерацию секторов (сегментов). Положительное направление отсчет секторов в правой системе координат $\vec{\sigma}_i$ проводится в направлении против хода часовой стрелки от оси $o\sigma_1'$.

3. В каждом из сегментов разложим вектор $\vec{\Sigma}_n$ на три составляющие

$$\vec{\Sigma}_n = \vec{\Sigma}_0 + \vec{\Sigma}_I^{(n)} + \vec{\Sigma}_{II}^{(n)}. \quad (3.1)$$

Вектор $\vec{\Sigma}_0$ является проекцией вектора $\vec{\Sigma}_n$ на гидростатическую ось

$$\vec{\Sigma}_0 = \Sigma_0 \vec{m}_0, \quad \Sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sqrt{3}. \quad (3.2)$$

Вектор $\vec{\Sigma}_0$ не зависит от выбора номера сегмента, в котором представлен вектор $\vec{\Sigma}_n$.

Вектор $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$ является проекцией вектора $\vec{\Sigma}_n$ на девиаторную плоскость, причем

$$\Sigma_d^{(n)} = \sqrt{\Sigma_n^2 - \Sigma_0^2} = \sqrt{I_2 + I_1^2 / 3}, \quad (3.3)$$

т.е. модуль вектора $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$ является инвариантной характеристикой тензора напряжений.

4. Введем плоскости сдвига, которые проходят через гидростатическую ось и делят каждый из сегментов на две равные части. След от пересечения этих плоскостей с девиаторной плоскостью обозначим линией c_n . Положения линий c_n определяется углами $\theta_n = (2n-1)\pi/6$, отсчитываемыми от проекции $o\sigma_1'$ в направлении против хода часовой стрелки.

На девиаторной плоскости в каждом из секторов введем два единичных ортогональных вектора, $\vec{m}_I^{(n)}$ и $\vec{m}_{II}^{(n)}$. Вектор $\vec{m}_I^{(n)}$ направим от начала координат вдоль линии сдвига c_n .

Проекция вектора $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$ на направления орта $\vec{m}_I^{(n)}$ и $\vec{m}_{II}^{(n)}$ удобно записать через ранжированные главные напряжения

$$\Sigma_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad \Sigma_{II} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_{\text{int}} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (4.1)$$

Значения Σ_0 , Σ_I , Σ_{II} будем называть линейными инвариантами ранжированных собственных значений [6].

Направление вектора $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$ в любом из секторов девиаторной плоскости можно определить параметром

$$m = \text{tg} \omega = \frac{\Sigma_{II}}{\Sigma_I} = \frac{2\sigma_{\text{int}} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sqrt{3}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}, \quad (4.2)$$

где ω - угол между линией сдвига c_n и вектором $\vec{\Sigma}_d^{(n)}$. Условимся, положительное направление отсчета угла ω принимать в каждом из секторов от линии сдвига c_n по направлению к минимальному ранжированному собственному значению σ_{\min} .

Параметр m изменяется в диапазоне $-1/\sqrt{3} \leq m \leq 1/\sqrt{3}$. Следовательно, угол ω изменяется в пределах $-\pi/6 \leq \omega \leq \pi/6$.

Нормированное $-1 \leq \mu \leq 1$ значение параметра m вычисляется по формуле А.А. Ильюшина [3]

$$\mu = m\sqrt{3} = \frac{2\sigma_{\text{int}} - \sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}. \quad (4.3)$$

В первом секторе соотношение (4.3) совпадает с записью Лоде [7].

5. На полуплоскостях, разделяющих векторное пространство на сегменты, промежуточное главное напряжение является кратным, т.е. оно равно максимальному или минимальному главному напряжению.

В случае кратности промежуточного главного напряжения ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{\text{int}} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_{\text{int}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_{\text{int}} \end{pmatrix}$$

равен единице, и все ее миноры равны нулю [5]:

$$\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{\text{int}})(\sigma_{22} - \sigma_{\text{int}})}{\sigma_{12}^2} = 1, \quad \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{\text{int}})(\sigma_{33} - \sigma_{\text{int}})}{\sigma_{23}^2} = 1, \quad \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{\text{int}})(\sigma_{33} - \sigma_{\text{int}})}{\sigma_{13}^2} = 1; \quad (5.1)$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_{\text{int}})\sigma_{23} = \sigma_{12}\sigma_{13}, \quad (\sigma_{22} - \sigma_{\text{int}})\sigma_{13} = \sigma_{12}\sigma_{23}, \quad (\sigma_{33} - \sigma_{\text{int}})\sigma_{12} = \sigma_{13}\sigma_{23}. \quad (5.2)$$

В равенствах (5.1) и (5.2) независимыми являются любые из трех соотношений. Например, если попарно перемножить левые и правые части соотношений (3.2), то получим зависимости (5.1).

Исключая из (5.2) промежуточное главное напряжение, получим два условия совместности компонент тензора девиаторных напряжений

$$s_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = s_{22} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} = s_{33} - \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}, \quad (5.3)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$, $\sigma_0 = \Sigma_0 / \sqrt{3}$.

6. Компоненты тензора напряжения σ_{ij} вычисляются через главные ранжированные напряжения посредством соотношений

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^3 \sigma_s^r r_{si} r_{sj}, \quad (6.1)$$

где: $\sigma_1^r = \sigma_{\text{max}}$, $\sigma_2^r = \sigma_{\text{int}}$, $\sigma_3^r = \sigma_{\text{min}}$; r_{ij} - направляющие косинусы ранжированных главных напряжений относительно лабораторной системы координат.

Девять направляющих косинусов связаны шестью уравнениями

$$r_{is} r_{js} = \delta_{ij}, \quad (6.2)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Главные ранжированные напряжения σ_i^r связаны с линейными инвариантами соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_1^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_I - \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma_{II}, \quad \sigma_2^r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Sigma_0 + \sqrt{2}\Sigma_{II}), \\ \sigma_3^r &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_I - \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma_{II} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Поскольку $\Sigma_0 / \sqrt{3} = \sigma_0$, $\Sigma_I / \sqrt{2} = T$ и $\sqrt{3}\Sigma_{II} / \Sigma_I = \mu$, то соотношения (6.3) можно представить в форме

$$\sigma_1^r = \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad \sigma_2^r = \sigma_0 + \frac{2}{3}\mu T, \quad \sigma_3^r = \sigma_0 - \left(1 + \frac{1}{3}\mu\right)T, \quad (6.4)$$

где $T = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}) / 2$ - максимальное касательное напряжение.

Подставляя зависимости (6.4) в (6.1), получим

$$\sigma_{ij} = \left(\sigma_0 + \frac{2}{3}\mu T\right)\delta_{ij} + (1 - \mu)Tr_{1i}r_{1j} - (1 + \mu)Tr_{3i}r_{3j}, \quad (6.5)$$

Из (6.5) следует, что, компоненты тензора напряжения σ_{ij} однозначно определяются шестью параметрами: тремя главными ранжированными напряжениями σ_i^r или их инвариантами, например σ_0 , T , μ и тремя углами, характеризующими ориентацию главных ранжированных напряжений σ_i^r относительно лабораторной системы координат.

На полуплоскостях кратности $\mu = \pm 1$ зависимости (6.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_0 + 2(1/3 - n_{s1}n_{s1})\mu_s T, \quad \sigma_{12} = -2\mu_s n_{s1}n_{s2} T, \\ \sigma_{22} &= \sigma_0 + 2(1/3 - n_{s2}n_{s2})\mu_s T, \quad \sigma_{23} = -2\mu_s n_{s2}n_{s3} T, \\ \sigma_{33} &= \sigma_0 + 2(1/3 - n_{s3}n_{s3})\mu_s T, \quad \sigma_{13} = -2\mu_s n_{s1}n_{s3} T, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где ($s = 1, 3$), $\mu_s = \text{sign}(\mu)$, $\mu_1 = -1$, $\mu_3 = 1$. Здесь и далее по s - не суммировать.

Направляющие косинусы связаны соотношениями

$$r_{s1}^2 + r_{s2}^2 + r_{s3}^2 = 1 \quad (s = 1, 3). \quad (6.7)$$

Из (6.6) и (6.7) следует, что тензор напряжений на плоскостях кратности характеризуется только четырьмя независимыми параметрами: гидростатическим давлением, максимальным касательным напряжением и двумя углами, задающими направление максимального или минимального главного напряжения относительно лабораторной системы координат.

Значение индекса s совпадает с индексом определяющего ранжированного напряжения на полуплоскости кратности. Для полуплоскости кратности $\mu = -1$ индекс s равен единице и соответственно $\mu_1 = -1$, а для полуплоскости $\mu = 1$ индекс s равен трем и соответственно $\mu_3 = 1$.

Несложно установить, что соотношения (6.6) тождественно удовлетворяют условиям совместности (5.1), (5.2) или (5.3).

7. Ильюшиным А.А [3] был сформулирован постулат изотропии. Согласно постулату изотропии, связь между тензорами-девиаторами напряжений и деформаций изотропна в пространстве тензоров напряжений и деформаций. Постулат изотропии является фундаментальной гипотезой механики деформированного твердого тела [1,2].

Единственной функцией, изотропной в пространстве девиатора напряжений является функция интенсивности девиатора напряжений

$$\Sigma_d = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} / \sqrt{3}. \quad (7.1)$$

В пространстве главных неупорядоченных напряжений поверхности равного уровня модуля девиаторных напряжений $\Sigma_d = const$ представляют собой цилиндры, образующие которых параллельны оси гидростатического давления.

Механике деформированного твердого тела принято считать по умолчанию, что поверхности равного уровня Σ_d являются регулярными, т.е. производная от этой функции в пространстве главных напряжений по главным напряжениям имеет вид

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{3\Sigma_d}, \quad (i \neq j \neq k). \quad (7.2)$$

Согласно гипотезе о регулярности функции Σ_d из (7.2) следует, что $grad \Sigma_d$ направлен ортогонально к поверхностям Σ_d равного уровня во всех точках пространства главных напряжений, включая и линии пересечения поверхности $\Sigma_d = const$ с плоскостями кратности.

Покажем, что гипотеза о регулярности функции Σ_d является *некорректной*.

Подставляя (7.2) в уравнение

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_d, \quad (7.3)$$

получим тождество.

Поскольку функция Σ_d удовлетворяет условию (7.3), то, она является однородной функцией первой степени относительно своих аргументов [5].

Для примера, рассмотрим пересечение поверхностей $\Sigma_d = const$ с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$.

При пересечении $\Sigma_d = const$ с плоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d принимает два значения $\Sigma_d^{(2)}$ и $\Sigma_d^{(3)}$, причем

$$\begin{aligned} \Sigma_d = \Sigma_d^{(2)} &= \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_2) = const, \\ \Sigma_d = \Sigma_d^{(3)} &= \sqrt{2/3}(\sigma_1 - \sigma_3) = const. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что *сингулярность* девиаторной функции Σ_d на линиях пересечения поверхностей $\Sigma_d = const$ с полуплоскостью кратности $\sigma_2 = \sigma_3$ *проявляется в виде ребра равносоставленной шестигранной призмы*, образующие которой равно наклонены к осям главных напряжений.

Следовательно, правило суммирования функций $\Sigma_d^{(2)}$ и $\Sigma_d^{(3)}$ проводится в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях [5]

$$\Sigma_d = \lambda \Sigma_d^{(2)} + \mu \Sigma_d^{(3)}, \quad (7.5)$$

а внешняя нормаль к поверхности $\Sigma_d = const$ вырождается в веер нормалей

$$\frac{\partial \Sigma_d}{\partial \sigma_i} = \lambda \frac{\partial \Sigma_d^{(2)}}{\partial \sigma_i} + \mu \frac{\partial \Sigma_d^{(3)}}{\partial \sigma_i}. \quad (7.6)$$

Поскольку, на линиях пересечения поверхности равного уровня $\Sigma_d = const$ с плоскостью кратности главных ранжированных напряжений $\sigma_2 = \sigma_3$ функция Σ_d проявляет особенность, то она не является регулярной.

Следствие 1. Поскольку девиаторные функции на плоскостях кратности проявляют сингулярность в виде ребра равносоставленной шестигранной призмы, равно наклоненной к направлениям главных осей, то девиаторные функции могут быть регулярными только в пределах каждого из сегментов.

Следствие 2. В связи с тем, что выше было доказана нерегулярность функции Σ_d , то на плоскостях кратности промежуточного главного напряжения постулат изотропии не применим.

Выводы

1. Плоскости кратности промежуточного главного напряжения разделяют векторное пространство неупорядоченных главных напряжений на шесть сегментов, в которых вектор тензора напряжений может быть представлен независимым образом.

2. На плоскостях кратности на компоненты тензора девиаторных напряжений накладываются ограничения в виде двух уравнений совместности компонент тензора девиаторных напряжений.

3. Особенность напряженного состояния, связанная с кратностью промежуточного главного напряжения, проявляется в векторном пространстве неупорядоченных главных напряжений в виде ребра равносоставленной призмы равно наклоненной к осям главных напряжений.

4. *Более сотни лет в задачах теории математической пластичности сингулярность девиаторных функций, связанная с кратностью промежуточного главного напряжения, ошибочно трактовалась как справедливость условия пластичности Треска.*

5. В механике деформируемого твердого тела (кроме задач полной пластичности) отсутствует учет особенностей напряженного состояния при условии кратности промежуточного главного напряжения.

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов сплошных сред. – М: Физматлит, 2010. – 352 с.
2. Зубчанинов В. Г. Основы теории упругости и пластичности / М.: Высшая школа 1990. - 368 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. / М.: ОГИЗ. 1948. - 376 с.
4. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / М.: Издательство АН СССР, 1963. 272 с
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / М: Издательство Наука, 1979. 831 с.
6. Кузнецов Е.Е., Матченко И.Н., Матченко Н.М. К построению теории малых упругопластических деформаций // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). – С. 288 - 295.
7. Lode W., Vercuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf des Fließen der Metalle // Zeitschrift für Physik, 126 Heft 11-12. (Имеется перевод: Луде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов //В. Сб. пер. Теория пластичности. М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1948. – С. 168 – 205).

УДК 626.422.23

МОНИТОРИНГ ТЕХНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

И.А. Мещихин¹, С.С. Гаврюшин²

¹ИИЭУМ им. И.С. Брука, Москва, Россия, mfict@mail.ru

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, gss@bmstu.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросам разработки моделей сложных технических конструкций для целей мониторинга их эксплуатационного состояния. Для организации эффективного мониторинга состояний конструкций зачастую возникает необходимость восстанавливать значения параметров состояния по косвенным величинам. В числе параметров состояния могут выступать либо значения нагрузок и их комбинации на которые могут накладываться непосредственные ограничения, либо определяемые по их значениям предельные состояния. В работе предложены как критерии оценки качества выбора набора параметров идентификации (регистрируемых косвенных величин), так и эффективный алгоритм их поиска.

Ключевые слова: параметры идентификации, метод конечных элементов, линейные системы, очувствление.

При организации мониторинга состояний возникает необходимость регистрации состояния объекта мониторинга. Зачастую непосредственное измерение параметра состояния объекта мониторинга затруднительно. В этом случае возможна регистрация косвенной величины (параметра идентификации) и восстановления искомой величины с использованием математической модели объекта мониторинга. В качестве косвенных величин (параметров идентификации) могут выступать перемещения [1], деформации, выброускорения и пр. измеренные либо в дискретном множестве точек, либо вдоль некоторой траектории в зависимости от особенностей объекта мониторинга и его нагружений.

Излагаемый подход основан на допущении о возможности описать поведение объекта мониторинга линейной моделью [2] с одной стороны и возможность представления модели нагружения как линейной комбинации независимо действующих нагрузок с другой. Принятые допущения позволяют понизить размерность конечно-элементной модели конструкции до размерности [3, 4] параметрического множества нагрузок [5] и реализовать редукцию полномасштабной модели объекта мониторинга до размерности набора параметров идентификации. Так как размерность редуцированной модели ниже размерности полномасштабной модели актуально рассмотреть критерии отбора надлежащих из множества возможных. Далее, располагая наиболее оптимальным набором параметров идентификации предлагается восстановить по их значениям вектор масштабных коэффициентов усчитанных при разработке модели нагружений (параметры состояния).

1. Критерии оптимальности выбора параметров идентификации

В общем случае связь параметров идентификации и параметров состояния выражается следующей зависимостью:

$$\delta = Af + Be \quad (1), \text{ где}$$

f_i - учитываемое при разработке модели нагружение; e_i – не учитываемое нагружение; A - матрица учитываемых параметров; B - матрица не учитываемых параметров. A и B искомые; δ_i - параметр идентификации (результат наблюдения).

После регистрации вектора параметров идентификации необходимо восстановить параметры состояния. К параметрам, используемым для идентификации объекта, предъявляются следующие требования:

1) Значения параметров идентификации для заданного набора действующих нагрузок должна быть максимальными. Параметры идентификации измеряются с определенной точностью, зависящей от способа измерения. Под набором нагружений понимается некоторая совокупность различных сочетаний одновременно действующих на объект воздействий, определяемая по условиям функционирования объекта. При малых значениях результата

измерения ($\delta_i < \Delta a$) невозможно различить полезный сигнал и шум. Численно данный критерий можно представить как $\|\delta\| \rightarrow \max$;

2) Параметры идентификации должны, по возможности, обеспечивать линейно независимый отклик конструкции для заданного набора нагрузений. При малом значении $\delta_j \left(1 - \frac{\langle \delta_i, \delta_j \rangle}{\|\delta_i\| \|\delta_j\|} \right) < \Delta a$ нет возможности различить результаты измерений нагрузениях i и j .

Численно данный критерий можно представить как $\langle \delta_i, \delta_j \rangle \rightarrow \min, i \neq j$;

3) Схожесть диапазона изменения параметров идентификации. Численно данный критерий можно представить как число обусловленности матрицы A : $\frac{S_{\min}(A)}{S_{\max}(A)} \rightarrow \max$, где S -

сингулярные числа матрицы A . При оценке несимметричных в т.ч. прямоугольных матриц A и B удобнее использовать сингулярные числа при работе в поле вещественных чисел ;

4) Минимальное влияние не учитываемых факторов относительно учитываемых. Численно данный критерий можно представить как $S_{\max}(BA^{-1}) \rightarrow \max$;

5) Минимальная чувствительность критерия к ошибкам позиционирования.

Рассмотрим представленные на рис. 1 целевые функции, удовлетворяющие требованиям 1,2; 1-4, 1-5 соответственно.

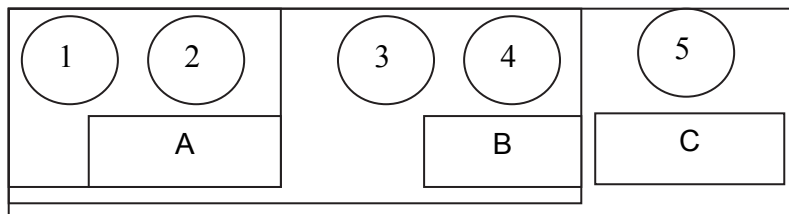


Рис. 1. Группы требований к целевым функциям

A: Первым двум требованиям удовлетворяет выбор n измеряемых параметров идентификации, который доставляет максимум детерминанту матрицы редуцированной системы (далее матрицы откликов) на n – нагрузений. Критерий детерминанта презентативен своей полилинейностью и простотой в интерпретации. Матрица откликов A формируется по столбцам. Каждый столбец матрицы откликов представлен в виде вектора в пространстве параметров идентификации. Компонента матрицы откликов A_{ij} численно равна величине $i^{\text{того}}$ обобщенного перемещения (параметра идентификации), вызванного действием $j^{\text{того}}$ нагружения. Численное значение детерминанта интерпретируется как ориентированный объем параллелепипеда [6], ребра которого заданы векторами-столбцами матрицы откликов.

Геометрическая интерпретация для матрицы откликов размером 2×2 представлена на рис. 2. Матричный оператор A производит линейное отображение из пространства нагружений в пространство измерений. В частности отображает единичную окружность в эллипс, длины главных осей которого равны модулям собственных значений (сингулярных чисел) матрицы A , а их ориентация – ее собственным векторам.

Предполагается, что для измеряемых величин задан определенный уровень шума, определяемый погрешностью используемых средств измерений - $\pm \Delta a$. Принимается, что сигнал пригоден для идентификации нагрузки, если все компоненты вектора измерений превосходят по модулю Δa . Качество выбора оператора A , удобно оценивать по величине отношения модуля его минимального собственного значения к уровню шума. В дальнейшем для оценки погрешности идентификации параметров нагружения будем использовать условие

$$\left| \frac{\Delta a}{\lambda_{\min}} \right| \leq [\beta], \quad (1)$$

где $[\beta]$ – допускаемый приемлемый уровень отношения шум/сигнал.

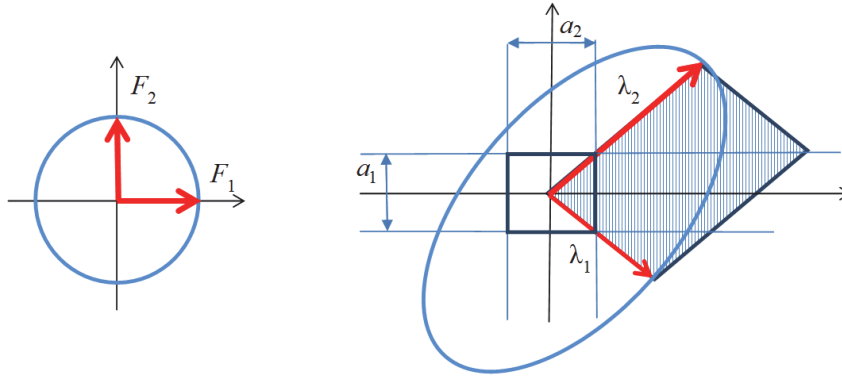


Рис. 2. Геометрическая интерпретация процедуры выбора множества информативных параметров для $n = 2$

В: В общем случае критерии могут быть представлены как функции от инвариантов матриц A и B : I_1, I_2, \dots, I_n . Требования А эквивалентны требованию к I_n , а требования В эквивалентны требованиям к I_1, I_n , имеющие геометрический смысл среднего радиуса и объема. Матрица A , оптимальная для требований В, подобна единичной.

С: Определив значения целевой функции согласно критериям В можно определить вектор ее дифференциала p , а критерий минимальности его сформулировать как $\|p\| = pp^T \rightarrow \min$. Итоговую целевую функцию для требований С можно представить как

$$\frac{S_{\min}(A)}{S_{\max}(BA^{-1})pp^T} \rightarrow \max.$$

2. Подходы к улучшению качества оценки параметров состояния

При невозможности выбрать набор параметров идентификации, удовлетворяющим требованиям С возникает необходимость модифицировать набор параметров идентификации с целью улучшения значения целевой функции. Рассмотрим два подхода:

1. Введем эффективную матрицу D , которая минимизирует в среднем разницу между истинными δ и восстановленными с применением D .

2. Добавим в перечень параметров идентификации такую линейную комбинацию из не учитываемых и ортогональных основным нагружений, к которым конструкция наиболее чувствительна.

Рассмотрим первый подход:

$$\sum (f - D\delta)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \frac{\partial \sum (f - D\delta)^2}{\partial D} = 0 \Leftrightarrow 2\sum (f - D\delta)\delta = \sum f\delta^T - D\sum \delta\delta^T = 0$$

$$D = \frac{\sum f\delta^T}{\sum \delta\delta^T}, \sum f\delta^T = \sum f(Af + Be)^T = \sum ff^T A^T + \sum fe^T B^T$$

$$\sum \delta\delta^T = \sum (Af + Be)(Af + Be)^T = \sum Aff^T A^T + \sum Afe^T B^T + \sum Bef^T A^T + \sum Bee^T B^T$$

Пусть f_i и e_i - реализация случайной величины с нулевым мат ожиданием, тогда $\sum ff^T, \sum ee^T, \sum fe^T$ - матрицы дисперсий и ковариаций, которые могут быть получены из испытаний. В случае если e и f некоррелированные случайные величины и единичной дисперсией ($f, e \in N(0,1)$):

$$D = \frac{A^T}{AA^T + BB^T} \quad (2)$$

Рассмотрим второй подход. Включим в перечень параметров идентификации такую линейную комбинацию не учитываемых параметров $\sum \alpha_i e_i$, к которой конструкция наиболее чувствительна и отклик от которой ортогонален (линейно независим) от отклика от основного нагружения, т.е.:

$$\|\delta_e\| = B \sum \alpha_i e_i \rightarrow \max, \|\delta_f \delta_e\| \rightarrow \min, f, e \in N(0,1)$$

Так как оператор A содержит $n-1$ вектора в n мерном пространстве, то всегда существует возможность дополнить исходный набор ортогональным к нему вектором. Для этих целей удобно использовать сингулярное разложение: $A = USV, V_0 = V_{n,1n}$. Далее задача сводится к определению координат V_0 в операторе B : $\alpha = V_0 B$, где компоненты нормированного вектора α являются искомыми коэффициентами при линейной комбинации не учитываемых нагружений. $n^{\text{ая}}$ строчка матрицы A выражается как $A_n = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} B$.

Указанные два подхода удобно применять последовательно: на первом шаге вводится дополнительный параметр идентификации, затем минимизируется среднеквадратичная погрешность от влияния не учитываемых факторов. При неудовлетворительном результате вводят дополнительный параметр идентификации и повторяют процедуры 1 и 2. Стоит отметить, что как правило, чем большее количество нагружений наблюдаемы, тем с одной стороны меньше влияние не учитываемых факторов, а с другой выше влияние погрешности измерения (которая обусловлена наличием среди параметров идентификации нагружений коррелированных и с малым откликом. Применение итерационной процедуры позволяет искать оптимум, двигаясь от высокой идентифицируемости к малому влиянию не учитываемых нагружений.

3. Оценка эффективности оценки параметров состояния

Для оценки эффективности сгенерируем случайные матрицы A и B . Дополним оператор A вектором из случайной комбинации $\alpha_{rand} B$: $A_0 = A \oplus \alpha_{rand} B$ и сравним коэффициенты корреляции и отношения магнитуд исходного и восстановленного для следующих случаев:

1. Исходная система, состоящая из вектора f измеряемых сил и e не измеряемых;
2. К перечню измеряемых сил добавляется произвольный вектор из базиса B ;
3. К перечню измеряемых сил добавляется вектор из базиса B по методике 2;
4. Формирование эффективной матрицы по пункту 1: $D = \frac{A_o^T}{A_o A_o^T + B_o B_o^T}$;
5. Формирование эффективной матрицы по пункту 2:

$$D = \frac{A_1^T}{A_1 A_1^T + B_1 B_1^T}, \text{ где } A_1 = A \oplus \alpha_{rand} B, B_1 = B \theta \alpha_{rand};$$

6. Формирование эффективной матрицы по пункту 3:

$$D = \frac{A_2^T}{A_2 A_2^T + B_2 B_2^T}, \text{ где } A_1 = A \oplus \alpha_{opt} B, B_1 = B \theta \alpha_{opt}.$$

Всюду идентификации подлежат две силы по трем измерениям. Операция вычисления обратной матрицы, там, где последняя прямоугольна, заменяется на вычисления псевдо обратной. Вычисления производились для случайно сгенерированных матриц и единичным произведением сингулярных чисел. Количество генераций 1 млн. В качестве результаты для пунктов 1-6 представлены средние значения в таблице 1. Стоит отметить, что при применении методики 1 восстанавливаются лишь измеряемые силы, а при использовании методики 2 к их перечню добавляется вектор сил из базиса B .

Таблица 1. Коэффициент корреляции

	1	2	3	4	5	6
Дополнительный набор не учтен	0,5	0,41	0,55	0,65	0,64	0,65
Дополнительный набор учтен	0,5	0,54	0,66	0,65	0,74	0,77

Учет дополнительного нагружения, равного линейной комбинации из набора не учитываемых, расширяет перечень параметров идентификации.

Эффективность двух методик и их одновременного применения определяется ценностью информации о значениях параметров состояния из дополнительного набора. При отсутствии таковой, согласно данным таблицы 1, эффективно применение методики 1, в обратном случае наиболее эффективно последовательное применение методики 2 и 1.

Так как измерения осуществляются с некоторой погрешностью то рационально записать модель (1) в виде $u = Af + Be + \Delta u_e$.

При определенном масштабе и выбранном ортонормированном базисе, т.е. $\sum e^T e = \sum \delta_e^T \delta_e = E$; $e, \delta_e \in N(0,1)$, E - единичная матрица, $N(0,1)$ - нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда в модели (1) $\tilde{B} = B + \Delta$, где Δ - диагональная матрица, элементы которой определяются погрешностью измерения, которая в свою очередь может быть различной для разных элементов конструкции в зависимости от дальности точки измерения, состояния поверхности и пр.

При мониторинге сложных конструкций под множеством начитываемых параметров может пониматься все многообразие действующих нагружений (узловых сил). Тогда в формуле (2) $\tilde{B}\tilde{B}^T$ - можно рассчитать единожды, для всех возможных параметров идентификации, число которых много меньше всех степеней свободы конструкции. Каждая конкретная матрица не учитываемых параметров

$$\bar{B} = M\tilde{B}M, \quad (3)$$

где M - прямоугольная матрица $m \times n$, каждый i, j которой равен единице; $i \in 1..n$, j - номер $i^{\text{того}}$ параметра идентификации, n - количество последних. Элементы матрицы \tilde{B} соответствуют элементам матрицы податливости.

Если определить эффективность выбора параметров идентификации ε , то новый критерий для произвольных конструкций можно вывести следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum (f - D\delta)^2 = \varepsilon &\Leftrightarrow (f - D\delta)(f - D\delta)^T = ff^T - f\delta^T D^T - D\delta f^T + D\delta\delta^T D^T, \sum ff^T = 1 \\ \sum f\delta^T D^T &= \sum ff^T AD^T + \sum \overset{\lambda_0}{f} e^T BD^T = tr(AD^T) = tr\left(A(A^T A + B^T B)^{-1} A\right) \\ \sum D\delta f^T &= tr(DA) = tr(A^T D^T) = tr\left(A^T (A^T A + B^T B)^{-1} A\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum D\delta\delta^T D^T &= tr(DAA^T D^T) + tr(DBB^T D^T) = tr\left(A^T (AA^T + BB^T)^{-1} (AA^T + BB^T) A(A^T A + B^T B)^{-1}\right) = \\ &= tr\left(A^T A(A^T A + B^T B)^{-1}\right) = tr\left(tr\left(A^T (A^T A + B^T B)^{-1} A\right)\right), \quad \varepsilon = 1 - tr\left(A(A^T A + B^T B)^{-1} A\right). \end{aligned}$$

Подставим в уравнение (4) выражение (3): $\varepsilon = 1 - tr\left(A(A^T A + M^T \tilde{B}\tilde{B}M)^{-1} A\right)$.

Отношение

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad (5)$$

характеризует диапазон влияния не учитываемых в расчете параметров на оценку действующего нагружения. Таким образом, отношение (5) задает новый критерий оптимизации, который позволяет получить робастную оценку расчетного нагружения в случае воздействия не учитываемых в расчете нагрузок. При значительном значении величины $\bar{\varepsilon}$ возможно включение в перечень параметров идентификации линейной комбинации из не учитываемых нагружений, по методике 2. Данная процедура соответствует включению в перечень учитываемых нагружений, такой комбинации узловых сил, что соответствуют максимальным значениям параметров идентификации.

Параметры идентификации, замеряемые непосредственно в процессе мониторинга, позволяющие определить масштабные факторы действующего набора нагрузок для принятия обоснованного решения о пригодности конструкции к дальнейшей эксплуатации. Данная методика мониторинга обеспечивает возможность оперативного реагирования в случае нештатной (аварийной) ситуации, в качестве которой подразумевается превышение ограничений по прочности и жесткости.

4. Алгоритм оптимизации

Сложность критериев оптимизации параметров идентификации и степенная зависимость размерности пространства поиска от количества учитываемых нагружений предъявляет высокие требования к процедуре поиска. Для данного класса задач представлен метод, позволяющий за полиномиальное время найти глобальный экстремум целевой функции. Для демонстрации предлагаемого алгоритма рассмотрим его при целевой функции A при действии на конструкцию набора из двух нагружений. Для решения поставленной задачи предлагается реализовать следующую процедуру поиска: найдем простым перебором точку j_1 , такую, что доставляется максимум целевой функции при $A(j_0, j_1)$. Далее процесс повторяется для $A(j_i, j_{i+1})$ до тех пор, пока не будет достигнут локальный максимум целевой функции. Оценим количество необходимых начальных приближений для достижения глобального максимума. Предположим, что элементы матрицы суть функции δ_i от одной унимодальной функции. Тогда детерминант матрицы представляет собой сумму мономов степени $2n$. Экстремум функции характеризуется равенством нулю n производных, т.е. количество локальных максимумов не превышает n . Следовательно, если взять n начальных приближений, таких, что между каждым локальным максимумом и начальным приближением существует путь, вдоль которого целевая функция монотонна, то хотя бы начальное приближение позволит, применив предлагаемый алгоритм, получить оптимальный набор параметров идентификации.

Утверждение: между локальным максимумом

$$\frac{\partial^2 \det(A)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \delta_1(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial \delta_2(x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta_1(x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial \delta_2(x_1)}{\partial x_1}$$

и множеством точек области поиска, таких что $\frac{\partial \delta_i(x_i')}{\partial x_i} = 0$ существует путь, вдоль которого целевая функция $\det(A)$ монотонна.

Доказательство: так как условия

$$\frac{\partial \delta_1(x^i)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \delta_2(x^i)}{\partial x} = 0$$

разбивают функции δ_1, δ_2 на монотонные участки, то функция $\frac{\partial^2 \det(A)}{\partial x_1 \partial x_2}$ может менять знак при 1: $x_1 > x_1', x_2 > x_2'$, 2: $x_1 < x_1', x_2 < x_2'$, 3: $x_1 > x_1', x_2 < x_2'$, 4: $x_1 < x_1', x_2 > x_2'$.

Случаи 1-3 соответствуют минимуму, а случай 4 и симметричный ему – максимуму целевой функции. Область поиска при этом будет выглядеть согласно рис. 3.

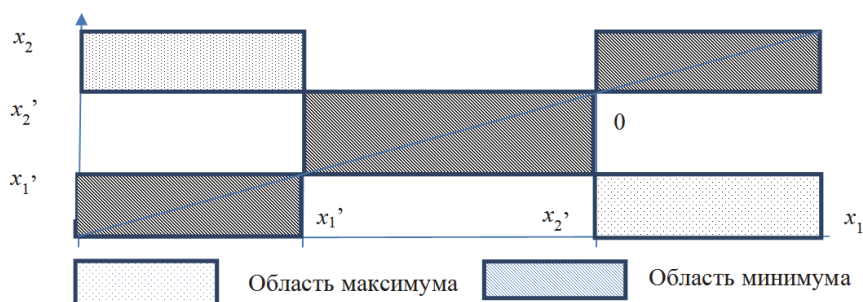


Рис. 3. Значения целевой функции

Таким образом, выбор в качестве начальных приближений точек, в которых достигается максимумы откликов δ_i (x_1', x_2') обеспечивает сходимость к глобальному максимуму целевой функции. Представленный алгоритм позволяет получить глобальный максимум целевой функции за полиномиальное время knt , где t – количество точек, n – количество откликов, значения k представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения k

n	Мат ожидание k	Дисперсия D
2	3.4	0.0006
3	4.7	0.0026

В случае воздействия на конструкцию n независимых нагружений целевая функция на шаге i $\det(A(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}))$ максимизируется перебором по x_{i+n} , где x_i - множество переменных i – кольцо с модулем n .

Если δ_i - произвольные многочлены степени k , то количество локальных экстремумов равно nk . Рассмотрим значения целевой функции при фиксированных переменных $x_i, i \in [1, \dots, j-1, j+1, \dots, n]$. Тогда исследуемая целевая функция представляет собой полином степени k . Если при поиске максимума целевой функции для каждого фиксированного значения x_i определять все локальные экстремумы, до для достижения глобального максимума потребуется не более чем $\frac{kn}{k} = n$ начальных приближений. При полном переборе значений при фиксированных x_i функции δ_i могут быть произвольными.

При взятии от детерминанта монотонной функции значения x_i , при которых достигается максимум остаются неизменными. В частности:

$$\det(A) \sim \log(\det(A)) = \log(\prod \lambda_i) = \sum \log(\lambda_i) \sim \sum \lambda_i = I_1 = \text{tr}(A),$$

$$\det(A) \sim \log(\det(A)) = \log(\prod S_i) = \sum \log(S_i) \sim (\sum S_i)^{1/n} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \max(S_i),$$

$$\det(A) \sim \log(\det(A)) = \log(\prod S_i) = \sum \log(S_i) \sim \left(\sum \frac{1}{S_i} \right)^{1/n} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \min(S_i), \det(A) \sim \det(AA^T).$$

Символом \sim обозначены преобразования при которых значения x_i сохраняются. При этом если в качестве целевой функции выступает выражение вида $\det(AB)$, то количество начальных приближений составляет $2n$. Таким образом, предлагаемый метод доставляет глобальный максимум целевой функции для широкого класса целевых функций, в том числе и для критериев В и С.

5. Пример применения предлагаемого подхода

В качестве примера предлагаемой методики рассмотрен процесс мониторинга шлюзового затвора № 7 канала имени Москвы. Рассматриваемый сегментный шлюзовой затвор [7, 8] является элементом судопропускной системы канала имени Москвы. Затвор нагружен гидростатическим напором от перепада уровней воды (7 м) в верхнем бьефе и камере шлюза, а также нештатным нагружением от кинематических подвижек основания. Затвор представляет собой сварную конструкцию, основными несущими элементами которого является щит 1 и стойки 2 с наборами жёсткости.

В качестве параметров идентификации выступают перемещения 3, регистрируемые лазерными дальномерами, установленными в точках 2. Общий вид конструкции и схема измерения параметров идентификации представлена на рис. 4 и 5 соответственно. Применение предлагаемого подхода при мониторинге в том числе и элементов гидросооружений (шлюзовых затворов, ворот) позволяет производить оценку в режиме реального времени эксплуатационного состояния по косвенным параметрам, удобным для измерения.

Выводы

В работе представлена методика, позволяющая определить множество параметров идентификации, оптимальных для восстановления действующего нагружения и соответствующего им параметров состояния.

Для этих целей:

- подобрана надлежащая целевая функция, которая удовлетворяет требованиям по усилению сигнала, наименьшего влияния шума и не учитываемых фактов нагружения, устойчивости к смещению места измерения и пр;



Рис. 4. Конструкция несущей части затвора

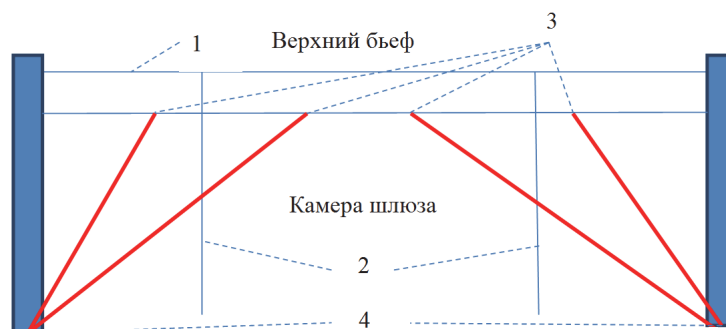


Рис. 5. Схема измерения параметров идентификации

- предложены подходы к улучшению качества идентификации параметров нагружения за счет увеличения количества параметров идентификации;
- предложен эффективный алгоритм, доставляющий глобальный максимум целевой функции;
- предложена схема организации мониторинга эксплуатационного состояния шлюзового затвора №7 канала имени Москвы.

Литература

1. Мещихин И.А., Гаврюшин С.С., Зайцев Е.А. Мониторинг технических конструкций на основе редуцированных конечно-элементных моделей // Известия ВУЗов. Машиностроение, М.: 2015, № 9.
2. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций приборов и машин. М.: Изд. МГТУ и. Н.Э. Баумана, 2014. 479 с.
3. Канунникова Е.А., Мещихин И.А. Применение суперэлементов в прочностных расчетах космических аппаратов // Труды НПП ВНИИЭМ. Вопросы электромеханики, М.: 2011. № 121. С. 31-39.
4. Геча В.Я., Канунникова Е.А., Мещихин И.А. Бордадымов В.Е., Даниловский Н.Н. Создание редуцированных матриц жесткостей и масс для совместного анализа нагрузок // Труды НПП ВНИИЭМ. Вопросы электромеханики, М.: 2011. № 121. С. 39-45.
5. Канунникова Е.А., Мещихин И.А. Параметрическая модель нагружения конструкций и алгоритм ее применения при оценке максимальных напряжений. Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ, М.: 2013, № 137, стр. 15-22.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. С. 31-33.
7. Зайцев Е. А., Мещихин И. А. Мониторинг прочности металлоконструкций запорных СГТС // Речной транспорт (XXI век), М.: –2011. – №4. С. 70-74.
8. Мещихин И.А., Сахненко М.А., Сосенушкин Е.Н. Применение метода внешних суперэлементов и ОТМ-матриц при мониторинге состояний шлюзовых затворов // Речной транспорт (XXI век), М.: – 2013. – №5. С. 52-56.

УДК 539.375

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Б.Г. Миронов, С.В. Тихонов

*Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, Чебоксары,
Россия, strangcheb@mail.ru, mbg.chspu@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассмотрено кручение неоднородных анизотропных идеальнопластических стержней при произвольном условии пластичности. Определены характеристики исследуемых уравнений и соотношения вдоль характеристик, а также при некоторых частных случаях условия предельного состояния получены интегралы основных соотношений. Исследовано также кручение неоднородных идеальнопластических стержней при некоторых частных случаях условий пластичности для которых получены интегралы основных соотношений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, анизотропия, неоднородность, кручение.

1. Кручение неоднородных стержней

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xuz . Образующие стержня параллельны оси z . Предположим, что стержень состоит из неоднородного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Положим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (1)$$

Условие пластичности в общем случае запишется в виде

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y) = 0, \quad (2)$$

а единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Из наших предположений следует, что на контуре поперечного сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (2) по x , получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Согласно (5) из уравнения равновесия (3) следует

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (6)$$

Характеристики уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x}}. \quad (7)$$

Из (7) и (2) следует

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \quad (9)$$

В общем случае, соотношения (8), (9) могут быть проинтегрированы только численно.

1.1. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) не зависит от x

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, y) = 0. \quad (10)$$

В этом случае вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{21}(y), \quad \tau_{yz} = c_{22} = \text{const}, \quad (11)$$

где $f(c_{21}(y), c_{22}, y) = 0$.

Уравнения характеристик имеют вид

$$x = -\int \frac{b_2(y)}{a_2(y)} dy + c_2, \quad (12)$$

где $a_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $b_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $c_2 = \text{const}$.

1.2. Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\varphi(y)\tau_{xz}, \psi(x)\tau_{yz}) = 0. \quad (13)$$

В этом случае, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = \frac{c_{31}}{\varphi(y)}, \quad \tau_{yz} = \frac{c_{32}}{\psi(x)}, \quad (14)$$

где $c_{31} = \text{const}$, $c_{32} = \text{const}$, $f(c_{31}, c_{32}) = 0$.

Уравнения характеристик определяются из соотношений

$$\int \frac{a_3}{\psi(x)} dx + \int \frac{b_3}{\varphi(y)} dy = c_3, \quad (15)$$

где $a_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(c_{31}, c_{32})$, $b_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(c_{31}, c_{32})$, $c_3 = \text{const}$, $\xi_1 = \varphi(y)\tau_{xz}$, $\xi_2 = \psi(x)\tau_{yz}$.

1.3. В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = k_0^2 + k_1^2(x) + k_2^2(y), \quad (16)$$

где $A, B, k_0 - \text{const}$, k_1, k_2 – некоторые функции соответственно от x и y .

Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$A\tau_{xz}^2 - k_2^2(y) = c_{41} = \text{const}, \quad (17)$$

$$B\tau_{yz}^2 - k_1^2(x) = c_{42} = \text{const}.$$

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{\sqrt{B(k_1^2(x) + c_{42})}} + \int \frac{dy}{\sqrt{A(k_2^2(y) + c_{41})}} = c_4, \quad (18)$$

где $c_4 = \text{const}$.

2. Кручение анизотропных стержней

Рассмотрим анизотропный идеальнопластический стержень, т. е. случай, когда условие пластичности (2) не зависит от x и y

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0. \quad (19)$$

Известно [2], что уравнения (8), (9) в этом случае легко интегрируются. Характеристики есть прямые линии, уравнения которых имеют вид

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad (20)$$

а вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = c_{11} = \text{const}, \quad \tau_{yz} = c_{12} = \text{const}, \quad (21)$$

где

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{11}, c_{12}), \quad b_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{11}, c_{12}), \quad f(c_{11}, c_{12}) = 0, \quad c_1 = const.$$

Рассмотрим вектор градиента к кривой текучести (2)

$$\text{grad } f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \bar{j},$$

где \bar{i}, \bar{j} – единичные орты осей x и y .

Из (20) следует, что характеристики соотношения (6) ортогональны вектору градиента к кривой текучести (рис. 1).

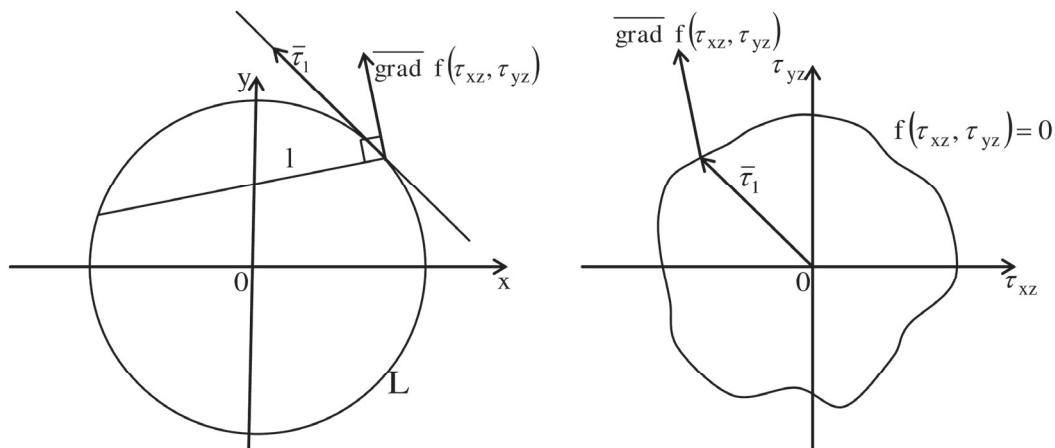


Рис. 1

В случаях, когда через данную точку сечения стержня проходят две и более характеристик, возникает неопределенность в определении напряжений и невозможно построить непрерывные решения. Эта неопределенность устраняется введением линии разрыва напряжений. На линии разрыва напряжений нормальная к ней составляющая вектора касательного напряжения $\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}$ непрерывна. Из этого условия получим соотношение для определения линии разрыва напряжений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}^+ - \tau_{yz}^-}{\tau_{xz}^+ - \tau_{xz}^-}, \quad (22)$$

где индексы «плюс» и «минус» наверху определяют соответственно компоненты напряжения слева и справа от линии разрыва напряжений.

3. Кручение цилиндрического анизотропного стержня с эллиптическим сечением

Рассмотрим анизотропный цилиндрический стержень с эллиптическим сечением, ориентированный в декартовой системе координат xyz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть L – контур поперечного сечения стержня в плоскости xy ($z = const$) (рис. 2)

$$L: \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1. \quad (23)$$

Пусть напряженное состояние стержня характеризуется условием пластичности

$$E\tau_{xz}^2 + F\tau_{yz}^2 = 1. \quad (24)$$

Тогда с учетом (23), (24) уравнение семейства характеристик (20) примет вид

$$y = y_0 + \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \frac{y_0}{x_0} (x - x_0). \quad (25)$$

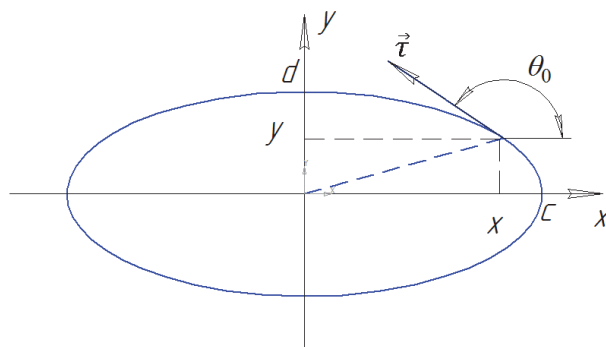


Рис. 2

Уравнения огибающей данного семейства характеристик имеет вид

$$y = \pm \frac{b^2 c}{a^2 d} \left(\frac{(b^2 c^2 - a^2 d^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{4}{b^3 c^3} - x^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (26)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-31323) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

Литература

1. Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей. – Владивосток : Дальнаука, 2002. – 566 с.
2. Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
4. Миронов Б. Г, Митрофанова Т. В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 150-155.

УДК 624.131

ИНВАРИАНТЫ ДИСТОРТНОСТИ В ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ГЕОМЕХАНИКЕ

В.А. Миронов, Б.Ф. Зюзин, С.А. Юдин

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, zbfri@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены инварианты предельных напряженно- деформированных состояний. Теоретически определены области влияния сцепления и угла внутреннего трения на прочностные свойства деформированных тел, горных пород и органоминеральных грунтов, согласно «паспорта прочности».

Ключевые слова: инварианты предельных состояний, дистортность, «паспорт прочности».

Вопрос о распределении напряжений и деформаций в грунтах, почвах и композиционных материалах при различных видах их нагружения представляет существенный интерес для инженерной практики [1]. Кроме строительного дела, где значение этого вопроса – бесспорно, следует назвать, гидротехнику, горное дело, подземные работы, фортификацию, агромехану и ряд других областей. Главное затруднение при исследовании прочности материала состоит в изучении взаимосвязей и прогноза прочностных и деформационных свойств по косвенным признакам, что является серьезной проблемой для создания единой методики для оценки предельных состояний. В работе [5] изложены основы построения теории для оценки инвариантов предельных состояний. В качестве исходных значений инвариантов главных напряжений $0 < \sigma_3 < \sigma_m < \sigma_1$ на рис. 1 представлена следующая расчетная схема.

В геомеханике предельное напряженное состояние, или предельное равновесие рассматривается как условие начала еще не возникших деформаций микроразрушений в структуре грунта. В качестве основного условия предельного состояния грунтового массива для органоминеральных грунтов наиболее часто используют зависимость предельного сопротивления сдвигу от соотношений между главными напряжениями [4].

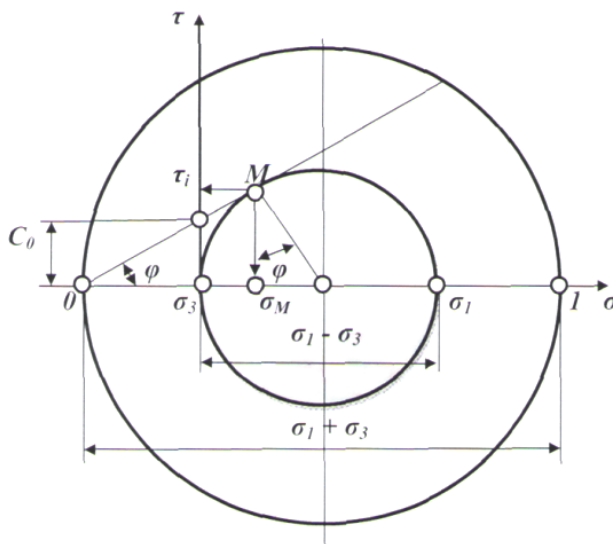


Рис. 1. Диаграмма инвариантов главных напряжений

Критерий прочности Кулона-Мора представляет собой билинейную зависимость касательных напряжений материала от величины приложенных нормальных напряжений.

$$\tau = \sigma_3 \operatorname{tg}(\varphi) + C_0,$$

где τ – величина инварианта касательных напряжений; σ_3 – величина нормального напряжения; C_0 – величина сцепления.

Соотношение главных напряжений определено зависимостью

$$\sigma_3 / \sigma_1 = \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2).$$

Введем понятие о параметре предельного состояния материала через значение главных напряжений в виде $\Pi_{K(L)} = \sigma_3 / \sigma_1$. Это отношение не зависит от сцепления и является чистой функцией угла внутреннего трения. Полученное выражение аналогично двумерной задаче о предельном состоянии, где β, γ – соответственно углы площадок скольжения. Достоинством такого подхода является возможность представления напряженно-деформированного состояния для различных материалов на основании обобщенной диаграммы Мора (рис. 2).

Прогнозирование деформационных процессов удобней производить в инвариантной форме, для чего экспериментальные диаграммы представляются в приведенной системе координат. На рис. 3 приведена схема приведенного квадрата, где показана геометрическая связь угла внутреннего трения с положением критериальной точки $A[X_A, Y_A]$ – параметра оценки уровня функциональной нелинейности [5], что позволяет, в свою очередь, установить следующую связь вида

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg}(1 - 2X_A) = 2 \operatorname{arctg}(\Pi_{K(L)}).$$

Из графика можно установить соотношение углов площадок скольжения $\varphi = \gamma - \beta$.

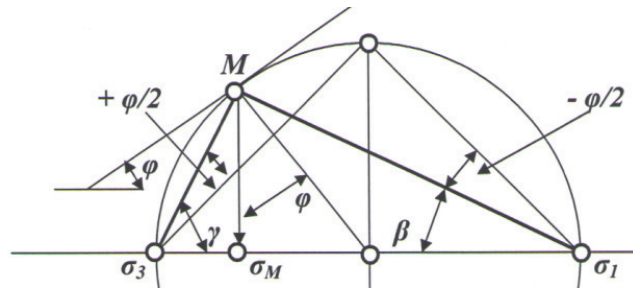


Рис. 2. Схема предельного состояния грунтов по теории Кулона-Мора

Приведенное выше выражение позволяет судить о физической сущности угла внутреннего трения, как некоторого параметра функциональной нелинейности материалов [5]. При этом, заметим, что поверхности скольжения образуют с направлением как большего главного напряжения угол β – независимо от значения величины сцепления.

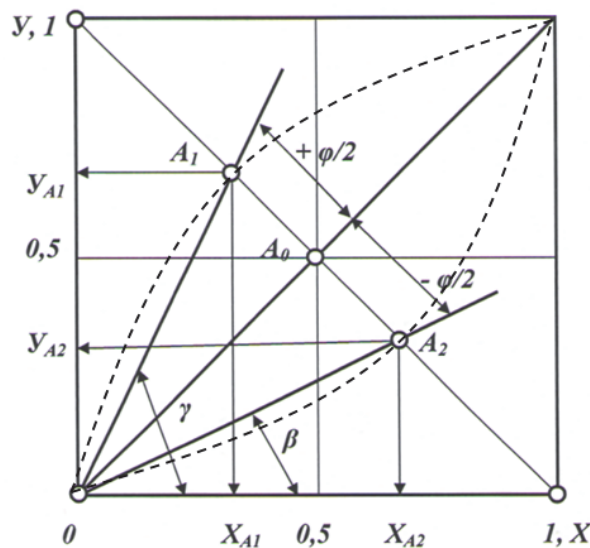


Рис. 3. Схема углов на площадках скольжения в приведенном квадрате:
 - - - деформационные кривые

Тот факт, что положение поверхностей скольжения не зависит от величины всестороннего внутреннего давления – величины сцепления, дает нам возможность для оценки величины угла внутреннего трения на основе данных о сопротивлении материала сжатию и растяжению.

Например, чтобы получить значение угла внутреннего трения для определенного вида песка, необходимо определить между отдельными песчаными зернами связующие средства структурной системы, которые обладают нулевым внутренним трением. Известно, что таким связующим средством является вода. При этом связующая сила ее очень мала и определяется капиллярным давлением как отмечено в работе Буисмана [6].

Профессор Буисман пришел к выводу, что для влажных песчаных призм при различной степени увлажнения приблизительно можно отметить, что величина $P_{K(L)} = \frac{1}{4}$, а это значит

$$\sin\varphi = (1 - P_{K(L)}) / (1 + P_{K(L)}) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) / \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 0,6,$$

откуда следует, что значение угла внутреннего трения равно $\varphi = 36,87^\circ$, которое приводит к углу скольжения $\beta = 26,56^\circ$. Угол, образуемый плоскостью обрушения с осью призмы, должен, поэтому составлять $\gamma = 63,43^\circ$. Такой же угол наклона был установлен экспериментально [6].

В естественных природных состояниях для скальных пород угол внутреннего трения равен $\varphi = 37^\circ \dots 36^\circ$, что соответствует предельному значению инварианта сцепления (табл. 2). По мере снижения прочности скальных пород значение угла внутреннего трения незначительно уменьшается до $\varphi = 33^\circ \dots 30^\circ$. В глинистых грунтах четвертичных отложений угол внутреннего трения находится в пределах $\varphi = 30^\circ \dots 17^\circ$ в зависимости от их консистенции.

Нами установлено, что для торфов естественной структуры $\varphi = 25^\circ \dots 15^\circ$ в зависимости от вида торфа и его исходной влажности.

Угол внутреннего трения для различных видов нескальных грунтов колеблется в пределах: песчаных $25^\circ - 43^\circ$; пылевато-глинистых $7^\circ - 30^\circ$. По сути дела, в природе встречаются естественные образования при $\varphi < 45^\circ$ (рис. 4). Наш анализ показал, что угол внутреннего трения грунта зависит от коэффициента пористости (степени увлажнения). Чем меньше коэффициент пористости, тем больше угол внутреннего трения. В большей степени он зависит от величины вертикального давления на грунт.

В качестве примера в табл. 1 приведены основные прочностные характеристики минеральных грунтов по данным СНиП. Для построения «паспорта прочности» используют две основные характеристики: угол внутреннего трения φ и сцепление C_0 . При этом с увеличением нагрузок «паспорта прочности» указывают [3] на возрастающее влияние трения при сдвигении горных пород и на уменьшающееся влияние сцепления.

Под действием внешней нагрузки в отдельных точках массива грунта эффективные напряжения могут превзойти внутренние связи между частицами грунта, что вызывает скольжение или сдвиги на площадках. Это отражает проявление трения, которое либо препятствует разделению тела на части, либо характеризует уплотнение грунта.

В связных грунтах имеет место как вязкие, так и водно-коллоидные связи. Разделить эти сопротивления часто не представляется возможным.

Если $\varphi = 0$, критерий прочности Кулона-Мора превращается в критерий Треска. Если же $\varphi = 90^\circ$, то этот критерий соответствует модели вязкой среды. Теория прочности Кулона-Мора широко используется в строительстве и в горном деле применительно к рыхлым несвязным и связным органоминеральным грунтам, а также применительно к обломочным цементированным горным породам.

В предыдущих работах авторов предложен следующий подход [5]. Предложенная нами нормировка $\sigma_1 + \sigma_3 = 1$ позволяет перейти к инвариантной форме

$$C_0 = \sigma_3 \operatorname{tg}\varphi, \quad \sin\varphi = (1 - P_{K(L)}) / (1 + P_{K(L)}).$$

Таблица 1. Основные прочностные характеристики минеральных грунтов
(по данным приложения 1 СНиП 2.02.01-83* «Основания зданий и сооружений»)

Вид грунта	Угол внутреннего трения, $\varphi, ^\circ$	Параметр состояния, $P_{K(L)}$	Параметр состояния, $P_{K(H)}$	Критерий предельного состояния, K_p
Песчаные грунты				
Гравелистые и крупные	38 – 43	0,24 – 0,19	0,49 – 0,43	0,147 – 0,129
Средней крупности	35 – 40	0,27 – 0,22	0,52 – 0,47	0,155 – 0,141
Мелкие	28 – 38	0,36 – 0,24	0,60 – 0,49	0,150 – 0,169
Пылеватые	26 – 36	0,39 – 0,26	0,62 – 0,51	0,171 – 0,153
Подробнее:				
Песок сухой	34	0,28	0,53	0,158
Песок влажный	40	0,22	0,47	0,141
Песок водонасыщенный	25	0,41	0,64	0,171 → max
Гравий сухой	45	0,17	0,41	0,121
Гравий водонасыщенный	30	0,33	0,577	0,166
Пылевато-глинистые грунты				
Супеси	18 – 30	0,53 – 0,33	0,73 – 0,57	0,163 – 0,166
Суглинки	12 – 26	0,66 – 0,39	0,81 – 0,62	0,135 – 0,171
Глины	7 – 21	0,78 – 0,47	0,88 – 0,69	0,096 – 0,169
Подробнее:				
Глина сухая	25	0,41	0,64	0,171 → max
Глина влажная	22	0,45	0,67	0,170
Глина водонасыщенная	15	0,59	0,77	0,152
Лёсс	22	0,45	0,67	0,170
Суглинки	20	0,49	0,70	0,167

После преобразований имеем $P_{K(L)} = \sigma_3 / (1 - \sigma_3)$,

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - 2\sigma_3) / \left[2\sqrt{\sigma_3(1 - \sigma_3)} \right]; \quad X_A = [1 - \operatorname{tg}(\varphi / 2)] / 2;$$

$$C_0 = \sigma_3(1 - 2\sigma_3) / \left[2\sqrt{\sigma_3(1 - \sigma_3)} \right] \rightarrow \max; \quad 0 < \sigma_3 < 0,5.$$

$$\varphi = (180 / \pi) \operatorname{arctg} \left[(1 - 2\sigma_3) / 2\sqrt{\sigma_3(1 - \sigma_3)} \right], \text{ град.}$$

Анализ полученных выражений определяет следующее соотношение: $\sin \varphi = 1 - 2\sigma_3$. При этом зависимость, представленная на рис. 4 $C_0 = f(\varphi)$ – имеет экстремум при $\varphi \approx 37^\circ$.

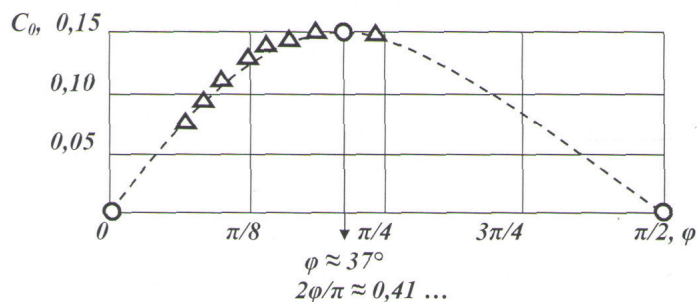


Рис. 4. Зависимость $C_0 = f(\varphi)$:

Δ – фактические значения для природных образований; - - - теоретический тренд

Одним из основных определяющих параметров здесь может выступать величина угла внутреннего трения, относительно которой оцениваются инварианты предельных состояний (табл. 2).

Таблица 2. Инварианты предельного состояния при $C_0 \rightarrow \max$

σ_3	$P_{K(L)}$	$tg \varphi$	$\sin \varphi$	φ	X_A	$C_0 \rightarrow \max$
0,2	0,25	0,75	0,60	36,°87	0,333	0,15

Здесь впервые теоретически определены области влияния C_0 и φ на прочностные свойства деформированных тел, горных пород и органоминеральных грунтов, согласно «паспорта прочности». Границей областей влияния есть величина угла внутреннего трения при $\varphi \approx 37^\circ$ и $C_0 \rightarrow \max$. При $\varphi > 37^\circ$ на прочностные свойства влияет в основном сцепление. При $\varphi < 37^\circ$ на прочностные свойства в большей степени влияет внутреннее трение.

Как показано ранее в работах авторов [5], проекция напряженно-деформированного состояния (НДС) материала осмысливается как взаимодействие структурных связей по мере возрастания внешней нагрузки. Экспериментальные данные, полученные на основе большого количества испытаний различных материалов, позволили установить, что различные в отношении своих механических свойств, они ведут себя, тем не менее, очень сходно. Поэтому, если правильно установить переменные параметры для оценки интересующих нас физико-механических свойств, то обобщенный критерий предельного состояния можно установить с помощью одних и тех же соотношений – инвариантов.

Согласно «синтетической теории прочности» академика Е.И. Шамякина [7], большинство природных и синтетических материалов в различных условиях нагружения проявляют себя как структурные системы, которые изменяют свои свойства от начала нагружения и вплоть до перехода в предельные состояния, характеризующие потерю упругости, прочности или устойчивости. Установлено, что эксперимент фиксирует, лишь отклик поведения структурной системы на внешнее воздействие. И поэтому можно установить только характер изменения величины функциональной нелинейности объекта исследования. Но, в месте с тем, именно величина функциональной нелинейности определяет условие перехода структурной системы к предельному состоянию.

Основные определяющие инварианты в «синтетической теории прочности» описывают напряженное состояние в виде

$$\tau_{max} = T = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2; \quad \sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2; \quad \mu_\sigma = (\sigma_2 - \sigma_n) / T.$$

Данные инварианты полностью характеризуют напряженное состояние в элементарном объеме среды. Первый инвариант описывает действие максимального касательного напряжения на наклонной площадке и, соответственно, углы между первым и третьим главными нормальными напряжениями. Второй инвариант описывает действие нормального напряжения на наклонной площадке или сопротивление скольжению (сдвигу). Третий инвариант – параметр Надаи-Лоде μ_σ описывает не только вид напряженного состояния и влияние второго главного напряжения, но и вид наклонных площадок, по которым происходит скольжение.

Влияние двух других экстремальных касательных напряжений запишем в виде

$$T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3) / 2; \quad T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2.$$

Введение трех инвариантов T, σ_n, μ_σ позволяет описать возникающую при необратимых деформациях и разрушении анизотропию сопротивления сдвигу и построить математическую модель деформирования твердых тел, адекватную физическим процессам.

Основные инварианты «синтетической теории прочности» можно дополнить критерием предельного состояния $K_P = \mu_\sigma \Pi_{K(L)}$, который предложен нами в качестве четвертого комплексного инварианта для качественной оценки напряженного состояния в материале.

С помощью инвариантов и критерия предельного состояния установим следующую взаимосвязь: параметр Надаи-Лоде равен $\mu_\sigma = (\sigma_2 - \sigma_n) / T$; критерий предельного состояния

$$K_P = \mu_\sigma \Pi_{K(L)} = (\sigma_2 - \sigma_n) (\sigma_2 - \sigma_3) / [T(\sigma_1 - \sigma_2)].$$

Проведем подстановку $\sigma_3 = \sigma_n - T$, и после преобразований получим выражение вида

$$K_P = [(\sigma_2 - \sigma_n) + T](\sigma_2 - \sigma_n) / \{T[T - (\sigma_2 - \sigma_n)]\}.$$

Введем обозначение $W = (\sigma_2 - \sigma_n)$, тогда окончательно получим

$$K_P = \mu_\sigma \Pi_{K(L)} = (W / T)(T + W) / (T - W) = \mu_\sigma (1 + \mu_\sigma) / (1 - \mu_\sigma).$$

При $\sigma_2 - \sigma_n < 0$ получаем ранее определенное выражение

$$K_P = \mu_\sigma \Pi_{K(L)} = -\mu_\sigma (1 - \mu_\sigma) / (1 + \mu_\sigma).$$

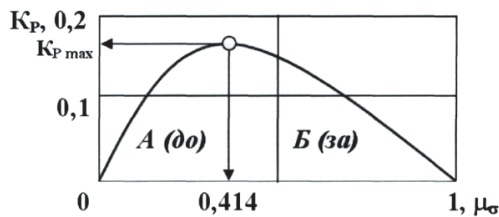


Рис. 5. Критерий предельного состояния

Таким образом, предложенный критерий предельного состояния качественно дополняет основные инварианты синтетической теории прочности. Экстремальное значение K_{Pmax} (обобщенного инварианта) разделяет условия создаваемого напряженно-деформированного состояния в локальной области различных материалов на две качественные зоны (рис. 5), где A – допредельное состояние (зона устойчивости); B – запредельное состояние.

Выводы

1. Применен информационно-энергетический подход в построении общей теории инвариантов предельных состояний, обеспечивающий количественный и качественный подход в оценке структурных параметров систем.

2. Предложен энтропийный критерий (инвариант) оценки (количественного и качественного) предельного равновесного состояния структурной системы (среды, материала), характеризующий подобие напряженно-деформированных состояний, обладает инвариантностью и является отношением двух противоположных начал: растяжения – сжатия, разрушения – упрочнения, притяжения – отталкивания, нагревания – охлаждения, порядка – хаоса и т.д.

3. Данный критерий представлен авторами в качестве дополнительного четвертого инварианта в «синтетической теории прочности».

Литература

1. Фрелих, О.К. Распределение давления в грунте / Перевод с немецкого. М: Из-во Наркомхоза РСФСР, 1936. 188 с.
2. Покровский, Г.П. Исследования по физике грунтов. М.–Л., 1937.
3. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.
4. Coulomb, C. Essai de 1773. Offert par le Comite. Francals de Mecanique les Solret des Fondations. Paris, 1973.
5. Миронов, В.А., Зюзин, Б.Ф. Инварианты дистортности. Тверь: ТвГТУ, 2015. 168 с.
6. Buisman: “De drukverdeeling in bouwgrond ...” De Ingeniur, 1932, № 37.
7. Шемякин, Е.И. Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях механики сплошной среды. // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сборник статей к 75-летию со дня рождения В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ, 2007. С. 42 – 46.

УДК 539.37

О ЛИНИЯХ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Т.В. Митрофанова, Е.А. Деревянных

*Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
Чебоксары, Россия, mitrofanova_tv@mail.ru, jane-evgeniya@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассмотрено кручение цилиндрических стержней, ориентированных в декартовой системе координат. Поперечное сечение стержня представляет собой окружность радиуса R . Определено напряженное состояние стержня, линии разрыва напряжений. Построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, линия разрыва, напряжение, анизотропия, неоднородность, цилиндрический стержень.

1. Кручение анизотропного однородного цилиндрического стержня

Рассмотрим анизотропный цилиндрический стержень, ориентированный в декартовой системе координат xuz , причем образующие стержня направлены параллельно оси z . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть напряженное состояние стержня характеризуется условием пластичности

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_x)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + D\tau_{xy}^2 + E\tau_{yz}^2 + F\tau_{xz}^2 = 1, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F – const, σ_{ij} – компоненты напряжений в декартовой системе координат.

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (3)$$

С учетом (3) из (1) и (2) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad E\tau_{xz}^2 + F\tau_{yz}^2 = 1. \quad (4)$$

Второму уравнению (4) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = a \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = b \sin \varphi, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \quad (5)$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{F}}, b = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

Подставляя выражения (5) в первое уравнение (4), получим

$$-a \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Система для определения характеристик (6) имеет вид

$$-\frac{dx}{a \sin \varphi} = \frac{dy}{b \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{0}. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg}\varphi, \quad \varphi = \operatorname{const}. \quad (8)$$

Следовательно, характеристики есть прямые линии

$$y = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg}\varphi \cdot x + C(\varphi). \quad (9)$$

Согласно (5)

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta, \quad (10)$$

где θ – угол, который образует вектор касательного напряжения τ с осью Ox .

Боковая поверхность стержня свободна от усилий, тогда касательное напряжение τ направлено по касательной к контуру L , где L – контур поперечного сечения в плоскости xu ($z = \operatorname{const}$). В рассматриваемом случае контур поперечного сечения есть окружность произвольного радиуса R

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (11)$$

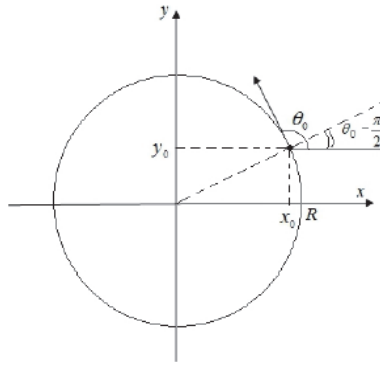


Рис. 1. Контур поперечного сечения однородного анизотропного стержня

Пусть $(x_0, y_0) \in L$ и $(x_0, y_0) = \theta_0$ (рис. 1). Тогда

$$\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg}\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\theta_0. \quad (12)$$

Из (12), учитывая (10), получим

$$\operatorname{ctg}\varphi_0 = -\frac{b}{a} \frac{y_0}{x_0}. \quad (13)$$

Тогда с учетом (11) и (13) уравнение семейства характеристик (9) примет вид

$$y = \pm \frac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{a^2 x_0} \left[(a^2 - b^2)x_0 + b^2 x \right]. \quad (14)$$

Уравнения огибающей данного семейства характеристик имеет вид

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} \left(\sqrt[3]{\frac{(b^2 - a^2)^2 R^2}{b^4} - x^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (15)$$

Расположение характеристик и огибающей характеристик приведено на рис. 2.

В случае $a > b$, когда $y_{1,2} = \pm \frac{R(b^2 - a^2)}{a^2}$. В случае, когда $a < b$, $x_{1,2} = \pm \frac{R(b^2 - a^2)}{b^2}$.

Линии разрыва напряжений отсутствуют [3].

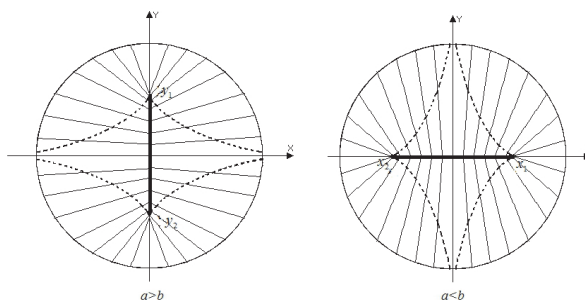


Рис. 2. Расположение характеристик в случае анизотропного стержня

2. Кручение кусочно-неоднородного цилиндрического стержня

Рассмотрим цилиндрический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат xuz . Ось z направим параллельно образующей стержня. Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных ломаной линией AOB . Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M . Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Положим

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \quad (16)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям x, y, z .

Пусть напряженное состояние стержня в первой области характеризуется условием пластичности

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2, \quad (17)$$

во второй области

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2, \quad (18)$$

где $k_2 > k_1$ (рис. 3), и уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Уравнение контура поперечного сечения стержня (рис. 3) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (20)$$

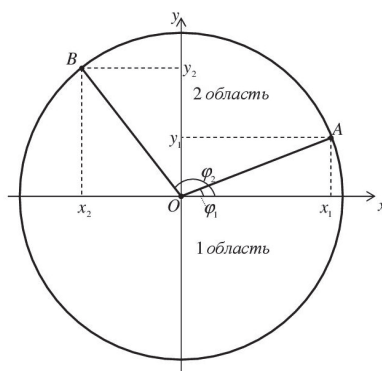


Рис. 3. Контур поперечного сечения кусочно-неоднородного стержня

Согласно [2] характеристики являются прямыми линиями, ортогональными вектору касательного напряжения $\bar{\tau}$, который направлен по касательной к контуру стержня и не меняется вдоль характеристики.

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad (21)$$

где φ_1 – угол, образованный линией неоднородности OA с осью Ox .

Обозначим через φ_2 – угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox . Предположим, что $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$.

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{11}$, действующий на OA со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{11} = (-k_1 \sin \varphi_1, k_1 \cos \varphi_1). \quad (22)$$

Обозначим через \bar{n}_1 – вектор нормали к контуру стержня в точке A , определяемый в виде

$$\bar{n}_1 = (n_1 \cos \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1), \quad (23)$$

где

$$n_1 = |\bar{n}_1| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (24)$$

В силу того, что линия неоднородности OA является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OA действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{12}$:

$$\bar{\tau}'_{12} = \bar{n}_1 + \bar{\tau}_{11} = (n_1 \cos \varphi_1 - k_1 \sin \varphi_1, n_1 \sin \varphi_1 + k_1 \cos \varphi_1). \quad (25)$$

Следовательно, из точки A выходит еще одна линия разрыва напряжений.

Пусть OM – характеристика, проходящая через произвольную точку $K(x, y)$ линии разрыва напряжений AC [1].

Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики OM , имеет вид

$$\bar{\tau}''_{12} = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi), \quad (26)$$

где φ – угол, образованный характеристикой OM и с осью Ox .

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений AC в точке K примет вид

$$\bar{\tau}' = \bar{\tau}''_{12} - \bar{\tau}'_{12} = (-k_2 \sin \varphi - n_1 \cos \varphi_1 + k_1 \sin \varphi_1, k_2 \cos \varphi - n_1 \sin \varphi_1 - k_1 \cos \varphi_1). \quad (27)$$

Из (27) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений AC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_1 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_1 \right) dy = 0, \quad (28)$$

где

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{R}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{R}, \quad x_1^2 + y_1^2 = R^2, \quad (29)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (30)$$

$$a_1 = -\frac{n_1 y_1 + k_1 x_1}{k_2 R}, \quad b_1 = \frac{n_1 x_1 - k_1 y_1}{k_2 R}, \quad a_1^2 + b_1^2 = 1. \quad (31)$$

Из (28) следует, что уравнение линии разрыва напряжений AC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) = R. \quad (32)$$

Пусть

$$\sin \varphi_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{n_1}{k_2}. \quad (33)$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (34)$$

Согласно (33), (34) из (32) получим уравнение линии разрыва напряжений AC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\bar{R}}{1 + \sin(\theta + \chi)} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_1 + \chi))}{1 + \sin(\theta + \chi)}. \quad (35)$$

где

$$\bar{R} = R + \sin \chi \cdot x_1 + \cos \chi \cdot y_1, \quad \chi = \varphi_0 - \varphi_1.$$

Пусть точка B имеет координаты (x_2, y_2) . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_2}{x_2}, \quad (36)$$

где φ_2 – угол, образованный линией неоднородности OB с осью Ox .

Вектор касательного напряжения $\bar{\tau}_{21}$, действующий на OB со стороны первой области, направлен по касательной к контуру и имеет координаты

$$\bar{\tau}_{21} = (-k_1 \sin \varphi_2, k_1 \cos \varphi_2), \quad (37)$$

где $\varphi_2 < \pi$.

Обозначим через \bar{n}_2 – вектор нормали к контуру стержня в точке B , определяемый в виде

$$\bar{n}_2 = (-n_2 \cos \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2), \quad (38)$$

где

$$n_2 = |\bar{n}_2| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}. \quad (39)$$

В силу того, что линия неоднородности OB является линией разрыва напряжений, то со стороны второй области на отрезок OB действует вектор касательного напряжения $\bar{\tau}'_{22}$:

$$\bar{\tau}'_{22} = \bar{n}_2 + \bar{\tau}_{21} = (-n_2 \cos \varphi_2 - k_1 \sin \varphi_2, -n_2 \sin \varphi_2 + k_1 \cos \varphi_2). \quad (40)$$

Следовательно, из точки B будет выходить еще одна линия разрыва напряжений.

Вектор касательного напряжения, действующий вдоль характеристики, имеет вид

$$\bar{\tau}''_{22} = (-k_2 \sin \varphi, k_2 \cos \varphi). \quad (41)$$

Тогда направляющий вектор линии разрыва напряжений BC в точке (x, y) примет вид

$$\bar{\tau}'' = \bar{\tau}''_{22} - \bar{\tau}'_{22} = (-k_2 \sin \varphi + n_2 \cos \varphi_2 + k_1 \sin \varphi_2, k_2 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi_2 - k_1 \cos \varphi_2). \quad (42)$$

Из (42) получим дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений BC :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_2 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b_2 \right) dy = 0. \quad (43)$$

где

$$\cos \varphi_2 = \frac{x_2}{R}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{R}, \quad x_2^2 + y_2^2 = R^2, \quad (44)$$

$$a_2 = \frac{n_2 y_2 - k_1 x_2}{k_2 R}, \quad b_2 = -\frac{n_2 x_2 + k_1 y_2}{k_2 R}, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1. \quad (45)$$

Из (42) следует, что уравнение линии разрыва напряжений BC примет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a_2(x - x_2) + b_2(y - y_2) = R. \quad (46)$$

Пусть

$$\sin \tilde{\varphi}_0 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad \cos \tilde{\varphi}_0 = -\frac{n_2}{k_2}. \quad (47)$$

Согласно (34), (47) из (46) получим уравнение линии разрыва напряжений BC в полярной системе координат

$$\rho = \frac{\tilde{R}}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})} = \frac{R(1 + \sin(\varphi_2 + \tilde{\chi}))}{1 + \sin(\theta + \tilde{\chi})}. \quad (48)$$

где

$$\tilde{R} = R + \sin \tilde{\chi} \cdot x_2 + \cos \tilde{\chi} \cdot y_2, \quad \tilde{\chi} = \tilde{\varphi}_0 - \varphi_2.$$

На рис. 4 определено напряженное состояние цилиндрического стержня, разделенного на две области линиями неоднородности OA и OB при $k_2 > k_1$. Линии неоднородности OA и OB являются линиями разрыва напряжений. Кроме того из точек A и B выходят еще по одной линии разрыва напряжений, которые задаются соотношениями (32) и (46). Линия разрыва, исходящие из точек A и B пересекаются в точке C . Линия разрыва OC образована векторами касательных напряжений $\bar{\tau}'_{12}$ и $\bar{\tau}'_{22}$. Координаты точки C удовлетворяют соотношениям (32) и (46).

На рис. 4 отображены векторы касательных напряжений, построены линии разрыва напряжений (линии изображены жирным контуром), в каждой области определено поле характеристик (характеристики изображены тонким контуром).

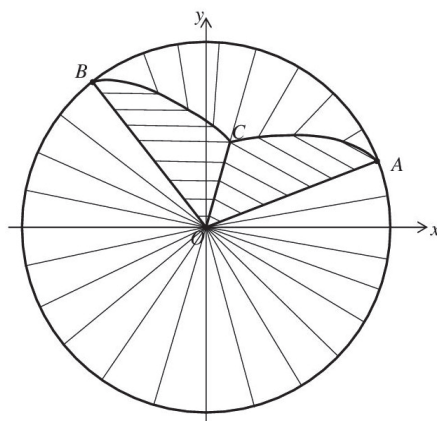


Рис. 4. Расположение характеристик в случае кусочно-неоднородного стержня

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-31323 мол_а).

Литература

1. Деревянных Е. А., Миронов Б.Г. Кручение кусочно-неоднородных цилиндрических // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2(24). – С. 157–165.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 231 с.
3. Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В. О кручении анизотропных цилиндрических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1(9). – С. 150–155.

УДК 621.983.3:621.798.144:669.71

ВАРИАНТ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ В МЕТАЛЛАХ

И.А. Наумов

Тульский государственный университет, Тула, Россия, aspkaфssmik@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрен вариант определения максимального упрочнения в материалах при проведении операций пластической деформации. Показан метод расчета напряженно-деформированного состояния, и его влияния на пластическое упрочнение и формирование механических свойств, исходя из допустимой деформационной повреждаемости. Показан способ его решения численным методом, позволяющим определять напряженно-деформированное состояние формирование механических свойств и деформационную повреждаемость.

Ключевые слова: пластическая деформация, напряженно-деформированное состояние, деформационная повреждаемость, упрочнение, механические свойства.

1. Основные положения

В строительстве используется достаточно широкий круг строительных конструкций. Важным вопросом при эксплуатации различных элементов таких конструкций является определение степеней деформации, которые позволяют исключить возможность образования в структуре материала крупных полостных дефектов.

При эксплуатации конструкций должно выполняться условие, в соответствии с которым допустимая деформация определяется допустимым уровнем поврежденности микропорами. Достоверное прогнозирование повреждаемости деформируемого материала с учетом влияния показателя напряженного состояния $\bar{\sigma}$ позволяет осуществить кинетическое уравнение. В кинетическое уравнение входит предельная степень деформации сдвига Λ_{np} , которая является функцией показателя $\bar{\sigma}$. Зависимости $\Lambda_{np}(\bar{\sigma})$, устанавливаются диаграммами пластичности, определяемыми экспериментальным путем [1].

Величина пластического разрыхления может быть оценена остаточным относительным увеличением объема. В.В. Новожилов показал что пластическое «разрыхление» можно оценить посредством первого инварианта тензора деформации: $I_1(T_\epsilon) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Увеличение «разрыхления» пропорционально степени деформации сдвига и описывается зависимостью

$$d\epsilon = \alpha d\lambda, \quad (1)$$

где $d\epsilon$ – приращение пластического разрыхления элементарного единичного объема деформируемого тела; $d\lambda = Hd\tau$ – приращение степени деформации сдвига за малый промежуток времени $d\tau$; α – множитель пропорциональности, определяющий интенсивность накопления и развития трещин; зависит от материала, от напряженного состояния. Определяющие соотношения для меры повреждаемости строятся на оценке явления пластической дилатансии (разрыхления) деформируемого металла, характеризующего величиной пластического разрыхления металла (пластической дилатансией ϵ_{ii}). С моментом образования макротрещины связывается достижение величиной пластического разрыхления критического значения $\epsilon_{ii_{кр}}$. Приведенные представления позволяют ввести меру повреждаемости ω дифференциальным соотношением [2, 3].

Математически степенная модель пластического разрыхления имеет следующий вид (2):

$$\epsilon_{ij} = B\Lambda^\alpha \quad (2)$$

где B – модуль, α – степенной показатель пластического разрыхления.

В общем случае оценка повреждаемости и разрушения деформируемого материала основана на расчет накопленной степени деформации сдвига в процессе деформирования, определение предельной степени деформации сдвига Λ_{np} , и параметров пластической дилатансии.

2. Расчет напряженно-деформированного состояния

В работе рассмотрен подход к исследованию процессов пластического деформирования дилатирующих материалов. Теоретической основой анализа процессов является теория пластичности и, прежде всего, теория течения, которая предполагает использование и основных положений теории движения сплошной среды. На базе основных соотношений плоского деформированного состояния строится функционал по расчету мощности пластической деформаций и напряженно-деформированного состояния для плоского деформированного состояния дилатирующей сплошной изотропной среды используем условие текучести Грина, которое описывается кривой Ламе, где в частном случае $r = 2$ (рис. 1). Используется программа Deform 2D, которая позволяет определять мощность сил пластической деформации напряженно-деформированного состояния с использованием пошагового метода.

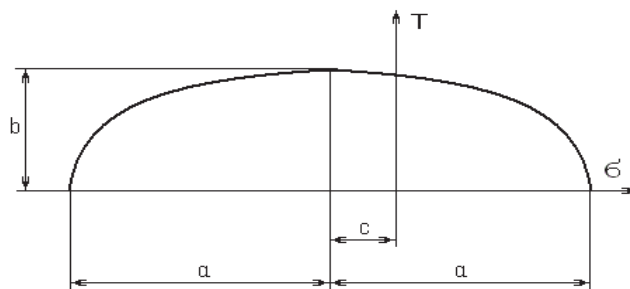


Рис. 1. Условие пластичности Грина

Приведенный подход к расчету процессов холодной обработки металлов давлением с учетом пластической дилатансии и с использованием вариационного метода позволяет определить все параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние, включая шаровый тензор напряжений и неоднородность их распределения.

3. Определение накопленной степени деформации и оценка повреждаемости

Для определения накопленной степени деформации сдвига $\Delta\Lambda$ используем результаты исследований напряженно-деформированного состояния операций обратного выдавливания и вытяжки с утонением, полученные с использованием вышеизложенного многошагового процесса принятия решения. Принципиальная расчетная схема следующая. Заготовка разбивается на n четырехугольных конечные элементы и выбраны три точки в разных зонах заготовки, для которых на характерных шагах процессов проведен расчет деформированного состояния. Количество исследуемых точек можно принимать любое в зависимости от необходимой точности расчета.

Накопленная степень деформации сдвига определяется по формуле (3):

$$\Delta\Lambda = \int_0^{\tau} H dt \quad (3)$$

где H – интенсивность деформации сдвига, определяется по выше изложенной методике.

В.Л. Колмогоровым разработана методика определения предельной степени деформации сдвига Λ_{np} в момент образования трещины при испытаниях на растяжение, кручение, изгиб и осадку. Обычно проводятся испытания на одноосное растяжение или сжатие стандартных образцов изготавливаемых в соответствии с ГОСТом 1497-84 «Металлы. Методы испытания на растяжения» и ГОСТом 25.503-97 «Методы испытания на сжатие».

При решении технологических задач удобно пользоваться аналитической аппроксимацией диаграмм пластичности. Диаграммы пластичности вполне удовлетворительно аппроксимируются следующей функцией:

$$\Lambda_{np} = A \exp(-c\bar{\sigma}), \quad (4)$$

где A и c параметры зависимости находимые по двум экспериментальным точкам 1 – $((\bar{\sigma})_1; \Lambda_1)$ и 2 – $((\bar{\sigma})_2; \Lambda_2)$ диаграммы пластичности:

$$c = \frac{\ln \Lambda_2 - \ln \Lambda_1}{(\bar{\sigma})_1 - (\bar{\sigma})_2}, \quad A = \frac{\Lambda_1}{\exp(-c(\bar{\sigma})_1)} = \frac{\Lambda_2}{\exp(-c(\bar{\sigma})_2)}. \quad (5)$$

Параметры дилатансии B и α в зависимости определяются по опытным зависимостям $\varepsilon_{ii}(\Lambda)$ следующим образом. Составлялись уравнения по точкам в момент достижения предельной деформации Λ_{np} и в момент деформации $\Lambda_{np} / 2$.

$$\varepsilon_{iikp1} = b\Lambda_{np1}^a, \quad \varepsilon_{ii1'} = b(\Lambda_{np1'} / 2), \quad (6)$$

откуда находим параметры:

$$a = \frac{\ln \varepsilon_{iikp1} - \ln \varepsilon_{ii1'}}{\ln 2}, \quad b = \frac{\varepsilon_{iikp1}}{\Lambda_{np1}^a}. \quad (7)$$

Таким образом, можно осуществить оценку повреждаемости и разрушения деформируемого материала с учетом пластического разрыхления.

Проводимые исследования пластического формоизменения материалов показывают, что эксплуатационные свойства изделий зависят не только от механических характеристик, но и от физико-структурных свойств обрабатываемых материалов, к которым относится и повреждаемость материала дефектами деформационного характера, связанная с пластическим разрыхлением (или уплотнением) мезоструктуры деформируемого материала. Известно, что основным физическим механизмом повреждаемости металлов при их больших пластических деформациях, является порообразование. Порообразование в условиях пластической деформации приводит к необратимому изменению объема деформируемого материала – его пластической дилатансии.

Литература

1. Колмогоров В.Л. Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения / В.Л. Колмогоров, Б.А. Мигачев, В.Г. Бурдуковский. – Екатеринбург: УрОРАН, 1994. – 104 с.
2. Богатов А.А., Механические свойства и модели разрушения металлов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. – 329 с.
3. Богатов А.А. Остаточные напряжения и разрушение металлов // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2007. № 10. С. 27-34.

УДК 539.401

ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН**Ю.В. Немировский¹, Д.В. Моховнев²**¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христановича СО РАН, Новосибирск, Россия, nemirov@itam.nsc.ru*² *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, mohovnov@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается проблема устойчивости тонкой кольцевой композитной пластины, подверженной равномерному нормальному давлению, приложенному к границам пластины и неравномерному в радиальном направлении нагреву. Армирование предполагается криволинейным и радиально симметричным, равномерно распределенным по толщине пластины. Используя модели структурной механики, определены осредненные по толщине упругие и термоупругие характеристики композитного материала. Они изменяются только в радиальном направлении. Получены постановки плоской задачи теории упругости и задачи устойчивости в полярной системе координат для таких пластин при термосиловом нагружении.

Ключевые слова: устойчивость, композитные пластины, структуры армирования, полярная ортотропия, термосиловое нагружение.

1. Введение

Сопrotивляясь внешним воздействиям, элементы конструкции напряжены неравномерно и, следовательно, конструкция работает неэффективно. Идея о равнопрочной конструкции привела к созданию композиционных материалов: элементы конструкции усиливаются более прочными и жесткими волокнами в тех местах и в тех направлениях, где материал наиболее напряжен. Основная часть исследований посвящена элементам конструкции с прямолинейным армированием и в значительно меньшей степени с криволинейным (например [1, 3, 4]). Для тонких пластин, подверженных внешним нагрузкам, действующим в плоскости пластины,

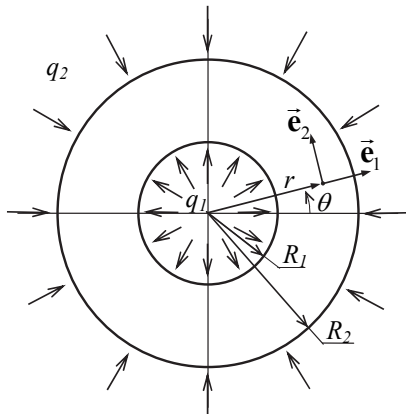


Рис. 1. Расчетная схема

разрушение, как правило, связано с их выпучиванием (потерей устойчивости) при достижении нагрузкой критического значения. Если изотропную пластину армировать материалом с более высоким модулем упругости, то очевидно, критическая нагрузка возрастет. Возникает очевидный вопрос: какова должна быть структура армирования, которая бы обеспечивала максимальную критическую нагрузку при одном и том же расходе материалов арматуры и связующего. Представленная задача оптимизации требует максимально возможного упрощения постановки задачи устойчивости для конкретного расчетного случая, чтобы время машинного счета было минимальным. В данной работе рассматривается задача устойчивости кольцевой пластины с непрерывным армированием, нагруженной нормальным давлением q_1 и q_2 (рис. 1).

Пластина неравномерно (в радиальном направлении) нагрета температурой $T(r)$. Считается, что арматура равномерно распределена по толщине пластины. Используя модели структурной механики, определены эффективные упругие и термоупругие характеристики пластины a_{ijkl} , β_{ij} , b_{ijkl} и α_{ij} : $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}T$, $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}T$ (по повторяющимся в выражениях индексам i, j, k, l ведется суммирование от 1 до 2). Величины a_{ijkl} , β_{ij} , b_{ijkl} и α_{ij} изменяются лишь в радиальном направлении, $a_{ijkl} = a_{ijkl}(r)$, $b_{ijkl} = b_{ijkl}(r)$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(r)$, $\beta_{ij} = \beta_{ij}(r)$, благодаря чему, двумерная задача устойчивости сводится к одномерной.

2. Докритическое напряженное состояние

Для решения задачи устойчивости необходимо предварительно найти докритические плоские напряжения. Решим плоскую задачу теории упругости с помощью функционала

дополнительной энергии [2, 5]. В случае статических граничных условий, функционал можно записать в виде:

$$\Psi[\sigma_{ij}^0] = h \iint_{\Omega} \Lambda(\sigma_{ij}^0) d\Omega, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь $\Lambda(\sigma_{ij}^0) = \frac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 + \alpha_{ij} T \sigma_{ij}^0$, $i, j, k, l = 1, 2$. Деформации определяются по формуле:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial \Lambda(\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, \sigma_{22}^0)}{\partial \sigma_{ij}^0} = b_{ijkl} \sigma_{kl}^0 + \alpha_{ij} T. \quad (2)$$

Компоненты тензоров b_{ijkl} , α_{ij} , σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 записаны в базисе полярной системы координат (\bar{e}_1 имеет радиальное направление, \bar{e}_2 – окружное). Функционал (1) задан на множестве статически допустимых напряжений, то есть напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \rho F_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{12}^0 + \rho F_2 = 0 \quad (2)$$

и статическим граничным условиям

$$r = R_1 : \sigma_{11}^0 = -q_1, \sigma_{12}^0 = 0; \quad r = R_2 : \sigma_{11}^0 = -q_2, \sigma_{12}^0 = 0. \quad (3)$$

В случае отсутствия массовых сил ($F_1 = F_2 = 0$) уравнения равновесия будут выполнены, если ввести функцию напряжений:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right); \quad \sigma_{22}^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (4)$$

Так как задача обладает круговой симметрией и ее решение единственно, то напряжения в докритическом состоянии, а следовательно и функция напряжений, не зависят от окружной координаты θ . Тогда (4) и (3) примут вид:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = 0; \quad \sigma_{22}^0 = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_{11}^0(R_1) = \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi(R_1)}{dr} = -q_1, \quad \sigma_{11}^0(R_2) = \frac{1}{R_2} \frac{d\varphi(R_2)}{dr} = -q_2. \quad (6)$$

Из формул (5) видно, что функция напряжений определяется с точностью до константы. Поэтому можно принять, что

$$\varphi(R_1) = 0. \quad (7)$$

В итоге, функционал (1) переписывается в виде:

$$\Psi[\varphi(r)] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl}(r) \sigma_{ij}^0(r) \sigma_{kl}^0(r) r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \alpha_{ij}(r) T(r) \sigma_{ij}^0(r) r dr. \quad (8)$$

Из вариационного уравнения $\delta\Psi=0$ следуют уравнение совместности деформаций и дополнительное условие к уравнению, возникающее вследствие неодноточности области пластины:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varepsilon_{22}^0) - \frac{d\varepsilon_{11}^0}{dr} = 0, \quad r = R_1 : \varepsilon_{11}^0 - \frac{d}{dr} (r\varepsilon_{22}^0) = 0. \quad (9)$$

Условия интегрируемости деформаций (9) можно записать через функцию напряжений:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(b_{1122} \frac{d\varphi}{dr} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(r b_{2222} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} b_{1111} \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(b_{1122} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \right) + \frac{d^2}{dr^2} (r\alpha_{22}T) - \frac{d}{dr} (\alpha_{11}T) = 0, \quad (10)$$

$$r = R_1 : b_{1111} \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi}{dr} + b_{1122} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left(b_{2211} \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(r b_{2222} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \right) + \alpha_{11}T - \frac{d}{dr} (r\alpha_{22}T) = 0. \quad (11)$$

Добавляя к (10) и (11) условия (6) и (7), выраженные через φ

$$\frac{d\varphi(R_1)}{dr} = -q_1 R_1; \quad \frac{d\varphi(R_2)}{dr} = -q_2 R_2; \quad \varphi(R_1) = 0, \quad (12)$$

получаем полную постановку плоской задачи теории упругости для кольцевой армированной пластины. В общем случае задача (10)-(12) не имеет аналитического решения и поэтому докритические напряжения проще определять численно из вариационной задачи для

функционала (8). Искомые напряжения в докритическом состоянии удобно представить в виде суммы: $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^+$, где σ_{ij}^s – напряжения аналогичной изотропной пластины, возникающие только от действий давлений q_1 и q_2 : $\sigma_{11}^s(r) = p_1 + \frac{p_2}{r^2}$; $\sigma_{12}^s = \sigma_{21}^s = 0$; $\sigma_{22}^s(r) = p_1 - \frac{p_2}{r^2}$; $p_1 = \frac{q_1 R_1^2 - q_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$; $p_2 = (q_2 - q_1) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$; σ_{ij}^+ – дополняющие напряжения, удовлетворяющие однородным граничным условиям: $\sigma_{11}^+(R_1) = 0$; $\sigma_{11}^+(R_2) = 0$; $\varphi^+(R_1) = 0$. Тогда от функционала (8) переходим к функционалу

$$\Psi^+[\varphi^+] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^+ \sigma_{kl}^+ r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^s \sigma_{kl}^+ r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \alpha_{ij} T \sigma_{ij}^+ r dr, \quad (13)$$

где φ^+ – функция напряжений, определяющая напряженное состояние σ_{ij}^+ .

Так как плоская задача теории упругости линейна, то её проще разбить на две задачи:

1. Температурные поля отсутствуют ($T(r)=0$), пластина испытывает только силовое нагружение. Функционал (13) примет вид:

$$\Psi^{(1)}[\varphi^{(1)}] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{kl}^{(1)} r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^s \sigma_{kl}^{(1)} r dr. \quad (14)$$

Задаем функцию $\varphi^{(1)}$ в виде ряда, удовлетворяющего однородным граничным условиям:

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(\rho) = C^{(1)} \left[1 - 3 \left(\frac{\rho-1}{s-1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho-1}{s-1} \right)^3 \right] + \sum_{\mu=-m_1}^{m_1} C_{\mu}^{(1)} (\rho-1)(\rho^{-1}-1)(\rho-s)(\rho^{-1}-s^{-1})\rho^{\mu}, \quad (15)$$

где $\rho = \frac{r}{R_1}$; $s = \frac{R_2}{R_1}$; $\tilde{\varphi}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{q R_1^2} \varphi^{(1)}(r)$; $q_1 = \xi_1 q$; $q_2 = \xi_2 q$.

Решая полученную задачу методом Ритца, определяем коэффициенты ряда (15) и таким образом определяем докритическое напряженное состояние первой задачи: $\sigma_{ij}^{0(1)} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^{(1)}$

2. Силовое воздействие отсутствует ($q_1=q_2=0$), пластина испытывает только нагрев. Функционал (13) примет вид:

$$\Psi^{(2)}[\varphi^{(2)}] = \pi h \int_{R_1}^{R_2} b_{ijkl} \sigma_{ij}^{(2)} \sigma_{kl}^{(2)} r dr + 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \alpha_{ij} T \sigma_{ij}^{(2)} r dr. \quad (16)$$

Функцию $\varphi^{(2)}$ также можно задать в виде ряда (15) со своими коэффициентами $C^{(2)}$ и $C_{\mu}^{(2)}$.

Решая задачу методом Ритца, находим напряженное состояние второй задачи: $\sigma_{ij}^{0(2)} = \sigma_{ij}^{(2)}$.

Докритическое напряженное состояние будет определяться суммой решений двух задач: $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{0(1)} + \sigma_{ij}^{0(2)}$.

3. Задача устойчивости

На основе принципа стационарности полной энергии можно получить функционал в форме Брайана [2, 5]:

$$I[u_3] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{ijkl} v_{ij} v_{kl} d\Omega + \frac{h}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij}^0 w_i w_j d\Omega, \quad (17)$$

где $D_{ijkl} = \frac{h^3}{12} a_{ijkl}$, u_3 – прогиб пластины. В цилиндрической системе координат $v_{11} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}$;

$v_{12} = v_{21} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right)$; $v_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2}$; $w_1 = \frac{\partial u_3}{\partial r}$; $w_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$. Функционал (17) задан на

множестве кинематически допустимых прогибов u_3 . Выделим в докритических напряжениях безразмерный параметр термосилового нагружения λ : $\sigma_{ij}^0 = \lambda \tilde{\sigma}_{ij}^0$. Увеличивая λ , пропорционально увеличиваются и напряжения в пластине, до тех пор, пока λ не достигнет критического значения, и плоская форма равновесия перестанет быть устойчивой. Ненулевые

экстремали функционала (17) определяют формы потери устойчивости. Им соответствуют собственные значения задачи устойчивости, параметры нагружения $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots$. В действительности пластина выпучивается при наименьшем $\lambda^{(i)}$ по соответствующей этому параметру форме, а сам параметр является критическим. Цель расчета на устойчивость – определение критического параметра термосилового нагружения.

Из вариационного уравнения $\delta I = 0$ следуют дифференциальное уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rD_{ij11}v_{ij}) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(rD_{ij12}v_{ij}) - \frac{\partial}{\partial r}(rD_{ij22}v_{ij}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(D_{ij22}v_{ij}) - \lambda h r \tilde{\sigma}_{ij}^0 v_{ij} = 0 \quad (18)$$

и граничные условия

$$r = R_1; R_2 : u_3 = 0 \quad \text{или} \quad Q_r^* = 0, \quad (19)$$

$$r = R_1; R_2 : \frac{\partial u_3}{\partial r} = 0 \quad \text{или} \quad M_r = 0, \quad (20)$$

где $Q_r^* = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rD_{ij11}v_{ij}) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta}(D_{ij12}v_{ij}) - D_{ij22}v_{ij} \right] + h \lambda \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_i$, $M_r = -D_{ij11}v_{ij}$.

Формулы (18)-(20) дают полную постановку задачи устойчивости армированной кольцевой пластины в полярной системе координат.

Разложим функцию прогибов u_3 в тригонометрический ряд по координате θ :

$$u_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta)]. \quad (21)$$

Подставив ряд (21) в дифференциальное уравнение (18) получим:

$$L_0^{(1)} [w_0^c(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \{L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)]\} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)]\} \sin(n\theta) = 0. \quad (22)$$

Здесь $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$ ($n=0,1,2,\dots$) дифференциальные операторы. Так как система функций $1, \cos(n\theta), \sin(n\theta)$ является линейно независимой, то равенство (22) возможно только тогда, когда каждое из его слагаемых равно нулю:

$$L_0^{(1)} [w_0^c(r)] = 0 \quad (23)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^c(r)] + L_n^{(2)} [w_n^s(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

$$L_n^{(1)} [w_n^s(r)] - L_n^{(2)} [w_n^c(r)] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Из уравнения (23) определяется функция $w_0^c(r)$, а функции $w_n^c(r)$ и $w_n^s(r)$ из системы двух уравнений (24) и (25) при одинаковых n . Аналогично можно показать, что после подстановки ряда (21) в граничные условия (19) и (20) они распадутся так, что в каждое из них будут входить функции $w_n^c(r)$ и $w_n^s(r)$ только с одинаковыми номерами n . Отсюда следует, что армированная кольцевая пластина, нагруженная на кромках нормальным давлением q_1 и q_2 и нагретая температурой $T(r)$ потеряет устойчивость по одной из следующих форм: $w_0(r)$, $w_n^c(r) \cos(n\theta) + w_n^s(r) \sin(n\theta)$, $n=1, 2, 3, \dots$. А в случае полярной ортотропии ($D_{1112}=D_{2221}=0$) оператор $L_n^{(2)} \equiv 0$ и вид форм потери устойчивости упрощается: $w_0(r)$, $w_n(r) \cos(n\theta)$, $w_n(r) \sin(n\theta)$, $n=1, 2, 3, \dots$, причем одному критическому параметру нагружения $\lambda^{(n)}$ будут соответствовать две формы: $w_n(r) \cos(n\theta)$ и $w_n(r) \sin(n\theta)$. В силу этого, можно рассматривать только следующие варианты форм потери устойчивости: $w_n(r) \cos(n\theta)$, $n=0, 1, 2, \dots$. При рассматриваемых структурах армирования материал пластины будет полярно ортотропным и неоднородным. Функционал (17) в этом случае примет вид:

$$I_n [w_n] = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} D_{ijkl} v_{nij} v_{nkl} r dr + \frac{\lambda h}{2} \int_{R_1}^{R_2} \tilde{\sigma}_{ij}^0 w_{ni} w_{nj} r dr, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

где $v_{n11} = \frac{d^2 w_n}{dr^2}$; $v_{n12} = v_{n21} = -n \frac{d}{dr} \left(\frac{w_n}{r} \right)$; $v_{n22} = \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n$; $w_{n1} = \frac{dw_n}{dr}$; $w_{n2} = -\frac{n}{r} w_n$. Для решения задачи методом Ритца необходимо представить функции $w_n(r)$ в виде рядов, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Пусть пластина закреплена на обоих контурах. Тогда граничные условия примут вид $w_n(R_1) = 0$; $w_n(R_2) = 0$; $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$, $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$, а функции $w_n(r)$ можно задать в виде рядов:

$$\tilde{w}_n(\rho) = \sum_{\alpha=-m_2}^{m_2} A_\alpha^n f(\rho) \rho^\alpha, \quad (27)$$

где $w_n(r) = R_1 \tilde{w}_n(\rho)$, $f(\rho) = (\rho-1)(\rho^{-1}-1)(\rho-s)(\rho^{-1}-s^{-1})$. Можно рассмотреть и другие варианты закрепления пластины. Например, шарнирное опирание на двух кромках $w_n(R_1) = 0$; $w_n(R_2) = 0$; $f(\rho) = (\rho-1)(\rho-s)$. Или внутренняя кромка закреплена, внешняя свободна $w_n(R_1) = 0$; $\frac{dw_n(R_1)}{dr} = 0$; $f(\rho) = (\rho-1)(\rho^{-1}-1)$. Либо внутренняя кромка свободна, внешняя закреплена $w_n(R_2) = 0$; $\frac{dw_n(R_2)}{dr} = 0$; $f(\rho) = (\rho-s)(\rho^{-1}-s^{-1})$. Подставляя (27) в (26) получаем системы уравнений для задач о собственных значениях:

$$\mathbf{T}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} + \lambda \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Здесь $\mathbf{T}^{(n)}$ и $\mathbf{P}^{(n)}$ – симметричные матрицы, причем $\mathbf{T}^{(n)}$ положительно определена, $\mathbf{A}^{(n)}$ – вектор, составленный из коэффициентов ряда (27). Решаем каждую из систем (28), находим наименьшие положительные собственные значения $\lambda^{(n)}$ каждой из систем, а затем определяем $\lambda = \min_n (\lambda^{(n)})$ – критический параметр термосилового нагружения. Соответствующий ему собственный вектор определяет форму потери устойчивости.

4. Упругие характеристики армированных пластин

Полагаем, что кольцевые изотропные пластины армированы так, как показано, к примеру, на рис. 2 и рис. 3. Это структурно неоднородные и ортотропные конструкции. Наша цель – определить упругие и термоупругие характеристики материала конструкции, эквивалентной – в некотором смысле – заданной.

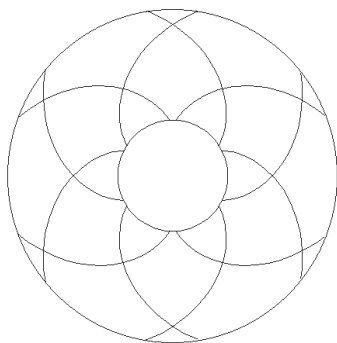


Рис. 2. Спиральное армирование

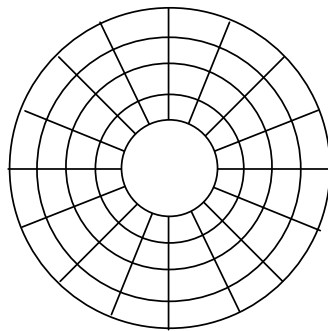


Рис. 3. Радиально-окружное армирование

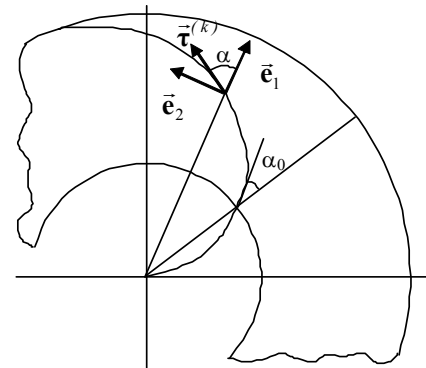


Рис. 4. Параметры армирования

Здесь используется модель, предложенная Ю.В. Немировским [3]. Упругий потенциал эквивалентной сплошной среды представляется в виде следующих сумм:

$$W^s = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} T \varepsilon_{ij} = (1 - \omega) \left[\frac{1}{2} a_{ijkl}^c \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}^c T \varepsilon_{ij} \right] + \sum_{k=1}^2 \omega_k E^a \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_k^a)^2 - \alpha^a T \varepsilon_k^a \right]; \quad (29)$$

В этих формулах a_{ijkl}^c, β_{ij}^c - тензоры упругих и термоупругих характеристик для изотропной среды (связующего); $\omega = \omega_1 + \omega_2 < 1$, ω_k ($k = 1, 2$) – удельная плотность упаковки k -го семейства арматуры; $\varepsilon_k^a = \varepsilon_{ij} t_i^{(k)} t_j^{(k)}$, где $t_i^{(k)} = \bar{\tau}^{(k)} \cdot \bar{e}_i$ - направляющие косинусы k -го семейства арматуры в базисе полярной системы координат; E_k^a - модули Юнга k -го семейства арматуры. Для армирования по спиральям (рис. 2) примем, что оба семейства арматуры выполнены из одного материала с модулем упругости $E_k^a = E^a$ и коэффициентом линейного расширения $\alpha_k^a = \alpha^a$, причем считается, что они имеют взаимно обратные направления, то есть $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ (рис. 4), и кроме того $\omega_1 = \omega_2$. В случае радиально-окружного армирования (рис. 3) параметры радиального и окружного семейств арматуры задаются независимо друг от друга. Для указанных на рис. 2 схем непрерывного армирования должны выполняться и условия постоянства сечений волокон арматуры (кроме окружных волокон): $\rho \omega_k(\rho) t_1^{(k)}(\rho) = \omega_k(1) t_1^{(k)}(1)$. Относительный объём арматуры в пластине может быть вычислен по формуле:

$\Omega = \frac{2}{s^2 - 1} \int_1^s \omega(\rho) \rho d\rho$. Применив формулу $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ [2] к выражению (29) определяются

a_{ijkl}, β_{ij} , а затем и b_{ijkl}, α_{ij} . При указанных ограничениях эквивалентный материал получается полярно ортотропным и упругие и термоупругие характеристики меняются только в радиальном направлении.

Заключение

Основным результатом данной работы является сведение двумерной задачи устойчивости к одномерной. По изложенному выше алгоритму, задавая закон армирования, можно определить критический параметр термосилового нагружения. Выбрав ту структуру армирования, для которой этот параметр минимален получим наиболее оптимальную структуру.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102).

Литература

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: «Мир», 1987. – 542 с.
3. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 165 с.
4. Немировский Ю.В., Матвеев К.А., Моховнев Д.В. Предельное упругое состояния сжимаемых кольцевых пластин при различных структурах армирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 22-32.
5. Матвеев К.А., Пустовой Н.В. Вариационные методы исследования устойчивости анизотропных пластин при температурно-силовом нагружении: Монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 368 с. – (Серия «Монографии НГТУ»)

УДК 539.3

РАЗВИТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МЕТОДИК ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Н.В. Овчинникова, А.В. Муравлев

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,
ovch-n@yandex.ru, a.v.muravlev@mail.ru*

Аннотация. В программных комплексах ANSYS и QFORM7 проведено численное моделирование процесса осадки толстостенного цилиндра с коническими торцами. Показано, что по закону изменения осевого усилия сжатия в зависимости от перемещения пуансона можно восстановить истинную диаграмму деформирования при логарифмической деформации, не превышающей величины 0.4.

Ключевые слова: сжатие образца, конические торцы, численное моделирование, диаграмма деформирования.

Возникновение бочкообразной формы у цилиндрических образцов при их одноосном сжатии (вследствие трения на торцах) затрудняет получение истинной диаграммы сжатия материала. С учетом этого представляется целесообразным для построения истинной диаграммы сжатия использовать опыт по осадке сплошного или толстостенного цилиндрического образца с коническими торцами. Обработка результатов такого эксперимента проводится по обобщенной методике Зибеля-Лихарева [1, 2]. По сравнению с осадкой стандартного цилиндрического образца в таких опытах удается достигать более высоких уровней деформаций без возникновения бочкообразной формы образца.

Было проведено численное моделирование процесса осадки толстостенного цилиндра с коническими торцами. Задача решалась в программных комплексах ANSYS и QFORM7 для материала, описываемого соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Конические пуансоны принимались абсолютно жесткими. Использовались разные законы трения на контактных поверхностях между образцом и пуансонами (Кулона, Зибеля, Леванова). Были проведены расчеты для различных значений параметров законов трения, угла раствора конуса, различных диаграмм деформирования.

1. О выборе значений параметров закона трения при моделировании процесса осадки

В методике Зибеля-Лихарева считается, что цилиндрическая форма конического образца при его осадке сохраняется, если коэффициент k трения образца о пуансоны равен тангенсу угла α раствора конуса: $k = tg\alpha$. Однако при моделировании процесса осаживания конического образца с заданным углом α получили, что если использовать закон трения Кулона в виде, принятом в ANSYS:

$$\tau = \begin{cases} k\sigma_n, & \sigma_n < \tau_{\max} / k \\ \tau_{\max}, & \sigma_n \geq \tau_{\max} / k \end{cases} \quad (1)$$

то при значениях параметров закона трения, соответствующих методике Зибеля-Лихарева, а именно: $k = tg\alpha$, $\tau_{\max} = \tau_s$ (τ_s – предел текучести материала на сдвиг), наблюдается возникновение бочкообразной формы образца (рис.1а). Вместе с тем, можно подобрать множество согласованных значений параметров (k, τ_{\max}) закона трения (1), при которых цилиндрическая форма образца приблизительно сохраняется. Так, например, при $\alpha = arctg0.1 \approx 0.1$, и значении $\tau_{\max} = \tau_s$ цилиндрическая форма образца сохраняется (рис.1б), если в (1) принять значение коэффициента трения $k = 0.06 \approx 0.6\alpha$, а не 0.1 (как полагается в методике Зибеля-Лихарева). Если при том же угле раствора конуса $\alpha = arctg0.1 \approx 0.1$ принять значение $k = tg\alpha = 0.1$, то цилиндрическая форма образца сохраняется, только если в (1) принять значение $\tau_{\max} = 0.12\tau_s$. При большем угле раствора конуса $\alpha = arctg0.2 \approx 0.197$ цилиндрическая форма образца сохраняется, если $k = 0.11 \approx 0.6\alpha$, $\tau_{\max} = \tau_s$. Аналогичные

результаты получаются при моделировании процесса осадки в программном комплексе QFORM7 [3] при использовании закона трения Кулона. При использовании в расчетах в QFORM7 законов трения Зибеля и Леванова также можно подобрать параметры законов трения, при которых цилиндрическая форма образца приблизительно сохраняется. Так, например, при угле раствора конуса $\alpha = \arctg 0.1 \approx 0.1$ цилиндрическая форма образца сохраняется, если в законе трения Зибеля $\tau = m\tau_s$ принять $m = 0.1$, либо если в законе трения Леванова $\tau = m\tau_s(1 - e^{-1.25\sigma_n/\sigma_s})$ принять $m = 0.1 \div 0.15$. Эти результаты согласуются с приведенными выше результатами подбора параметров в законе трения (1).

Даже при отсутствии бочкообразной формы образца наблюдается неравномерное распределение осевых напряжений по радиусу цилиндрического образца (рис.1б), а также возникновение тангенциальных, радиальных и сдвиговых напряжений в образце.

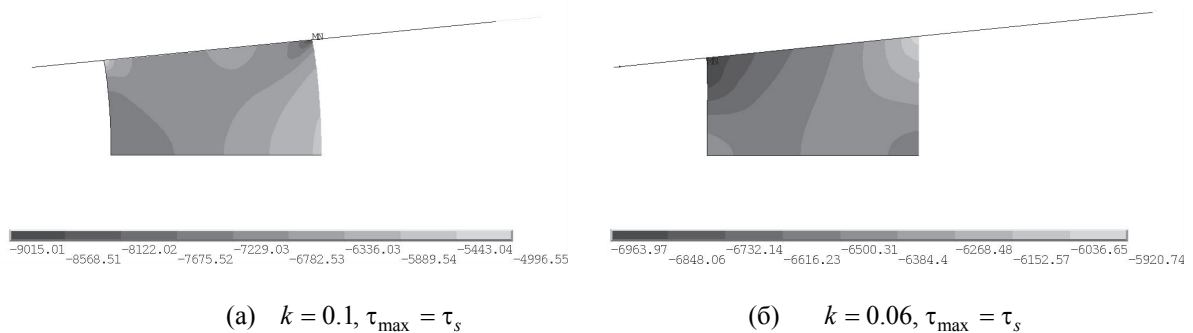


Рис. 1. Распределение осевых напряжений при осадке ($\alpha = \arctg 0.1$)

2. Восстановление диаграммы деформирования

Пусть из опыта на осадку образца известна функция зависимости $P(u_z)$ осевого усилия сжатия P (интегральной силы P) от перемещения пуансона u_z . Требуется восстановить диаграмму деформирования материала.

На рис. 2а представлено сравнение графиков зависимости $P(u_z)$, полученных при моделировании в ANSYS процесса осадки прямого сплошного цилиндра ($\alpha = 0$) при отсутствии трения: $k = 0$ в (1) (простая линия), и при наличии трения: $k = 0.1$ (линия с точками), $k = 0.2$ (линия с квадратиками); $\tau_{\max} = \tau_s$ в (1). Рассмотрен случай, когда начальная высота цилиндра равнялась его диаметру.

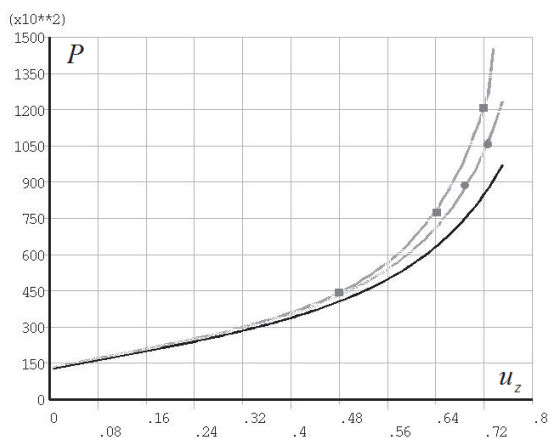


Рис. 2а. $P(u_z)$ ($\alpha = 0$)

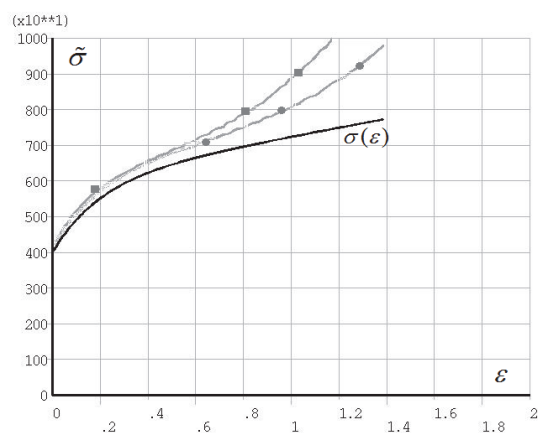


Рис. 2б. $\tilde{\sigma}(\epsilon)$ ($\alpha = 0$)

На рис. 2б представлено сравнение графиков зависимости $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$, вычисленных для соответствующих $P(u_z)$ ($k=0.1$ - линия с точками, $k=0.2$ - линия с квадратиками), с заданной при моделировании истинной диаграммой деформирования $\sigma(\varepsilon)$. При вычислении $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ во всех случаях принималось, что $\tilde{\sigma} = P/\tilde{F}$, где $\tilde{F} = F_0 H_0 / H$ (F_0 - начальная площадь поперечного сечения образца, H_0 - начальная высота цилиндра, $H = (H_0 - 2u_z)$ - текущая высота цилиндра); $\varepsilon = \ln(H_0 / H)$, т.е. принималась несжимаемость материала и не учитывалась неоднородность напряженно-деформированного состояния, возникающая в образце при осадке с трением. Из анализа результатов моделирования процесса осадки прямого цилиндра при наличии трения можно сделать следующие выводы: 1) Зависимость $P(u_z)$ на начальном участке деформирования мало зависит от коэффициента трения. 2) Зависимость $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ близка к истинной диаграмме деформирования $\sigma(\varepsilon)$ только при величинах логарифмической деформации, не больших 0.4; при больших деформациях $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ сильно отличается от $\sigma(\varepsilon)$. Эти результаты совпадают с полученными в работе [4].

На рис.3а представлено сравнение графиков зависимости $P(u_z)$, полученных при моделировании в ANSYS процесса осадки сплошного цилиндра с коническими торцами при угле конуса $\alpha = \arctg 0.1$ для $k=0.06$ (линия с точками), для $k=0.1$ (линия с квадратиками). (При расчете в законе трения (1) принято $\tau_{\max} = \tau_s$). Простой линией показана зависимость $P(u_z)$, полученная при моделировании процесса осадки без трения прямого цилиндрического образца начальной высоты H_0 . (H_0 - максимальная начальная высота образца с коническими торцами – рис 4). Из рисунка можно сделать вывод, что зависимость $P(u_z)$ на начальном участке деформирования мало зависит не только от коэффициента трения, но и от наличия конической выемки.

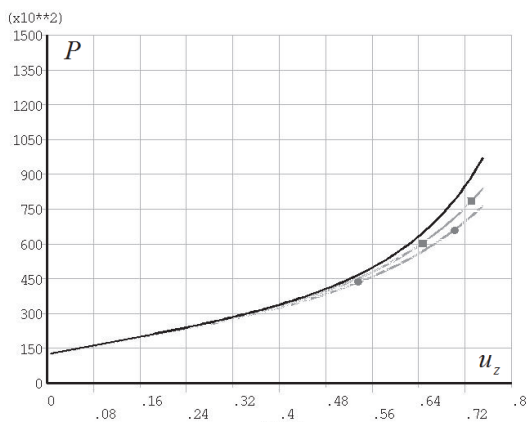


Рис. 3а. $P(u_z)$ ($\alpha = \arctg 0.1$)

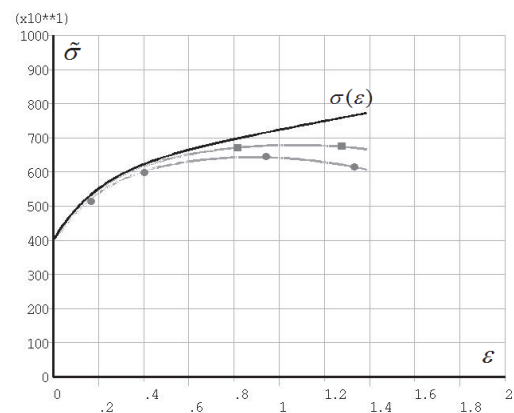


Рис. 3б. $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ ($\alpha = \arctg 0.1$)

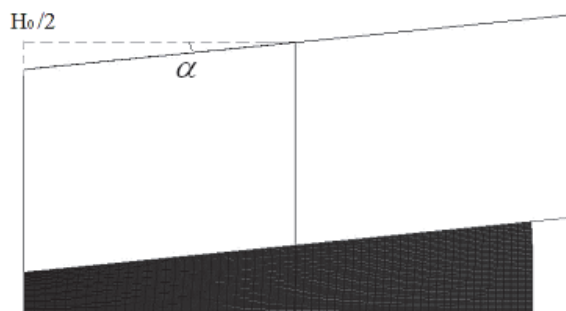


Рис.4.

На рис.3б представлено сравнение графиков зависимости $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$, вычисленных для соответствующих $P(u_z)$, с заданной при моделировании истинной диаграммой деформирования $\sigma(\varepsilon)$. При вычислении $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ во всех случаях принималось, что $\tilde{\sigma} = P/\tilde{F}$, где $\tilde{F} = F_0 H_0 / H$ (F_0 - начальная площадь поперечного сечения образца, H_0 - максимальная начальная высота цилиндра, $H = H_0 - 2u_z$); $\varepsilon = \ln(H_0 / H)$, т.е. $\tilde{\sigma}$ и ε вычислялись как для прямого цилиндра (без выемки) начальной высоты H_0 . Из рисунка видно, что, как и в случае прямого цилиндра зависимость $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ близка к истинной диаграмме деформирования $\sigma(\varepsilon)$ только при деформациях $\varepsilon < 0.4$; при больших деформациях $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ сильно отличается от $\sigma(\varepsilon)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-08-04281).

Литература

1. Siebel E., Pomp Die Ermittlung der Formänderungsfestigkeit von Metallen durch den Stauchversuch // Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch., 9, Dusseldorf (1927) – 157 с..
2. Лихарев К.К. Новый метод испытания на сжатие // Вестник машиностроения – 1950. – № 3. – С. 51-54.
3. QFORM7 2D/3D. Программа для моделирования процессов обработки давлением. Версия 7.2. Руководство пользователя. Теоретические основы QFORM. 2014
4. Власов А.В., Господчикова А.Б. Моделирование осадки образца с выемкой, заполненной смазкой, в программном комплексе Deform // Наука и образование: электронное научно-техническое издание, 2009, №9, URL <http://tecnomag.edu.ru/doc/132029.html>

УДК 539.219.2

ЗАДАЧА ТИПА КИРША ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

А.В. Ромашина, А.А. Трёщев

Тульский государственный университет, Тула, Россия, rediso4kkka@mail.ru

Аннотация: С использованием метода конечных элементов решена задача типа Кирша для одноосно сжатой пластины конечных размеров с отверстием, выполненной из трехармированного тканного полимера ПЗ6-50. Для решения были адаптированы определяющие соотношения, представленные в монографии А.А. Трёщева [1] для данного рода задач, приведён вывод разрешающих уравнений.

Ключевые слова: задача Кирша, одноосное сжатие, плоское напряжение, разносопротивляющийся материал, трехармированный тканый полимер, концентрация напряжений, пластина с отверстием.

Введение

Концентрация напряжений около отверстий – один из основных факторов, влияющих на прочность перфорированных элементов, поэтому исследование влияния концентраторов различной формы на напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов из ортотропных материалов с усложнёнными свойствами является одной из актуальных задач механики деформированного твёрдого тела.

1. Теоретическая часть

Рассматривается тонкая физически нелинейная пластина с отверстием радиусом r и толщиной h в направлении оси X_3 , находящаяся в равновесии. Её размеры по направлению основных осей декартовой системы координат конечны. Пластина нагружена в своей плоскости сжимающей равномерно распределённой по толщине нагрузкой p_x , которая приложена к внешнему контуру как показано на рис. 1. Для описания свойств материала принимаются нелинейные уравнения состояния, представленные через параметры нормированного пространства напряжений [1], так как нагружение считается простым при активной деформации.

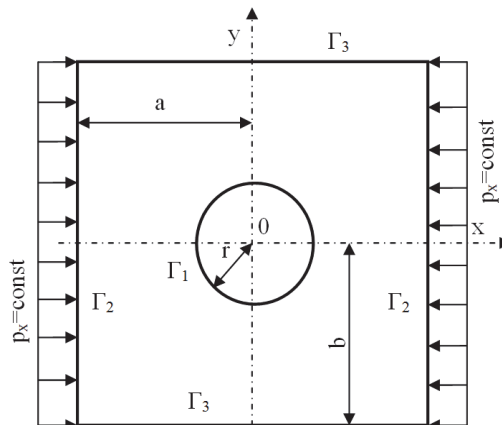


Рис. 1. Расчетная схема пластины

Все функции, описывающие напряженно-деформированное состояние, зависят только от координат X_1 и X_2 , вектор перемещений имеет две основные ненулевые составляющие $u_1 = u$ и $u_2 = v$ в направлении соответствующих осей. Перемещения $u_3 = w$ в направлении оси X_3 есть, однако, они имеют второстепенное значение и определяются после решения краевой задачи следующим образом: $w = e_{33}x_3$. Деформации e_{33} не зависят от координаты X_3 и малы настолько, что в дальнейшем не рассматриваются.

Уравнения связи между основными компонентами тензора малой деформации и перемещениями в условиях плоского напряженного состояния в рамках теории механики сплошных сред принимаются для пластинки в виде:

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = u_{,2}; \quad \gamma_{12} = u_{,2} + u_{,1}. \quad (1)$$

По всей толщине пластинки и на её плоских поверхностях имеется равенство:

$$\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (2)$$

Уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций и напряжениями в условиях плоского напряженного состояния с учетом равенства (2) в форме метода переменных «параметров упругости» Биргера приводятся к виду [2]:

$$\{e\} = [C]\{\sigma\}, \quad (3)$$

где $\{e\} = \{e_{11}e_{22}\gamma_{12}\}^T$ – вектор-столбец ненулевых деформаций; $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\tau_{12}\}^T$ – вектор-столбец ненулевых напряжений; $[C]$ – матрица податливостей ортотропного разнотензорного материала, зависящих от вида напряженного состояния и от достигнутого уровня напряжений, компоненты которой определяются через тензорные параметры:

$$C_{kkkk} = A_{kkkk} + B_{kkkk} \cdot \alpha_{kk} \quad (\text{здесь и далее по индексам не суммировать});$$

$$C_{ijij} = A_{ijij} + B_{ijij} \cdot (\alpha_{ii} + \alpha_{jj}); \quad C_{ijij} = A_{ijij} + B_{ijij} \cdot \sqrt{2}\alpha_{ij} \quad i \neq j,$$

где A_{ijkl}, B_{ijkl} – константы, определяемые из экспериментов по деформированию образцов материала [1]; α_{ij} – нормированные напряжения, $\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S = \sigma_{ij} / \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ [1].

Независимых констант будет восемь и они запишутся так [1]:

$$A_{1111} = 0,5 \left(1/E_1^+ + 1/E_1^- \right); \quad B_{1111} = 0,5 \left(1/E_1^+ - 1/E_1^- \right); \quad A_{2222} = 0,5 \left(1/E_2^+ + 1/E_2^- \right);$$

$$B_{2222} = 0,5 \left(1/E_2^+ - 1/E_2^- \right); \quad A_{1122} = -0,5 \left(v_{12}^+ / E_1^+ + v_{12}^- / E_2^- \right);$$

$$B_{1122} = -0,5 \left(v_{12}^+ / E_1^+ - v_{12}^- / E_2^- \right); \quad A_{1212} = \left(1/E_{12}^+ + 1/E_{12}^- \right) - \frac{1}{4} \left(\left[1/E_1^+ + 1/E_2^+ + 1/E_1^- + 1/E_2^- \right] - 2 \left[v_{21}^+ / E_1^+ + v_{21}^- / E_1^- \right] \right); \quad v_{ij}^+ / E_j^+ = v_{ji}^+ / E_i^+; \quad v_{ij}^- / E_j^- = v_{ji}^- / E_i^-;$$

$$B_{1212} = \sqrt{2} \left(1/E_{12}^+ - 1/E_{12}^- \right) - 0,125 \cdot \sqrt{2} \left(\left[1/E_1^+ + 1/E_2^+ - 1/E_1^- - 1/E_2^- \right] - 4 \left(v_{21}^+ / E_1^+ - v_{21}^- / E_1^- \right) \right); \quad (i, j = 1, 2),$$

где E_j^\pm – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главных осей анизотропии; v_{ij}^\pm – коэффициенты поперечной деформации при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главных осей анизотропии; E_{ij}^\pm – модули упругости при сжатии и растяжении в направлениях под углом 45° к соответствующим главным осям анизотропии.

Для плоского напряженного состояния в ортотропном теле через каждую точку проходят две взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, в силу чего на основании закона упругости для однородного упругого разнотензорного материала запишем:

$$e_{11} = (A_{1111} + B_{1111} \cdot \alpha_{11}) \cdot \sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{22};$$

$$e_{22} = [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222} \cdot \alpha_{22}) \cdot \sigma_{22};$$

$$\gamma_{12} = (A_{1212} + B_{1212} \cdot \sqrt{2} \cdot \alpha_{12}) \cdot \tau_{12}.$$

Зависимость между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии получим обращая уравнения (3) с учетом геометрических соотношений (1):

$$\{\sigma\} = [D(\alpha_{ij})]\{e\}, \quad (4)$$

где $[D(\alpha_{ij})]=[C]^{-1}$ – матрица жесткостей материала, зависящая от вида напряженного состояния.

Основные положения и зависимости классической теории упругости остаются справедливыми, поэтому уравнения равновесия для данной задачи при условном отсутствии объемных сил представим следующим образом [3]:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{12,2} = 0; \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (5)$$

При статических граничных условиях на контуре пластинки имеем:

$$\begin{aligned} p_{1v} &= \sigma_{11} \cos(vx_1) + \tau_{12} \cos(vx_2); \\ p_{2v} &= \sigma_{22} \cos(vx_2) + \tau_{12} \cos(vx_1), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\cos(vx_k)$ - косинусы углов между осями x_k и внешней нормалью к площадке, на которую действуют усилия с проекциями p_{kv} , ($k=1,2$).

Сохраняется одно из общих уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана:

$$e_{11,22} + e_{22,11} = \gamma_{12,12}. \quad (7)$$

Выражения (1), (5), (3) содержат восемь уравнений с восьмью неизвестными, которые можно решить по методу сил или по методу перемещений. Для метода сил заменив в зависимостях (7) деформации через напряжения (3) в сочетании с уравнениями равновесия (5) получим систему трех уравнений, имеющую три неизвестных напряжения. Таким образом придём к третьему уравнению из разрешающей системы:

$$\begin{aligned} C_{1212} \cdot \tau_{12,12} + C_{1212,12} \cdot \tau_{12} + C_{1212,2} \cdot \tau_{12,1} + C_{1212,1} \cdot \tau_{12,2} = & (C_{1111,22} + C_{1122,11})\sigma_{11} + (C_{1122,22} + \\ & + C_{2222,11})\sigma_{22} + C_{1111} \cdot \sigma_{11,22} + C_{1122} (\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22}) + C_{2222} \cdot \sigma_{22,11} + 2(C_{1111,2} \cdot \sigma_{11,2} + \\ & + C_{1122,2} \cdot \sigma_{22,2} + C_{1122,1} \cdot \sigma_{11,1} + C_{2222,1} \cdot \sigma_{22,1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Для метода перемещений в два уравнения равновесия (5) подставляем выражения напряжений (4), в которых сразу заменяем деформации согласно зависимостям (1). В результате этих преобразования получаем два уравнения с двумя неизвестными перемещениями [4]:

$$\begin{aligned} D_{11}u_{,11} + D_{11,1}u_{,1} + D_{12}u_{,12} + D_{12,1}u_{,2} + D_{33}(u_{,22} + u_{,12}) + D_{33,2}(u_{,2} + u_{,1}) = 0, \\ D_{22}v_{,22} + D_{22,2}v_{,2} + D_{12}u_{,12} + D_{12,2}u_{,1} + D_{33}(u_{,12} + v_{,22}) + D_{33,1}(u_{,2} + v_{,1}) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где D_{ij} – компоненты матрицы жесткостей материала.

Для решения задачи принимается плоская конечно-элементная модель с двумя степенями свободы в узле. Вся область, ограниченная контуром пластинки разбивается треугольными симплекс конечными элементами [4]. В месте ожидаемой концентрации напряжений, т.е. около отверстия сетка конечных элементов сгущается. Перемещения в произвольной точке элемента $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ представляются через перемещения узлов элемента $\{U\}$ следующим образом:

$$\{u \quad v\}^T = [N]\{U\}, \quad (10)$$

где $\{U\} = \{u_i \quad u_i \quad u_j \quad u_j \quad u_k \quad u_k\}^T$; i, j, k – номера узлов конечного элемента.

Поля перемещений в пределах выбранного в задаче треугольного элемента определяются с помощью интерполяционного полинома первой степени [5]: $u = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2$; $v = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2$. Функции формы $[N]$ принимаются в следующем виде:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $N_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / (2\Delta)$, ($i \rightarrow j \rightarrow k$), Δ – площадь треугольного элемента; $a_i = x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j}$; $b_i = x_{1i} - x_{2k}$; $c_i = x_{1k} - x_{2j}$.

Пользуясь уравнениями (1) и продифференцировав матрицу $[N]$, получим зависимости между деформациями и перемещениями узлов элемента:

$$\{e\} = [B]\{U\}, \quad (12)$$

$$\text{где } [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}; \quad 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{vmatrix}.$$

Уравнение связи между напряжениями и деформациями в матричной форме примем в виде (4). Общая формулировка принятого МКЭ основана на вариационном принципе возможных перемещений Лагранжа. Потенциальная энергия тела Π есть разность внутренней энергии деформации W и работы внешних сил A : $\Pi = W - A$. Энергия деформации элемента объема dV определяется таким образом: $dW = \{e\}^T \{\sigma\} / 2$. Без учета массовых силовых компонентов для выражения работы внешних сосредоточенных и поверхностных сил получаем:

$$A = \{U\}^T \{P\} + \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS, \quad (13)$$

где $\{p\}$ – вектор внешней поверхностной нагрузки в проекциях на декартовы оси координат; S – контур внешней границы конечного элемента.

Тогда потенциальная энергия конечного элемента приводится к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{e\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS \quad (14)$$

а с учетом формул (13) и (5) к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{U\}^T [B]^T [D(\sigma)] [B] \{U\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS. \quad (15)$$

После минимизации функционала (15) по вектору $\{U\}$ и приведения распределенной поверхностной нагрузки к сосредоточенным узловым силам, для плоского напряженного состояния конечного элемента с толщиной h имеем общее уравнение метода конечных элементов:

$$[K]\{U\} = \{P\}, \quad (16)$$

где $[K] = [B]^T [D(\sigma)] [B] h \Delta$ – матрица жесткости конечного элемента.

Сложение матриц жесткости отдельных конечных элементов приводит к получению глобальной матрицы жесткости. Векторы $\{U\}$, $\{P\}$ в (16) рассматриваются как вектор неизвестных узловых перемещений и вектор внешней узловой нагрузки на пластину.

Решение системы алгебраических уравнений рассматриваемой задачи с учетом полученной глобальной матрицы жесткости и соответствующих граничных условий производится методом Гаусса. Исходная нелинейная задача решается методом «переменных параметров упругости» в сочетании с пошаговыми нагружениями.

На каждом шаге нагружения параметры НДС твердого тела уточняются итерационно с проверкой сходимости вычислительного процесса. Сходимость оценивалась по величинам узловых перемещений смежных этапов приближения:

$$\left| (\{U\}^k - \{U\}^{k-1}) / \{U\}^{k-1} \right| < \delta_u \quad (17)$$

где k – номер итерации; δ_u – устанавливаемая точность $\delta_u = 0,001$.

2. Конкретная задача

В качестве объекта расчета выбрана квадратная пластина размером 120x120 мм, толщиной $h = 20$ мм с круговым отверстием диаметром 40 мм, нагруженная равномерно распределенной сжимающей нагрузкой интенсивностью P (см. рис.1) и выполненная из полимера П36-50 [5].

В расчете рассматриваем четвертую часть пластины, а отброшенные части заменяем соответствующими граничными условиями симметрии. Расчетная схема задачи с разбиением на конечные элементы приведена на рис. 2 (числами обозначена нумерация узлов). Для того, чтобы оценить влияние усложненных механических свойств материала П36-50 на разных уровнях их проявления были приняты три характерных уровня нагрузки:

$P_1 = -5$ МПа, $P_2 = -12,5$ МПа, $P_3 = -20$ МПа. Интенсивности нагрузки P_1 на рис. 3 соответствуют кривые, обозначенные цифрой 1, P_2 – цифрой 2, P_3 – цифрой 3. Распределение напряжений, представленное сплошными кривыми соответствует классическому решению для однородных ортотропных материалов. Штриховые кривые – решения, полученные на основе разработанной в данной работе математической модели, учитывающей разнсопротивляемость материала.

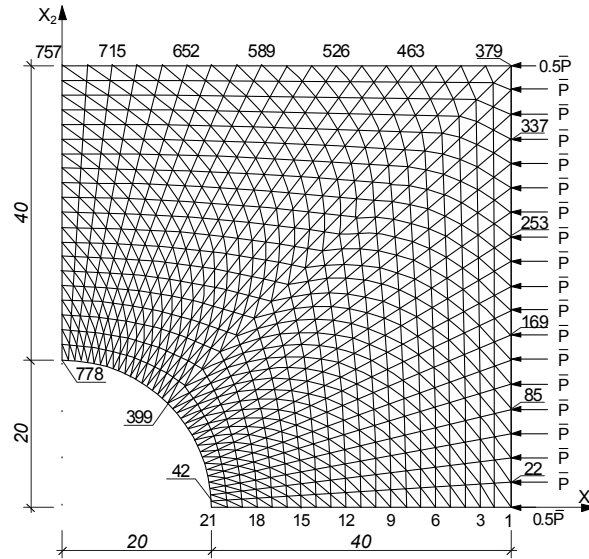
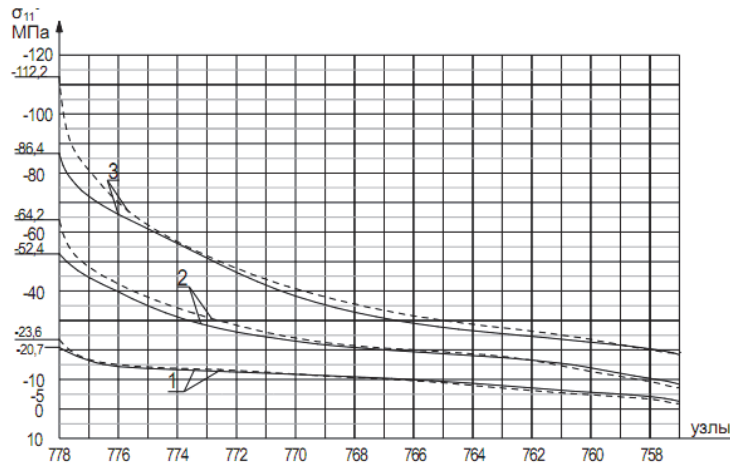
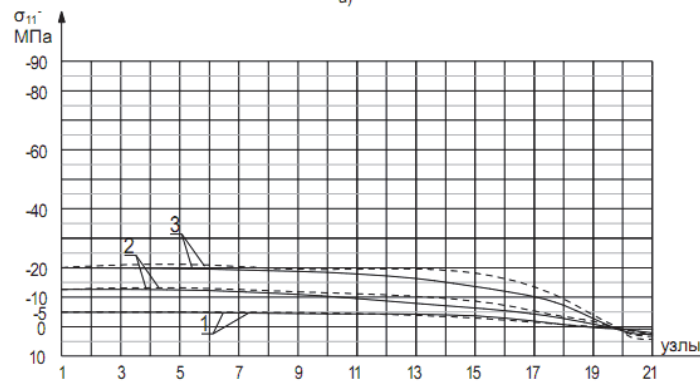


Рис. 2 . Расчетная схема задачи с сеткой конечных элементов



а)



б)

Рис. 3. Нормальные напряжения вдоль X_1 при сжатии: а) по узлам 757-778; б) по узлам 1-21.

3. Сравнение результатов решения задачи

На рис. 3а и 3б видно, что на начальных этапах нагружения интенсивностью P_1 при деформировании слабо проявляются свойства разносопротивляемости полимера П36-50. При этом уровне нагрузки напряжения σ_{11} и σ_{22} слабо отличаются от данных классической теории для ортотропных материалов. Максимальная разница при уровне нагрузки P_1 в значениях напряжений σ_{11} по узлам 757-778 не превышает 14,0 %, при P_2 – 22,5 %, при P_3 – 29,9 %. На узлах 1-21 разница в напряжениях при нагружении силой P_1 более заметна при приближении к элементу 21, находящемуся у отверстия. Максимальная разница напряжений составит 10,2 %. По мере увеличения действующей нагрузки влияние нелинейной разносопротивляемости полимера на распределение напряжений прослеживается более явно и становится существенным.

Около отверстия, непосредственно в зоне концентрации напряжений отличие напряжений σ_{11} при сжатии от данных классической теории достигает 11,2 - 31,8 % при значении нагрузки P_2 , а при нагрузке P_3 – 13,9 - 37,6 %. Разница напряжений σ_{22} в аналогичной зоне может достигать 43,4 %, но величины этих напряжений существенно ниже σ_{11} (в 2 - 2,8 раза).

Результаты решения задачи типа Кирша без учета разносопротивляемости материала, полученные с помощью разработанной в данной работе математической модели (при обнулении нелинейных членов), и решение, полученное для однородного ортотропного материала с помощью конечно-элементного пакета ANSYS 16.0, неплохо согласуются между собой. Разница в полученных результатах для σ_{11} в зоне концентрации не превышает 6,4 %, что объясняется небольшим отличием применяемых сеток конечных элементов. Данные сравнения подтверждают реальность и физическую непротиворечивость построенной модели.

Заключение

Из приведённых результатов можно сделать вывод о том, что неучет явления разносопротивляемости материала приводит к значительным погрешностям при вычислении основных характеристик напряженно-деформированного состояния перфорированных элементов конструкций и деталей машин, подвергающихся одноосному сжатию. Особенно ярко это проявляется в непосредственной близости к отверстию.

Литература

1. Трещёв А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография. М: РААСН;Тула: ТулГУ, 2008. 264 с.
2. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала: учеб. пособие. М: Издательство Ассоциации строительных Вузов, 2009. 208 с.
3. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Неделин А. В., Трещёв А.А. Концентрация напряжений при плоском напряженном состоянии для дилатирующего материала // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сборник материалов Международной конференции. Тула:ТулГУ. 2001.С.105–106
5. Розе А.В., Жигун И.Г., Душин М.Н. Трехармированные тканые материалы // Механика полимеров, 1970. №3. С. 471–476.

УДК 624

ЭЛАСТОМЕРНЫЕ ОПОРЫ КАК СРЕДСТВО АКТИВНОЙ СЕЙСМОЗАЩИТЫ ЗДАНИЙ

Д.Ф. Руми, М. Усаров, Г.Т. Аюбов

*Институт сейсмостойкости сооружений Академии Наук
Республики Узбекистан, Ташкент, iosif1949@mail.ru*

Аннотация. В статье приведены исследования динамических характеристик и устойчивости 9-этажного здания при высокочастотном сейсмическом воздействии. Расчеты выполнены с использованием пространственной расчетной модели. Сравнением результатов расчета здания, установленного на сейсмозащитных опорах с результатами расчетов аналогичного здания на жестком фундаменте показана эффективность использования сейсмозащитного пояса для зданий в сейсмоопасной зоне.

Ключевые слова: Динамические характеристики, устойчивость, пространственная расчетная схема, сейсмозащита зданий, слоистые эластомерные опоры.

1. Актуальность проблемы

В строительных нормах расчет высотного сооружения на сейсмические воздействия производится по консольной расчетной схеме с учетом изгибных форм колебаний, вызванных горизонтальным движением основания. Однако такая схема не отражает пространственной работы сооружения при многокомпонентных кинематических (сейсмических) воздействиях в основании, вызывающих сложное поведение сооружения, сочетающее в себе несколько основных форм колебаний. Поэтому при разработке способов активной сейсмозащиты необходимо предусмотреть возможность снижения сейсмической нагрузки на конструктивные элементы здания на базе пространственной расчетной модели.

Совместные исследования ЦНИИСК им. Кучеренко, ИСС АН РУз [1,2] нашли воплощение в постройке в Ташкенте экспериментального 9-этажного жилого здания на сейсмоизолирующих опорах. Расположенное рядом типовое здание на жестком фундаменте дает уникальную возможность проведения совместных экспериментов и сопоставления результатов с целью обоснования целесообразности установки скользящих опор для сейсмозащиты здания.

2. Выбор расчетной модели

Теоретические исследования динамических характеристик и сравнение поведения указанных зданий при многокомпонентных кинематических (сейсмических) воздействиях выполнены авторами на базе пространственной коробчатой модели, позволяющей учесть всевозможные формы колебаний, а не только изгибные, предусмотренные консольной схемой. Граничные условия в основании коробчатой модели рассматривались в двух вариантах: для типового здания – жесткие (рис.1а), а сейсмоизолирующий скользящий пояс (СЭО) экспериментального здания (рис.1б) представляется рядом опор, связывающих фундамент здания и надземные конструкции в местах пересечения продольных и поперечных стен. Благодаря низкому коэффициенту трения скольжения в опорах ($f=0,05-0,1$), при превышении инерционными нагрузками определенного уровня здание начинает проскальзывать относительно фундамента. С этого момента усилия от сейсмических нагрузок в элементах несущих конструкций практически не изменяются, а для обеспечения надежности зданий в системе предусмотрены упругие и жесткие ограничители горизонтальных и вертикальных перемещений. Размеры коробки соответствуют реальному сооружению: высота 27 м, площадь поперечного сечения $20 \times 11 \text{ м}^2$, толщина стен – 50 см. Расчет динамических характеристик и динамического поведения моделей выполнен методом конечных элементов [4] с дискретизацией стеновых панелей прямоугольными элементами, а опор – стержневыми. В расчетах учитывались физико-механические параметры материала кирпичной кладки и бетона.

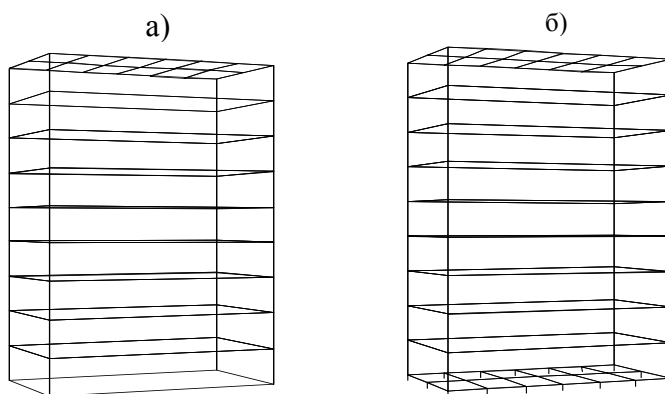


Рис. 1. Коробчатые модели 9-ти этажных зданий: типового - а) и на скользящих опорах - б)

3. Динамические характеристики

Необходимыми составляющими сейсмической нагрузки на сооружение, согласно СНиП [2], являются динамические характеристики – частоты и формы собственных колебаний сооружения. Поэтому были проведены исследования, касающиеся влияния на динамические характеристики установки СЭО в основании сооружения. Выводы приводятся на основании анализа деформированного состояния модели на жестком основании и с учетом СЭО.

Исходным уравнением для решения поставленной задачи является вариационное уравнение, выражающее равенство нулю суммы работ внутренних напряжений (δA_σ) и сил инерции (δA_p) на возможных перемещениях –

$$\delta A = \delta A_\sigma + \delta A_p = 0 \quad (1)$$

Граничные условия на жестком основании сооружения выражаются в отсутствии горизонтальных (по двум направлениям) и вертикальных перемещений:

$$z=0: \quad \delta u = \delta v = \delta w = 0,$$

а для сооружения с СЭО в основании - в отсутствии вертикальных:

$$\delta w|_{z=0} = 0.$$

Конечно-элементная дискретизация модели прямоугольными элементами (для стен и перекрытий) и стержневыми - для опор в основании (если они учитываются), приводит к решению алгебраической проблемы на собственные значения

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = 0. \quad (2)$$

Здесь: $[K]$, $[M]$ - матрицы жесткости и массы модели; ω и $\{q\}$ – искомые частота и вектор формы собственных колебаний сооружения, т.е. его динамические характеристики.

Эффективность системы сейсмозащиты определим на основе сравнения относительных деформаций по основным формам колебаний моделей на жестком фундаменте и на СЭО.

Полученные динамические характеристики (частоты – ω_i , периоды – T_i и формы собственных колебаний), а также интенсивность деформации модели на жестком фундаменте приведены на рис. 2. Формы представляют собой сдвиги сооружения в поперечном направлении (в направлении наименьшей жесткости) – (а), в продольном направлении – (б) и кручение относительно вертикальной оси – (в). Формы носят выраженный пространственный характер. Интенсивность деформации соответствует интенсивности окрашивания модели, при этом наибольшей деформации (темная закраска) по всем формам колебаний подвергается нижняя треть сооружения.

Установка в фундаменте пояса из опор приводит к схожим формам колебаний, но с другим спектром частот (рис. 3). Основной период колебаний сооружения с опорами более чем в два раза увеличивается по сравнению с сооружением на жестком основании ($T_1=0,74$ с – рис. 3а против $T_1=0,32$ с – рис. 2а). Во столько же раз снижается условная сейсмическая нагрузка и относительная деформация сооружения (рис. 3). Здесь светлая закраска, соответствующая малой деформации, сохраняется практически по всей высоте сооружения, за исключением узкой области сейсмозащитного пояса. А малая деформация, согласно закону Гука, вызывает и малые напряжения в сооружении при уменьшенной условной сейсмической нагрузке.

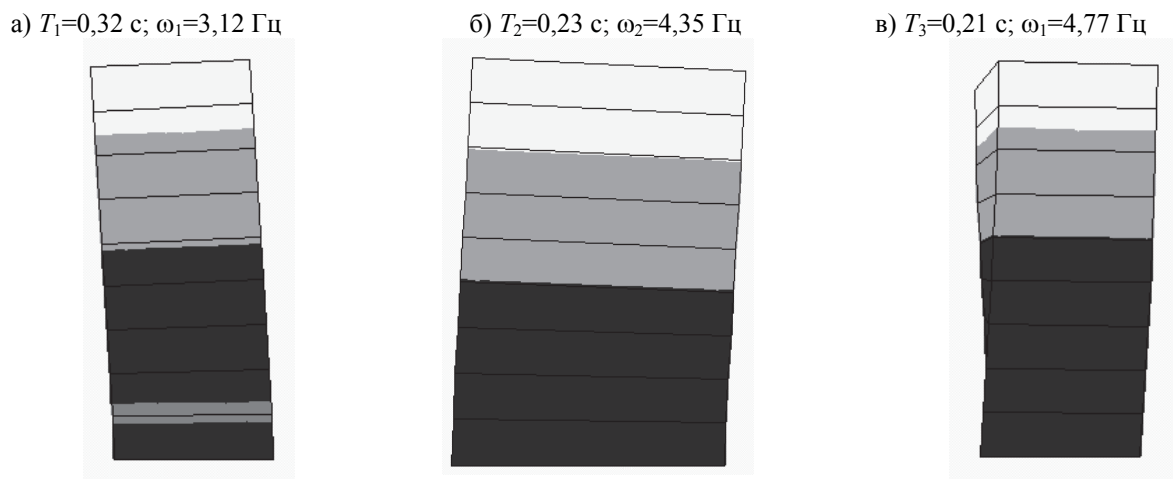


Рис. 2. Динамические характеристики (частоты - ω_i , периоды - T_i) и распределение интенсивности деформации по основным формам колебаний пространственной модели сооружения на жестком фундаменте

Сравнивая деформации по соответствующим формам (рис. 2 и рис. 3), можно отметить, что установка СЭО уменьшает не только максимальную величину деформации, но и относительную деформацию по высоте сооружения. Т.е. сооружение на опорах при горизонтальном воздействии в основании колеблется как высокое твердое тело на опорах.

Таким образом, опоры способствуют снижению деформаций и напряжений по всей высоте сооружения как при поступательном, так и при вращательном движении, предохраняя его от возможных трещин.

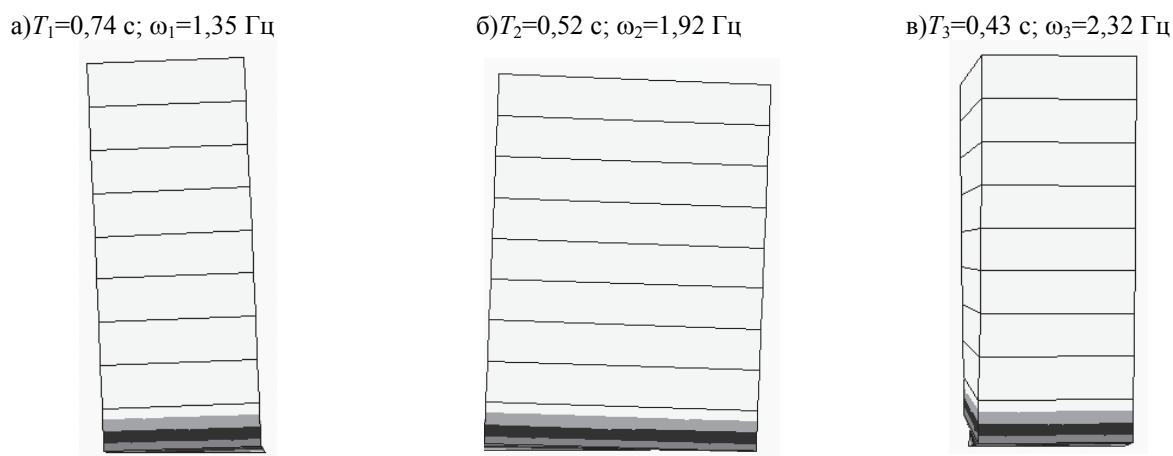


Рис. 3. Основные собственные формы, периоды и частоты пространственной модели сооружения на опорах и соответствующая им деформация

Однако, если сооружение достаточно высокое, возникает вопрос о возможной потере его устойчивости при сейсмических колебаниях.

4. Проверка устойчивости здания на СЭО

Для проверки устойчивости были получены горизонтальные перемещения исследуемого сооружения при сейсмическом воздействии, вызывающем при малом затухании резонансный режим колебаний. Разрешающая система уравнений движения в этом случае будет

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} + \{f(t)\}, \quad (3)$$

начальные условия

$$\{u(0)\} = \{0\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = \{0\}. \quad (4)$$

Здесь $[K]$, $[M]$ - матрицы жесткости и массы модели; $[C]$ - матрица демпфирования в опорах; $\{F\}$ – собственный вес; $\{f(t)\}$ – кинематическое воздействие в основании.

Установленные в узлах основания демпферы представляются моделью Кельвина-Фойхта. Тогда граничные условия в точке основания, где установлена опора принимаются в виде

$$x \in S_0 : \quad \sigma_{ij} = \left(E + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_{ij}. \quad (5)$$

Здесь η - коэффициент вязкости в опорах (размерность МПа·сек).

Описание вязкоупругого поведения опор достигается представлением компонентов деформаций и средних деформаций опор в комплексной форме $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{0ij} \exp(i\omega t)$, $\theta = \theta_0 \exp(i\omega t)$, а использование комплексных модулей $\lambda(i\omega) = \lambda - i\omega\lambda'$; $G(i\omega) = G - i\omega G'$ позволяет получить комплексный аналог закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda(i\omega)\theta\delta_{ij} + 2G(i\omega)\varepsilon_{ij}. \quad (6)$$

Тогда явное выражение матрицы $[C]$ в (3) получится в виде

$$[C] = \eta[K_0], \quad (7)$$

где $\eta = \lambda' + 2G'$ - положительная постоянная.

Нулевой индекс матрицы жесткости $[K_0]$ означает, что вязкоупругое поведение относится только к опорам, а не ко всей модели сооружения. Это же замечание касается и нулевого индекса в полученной далее разрешающей системе уравнений (8).

Таким образом, использование указанной модели в конечно-элементной дискретизации сооружения приводит к разрешающей системе дифференциальных уравнений

$$[M]\{\ddot{q}\} + \eta[K_0]\{\dot{q}_0\} + [K]\{q\} = \{P(t)\}. \quad (8)$$

В системе (8) вектор искомых перемещений включает в себя не только перемещения точек самого сооружения $\{q_c\}$, но и перемещения точек фундамента $\{q_0\}$, где установлены опоры, т.е.

$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_c\} \\ \{q_0\} \end{Bmatrix}$. Соответственно, увеличивается порядок системы и порядок матриц $[K]$ и $[M]$.

В результате матричных преобразований (умножение (8) слева на $([M]^{-1})$, получим

$$\{\ddot{q}\} + \eta \text{diag}(\omega_i^2)\{\dot{q}\} + \text{diag}(\omega_i^2)\{q\} = [M]^{-1}\{P(t)\}. \quad (9)$$

Для подбора значения η использованы данные, приведенные в отчете об испытаниях экспериментального 9-этажного жилого дома [1,2], где коэффициент внутреннего поглощения грунта $\psi = 1,91$. Тогда из формулы, связывающей коэффициент ψ с коэффициентами трения η и частотами ω_i , получим

$$\eta_i = \frac{\psi}{2\pi\omega_i}.$$

С учетом диапазона спектра основных частот сооружения на опорах (1÷3 Гц), получим для коэффициента η примерную величину $\eta = 0,3$, которую в дальнейшем будем использовать в расчетах динамического поведения модели сооружения на СЭО на динамическую нагрузку с учетом волнового уноса энергии в основание при высокочастотной сейсмическом воздействии. Начальные условия нулевые. Метод решения системы (9) - метод Ньюмарка. Результатом решения являются перемещения узловых точек сооружения.

Воздействие задается двухкомпонентным гармоническим законом ускорения в основании с амплитудой, соответствующей 7-балльному землетрясению

$$\ddot{u}_0 = a \sin(2\pi\omega t), \quad \ddot{v}_0 = a \sin(2\pi\omega t); \quad a = 0,1g; \quad \omega = 1,35 \text{ Гц} \quad (10)$$

В случае совпадения частоты воздействия с частотой собственных колебаний здания с СЭО в последнем возникает резонансный режим колебаний, который показан на рис.4(а), а демпфирование в опорах более чем в 2 раза снижает амплитуду колебаний при продолжительном воздействии (рис.4б) и быстро затухает – при кратковременном (рис.4в). На этих рисунках сплошной линией показано перемещение верхнего уровня сооружения; штрихом – уровень 0,6Н; с маркерами – уровень 0,3Р.

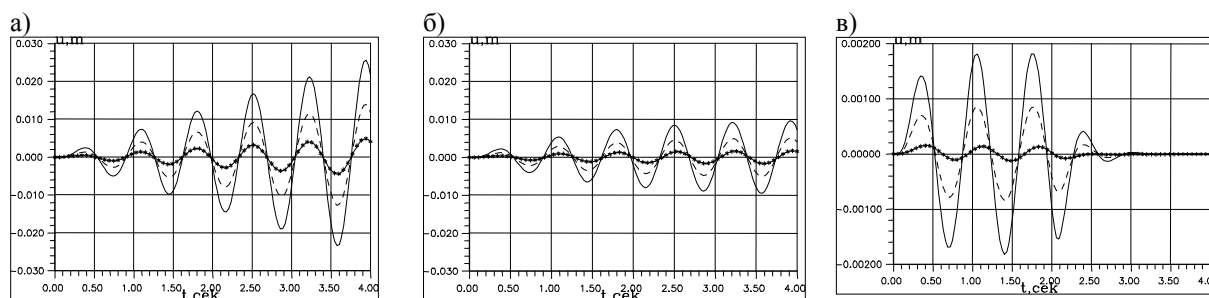


Рис. 4. Колебания здания на СЭО в резонансном режиме при продолжительном (а,б) и кратковременном (в) воздействии. (без демпфирования - а; с учетом демпфирования - б).

Согласно СНиП [3], предельно допустимые перемещения точек высотного сооружения не должны превышать величины $H/500$ (H – высота сооружения). Для исследуемого здания это отношение составит $0,054$ ($H=27$ м). Результаты, представленные на рис.4а, касающиеся поперечных колебаний сооружения с опорами, но без учета демпфирования в опорах, можно рассматривать как тестовые. Они свидетельствуют о линейном нарастании амплитуды перемещений точек сооружения в резонансном режиме в отсутствие демпфирования. Учет же демпфирования в опорах более чем в два раза снижает уровень амплитуд, которые стабилизируются на отметке $0,01$ м (рис. 4б) и не превышают предельно допустимых даже при длительном воздействии. Т.е. установка СЭО (с демпфированием) в фундаменте сохраняет устойчивость 9-ти этажного сооружения при кинематическом воздействии с частотой основного спектра частот сооружения (1 Гц – 10 Гц), к которому можно отнести и частоты сейсмических воздействий. При кратковременном воздействии 9-ти этажное здание с СЭО быстро восстанавливает исходное положение – это видно на рис. 4в.

Результаты были получены для воздействия, соответствующего 7-балльному землетрясению с амплитудой $0,1g$ м/сек². При увеличении балльности до 9 ($a=0,4g$) максимальные перемещения на верхнем уровне здания составят $0,04$ м, что также не превысит допустимого максимума перемещений, т.е. не приведет к потере устойчивости.

Таким образом, установка сейсмозащитного пояса в основании высокого сооружения изменяет динамические характеристики сооружения, приводит к снижению уровня условной сейсмической нагрузки, уменьшению относительной деформации и напряжений в сооружении. Сейсмические воздействия даже с преобладающими частотами, входящими в спектр основных частот сооружения, не вызывают потерю устойчивости, а демпфирование в основании эффективно снижает уровень колебаний конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФПФИ Узбекистан.

Литература

1. Научный отчет по теме: «Статические и динамические испытания экспериментального 9-ти этажного жилого дома с СЭО». Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, 1996-97гг.- 42 с.
2. Мирсаидов М.М., Султанов Т.З., Руми Д.Ф. Оценка динамического поведения системы (сооружение основание) с учетом волнового уноса энергии.// Инженерно-строительный журнал.№4(39) СПб.2013с.94- 105
3. СНиП II-7-96 Строительство в сейсмических районах/Госстрой Узбекистан, 1996.-48с.
4. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.:Мир, 1975, 542с.

УДК 539.1+622.235

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТА ПРИ ВЗРЫВЕ В ШТОЛЬНЕ

К.Д. Салямова, Д.Ф. Руми

Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан, klara_51@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена теоретическому исследованию напряженно-деформированного состояния грунта вокруг протяженной подземной выработки при взрыве. Приводится постановка задачи, включающая вариационное уравнение и граничные условия на различных частях грунтовой области, окружающей штольню: условия свободной границы, условия пропускания продольных волн и наличие жесткого основания. В грунте учитывается внутреннее трение и пластическое деформирование. Исследования проводятся численно с применением МКЭ. Полученные сжимающие, растягивающие и сдвиговые напряжения вокруг штольни позволяют определить области разрушения грунта при производстве взрывных работ.

Ключевые слова: Подземная выработка, штольня, взрыв, напряженно-деформированное состояние, граничные условия, метод конечных элементов, внутреннее трение, пластическое деформирование.

Проектирование, эксплуатация и освоение грунтового пространства связаны с необходимостью изучения поведения грунтов и характера их напряженно-деформированного состояния при проведении буровзрывных работ в различных подземных выработках. К числу таких объектов относятся штольни, представляющие собой протяженную подземную горную выработку горизонтального или наклонного направления с выходом на свободную поверхность. Их разработка производится взрывным способом.

В теоретических исследованиях, выполненных в рамках настоящей работы, применяется плоская модель «грунт-подземная выработка», учитывающая геометрию выработки, свойства окружающего грунта и условия на границах исследуемого участка.

Для решения задачи используется метод конечных элементов [1]. Учитываются свойства грунтовой среды (трение между частицами, пластичность и пр.) и различные граничные условия на краях рассматриваемой области. Решение полученной системы находится численно - методом Ньюмарка.

Исходным для решения задачи является вариационное уравнение:

$$\delta A_{ин} + \delta A_{упр} + \delta A_{мп} + \delta A_P = 0, \quad (1)$$

где слагаемыми являются работы сил инерции, упругости, внутреннего трения и внешней нагрузки.

На границах грунтовой области принимаются следующие граничные условия:

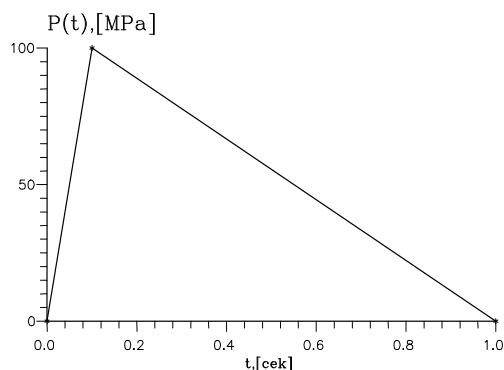
- на свободной поверхности - $\sigma_{ij} v_j = 0$;
- на отсеченной части - условия излучения, не допускающие отражения волн [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c_{np}} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{c_{np}} \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0,$$

где: c_{np} – скорость продольных волн в грунте (для доломита $c_{np}=5000$ м/сек); u – горизонтальное перемещение точки на вертикальных границах; u_r – радиальное перемещение точки на полусфере с центром на конце скважины (штольни);

- на жестком основании модели – $\delta u_i = 0$;
- на внутренней поверхности скважины - $\sigma_{ij} v_j = P(t)$.

Давление P на стенки скважины, вызванное взрывной волной, зависит от времени и характеризуется мгновенным скачком давления до максимального значения и быстрым убыванием до нуля. Кратковременность нагрузки позволяет представить ее характерные участки прямолинейными отрезками (рис. 1). Максимальное значение динамической нагрузки 100 МПа достигается за 1 мсек, время действия 1 сек - такие нагрузки возникают при взрывных работах на шахтах и карьерах [3].



$$P(t) = \begin{cases} 1000t; & t \leq 0,1 \text{ сек} \\ 10^3(-t+1)/9; & \text{при } 0,1 < t \leq 1 \text{ сек} \\ 0; & t > 1 \text{ сек} \end{cases}$$

Рис. 1. Изменение давления на внутренней поверхности штольни при взрыве

Скважина представляет 10-метровую цилиндрическую полость диаметром 10 см со сферической поверхностью на конце. Диаметр окружающего ее грунта (доломита) - 4 м, его физико-механические параметры приняты: модуль Юнга $E=9800$ МПа, плотность $\rho=2800$ кг/м³, коэффициент Пуассона – 0,3.

В работе рассматриваются три модели отличающиеся расположением скважины и граничными условиями с окружающим грунтом. Модель с вертикальной скважиной – симметрична с условиями на границе, не допускающими отражения продольных волн (рис. 2а). Для горизонтальной скважины учитываются деформационные свойства подстилающего основания – на жесткой горной породе (рис. 2б) и на податливом основании (рис. 2в). На рисунках деформированное состояние моделей при взрыве показано на фоне конечно-элементной дискретизации.

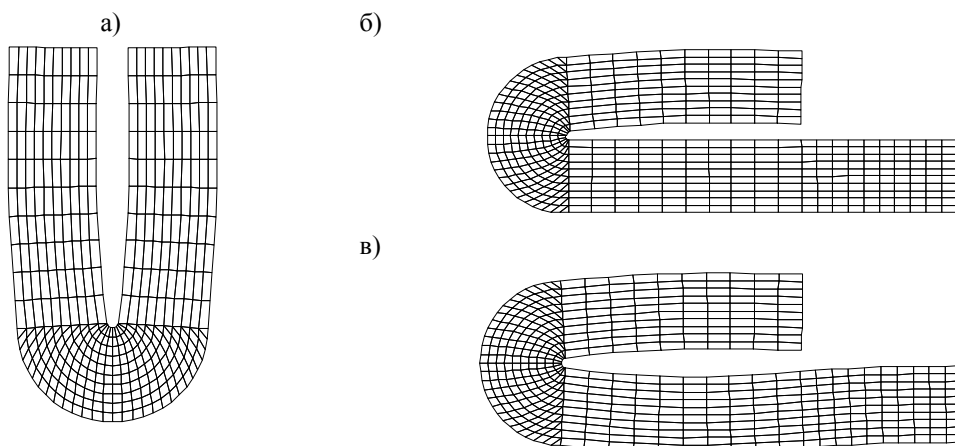


Рис.2. Деформация грунтовой области с вертикальной (а) и горизонтальной скважинами на жестком (б) и податливом (в) основании

Учет внутреннего трения в грунте дает возможность оценить поглощающую способность в зависимости от скорости распространения продольных волн, а, следовательно, от физико-механических характеристик грунта и производится в комплексных переменных. При этом комплексная деформация $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(it)$ отстает по фазе от комплексного напряжения $\sigma(t)$ на угол ψ , зависящий от коэффициента неупругого сопротивления γ [4]:

$$\sigma(t) = E \exp(i\psi)\varepsilon(t) = E_0(a + ib)\varepsilon(t) = E_y\varepsilon(t) + E_n\dot{\varepsilon}(t), \quad (2)$$

где

$$\psi = \arctg \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma^2}{4}}; \quad a = \frac{4 - \gamma^2}{4 + \gamma^2}; \quad b = \frac{4\gamma}{4 + \gamma^2};$$

$E_y; E_n$ – упругий и неупругий модули грунта с внутренним трением; E_0 – модуль упругости грунта без трения.

Использование комплексного модуля упругости $E(\gamma)=E_0(a+ib)$ позволяет записать уравнение (2) в форме закона Гука $\sigma = E(\gamma)\varepsilon$ и получить разрешающую систему дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов демпфирования, пропорциональной матрице квазиупругих коэффициентов

$$[M]\{\ddot{q}\} + \eta[K]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P(t)\}, \quad (3)$$

где

$$\eta = \frac{b}{a} = \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

При решении задачи о взрыве в скважине коэффициент внутреннего трения в горной породе принимался $\gamma=\eta=0,01$. Система уравнений (3) решалась при нулевых начальных условиях пошаговым методом Ньюмарка. Результатом решения являются перемещения узловых точек конечно-элементной сетки в зависимости от времени, а также деформации и напряжения в грунтовой области в результате взрыва (рис. 1).

Напряженно-деформированное состояние моделей (рис. 2) при взрыве указывает на изменение кривизны первоначально линейных образующих стенок скважины. При этом на конце ее формируется зона растягивающих напряжений (50 МПа) с превышением предела прочности доломита на разрыв ($\sigma_p=35$ МПа) (рис. 3), а в направлении под углом 45° к оси скважины касательные напряжения ($\tau_{\max}=\pm 19$ МПа) превышают предел прочности на сдвиг ($\tau_{\max}=\pm 9,5$ МПа) (рис. 4). Таким образом, при принятой нагрузке в указанных областях возможно появление трещин, вызванных разрывом и сдвигом грунта.

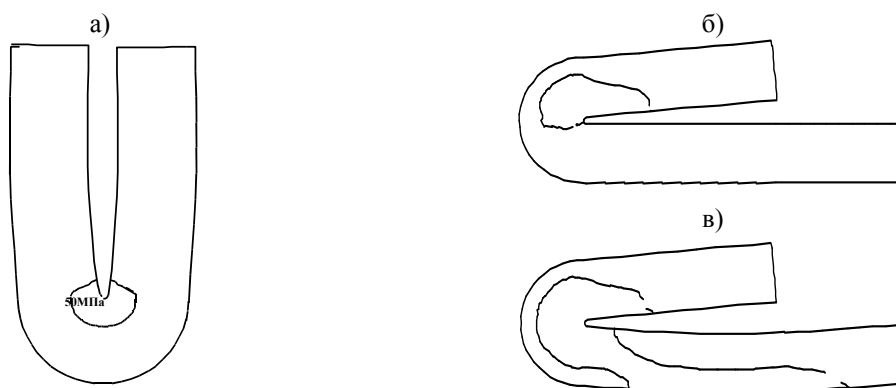


Рис. 3. Изобары растягивающих напряжений (50 МПа) при взрыве в вертикальной (а) и горизонтальных скважинах (б,в): жесткое основание - (б) и с учетом излучения – (а, в)

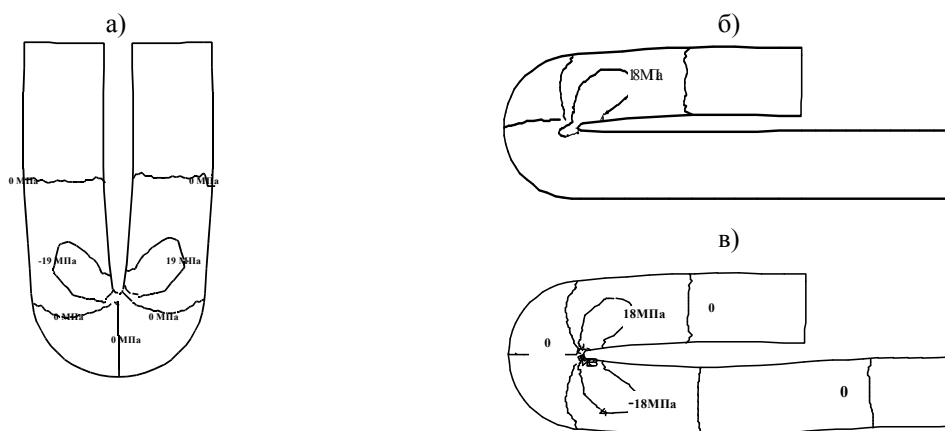


Рис. 4. Изобары касательных напряжений (19 МПа) при взрыве в вертикальной (а) и горизонтальных скважинах (б,в): жесткое основание - (б) и с учетом излучения – (а, в)

Размер области разрушения грунта составляет: на разрыв - до 3-х метров от конца скважины; на сдвиг – до 6 м, и имеет симметричный (с учетом излучения) или несимметричный (при жестком основании) характер.

Сжимающие напряжения, максимальные значения которых совпадают по величине с приложенной нагрузкой (100 МПа), убывают с удалением от стенок скважины и не превышают допустимых пределов для данного грунта. С увеличением коэффициента γ увеличивается пластичность грунта и при $\gamma=2$ грунт становится абсолютно неупругим. Трансформация сжимающих напряжений (динамика изменения их со временем) в пластичном грунте вокруг горизонтальной скважины с излучением в основании приведена на рис.5: в начале процесса взрыва ($t=0.1$ сек – а) и в конце ($t=1$ сек - б).

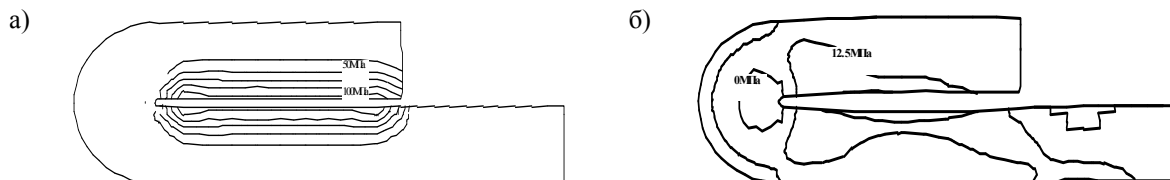


Рис. 5. Трансформация сжимающих напряжений в грунте вокруг скважины в начале (а) и конце (б) воздействия с учетом излучения в основании

Из рис. 5 видно, что в начальный момент, пока волна от взрыва не достигла границ области, изобары сжимающих напряжений в грунте распределены симметрично относительно оси штольни. Это относится ко всем видам напряжений - растягивающим, касательным и сжимающим. В конце процесса, по мере достижения ударной волной границ модели симметрия нарушается за исключением симметричной модели с вертикальной штольней, где картина распределения изолиний остается симметричной в течении всего времени процесса.

Сравнивая напряженно-деформированное состояние (НДС) модели с коэффициентом внутреннего трения $\gamma=2$ (пластичный грунт) с НДС области с $\gamma=0,01$ (грунт с внутренним трением) следует отметить, что напряжения в пластичном грунте вокруг скважины уступают по величине напряжениям в грунте с внутренним трением, а тем более – в упругом грунте без трения. Это вполне согласуется с существующими представлениями, что доказывает достоверность полученных результатов.

Выводы

1. Предложенные модели системы «грунт-скважина» позволяют прогнозировать напряженно-деформированное состояние грунта при проведении взрывных работ в скважинах с различными граничными условиями (свободная от нагрузок верхняя часть, жесткое закрепление внизу и учет условий излучения на некоторых участках границы, препятствующих отражению продольных волн от взрыва).

2. Учитывалось внутреннее трение в грунте и его пластическое деформирование.

3. Определена область превышения предельно допустимых значений растягивающих и сдвиговых напряжений при взрыве интенсивностью 100 МПа. Согласно проведенным расчетам получено, что разрушение грунта и возникновение трещин происходит в области до 3 м до 6 м от стенок скважины.

4. Разработанная методика и созданные программы могут быть использованы при производстве геологических работ в горных породах.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФПФИ Узбекистана.

Литература

1. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 542с.
2. Мирсаидов М.М., Султанов Т.З., Руми Д.Ф. Оценка динамического поведения системы (сооружение-основание) с учетом волнового уноса энергии.// Инженерно-строительный журнал. №4 (39) СПб. 2013с. 94- 105
3. Амбриашвили Ю.К., Ананьин А.И. и др. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика. М.: Стройиздат, 1986. 461с.
4. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем: Госстройиздат, 1960.

УДК 539.3

РАСЧЁТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОРУДОВАНИЯ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

С.Д. Семеевков, В.В. Шелгунов, Д.С. Семеевков

*Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия,
mr.semeenkov@mail.ru, shelgunovv@mail.ru*

Аннотация. В докладе обобщены теоретические положения и основные методы расчета пищевого оборудования. Для решения расчетных задач использованы теоретические зависимости мембранной теории оболочек и экспериментальные данные. Особое внимание уделено методике расчета напряжений и деформаций оболочечных элементов конструкций, используемых в машинах и аппаратах пищевых производств. Рассмотренные в докладе задачи являются типовыми для расчета и конструирования пищевого оборудования, а методы их решения могут применяться как в учебных, так и в производственных целях.

Ключевые слова: мембранная теория оболочек, оболочки вращения, внутренние избыточное давление, напряжения, деформации, расчёт.

1. Мембранная теория оболочек

Мембранная теория оболочек основана на тех же гипотезах, что и теория плоских пластин. Для тонких оболочек расчёт напряжений по этой теории не дает значительных погрешностей. Если наибольшую допускаемую погрешность принять равной 5%, то тонкостенными оболочками можно считать такие, у которых отношение толщины δ к наименьшему радиусу кривизны срединной поверхности R не превышает 0,05 [1, 2].

Расчёт тонкостенных оболочек вращения наиболее прост, если предположить, что возникающие в оболочке напряжения равномерно распределяются по толщине её стенки. В этом случае оболочка не подвергается изгибу. Основанная на этом предположении теория называется безмоментной, или мембранной теорией оболочек [2, 3]. Мембранную теорию можно успешно применять в случаях, когда оболочка представляет собой тело вращения, не имеет резких переходов и жестких закреплений, а также нагружена не сосредоточенными силами и моментами, а симметрично распределёнными нагрузками [3].

Большинство элементов пищевого оборудования имеет форму тонкостенных обечаек различной конфигурации, что обуславливает возможность использования безмоментной теории для расчета напряжений и деформаций, которые определяют выбор толщины их стенок.

2. Расчет цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением

Цилиндр с крышками, нагруженный газовым давлением. Расчетная схема цилиндра с крышками представлена на рис. 1.

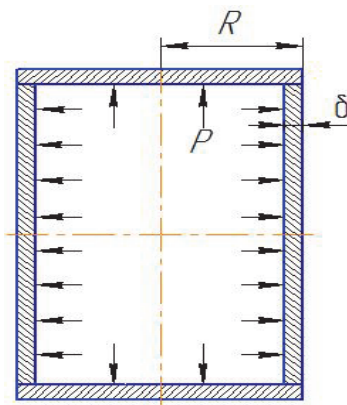


Рис.1. Расчетная схема цилиндра с крышками

Меридиональная сила определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}PR, \quad (1)$$

где P – давление, Па; R – радиус срединной поверхности, м.

Кольцевая сила рассчитывается по формуле

$$T = PR. \quad (2)$$

Меридиональное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{PR}{2\delta}. \quad (3)$$

Кольцевое напряжение

$$\sigma_2 = \frac{PR}{\delta}, \quad (4)$$

где δ – толщина стенки цилиндра.

Радиальная деформация

$$\Delta = -\frac{2-\mu}{2\delta \cdot E}PR^2, \quad (5)$$

где μ – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга (модуль первого рода).

Угловая деформация $\theta = 0$.

Цилиндр без крышек, нагруженный газовым давлением. Расчетная схема цилиндра представлена на рис. 2.

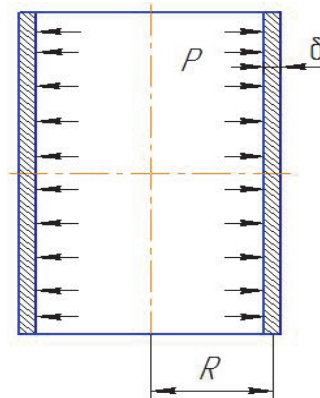


Рис.2. Расчетная схема цилиндра

Меридиональная сила $S = 0$, и, соответственно, меридиональное напряжение $\sigma_1 = 0$.

Кольцевая сила

$$T = PR, \quad (6)$$

соответственно, кольцевое напряжение

$$\Sigma\sigma_2 = \frac{PR}{\delta}. \quad (7)$$

Радиальная деформация

$$\Delta = -\frac{1}{\delta \cdot E}PR^2, \quad (8)$$

соответственно, угловая деформация $\theta = 0$.

Цилиндр без днища, нагруженный гидростатическим давлением. Расчетная схема цилиндра без днища представлена на рис. 3. Меридиональная сила $S = 0$, и, соответственно, меридиональное напряжение $\sigma_1 = 0$.

Кольцевая сила

$$T = \gamma_{жс} R \cdot x, \quad (9)$$

соответственно, кольцевое напряжение

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_{жс} R x}{\delta} \sigma, \quad (10)$$

где $\gamma_{жс}$ - плотность жидкости; x - расстояние от поверхности жидкости.

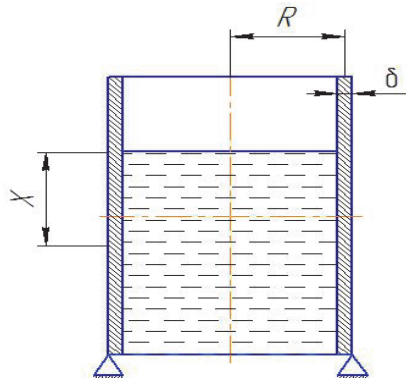


Рис. 3. Расчетная схема цилиндра без днища

Радиальная деформация

$$\Delta = -\frac{\gamma_{жс} R^2}{\delta \cdot E} x, \quad (11)$$

соответственно, угловая деформация

$$\theta = -\frac{\gamma_{жс} R^2}{\delta \cdot E}. \quad (12)$$

Цилиндр, нагруженный центробежной силой от собственной массы. Расчетная схема цилиндра представлена на рис. 4. Меридиональная сила $S = 0$, и, соответственно, $\sigma_1 = 0$.

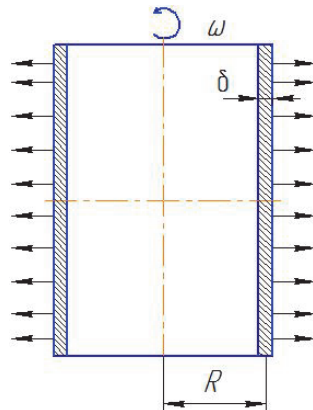


Рис. 4. Расчетная схема цилиндра нагруженного центробежной силой

Кольцевая сила

$$T = \frac{\gamma_{жс} \delta}{g} \omega^2 R^2, \quad (13)$$

кольцевое напряжение

$$\Sigma_2 = \frac{\gamma_M}{g} \omega^2 R^2, \quad (14)$$

где γ_M - плотность конструкционного металла, кг/м³; g - гравитационная постоянная (ускорение падающего тела), м/с²; ω - угловая скорость, рад/с.

Радиальная деформация

$$\Delta = -\frac{\gamma_M \omega^2 R^2}{E \cdot g}, \quad (15)$$

угловая деформация $\theta = 0$.

Цилиндр с крышками под действием давления вращающейся жидкости. Расчетная схема цилиндра с крышками представлена на рис. 5.

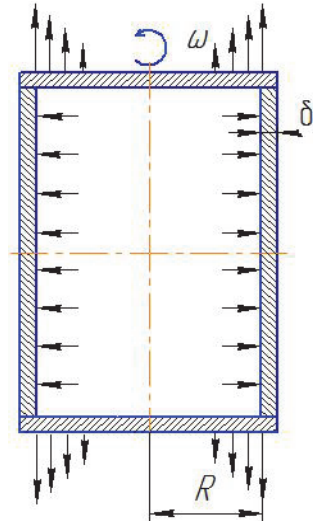


Рис. 5. Расчетная схема цилиндра с крышками под действием давления вращающейся жидкости, нагруженного центробежной силой

Меридиональная сила

$$S = k \frac{\gamma_{жс} \omega^2}{8 \cdot g} R^3, \quad (16)$$

соответственно, меридиональное напряжение

$$\sigma_1 = k \frac{\gamma_{жс} \omega^2}{8 g \delta} R^3. \quad (17)$$

Кольцевая сила

$$T = k \frac{\gamma_{жс} \omega^2}{2g} R^3, \quad (18)$$

соответственно, кольцевое напряжение

$$\sigma_2 = k \frac{\gamma_{жс} \omega^2}{2g \delta} R^3. \quad (19)$$

Радиальная деформация

$$\Delta = -k \frac{\gamma_{жс} \omega^2 R^4}{8g \cdot \delta \cdot E} (4 - \mu k), \quad (20)$$

соответственно, угловая деформация $\theta = 0$.

Решения рассмотренных выше задач могут быть использованы для определения основных размеров элементов пищевого оборудования в процессе его конструирования.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
2. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. -167 с.
3. Остриков А.Н. Расчет и конструирование машин и аппаратов пищевых производств. – СПб: РАПП, 2009. – 407 с.

УДК 539.214

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

А.С. Семенов, Б.Е. Мельников

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург,
Россия, semenov.artem@googlemail.com, melnikovboris@mail.ru*

Аннотация. Рассматриваются обобщения квадратичного критерия Хилла в виде критерия пластичности четвертой степени и степенного критерия для описания поведения монокристаллических сплавов кубической сингонии. Производится сравнение прогнозов предложенных критериев с кристаллографическим критерием Шмида и экспериментальными данными.

Ключевые слова: феноменологический критерий пластичности, монокристалл, анизотропия, кубическая симметрия, кристаллографическая ориентация, поверхность нагружения.

1. Введение

Монокристаллические жаропрочные сплавы [1] получили широкое распространение при изготовлении лопаток современных перспективных авиационных и стационарных газотурбинных установок благодаря повышенным характеристикам сопротивления высокотемпературной ползучести и длительной прочности за счет полного исключения границ между зернами. Для повышения точности анализа напряженно–деформированного состояния и оценки термоусталостной прочности [2,3] охлаждаемых лопаток необходима разработка уточненных моделей пластического деформирования монокристаллических материалов. Упругие и пластические свойства жаропрочных монокристаллических сплавов на основе никеля обладают кубической симметрией, при которой механические свойства оказываются одинаковыми для трех взаимно перпендикулярных направлений [100], [010], [001] (нормали к граням элементарной ячейки кристаллической решетки), однако демонстрируют значительные отличия для промежуточных ориентаций, например для направлений {011} (диагонали граней элементарной ячейки) и {111} (главные диагонали куба).

Несмотря на то, что материалы с кубической симметрией могут рассматриваться частным случаем ортотропного материала, квадратичный критерий пластичности Хилла не способен описать ряд экспериментально наблюдаемых эффектов [4]. Это приводит к необходимости разработки альтернативного феноменологического критерия пластичности для монокристаллического материала. В данной работе для этой цели используются микромеханический критерий Шмида и экспериментальные данные для монокристаллических сплавов на никелевой основе.

Как обобщение двухконстантного критерия пластичности Хилла [5] для материалов кубической сингонии в данном исследовании рассматривается пятиконстантный критерий пластичности четвертой степени и четырехконстантный степенной критерий. Исследуются вопросы введения инвариантов напряжения для кубической сингонии. Производится анализ условий выпуклости исследуемых критериев пластичности. Выполнен анализ чувствительности формы поверхности нагружения к варьированию параметров критериев. Производится сравнение прогнозов критериев при одноосном нагружении для различных кристаллографических ориентаций в плоскости (100) в диапазоне от [001] до [011], а также при многоосном комбинированном нагружении (растяжение и сдвиг) для ориентации [001].

2. Критерии пластичности монокристаллического материала

Ниже представлены математические формулировки кристаллографического критерия Шмида [6], квадратичного критерия Хилла [5] и его обобщения в виде критерия пластичности четвертой степени [4] и степенного критерия для анизотропного материала с кубической симметрией.

Кристаллографический критерий Шмида. Предполагается, что процесс пластического деформирования ГЦК монокристалла осуществляется в результате возможного скольжения в N (октаэдрических $\{111\}\langle 011\rangle$ и/или кубических $\{001\}\langle 011\rangle$) системах скольжения; последние

характеризуются нормалью \mathbf{n}^α к α -й плоскости скольжения (с наибольшей плотностью упаковки атомов) и направлением скольжения \mathbf{l}^α ($\alpha = 1, \dots, N$) (с наиболее плотной упаковкой атомов). Данные характеристики полностью определяются геометрией кристаллической решетки. Условие начального перехода монокристалла в пластичность в соответствии с законом Шмида определяется достижением приведенного касательного напряжения критического значения τ_0 :

$$\min_{\alpha} \frac{\mathbf{n}^\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^\alpha}{\tau_0} - 1 = 0. \quad (1)$$

Вводимые ниже феноменологические критерии имеют целью дать гладкую аппроксимацию к (1), непосредственное использование которого в расчетах отличается ресурсоемкостью. Кроме того, ряд экспериментальных фактов указывает на наличие отклонений прогнозов критерия Шмида от данных опытов [7].

Квадратичный критерий Хилла. Феноменологические модели пластичности не учитывают реальных механизмов неупругого деформирования кристаллов и особенностей эволюции их микроструктуры. В этих моделях монокристалл идеализируется и рассматривается как анизотропная гомогенная сплошная среда; при этом учитываются как исходная, так и деформационно-индуцированная анизотропия.

Простейшим вариантом феноменологического критерия пластичности, получившим распространение при анализе поведения монокристаллических материалов, является квадратичный критерий Хилла:

$$\mathbf{s} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{M} \cdot \cdot \cdot \mathbf{s} - 1 = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$ – девиатор тензора напряжений; $\mathbf{1}$ – единичный тензор; ${}^4\mathbf{M}$ – тензор четвертого ранга, характеризующий анизотропию поверхности нагружения.

Для кубической группы симметрии кристалла тензор ${}^4\mathbf{M}$ (так же, как и тензор упругих модулей и любые другие тензоры четвертого ранга, характеризующие механическое поведение) допускает представление:

$${}^4\mathbf{M} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu \frac{1}{2} (\mathbf{1} \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}) + \alpha \sum_{a=1}^3 \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a, \quad (3)$$

где $\lambda = M_{12}$, $\mu = 2M_{44}$, $\alpha = M_{11} - M_{12} - 2M_{44}$ – константы материала, $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$, $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$, $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$ – символы прямого и непрямого диадного умножения, \mathbf{e}^a – орты кристаллографической решетки. В системе координат, связанной с кристаллографическим базисом \mathbf{e}^a , ${}^4\mathbf{M}$ имеет следующую структуру:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{12} & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Подстановка выражения (4) в уравнение (2) приводит к следующему равенству $(M_{11} - M_{12})(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + M_{44}(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) - 1 = 0$, которое характеризуется только двумя независимыми константами материала (M_{44} и комбинацией $M_{11} - M_{12}$) и может быть переписано с заменой компонент девиатора на компоненты тензора напряжений в виде:

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + K_p (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_T, \quad (5)$$

где введены обозначения $\sigma_T = \sqrt{3/[2(M_{11} - M_{12})]}$, $K_p = 3M_{44}/[2(M_{11} - M_{12})]$. Принципиально, что при использовании соотношения (5) компоненты тензора напряжений задаются в системе координат, связанной с кристаллографическим базисом \mathbf{e}^a .

Комбинации компонент девиатора тензора напряжений

$$I_1 = s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2, \quad I_2 = s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 \quad (6)$$

являются инвариантами при преобразованиях, соответствующих кубической симметрии. С их использованием критерий пластичности (2) может быть записан в виде:

$$(\mu + \alpha)I_1 + 2\mu I_2 = 0. \quad (7)$$

Константа λ из (3) не используется в критерии (7) по причине девиаторного характера сомножителей \mathbf{s} у ${}^4\mathbf{M}$ в (2).

Условия выпуклости (2) могут быть получены на основе (7) в виде $\mu + \alpha \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Критерий четвертой степени. В работе [4] было показано, что использование квадратичного критерия Хилла (2) не позволяет описать наличие минимума у предела текучести для направления нагружения среднего между ориентациями [001] и [011] при рассмотрении отклонений в плоскости (100), наблюдаемого в экспериментах [8, 9] (см. также рис. 1). Одним из возможных путей устранения указанного недостатка является использование феноменологического критерия четвертой степени [4]:

$$\mathbf{s}^2 \cdot \cdot {}^4\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{s}^2 - (\mathbf{s} \cdot \cdot {}^4\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{s})^2 - 1 = 0, \quad (8)$$

где тензор ${}^4\mathbf{N}$ имеет вид аналогичный (3):

$${}^4\mathbf{N} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \eta \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \beta \sum_{a=1}^3 \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^a. \quad (9)$$

Для определения тензоров ${}^4\mathbf{M}$ и ${}^4\mathbf{N}$, фигурирующих в критерии (8), необходимо задать пять констант ($N_{11}, N_{12}, N_{44}, M_{11} - M_{12}, M_{44}$). Они могут быть найдены из условий совпадения пределов текучести для пяти характерных направлений (например, для ориентаций [001], [011], [111], [025] и [112]). Константы материала могут выбираться как из условия совпадения пределов текучести с экспериментом, так и из условия совпадения с прогнозом по закону Шмида при нехватке экспериментальных данных.

Подстановка выражений (3) и (9) в критерий (8) позволяет переписать его с использованием инвариантов в виде

$$\kappa(I_1 + 2I_2)^2 + \eta(2I_2^2 - 2I_1I_2 + I_3) + \beta(I_2^2 - 2I_1I_2 + I_3 + I_4 - 2I_5) - [(\mu + \alpha)I_1 + 2\mu I_2]^2 = 0, \quad (10)$$

где введены 5 инвариантов девиатора тензора напряжений:

$$\begin{aligned} I_1 &= s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2, \\ I_2 &= s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2, \\ I_3 &= s_{11}^4 + s_{22}^4 + s_{33}^4, \\ I_4 &= s_{12}^4 + s_{23}^4 + s_{31}^4, \\ I_5 &= s_{11}^2 s_{23}^2 + s_{22}^2 s_{31}^2 + s_{33}^2 s_{12}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия выпуклости критерия (8) могут быть получены на основе анализа выражения (10), приводящегося к квадратичной форме. Условия выпуклости накладывает следующие ограничения на константы материала:

$$\begin{aligned} \kappa - (\mu + \alpha)^2 &\geq 0, \\ 2\kappa - \eta - \beta - 2\mu(\mu + \alpha) &\geq 0, \\ 4\kappa + 2\eta + \beta - 4\mu^2 &\geq 0, \\ \eta &\geq 0, \\ \beta &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Двухинвариантный степенной критерий. Уравнение квадратичного критерия Хилла (8) может быть переписано с учетом (6) в виде:

$$\left(\frac{\sqrt{I_1}}{\sigma_T}\right)^2 + K_p \left(\frac{\sqrt{I_2}}{\sigma_T}\right)^2 - 1 = 0, \quad (13)$$

Обобщением (12) в целях предсказания минимума предела текучести при изменении направления нагружения в диапазоне от [001] до [011] является двухинвариантный степенной критерий:

$$\left(\frac{\sqrt{I_1}}{\sigma_T}\right)^n + K_p \left(\frac{\sqrt{I_2}}{\sigma_T}\right)^m - 1 = 0, \quad (14)$$

где n, m, K_p - безразмерные константы материала, σ_T - предел текучести для [001]. Условие выпуклости поверхности нагружения требует выполнения условий $n \geq 1, m \geq 1$.

3. Сравнение с экспериментальными данными

Ниже рассматриваются случаи одноосного растяжения для образцов различной кристаллографической ориентации и двухосного нагружения - комбинированного растяжения с кручением образцов ориентации [001]. Выполняется сравнительный анализ введенных критериев, определяющих переход из упругого в пластическое состояние. Кинетика накопления пластических деформаций не анализируется (этот вопрос рассмотрен для критерия Шмида в работах [11,12], фундаментальные аспекты упруго-пластического деформирования детально описаны в работах [13,14]).

Одноосное нагружение. Рассматривается одноосное растяжение образцов различных кристаллографических ориентаций с углами отклонения направления [001] от оси образца, изменяющимися в диапазоне от 0° до 45° (ось совпадает с [011]). Тензор напряжения для рассматриваемых условий нагружения в кристаллографическом базисе допускает представление $\sigma = \sigma \{e_{[001]}e_{[001]} \cos^2 \theta + e_{[010]}e_{[010]} \sin^2 \theta + (e_{[001]}e_{[010]} + e_{[010]}e_{[001]}) \sin \theta \cos \theta\}$.

Введенные выше инварианты определяются равенствами

$$I_1 = \sigma^2 (1 - 3/4 \sin^2 2\theta), \quad I_2 = \sigma^2 1/4 \sin^2 2\theta.$$

Результаты сравнения критериев (1), (2), (8) и (14) с данными экспериментов [8, 9] для сплавов PWA1480 (при 593°C), CMSX2 и AM3 (при 650°C) показаны на рис. 1. Видно, что квадратичный критерий Хилла (2) не способен описать появление минимума предела текучести в середине интервала $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ при любых значениях K_p . Критерии (8) и (14), равно как и критерий Шмида (1), позволяют описать наличие минимума. Степенной критерий (14), кроме этого, в отличие от (1) и (8), позволяет предсказать наблюдаемую в экспериментах несимметрию рассматриваемой кривой пределов текучести при растяжении.

Многоосное нагружение. На рис. 2 показаны поверхности нагружения, полученные с помощью критериев Шмида (1), Хилла (2) и критерия четвертой степени (8) для случая комбинированного растяжения с кручением для образца ориентации [001].

Поверхность нагружения, построенная с помощью критерия Шмида (1) с учетом только октаэдрических систем скольжения, для образца ориентации [001] имеет форму квадрата. Критерию Хилла (2) при рассматриваемых условиях нагружения соответствуют кривые в форме эллипса, описываемого уравнением $\sigma^2 + K_p \tau^2 = \sigma_T^2$, с меняющимся при изменении K_p размером вертикальной полуоси. Как видно из рис. 2 эллипсы при $K_p \neq 1$ являются достаточно грубой аппроксимацией квадрата, обеспечивая достаточную точность только при малых значениях касательных напряжений. Критерий четвертой степени (8) предлагает более точную гладкую аппроксимацию квадрата. Соответствующая (8) кривая описывается уравнением вида

$\sigma^4 + \alpha\sigma^2\tau^2 + \beta\tau^4 = \sigma_T^4$. Критерий (14) при $n=1, m=1$ совпадает с прогнозом критерия Шмида. При увеличении указанных параметров наблюдаются заметные отличия.

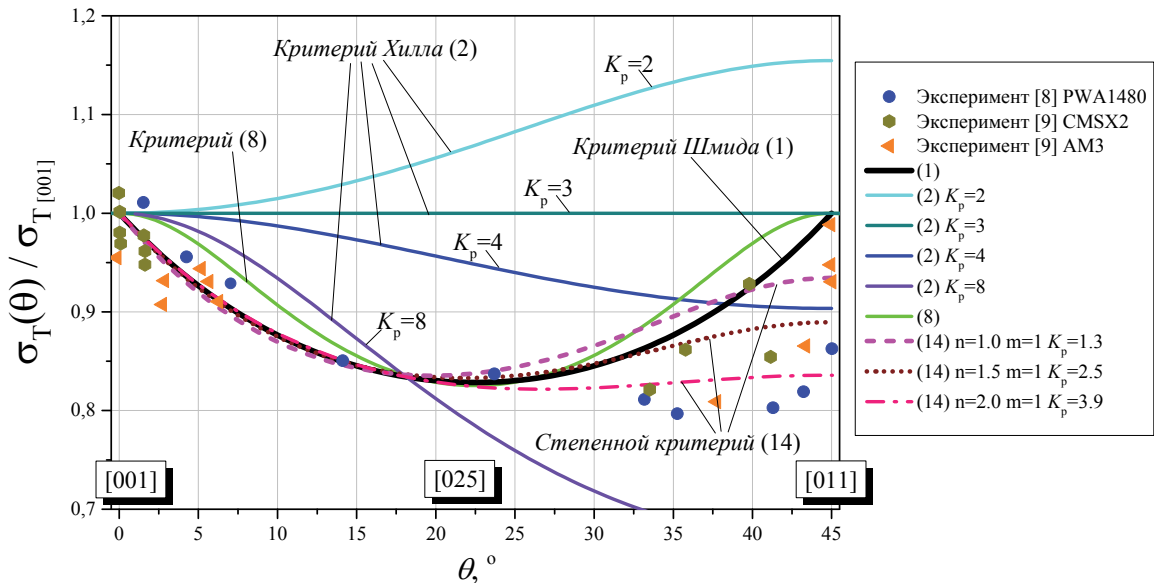


Рис. 1. Сравнение зависимости предела текучести для критериев (1), (2), (8) и (14) с экспериментальными данными [8, 9] при различных углах отклонения нагрузки от направления [001]

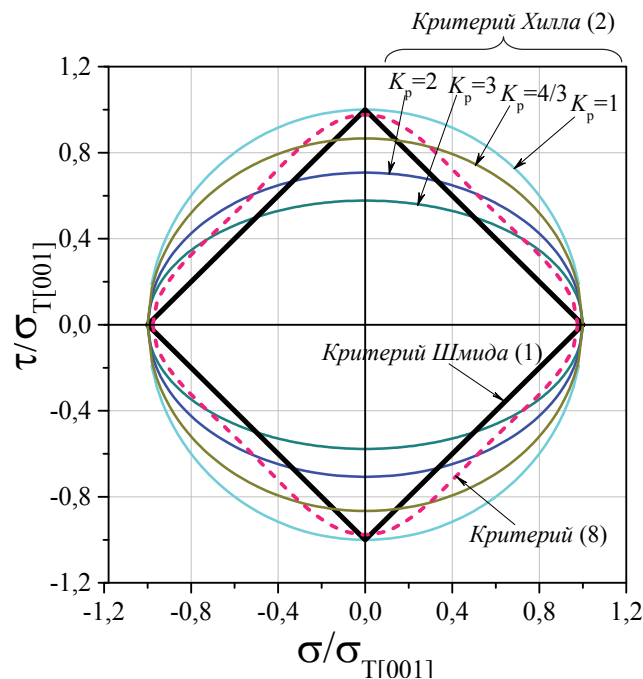


Рис. 2. Поверхности нагружения при совместном растяжении и кручении образца ориентации [001]

4. Заключение

Использование критерия пластичности четвертой степени и степенного критерия позволяет значительно повысить точность прогнозов в сравнении с квадратичным критерием Хилла при описании упругопластического поведения монокристаллических сплавов кубической сингонии. Их применение на практике требует увеличения числа необходимых констант материала и усложнения вида определяющих уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-08-08779).

Литература

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толораия В.Н., Гаврилин О.С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. – М: Машиностроение, 1997. – 333 с.
2. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. – 2014, – № 1. – С. 50-62.
3. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ. вып. 296. – 2009. – С. 83-91.
4. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2014. – Т. 194, – №2, – С. 15-29.
5. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1948. – Vol. 193 – No. 1033 – pp. 281-297.
6. Schmid E., Boas W. Kristallplastizitaet mit besonderer Beruecksichtigung der Metalle. – Berlin: Julius Springer, – 1935. – 373 S.
7. Qin Q., Bassani J.L. Non-schmid yield behavior in single crystals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40 – pp. 813–833.
8. Shah D.M., Duhl D.N. The effect of orientation, temperature and gamma prime size on the yield strength of a single crystal nickel base superalloy // Superalloys. The Metallurgical Society of AIME, – 1984. – pp. 105-114.
9. Hoinard G., Estevez R., Franciosi P. Hardening anisotropy of γ/γ' superalloy single crystals — 1. Experimental estimates at 650°C from a homogeneous analysis // Acta Metall. Mater. – 1995. – Vol. 43. – pp. 1593–1607.
11. Cailletaud G. A micromechanical Approach to Inelastic Behaviour of Metals // International Journal of Plasticity. – 1991. – Vol. 8 – pp. 55-73.
12. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.Л., Форест С. Нелинейная механика материалов (перевод с французского). С.-Петербург. – 2010, 398 с.
13. Ильющин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: АН СССР. – 1961. – С. 3-29.
14. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

УДК 539.37

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С.Л. Субботин

Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Россия, sbtn@yandex.ru

Аннотация. Представлены уравнения связи между напряжениями и деформациями для решения краевых задач в случае плоской деформации на основе общих соотношений теории упругопластических процессов в рамках гипотезы компланарности. Эти уравнения существенно отличаются от случая плоского напряженного состояния. Показано, что из общих уравнений следуют соотношения деформационной теории пластичности как в скоростях, так и без перехода к скоростям.

Ключевые слова: пластичность, теория упругопластических процессов, деформационная теория пластичности, плоская деформация, плоское напряженное состояние.

Для решения краевых задач теории упругопластических процессов соотношения между напряжениями и деформациями удобно представить в виде [1-3]:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_x &= E_{11}\dot{\varepsilon}_x + E_{12}\dot{\varepsilon}_y + E_{13}\dot{\gamma}_{xy}, \\ \dot{\sigma}_y &= E_{21}\dot{\varepsilon}_x + E_{22}\dot{\varepsilon}_y + E_{23}\dot{\gamma}_{xy}, \\ \dot{\tau}_{xy} &= E_{31}\dot{\varepsilon}_x + E_{32}\dot{\varepsilon}_y + E_{33}\dot{\gamma}_{xy}.\end{aligned}\quad (1)$$

Коэффициенты $E_{ij} = E_{ji}$ определяются из общего соотношения гипотезы компланарности [4-6]

$$\dot{\bar{\sigma}} = N\dot{\bar{\varepsilon}} + (P - N)\frac{\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \quad (2)$$

где N, P – функционалы упругопластического процесса [1-6].

В плоской задаче векторное соотношение (2) преобразуется к скалярному виду [4-6]

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= N\dot{\mathcal{E}}_1 + (P - N)(S_1\dot{\mathcal{E}}_1 + S_2\dot{\mathcal{E}}_2 + S_3\dot{\mathcal{E}}_3)S_1 / \sigma^2, \\ \dot{S}_2 &= N\dot{\mathcal{E}}_2 + (P - N)(S_1\dot{\mathcal{E}}_1 + S_2\dot{\mathcal{E}}_2 + S_3\dot{\mathcal{E}}_3)S_2 / \sigma^2, \\ \dot{S}_3 &= N\dot{\mathcal{E}}_3 + (P - N)(S_1\dot{\mathcal{E}}_1 + S_2\dot{\mathcal{E}}_2 + S_3\dot{\mathcal{E}}_3)S_3 / \sigma^2,\end{aligned}\quad (3)$$

где учтено, что

$$S_1 = \sqrt{3/2} S_{11}, \quad S_2 = \sqrt{2} S_{22} + \sqrt{2} S_{11} / 2, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12}, \quad S_4 = S_5 = 0, \quad (4)$$

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2},$$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{3/2} \mathcal{E}_{11}, \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{22} + \sqrt{2} \mathcal{E}_{11} / 2, \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5 = 0, \quad (5)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2}.$$

Компоненты, входящие в (3)-(5), выражаются через напряжения [4-6]

$$S_{11} = \sigma_x - \sigma_0, \quad S_{22} = \sigma_y - \sigma_0, \quad S_{12} = \tau_{xy}, \quad \sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3, \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_{11} = \varepsilon_x - \varepsilon_0, \quad \mathcal{E}_{22} = \varepsilon_y - \varepsilon_0, \quad \mathcal{E}_{12} = \gamma_{xy} / 2, \quad \varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3, \quad (7)$$

$$S_1\dot{\mathcal{E}}_1 + S_2\dot{\mathcal{E}}_2 + S_3\dot{\mathcal{E}}_3 = (\sigma_x - \sigma_0)(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y - 3\dot{\varepsilon}_0) + (\sigma_y - \sigma_0)(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y - 3\dot{\varepsilon}_0) + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy}. \quad (8)$$

При этом средняя деформация и среднее напряжение связаны законом упругого изменения объема

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}(1 - 2\mu) = \frac{\sigma_0}{E_p}(1 - 2\mu_p), \quad (9)$$

где полагается, что $\frac{E}{(1 - 2\mu)} = \frac{E_p}{(1 - 2\mu_p)} = const$. Из (9) пластический коэффициент Пуассона

$$\mu_p = 0,5 - (0,5 - \mu) \frac{E_p}{E}, \quad (10)$$

Для плоского напряженного состояния приемлемую точность дает модель несжимаемого материала, для которого $\varepsilon_0 = \dot{\varepsilon}_0 = 0$, то есть $\mu = \mu_p = 0,5$.

С учетом, что для плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$, выражения для коэффициентов в соотношениях (1) с учетом (3)-(10) принимают вид

$$E_{11} = 2N + (P - N) \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}, \quad E_{12} = E_{21} = N + (P - N) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma^2}, \quad E_{13} = E_{31} = (P - N) \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma^2}, \quad (11)$$

$$E_{22} = 2N + (P - N) \frac{\sigma_y^2}{\sigma^2}, \quad E_{23} = E_{32} = (P - N) \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma^2}, \quad E_{33} = \frac{1}{2}N + (P - N) \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma^2}.$$

Чтобы избежать разрыва в решении при переходе от упругой стадии работы к упругопластической, в пределах упругости также нужно принимать $\mu = 0,5$. Тогда функционалы пластичности имеют значения

$$N = P = 2G = \frac{E}{1 + \mu} = \frac{2}{3}E, \quad G = \frac{E}{3}. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (11) приводит соотношения (1) к виду

$$\dot{\sigma}_x = \frac{4}{3}E\dot{\varepsilon}_x + \frac{2}{3}E\dot{\varepsilon}_y,$$

$$\dot{\sigma}_y = \frac{2}{3}E\dot{\varepsilon}_x + \frac{4}{3}E\dot{\varepsilon}_y, \quad (13)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{3}\dot{\gamma}_{xy}.$$

В численных расчетах для задачи о плоской деформации, отличие от (13), принимать $\mu = 0,5$ в упругой стадии нельзя из-за деления на ноль:

$$\dot{\sigma}_x = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \left[(1 - \mu)\dot{\varepsilon}_x + \mu\dot{\varepsilon}_y \right],$$

$$\dot{\sigma}_y = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \left[\mu\dot{\varepsilon}_x + (1 - \mu)\dot{\varepsilon}_y \right], \quad (14)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \dot{\gamma}_{xy}.$$

За пределом упругости для плоской деформации среднее напряжение σ_0 определяется из условия упругого изменения объема (9):

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3}, \quad \sigma_z = 3\sigma_0 - \sigma_x - \sigma_y, \quad \sigma_0 = \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_0 = \frac{E_p}{1 - 2\mu_p} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3}. \quad (15)$$

При пошаговом прослеживании процесса по параметру нагружения t (обобщенному времени) на $j + 1$ шаге

$$\sigma_0 = \int_0^{t_{j+1}} \dot{\sigma}_0 dt = \sigma_0^{(j)} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{\sigma}_0 dt = \sigma_0^{(j)} + \frac{E}{1 - 2\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y}{3} dt, \quad (16)$$

где учтено, что на основании (9) и (15) скорость среднего напряжения $\dot{\sigma}_0 = \frac{E}{1 - 2\mu} \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y}{3}$.

Формула (16) эквивалентна последней формуле (15).

Таким образом, для плоской деформации коэффициенты в формулах (1), в отличие от (11) принимают вид:

$$E_{11} = \frac{2}{3}N + \frac{E}{3(1 - 2\mu)} + (P - N) \frac{(\sigma_x - \sigma_0)^2}{\sigma^2}, \quad E_{13} = E_{31} = (P - N) \frac{(\sigma_x - \sigma_0)\tau_{xy}}{\sigma^2},$$

$$E_{12} = E_{21} = -\frac{1}{3}N + \frac{E}{3(1-2\mu)} + (P-N) \frac{(\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0)}{\sigma^2}, \quad (17)$$

$$E_{22} = \frac{2}{3}N + \frac{E}{3(1-2\mu)} + (P-N) \frac{(\sigma_y - \sigma_0)^2}{\sigma^2}, \quad E_{23} = E_{32} = (P-N) \frac{(\sigma_y - \sigma_0)\tau_{xy}}{\sigma^2},$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}N + (P-N) \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma^2}.$$

Для нелинейно-упругого материала

$$N = 2G_p = \frac{\Phi(\mathcal{E})}{\mathcal{E}}, \quad P = 2G_k = \frac{d\Phi(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}}, \quad (18)$$

где $\Phi(\mathcal{E})$ – универсальная зависимость $\sigma(\mathcal{E})$ для любого простого нагружения.

Формулы (18) могут быть представлены через интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i :

$$N = 2G_p = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} = \frac{E_p}{1+\mu_p}, \quad P = 2G_k = \frac{d\sigma}{d\mathcal{E}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{d\mathcal{E}} = \frac{d\sigma/d\varepsilon_i}{d\mathcal{E}/d\varepsilon_i}, \quad (19)$$

где пластический модуль и модули девиаторов напряжений и деформаций

$$E_p = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\mu_p)\varepsilon_i. \quad (20)$$

Из (10), (19) и (20) следует

$$\frac{d\mu_p}{d\varepsilon_i} = -\frac{0,5-\mu}{E} \left(\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i^2} \right) = -0,5 \frac{1-2\mu}{E} \frac{E_k - E_p}{\varepsilon_i} = -0,5 \frac{1-2\mu_p}{E_p} \frac{E_k - E_p}{\varepsilon_i}, \quad (21)$$

откуда касательный модуль сдвига и касательный модуль

$$2G_k = \frac{E_k}{1,5 - (0,5 - \mu_p) \frac{E_k}{E_p}} = \frac{E_k}{1,5 - (0,5 - \mu) \frac{E_k}{E}}, \quad E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}. \quad (22)$$

Коэффициенты в формулах (17) преобразуются с учетом (19)-(22):

$$\frac{2}{3}N + \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{2E_p}{3(1+\mu_p)} + \frac{E_p}{3(1-2\mu_p)} = \frac{(1-\mu_p)E_p}{(1+\mu_p)(1-2\mu_p)},$$

$$-\frac{1}{3}N + \frac{E}{3(1-2\mu)} = -\frac{E_p}{3(1+\mu_p)} + \frac{E_p}{3(1-2\mu_p)} = \frac{\mu_p E_p}{(1+\mu_p)(1-2\mu_p)},$$

$$\frac{1}{2}N = \frac{E_p}{2(1+\mu_p)}, \quad (23)$$

$$P - N = \frac{E_k}{1,5 - (0,5 - \mu_p) \frac{E_k}{E_p}} - \frac{E_p}{(1+\mu_p)} = \frac{E_k - E_p}{(1+\mu_p) \left(1 - \frac{(1-2\mu)E_k}{3E} \right)}$$

Подстановка (23) в (17) и (1) приводит к соотношениям деформационной теории пластичности в скоростях для задачи о плоской деформации. Без перехода к скоростям эти соотношения имеют известный вид [4,5]:

$$\sigma_x = \frac{E_p}{(1+\mu_p)(1-2\mu_p)} \left[(1-\mu_p)\varepsilon_x + \mu_p\varepsilon_y \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E_p}{(1+\mu_p)(1-2\mu_p)} \left[\mu_p\varepsilon_x + (1-\mu_p)\varepsilon_y \right], \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_p}{2(1+\mu_p)} \gamma_{xy}.$$

При численном решении задачи необходимо учитывать, что имеется взаимная зависимость между интенсивностью напряжений, интенсивностью деформаций и пластическим коэффициентом Пуассона (10):

– для плоской деформации

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \mu_p(1 - \mu_p)(\sigma_x + \sigma_y)^2}, \\ \varepsilon_i &= \frac{1}{(1 + \mu_p)} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2},\end{aligned}\quad (25)$$

– для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}, \\ \varepsilon_i &= \frac{1}{(1 + \mu_p)} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{\mu_p}{(1 - \mu_p)^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2}.\end{aligned}\quad (26)$$

Поэтому на каждом шаге по параметру прослеживания процесса нагружения t расчеты нужно выполнять итерационным методом с учетом зависимостей (25), (26) и (10).

Дифференцирование выражений (24) по параметру прослеживания t с учетом (20)-(22), (25), (26) приводит к тем же формулам (17), (23) для соотношений (1) в деформационной теории пластичности, которые существенно отличаются от аналогичных уравнений (14) для линейно-упругой задачи.

В общем случае сложного нагружения для решения задачи теории упругопластических процессов при плоской деформации в (1) следует подставлять общие формулы (17) с учетом экспериментально обоснованных аппроксимаций для функционалов пластичности N, P [1-6].

Литература

1. Зубчанинов В.Г., Субботин С.Л. Предел устойчивости сжатых пластин за пределом упругости при ползучести / Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Вып. 64. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2002. – С. 10-14.
2. Субботин С.Л. Реализация современной концепции устойчивости за пределом упругости в условиях ползучести / Известия Тульского государственного университета. Серия Строительные материалы, конструкции и сооружения. Вып. 6. – Тула, 2004. – С. 164-173.
3. Субботин С.Л. Устойчивость процесса выпучивания при ползучести за пределом упругости пологой цилиндрической панели / Известия Тульского государственного университета. Серия Строительные материалы, конструкции и сооружения. Вып. 6. – Тула, 2004. – С. 174-180.
4. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.
5. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: 2000. – 704 с.
6. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

УДК 539. 374

О ПАРАМЕТРАХ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Н.Н. Тормахов

*Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко,
Киев, Украина, n.n.tormakhov@rambler.ru*

Аннотация. Введено понятие вида напряженного состояния как соотношения между главными напряжениями. Показано, что вид напряженного состояния однозначно характеризуется двумя параметрами, которые определяются через инварианты тензора напряжений и являются функциями углов зенита и азимута в сферической системе координат, ось которой равнонаклонена к осям координат в пространстве главных напряжений. Дан обзор и геометрическая интерпретация существующих параметров вида напряженного состояния.

Ключевые слова: вид напряженного состояния, главные напряжения, инвариант, тензор напряжений, зенит, азимут.

Введение

Одним из понятий, которые характеризует термин «вид напряженного состояния» (ВНС) является понятие размерности пространства главных напряжений. Если тензор напряжений содержит один, два или три главных ненулевых компонента, то такой ВНС называют, соответственно одноосным, плоским или объемным [8]. В работах [2, 7, 12, 14-17] было отмечено влияние первого инварианта тензора напряжений, а также ВНС на вязкопластические и предельные свойства материалов. Понятие ВНС, как размерности пространства главных напряжений не дает количественной оценки ВНС, необходимой для описания вязкопластических свойств и предельного состояния материалов с помощью уравнений состояния. В работах [1, 5-7, 9, 10, 12, 14, 16 и др.] были предложены различные параметры, дающие количественную характеристику ВНС. В данной работе дан обзор и геометрическая интерпретация существующих параметров ВНС.

1. Цель исследования

Целью данного исследования является изучение известных параметров ВНС, которые должны однозначно количественно характеризовать напряженное состояние в элементе тела и применяться в уравнениях состояния, описывающих процессы вязкопластического деформирования и предельное состояние материалов.

2. Количество параметров ВНС

Рассмотрим процесс нагружения элемента тела, в котором главные компоненты тензора напряжений σ_i ($i=1, 2, 3$), изменяются пропорционально коэффициенту k , знак которого не меняется:

$$\sigma_i = k \tilde{\sigma}_i, \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}_i$ - главные компоненты некоторого фиксированного тензора. Если в процессе нагружения элемента тела все компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально, то такие ВНС как одноосное растяжение, сжатие или чистый сдвиг останутся, соответственно, одноосным растяжением, сжатием, или чистым сдвигом. Руководствуясь методом индукции, и поскольку противоположное не наблюдается, мы можем заключить, что при пропорциональном нагружении ВНС элемента тела не меняется. При пропорциональном нагружении отношения между главными напряжениями остаются постоянными и равными отношениям между главными напряжениями тензора $\tilde{\sigma}$. Из этого можно сделать вывод, что ВНС характеризуется не величиной главных напряжений, а отношениями между ними, и для того, чтобы охарактеризовать ВНС, надо задать эти отношения.

Предположим, что n_{12} , n_{23} , n_{31} являются отношениями главных значений тензора напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 :

$$n_{12} = \sigma_1 / \sigma_2, \quad n_{23} = \sigma_2 / \sigma_3, \quad n_{31} = \sigma_3 / \sigma_1. \quad (2)$$

Произведение, соответственно, правых и левых частей равенств (2) дает $n_{12} n_{23} n_{31} = 1$. Следовательно, величины n_{12} , n_{23} , n_{31} являются зависимыми и для однозначного определения ВНС достаточно задать два отношения между главными напряжениями или два отношения между инвариантами тензора напряжений.

Этот вывод можно проиллюстрировать следующим образом. Процесс пропорционального нагружения в пространстве главных напряжений можно представить лучом, выходящим из начала координат. Каждой точке такого луча соответствует определенный, общий для этого луча ВНС. Положение луча, выходящего из начала координат в пространстве главных напряжений однозначно определяется двумя координатами - углами зенита ϑ и азимута φ в сферической системе координат $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$. Следовательно, координаты ϑ и φ или их функции могут служить параметрами ВНС.

Эксперименты над изотропными материалами показывают, что предельные поверхности пластичности и разрушения имеют вид фигур, симметричных относительно главной диагонали пространства главных напряжений [7]. Поэтому уравнения, описывающие процессы вязкопластического деформирования и предельное состояние материалов, проще описывать в системе координат $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$, ось ρ которой совпадает с главной диагональю пространства главных напряжений.

3. Требования к параметрам ВНС

Из того, что в процессах пропорционального нагружения ВНС не меняется, следует требование постоянства параметра ВНС в таких процессах. Чтобы уравнения, описывающие вязкопластическое деформирование и предельное состояние материалов не зависели от выбора системы координат, параметры ВНС должны вычисляться через инварианты тензора напряжений.

4. Инварианты тензора напряжений

Эксперименты с материалами за пределами упругости показывают, что свойства материалов при всестороннем растяжении-сжатии и при формоизменении значительно отличаются. Поэтому при описании поведения материалов за пределами упругости компоненты тензора напряжений σ_{ij} разделяют на шаровую $\sigma_0 \delta_{ij}$ и девиаторную s_{ij} составляющие:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \sigma_{ii} / 3. \quad (3)$$

При описании поведения материалов за пределами упругости в уравнениях состояния используют инвариант шарового тензора напряжений $I_1(\sigma) = 3\sigma_0$, а так же инварианты девиатора напряжений $I_2(D_\sigma) = 0,5s_{ij}s_{ij}$ и $I_3(D_\sigma) = |s_{ij}|$. Вместо второго инварианта девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$ чаще применяют интенсивность касательных напряжений S , которая имеет размерность напряжений в первой степени и выражается через главные напряжения следующим образом:

$$S = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 6}. \quad (4)$$

Хотя интенсивность касательных напряжений S является основным фактором, который вызывает деформирование и разрушение материалов [3, 4], эксперименты [2, 7, 12, 14-17] показывают также влияние на эти процессы инвариантов σ_0 и $I_3(D_\sigma)$. При вычислении параметров ВНС, как и в уравнениях состояния, используются инварианты σ_0 , S , $I_3(D_\sigma)$.

5. Параметры ВНС

Поскольку величины инвариантов σ_0 , S , $I_3(D_\sigma)$ в процессах пропорционального нагружения изменяются, то в качестве параметров ВНС используют их функции. В табл. 1 представлены некоторые известные в литературе параметры ВНС, которые отвечают требованиям п. 3.

Параметры K и η (см. вторую и третью строки табл. 1) определяются через инварианты σ_0 , S , и характеризуют объёмную составляющую тензора напряжений. Эти параметры принимают значения в интервале $(-\infty, +\infty)$ и связаны между собой соотношением $\eta = 1 - \sqrt{3}K$.

Особенностью параметра η является то, что при одноосном растяжении он равен нулю. В англоязычной литературе [15, 17, 18] параметр K называют термином «stress triaxiality».

Параметры λ_σ , ω_σ , ξ_σ , ψ_σ , μ_σ определяются через инварианты девиатора напряжений и характеризуют его вид. Параметр λ_σ носит название параметра Лоде и был введен для изучения влияния среднего по величине главного напряжения σ_2 (где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) на пластические свойства металлов [14].

В работе [9] было предложено тригонометрическое представление главных значений тензора напряжений через инварианты σ_0 , S и вспомогательный угол ω_σ . В работе [8] угол ω_σ был назван «углом вида напряженного состояния». В англоязычной литературе параметр ω_σ назван термином «Lode angle» [15, 17, 18].

При одноосном растяжении (ВНС I) и одноосном сжатии (ВНС II), которые представлены во втором и третьем столбцах табл. 1 параметры λ_σ , μ_σ , ω_σ , ξ_σ , ψ_σ принимают свои предельные значения. Параметры вида девиатора напряжений λ_σ , ω_σ , ξ_σ , ψ_σ , μ_σ для чистого сдвига (ВНС III) и трехосного растяжения (ВНС IV) равны, так как для этих напряженных состояний равны главные значения девиатора напряжений при различной величине шарового тензора σ_0 : $s_1 = -s_3 = \sigma$, $s_2 = 0$.

Таблица 1. Параметры ВНС

Параметр ВНС	Значение параметров для различных ВНС, $\sigma > 0$					
	I. Одноосн. растяжен. $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$.	II. Одноосн. сжатие $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$.	III. Чистый сдвиг $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$	IV. Трёхосн. растяж. $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$, $\sigma_3 = \sigma$.	V. Трёхосн. сжатие $\sigma_1 = -3\sigma$, $\sigma_2 = -4\sigma$, $\sigma_3 = -\sigma$.	
$K = \sigma_0 / S$, [14]	0,58	-0,58	0	2	-1,75	
$\eta = 1 - \sqrt{3}\sigma_0 / S$ [12]	0	2	1	-2,46	4,02	
$\lambda_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1$ [16]	-1	1	0	0	-0,33	
$\mu_\sigma = \frac{3\sqrt{3} I_3(D_\sigma)}{2 S^3}$, [1]	1	-1	0	0	0,0016	
$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{3\sqrt{3} I_3(D_\sigma)}{2 S^3} \right]$, рад, [10]	0,33 π	0	0,17 π	0,17 π	0,52 π	
$\xi_\sigma = \frac{1}{3} \arcsin \left[\frac{3\sqrt{3} I_3(D_\sigma)}{2 S^3} \right]$, рад, [6]	0,17 π	-0,17 π	0	0	0,00052 π	
$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3} I_3(D_\sigma)}{2 S^3} \right]$, рад, [5]	0	0,33 π	0,17 π	0,17 π	0,52 π	
Углы между векторами \vec{e}'_i и касательным напряжением $\vec{\tau}$, рад.	φ_1	0	0,33 π	0,17 π	0,17 π	0,56 π
	φ_2	0,67 π	0,33 π	0,5 π	0,5 π	0,77 π
	φ_3	0,67 π	π	0,83 π	0,83 π	0,11 π
Координата φ вектора $\vec{\tau}$, рад	0	0,33 π	0,17 π	0,17 π	1,44 π	

Параметры формоизменения λ_σ , μ_σ , ξ_σ , ψ_σ , ω_σ связаны с ω_σ зависимостями [7, 10, 13]

$$\lambda_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}), \quad \mu_\sigma = -\cos 3\omega_\sigma, \quad \xi_\sigma = \pi/6 - \omega_\sigma, \quad \psi_\sigma = \pi/3 - \omega_\sigma. \quad (5)$$

6. Геометрическая интерпретация параметров ВНС

Если орты \vec{e}_i ($i=1,2,3$) декартовой системы координат направлены вдоль осей главных напряжений σ_i , а ось ρ сферической системы координат $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$ совпадает с главной диагональю пространства главных напряжений (см. рис. 1а), то единичный вектор \vec{n} , коллинеарный оси ρ , можно представить в следующем виде:

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_i. \quad (6)$$

Вектор октаэдрического напряжения \vec{P} на девиаторной плоскости будет равен [7]:

$$\vec{P} = P_i \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i \vec{e}_i. \quad (7)$$

Координата ρ_P вектора октаэдрического напряжения \vec{P} в системе $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$

$$\rho_P = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_i n_i = \sigma_0 \quad (8)$$

равна компонентам шарового тензора σ_0 . Найдем проекцию $\vec{\tau}$ вектора \vec{P} на девиаторную плоскость и его модуль [11]:

$$\vec{\tau} = \vec{n} \times (\vec{P} \times \vec{n}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} (2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k) \vec{e}_i, \quad (i \neq j \neq k \neq i), \quad (9)$$

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{0.5}. \quad (10)$$

Сравнивая выражения (4) и (10) можно видеть, что октаэдрическое касательное напряжение с точностью до коэффициента равно интенсивности касательного напряжения

$|\vec{\tau}| = \sqrt{\frac{2}{3}} S$. Так как $\frac{\sigma_0}{|\vec{\tau}|} = ctg \vartheta$, то между величинами параметров K , η и координатой ϑ

вектора октаэдрического напряжения \vec{P} в системе координат $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$ существует зависимость:

$$K = \sqrt{1,5} ctg \vartheta, \quad \eta = 1 - 1,5 \sqrt{2} ctg \vartheta. \quad (11)$$

Определим ориентацию вектора $\vec{\tau}$ относительно проекций \vec{e}'_i ортов \vec{e}_i на девиаторную плоскость. Вектора \vec{e}'_i и их модули равны [11]:

$$\vec{e}'_i = \vec{n} \times (\vec{e}_i \times \vec{n}) = \frac{1}{3} (2\vec{e}_i - \vec{e}_j - \vec{e}_k), \quad (i \neq j \neq k \neq i), \quad |\vec{e}'_i| = \sqrt{2/3}. \quad (12)$$

Углы φ_i ($i=1,2,3$) между векторами \vec{e}'_i и $\vec{\tau}$ определяются выражением [11]:

$$\varphi_i = \arccos \frac{\vec{e}'_i \cdot \vec{\tau}}{|\vec{e}'_i| |\vec{\tau}|} = \arccos \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{2\sqrt{3}S}, \quad (i \neq j \neq k \neq i). \quad (13)$$

В табл. 1 представлены величины углов φ_i , вычисленные по формуле (13) для ВНС, обозначенных римскими цифрами I, II, III, IV, V. При одноосном растяжении (ВНС I) вектор $\vec{\tau}$ совпадает с проекцией \vec{e}'_1 , а при одноосном сжатии (ВНС II) – с отрицательным направлением вектора \vec{e}'_3 . При чистом сдвиге (ВНС III) и трехосном растяжении (ВНС IV) вектор $\vec{\tau}$ коллинеарен биссектрисе векторов \vec{e}'_1 и $(-\vec{e}'_3)$. В последней строке табл.1 даны величины углов азимута φ , рассчитанные с использованием (13) для ВНС I, II, III, IV, V. Азимут φ отсчитывался от вектора \vec{e}'_1 против часовой стрелки (см. рис. 1б). Для ВНС I, II, III, IV, для которых выдерживается соотношение $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, вектора касательного октаэдрического напряжения $\vec{\tau}$ находятся в интервале $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ по φ . Для соотношений между главными напряжениями отличных от $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, вектор касательных напряжений находится по φ в

интервале $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$, а величины параметров $\lambda_\sigma, \mu_\sigma, \omega_\sigma, \xi_\sigma, \psi_\sigma$ циклически повторяются с периодом равным $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 1б). В случае одноосного сжатия вдоль оси σ_2 (соотношение $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$) вектор $\vec{\tau}$ будет располагаться под углом $\varphi = \frac{5}{3}\pi$, а для трехосного сжатия (ВНС V, табл.1), для соотношения $\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$, вектор $\vec{\tau}$ будет направлен под углом $\varphi = 1,44\pi$.

Сопоставляя величины параметров $\omega_\sigma, \xi_\sigma, \psi_\sigma$ и координаты по азимуту φ для ВНС I, II, III, IV, представленных в табл. 1 и рис. 1, можно заметить, что при $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ между этими величинами и углом φ существуют зависимости:

$$\omega_\sigma = \pi/3 - \varphi, \xi_\sigma = \pi/6 - \varphi, \psi_\sigma = \varphi. \quad (14)$$

Параметры $\omega_\sigma, \xi_\sigma, \psi_\sigma$ отличаются направлением их отсчета и лучом, от которого делается этот отсчет. Параметры ω_σ и ξ_σ откладываются по часовой стрелке, соответственно, от отрицательного направления вектора $(-\vec{e}'_3)$ и от биссектрисы между векторами \vec{e}'_1 и $(-\vec{e}'_3)$. Параметр ψ_σ откладывается против часовой стрелки от вектора \vec{e}'_1 .

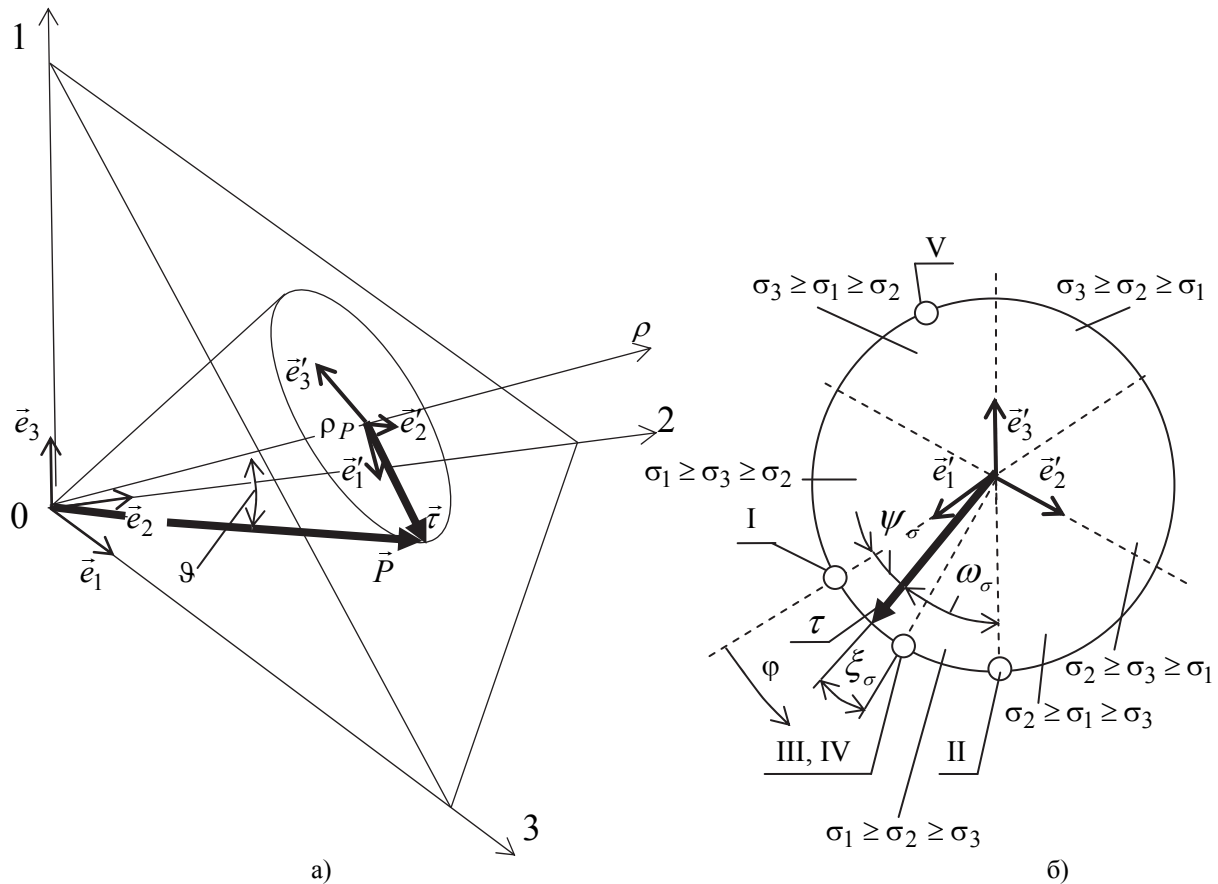


Рис. 1. Геометрическая интерпретация параметров ВНС

Параметры $\lambda_\sigma, \mu_\sigma$ с учетом (5) связаны с углом азимута φ следующими зависимостями:

$$\lambda_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \mu_\sigma = -\cos 3\varphi, \quad (15)$$

Таким образом, параметры ВНС $\lambda_\sigma, \mu_\sigma, \omega_\sigma, \xi_\sigma, \psi_\sigma$ являются функцией координаты азимута φ октаэдрического напряжения в сферической системе координат $\{0; \rho, \vartheta, \varphi\}$ и характеризуют положение октаэдрического касательного напряжения в девиаторной плоскости.

Выводы

ВНС характеризуется отношениями между главными напряжениями и остается постоянным в процессе пропорционального нагружения. ВНС однозначно характеризуется двумя параметрами, которые определяют через инварианты шарового тензора и девиатора напряжений. Эти инварианты являются функциями координат вектора октаэдрического напряжения в сферической системе координат, ось которой совпадает с главной диагональю пространства главных напряжений. Параметры ВНС являются функциями координат зенита и азимута октаэдрического напряжения в этой сферической системе координат. Угол зенита характеризует объемную составляющую тензора напряжений, а угол азимута - вид девиатора напряжений. При одноосном растяжении вектор октаэдрического касательного напряжения совпадает с проекцией на девиаторную плоскость максимального главного напряжения, при одноосном сжатии - с отрицательным направлением проекции минимального главного напряжения. Для остальных ВНС этот вектор занимает промежуточное положение.

Литература

1. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.
2. Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. Влияние высокого гидростатического давления на механические свойства металлов. М.: Изд. иностр. лит., 1955. – 444 с.
3. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Кн.3. Доклады и выступления. Тверь: ТвГТУ, 2006. – 400 с.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1978. – 287 с.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
6. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // Прикл. мат. и мех. – 1951. - 15, № 2. - С. - 183-194.
7. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. К.: Наук. думка. 1976. – 395 с.
8. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А.Биргер, Б.Ф.Шорр, Г.Б.Иосилевич. - М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
9. Смирнов-Аляев Г.А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. М.-Л.: Машгиз, 1949. – 248 с.
10. Соколовский В.В. Об одной форме представления компонент напряжения в теории пластичности // ДАН СССР. – 1948. – т. LXI, № 2.
11. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Корн Г., Корн Т. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984.
12. Тормахов Н.Н. О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений / Ред. ж. «Прикл. Мех.».- Киев, 1985. -39 с. – Деп. в ВИНТИ 12.11.85, №7899-В.
13. Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. Определяющие уравнения термопластичности с учетом третьего инварианта девиатора напряжений // Прикладная механика, 46, № 6, 2010 С. 3-16.
14. Ягн Ю.И., Виноградов И.Н. Влияние вида девиатора напряжений на сопротивление материалов пластическому деформированию. – Докл. АН СССР, 1954, 96, №3, С. 515-517.
15. Basaran M., Woelkerling S.D., Feucht M., Neukamm F., Weichert D. An Extension of the GISSMO Damage Model Based on Lode Angle Dependence // 9. LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2010.
16. Lode, W. (1926). Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Zeitung Phys., vol. 36, pp. 913–939.
17. Mirone G., Keshawarz A., Ghajar R. Triaxiality Factor and Lode Angle Effects on Fracture of X-100 Steel Considering Plastic Anisotropy // Int. J. Advanced Design and Manufacturing Technology, 2012, Vol. 5, No. 4, pp. 27-31.
18. Wierzbicki, T., Bao, Y., Lee, Y. W. and Bai, Y., Calibration and evaluation of seven fracture models// Int. J. of Mech. Sciences, Vol. 47, 2005, pp. 719-743.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС КОМПОЗИТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ КИНЕТИКИ АГРЕССИВНЫХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СРЕД

А.А. Трещев, А.В. Башкатов

Тульский государственный университет, Тула, Россия,
 таа58@yandex.ru, a.bashkatov90@mail.ru

Аннотация. Рассматривается построение математической модели деформирования железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды. Производится выбор наименее противоречивой модели для определения НДС железобетонных конструкций. Приводятся инкрементальные уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций. Показаны результаты расчета железобетонной плиты с полимербетонным слоем из эпоксидного бетона с учетом разносопротивляемости и кинетики агрессивной среды - 20 % водного раствора NaCl.

Ключевые слова: слоистые армированные конструкции, разносопротивляемость, кинетика агрессивной среды, гибридные конечные элементы, инкрементальные уравнения изгиба.

Проблема обеспечения долговечности и безопасности при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов фортификационных сооружений, промышленных предприятий и транспортных сетей является одной из важнейших сторон деятельности научно-исследовательских и проектных организаций во многих развитых странах мира. В России она входит в число приоритетных направлений научных исследований государственной Российской академии архитектуры и строительных наук.

Железобетон, как конструкционный материал позволяет создавать достаточно сложные конструктивные схемы, однако данного вида конструкции подвержены комплексу внешних воздействий, снижающих их работоспособность.

Агрессивные эксплуатационные среды являются одним из основных негативных факторов, влияющих на работоспособность инженерных сооружений из железобетона. Наиболее распространенной является хлоридсодержащая среда, основными источниками которой являются: хлоридсодержащие средства-антиобледенители; морская вода и солевой туман, которые контактируют с поверхностью армированных конструкций, технологические хлоридсодержащие среды.

Однако, теория расчета конструкций, подверженных коррозии, только начинает разрабатываться и потому существующие различные методики расчета конструкций, работающих в агрессивных средах, имеют частный характер, так как основываются на выведенных авторами формулах с коэффициентами, определяемыми на основе опытных данных, что не всегда позволяет получить достоверный результат. Таким образом, на сегодняшний день интерес представляет создание более общей теории расчета подобных конструкций. Решение этой задачи ставилось основной целью авторов и является неременным условием для проектирования оптимальных и надежных инженерных конструкций.

Построение математической модели и определение деформированного состояния приводится для слоистой армированной плиты с полимербетонным слоем эксплуатируемой под действием агрессивной среды (см. рис. 1).

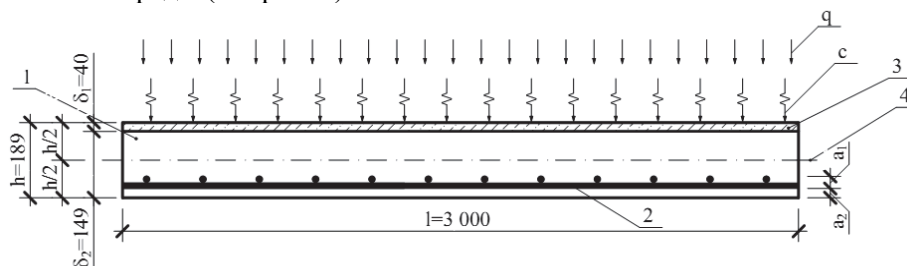


Рис. 1. Схема рассматриваемой плиты

На рис. 1 обозначено: 1 – железобетонный слой плиты, 2 – армирование плиты, 3 – полимербетонный слой, 4 – срединная поверхность, q – равномерно распределенная нагрузка, c – агрессивная среда, δ_1 – толщина полимербетонного слоя, δ_2 – толщина железобетонного слоя, h – полная толщина плиты, a_1 – толщина армированного слоя, a_2 – толщина защитного слоя бетона для арматурной сетки.

Решать подобную задачу предложено используя модификацию гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле и матрицей жесткости, полученной непосредственно для произвольного плоского треугольного элемента [3].

Используя матрицу некоторых функций от координат точки элемента – $[P]$ и вектор коэффициентов, требующих определения $\{\beta\}$ при построении матрицы жесткости конечного элемента получаем следующее выражение для вектора обобщенных сил:

$$\{M\} = [P]\{\beta\}. \quad (1)$$

Следовательно, вектор обобщенных деформаций будет иметь вид:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\}, \quad (2)$$

где $[E]$ – матрица податливости. Учитывая, что матрица податливости представляет собой интеграл по толщине плиты, приходим к выражению для энергии деформации по объему КЭ как интеграл по его площади:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (3)$$

Т. Пианом [5] показано, что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида:

$$\Pi = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right), \quad (4)$$

где V_n – граница объема элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением:

$$\{t\} = [L]\{q\}. \quad (5)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения (4):

$$\{\Phi\} = [R]\{\beta\}, \quad (6)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента, $[L]$ – матрица связи узловых и граничных перемещений.

Подставив выражения (1), (3), (5), (6) в уравнение (4), получаем функционал вида:

$$\Pi = \sum_n \left(\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (7)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (8)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (9)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (10)$$

После определения вариаций функционала (7) по параметрам $\{\beta\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации нулю, можно получить выражение вида:

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (11)$$

из которого выделяется матрица жесткости элемента

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (12)$$

При определении вариации функционала (7) по неизвестным коэффициентам $\{\beta\}$ устанавливается связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (13)$$

Подставляя зависимости (13) в соотношения (1), получаем следующие равенство:

$$\{M\} = [P][H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (14)$$

Таким образом, после вычисления узловых перемещений вектор обобщенных сил $\{M\}$ определен.

Представим вектор обобщенных сил через неизвестные коэффициенты $\{\beta\}$ в виде:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; & M_{22} &= \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; & M_{12} &= \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \\ Q_1 &= \beta_4 + \beta_{11}; & Q_2 &= \beta_5 + \beta_{12}; & N_{11} &= \beta_6; & N_{22} &= \beta_7; & N_{12} &= \beta_8. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя уравнение (1) получаем матрицу $[P]$ функций $M_{11} \dots N_{12}$ от координат точки элемента.

Вектор β при этом имеет вид:

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}\}^T \quad (16)$$

Подставляя матрицу $[P]$ в соотношение (8) и учитывая известные выражения для интегралов по площади треугольника, получим выражения для элементов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$.

Из условия равновесия элементарного схемы треугольного конечного элемента получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11} C_{ij} + M_{12} S_{ij}; & \bar{M}_{22} &= -M_{22} S_{ij} - M_{12} C_{ij}; & \bar{N}_{11} &= N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}; \\ \bar{N}_{22} &= N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}; & \bar{Q} &= Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}; & C_{ij} &= \cos \varphi_{ij}; & S_{ij} &= \sin \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом зависимостей (17), определим работу распределенных вдоль стороны $i-j$ сил и моментов следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}) w - (M_{12} C_{ij} + M_{22} S_{ij}) \psi_1 + (M_{12} S_{ij} + M_{11} C_{ij}) \psi_2 + \\ &+ (N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}) u_1 + (N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}) u_2] d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\xi = l / L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i-j$.

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного КЭ, определяется суммой:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (19)$$

Если задать вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента в следующем виде:

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T, \quad (20)$$

то получаем вектор узловых перемещений всего КЭ:

$$\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T. \quad (21)$$

Аппроксимацию граничных перемещений в зависимости от узловых перемещений примем в следующей форме:

$$\begin{aligned} w &= [(1-\xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij} \xi (1-\xi) (\theta_i - \theta_j) / 2; \\ \psi_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; & \psi_2 &= [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; & u_2 &= [(1-\xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\}; \end{aligned} \quad (22)$$

где $\theta_i = \psi_{1i}c_{ij} + \psi_{2i}S_{ij}$; $\theta_j = \psi_{1j}c_{ij} + \psi_{2j}S_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i - j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i - j$ через координаты узлов в виде:

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij}\xi S_{ij}; x_2 = x_{2i} + L_{ij}\xi c_{ij}; \quad (23)$$

Используя зависимости (15), (18), (22), (23) и подставляя их в уравнение (19), учитывая при этом аппроксимации (21) и выделяя векторы $\{\beta\}^T, \{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$ размера 12×15 .

Задачи изгиба железобетонных плит, независимо от геометрической конфигурации, будем рассматривать в условиях активной деформации и простого нагружения, при этом будет использоваться потенциал деформаций, представленный в работе А.А. Трещева [4]:

$$W_1 = (A_e + B_e\xi)\sigma^2 + (C_e + D_e\xi + E_e\eta\cos 3\varphi)\tau^2 + \\ + \left[(A_p + B_p\xi)\sigma^2 + (C_p + D_p\xi + E_p\eta\cos 3\varphi)\tau^2 \right]^n \quad (24)$$

где A_e, B_e, C_e, D_e, E_e и A_p, B_p, C_p, D_p, E_p – константы потенциала, ξ, η – нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке, σ и τ – нормальные и касательные напряжения, φ – фаза напряжений; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $\xi = \frac{\sigma}{S_0}$; $\eta = \frac{\tau}{S_0}$;

$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2} \det(S_{ij})}{\tau^3}$; σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – симметричный тензор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера.

Деформации ползучести при кратковременном нагружении не учитываем. Размеры рассматриваемой плиты в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями, это позволяет пренебречь местными напряжениями в зоне контакта арматуры и бетона, а значит – распределить арматуру, представив ее в виде сплошного слоя. В качестве модели для стальной арматуры примем идеальное упругопластическое тело.

Для построения математической модели полимербетонного слоя за основу принимаем теорию малых упругих деформаций А.А. Ильюшина [1] применительно к механике сплошной среды. При построении инкрементальной модели изгиба, необходимо получить уравнения, связывающие приращения напряжений с приращениями деформаций.

Построением данных соотношений в своих работах занимался В.В. Петров [2], сами уравнения имеют вид (25), (26), (27):

$$\Delta\sigma_{11} = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{22} \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{22} \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (25)$$

$$\Delta\sigma_{22} = \frac{4}{3}E_k^* \left(\Delta\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{11} \right) + \frac{4}{3} \left(\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\varepsilon_{11} \right) \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (26)$$

$$\Delta\tau_{12} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{12} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{12} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta. \quad (27)$$

Однако, в рассматриваемой нами модели необходимо учитывать еще два касательных напряжения (28), (29):

$$\Delta\tau_{13} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{13} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{13} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta; \quad (28)$$

$$\Delta\tau_{23} = \frac{1}{3}E_k^* \Delta\gamma_{23} + \frac{1}{3} \Delta\gamma_{23} \frac{\partial E_c^*}{\partial [\delta(t)]} \Delta\delta, \quad (29)$$

где $\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}, \Delta\tau_{12}, \Delta\tau_{13}, \Delta\tau_{23}$ – приращения нормальных и касательных напряжений, вызванные приращением внешних воздействий; $\Delta\varepsilon_{11}, \Delta\varepsilon_{22}, \Delta\gamma_{12}, \Delta\gamma_{13}, \Delta\gamma_{23}$ – приращение линейных и угловых деформаций, E_k^* – переменный касательный модуль с учетом действия

агрессивной среды, E_c^* – переменный секущий модуль, учитывающий уровень концентрации агрессивной среды, $\Delta\delta$ – приращение глубины проникания агрессивной среды.

Для апробации построенной модели использовалась плита, рассматривая в опытах В. Гелера и Х. Амоса, в сжатой зоне которой расположен полимербетонный слой из эпоксидного бетона, модуль упругости которого на основании нормативной литературы равен $E_b = 25500$ МПа. Толщина полимербетонного слоя - 0,04 м. Номер плиты по опытам В.Гелера и Х.Амоса – 711, размеры плиты в плане $3 \times 1,5 \times 0,149$ м, схема опирания – точечное по углам, коэффициенты армирования $\mu_{11} = 0,0137$, $\mu_{22} = 0,0092$, расстояние от верхней грани плиты до середины армированного слоя – 0,125 м. Модуль упругости арматурной стали был принят равным $E_s = 2 \times 10^5$ МПа. Нагрузка постоянна, равномерно распределенная $P = 40$ кПа. Агрессивная среда – 20% раствор NaCl, с плотностью $\rho = 1,219$ г/см³.

Полученные результаты расчетов приведены на рис. 2, 3.

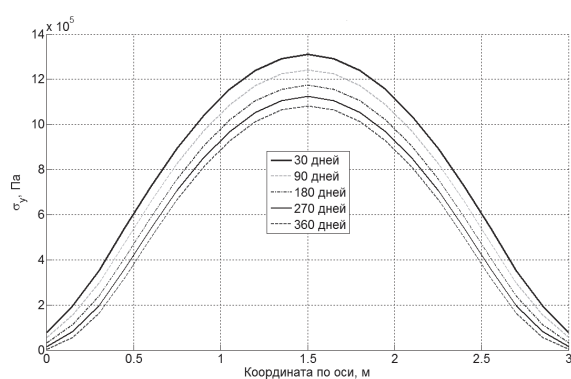


Рис. 2. Напряжения σ_y на нижней поверхности плиты по оси x .

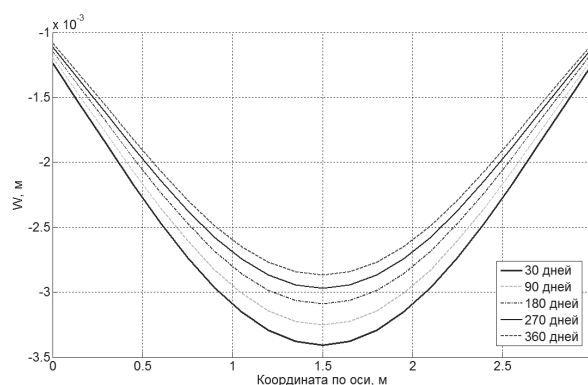


Рис. 3. Прогибы срединной плоскости вдоль длинной стороны плиты по оси центра тяжести.

Приведенные графики напряжений показывают наличие качественных эффектов, связанных с учетом разностойкости и чувствительности материала к виду напряженного состояния. Из графиков видно, что по мере увеличения концентрации агрессивной среды в материале происходит перераспределение напряжений в размере до 10-15%, что является критичным и недопустимым для ряда конструкций.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. / А.А. Ильюшин - М.: Гостехиздат, 1948. — 376с.
2. Петров В.В. Построение инкрементальных соотношений для физически нелинейного материала с развивающейся неоднородностью / В.В. Петров //Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред/ Саратов: Сарат. ун-т, 2005. С. 138-143.
3. Теличко В.Г. Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами./В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Известия вузов. Строительство. №5. 2003. – С. 17-23.
4. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. / А.А. Трещев – Тула: ТулГУ, 2008. – 264 с.
5. Pian T.T.H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution /T.T.Pian // AIAA Journal. - 1967. - Vol 5. - P. 1332-133.

УДК 539.384.6

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ СВЯЗАННЫЙ РАСЧЁТ КВАДРАТНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ГРАФИТА

А.А. Трещев, М.Ю. Делягин

*Тульский государственный университет, Тула, Россия,
taa58@yandex.ru, m.delyagin@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрен подход к построению модели объёмного четырёхузлового конечного элемента для решения задач связанной термоупругости существенно нелинейных разнородных материалов. Приводятся основные результаты расчёта квадратной в плане оболочки из графита АРВ. Оценивается влияние эффектов связанности полей напряжений и температур, нелинейности диаграмм деформирования и деформируемости расчётной схемы на НДС конструкции.

Ключевые слова: связанность, разнородность, нелинейность, метод конечных элементов, графит.

1. Построение математической модели

Внедрение в строительную практику новых высокоэффективных материалов должно быть подкреплено уточнёнными теоретическими моделями их деформирования. В исследованиях [1, 2, 3] отмечалось, что у графитов, композиционных материалов, керамики, чугунов проявляется зависимость деформационных, прочностных и теплофизических свойств от вида реализуемого в точке напряжённо-деформированного состояния. Матченко Н.М. и Трещёвым А.А. [2] были предложены квазилинейные определяющие соотношения, позволяющие учесть разнородность изотропных квазилинейных материалов и связанность полей напряжений и температур. При высоких уровнях напряжений, характерных для строительных конструкций, диаграммы деформирования имеют существенно нелинейный вид, что должно учитываться в математической модели. Для учёта усложнённых свойств материалов предлагается построить и применить новую форму термодинамического потенциала Гиббса:

$$\begin{aligned} \Gamma = & (A_e + B_e \cdot \xi) \cdot \sigma_0^2 + (C_e + D_e \cdot \xi + E_e \cdot \eta \cdot \cos(3\varphi)) \cdot \tau_0^2 + \\ & + \left[(A_e + B_e \cdot \xi) \cdot \sigma_0^2 + (C_e + D_e \cdot \xi + E_e \cdot \eta \cdot \cos(3\varphi)) \cdot \tau_0^2 \right]^n + \\ & + C_\sigma \cdot \frac{\theta^2}{T_0} + ((b_{t1} \cdot \xi + b_{t2}) \cdot \sigma_0 + b_{t1} \cdot \eta \cdot \tau_0) \cdot \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_e, B_e, C_e, D_e, E_e, A_p, B_p, C_p, D_p, E_p$ – механические константы потенциала; b_{t1}, b_{t2} – константы потенциала, связывающие поля напряжений и температур; $\xi = \cos \psi = \sigma/S_0$, $\eta = \sin \psi = \tau/S_0$ – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; $\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$ – средние нормальные напряжения; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; $S_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}$; $\tau_0 = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 3}$ – октаэдрические касательные напряжения; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$ – компоненты девиатора напряжений, C_σ – теплоемкость материала при постоянном давлении, $\cos 3\varphi$ – фазовый инвариант, $\theta = T - T_0$ – изменение температуры от начального ненапряжённого состояния; T – конечная температура в точке тела; T_0 – начальная температура в точке тела в ненапряжённом состоянии.

Система разрешающих уравнений МКЭ для связанной термоупругости в общем виде представляет собой следующее матричное уравнение [4]:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \dot{u} \} \\ \{ \dot{T} \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ u \} \\ \{ T \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ F \} \\ \{ Q \} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где $[C^{tu}] = -T_0 [K^{ut}]^T$ – элемент матрицы термоупругого затухания;
 $[K^{ut}] = -\iiint_{vol} [B]^T \{ \beta \} ([C]^T) dx \cdot dy \cdot dz$ – термоупругая составляющая матрицы жесткости;
 $\{ \beta \} = [D] \{ \alpha \}$, $\{ \alpha \}$ – столбец коэффициентов линейного теплового расширения материала по направлениям координатных осей, записанных с учётом зависимости от вида напряженного состояния, $\{ \alpha \} = \left\{ \frac{b_{t1} \xi \sigma_{11}}{3\sigma} + \frac{1}{3} b_{t2}, \frac{b_{t1} \xi \sigma_{22}}{3\sigma} + \frac{1}{3} b_{t2}, \frac{b_{t1} \xi \sigma_{33}}{3\sigma} + \frac{1}{3} b_{t2}, 0, 0, 0 \right\}^T$; $[C]$ – матрица интерполяционных функций; $[C^t] = \rho \iiint_{vol} C_\sigma \{ C \} \{ C \}^T dx \cdot dy \cdot dz$ – элемент матрицы температурного затухания; C_σ – теплоёмкость материала при постоянном давлении, $\{ \dot{u} \}$ – вектор скоростей изменения перемещений; $\{ \dot{T} \}$ – вектор скоростей изменения температур, в расчетах для аппроксимации производных по времени будем применять неявную разностную схему; $[K] = \iiint_{vol} [B]^T [D] [B] dx \cdot dy \cdot dz$ – матрица жесткости КЭ в виде тетраэдра при механическом нагружении; $[B]$ – матрица деформаций, $[D]$ – матрица упругости; $[K^t] = \iiint_{vol} [B_T]^T [D_T] [B_T] dx \cdot dy \cdot dz$ – элемент матрицы теплопроводности;

$$[B]_T = \{ L \} [C] [C]^T \{ T \}; \quad \{ L \} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}^T \quad \text{– вектор оператор; } [D_T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты теплопроводности материала по направлениям координатных осей; $\{ u \}$ – вектор перемещений; $\{ T \}$ – вектор температур; $\{ F \}$ – вектор узловых механических нагрузок; $\{ Q \}$ – вектор узловых температурных нагрузок.

Для учёта нелинейной разнсопротивляемости при вычислении матрицы $[K]$ используем матрицу упругости, полученную на основании предложенного термодинамического потенциала Гиббса (1):

$$[D_{ijkl}] = [A_{ijkl}]^{-1}. \quad (3)$$

2. Постановка задачи

С помощью модифицированного конечного элемента была рассчитана квадратная в плане оболочка положительной гауссовой кривизны жёстко заделанная по контуру. Размер в плане 1 м × 1 м, толщина 0.04 м, стрела подъёма оболочки 0.1 м, радиус кривизны нижней поверхности оболочки 2,55 м. На нижней поверхности температура повышалась на 20 К, на верхней понижалась на 30 К. Помимо перепада температур на прямоугольном участке верхней поверхности, расположенном с эксцентриситетом относительно оси симметрии оболочки, прикладывалась равномерно распределённая внешняя нагрузка интенсивностью от 0 до 400 кПа.

Проводилось сравнение результатов предложенной модели с результатами, полученными на основе квазилинейных определяющих соотношений Н.М. Матченко и А.А. Трещёва и классической термоупругости линейно упругих материалов с осреднёнными термомеханическими характеристиками.

Дополнительно оценивалось влияние на НДС оболочки деформируемости расчётной схемы в виде пошагового расчёта с пересчётом координат узлов на каждом шаге нагружения.

Рассматривалось пять моделей описания деформирования оболочки. Модель № 1 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для существенно нелинейной разносопротивляемости; модель № 2 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для квазилинейной разносопротивляемости Н.М. Матченко и А.А. Трещёва [2]; модель № 3 – расчёт по недеформируемой схеме для существенно нелинейной разносопротивляемости; модель № 4 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для линейной термоупругости с использованием осреднённых характеристик материала; модель № 5 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для существенно нелинейной разносопротивляемости без температуры.

В качестве материала применялся изотропный графит АРВ. Константы потенциала, необходимые для расчёта по трём физическим моделям [1, 2], представлены в таблице 1.

Таблица 1. Константы математических моделей

Константы потенциала	Нелинейные определяющие соотношения	Квазилинейные определяющие соотношения	Классическая линейная термоупругость
n	2.1	1	1
$A_e, \text{МПа}^{-1}$	$8.448 \cdot 10^{-5}$	$1.567 \cdot 10^{-4}$	$1.366 \cdot 10^{-4}$
$B_e, \text{МПа}^{-1}$	$5.991 \cdot 10^{-5}$	$4.052 \cdot 10^{-4}$	$3.871 \cdot 10^{-4}$
$C_e, \text{МПа}^{-1}$	$2.315 \cdot 10^{-4}$	$8.894 \cdot 10^{-5}$	0
$D_e, \text{МПа}^{-1}$	$7.425 \cdot 10^{-5}$	$1.345 \cdot 10^{-4}$	0
$E_e, \text{МПа}^{-1}$	$5.070 \cdot 10^{-6}$	$2.940 \cdot 10^{-5}$	0
$A_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1.704 \cdot 10^{-3}$	0	0
$B_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$3.488 \cdot 10^{-4}$	0	0
$C_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$8.681 \cdot 10^{-4}$	0	0
$D_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$8.444 \cdot 10^{-4}$	0	0
$E_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1.752 \cdot 10^{-4}$	0	0
$b_{t1}, 1/K$	$-1.732 \cdot 10^{-6}$	$-1.732 \cdot 10^{-6}$	0
$b_{t2}, 1/K$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$

3. Результаты расчётов

На рис. 1 и 2 представлены распределения нормальных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки.

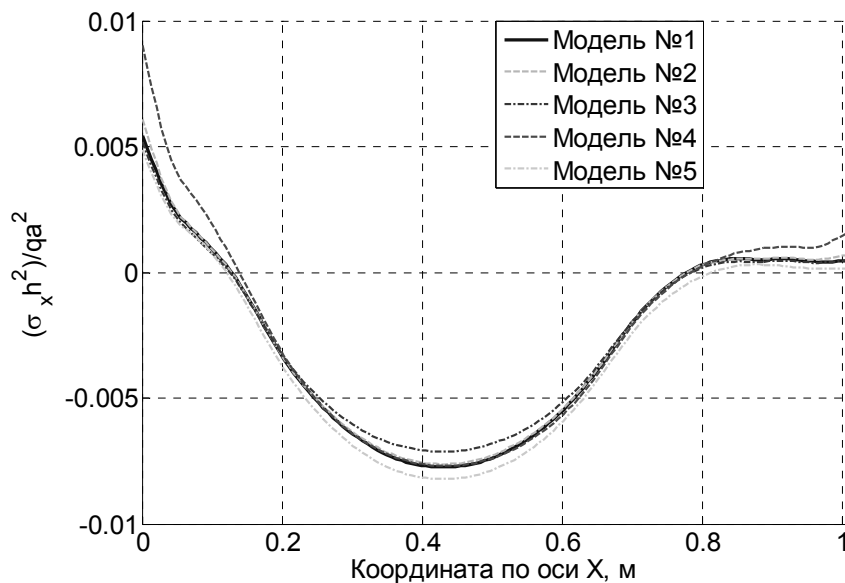


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений на верхней поверхности оболочки вдоль центральной оси

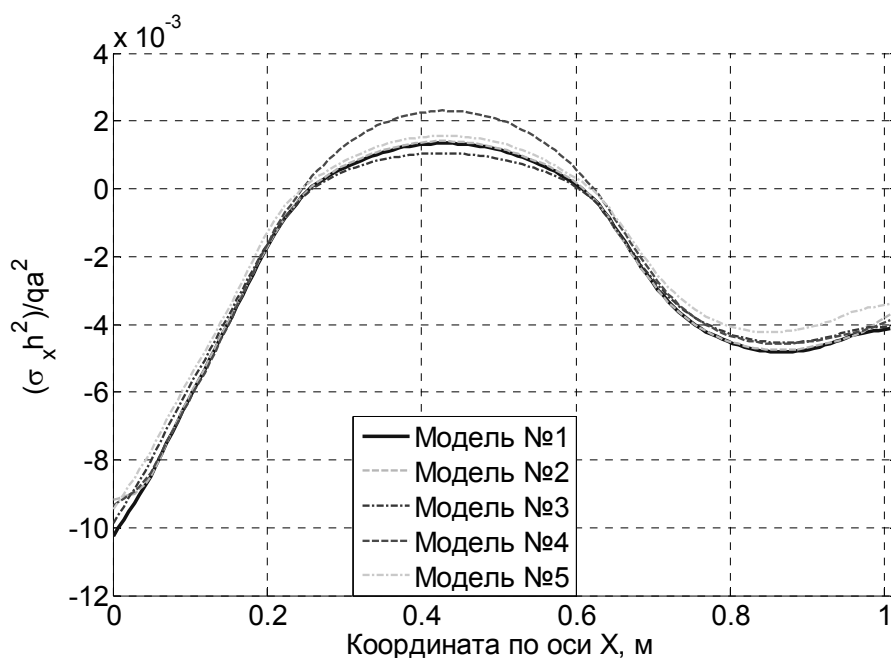


Рис.2. Распределение нормальных напряжений на нижней поверхности оболочки вдоль центральной оси

Наибольшие коррективы в величины нормальных напряжений вносит учёт эффекта разнотолщинности, на верхней поверхности поправки доходят до 40 %, на нижней – до 42 %. Расхождение между нелинейной и квазилинейной разнотолщинностью достигает 12 %. На величины нормальных напряжений существенное влияние также оказывает деформируемость расчётной схемы. Расхождение между моделями с пересчётом координат узлов и без пересчёта приближается к 24 % на нижней поверхности оболочки.

График распределения нормальных напряжений по толщине оболочки представлены на рисунке 3. Распределение имеет нелинейный характер. В зонах изменения знака напряжений наблюдается значительное изменение кривизны графиков.

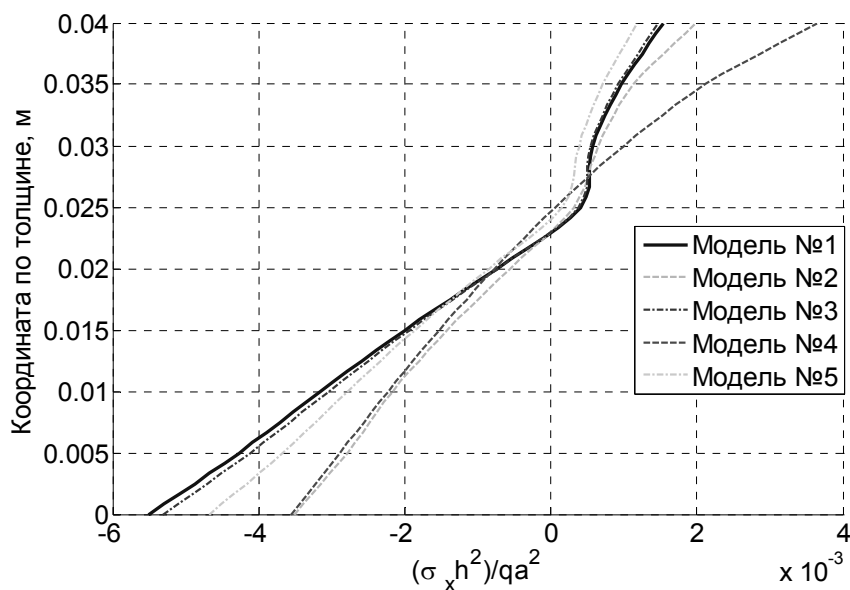


Рис. 3. Распределение напряжений по толщине в углу оболочки

Для оценки влияния напряжённого состояния на процесс теплопроводности сравнивались распределения температур по толщине оболочки в разные моменты времени для рассматриваемой термомеханической задачи и задачи теплопроводности при отсутствии внешней механической нагрузки. Распределения для $t = 1$ с представлены на рисунке 4. Прослеживается явное расхождение между графиками, причём напряжённое состояние замедляет процесс теплопроводности.

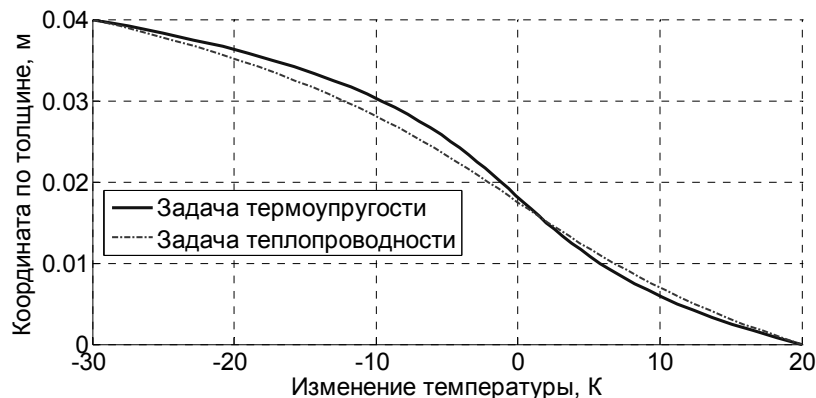


Рис. 4. Распределение температур по толщине оболочки в центре плана

3. Выводы

Основные численные результаты, заключаются в следующем: влияние связанности полей напряжений и температур достигает 12 % в величине нормальных напряжений; влияние существенно нелинейной разнсопротивляемости в сравнении с расчётом по уравнениям классической термоупругости достигает 28 % в величине прогибов, 33 % в величине горизонтальных перемещений, 46 % в величине нормальных напряжений; 15 % в величине касательных напряжений; влияние нелинейности определяющих соотношений в сравнении с квазилинейной разнсопротивляемостью Н.М. Матченко и А.А. Трещёва [2] не превосходит 26 %, влияние расчёта по деформированной схеме достигает 8 % по прогибам, 3 % по горизонтальным перемещениям, 26 % по нормальным напряжениям, 10 % касательным напряжениям.

Полученные результаты подтверждают, что учёт нелинейности диаграмм деформирования вносит значительные коррективы в напряжённо-деформированное состояние конструкций. Даже для графита АРВ, зависимости между напряжениями и деформациями которого близки к линейным [2, 3], при высоких нагрузках расхождения между квазилинейным и нелинейным расчётами составили 46 %. Внедрение уточнённых теорий расчёта позволит увеличить экономическую эффективность или повысить безопасность конструкций.

Литература

1. Hart, P.E. The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite / P.E. Hart // Carbon. 1972. Vol. 10. P. 233-236.
2. Матченко Н.М., Трещев А.А. Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости. М.: Тула: РААСН; ТулГУ, 2004. 211 с.
3. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. М.: Тула; РААСН; ТулГУ, 2008. 264 с.
4. ANSYS, Inc. Release 11.0 Documentation for ANSYS.

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

Д.В. Христич

Тульский государственный университет, Тула, Россия, dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация. Проведен анализ строения тензоров второго, четвертого и шестого рангов, описывающих тепловые и механические свойства квазикристаллов. Установлено, что линейно упругое поведение икосаэдрических квазикристаллов идентично поведению изотропных материалов, а упругое поведение аксиальных квазикристаллов в линейном приближении идентично реакции гексагональных и трансверсально-изотропных материалов. Показано, что учёт нелинейности упругих свойств аксиальных квазикристаллов позволяет установить их отличие от гексагональных материалов.

Ключевые слова: анизотропные материалы, аксиальные квазикристаллы, икосаэдрические квазикристаллы, термоупругие свойства.

1. Понятие о квазикристаллах

Многие деформируемые твердые тела имеют кристаллическую решетку, в узлах которой находятся атомы, ионы и молекулы. Кристаллы обладают трансляционной симметрией – возможностью построить всю кристаллическую решетку из одной элементарной ячейки путем ее перемещения в характерных для кристалла направлениях, – а также поворотной симметрией – свойством совмещаться с самим собой при повороте на некоторый определенный угол вокруг оси симметрии. Каждая ось симметрии характеризуется порядком оси n . Ось n -го порядка – это ось поворота на угол, кратный $2\pi/n$. Однако трансляционная симметрия кристаллов накладывает ограничения на значения порядков осей симметрии. Известно [1], что в кристаллах возможно наличие поворотных осей только 1, 2, 3, 4 и 6-го порядков.

В конце XX века были открыты материалы, которые не имеют периодической кристаллической структуры, но обладают дальним порядком аperiodического типа. Такие материалы называются квазикристаллами. Квазикристаллы не обладают трансляционной симметрией, поэтому могут иметь поворотные оси симметрии 5, 7, 8, 10-го и более высоких порядков [2-4], недопустимые для периодически упорядоченных кристаллов.

Целью настоящей работы является представление тензоров упругости квазикристаллов в простейшем (каноническом) виде, определение типа симметрии свойств, присущих квазикристаллам различных видов.

2. Подход к описанию симметрии свойств материалов

Для представления тензоров материальных свойств в простейшем виде используем подход [5, 6], состоящий в построении тензорных базисов, инвариантных относительно групп ортогональных преобразований, характеризующих симметрию физических свойств.

В качестве базисных тензоров второго ранга выберем тензоры обобщенного канонического базиса А.А. Ильюшина [7], построенные в главных осях анизотропии \vec{e}^i , $i=1,2,3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}^1\vec{e}^1 + \vec{e}^2\vec{e}^2 + \vec{e}^3\vec{e}^3); & \mathbf{I}^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}^3\vec{e}^3 - \vec{e}^1\vec{e}^1 - \vec{e}^2\vec{e}^2); & \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1\vec{e}^1 - \vec{e}^2\vec{e}^2); \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1\vec{e}^2 + \vec{e}^2\vec{e}^1); & \mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^2\vec{e}^3 + \vec{e}^3\vec{e}^2); & \mathbf{I}^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1\vec{e}^3 + \vec{e}^3\vec{e}^1). \end{aligned} \quad (1)$$

Тензорный базис (1) удовлетворяет условию $\mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{I}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$, на его основе строится базис полусимметричных тензоров четвертого ранга

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad (2)$$

который также является ортонормированным.

Любой симметричный ($A_{ij} = A_{ji}$) тензор второго ранга однозначно представляется разложением по базису (1) в виде

$$\mathbf{A} = A_{\alpha} \mathbf{I}^{\alpha}, \quad (3)$$

а полусимметричный ($C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$) тензор четвертого ранга – по базису (2) в виде

$$\mathbf{C} = C_{\alpha\beta} \mathbf{I}^{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Если при некотором преобразовании \mathbf{Q} системы координат для каких-либо базисных тензоров выполняются условия

$$(\mathbf{I}^{\alpha})' = \mathbf{I}^{\alpha}, \quad (\mathbf{I}^{\alpha\beta})' = \mathbf{I}^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

то они называются инвариантными относительно преобразования \mathbf{Q} .

В случае, когда \mathbf{Q} входит в группу симметрии некоторого физического свойства, характеризующие это свойство тензоры содержат в своих разложениях (3) или (4) только инвариантные базисные тензоры.

3. Термоупругие свойства икосаэдрических квазикристаллов

Выберем в икосаэдре декартову прямоугольную систему координат так, что базисный вектор \bar{e}^3 определяет направление поворотной оси симметрии пятого порядка, базисный вектор \bar{e}^1 лежит в плоскости, содержащей оси пятого и третьего порядков, базисный вектор \bar{e}^2 перпендикулярен этой плоскости. В этом случае порождающими элементами группы симметрии икосаэдрического квазикристалла являются поворот вокруг оси \bar{e}^3 на угол $2\pi/5$

$$\mathbf{Q}_3^{\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \cos \frac{2\pi}{5} (\bar{e}^1 \bar{e}^1 + \bar{e}^2 \bar{e}^2) + \sin \frac{2\pi}{5} (\bar{e}^1 \bar{e}^2 - \bar{e}^2 \bar{e}^1) + \bar{e}^3 \bar{e}^3 \quad (6)$$

и поворот

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_3^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad (7)$$

где тензор $\mathbf{R} = \cos \alpha (\bar{e}^1 \bar{e}^1 + \bar{e}^3 \bar{e}^3) + \sin \alpha (\bar{e}^1 \bar{e}^3 - \bar{e}^3 \bar{e}^1) + \bar{e}^2 \bar{e}^2$ задаёт ориентацию оси третьего порядка относительно выбранной декартовой системы координат, причём угол α определяется

из геометрических соображений так, что $\cos \alpha = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}$, а тензор

$$\mathbf{R}_3^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} (\bar{e}^1 \bar{e}^1 + \bar{e}^2 \bar{e}^2) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{e}^1 \bar{e}^2 - \bar{e}^2 \bar{e}^1) + \bar{e}^3 \bar{e}^3$$

задаёт поворот на угол $2\pi/3$ вокруг поворотной оси третьего порядка.

Инвариантными относительно преобразований (6) и (7) являются базисный тензор второго ранга \mathbf{I}^0 , базисный тензор четвёртого ранга \mathbf{I}^{00} и линейная комбинация тензоров $\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}$. Канонические представления тензоров \mathbf{A} и \mathbf{C} для икосаэдрических квазикристаллов записываются в виде $\mathbf{A} = \alpha_0 \mathbf{I}^0$, $\mathbf{C} = c_{00} \mathbf{I}^{00} + (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55})$ и совпадают с каноническими представлениями этих тензоров для изотропного материала [8]. Таким образом, икосаэдрические квазикристаллы в отношении термоупругих свойств ведут себя как изотропные материалы. Этот вывод полностью соответствует опубликованному в статье [9] экспериментальному подтверждению изотропии икосаэдрических квазикристаллов в отношении упругих свойств, полученному методами резонансной ультразвуковой спектроскопии.

4. Термоупругие свойства аксиальных квазикристаллов

Аксиальные квазикристаллы имеют одну поворотную ось симметрии порядка $n=5$ или $n>6$. В плоскостях, перпендикулярных оси симметрии, атомы расположены квазипериодически. Квазипериодические плоскости упакованы периодическим образом вдоль оси симметрии. Элементами симметрии аксиальных квазикристаллов являются поворотная ось симметрии порядка n , совпадающая с направлением вектора \bar{e}^3 , и плоскость симметрии, перпендикулярная этой оси. Порождающими элементами группы симметрии такого квазикристалла являются ортогональный тензор поворота

$$\mathbf{Q}_3^{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = \cos \frac{2\pi}{n} (\bar{e}^1 \bar{e}^1 + \bar{e}^2 \bar{e}^2) + \sin \frac{2\pi}{n} (\bar{e}^1 \bar{e}^2 - \bar{e}^2 \bar{e}^1) + \bar{e}^3 \bar{e}^3 \quad (8)$$

и ортогональный тензор, задающий отражение относительно плоскости симметрии,

$$\mathbf{Q}_\perp = \bar{e}^1 \bar{e}^1 + \bar{e}^2 \bar{e}^2 - \bar{e}^3 \bar{e}^3. \quad (9)$$

Для аксиальных квазикристаллов при любом значении $n = 5$ или $n > 6$ инвариантными относительно обоих преобразований (8), (9) являются базисные тензоры второго ранга \mathbf{I}^0 , \mathbf{I}^1 и тензоры четвёртого ранга \mathbf{I}^{00} , \mathbf{I}^{01} , \mathbf{I}^{11} , а также линейные комбинации базисных тензоров $\mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33}$, $\mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}$. Канонические представления тензоров \mathbf{A} и \mathbf{C} для квазикристалла, имеющего поворотную ось пятого порядка и перпендикулярную ей плоскость симметрии, записываются в виде $\mathbf{A} = \alpha_0 \mathbf{I}^0 + \alpha_1 \mathbf{I}^1$, $\mathbf{C} = c_{00} \mathbf{I}^{00} + c_{01} \mathbf{I}^{01} + c_{11} \mathbf{I}^{11} + c_{22} (\mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33}) + c_{44} (\mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55})$.

Разложения тензоров \mathbf{A} и \mathbf{C} по каноническому тензорному базису совпадают с каноническими представлениями этих тензоров для гексагонального материала [8]. Это значит, что в отношении термоупругих свойств аксиальные квазикристаллы ведут себя как кристаллы, относящиеся к гексагональной сингонии, или трансверсально-изотропный материал. Полученный теоретический результат полностью подтверждается экспериментальными данными по определению упругих свойств декагональных квазикристаллов, приведёнными в работе [9].

Таким образом, для аксиальных квазикристаллов, имеющих поворотную ось симметрии порядка $n > 4$, тензоры четвертого ранга имеют одинаковый вид, совпадающий с представлением тензора четвертого ранга для трансверсально-изотропного материала. Механические эксперименты по исследованию начальных упругих свойств и определению структуры тензора упругости не позволяют отделить квазикристаллы от кристаллов гексагональной сингонии и трансверсально-изотропного материала.

Однако различия между аксиальными квазикристаллами с поворотной осью симметрии 5-го порядка и квазикристаллами с осью симметрии порядка выше 6-го, а также гексагональным (или трансверсально-изотропным) материалом, могут обнаружиться в структуре тензора шестого ранга, определяющего нелинейную зависимость напряжений от деформаций.

Для выявления этих различий рассмотрим анизотропное упругое тело, для которого свободная энергия представляется разложением в ряд Тейлора. Если в разложении свободной энергии сохранить члены третьего порядка, то упругие свойства материала будут характеризоваться тензором шестого ранга $\mathbf{D} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varepsilon^3}$, симметричным по первой, второй, третьей парам индексов и их перестановкам: $D_{ijklmn} = D_{jiklmn} = D_{ijlkmn} = D_{ijklnm} = D_{ijmnlk} = D_{klijmn}$.

Применим метод построения инвариантных комбинаций базисных тензоров для определения структуры тензора \mathbf{D} , описывающего нелинейные упругие свойства аксиальных квазикристаллов, гексагонального и трансверсально-изотропного материалов. Аналогично тензорному базису полусимметричных тензоров четвёртого ранга $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ построим ортонормированный базис тензоров шестого ранга

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad (10)$$

симметричных по первой, второй, третьей парам индексов и их перестановкам.

Тензор шестого ранга \mathbf{D} однозначно представляется разложением по базису (10) в виде $\mathbf{D} = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$. В это разложение должны войти инвариантные относительно преобразований (8) и (9) базисные тензоры $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$.

Каноническое представление тензора шестого ранга \mathbf{D} , описывающего нелинейные упругие свойства квазикристалла, имеющего поворотную ось порядка $n = 5$ или $n > 6$ и перпендикулярную ей плоскость симметрии, имеет вид

$$\mathbf{D} = D_{000}\mathbf{I}^{000} + D_{001}\mathbf{I}^{001} + D_{011}\mathbf{I}^{011} + D_{111}\mathbf{I}^{111} + D_{022}(\mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033}) + D_{044}(\mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}) + D_{122}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + D_{144}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + D_{244}(\mathbf{I}^{244} - \mathbf{I}^{255} - 2\mathbf{I}^{345}) + D_{245}(2\mathbf{I}^{245} + \mathbf{I}^{344} - \mathbf{I}^{355}) \quad (11)$$

Порождающими элементами группы симметрии гексагонального материала являются ортогональный тензор поворота вокруг оси \vec{e}^3 на угол $\pi/3$

$$\mathbf{Q}_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(\vec{e}^1\vec{e}^1 + \vec{e}^2\vec{e}^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{e}^1\vec{e}^2 - \vec{e}^2\vec{e}^1) + \vec{e}^3\vec{e}^3$$

и ортогональный тензор отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси \vec{e}^3 , \mathbf{Q}_\perp (9). Каноническое представление тензора шестого ранга \mathbf{D} , описывающего нелинейные упругие свойства гексагонального материала, имеет вид

$$\mathbf{D} = D_{000}\mathbf{I}^{000} + D_{001}\mathbf{I}^{001} + D_{011}\mathbf{I}^{011} + D_{111}\mathbf{I}^{111} + D_{022}(\mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033}) + D_{044}(\mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}) + D_{122}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + D_{144}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + D_{222}(\mathbf{I}^{222} - 3\mathbf{I}^{233}) + D_{223}(3\mathbf{I}^{223} - \mathbf{I}^{333}) + D_{244}(\mathbf{I}^{244} - \mathbf{I}^{255} - 2\mathbf{I}^{345}) + D_{245}(2\mathbf{I}^{245} + \mathbf{I}^{344} - \mathbf{I}^{355}). \quad (12)$$

Каноническое представление тензора шестого ранга \mathbf{D} , описывающего нелинейные упругие свойства трансверсально-изотропного материала, совпадает с представлением (11). Различия в выражениях (11) и (12) могут быть положены в основу разработки системы экспериментов, позволяющих отличить гексагональный материал от квазикристаллов или трансверсально-изотропного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (госзадание № 467) и РФФИ (проекты №№ 13-01-97501-р_центр_a, 14-01-31138-мол_a, 15-01-01875_a).

Литература

1. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 640 с.
2. Гратия Д. Квазикристаллы // Успехи физических наук. – 1988. – Т. 156. – № 2. – С. 348–364.
3. Черников М.А. Упругие свойства икосаэдрических и декагональных кристаллов // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175. – № 4. – С. 437–443.
4. Векилов Ю.Х., Черников М.А. Квазикристаллы // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180. – № 6. – С. 561–586.
5. Соколова М.Ю. Вариант термомеханических соотношений конечного деформирования анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 139–145.
6. Соколова М.Ю. Структурные тензоры анизотропии в пространстве А.А.Ильюшина // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2001. – Т. 7. – Вып. 2. Механика. – С.173–178.
7. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика конечного деформирования анизотропных тел // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – Том 7. – Выпуск 2. Механика. – 2001. – С.130–137.
8. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христин Д.В. Процессы упругопластического конечного деформирования. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. – 374 с.
9. Черников М.А. Упругие свойства икосаэдрических и декагональных квазикристаллов // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175. – № 4. – С. 437–443.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССАХ КОМБИНИРОВАННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

С.В. Черемных, Н.Л. Охлопков

Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия, stepan_1986@bk.ru

Аннотация: Рассматривается задача бифуркации тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при пропорциональном и сложном докритическом нагружении осевой сжимающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением в девиаторном пространстве деформаций $\mathcal{E}^{(3)}$ А.А.Ильюшина [1]. Используется условие несжимаемости материала и условие однородности напряженного состояния в оболочке до момента потери устойчивости. Задача решается в геометрически линейной постановке.

Ключевые слова: пластичность, устойчивость, сложное нагружение, бифуркация, оболочка.

1. Основные уравнения задачи бифуркации цилиндрической оболочки

Для решения задачи бифуркации оболочки при сложном комбинированном докритическом нагружении в каждой точке траектории деформации необходимо знать значения компонент напряженного состояния. Таким образом, задача состоит из двух частей: построение образа процесса нагружения материала и собственно решение задачи бифуркации.

Уравнения связи напряжений и деформаций в момент потери устойчивости оболочки и при построении образа процесса нагружения материала принимаем в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности А.А. Ильюшина – В.С. Ленского [1, 2], которые в скоростях принимают вид [1, 3]

$$\dot{S}_{ij} = N \dot{\mathcal{E}}_{ij} + \left(\frac{d\sigma}{dS} - N \cos \vartheta_1 \right) \dot{S} \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где S_{ij} , \mathcal{E}_{ij} – компоненты тензора-девиатора напряжений и деформаций; $d\sigma/dS$, N – определяющие функции пластичности, ϑ_1 – угол сближения, \dot{S} – скорость изменения длины дуги траектории деформации, σ – модуль вектора напряжений. Символ с точкой наверху означает дифференцирование по обобщенному параметру времени $d/dt = d/dS \cdot dS/dt$.

Для определяющих функций пластичности N и $d\sigma/dS$ принимаем аппроксимации предложенные В.Г.Зубчаниновым [3].

$$N = 2G_p + [2G - 2G_p] \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \right)^q, \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma}{dS} = 2G_k - [2G + 2G_k] \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \right)^p,$$

где G , G_k , G_p – модуль сдвига, касательный и секущий модули сдвига материала соответственно, p , q – материальные параметры аппроксимации, определяемые из экспериментов по плоскому вееру двузвенных траекторий.

Уравнение для определения угла сближения ϑ_1 имеет вид:

$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{\sigma \sin \vartheta_1}{N} - \chi_1, \quad (3)$$

где χ_1 – кривизна траектории.

Уравнения (1) и (3) имеют вид уравнений задачи Коши, которую решаем методом Рунге-Кутты. За параметр обобщенного времени t на участках сложной траектории деформирования можно принять различные монотонно возрастающие параметры процесса.

Таким образом, в каждой точке траектории деформаций определяем компоненты напряженного состояния и далее решаем бифуркационную задачу.

Цилиндрическую оболочку считаем «длинной», шарнирно подкрепленной по торцам. Решение задачи бифуркации сводим к решению задачи о собственных числах [4].

В результате, окончательно получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\sigma K_* i^2 / g_1 E + i \Omega_1^{**} / 2 g_1 S_* = \lambda_m^2 \left[\theta + 3 K_* \left(\Omega_2^{**} - \Omega_1^{**} N_2^* / N_1^* \right) / 4 g_1 \right] \\ e = -2i / S_* \lambda_m^2 - \left(\theta_1 \Omega_1^{**} + N_2^* K_* \right) / N_1^* \end{cases} \quad (4)$$

Основные параметры системы (4) описаны в уравнениях (5)

$$\begin{aligned} K_* = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* r^2 - 2\sigma_{12}^* r; \quad S_* = S_{11}^* r^2 + S_{22}^* + 2S_{12}^* r; \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma}; \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}; \quad r = \frac{n}{\lambda_m}; \\ g_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{2} \left(N_3^* - \frac{N_2^{*2}}{N_1^*} \right); \quad \theta = (1+r^2)^2 - \frac{K_*^2}{2}; \quad \theta_1 = \frac{2(1+r^2)^2}{3S_*^2} - 1; \quad \lambda_m = m\pi R / l; \end{aligned} \quad (5)$$

$$2G \cdot N_m^* = \int_{-1}^1 N(z^*)^{m-1} dz^*; \quad 2G \cdot \Omega_m^{**} = \int_{-1}^1 \sigma' S^*(z^*)^{m-1} dz^*; \quad z^* = \frac{z}{h}; \quad D = \frac{Eh^3}{9}; \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dS};$$

где R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, l – длина оболочки, $i = 3R/h$ – гибкость оболочки, D_1 – пластическая жесткость оболочки, g_1 – безразмерная жесткость, m, n – параметры волнообразования в продольном и поперечном направлении оболочки, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, E – модуль Юнга.

Решение бифуркационной задачи позволяет для заданной комбинации полуволн m, n изогнутого состояния вычислить критическую гибкость оболочки i в зависимости от значения модуля вектора напряжений σ в момент потери устойчивости.

Эксперименты показывают [4], что в момент потери устойчивости пластин и оболочек происходит излом траекторий деформирования, т.е. процесс потери устойчивости реализуется в условиях сложного нагружения материала. Для определяющих функций пластичности N и $\frac{d\sigma}{dS}$ принимаем аппроксимации В.Г. Зубчанинова (2) [5].

В большинстве выполненных ранее решений, сложное нагружение оболочки в момент потери устойчивости учитывалось в упрощенной постановке. Полагалось, что в зоне пластической догрузки $\vartheta_1 = 0^0$ ($\tau = 1$), в зоне упругой разгрузки $\vartheta_1 = 180^0$ ($\tau = -1$) и искалась координата z_p^* границы раздела данных зон. В предлагаемом варианте решения задачи функции пластичности N и $\frac{d\sigma}{dS}$ изменяются непрерывно, в зависимости от τ и z . Координату границы раздела зон определять нет необходимости, интегралы Ω_m^{**} и N_m^* в (5) определяются численно по методу Симпсона. При этом оболочка по толщине разбивается на 20 слоев (дальнейшее увеличение числа слоев, как показывают расчеты, не приводит к сколь-нибудь существенному уточнению решения).

В качестве нулевого приближения на каждом этапе нагружения оболочки используется решение при чистопластической бифуркации, когда излом траектории не учитывается. В этом случае $\tau = 1$, тогда $S^* = (e + z^* k_*)$ интегралы Ω_m^{**} , N_m^* (5) принимают значения [3]

$$\begin{aligned} N_1^* = 2(1 - \varpi), N_2^* = 0, N_3^* = 2(1 - \varpi) / 3, \\ \Omega_1^{**} = 2e(1 - \lambda), \Omega_2^{**} = 2(1 - \lambda)k_* / 3, g_1 = 1 - \omega, \\ e = -2i / (S_* \lambda_m^* v_2), v_2 = 1 + v_1(1 - \lambda) / (1 - \varpi) \end{aligned} \quad (6)$$

где ϖ – параметр пластичности А.А.Ильюшина, λ – параметр разупрочнения материала. При известных σ, ϖ, λ с учетом (6) можно вычислить критическую гибкость оболочки в нулевом приближении $i^{(0)}$

$$i^{(0)} = \lambda_m \sqrt{-\left[2g_1 v + (1 - \lambda)k_*^2 \right] / \left[4(1 - \lambda) / (S_*^2 \lambda_m^2 v_2) \right] + 2\sigma k_* / E}. \quad (7)$$

Затем, в нулевом приближении, находим $f_1^{(0)} = -\Omega_1^{**} / k_*$ и определяем параметры деформаций $e^{(0)}$, $\varepsilon_1^{(0)}$, $\varepsilon_2^{(0)}$, $\varepsilon_3^{(0)}$ из уравнений [5]

$$\begin{aligned} N_1 \varepsilon_1 &= k_* f_1 \left[S_{11}^* + (1 - 2r^2) / (3S_*) \right] + N_2^* (S_{11}^* k_* - 1) + S_{11}^* N_1^* e \\ N_1 \varepsilon_2 &= k_* f_1 \left[S_{22}^* + (1 - 2r^2) / (3S_*) \right] + N_2^* (S_{22}^* k_* - r^2) + S_{22}^* N_1^* e \\ N_1 \varepsilon_3 &= k_* f_1 \left[S_{12}^* + (1 - r / S_*) \right] + N_2^* (S_{12}^* k_* - r) + S_{12}^* N_1^* e \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, в первом приближении вычисляем для каждого сечения оболочки параметр излома траектории $\tau^{(1)}$, скорость деформаций $\dot{S}^{*(1)}$

$$(\dot{S}^*)^2 = 2 \left[P_{ee}^0 - zh P_{ek}^0 + z^2 h^2 P_{kk}^0 / 4 \right] \tau = (e + z^* k_*) (\dot{S}^*)^{-1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_{ee}^0 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2, \\ P_{ek}^0 &= \left[-(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - r^2 (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + 2\varepsilon_3 r \right] / h, \end{aligned} \quad (10)$$

$$P_{kk}^0 = 4(1 + r^2)^2 / h^2,$$

$$e = \sigma_{11}^* \varepsilon_1 + \sigma_{22}^* \varepsilon_2 + 2\sigma_{12}^* \varepsilon_3. \quad (11)$$

Далее численно определяем значения интегралов Ω_m^{**} и N_m^* , вычисляем $i^{(1)}$, $e^{(1)}$ и рассчитываем невязку по параметру e : $\Delta e^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i-1)}$. В случае, если на данном шаге Δe больше некоторого малого наперед заданного ξ , методом половинного деления вводим корректуру в e . Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока невязка Δe будет меньше ξ .

Расчеты так же выполнены на основе теории устойчивости А.А.Ильюшина, в которой используются определяющие соотношения теории квазипростых процессов [1].

Для определяющих функций пластичности используются аппроксимации

$$\begin{cases} N = 2G(1 - \omega), & P = 2G(1 - \lambda), & 0 \leq \vartheta_1 \leq \pi / 2 \\ N = P = 2G, & \pi / 2 \leq \vartheta_1 \leq \pi \end{cases} \quad (12)$$

Система алгебраических уравнений задачи о собственных числах принимает вид

$$\begin{aligned} i^2 \frac{\sigma}{E g_1} \left(-K_* - \frac{EN_1^* \lambda_m^4}{2\sigma\theta} \right) + i \frac{3}{2} \frac{N_1^* \Phi^*}{g_1 \theta} \lambda_m^2 K_* S_* = (\lambda_m^2 + n^2)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{g_2}{g_1} \right) K_*^2 + \frac{9}{8} \frac{N_1^* \Phi^{*2}}{g_1 \theta} K_*^2 S_*^2 \\ C\theta = \frac{N_1^*}{2} \lambda_m^2 - \frac{3}{4} \frac{N_1^* \Phi^*}{i} K_* S_* \end{aligned} \quad (13)$$

Расчеты сопоставлены с экспериментальными результатами, полученными на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории кафедры «Сопротивления материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета [5].

2. Пропорциональные процессы нагружения

Диаграмма деформирования образцов ($R = 15.0$ мм, $h = 1.0$ мм, $L/R = 6h$) из стали 45 при сжатии представлена на рис. 1.

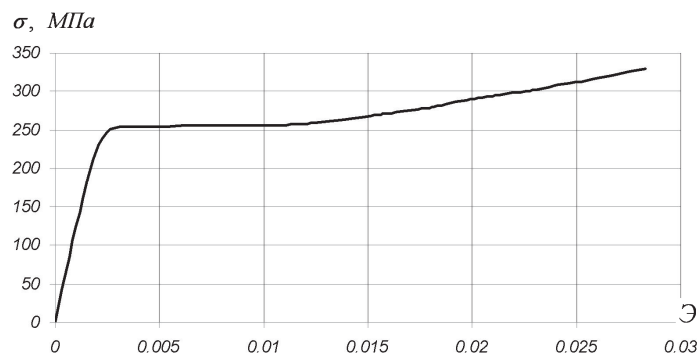


Рис. 1. Диаграмма деформирования материала

Для данного материала построены предельные поверхности критических напряжений и деформаций при реализации пропорциональных процессов нагружения. Пример решения представлен на рис. 2.

Расчеты выполнены при использовании различных вариантов аппроксимаций определяющих функций пластичности. Цифры на рисунке соответствуют: 1, 2 – теория квазипростых процессов без и с учетом разгрузки в момент потери устойчивости соответственно (теория А.А. Ильюшина); 3, 4 – расчет по модифицированному варианту теории устойчивости В.Г. Зубчанинова без разгрузки и с учетом разгрузки; 5 – расчет с учетом сложного нагружения в момент потери устойчивости при функциях пластичности N и $d\sigma/dS$ принятых согласно аппроксимациям В.Г.Зубчанинова [3] в момент потери устойчивости при $p=1$; $q=1$; 6 – экспериментальная поверхность.

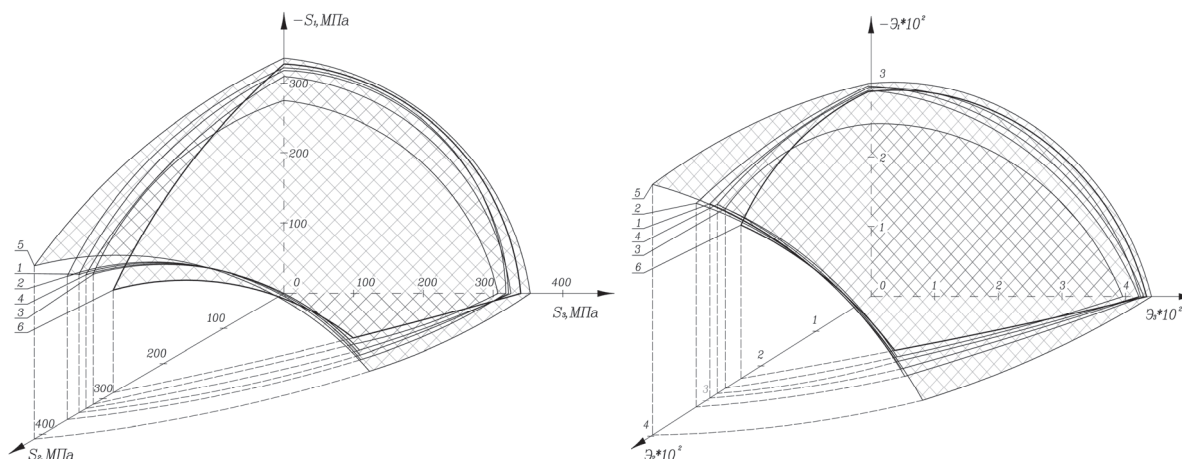


Рис. 2. Поверхности критических напряжений и деформаций

Из представленных результатов следует, что предельные поверхности устойчивых состояний цилиндрических оболочек малой гибкости при простых докритических процессах имеют выпуклый характер. Зона в окрестности координатной оси S_2 (\mathcal{E}_2) остается разомкнутой, что говорит о существовании такого уровня интенсивности внутреннего давления q , при превышении которого потеря устойчивости оболочек невозможна при любом пропорциональном комбинированном нагружении. Точно оценить этот уровень интенсивности внутреннего давления экспериментально невозможно из-за ограничений, накладываемых силовыми агрегатами комплекса СН-ЭВМ [4].

Для траекторий деформирования, имеющих компоненту S_2 (\mathcal{E}_2), отличную от нуля (пространственная траектория), а также, лежащих в плоскостях деформации $S_1 - S_2$ и $S_3 - S_2$ учет разгрузки материала в момент бифуркации при расчетах как по теории устойчивости А.А. Ильюшина так и по модифицированной теории В.Г. Зубчанинова ведет к завышению критических параметров устойчивости в сравнении с экспериментальными данными.

Кроме того, из рисунка 2 видно, что с ростом компоненты S_2 (\mathcal{E}_2) уточненный учет сложного нагружения материала в момент потери устойчивости не приводит к значительному изменению результатов расчета, в сопоставлении, например, с расчетами по теории устойчивости А.А.Ильюшина. Данный результат можно объяснить тем, что внутреннее давление является фактором противодействующим потере устойчивости оболочки, при котором влияние сложного нагружения материала в момент бифуркации становится не существенным.

3. Процессы сложного докритического нагружения

Процессы сложного докритического нагружения включали многозвенные ломаные траектории, плоские криволинейные траектории и их комбинации. Расчеты выполнены, в том числе, с целью проверки влияния истории сложного докритического нагружения на критические параметры устойчивости оболочек.

В качестве примера, рассмотрены трехзвенные траектории, представляющие собой: растяжение до заданного уровня R на первом звене; 1,25 витка траектории постоянной кривизны радиуса R на втором звене; сжатие до потери устойчивости при поддержании постоянного уровня деформации кручения \mathfrak{E}_3 на третьем звене (рис. 3).

Расчеты выполнены для нескольких процессов при $R = 0,5\%$, 1% и $1,5\%$. При данных параметрах процесса потеря устойчивости оболочки на криволинейной части траектории не происходит.

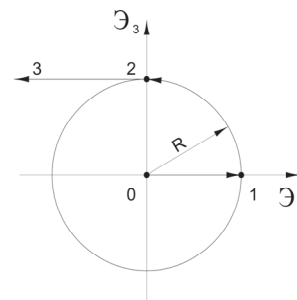


Рис. 3. Траектории деформирования образцов из стали 45

На рис. 4–6 приведены графики критических параметров напряжений и деформаций, построенные как огибающие кривых устойчивости, вычисленных при различных комбинациях параметров волнообразования m, n .

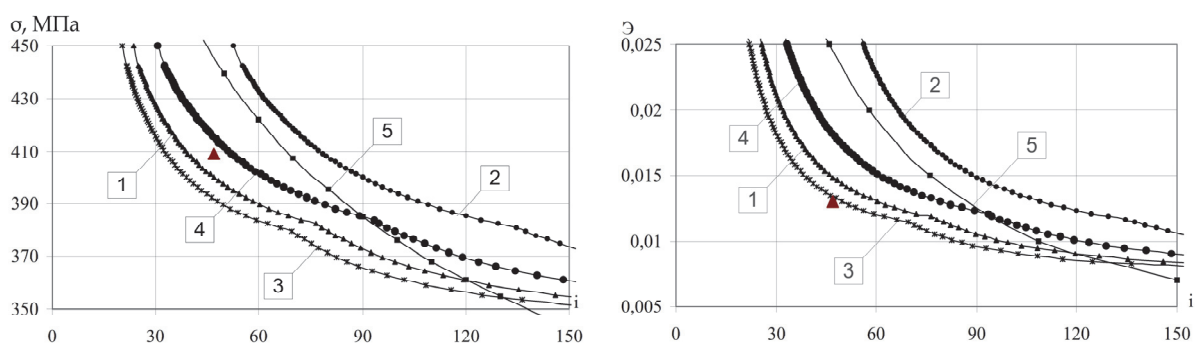


Рис. 4. Критические параметры напряжений и деформаций ($R = 0,5\%$)

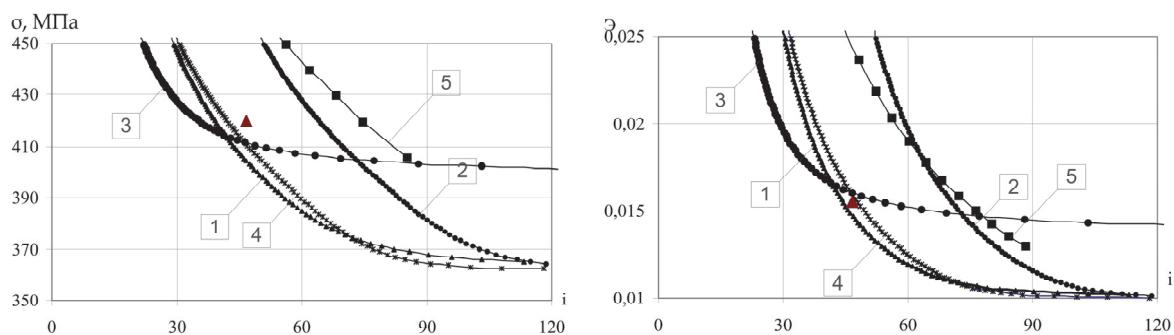


Рис. 5. Критические параметры напряжений и деформаций ($R = 1\%$)

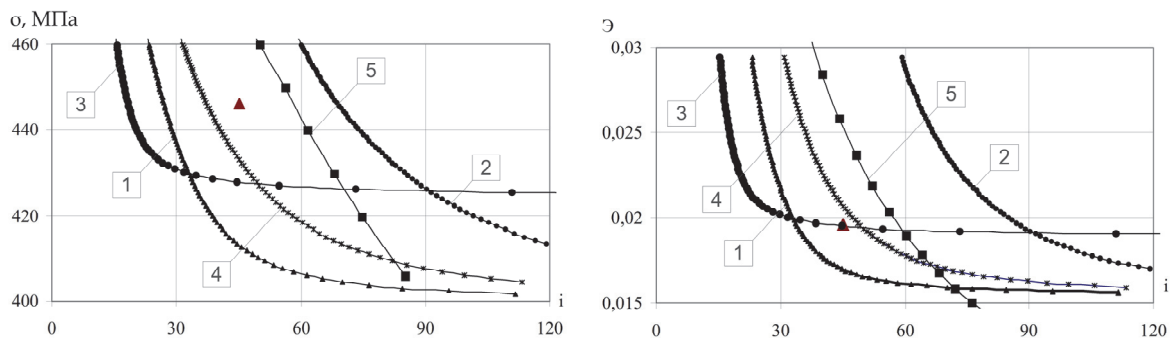


Рис. 6. Критические параметры напряжений и деформаций ($R = 1,5\%$)

Цифрами на рисунках обозначено: 1 – расчет, выполненный с учетом сложного характера нагружения в момент потери устойчивости при показателях степеней $p=0.6$ и $q=1.35$ в аппроксимациях (2) (соответствуют значениям, принятым при решении задачи построения образа процесса нагружения); 2 – расчет при показателях степеней $p=1$ и $q=1$; 3 – расчет при показателях степеней $p=0.55$ и $q=1.35$; 4 – расчет при $p=0.7$ и $q=1.35$; 5 - расчет по теории устойчивости А.А.Ильюшина с учетом разгрузки материала в момент потери устойчивости. Треугольником отмечены экспериментальные данные.

На рис. 7 в девиаторной плоскости деформаций показаны зоны устойчивых состояний оболочки. Цифры и условные обозначения соответствуют предыдущим рисункам.

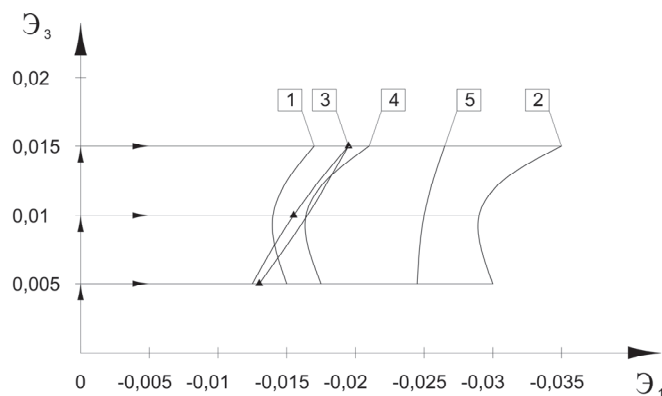


Рис. 7. Зоны устойчивых состояний в плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ для оболочек из стали 45

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что определяющие соотношения гипотезы компланарности и аппроксимации определяющих функций пластичности В.Г.Зубчанинова, учитывающие изменение угла сближения в процессе деформирования, позволяют получить достоверное решение задачи бифуркации круговой цилиндрической оболочки при сложном докритическом нагружении.

На рассмотренных процессах реальный учет сложного характера нагружения оболочки в момент потери устойчивости позволяет существенно уточнить решение, в сопоставлении с расчетами, например, по теории устойчивости А.А.Ильюшина, которые дают завышенные значения критических напряжений и деформаций

Показатели степеней p и q в аппроксимациях определяющих функций пластичности при сложных докритических процессах не могут приниматься равными $p=q=1$ и зависят от реализуемой траектории. При этом влияние параметра p на расчетные значения критических напряжений и деформаций проявляется в большей степени, чем изменение параметра q .

Расчеты выполнены так же для ряда иных траекторий сложного докритического нагружения [5].

Литература

1. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. М.: МГУ, 1990. 310 с.
2. Ильюшин, А.А. О соотношениях и методах современной теории пластичности / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 240–255.
3. Зубчанинов, В.Г. Математическая теория пластичности: Монография / В.Г.Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
4. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
5. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛИМЕРНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА С КРУГОВЫМ ВЯЗКОУПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Д.А. Шавырин, К.М. Зингерман

*Тверской государственной университет, Тверь, Россия,
shavyrin_dmitriy@mail.ru, zingerman@rambler.ru*

Аннотация. Сформулирован метод аналитического решения плоской задачи теории вязкоупругости о напряжённо-деформированном состоянии бесконечно протяжённого вязкоупругого тела, в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами, когда на бесконечности заданы напряжения, при конечных деформациях. При решении используются метод малого параметра, метод интегральных преобразований Лапласа и комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили. Оценено влияние физической нелинейности на напряжённо-деформированное состояние вблизи вязкоупругого включения и внутри него с использованием аналитических методов.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, плоская задача, аналитическое решение, комплексные потенциалы, компьютерная алгебра, конечные деформации, физическая нелинейность.

1. Постановка задачи

Исследуется напряжённо-деформированное состояние бесконечно протяжённого вязкоупругого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением. Механические характеристики материалов матрицы и включения могут отличаться. На бесконечности заданы нормальные и касательные напряжения. Эта задача решается в квазистатической постановке при конечных плоских деформациях. Физическая нелинейность определяется записью определяющих соотношений в виде нелинейной зависимости между вторым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензором деформаций Грина, обобщающей на случай вязкоупругости и конечных деформаций определяющие соотношения для пятиконстантного потенциала Мурнагана [8, 17]. В этих соотношениях упругие постоянные заменены интегральными операторами вида свертки по времени. Материалы матрицы и включения считаются сжимаемыми. Предполагается, что на границе между включением и матрицей выполнены условия идеального контакта — условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений. Требуется решить задачу о квазистатическом деформировании тела при заданных напряжениях на бесконечности. На рис. 1 отображена схема нагружения тела с круговым вязкоупругим включением. Система координат выбрана таким образом, чтобы направления нагружения совпали с осями декартовой системы координат x и y , а начало координат совпало с центром включения.

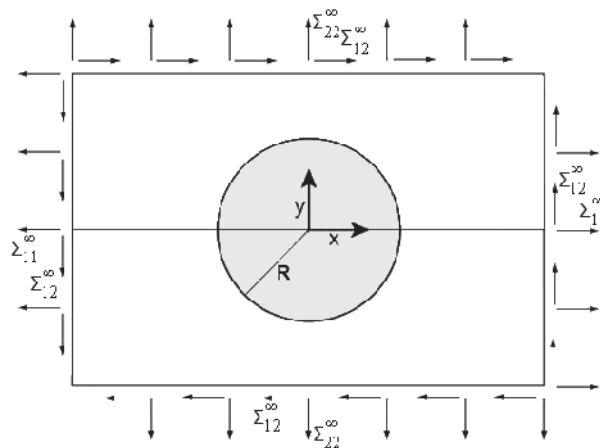


Рис. 1. Схема нагружения тела с включением

Математическая постановка задачи описывается в координатах недеформированного состояния. Далее использованы следующие обозначения: u — вектор перемещений, Ψ — аффинор деформаций, ${}^0 E$ — тензор деформаций Грина, ${}^0 \Sigma$ — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода, σ — тензор истинных напряжений, ${}^0 \nabla$ — градиент, I — единичный тензор, ${}^0 N$ — нормаль к исходной границе включения. Индексом M отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом B — к включению. Если индексы не указаны, то выражения относятся как к матрице, так и к включению.

Уравнение равновесия имеет вид

$${}^0 \nabla \cdot \left[{}^0 \Sigma \cdot \Psi \right] = 0, \quad (1)$$

здесь

$${}^0 \Sigma = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}. \quad (2)$$

Закон вязкоупругости записывается в форме:

$$\begin{aligned} {}^0 \Sigma(t) = I \int_{-\infty}^t & \left\{ \lambda(t-\tau) \left(\frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} : I \right) + 3C_3(t-\tau) \left(\frac{\partial \left[\left(\frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} : I \right)^2 \right]}{\partial \tau} \right) + C_4(t-\tau) \left(\frac{\partial \left[\left(\frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right]}{\partial \tau} : I \right) \right\} d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^t \left\{ 2G(t-\tau) \frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} + 2C_4(t-\tau) \left(\frac{\partial \left[\left(\frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} : I \right) \frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} \right]}{\partial \tau} \right) + 3C_5(t-\tau) \left(\frac{\partial \left[\left(\frac{\partial {}^0 E(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right]}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau, \quad (3) \end{aligned}$$

здесь ядра релаксации λ — объёмное и G — сдвиговое, а C_3, C_4, C_5 — нелинейные ядра релаксации.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda_0 + \lambda_1 e^{-\alpha t}, \quad G(t) = G_0 + G_1 e^{-\beta t}, \\ C_j(t) &= C_{j0} e^{-f_j t} \quad (j=3,4,5). \end{aligned} \quad (4)$$

Модули λ_i и G_i при $i=0,1$, а также $\alpha, \beta, C_{30}, C_{40}, C_{50}, f_3, f_4$ и f_5 могут принимать различные значения в матрице и во включении.

Кинематические соотношения имеют вид

$${}^0 E = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^* - I), \quad \Psi = I + \nabla u. \quad (5)$$

В постановку задачи входят также условия на бесконечности

$${}^0 \Sigma_M \Big|_{\infty} = {}^0 \Sigma_M, \quad (6)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений u и вектора нормальных напряжений

$$\begin{aligned} {}^0 N \cdot {}^0 \Sigma \cdot \Psi & \text{ на границе матрицы и включения} \\ {}^0 N \cdot {}^0 \Sigma_M \cdot \Psi_M \Big|_{\Gamma} &= {}^0 N \cdot {}^0 \Sigma_B \cdot \Psi_B \Big|_{\Gamma}, \\ u_M \Big|_{\Gamma} &= u_B \Big|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Метод решения

Для решения задачи применяется метод возмущений (малого параметра). Выбирается малый параметр μ в виде

$$\mu = \max_{i,j} \left| \frac{\Sigma_{ij}^{0\infty}}{G_0^M} \right| \quad (8)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений u такое разложение может быть записано в форме

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots, u^{(j)} \sim \mu^{j+1} \quad (9)$$

В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач.

Решение линеаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова–Мухелишвили [1, 2, 9], с использованием алгоритмов, изложенных в [1, 7, 15, 16]. При решении используется метод интегральных преобразований Лапласа [3]. Для внешней нагрузки и ядер релаксации используем их изображения по Лапласу. Комплексные потенциалы определяются в виде отрезков рядов Лорана по степеням $z = x + iy = re^{i\theta}$. Подставляя потенциалы, представленные в виде рядов, в граничные условия (условия на бесконечности и условия идеального контакта), получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения выражений для коэффициентов рядов через изображения нагрузок и ядер релаксации. Большинство коэффициентов получаются нулевыми. Подставляя в формулы, связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями [5, 9] выражения для потенциалов, получаем выражения в изображениях для напряжений и перемещений.

Для первого приближения решение находится следующим образом. Тильдой помечены те части первого приближения соответствующих величин, которые определяются нулевым приближением. Если в качестве аргумента функции используется s , то предполагается, что речь идёт об изображении по Лапласу.

1. Определяется аффино деформаций $\Psi^{(0)}$:

$$\Psi^{(0)} = \overset{0}{\nabla} u^{(0)}. \quad (10)$$

2. Определяется тензор деформаций Грина $\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi^{(0)} \cdot \Psi^{(0)*}. \quad (11)$$

3. Применяется преобразование Лапласа к тензору Грина и определяется в изображениях поправка от учёта эффектов второго порядка для тензора Пиолы–Кирхгофа второго рода $\overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}$. В следующих выражениях под L понимается прямое преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) = & I \left\{ \lambda(s) \left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}(s) : I \right) + 3C_3(s) L \left(\left[\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} : I \right]^2 \right) + C_4(s) L \left(\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right)^2 : I \right] \right) \right\} + \\ & + \left\{ 2G(s) \overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}(s) + 2C_4(s) L \left(\left[\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} : I \right] \overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right) + 3C_5(s) L \left(\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right)^2 \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Определяется тензор Пиола $\tilde{P}^{(1)}$:

$$\tilde{P}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) + L \left(\overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(0)} + \Psi^{(0)} \right). \quad (13)$$

5. Определяется вектор фиктивных массовых сил $f^{(1)}$:

$$f^{(1)}(s) = -\overset{0}{\nabla} \cdot \tilde{P}^{(1)}(s). \quad (14)$$

6. Определяется тензор напряжений на бесконечности $\sigma^{\infty(1)}$:

$$\sigma^{\infty(1)}(s) = -\tilde{P}^{(1)}(s) \Big|_{\infty}. \quad (15)$$

7. Находим частное решение неоднородного уравнения, используя вектор $f^{(1)}$:

$$u_{н.}^{(1)}(s) = \frac{1}{4G(s)(\lambda(s) + 2G(s))} \cdot [(\lambda(s) + 3G(s)) \iint f^{(1)}(s) dz d\bar{z} - (\lambda(s) + G(s)) \iint \bar{f}^{(1)}(s) dz d\bar{z}]. \quad (16)$$

8. Находим тензор деформаций с учётом поправки от неоднородного решения $E^{(1)}$:

$$E^{(1)}(s) = \overset{0}{E}^{(1)}(s) + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} u_{н.}^{(1)}(s) + \overset{0}{\nabla} u_{н.}^{(1)*}(s) \right). \quad (17)$$

9. Находим тензор обобщённых напряжений $\overset{0}{\Sigma}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\Sigma}^{(1)}(s) = \overset{0}{\Sigma}^{(1)} + \lambda \left(\overset{0}{\nabla} \cdot u_{н.}^{(1)}(s) \right) I + G \left(\overset{0}{\nabla} u_{н.}^{(1)}(s) + u_{н.}^{(1)}(s) \overset{0}{\nabla} \right). \quad (18)$$

10. Используя комплексные потенциалы, находим решение однородной системы уравнений по аналогии с нулевым приближением. Эти потенциалы представляются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_M^{(1)}(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(1)} z^{-k}, & \psi_M^{(1)}(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(1)} z^{-k} \\ \varphi_B^{(1)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k, & \psi_B^{(1)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1)} z^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя потенциалы в граничные условия и решая систему линейных алгебраических уравнений, находим выражения для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Расчёты показали, что в данном случае в суммах (19) можно ограничиться конечным числом слагаемых до $k=9$ включительно без потери точности.

Подставляя выражения для потенциалов (19) в формулы из [5, 9, 11–13], связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями, получаем выражения в изображениях для напряжений и перемещений. Применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение в оригиналах.

Решение найдено в аналитической форме, но учитывая громоздкость выражений, ограничимся только численными результатами.

3. Результаты расчётов

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple и получены в аналитической форме выражения для напряжений и перемещений как функции координат и времени. Были вычислены первые два приближения. Были выполнены расчёты при следующих значениях вязкоупругих констант:

$$\begin{aligned} \alpha_M = \beta_M = \alpha_B = \beta_B, \lambda_0^M / G_0^M = 1.5, \lambda_1^M / G_0^M = 14, G_1^M / G_0^M = 4, C_{30}^M / G_0^M = -6, C_{40}^M / G_0^M = -8, \\ C_{50}^M / G_0^M = -3, \lambda_0^B / G_0^M = 15, \lambda_1^B / G_0^M = 140, G_0^B / G_0^M = 10, G_1^B / G_0^M = 40, C_{30}^B / G_0^M = -60, \\ C_{40}^B / G_0^M = -80, C_{50}^B / G_0^M = -30, f_3^M = f_4^M = f_5^M = f_3^B = f_4^B = f_5^B = \alpha_M / 10. \end{aligned}$$

В данном случае включение более жёсткое, чем матрица. На бесконечности в момент $t=0$ одновременно прикладываются нагрузки величины $0.5G_0^M$: растягивающая вдоль оси x и сжимающая вдоль оси y .

На рис. 2–3 показано распределение напряжений Σ_{11} и Σ_{22} вдоль оси x в моменты времени $t \cdot \alpha_M = 0$ и $t \cdot \alpha_M = 30$. На рис. 4 представлен график изменения напряжений со временем вблизи центра включения. Сплошная линия на графиках соответствует линейному решению, пунктирная — решению с учётом геометрической нелинейности, штрих-пунктирная — решению с учётом физической нелинейности.

Поправка от учёта нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 38%, а для вектора перемещений (на рисунках не показано) — 5%.

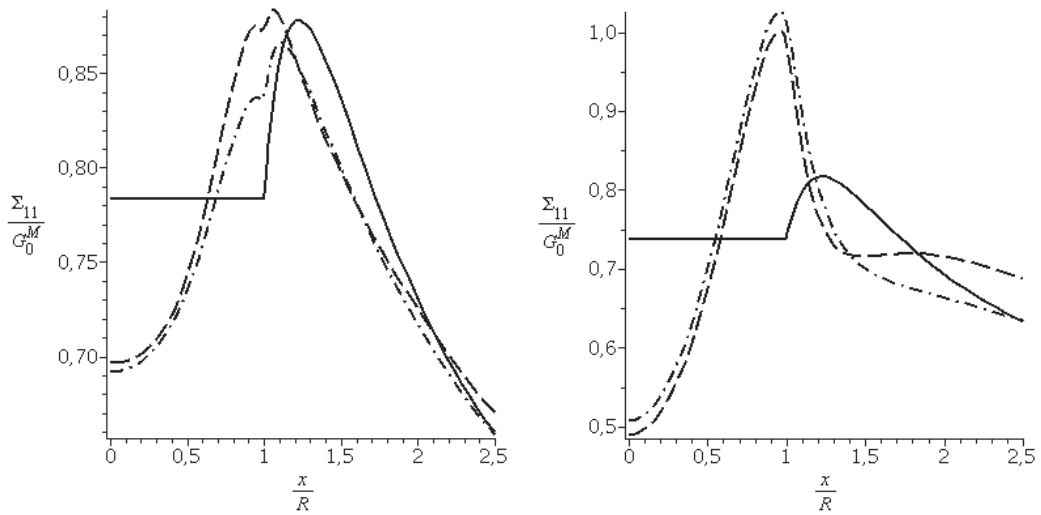


Рис. 2. Распределение Σ_{11} вдоль оси x в моменты времени $t \cdot \alpha_M = 0$ и $t \cdot \alpha_M = 30$

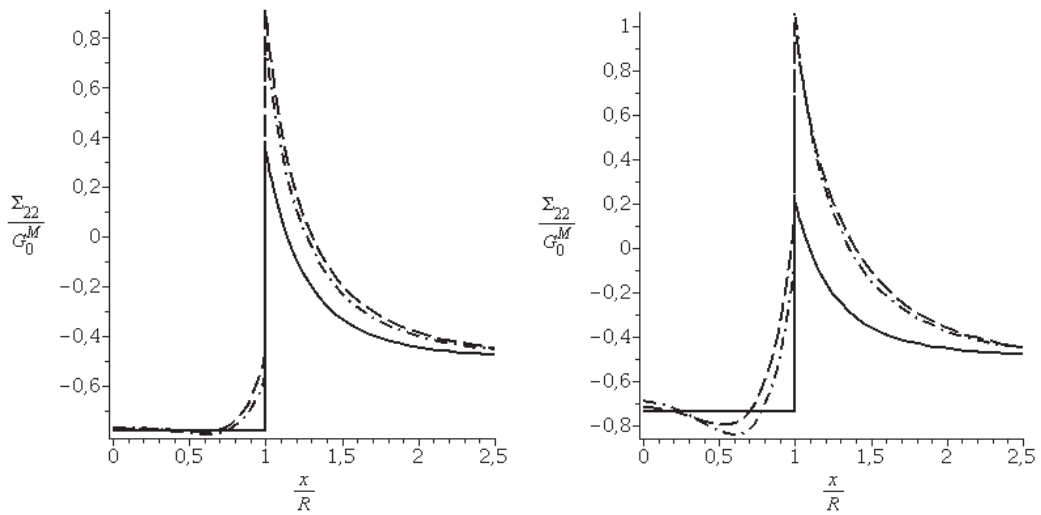


Рис. 3. Распределение Σ_{22} вдоль оси x в моменты времени $t \cdot \alpha_M = 0$ и $t \cdot \alpha_M = 30$

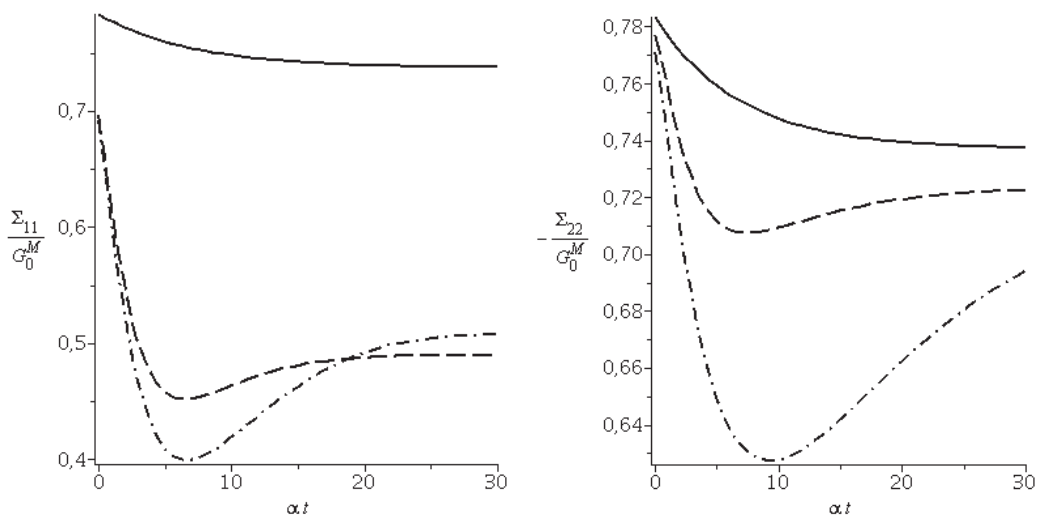


Рис. 4. Изменение напряжений Σ_{11} и Σ_{22} в точке $(x, y) = (0, 0)$ в координатах недеформированного состояния

Напряжённо-деформированное состояние включения в нулевом приближении однородно, что согласуется с результатами решения задачи об упругом включении в упругой среде в линейной задаче [13].

Таким образом, разработаны метод, алгоритм и программное обеспечение для приближённого аналитического решения плоской задачи о квазистатическом деформировании бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при заданных напряжениях на бесконечности при конечных деформациях. Дана оценка нелинейных эффектов, исследовано изменение напряжённо-деформированного состояния с течением времени. Результаты решения этой задачи могут использоваться для того, чтобы описывать эффективные характеристики вязкоупругих композитов, в том числе резин с наноразмерными частицами наполнителя, а также для анализа и верификации численных решений.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14-08-01191) и Министерства образования и науки России в рамках базовой части Государственного задания в сфере научной деятельности (Задание 2014/220, проект 1153).

Литература

1. Зингерман К.М., Левин В.А. Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение. // Прикладная математика и механика. — 2009. Т. 73, вып. 6. — С. 983—1001.
2. Зингерман К.М., Левин В.А. Последовательное образование двух неравных эллиптических отверстий в теле из вязкоупругого несжимаемого материала. Конечные деформации. // Известия АН. Механика твердого тела. — 1999. — №4. — С. 162—169.
3. Ильющин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970. — 280 с.
4. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. — М.: Машиностроение, 1983. — 239 с.
5. Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. — Юрьев: Маттисен, 1908. — 187 с.
6. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. — М.: Мир, 1974. — 338 с.
7. Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В.А.Левина. — М.: Физматлит, 2007. — 392 с.
8. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости — М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 709 с.
10. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наукова думка, 1968. — 887 с.
11. Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры. // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Выпуск 1 (28). 2013. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. — С. 45—53.
12. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчет напряженного состояния в полимерном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением с учётом геометрической нелинейности. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №2. С. 5—16.
13. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963. — 248 с.
14. K. M. Zingerman, D. A. Shavyrin. Approximate analytical solution for the problem of an inclusion in a viscoelastic solid under finite strains // Mechanics of Time-Dependent Materials 2015, DOI 10.1007/s11043-015-9288-2
15. V. A. Levin, K. M. Zingerman. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. Issue 12. P. 2240--2251.
16. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, M.Ya. Yakovlev. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures 2015. V. 131. P. 25–36. DOI 10.1016/j.compstruct.2015.04.037
17. Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. John Wiley & Sons, Inc., 1951. — 140p.

УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

В.С. Шоркин, С.И. Якушина

ФГБОУ ВО «Приокский государственный университет», Орел, Россия, VShorkin@yandex.ru

Аннотация. Прочность слоистой структуры определяется прочностью адгезионного соединения ее элементов и прочностью самих элементов. Рассматривается прочность на разрыв как адгезионного соединения элементов структуры, так и ее элементов. В работе предлагается математическая модель конечной стадии процесса разрушения адгезионного контакта слоистого композита и его элементов при действии нормальных напряжений, когда соседние микротрещины готовы слиться в одну магистральную трещину. Установленные связи между теоретическим пределом прочности и реальным разрушающим напряжением, результаты расчёта, соответствуют известным представлениям и справочным данным.

Ключевые слова: слоистая структура, теоретический предел прочности, разрушающее напряжение.

1. Введение

Теоретическая и реальная прочность существенно разнятся между собой. Это находит свое объяснение в теории трещин Гриффитса [1], допускающей наличие в материале сети микротрещин.

Например, в работе [2] говорится, что разрыв путем растяжения межзатомных связей требует напряжения $\sigma_t \approx E/5$, где E – модуль Юнга, однако хрупкое разрушение происходит при напряжении $\sigma_t \approx E/500$. В рамках этой теории, в частности, установлено [2], что разрушающее напряжение для материала, в котором имеются трещины длиной $2l_{cr}$, определяется выражением

$$\sigma_t = (EW_{saf}/l_{cr})^{1/2}, \quad (1)$$

где W_{saf} – поверхностная энергия.

Отмечено также, что обычно наблюдаемые значения прочности $\sigma_t \approx E/500$ можно объяснить наличием трещин Гриффитса длиной $l_{cr} \approx 10^{-6}$ м.

Теория Гриффитса рассматривает развитие одиночной трещины в бесконечно протяженной среде, подверженной растяжению силами, приложенными на бесконечно удаленных от трещины краях. При эксплуатации тонкопленочных покрытий возможна ситуация, когда основа подвергается растяжению, увлекая в этот процесс покрытие доводя его до разрушения. Растяжение пленки с помощью основы, с которой она скреплена адгезионными силами, происходит посредством касательных сил, приложенных вдоль поверхности контакта. Разрушение растягиваемой пленки (без основы) происходит из-за потери устойчивости и катастрофического развития одиночной трещины. Для покрытия на растягиваемой основе характерно возникновение сети трещин, параллельных между собой [3], расстояние между ближайшими микротрещинами имеет порядок $h = 6 \cdot 10^{-6}$ м, что соизмеримо с $l_{cr} \approx 10^{-6}$ м.

В работе предлагается упрощенная модель явления, а также оценка разрушающего напряжения, сделанная на ее основе. Этот результат позволит проводить оценочные расчеты реальной прочности тонкопленочных покрытий при условии наличия информации о среднем размере их микротрещин.

2. Теоретические положения

Допускается, что материал имеет ячеистую структуру. В каждой из ячеек имеется микротрещина. Форма и ориентация микротрещин в материале пленки случайна. Однако при ее растяжении посредством подложки "активизируются" те из них, которые перпендикулярны направлению растяжения. Тело B , моделирующее покрытие, представлено в виде объединения элементарных частей ΔB_n , $n = 1, \dots, N$: $B = \bigcup_{n=1}^N \Delta B_n$, $\Delta B_n \cap \Delta B_m = \emptyset$, $m \neq n$. Это соотношение

переносится на области, занимаемые всем телом и его частями. Тела ΔB_n можно считать элементарными структурными ячейками исследуемого тела B , поскольку в каждом из них свойства, характер неоднородности, используемые для макроописания осредненные характеристики материала повторяются.

Чтобы исключить детальный учет неоднородности состояния в микрообласти, в описание вводятся осредненные по ней характеристики материала, используется представление о представительной области, когда диаметр области ΔB_n имеет (при заданной точности осреднения) не равную нулю нижнюю границу.

Допускается, что в каждой структурной ячейке ΔB_n образовалась микротрещина. Так что ячейка ΔB_n является областью Ω_D влияния наличия трещины на напряженно-деформированное состояние окружающего трещину материала. Область Ω_D ограничена поверхностью A_Ω .

В момент образования трещины она является математическим разрезом. Раскрытие трещины, если оно должно быть в рассматриваемых условиях, предполагается малым. Поверхность берегов и их площадь обозначаются, как $A_{cr}^\pm = A_{cr}$. Она ограничена замкнутой линией L_{cr} . Диаметр областей A_{cr}^\pm равен l_{cr} .

В соответствии с [1], при появлении трещины часть энергии упругих деформаций окружающей ее среды превращается в поверхностную энергию F_{saf} ее берегов, которая распределяется по ним равномерно с интенсивностью W_{saf} :

$$F_{saf} = W_{saf} (A_{cr}^+ + A_{cr}^-) = 2W_{saf} A_{cr}. \quad (2)$$

Область Ω_D влияния трещины на состояние материала вокруг нее имеет характерный размер D , соизмеримый со своим аналогом l_{cr} для трещины. Допущение о соизмеримости характерных размеров трещины и области ее влияния совпадает с аналогичным допущением в теории Гриффитса [1]. В этой теории считается, что линия L_{cr} – край трещины, лежит на поверхности A_Ω . Поэтому принимается $D \cong l_{cr}$. В рассматриваемом случае D превышает l_{cr} .

Область Ω_D в свою очередь условно делится на две не пересекающиеся области Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$. Пусть A_{Gr} – поверхность, разделяющая эти области. Предполагается, что область $\Omega_{1-\alpha}$ обладает свойством, наделяемым теорией [1] – линия L_{cr} принадлежит ей: $L_{cr} \subset A_{Gr}$. При этом, как и в теории [1], наиболее удаленные от трещины ее участки расположены там, где возмущения полей напряжений и деформаций можно пренебречь. Значит, поверхности A_{Gr} и A_Ω имеют общие участки.

Плоская форма трещины вносит определенную ориентацию в пространство Ω_D . Учитывая это, допускается, что область $\Omega_{1-\alpha}$ имеет цилиндрическую форму с образующей – прямой, параллельной нормали к плоскости трещины, и направляющей – линией L_{cr} . Торцы цилиндра для простоты предполагаются плоскими, параллельными плоскости трещины, отстоящими на расстоянии h от нее. Область Ω_D также цилиндрическая. Ее боковая поверхность параллельна боковой поверхности области $\Omega_{1-\alpha}$, торцы являются частями тех же плоскостей, что и торцы области $\Omega_{1-\alpha}$.

Учитывая, что все три области Ω_D , Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ имеют одинаковую высоту $2h$, можно утверждать, что объемы этих областей V_D , V_α и $V_{1-\alpha}$ относятся точно также как и площади A_D , A_α и $A_{1-\alpha}$, то есть находятся в отношении

$$V_D : V_\alpha : V_{1-\alpha} = A_D : A_\alpha : A_{1-\alpha} = 1 : \alpha : 1 - \alpha. \quad (3)$$

Здесь α – относительная площадь части сечения области Ω_D плоскостью трещины, не подвергшаяся разрушению. При этом $\beta = 1 - \alpha$ – поврежденность этого сечения трещиной. Параметр α вводится как параметр, определяющий состояние упругой среды. Введение

количественной оценки несплошности материала – его поврежденности, в зависимости от целей исследований и решаемых при этом задач может быть осуществлено по-разному [4]. В рассматриваемой ситуации выбран наиболее простой вариант. Считается, что поврежденность – это относительная площадь микротрещины в сечении характерной элементарной ячейки среды ее плоскостью: $\beta = A_{1-\alpha} / A_D$. Параметр $\alpha = A_\alpha / A_D$ подлежит определению.

До образования трещины вся среда и мысленно выделенные в ней области Ω_D , Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ находились в однородном деформированном состоянии. После ее образования это состояние внутри Ω_D искажается, перестает быть однородным. Поскольку Ω_D является областью, занимаемой элементарной структурной ячейкой ΔB тела B , то есть является представительной элементарной областью.

Предполагается, что свойства материала описываются на основании линейной теории упругости. Деформированное состояние в этом случае характеризуется тензором деформаций Коши [5]

$$\mathbf{g} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) g_{ij} = (1/2)(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4)$$

В работе применяется прямоугольная декартова система координат x_i , ($i=1, 2, 3$) с ортонормированным базисом \mathbf{e}_i , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ – вектор перемещений, \mathbf{r} – радиус-вектор точки в отсчетной конфигурации исследуемого тела B , $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ – радиус-вектор той же точки в текущей конфигурации того же тела, $\nabla \mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) u_{i,j}$ – градиент вектора перемещений, индекс j после запятой означает дифференцирование по x_j .

Объемная плотность изменения свободной энергии, вызванного деформациями, и соответствующий им тензор напряжений определяются равенством [5]:

$$w = \mu g_{ij} g_{ij} + \frac{\lambda}{2} g_{kk} g_{ll}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) P_{ij} = \frac{\partial w}{\partial g_{ij}} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)(2\mu g_{ij} + \lambda \delta_{ij} g_{kk}). \quad (5)$$

Характеристики деформированного состояния материала частицы ΔB внутри Ω_D считаются постоянными, равными средним по Ω_D величинам. Поэтому деформированное состояние частицы ΔB характеризуется величиной $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{V_D} \int_{V_D} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})) dV_D = \frac{1}{V_D} \int_{V_D} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})) dV_\alpha + \frac{1}{V_D} \int_{V_D} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})) dV_{1-\alpha} = \\ &= \frac{V_\alpha}{V_D} \langle \nabla \mathbf{u} \rangle_\alpha + \frac{V_{1-\alpha}}{V_D} \langle \nabla \mathbf{u} \rangle_{1-\alpha} = \alpha \langle \nabla \mathbf{u} \rangle_\alpha + (1-\alpha) \langle \nabla \mathbf{u} \rangle_{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом выражении величины $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle_\alpha$, $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle_{1-\alpha}$ являются средними соответственно по областям Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$ градиентами вектора перемещений точек этих областей. Они не совпадают друг с другом.

Тензор напряжений (5) зависит от градиента перемещений линейно. Поэтому для него справедливо выражение, совпадающее по форме с (6).

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \alpha \langle \mathbf{P} \rangle_\alpha + (1-\alpha) \langle \mathbf{P} \rangle_{1-\alpha}. \quad (7)$$

Количественной оценкой приходящегося на единицу объема области V_D изменения свободной энергии, вызванного деформациями материала внутри V_D , предлагается считать величину $[w]$, определяемую равенством

$$[w] = \int_0^{\langle \nabla \mathbf{u} \rangle} \langle \mathbf{P} \rangle (\langle \nabla \mathbf{u} \rangle) d \langle \nabla \mathbf{u} \rangle = \mu \langle g_{ij} \rangle \langle g_{ij} \rangle + \frac{\lambda}{2} \langle g_{kk} \rangle \langle g_{ll} \rangle, \quad \langle \mathbf{g} \rangle = \alpha \langle \mathbf{g} \rangle_\alpha + (1-\alpha) \langle \mathbf{g} \rangle_{1-\alpha}, \quad (8)$$

$$[w] = \alpha^2 [w]_{\alpha\alpha} + 2\alpha(1-\alpha) [w]_{\alpha(1-\alpha)} + (1-\alpha)^2 [w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)}. \quad (9)$$

Эта величина не совпадает со средним значением плотности энергии упругих деформаций по области V_D : $[w] \geq \langle w \rangle$. При $\alpha \rightarrow 1$, $D \rightarrow 0$ – уменьшении площади трещины и

стремлении диаметра области возмущения к нулю, а также при ограниченности нормы $\|\nabla^2 \mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) u_{i,j,k}\|$ выполняется условие $[w] \rightarrow w$.

Условием определения параметра α предлагается считать условие стационарности значения свободной энергии материала внутри Ω_D .

$$\frac{\partial [w]}{\partial \alpha} = 0. \quad (10)$$

Следствием этого выражения является формула

$$\alpha = \left[1 + \frac{[w]_{\alpha\alpha} - [w]_{\alpha(1-\alpha)}}{[w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)} - [w]_{\alpha(1-\alpha)}} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Фрагментация тела B на элементарные ячейки ΔB с описанной структурой обладает трансляционной периодичностью. При этом в плоскости трещины A_{cr} располагается целая сеть периодически повторяющихся трещин. Между краями соседних трещин имеется неповрежденный перешеек.

Полагая область Ω_D представительной элементарной областью, которая при построении модели механического поведения тела B предполагается бесконечно малой, можно строить один из вариантов модели поврежденной упругой среды. В ней параметр α (или $\beta = 1 - \alpha$) является одним из параметров термодинамического состояния среды наряду с температурой (которая в данной работе считается постоянной) и тензором деформаций. Выражение (11) свидетельствует о том, что как только в материале возникает напряженное состояние, в нем могут возникать микротрещины, так как необходимое условие их существования – $0 < \alpha < 1$, будет выполнено.

Стремление параметра α к нулю ($\alpha \rightarrow 0$) означает стремление материала к разрушению. Учитывая известный факт, свидетельствующий о том, что значение реального предела прочности (разрушающего напряжения) меньше теоретического из-за наличия микротрещин, далее предлагается механизм разрушения частицы ΔB под действием растягивающего напряжения, устанавливающий связь разрушающего напряжения σ_u с теоретическим пределом прочности σ_t , величиной параметра α и размером трещины l_{cr} .

3. Основные допущения

1. В любой момент времени растягивающее частицу ΔB напряжение вычисляется в предположении об отсутствии в ней микротрещины, хотя она в ней (судя по выражению (11)) может быть. В момент, когда это напряжение достигло значения разрушающего напряжения σ_u , реально на перешейке между трещинами оно достигает теоретического предела прочности σ_t . Из-за этого и возникает эффект разрушения материала при меньшем по сравнению с ним напряжении. Механизм реализации, позволяющий сформулировать энергетическое балансовое соотношение, заключается в преобразовании упругой энергии сплошной ячейки, соответствующей напряжению σ_u , в поверхностную энергию берегов трещины, соответствующей этому же напряжению, и упругой энергии в части Ω_α , соответствующей теоретическому пределу прочности σ_t .

2. Предполагается, что трещина раскрылась, хотя шириной раскрытия пренебрегаем. Напряженное состояние в областях $\Omega_{1-\alpha}^\pm$ отсутствует в связи с раскрытием трещины. Так что внутренние силы в этих областях отсутствуют. Вся энергия упругих деформаций областей $\Omega_{1-\alpha}^\pm$ преобразовалась в поверхностную энергию берегов $\Omega_{1-\alpha}^\pm$ трещин, ограничивающих области $\Omega_{1-\alpha}^+$ и $\Omega_{1-\alpha}^-$. Работа внутренних сил, развивающихся в областях $\Omega_{1-\alpha}^\pm$ на перемещениях областей Ω_α^\pm , а также сил областей Ω_α^\pm на перемещениях точек $\Omega_{1-\alpha}^\pm$ равна нулю. Это допущение очень грубое, но существенно упрощает задачу об установлении связи между напряженным состоянием среды и ее поврежденностью.

3. Ячейки Ω_D^+ и Ω_D^- (для определенности формы) считаются кубами с длиной стороны, равной l . Так что диаметр сечения A_D : $D = l\sqrt{2}$. Сечение трещины расположено в левом переднем углу срединного сечения ячейки.

4. Учитывая изложенные гипотезы можно получить два соотношения между размерами ячейки, значениями напряжений в ней, и размерами трещины внутри нее.

Первое из них отражает равенство энергии $[w] = \frac{\sigma_u^2}{E}$ в ячейке до образования в ней микротрещины под действием разрушающего напряжения σ_u (реальный предел прочности) энергии после ее образования, но накануне полного разрушения. В части $(1-\alpha)$ между параллельными трещинами вся упругая энергия в этом случае превращается в поверхностную энергию двух берегов трещины. В этом случае в выражении (9):

$$[w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)} = \frac{4W_{saf}}{2h}, \quad [w]_{\alpha(1-\alpha)} = 0. \quad (12)$$

В части α средние напряжения равны теоретическому пределу прочности σ_t . Поэтому:

$$[w]_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_t^2}{2E}. \quad (13)$$

Балансовое равенство с учетом (9) приобретает вид:

$$\frac{\sigma_u^2}{2E} = (1-\alpha)^2 \frac{2W_{saf}}{h} + \alpha^2 \frac{\sigma_t^2}{2E}. \quad (14)$$

В соответствии с определением

$$\alpha = \frac{l^2 - l_{cr}^2}{l^2}. \quad (15)$$

С учетом сделанных допущений выражение (11) приобретает вид:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_t^2 h}{2W_{saf} E}}. \quad (16)$$

Система соотношений (14) – (16) содержит в качестве неизвестных величины σ_u , α , l_{cr} , l . Значения σ_t и W_p могут быть вычислены, например, методами, изложенными в [6, 7]. Неопределенность системы уравнений дает основание для того, что бы две из неизвестных величин определялись экспериментально или гипотетически, например, допущением о том, что $\sigma_u \approx 0,01\sigma_t$, $l \approx h$.

Из выражения (16) вытекает связь:

$$\frac{2W_{saf}}{l} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_t^2}{2E} \right). \quad (17)$$

С ее учетом из (14) следует зависимость:

$$\sigma_u = \sigma_t \sqrt{\alpha}. \quad (18)$$

Учитывая, что $\sigma_u \approx 0,01\sigma_t$, можно утверждать, что параметр α имеет малую величину: $\alpha \approx 10^{-4}$. Приняв это за основу и учтя (15) можно получить, что $l \approx l_{cr}$. Тогда

$$l_{cr} \approx \frac{2W_{saf} E}{\alpha \sigma_t^2} = \frac{2W_{saf} E}{\sigma_u^2} \quad (19)$$

или

$$\sigma_u = \left(\frac{2W_{saf} E}{l_{cr}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Сравнивая (20) и (1) можно убедиться в соизмеримости обеих оценок.

4. Сопоставление результатов расчета с известными данными

С учетом полученных результатов проведен расчет длины микротрещины l_{cr} в предположении о том, что $\sigma_t \approx E/5$, а также параметра α , соответствующего известным [8] справочным данным о значениях σ_u (таблица 1).

Таблица 1. Результаты расчета длины микротрещин и минимальной относительной площади неповрежденного трещиной сечения элементарной ячейки

Материал	$\sigma_t, 10^{11}$ Па (расчет)	$\sigma_u, 10^9$ Па (расчет)	$\sigma_u, 10^9$ Па, [8]	$l_{cr}, 10^{-6}$ м	$\alpha, 10^{-4}$
<i>Cr</i>	0,37	0,37	0,41	17	1,05
<i>Ti</i>	0,21	0,21	0,24	17	1,07
<i>Mo</i>	0,53	0,53	0,80	7	1,23

Полученные значения l_{cr} соизмеримы (хотя и больше) с предложенным в [2] для объяснения наблюдаемого соотношения $\sigma_u \approx 0,01\sigma_t$ значения $l_{cr} \approx 10^{-6}$. При этом величина α , оцененная с учетом реальных значений σ_u и известной оценки $\sigma_t \approx E/5$, также соответствует представлению $\sigma_u \approx 0,01\sigma_t$. Характерно, что оценка размера $l \approx l_{cr} \approx 10^{-6}$ м соизмерима, как и предполагалось, с расстояниями между трещинами растянутых тонких пленок, имеющими величину $\approx 5 \cdot 10^{-6}$ м [3].

Работа выполнялась в рамках базовой части государственного задания на 2015 г., код проекта 286.

Литература

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1920. – Vol. 221. – P. 163 – 198.
2. Петч Н. Металлографические аспекты разрушения / Ред. Г. Либовиц // Разрушение. – М.: Мир, 1973. – Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. – С. 376 – 420.
3. Вольнский А. Л., Ярышева Л. М., Моисеева С. В., Баженов С. М., Бакеев Н. Ф. Новый подход к оценке механических свойств твердых тел экстремально малых и больших размеров // Российский химический журнал. Журнал Российского химического общества им. Д. И. Менделеева. – 2006. – Т. 50. – № 5. – С. 126 – 133.
4. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Метод вычисления поверхностной энергии и энергии адгезии упругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 235 – 259.
7. Витковский И. В., Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Адгезионно-диффузионное формирование многослойной стенки жидкометаллического проточного тракта blankets термоядерного реактора // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82. – Вып. 7. – С. 117 – 122.
8. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др. Физические величины: Справочник. Под ред. Григорьева И. С., Мейлихова Е. З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Организаторы симпозиума.	3
Справка о научной и научно-педагогической деятельности профессора В.Г. Зубчанинова.	6
Зубчанинов В.Г. Теория упругопластического деформирования материалов и общий постулат изотропии А.А. Ильюшина	9
Муравлёв А.В. Обобщение постулата изотропии теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина на конечные деформации.	25
Локощенко А.М., Фомин Л.В. Ползучесть и длительное разрушение стержней и пластин в агрессивной среде	30
Баженов В.Г., Артемьева А.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В., Кузмичева Т.В. Численное моделирование предельных состояний упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях.	34
Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С., Сметанин И.В. Модель повреждённой среды для оценки ресурсных характеристик конструкционных сталей при механизмах исчерпания, сочетающих усталость и ползучесть материала	42
Малинин В.Г., Муссауи Ю.Ю., Ефремов Д.В. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния процессов сложного деформирования на эффекты мартенситной неупругости	54
Малинин В.Г., Малинина Н.А., Малинин Г.В., Перельгин А.И. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния процессов сложного нагружения на эффекты мартенситной неупругости методами структурно-аналитической мезомеханики.	59
Рашидов Т.Р., Юлдашев Т., Бекмирзаев Д.А., Нишонов Н.А. Проблемы математического моделирования задач сейсмодинамики подземных трубопроводов.	66
Абдусаттаров А., Юлдашев Т., Исомиддинов А.И. К расчету тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении с учетом повреждаемости.	75
Абиров Р.А. К методу разрывных смещений в пластичности	79
Алексеев А.А., Зубчанинов В.Г., Гультияев В.И. Экспериментальное исследование и численное моделирование процессов деформирования металлов при комбинированном нагружении	83
Алексеева Е.Г., Зубчанинов В.Г. К вопросу запаздывания векторных свойств материалов при сложном нагружении по криволинейным траекториям	88

Ан Е.В.

Вопросы устойчивости геометрически нелинейного трубопровода конечной длины, расположенного в разжиженном грунте. 93

Бекмирзаев Д.А., Юлдашев Т.

Решение задачи сейсродинамики подземных трубопроводов ортогональной конфигураций 98

Бочков А.В., Головешкин В.А., Пономарев А.В., Холин Н.Н.

Особенности поведения тел больших геометрических размеров в процессе горячего изостатического прессования 104

Васильев А.А.

Моделирование хиральных и ауксетических структур 109

Володин В.П., Надиров Э.Р.

Исследование процесса нагружения пологих цилиндрических оболочек. 113

Гаврюшин С.С., Скворцов А.А., Надеждин В.С., Лукьянов М.Н.,

Груздев А.С., Скворцов П.А.

Деформационное поведение и механические свойства пористой керамики на основе диатомита 118

Гараников В.В.

Экспериментальное исследование сложной разгрузки на траекториях вида логарифмической спирали и астроида 122

Гордон В.А., Пилипенко О.В.

Динамические догружения балки при внезапном повреждении упругого основания. 127

Гультияев В.И., Абрамов И.Л.

Повышение эксплуатационных характеристик зубчатых колес методом аморфизации контактирующих поверхностей. 133

Гультияев В.И., Абрамов И.Л., Галкина М.А.

Влияние неравноупругости на деформативность бетонного элемента при изгибе 136

Гультияев В.И., Лазарев О.Г., Ведерников В.Н.

Методика экспериментального исследования пластичности современных материалов на испытательном комплексе СН-ЭВМ 139

Двужилов А.С., Зубчанинов В.Г., Гультияев В.И.

Математическое моделирование процессов деформирования латуни для двузвенных траекторий 142

Дементьев В.Б.

Экспериментальное исследование деформации при винтовом обжатии с помощью объемной координатной сетки. 145

Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А.

Об экспериментальном исследовании эволюции поверхности текучести ряда конструкционных материалов 149

Короткая О.В., Гаврюшин С.С.

Методика расчета и проектирования сверхсложных конструкций с помощью метода конечных элементов и метода подмоделей на примере камеры сгорания ЖРД 152

Коротких Ю.Г., Волков И.А., Гусева М.А., Тарасов И.С. Моделирование термопластического деформирования и разрушения жаропрочных сплавов при комбинированном циклическом термомеханическом нагружении.	156
Кудинов А.Н. Математическая и численная модель процесса потери устойчивости неоднородных деформируемых систем	164
Кукса Л.В., Клименко В.И. Сравнительные исследования повышения сопротивляемости потере устойчивости сжатых стальных стержней на основе применения различных способов повышения физико-механических свойств.	168
Малинина Н.А., Малинин В.Г., Малинин В.В., Димов А.А. Развитие структурно-аналитической мезомеханики разрушения для стальных тел с концентраторами напряжений	172
Маркин А.А., Юдаева А.А. Анализ неединственности и устойчивости процесса сжатия упругопластической полосы на основе условий равновесности	177
Матченко Н.М. Кратность промежуточного главного напряжения и ее следствия	183
Мещихин И.А., Гаврюшин С.С. Мониторинг технических конструкций на основе редуцированных конечно-элементных моделей	188
Миронов Б.Г., Тихонов С.В. К вопросу о кручении неоднородных идеальнопластических стержней	196
Миронов В.А., Зюзин Б.Ф., Юдин С.А. Инварианты дистортности в оценке предельных состояний в геомеханике.	200
Митрофанова Т.В., Деревянных Е.А. О линиях разрыва напряжений при кручении цилиндрических стержней	206
Наумов И.А. Вариант исследования деформационной повреждаемости в металла.	212
Немировский Ю.В., Моховнев Д.В. Термоустойчивость композитных кольцевых пластин	215
Овчинникова Н.В., Муравлев А.В. Развитие экспериментально-теоретических методик построения диаграммы сжатия при конечных деформациях	221
Ромашина А.В., Трещёв А.А. Задача типа Кирша для ортотропного разносопротивляющегося материала.	225
Руми Д.Ф., Усаров М., Аюбов Г.Т. Эластомерные опоры как средство активной сейсмозащиты зданий.	231
Салямова К.Д., Руми Д.Ф. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния грунта при взрыве в штольне	236

Семеенков С.Д., Шелгунов В.В., Семеенков Д.С. Расчёт и конструирование элементов оборудования пищевых производств	240
Семенов А.С., Мельников Б.Е. Феноменологический критерий пластичности для монокристаллов кубической симметрии.	244
Субботин С.Л. Плоская деформация в краевых задачах теории упругопластических процессов	250
Тормахов Н.Н. О параметрах вида напряженного состояния.	254
Трещев А.А., Башкатов А.В. Определение НДС композитных железобетонных конструкций с учетом кинетики агрессивных эксплуатационных сред	260
Трещев А.А., Делягин М.Ю. Термомеханический связанный расчёт квадратной оболочки положительной гауссовой кривизны из нелинейно разносопротивляющегося графита	265
Христич Д.В. Термомеханические свойства квазикристаллов.	270
Черемных С.В., Охлопков Н.Л. Устойчивость круговых цилиндрических упругопластических оболочек при простых и сложных процессах комбинированного деформирования	274
Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Влияние геометрической и физической нелинейностей на напряжённо-деформированное состояние полимерного вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при конечных деформациях.	280
Шоркин В.С., Якушина С.И. Теоретическая оценка прочности слоистых структур.	286

**ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Материалы VIII Международного научного симпозиума,
посвященного 85-летию со дня рождения
заслуженного деятеля науки и техники РФ
профессора В.Г. Зубчанинова
(Тверь, 9–11 декабря 2015 года)**

Идается в авторской редакции
Технический редактор Ю.Ф. Воробьева

Подписано в печать 26.11.2015

Формат 60x84 1/8

Физ. печ. л. 37

Тираж 100 экз.

Усл. печ. л. 34,41

Заказ № 106

Бумага писчая

Уч.-изд. л. 32,19

С – 99

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22